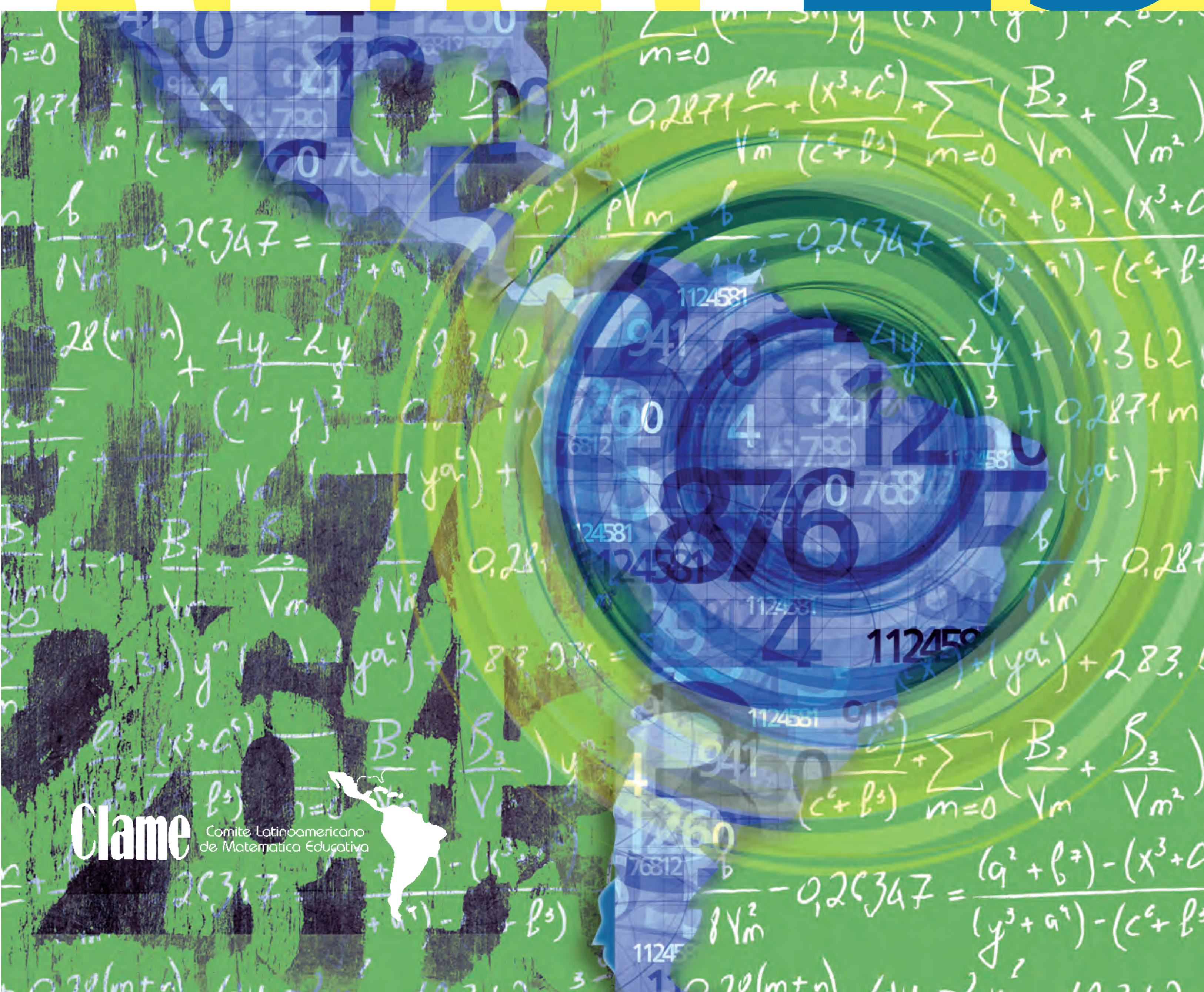
Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

COMITÉ LATINOAMERICANO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA
COLEGIO MEXICANO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA A.C.
• VOL. 25 » AÑO 2012

2012

ALME 25



ACTA LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

Volumen 25

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

ACTA LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA
VOLUMEN 25

Editora:

Rebeca Flores (México)

Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Editores Asociados:

Patricia Lestón (Argentina)
Mónica Micelli (Argentina)
Cariño Ruiz (México)
Elizabeth Mariscal (México)
Carlos Oropeza (México)
Luis Arturo Serna (México)

Diseño de portada y CD:

Gabriela Sánchez Téllez

Diseño de interiores:

Elizabeth Mariscal Vallarta

CICATA IPN, Legaria

Edición:

CMM 040505 IC7
Paseo de las Lomas 67. Parque Residencial Coacalco, CP 55720
Coacalco, Estado de México
México

www.cmmedu.com

ISBN: 978-607-95306-5-5

Flores, R. (Ed.). (2012). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 25. México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Comité Latinoamericano de Matemática Educativa
(CLAME)
www.clame.org.mx

Consejo Directivo

2008 - 2012

Cecilia Crespo Crespo
Presidente
presidencia@clame.org.mx

Gisela Montiel Espinosa
Tesorera
tesoreria@clame.org.mx

Olga L. Pérez González
Secretaria
secretaria@clame.org.mx

Ángela M. Martín
Vocal Caribe
vocal_caribe@clame.org.mx

Claudia M. Lara Galo
Vocal Centroamérica
vocal_centroamerica@clame.org.mx

Apolo Castañeda Alonso
Vocal Norteamérica
vocal_norteamerica@clame.org.mx

Hugo Parra Sandoval
Vocal Sudamérica
vocal_sudamerica@clame.org.mx

Consejo Consultivo

Egbert Agard
Ricardo Cantoral
Fernando Cajas
Guadalupe de Castillo
Evarista Matías
Rosa María Farfán
Teresita Peralta
Gustavo Martínez Sierra

Comisión de Admisión

Liliana Milevicich
Armando López Zamudio
Marcela Parraguez

Comisión de Promoción Académica

Edison de Faria
Yolanda Serres
Leonora Díaz Moreno
Mayra Castillo
Javier Lezama

Comité Internacional de Relme

Cecilia Crespo Crespo
Ángela Martín
Javier Lezama
Hugo Parra Sandoval
Olga L. Pérez González

Comité
Científico de Evaluación

Acosta Hernández, Juan A.	*(México)*
Álvarez Martínez, Juan A.	*(México)*
Aparicio, Eddie	*(México)*
Ardila, Analida	*(Panamá)*
Barbosa, Karly	*(Brasil)*
Bermúdez, Gustavo	*(Uruguay)*
Beyer, Walter	*(Venezuela)*
Blanco,Haydeé	*(Argentina)*
Borello, Mariangela	*(Italia)*
Buendía Abalos, Gabriela	*(México)*
Cabañas Sánchez, Guadalupe	*(México)*
Camacho, Alberto	*(México)*
Carlos Rodríguez, Eugenio	*(Cuba)*
Cen Che, Claudia	*(México)*
Ciancio, María Inés	*(Argentina)*
Colin Uribe, María Patricia	*(México)*
Córdoba Gómez, Francisco	*(Colombia)*
Crespo Crespo, Cecilia	*(Argentina)*
Criberio Díaz, Josefina	*(México)*
Cruz Hernández, Javier	*(México)*
De Faria, Edison	*(Costa Rica)*
De la Cruz Oliva, Allan	*(México)*
Delgado, César	*(Colombia)*
Engler, Adriana	*(Argentina)*
Escorza Morales Alfonso	*(México)*
Espinoza Ocotlán, Pedro M.	*(México)*
Ferrari Escolá, Marcela	*(México)*
Flores Estrada, Claudia	*(México)*
Gaita Ipaguirre, Rosa C.	*(Perú)*
García Zatti, Mónica	*(Argentina)*
Gómez Otero, Enrique J.	*(México)*
Gómez Reyes, Adriana	*(México)*
Grijalva, Agustín	*(México)*
Hernández F., Herminia T.	*(Cuba)*
Homilka, Liliana	*(Argentina)*
Ibarra Olmos, Silvia	*(México)*
Jarero Kumul, Martha	*(México)*
Lara Galo, Claudia	*(Guatemala)*
Lerman, Nora Inés	*(Argentina)*
Lestón, Patricia	*(Argentina)*
Lezama Andalón, Javier	*(México)*
López, Elpidio	*(Cuba)*
López Vera, Lilia	*(México)*
Martínez Vázquez Miriam	*(México)*
Messina, Vicente	*(Argentina)*
Micelli, Mónica	*(Argentina)*
Milevicich, Liliana	*(Argentina)*
Miranda Montoya, Eduardo	*(México)*
Montiel, Gisela	*(México)*
Müller, Daniela	*(Argentina)*
Navarro Sandoval, Catalina	*(México)*
Nesterova, Elena	*(México)*

Comité Científico de Evaluación

TABLA DE CONTENIDOS

CAPITULO 1: ANÁLISIS DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

CAPITULO 2: PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

CAPITULO 4: EL PENSAMIENTO DEL PROFESOR, SUS PRÁCTICAS Y ELEMENTOS PARA SU FORMACIÓN INICIAL

CAPITULO 5: USO DE RECURSOS TECNOLÓGICOS EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

PRESENTACIÓN

El Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (Clame), cumple sus primeros veinticinco años de existencia en los que ha alcanzado unos de sus propósitos que se planteara desde su creación, consistente en brindar a docentes e investigadores del área de la matemática educativa un ámbito para el intercambio de ideas y propuestas de docencia e investigación orientadas entre colegas con la finalidad de obtener beneficios para los sistemas escolares de América Latina.

El Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (Alme) es una de las publicaciones oficiales periódicas del Clame, junto con la Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (Relime). Es, en la actualidad, uno de los ámbitos de intercambio de experiencias docentes y productos de investigaciones en Matemática Educativa que ha cobrado cada vez mayor importancia y visibilidad no sólo en la comunidad latinoamericana, sino a nivel mundial. Alme es producto de las exposiciones que se realizan año a año en las Reuniones Latinoamericanas de Matemática Educativa (Relme), en las que se reúnen y participan activamente profesores e investigadores de los distintos países latinoamericanos, con el objetivo de lograr una mayor profesionalización y fortalecimiento de la comunidad, en la que se conjuga el respeto a la pluralidad de formaciones, tradiciones y acercamientos educativos. Alme es, de esta manera, la cristalización de uno de los propósitos específicos del Clame defendido desde sus inicios, consistente en *promover la creación, organización, acumulación y difusión del conocimiento referidos a la matemática educativa*.

Cada vez más referenciada en otras publicaciones producto de investigaciones, Alme tiene como características esenciales su carácter de resultado de las ideas de una comunidad, de periodicidad anual y con la existencia de un proceso de evaluación de los artículos que la integran provenientes de trabajos que fueron efectivamente expuestos en Relme previamente y enriquecidos de esta exposición y discusión entre pares. Con posterioridad a este evento, los artículos son evaluados de forma rigurosa de por lo menos dos pares de especialistas en dicho campo y provenientes de distintos países. Los artículos publicados son los que son aceptados a través de esta evaluación de manera directa o después de que sus autores realicen las modificaciones propuestas por los árbitros. La edición de esta publicación está a cargo de un Comité Editor formado por varios colegas de distintos países de nuestra comunidad, que da continuidad a la línea de publicación definida de acuerdo con los lineamientos propuestos.

Por sus características recién mencionadas, a través de esta publicación puede conocerse el estado del arte en materia de docencia e investigación en el campo de la matemática educativa en Latinoamérica. A través del análisis de los sucesivos volúmenes, es posible dar cuenta de la manera en la que evoluciona, crece y se afianza muestra comunidad. En la página web de Clame, los distintos volúmenes de nuestra publicación son puestos a disposición de colegas, constituyendo una fuente de consulta y referencia en la comunidad de matemática educativa que cada vez son más consultados.

En este caso, las exposiciones tuvieron lugar durante *Relme 25*, llevada a cabo en la ciudad de Camagüey (Cuba) durante 2011.

Los trabajos han sido organizados según cinco categorías:

- Categoría 1: Análisis del Discurso Matemático Escolar
- Categoría 2: Propuestas para la enseñanza de las matemáticas
- Categoría 3: Aspectos socioepistemológicos en el análisis y el rediseño del discurso matemático escolar
- Categoría 4: El pensamiento del profesor, sus prácticas y elementos para su formación profesional
- Categoría 5: Uso de recursos tecnológicos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas

Cada una de estas categorías se inicia con breve introducción realizada por colegas de nuestra comunidad especialmente invitados a realizarlas. En ellas se reflexiona sobre el tema y se comentan de manera sucinta el contenido de los artículos que la componen.

Agradecemos especialmente a los miembros del Comité Editor y Comisión Académica y de Evaluación de Alme 25 que colaboraron activamente y con entusiasmo y profesionalismo, así como a todos los profesores e investigadores que enviaron sus artículos y tuvieron en cuenta las observaciones y propuestas de los árbitros para su mejora y enriquecimiento.

Cecilia Crespo Crespo

Presidenta del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Junio 2012

CATEGORÍA 1

ANÁLISIS DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

Introducción al Capítulo de Análisis del Discurso Matemático Escolar

Adriana Engler

Facultad de Ciencias Agrarias. Universidad Nacional del Litoral. (Argentina)
aengler@fca.unl.edu.ar

La evolución de los conocimientos de la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática y de las metodologías para llevar adelante el trabajo en el aula demandan a los docentes - investigadores la adaptación de recursos y tecnologías que se adecuen a las exigencias actuales en la formación de profesionales competentes y eficientes.

Teniendo en cuenta esto y reconociendo que es cierto que la investigación es el motor que genera el avance y desarrollo de toda disciplina, también se debe considerar que la investigación adquiere sentido cuando aparece relacionada con situaciones que, en ese momento, enfrenta el profesor en el aula. Actualmente resulta imprescindible tener en claro el valor de la investigación sobre las propias prácticas educativas para poder alcanzar las metas propuestas y además superarlas. Esto claramente genera la necesidad de que, tanto los educadores como las instituciones educativas trabajen en pos de integrarse cooperativamente en la producción de saberes en relación a la enseñanza y al aprendizaje de diferentes disciplinas reconociendo que los estudiantes no solamente necesitan conocimientos sólidos y actualizados sino que también precisan de un saber que les permita actuar como ciudadanos a la hora de tomar decisiones personales y colectivas con respecto a los problemas que involucran a la ciencia y a la tecnología.

En este sentido, sabemos que, en nuestros días y en todo el mundo, crecen las investigaciones que se realizan en el marco de la Matemática Educativa con la intención de abordar la problemática y dificultades que surgen en relación a los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática en los diferentes niveles educativos.

Es bien conocido que la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME) constituye un escenario apropiado para la generación e intercambio de ideas, problemáticas y posibles acciones para superar dificultades, entre otras cuestiones.

Como resultado de ella, esta nueva edición del Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (ALME) nos permite compartir vivencias, aportes y reflexiones buscando detectar, diagnosticar y proponer alternativas para superar los distintos problemas educativos matemáticos que surgen en nuestras aulas de manera cotidiana.

Al recorrer los diferentes volúmenes del ALME es posible reconocer cómo ha ido evolucionando y consolidándose el estudio del discurso matemático escolar a través de investigaciones que aportan hacia el crecimiento de una disciplina que está en constante movimiento y que se nutre en una comunidad que comparte, discute y difunde resultados.

Pero, ¿que entendemos por discurso matemático escolar? Cordero y Flores (2007) aseguran que lo constituyen las manifestaciones del conocimiento normado por creencias de los actores del sistema didáctico de lo que es la matemática, su enseñanza y su aprendizaje.

El discurso permite establecer lineamientos para el desarrollo de la clase y dejar en claro prioridades sobre lo que debe estudiarse, las actividades a desarrollar, la forma de evaluar, las características y tipos de problemas, planteos y ejercicios a trabajar.

Por su parte, Montiel (2006) afirma:

> El discurso escolar es el conjunto de interacciones entre profesor y estudiantes, dirigidas por la exposición coherente de los saberes escolares. Esta coherencia se establece respecto de exposiciones previas y futuras, pero también respecto de los conceptos matemáticos asociados. Por su parte, el *discurso matemático escolar* es el conjunto de restricciones, implícitas o explícitas, que *norman* la actividad áulica y al discurso escolar mismo. Una de sus características más importantes es la de alcanzar hegemonía en el contexto escolar. (p. 820)

Cada una de estas definiciones aporta para caracterizarlo y, considerando que es necesario además indagar permanentemente sobre los procesos con los que se construyen conceptos, se legitiman y se organizan en teorías se enfatiza la necesidad de realizar, de manera permanente, el análisis del discurso y su rol en la construcción de conocimiento. Resulta muy interesante pensar en la idea de cambiar el discurso rígido e inamovible que, en general, prevalece en la escuela por otro que esté en constante cambio y evolución.

Como aporte a todo lo expresado es que, en este capítulo, se presentan numerosos trabajos que amplían el conocimiento y análisis del discurso matemático escolar en los diferentes niveles educativos. Los distintos artículos presentados están encuadrados en diferentes marcos teóricos y metodologías, describen la realidad del aula y la problemática que la afecta y, atendiendo a todo esto, sugieren ideas que pueden servir para modificar la práctica diaria en pos de la calidad educativa.

Más allá de las numerosas investigaciones y estudios realizados es importante reconocer que, como educadores comprometidos, debemos seguir trabajando en busca de entender cómo el discurso evoluciona e influye en nuestros logros educativos.

Por todo esto, sugerimos al lector disfrutar con detenimiento de la lectura de cada uno de los escritos que se presentan a continuación tratando de ver de qué manera puede, en su práctica cotidiana acortar la brecha entre la investigación y la innovación concreta de manera tal de poder transformar la realidad que se le presenta día a día. Podremos además convencernos de la importancia de la dupla docencia-investigación y así poder iniciar y/o continuar investigaciones con el objetivo de llevar nuestros resultados al aula para además compartir con colegas nuestros logros y reflexiones. Así, la comunidad latinoamericana comprometida con el proceso de transformación educativa, en la disciplina matemática, irá creciendo y logrará consolidarse como un movimiento reconocido en el mundo.

Por último invitamos a todos los miembros de nuestra comunidad a seguir enriqueciendo este debate, a realizar nuevas investigaciones y a compartir resultados con la intención de que los logros lleguen a las aulas de las diferentes instituciones educativas de distintos niveles a fin de modificar la realidad existente y, de esa manera dar otro significado a la matemática en nuestra región.

Referencias bibliográficas

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio sociepistemológico en el nivel básico a través de los libros de textos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 10(1)*, 7-38.

Montiel, G. (2006) Construcción social de la función trigonométrica. En G. Martínez Sierra (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19,* 818-823. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

LA REGLA DE LOS CUATRO PASOS. SU TRATAMIENTO EN LOS LIBROS DE TEXTO DE CÁLCULO DIFERENCIAL

Adriana Engler, Alberto Camacho
Facultad de Ciencias Agrarias, Universidad Nacional del Litoral — Argentina
Instituto Tecnológico de Chihuahua II — México
CICATA-IPN
aengler@fca.unl.edu.ar, camachoalberto@hotmail.com

Resumen. En algunos libros de texto habitualmente utilizados para el desarrollo de los programas de Cálculo Diferencial, se enuncia una técnica para calcular la derivada, conocida como la regla de los cuatro pasos. En este trabajo presentamos y describimos el tratamiento de la regla tal como aparece en diferentes textos que se utilizaron o utilizan en carreras de ingeniería en institutos educativos argentinos de nivel universitario y que se encuentran a disposición en las bibliotecas de las diferentes universidades..

Palabras clave: four-steps rule

Abstract. In some commonly used textbooks for the development of differential calculus programs is set out a technique to calculate the derivative known as four-steps rule. We present and describe the treatment of this technique in different books where the rule is used or was used in texts of engineering programs used in different universities, that are available in libraries of different educative institutes in Argentina

Key words: regla de los cuatro pasos

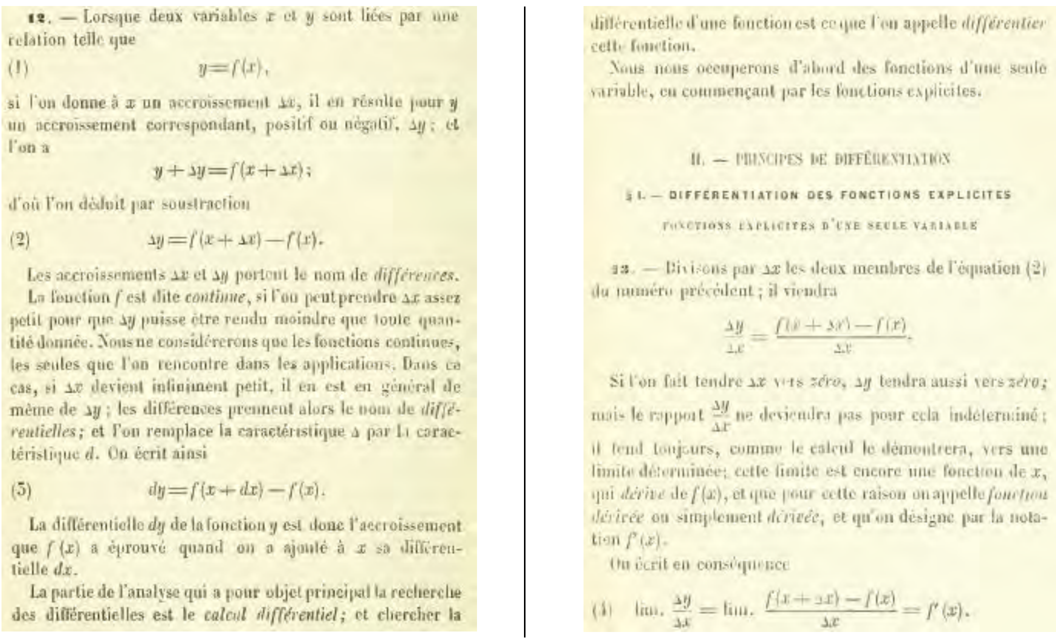
Introducción

En algunos libros de texto habitualmente utilizados para el desarrollo de los programas de cálculo diferencial, en carreras de ingeniería se enuncia una técnica para calcular la derivada conocida como La Regla de los Cuatro Pasos (RCP). En el contexto de la clase de cálculo diferencial los profesores intentamos que los estudiantes operen esta técnica con funciones algebraicas elementales de manera que a través de ella puedan determinar la derivada correspondiente. El proceso algorítmico que subyace a la regla sugiere que los estudiantes asuman una posición de *hacer matemática* en un contexto formal que los lleve a convencerse de la definición a la que conduce, la propia regla, así como, a su vez, convencerse de que las fórmulas de derivación se deducen de esta última. No obstante, el proceso así descrito es del todo monótono y en la práctica se convierte solamente en una rutina que no aloja en la cognición de los estudiantes las coyunturas finas que se desean de la definición de derivada. Por sí misma, la intención de que los estudiantes ejerciten esa técnica es valiosa, siempre y cuando la finalidad se cumpliera, es decir, cuando en la práctica ejercieran o utilizaran con sentido la expresión con la que se define la derivada y no solamente el recurso que la sintetiza como $f'(x)$. Por otro lado, cuando los estudiantes calculan la función derivada, utilizando las reglas de derivación, el proceso de la técnica de los cuatro pasos se deja de lado y la interpretación deseada de la regla también. Este es un primer problema que se vive en la enseñanza de la derivada desde esa perspectiva. La parte algorítmica del proceso se hace cada vez más compleja y necesita así de más trabajo conforme la función algebraica también lo sea. No obstante, la mecanización del álgebra cobra en estos problemas cierta importancia para que los alumnos puedan calcular los límites correspondientes. Consecuentemente, si efectivamente la RCP es importante, a partir de que puede ayudar al profesor en el salón de clase para que sus estudiantes *construyan* la derivada $f'(x)$ de la función $f(x)$ incrementando x como $x+\Delta x$, cuya finalidad tendría que ver con un mejor entendimiento de ese concepto. Se hace necesario *dinamizar* dicha regla para hacerla más funcional hacia ese objetivo.

Este trabajo surge en el marco del proyecto de tesis doctoral *Construcción del concepto de derivada a través de dinamizar la regla de los cuatro pasos***.** *Una aproximación socioepistemológica* ante la necesidad de conocer el surgimiento de la regla en los libros de textos y su tratamiento en los libros de uso cotidiano en el aula universitaria.

La regla de los cuatro pasos

La RCP constituye la estructura matemática usada como una *técnica* en el salón de clase para la determinación de la derivada $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ de una función $f(x)$. Fue desarrollada a lo largo de los siglos XVIII y XIX en diversas ramas de la ingeniería, como la topografía, astronomía y otras, apareciendo en los textos de cálculo diferencial desde finales del siglo XIX y principios del siglo XX, como se puede constatar, por ejemplo, en Sonnet (1869) y en (Granville, 1911).



12. — Lorsque deux variables x et y sont liées par une relation telle que

$$(1) \qquad y = f(x),$$

si l'on donne à x un accroissement Δx, il en résulte pour y un accroissement correspondant, positif ou négatif, Δy ; et l'on a

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x);$$

d'où l'on déduit par soustraction

$$(2) \qquad \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Les accroissements Δx et Δy portent le nom de *différences*.

La fonction f est dite *continue*, si l'on peut prendre Δx assez petit pour que Δy puisse être rendu moindre que toute quantité donnée. Nous ne considérerons que les fonctions continues, les seules que l'on rencontre dans les applications. Dans ce cas, si Δx devient infiniment petit, il en est en général de même de Δy ; les différences prennent alors le nom de *différentielles*; et l'on remplace la caractéristique Δ par la caractéristique d. On écrit ainsi

$$(3) \qquad dy = f(x + dx) - f(x).$$

La différentielle dy de la fonction y est donc l'accroissement que $f(x)$ a éprouvé quand on a ajouté à x sa différentielle dx.

La partie de l'analyse qui a pour objet principal la recherche des différentielles est le *calcul différentiel*; et chercher la différentielle d'une fonction est ce que l'on appelle *différentier* cette fonction.

Nous nous occuperons d'abord des fonctions d'une seule variable, en commençant par les fonctions explicites.

II. — PRINCIPES DE DIFFÉRENTIATION

§ I. — DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS EXPLICITES

FONCTIONS EXPLICITES D'UNE SEULE VARIABLE

13. — Divisons par Δx les deux membres de l'équation (2) du numéro précédent ; il viendra

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Si l'on fait tendre Δx vers *zéro*, Δy tendra aussi vers *zéro*; mais le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ne deviendra pas pour cela indéterminé ; il tend toujours, comme le calcul le démontrera, vers une limite déterminée; cette limite est encore une fonction de x, qui *dérive* de $f(x)$, et que pour cette raison on appelle *fonction dérivée* ou simplement *dérivée*, et qu'on désigne par la notation $f'(x)$.

On écrit en conséquence

$$(4) \qquad \text{lim.}\, \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{lim.}\, \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Figura 1. Páginas 4 y 5 del texto de cálculo diferencial del autor francés Sonnet en el que se muestra la utilidad de la RCP en la definición de la derivada de una función.

27. Comparison of increments. Consider the function

(A) $$y = x^2.$$

Assuming a fixed initial value for x, let x take on an increment Δx. Then y will take on a corresponding increment Δy, and we have

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2,$$

or, $$y + \Delta y = x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2.$$

Subtracting (A), $$y \quad = x^2$$

(B) $$\Delta y = \quad 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$$

we get the increment Δy in terms of x and Δx.

To find the ratio of the increments, divide (B) by Δx, giving

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Figura 2. Se observa un fragmento de la página 26 del texto de Granville donde se muestran los pasos de cómo se utiliza la regla para determinar la derivada por incrementos de la función $y = x^2$.

The above definition may be given in a more compact form symbolically as follows: Given the function

(A) $$y = f(x),$$

and consider x to have a fixed value.

Let x take on an increment Δx; then the function y takes on an increment Δy, the new value of the function being

(B) $$y + \Delta y = f(x + \Delta x).$$

To find the increment of the function, subtract (A) from (B), giving

(C) $$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Dividing by the increment of the variable, Δx, we get

(D) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

The limit of this ratio when Δx approaches the limit zero is, from our definition, the *derivative* and is *denoted by the symbol* $\frac{dy}{dx}$. Therefore

(E) $$\frac{dy}{dx} = \underset{\Delta x = 0}{\text{limit}} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

defines the *derivative of y [or f(x)] with respect to x.*

Figura 3. En la página 27 se observan los cuatro pasos para definir la derivada en el mismo libro.

El mismo Granville (1980, p. 30) describe los cuatro pasos de la siguiente manera:

1. *Se sustituye en la función x por* $x + \Delta x$, *y se calcula el nuevo valor de la función* $y + \Delta y$.

2. *Se resta el valor dado de la función del nuevo valor y se obtiene* Δy (*incremento de la función*).

3. *Se divide* Δy (*incremento de la función) por* Δx (*incremento de la variable independiente*).

4. *Se calcula el límite de este cociente cuando* Δx *tiende a cero. El límite así hallado es la derivada buscada.*

Dado que uno de los ejes centrales del proyecto doctoral es la regla, necesitamos conocer cómo aparece en los libros de texto. Es por ello que enseguida iniciamos con la presentación y descripción de su tratamiento en diferentes textos que en los últimos años se utilizaron o utilizan como textos en carreras de ingeniería en universidades argentinas. Distinguimos dos grupos según la manera en la que se presenta.

- Textos en los que se menciona explícitamente la RCP.

Edwards y Penney (1994) trabajan en el Capítulo 1. *Funciones y gráficas,* e inmediatamente, en el Capítulo 2. *Preludio al cálculo,* definen la derivada relacionándola directamente con la pendiente de la recta tangente. La idea de límite la introducen hablando de “posición limite” o bien utilizando la expresión “tiende a”. Ya definida la derivada como el límite del cociente de diferencias desarrollan de manera intuitiva e informal (según lo manifestado por los propios autores) el concepto de límite y posteriormente el de continuidad. Recién en el 3. *La derivada,* realizan un estudio más extenso del tema, pero inmediatamente después de formalizar la definición enuncian la regla para calcular una nueva función f', es decir, la derivada de la función original f.

Lial y Hungerford (2000) manifiestan en el prefacio:

> La séptima edición de *Matemáticas para administración y economía* está diseñada para proporcionar los temas matemáticos que necesitan los estudiantes en los campos de negocios, administración, ciencias sociales y ciencias naturales. Hemos tratado de presentar matemáticas sólidas con un estilo informal que insiste en motivación significativa, explicaciones cuidadosas y numerosos ejemplos, centrándonos continuamente en la resolución de problemas del mundo real.

Los autores desarrollan el tema en el Capítulo 9. *Cálculo Diferencial,* y previamente exhiben: fundamentos del álgebra, gráficas, ecuaciones y desigualdades, funciones y gráficas, funciones polinomiales y racionales y funciones exponenciales y logarítmicas. Parten de que la idea clave para el desarrollo del cálculo es el concepto de límite. Buscan examinar el comportamiento de la función cerca de $x = a$ en lugar de ver qué hace en $x = a$. Definen derivada a través de la razón de cambio promedio y razón de cambio instantánea así como sus relaciones directas con las nociones de velocidad y velocidad instantánea. Después de considerar pendiente de recta secante y pendiente de recta tangente formalizan la definición de derivada. Destacan que la función derivada puede interpretarse de varias maneras y enuncian dos de ellas: como la razón de cambio instantánea de $y = f(x)$ con respecto a x y como la pendiente de la grafica de f en cualquier punto". En las páginas 417 y 418 enuncian la regla práctica para obtener la derivada y muestran un ejemplo.

Tan (2002) llega al tema en el Capítulo 8. *Derivada*, después de trabajar fundamentos de algebra, funciones y sus graficas, funciones lineales y cuadráticas y funciones exponenciales y logarítmicas. Antes de iniciar el tema enuncia:

> En este capítulo se inicia el estudio del cálculo diferencial. Desde el punto de vista histórico, el cálculo diferencial se desarrollo en respuesta al problema de hallar la recta tangente a una curva arbitraria. Pero muy pronto fue claro que al resolver este problema, los matemáticos dispondrían de un método para resolver muchos problemas prácticos relacionados con la razón de cambio de una cantidad con respecto a otra. La herramienta básica utilizada en el cálculo diferencial es la

derivada de una función. A su vez, el concepto de *derivada* se basa en una noción más fundamental, la del *límite* de una función. (p.491).

Inicia con el tratamiento de la teoría de límites, partiendo de la necesidad de conocer la velocidad que alcanza un tren en un momento determinado. Luego exhibe de manera formal el concepto y establece condiciones para que una función resulte continua. Para introducir el tema derivada retoma el problema del tren, introduce la idea de pendiente, razón de cambio promedio y razón de cambio instantánea. Inmediatamente después de formalizada la definición y su notación, en la página 543 enuncia la regla de cálculo correspondiente. A continuación enuncia numerosos ejemplos, con diferentes grados de complejidad que muestran paso a paso cómo calcular la derivada de una función.

- Textos en los que no se menciona explícitamente a la técnica con el nombre de *regla de los cuatro pasos*, no obstante el proceso algorítmico que plantean para la determinación de la derivada es el mismo que en aquellos autores que así lo consideran.

Piskunov (1970) es un libro considerado "tradicional" para la enseñanza del cálculo y fue utilizado en Argentina durante mucho tiempo como bibliografía básica para el dictado del cálculo diferencial e integral en las diferentes carreras de ingeniería. El autor llega al concepto de derivada en el Capítulo III. *Derivada y diferencial,* después de recorrer el Capítulo I. *Número. Variable. Función* y el Capítulo II. *Límite y continuidad de las funciones.* Sigue un enfoque que distingue claramente definiciones, teoremas y ejemplos. Al comenzar el capítulo trabaja la idea de velocidad del movimiento e inmediatamente llega a la definición de derivada describiendo la técnica utilizada para su cálculo.

Después de revisar el sistema de los números reales, estudiar funciones y límites, Purcell y Varberg (1987) en el Capítulo 3. *La derivada,* abordan el concepto de derivada como solución de dos problemas, el de recta tangente y el de velocidad instantánea. Después de encontrar las formulas para calcular las diferentes reglas prácticas de derivación y en un apartado especial correspondiente a la notación de Leibniz se desglosa de definición de derivada hablando y mostrando los diferentes incrementos y el cociente entre ellos.

Goldstein, Lay y Schneider (1990) en el Capitulo 0. *Funciones* estudian especialmente las funciones y sus gráficas, algunas funciones importantes, el álgebra de funciones, raíces de funciones y finalmente exponentes y funciones de potencia. En el Capítulo 1. *La derivada,* se sigue el siguiente orden: La pendiente de una recta, la pendiente de una curva en un punto y la derivada. En este punto la definición de derivada se da como "la fórmula que da la pendiente de la curva $y = f(x)$ en cualquier punto" y se enuncian algunas reglas de derivación. (pp. 59 – 68). No trabajan hasta ese momento la teoría de límite.

Figura 4. En la página 65 se encuentra un algoritmo que permite calcular $f'(x)$. En su enunciado completo se incluyen los cuatro pasos de la regla.

Para calcular $f'(x)$:

1. Primero calcule $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ para $h \neq 0$.
2. En seguida haga que h tienda a cero.
3. La cantidad $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ tenderá a $f'(x)$.

Introducen el concepto de límite en el apartado 1.4 *Límites y derivada*.

> El concepto de límite es una de las ideas fundamentales del cálculo. De hecho, cualquier desarrollo teórico del cálculo se apoya en una amplia utilización de la teoría de los límites. (…) Como se verá, el concepto de límite permitirá definir la derivada independiente del razonamiento geométrico empleado.
>
> En realidad, ya se ha considerado el límite en nuestra discusión de la derivada, aunque no se uso el término "límite". (p. 68)

Ayra y Larner (1992) realizan el tratamiento de la derivada después de estudiar los siguientes temas: repaso del algebra, ecuaciones de una variable, desigualdades, líneas rectas, funciones y graficas y logaritmos y exponenciales. Para llegar a la definición, trabajan la idea de incrementos y tasas y posteriormente límites (de una manera intuitiva y simple) planteando la necesidad de poder, a partir de conocer la velocidad promedio de un móvil, trabajar la noción de velocidad en un instante o instantánea. De esta manera, los autores llaman derivada de una función a la tasa de cambio instantánea de una función y establecen una definición mas formal (según lo manifiestan) utilizando la idea de límite. Enuncian las diferentes notaciones y en la página 498 resaltan la técnica para el cálculo de la misma.

Wenzelburger (1993) presenta su escrito bajo la consigna de trabajar y mostrar las nuevas tendencias en la Didáctica del Cálculo Diferencial. Su obra está estructurada en dos Secciones: Lectura para los maestros y Actividades para los alumnos. En la sección *alumnos* enuncia una serie de actividades para llegar al concepto de derivada sin conocer la teoría de límites. A modo de introducción en el punto 1.1 *Consideraciones generales,* hace hincapié en "los cambios" y la necesidad de estudiarlos. La autora manifiesta:

> Vivimos en mundo caracterizado por cambios continuos. Es importante desarrollar métodos matemáticos para cuantificar, describir y pronosticar estos cambios. Justamente esto es el propósito del cálculo diferencial, que *es la matemática de los CAMBIOS*.

> Todo el cálculo diferencial se puede reducir a su concepto fundamental, la *razón de cambio*. Determinar razones de cambio de procesos continuos es muchas veces más importante que estudiar estos procesos. (p. 33).

En todas las actividades trabaja con el concepto de velocidad para estudiar la razón de cambio.

Figura 5. En la página 49 encontramos, a modo de "técnica" la regla para obtener la derivada.

Usaremos un método de tres pasos que explicaremos mediante el ejemplo de la conocida función $h(t) = 16\,t^2$ (proyecto 4.1).

Paso 1: Encontrar una fórmula para $\frac{\Delta h}{\Delta t}$, o sea la velocidad (razón de cambio promedio).

Paso 2: Simplificar algebraicamente la fórmula encontrada.

Paso 3: Determinar lo que pasa cuando Δt se acerca a cero.

Thomas y Finney (1998) introducen el tema luego de establecer los números reales, funciones, límite y continuidad de la siguiente manera:

> En el capítulo 1 definimos la pendiente de una curva en un punto como el límite de las pendientes de secantes. Este límite, llamado derivada, mide la razón de cambio de una función y es una de las nociones más importantes del cálculo. …. Encontrar derivadas evaluando límites puede ser laborioso y difícil. En este capítulo se desarrollan técnicas para facilitar el cálculo de derivadas. (p. 109).

La definición es inmediata relacionándola con la pendiente de una curva. En la página 110 describen los pasos para calcularla según la definición y posteriormente detallan paso a paso la resolución de dos ejemplos.

Bittinger (2002) utiliza en el tratamiento de los diferentes tópicos un enfoque intuitivo. Presenta la definición de derivada en el contexto de un análisis de razón de cambio promedio dado que considera que esta forma de presentación es más accesible y realista que la idea estrictamente geométrica de la pendiente. Al definir la derivada enuncia claramente la existencia de tres pasos para calcularla. No habla de la RCP pero se establece concretamente una técnica para el cálculo de la derivada.

De la misma manera Harshbarger y Reynolds (2004), Sadosky y Guber (2004), Simmons (2005), Steiner (2005) y Camacho (2009) utilizan la regla para la definición de la derivada sin mencionarla explícitamente.

Hay tres pasos para calcular una derivada.

1. Escribir el cociente de diferencia $[f(x+h)-f(x)]/h$.
2. Simplificar el cociente de diferencia.
3. Hallar el límite cuando h tiende a 0.

Ejemplo 1 Para $f(x) = 3x - 4$, hallar $f'(x)$.

Solución Se aplican los tres pasos antes señalados, así:

1. $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{[3(x+h)-4]-(3x-4)}{h}$;
2. $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{3x+3h-4-3x+4}{h}$

$= \dfrac{3h}{h} = 3, \quad h \neq 0$;

3. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 3 = 3$,

puesto que 3 es una constante.

Por tanto, si $f(x) = 3x - 4$, entonces $f'(x) = 3$.

Figura 6. En la página 128 se observa lo enunciado y un ejemplo

Conclusiones

En la mayoría de los libros analizados, los diferentes tipos de funciones que se plantean aparecen en un orden como el siguiente:

1. Polinomios de la forma: $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + ... + r$, para *n* entero positivo y los coeficientes números reales.
2. Expresiones $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + ... + r$, para *n* entero negativo, que pueden ser combinadas con el caso anterior.
3. Expresiones que contienen radicales cuyos exponentes son valores racionales de la forma $\dfrac{p}{q}$ positivos o negativos.

En general se deja de lado como ejercicio para los estudiantes la determinación de la derivada haciendo uso de la regla de funciones trascendentes. La técnica es usada de esa manera solamente por los autores de los libros. La parte algorítmica del proceso se hace cada vez más complejo conforme la función algebraica también lo sea, precisando así de más trabajo. Los procesos así desarrollados sirven en consecuencia para demostrar las reglas usuales de derivación. No se aprovecha la regla para trabajar las ideas variacionales que aparecen asociadas con ella.

Referencias bibliográficas

Ayra, J. y Larner, R. (1992). *Matemáticas aplicadas a la Administración, Economía, Ciencias Biológicas y Sociales*. Tercera Edición. Méjico: Prentice Hall Hispanoamericana.

Bittinger, M. (2002). *Cálculo. Para Ciencias Económicas-Administrativas*. Séptima Edición. Colombia: Addison Wesley.

Camacho, A. (2009). *Cálculo diferencial.* España: Ediciones Díaz de Santos.

Edwards, C. y Penney, D. (1994). *Cálculo con Geometría Analítica.* México: Pearson. Prentice Hall.

Goldstein, L.; Lay, D. y Schneider, D. (1990). *Cálculo y sus Aplicaciones.* Prentice Hall Hispanoamericana.

Granville, W. A. (1980). *Cálculo Diferencial* e *Integral*. Primera reimpresión. México: Grupo Noriega Editores, LIMUSA.

Granville, W. (1911). *Elements of the Differential and Integral Calculus.* (Revised Edition) Boston. USA: Ginn and Company

Harshbarger, R. y Reynolds, J. (2004). *Matemáticas aplicadas a la administración, economía y ciencias sociales.* Séptima Edición. México: Mc Graw Hill.

Lial, M. y Hungerford, T. (2000). *Matemáticas para administración y economía. En las ciencias sociales, naturales y de administración.* Séptima Edición. México: Pearson Educación.

Piskunov, N. (1970). *Cálculo Diferencial* e *Integral.* Barcelona: Montaner y Simon, S. A.

Purcell, E. y Varberg, D. (1987). *Cálculo con Geometría Analítica.* Cuarta Edición. México.: Prentice Hall.

Sadosky, M. y Guber, R. (2004). *Elementos de Cálculo Diferencial* e *Integral*. 22 Edición. Buenos Aires: Librería y Editorial Alsina.

Simmons, G. (2005). *Cálculo y Geometría Analítica.* 2da edición. México: Mc. Graw Hill.

Sonnet, H. (1869). *Premiers Éléments du Calcul Infinitésimal a l´usage des Jeunes gens qui ce Destinnent a la Carrière d´Ingénieur*. Hachette: Paris.

Steiner, E. (2005). *Matemáticas para las ciencias aplicadas.* Barcelona: Editorial Reverté.

Tan, S. (2002). *Matemáticas para administración y economía.* Segunda Edición. México: Thomson Learning.

Thomas, G. y Finney, R. (1998). *Cálculo. Una variable.* 9ª Edición. Méjico: Pearson Educación-Addison Wesley Longman.

Wenzelburger, E. (1993). *Didáctica Cálculo diferencial.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

ESTUDIO DIDÁCTICO DEL CONCEPTO ECUACIÓN EN LA EDUCACIÓN BÁSICA

Concepción Hernández Ponce, Flor Monserrat Rodríguez Vásquez, Jesús Romero Valencia
Universidad Autónoma de Guerrero México
hdez_ponce@hotmail.com, flor_r@cimateuagro.org, jromero@cimateuagro.org

Resumen. En este escrito se reportan los avances de una investigación que gira en torno al concepto Ecuación. La investigación consiste en realizar un estudio didáctico del concepto ecuación en la Educación Básica, en los niveles Primaria y Secundaria del Sistema Educativo Mexicano. El marco conceptual mediante el cual se sustenta la investigación es el análisis didáctico y el marco metodológico es el análisis de contenido de los libros de texto.

Palabras clave: ecuación, educación básica, análisis didáctico, análisis de contenido

Abstract. In this paper we report some advances about an ongoing research on the concept of equation. The research involves a didactic study on the equation concept in basic education, elementary and high school levels of the Mexican Educational System. The conceptual framework which supports this research is the didactic analysis and the methodological framework is the analysis of text books' content.

Key words: equation, basic education, didactic analysis, content analysis

Introducción

Investigar en el campo del Álgebra es importante debido a que es una rama de la matemática que se aborda en la mayor parte de la formación académica, además de que diversas investigaciones han reportado que existen dificultades por parte de los estudiantes al abordar los temas. Específicamente en el concepto ecuación se han realizado un gran número de estudios que desde nuestro punto de vista podemos clasificar principalmente en dos enfoques, el didáctico y el cognitivo (Ver diagrama 1).

- Investigaciones sobre el concepto ecuación: el caso de las ecuaciones lineales y cuadráticas y cúbicas
  - Enfoque Didáctico
    - Diseños de propuestas metodológicas
      - Filloy (1999)
      - Rivero (2000)
      - Meavilla (s.f.)
    - Análisis didáctico
      - Maffey (2006)
  - Enfoque Cognitivo
    - Concepciones
    - Dificultades
      - Engler et al. (2004)
      - Rabino et al. (2004)
      - Pochulu (2006)

Diagrama 1. Investigaciones en torno al concepto ecuación algebraica.

En el enfoque didáctico, las investigaciones de Rivero (2000), Filloy (1999) y Rojano (2010) se han centrado en el diseño de propuestas para el aula y favorecer el aprendizaje del concepto, algunas de estas propuestas contemplan el uso de distintos modelos (concreto, diagramático y virtual de la balanza) que sirven de apoyo para la introducción del concepto ecuación; mientras que en otras contemplan aspectos de la historia del concepto que le aportan significado (Meavilla, s.f.).

En el mismo enfoque insertamos la investigación de Maffey (2006) en la cual se propuso conocer y sistematizar la manera en que se presenta a estudiantes de Nivel Medio Superior (NMS) el tema de ecuación lineal; el autor analizó si se producía en los estudiantes un aprendizaje significativo del tema. Para ello tuvo que valorar el estado en el que se encontraba la enseñanza de las ecuaciones lineales en ese nivel académico, por lo que uno de sus objetivos consistió en realizar un análisis de los libros de texto que utilizaban las instituciones de su estudio. De su análisis Maffey concluye que la enseñanza de las ecuaciones en los libros de texto se inicia con definiciones y conceptos, propiedades y resolución de ejercicios y problemas.

Aun teniendo algunas propuestas para la introducción del concepto ecuación que le aportan significado a dicho concepto, otras investigaciones de corte cognitivo han reportado que hay dificultades en su aprendizaje ya que este se desarrolla en clases que se reducen a la enunciación de definiciones y propiedades y la mecanización de reglas de cómo operar símbolos.

Bajo el enfoque cognitivo, la mayoría de los estudios se han concentrado en la detección de errores y dificultades que presentan los estudiantes al trabajar con el concepto. Dentro de esta categoría de investigaciones podemos hallar los trabajos realizados por Engler, Gregorini, Müller, Vrancker, y Hecklein (2004), Rabino, Cuello y De Munno (2004), Pochulu (2006) y Kieran y Filloy (1989).

En Pochulu (2004) fueron estudiados los errores y dificultades desde la opinión de los profesores de NMS, mediante una entrevista, mientras que en la investigación realizada por Engler et al. (2004) se estudiaron sólo errores mediante el análisis de investigaciones centradas en la detección de estos para categorizarlos. Y en el estudio de Rabino et al. (2006) se aplicó una propuesta para la enseñanza del álgebra utilizando contextos significativos, en la cual detectaron algunas dificultades. Al respecto del concepto ecuación puntualizan que los errores y dificultades pueden presentarse comúnmente en:

- El planteamiento y resolución de ecuaciones.

- La significación del signo de igualdad, ya que los estudiantes entienden que el signo igual (=) en una ecuación representa una señal de "hacer algo" como en la aritmética mientras que el verdadero significado del signo de igualdad (=) en una ecuación es la equivalencia entre los miembros de la ecuación.
- En relación a los métodos de resolución de ecuaciones de segundo grado, como lo son la factorización y la fórmula general de segundo grado, estos son desconocidos o no utilizados. En cuanto a la aplicación de la fórmula general para hallar las raíces de una ecuación de segundo grado, los alumnos no se aseguran de que la expresión esté igualada a cero.
- Al obtener las soluciones de una ecuación no se realiza la comprobación de los resultados, esto es, no se hace uso de la sustitución de los valores obtenidos en la ecuación para saber si la satisfacen. A este error también se le conoce como falta de verificación en la solución. Cuando se obtiene una solución negativa de la ecuación, los estudiantes no le encuentran sentido.

En Kieran y Filloy (1989) se cita la creencia que algunos alumnos tienen acerca de una ecuación, como un hecho numérico disfrazado con la falta de algún componente, esto último originado por ideas intuitivas en niveles básicos, principalmente en aritmética. Para los alumnos una ecuación no contiene literales en ambos miembros del signo de igualdad, por lo que cuando se les presenta una ecuación con literales en ambos miembros de la igualdad, probablemente no le encuentran sentido.

Los errores, dificultades y concepciones que presentan los estudiantes al momento de tratar el concepto ecuación permite puntualizar que en el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto hay una problemática que hace que este proceso sea poco favorable, en consecuencia, no nos explicamos cómo siendo el concepto ecuación uno de los más trabajados desde el nivel Primaria, Secundaria y niveles posteriores es un concepto aprendido de manera poco favorable.

Problema y objetivos de la investigación

Entre las diversas razones por las cuales es importante realizar estudios del concepto ecuación, está que el concepto forma parte de los contenidos del currículum de nuestro país (México) desde el nivel Primaria, siendo abordado en este nivel sus nociones, seguido por la formalización en el nivel Secundaria con el lenguaje algebraico, continuando en los siguientes niveles educativos con un grado mayor de complejidad.

Los antecedentes muestran que el concepto ecuación ha sido investigado desde dos enfoques principalmente, didáctico y cognitivo, de lo cual se percibe que el tratamiento se ha llevado a cabo algorítmicamente y que todavía existen algunas inconsistencias (errores, dificultades, concepciones) en él. Esto nos lleva a cuestionarnos el porqué sí el concepto ecuación es abordado desde la Primaria, Secundaria, Bachillerato y demás niveles educativos, es uno de los que presenta inconsistencias en su comprensión por parte de los alumnos aún de grados avanzados.

Esto nos sugiere plantearnos la siguiente pregunta de investigación: *¿Cuál es el tratamiento didáctico del concepto ecuación en la educación básica (Primaria y Secundaria)?*

A primera vista esta pregunta parece ser muy general, sin embargo al definir que se estudiará el concepto en la educación básica, queda delimitado el estudio a ecuaciones aritméticas lineales y algebraicas lineales, cuadráticas y cúbicas. Otro aspecto que aclaramos es que el tratamiento didáctico del concepto ecuación se realizará sobre las reformas del 2009 para el nivel Primaria y 2006 para el nivel Secundaria, vigentes actualmente.

Por lo que el objetivo general consiste en realizar un estudio didáctico del concepto ecuación en la educación básica, en los niveles Primaria y Secundaria, *para conocer cómo es tratado el concepto en el Discurso Matemático Escolar.*

Las acciones específicas para el logro del objetivo estriban principalmente en:

- Realizar un análisis de contenido para conocer el tratamiento que se da sobre el concepto ecuación en el nivel Primaria.
- Realizar un análisis de contenido para conocer el tratamiento que se da sobre el concepto ecuación en el nivel Secundaria.

Dicho análisis permitirá conocer el desarrollo que tiene el concepto ecuación durante la trayectoria escolar de los niveles Primaria y Secundaria, es decir, podremos conocer el proceso evolutivo del tratamiento de la enseñanza del concepto desde las nociones básicas hasta que se aborda de manera formal.

Marco conceptual

El *análisis didáctico* es definido por Gómez (2002) como un procedimiento con el cual es posible explorar, profundizar y trabajar con los múltiples y diferentes significados del conocimiento matemático escolar, para poder diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje. En este sentido el análisis didáctico implica un proceso completo, que inicia con la determinación del contenido matemático que se va a tratar y de los objetivos que se quieren lograr desde la revisión y análisis de los contenidos plasmados para la enseñanza hasta la evaluación de los mismos después de habérselos enseñado a los alumnos.

Los componentes del análisis didáctico son: el análisis de contenido, el análisis cognitivo, el análisis de instrucción y el análisis de actuación. En seguida se explicará el análisis de contenido que es el componente que interesa para la investigación.

El *análisis de contenido*, es definido como un análisis de las matemáticas escolares, del contenido matemático, por lo que su propósito es la descripción de la estructura matemática desde la perspectiva de su enseñanza y aprendizaje en el aula. En este tipo de análisis se busca identificar y describir estructuradamente los diversos significados matemáticos de las matemáticas escolares y tiene en cuenta tres tipos de significados: la estructura conceptual, los sistemas de representación y los modelos (análisis fenomenológico).

- ❖ La estructura conceptual. Es la descripción a nivel de conceptos y relaciones entre ellos, de la estructura matemática en cuestión. En este tipo de significado además de enumerar los conceptos involucrados en la estructura matemática, sino que su construcción es un proceso que se inicia con la identificación de los conceptos y algunas de sus relaciones pero que se desarrolla en la medida en que se tienen en cuenta los sistemas de representación, los modelos y los fenómenos asociados.
- ❖ Los sistemas de representación. La estructura conceptual deberá representar la estructura matemática en todos sus posibles sistemas de representación. Cada uno de los sistemas de representación aporta un significado de la estructura matemática desde la perspectiva de las matemáticas escolares. La descripción detallada de la estructura conceptual con base en los sistemas de representación permite identificar y delimitar las subestructuras matemáticas que conforman la estructura matemática representada.
- ❖ Los modelos (Análisis fenomenológico). El análisis fenomenológico consiste en identificar, describir, caracterizar y clasificar los fenómenos naturales, sociales y matemáticos que pueden ser organizados (modelizados) por subestructuras contenidas en la estructura en cuestión.

Podemos obtener información del trabajo de profesores y estudiantes en el salón de clases mediante observaciones de clase, entrevistas o el análisis de contenido de algunos materiales como los libros de texto, los planes y programas de estudio, los libros de apoyo para el profesor, los ficheros de actividades. En este caso se optó por realizar el análisis de contenido de los libros de texto que utilizan los profesores y estudiantes de los dos niveles educativos Primaria y Secundaria.

> Ya que los libros de texto se han convertido en documentos imprescindibles para indagar acerca de lo que es o ha sido la práctica real de la enseñanza, ya que los libros de texto son los únicos registros disponibles del conocimiento matemático que la institución escolar ha transmitido (Gómez, 2011, p. 53).

Los profesores usualmente planifican y realizan sus clases con ayuda de su experiencia y de los documentos y materiales de apoyo disponibles, y muchos de ellos se basan exclusivamente en las propuestas de los libros de texto (Gómez, 2002). Sin embargo el libro de texto no sólo se ha convertido en un recurso imprescindible para el profesor, principalmente de la educación básica, sino que también de los estudiantes que cursan ese tipo de educación, ya que los planes de estudio los marcan como obligatorios.

Los libros de texto, son un apoyo tanto para el profesor como para los alumnos, en el se encuentran plasmados y desglosados los contenidos desde los contenidos más básicos a los más complejos que se proponen en los planes y programas de estudio (Moya, 2008).

Por lo que se puede a partir de ellos (los libros de texto) conocer tanto lo que los planes y programas proponen para la enseñanza del profesor como el aprendizaje de los estudiantes, y la presentación del contenido matemático en cuanto a organización y tratamiento que se le da.

Metodología

Tomando en cuenta que la investigación tiene como fin realizar un análisis didáctico del concepto ecuación, se considera como unidad de análisis los libros de texto de Primaria y Secundaria, ya que los tales libros representan la forma mas accesible hacia lo que necesitamos conocer, porque los profesores en su mayoría se apoyan en ellos para dar sus clases.

Además, realizar un análisis de libros nos permite entre otras cosas, mirar la estructura y tratamiento de un concepto dado, diseñar secuencias para favorecer ya sea la enseñanza o aprendizaje mismo del concepto, también nos permite encontrar inconsistencias en su tratamiento, e incluso se pueden identificar dificultades de origen epistemológico.

Para este trabajo, nos hemos concentrado en que el análisis didáctico sea un guía para conocer el desarrollo que tiene el concepto ecuación durante la trayectoria escolar de los niveles Primaria y Secundaria, es decir, podremos conocer el proceso evolutivo del tratamiento de la enseñanza del concepto desde las nociones básicas hasta lo formal.

Ahora bien, con base en la metodología de análisis de libros de texto que se plantea en Rodríguez (2010) y apoyados en la literatura sobre el análisis de contenido, es que se propone considerar como categorías de análisis de los textos: los conocimientos previos, los conceptos relacionados con el concepto en cuestión, los ejemplos y ejercicios, la representación del concepto, y los contextos en los cuales se presenta el concepto.

❖ *Variables de análisis*

Las variables para analizar el concepto ecuación tanto en el nivel Primaria como Secundaria, se desglosan en los esquemas guías (Tablas 1 y 2) siguientes:

<table>
<tr><th colspan="3">Tabla 1. Esquema para el análisis del concepto ecuación en los libros de nivel Primaria.</th></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="5">Acerca del libro</td><td>Libro de Primaria</td></tr>
<tr><td>Autor (es)</td></tr>
<tr><td>Enfoque y objetivo del libro</td></tr>
<tr><td>Bloque y lección donde aparece</td></tr>
<tr><td>Objetivo del bloque</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Análisis Didáctico</td><td>Conocimientos en los que se aborda la noción del concepto ecuación.</td><td>Ecuaciones que se abordan</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Reforzamiento de los conocimientos</td><td>Representaciones</td></tr>
<tr><td>Tipo de ejemplos</td></tr>
<tr><td>Tipo de problemas y ejercicios</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="3">Tabla 2. Esquema para el análisis del concepto ecuación en los libros de nivel Secundaria.</th></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="5">Acerca del libro</td><td>Libro de Secundaria</td></tr>
<tr><td>Autor (es)</td></tr>
<tr><td>Enfoque y objetivo del libro</td></tr>
<tr><td>Bloque y lección</td></tr>
<tr><td>Objetivo del bloque</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Análisis didáctico</td><td rowspan="3">Conocimientos</td><td>Definiciones</td></tr>
<tr><td>Explicación de algoritmos</td></tr>
<tr><td>Uso de representaciones</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Reforzamiento de los conocimientos</td><td>Ejemplos (para aplicar)</td></tr>
<tr><td>Problemas (que permita razonar para aplicar lo aprendido) y ejercicios (se aplica el algoritmo)</td></tr>
<tr><td>Alguna situación o aspectos de motivación como lo son la sugerencia de usar algún material didáctico, calculadora o algún pasaje histórico.</td></tr>
</table>

- *Elección del material por analizar.*

Los libros de texto de Primaria que se analizaron son los seis que se proponen en el plan y programa del 2009 vigente: Perrusquía, E., et al. (2010), Matemáticas Primer grado; Arredondo, C., et al. (2010), Matemáticas Segundo grado; Hernández, J. et al. (2010), Matemáticas Tercer grado; Hernández, D. et al. (2010), Matemáticas Cuarto grado; Perrusquía, E., et al. (2010), Matemáticas Quinto grado; Perrusquía, E., et al. (2010). Matemáticas Sexto grado

Los libros de texto de Matemáticas de nivel Secundaria que se analizaron son algunos que la Secretaría de Educación Pública autorizó para el ciclo escolar 2010-2011: Cabañas, G., et al. (2008). Matemáticas; Briseño, L., et al. (2006), Matemáticas I Santillana Integral. Santillana; Pérez, M. y Pérez, S. (2010), Matemáticas 1. Aventura del pensamiento; Escareño, F. y López, O. (2008), Matemáticas 2; García S. y Block, D. (2008), Matemáticas 2; Sánchez F. (2010). Matemáticas 3 a partir de la resolución de problemas; Waldegg, G., et al. (2008). Matemáticas 3 en contexto.

Resultados preliminares

En el nivel Primaria respecto a la organización del contenido de los libros de texto, la mayoría de las actividades son contextuales, entendiendo esto, el que se muestran las aplicaciones de los conocimientos en la vida cotidiana.

Los conocimientos señalados como operaciones aritméticas básicas (suma, resta, multiplicación y división), cálculo numérico y la relación de proporción, en los cuales se trata de buscar términos faltantes, son identificados como los principales donde se aborda la noción de Ecuación.

Las actividades (ejercicios y problemas) se desarrollan de manera individual o con los compañeros de clase mediante juegos o situaciones sencillas que tienen lugar en la vida cotidiana, suponemos que esto se debe a que dichas situaciones le dan sentido a los conceptos matemáticos. Dentro de las actividades también se proponen ejercicios de cálculo puramente matemático.

Se usa la representación simbólica formal desde segundo grado, se usan tablas para el tratamiento de las relaciones proporcionales a partir de cuarto grado, en el eje temático análisis de la información, se presentan también algunas representaciones pictóricas (ilustraciones de objetos) en todos los grados que permiten que los alumnos comprendan mejor las actividades. Al abordar el cálculo mental o numérico se propicia la representación verbal ya que la resolución de este tipo de actividad implica que los estudiantes realicen cálculos aproximados mentalmente usando distintas estrategias para ello.

En el nivel Secundaria, donde el concepto ecuación se aborda formalmente, se percibió que no todos los libros definen el concepto Ecuación y los que lo hacen lo definen como una igualdad que contiene al menos una incógnita en uno o los dos miembros de dicha igualdad.

En primer y segundo grado de Secundaria se trata el tema de ecuaciones lineales y es hasta el tercer grado cuando se da el tratamiento de las ecuaciones cuadráticas y una introducción a las ecuaciones cúbicas. La mayoría de los libros inician dando como enfoque la comparación de una ecuación con el equilibrio de una balanza y finalizan proponiendo ejercicios que se resuelven de manera mecánica, es decir solo realizan procedimientos algebraicos. También se percibe que se hace referencia a algunos aspectos motivacionales, como la introducción con pasajes históricos del concepto o la introducción del concepto mediante el modelo diagramático de la balanza.

Con base en lo tratado, podemos señalar que al tratar con el concepto Ecuación lo que se plantean son problemas fuera del contexto de las matemáticas de manera poco frecuente. Lo que se observa es que se centran en el trabajo puramente algorítmico ya que no se hace uso de representaciones gráficas para explicar este concepto.

Referencias bibliográficas

Engler, A., Gregorini, M., Müller, D., Vrancker, S. y Hecklein. (2004). Los errores en el aprendizaje de matemática. *Revista Premisa*, *(23),* 23-32.

Filloy Yagüe, E. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México: Grupo Editorial Iberoámerica.

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA*, 7(3), 251-292.

Gómez, B. (2011). El análisis de manuales y la identificación de problemas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. *PNA,* 5(2), 49-65

Kieran, C. y Filloy Yagüe, E. (1989). El aprendizaje del algebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las ciencias*, *7(3),* 229-240

Maffey, S. (2006). *Estudios sobre la meta cognición y competencia de profesores y estudiantes en relación al tema de ecuaciones lineales.* Tesis de Maestría no publicada. Centro de Investigación y Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

Meavilla, V. (s. f.). Cónicas y resolución de ecuaciones de tercer grado: una propuesta didáctica inspirada en la historia de las matemáticas. IES "Francés de Aranda" de Teruel.

Moya, C. (2008). Aproximación al concepto y tratamiento de texto escolar. *Cuadernos de Lingüística Hispánica 11*, 133-152

Pochulu, M. (2005). Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresan a la universidad. *Revista Iberoamericana de Educación, 35(4)*, 1- 14

Rabino, A., Cuello, P. y De Munno, M. (2004). Aprehender álgebra utilizando contextos significativos. *Revista Premisa*, *22*, 36-42.

Rivero, F. (2000). *Resolviendo las ecuaciones lineales con el uso de modelos*. Notas de Matemática, No. 201, Departamento de Matemática, Universidad de los Andes, Mérida, Venezuela.

Rodríguez, F. (2010). *Desarrollo conceptual de los métodos iterativos en la resolución de ecuaciones no lineales, un enfoque didáctico*. Tesis de Doctorado no publicada, Salamanca, España. Publicada en: http://gredos.usal.es/jspui/handle/10366/76557.

Rojano, M. (2010). Modelación concreta en álgebra: balanza virtual, ecuaciones y sistemas matemáticos de signos. *Revista Números*, *75,* 5-20.

INTERPOLACIÓN NEWTONIANA, LAGRANGIANA E INTERPOLACIÓN CON POLINOMIOS CÚBICOS: APROPIACIÓN DEL CONOCIMIENTO MEDIANTE UN ACERCAMIENTO INTUITIVO

Rogelio Ramos Carranza, Frida María León Rodríguez, Armando Aguilar Márquez
Universidad Nacional Autónoma de México México
egorrc@gmail.com, armandoa@unam.mx, fridam@unam.mx

Resumen. Existen diversos métodos para realizar una interpolación numérica o bien la aproximación a una función mediante polinomios, algunos de los cuales son tratados como ajuste de curvas; entre ellos se puede mencionar a los polinomios de interpolación de Newton, polinomios de interpolación de Lagrange, y la interpolación "spline" o interpolación segmentaría de distintos tipos, entre otros métodos para el ajuste de curvas o modelado numérico. En esta indagatoria se propone probar que el estudiante puede lograr la construcción de sus propias estructuras para conseguir la aprehensión del conocimiento de los modelos tratados, usando los mediadores de la Zona de Desarrollo Próximo, tal como lo propone Lev S. Vygotsky (1979). Buscando propiciar el desarrollo de las habilidades psicológicas al proponer un conjunto de actividades tendientes a que el estudiante pueda resolver problemas usando los modelos de Newton, de Lagrange e interpolación "spline" suponiendo que, para lograrlo solo necesita cierta estructura.

Palabras clave: interpolación numérica, aprehensión del conocimiento

Abstract. There are various methods for numerical interpolation or approximation to a function by polynomials, some of which are treated as curve fitting, among them one can mention the Newton polynomial interpolation, Lagrange interpolation polynomials, and interpolation 'spline' or segmental interpolation of various kinds, among other methods for curve fitting or numerical modelling. This investigation aims to prove that a student can achieve to build their own structures to make the apprehension of the knowledge of the models treated, using the mediators of the Zone of Proximal Development, as proposed by Lev S. Vygotsky (1979). Seeking to encourage the development of psychological skills, by proposing a set of activities to enable the student to solve problems using the models of Newton, Lagrange and "spline" interpolation, assuming that, to achieve just need some structure.

Key words: numerical interpolation, apprehension of knowledge

Introducción

Denominamos interpolación con espaciamientos constantes o variables, a una curva definida mediante polinomios de distintos grados a partir de un conjunto de datos.

Como resultado de la aplicación de los modelos numéricos de Newton, Lagrange y spline al conjunto dado de puntos; se obtienen los polinomios de grado uno o lineal, cuadráticos o en general de grado n; correspondientes al mencionado conjunto; generando así una cantidad mayor de puntos que la proporcionada originalmente; y además los puntos generados pueden estar entre o fuera de los conocidos. Esto significa que el modelado numérico usando los tres métodos tratados, realiza la interpolación apoyándose en conceptos matemáticos distintos, los que imponen ciertas condiciones a cada uno de ellos; es decir, en el caso del modelo de Newton los espaciamientos entre los puntos respecto de la variable independiente deberán de ser constantes y el desarrollo se basa en el concepto de diferencias finitas, mientras que en el caso de los modelos de Lagrange y "spline", dichos espaciamientos pueden ser constantes o variables y el proceso dependerá del número de puntos del que se componga al conjunto dado.

Descripción de los Modelos matemáticos de interpolación

El desarrollo del modelo de interpolación de Newton (Ramos, 2011) considera dos aspectos fundamentales; el primero se refiere a que la distancia entre las absisas es una constante; es decir las distancias entre las ***x*** son iguales a una constante, y esta es una condición que impone este método, y es una limitante para los casos tratados por dicho procedimiento. El otro aspecto fundamental se refiere al concepto de diferencias finitas, las cuales pueden ser definidas de tres maneras, las diferencias finitas hacia delante, hacia atrás e intermedias o centrales; las que se utilizan en el proceso que aquí se trata son las diferencias finitas hacia delante.

En general, las k-ésimas diferencias hacia delante se definen como:

$$(1)\ldots \quad \Delta^k y_i = \Delta^{(k-1)} y_{i+1} - \Delta^{(k-1)} y_i; \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$
$$k = 1, 2, 3, \ldots$$

Donde: Δ es el operador diferencia

Tomando en cuenta la definición para las diferencias finitas se podrán realizar las siguientes sustituciones:

Para valores de i = 0, y k=1, que al sustituir en la ecuación (1), se obtiene:

$$(2)\ldots \quad y_1 = (1+\Delta) y_0$$

Otra sustitución, para valores de i = 1 y k=1, en la ecuación (1), se obtiene:

$$(3)\ldots \quad y_2 = (1+\Delta)^2 y_0$$

Realizando otra sustitución para valor de i = 2 y k=1, en la ecuación (1), se obtiene:

$$(4)\ldots \quad y_3 = (1+\Delta)^3 y_0$$

Así que, si se sigue un proceso, para distintos valores del subíndice "i", aplicado a la ecuación (1), y por inducción natural se puede establecer o aceptar que el valor de y_4, quedaría determinado por la ecuación:

$$(5)\ldots \quad y_4 = (1+\Delta)^4 y_0$$

Análogamente para y_5, y_6, y_7, … y en general para y_k:

$$(6)\ldots \quad y_k = (1+\Delta)^k y_0 \ ; \ k = 1,2,3,\ldots$$

O bien al desarrollar el binomio, para un valor cualquiera de k:

$$(7)\ldots \quad y_k = y_0 + \binom{k}{1}\Delta y_0 + \binom{k}{2}\Delta^2 y_0 + \binom{k}{3}\Delta^3 y_0 + \ldots + \binom{k}{k}\Delta^k y_0$$

El desarrollo mostrado no es más que el desarrollo del binomio de Newton, expresado por la sumatoria:

$$(1+\Delta)^k y_0 = \left[\sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j}(1)^{k-j}\Delta^j\right] y_0$$

El cual se obtiene a partir del desarrollo del binomio de Newton, para el caso que aquí se trata; aplicado a y_0.

Ahora bien, si se considera que ***j*** es un valor cualquiera, menor que ***k***, y además se asume que las ***j***-ésimas diferencias son constantes, entonces se tendrá que las diferencias de orden superior a ***j*** serán cero, por lo que, a partir de la ecuación (9), se obtiene un polinomio en k, de grado j, el cual queda expresado a continuación:

$$(8)\ldots \quad y_k = y_0 + \binom{k}{1}\Delta y_0 + \binom{k}{2}\Delta^2 y_0 + \binom{k}{3}\Delta^3 y_0 + \ldots + \binom{k}{j}\Delta^j y_0$$

Al sustituir ***k*** en el segundo miembro de la ecuación 8 se obtiene un polinomio, de grado ***j***, expresado en términos de $\boldsymbol{x_k}$ o en general de ***x***, para cualquier valor de ***k***, es decir:

$$(14)\ldots \quad y_k = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + \ldots + b_j x^j$$

Ecuación que representa el polinomio de interpolación de Newton o *modelo* numérico *de Newton* para interpolación; Es importante señalar ahora, que, de igual manera podrá ser utilizado para realizar las operaciones de integración y derivación o diferenciación inclusive.

En el modelo de interpolación de Lagrange, los espaciamientos no son necesariamente constantes, por lo que se le considera un método de interpolación con espaciamientos variables. Partiremos de la expresión general para un polinomio de grado n, de variable real x, dada por:

$$p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \ldots\ a_{n-1} x + a_n \quad \ldots(1)$$

Por el cual, se puede hacer pasar todos los puntos que definen a la función tabulada, (definida en forma tabular o como un conjunto de puntos) es decir:

$$\begin{aligned} p(x) = {} & b_0(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\ldots(x-x_n)+ \\ & +b_1(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\ldots(x-x_n)+ \\ & +b_2(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)\ldots(x-x_n)+ \\ & +b_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)\ldots(x-x_n)+ \\ & \vdots \\ & \vdots \\ & +b_n(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_{n-1}) \end{aligned} \quad \ldots(2)$$

Al evaluar la ecuación (2) en el punto x = x_0 obtenemos:

$$p(x_0) = y_0 = b_0(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_{31})(x_0-x_4)\ldots(x_0-x_n)$$

lo que implica que:

$$b_0 = \frac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)(x_0-x_5).....(x_0-x_n)}$$

Al evaluar la ecuación (2) en el punto x = x_1, obtenemos:

$$p(x_1) = y_1 = b_1(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)\ldots(x_1-x_n)$$

lo que implica que:

$$b_1 = \frac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_1-x_5).....(x_1-x_n)}$$

Al evaluar la ecuación (2) en el punto x = x_2, obtenemos:

$$p(x_2) = y_2 = b_2(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)\ldots(x_2-x_n)$$

lo que implica que:

$$b_2 = \frac{y_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_2-x_5).....(x_2-x_n)}$$

Así al evaluar sucesivamente la ecuación (2) en x_3, x_4, x_5, x_6, ...,x_n; obtendremos los coeficientes b_3, b_4, b_5, b_6,..., b_n, respectivamente. Por lo tanto podemos expresar la ecuación (2) como:

$$p(x)=\left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)......(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)(x_0-x_5)......(x_0-x_n)}\right]y_0+$$

$$+\left[\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)......(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_1-x_5)......(x_1-x_n)}\right]y_1+$$

$$+\left[\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)......(x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_2-x_5)......(x_2-x_n)}\right]y_2+$$

$$+\left[\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)(x-x_5)......(x-x_n)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)(x_3-x_5)......(x_3-x_n)}\right]y_3+\dots+$$

$$+\left[\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)......(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)(x_n-x_2)(x_n-x_3)(x_n-x_4)......(x_n-x_{n-1})}\right]y_n \quad \dots (3)$$

y esta ecuación (3) se puede sintetizar escribiendo:

$$p(x)=\sum_{i=0}^{n}\left[\prod_{j=0}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}\right]y_i$$

La cual representa el *modelo de Lagrange* y en la que $\prod_{j=0}^{n}$ es la función producto PI que realiza los productos recorriendo *j desde 0 hasta n , siempre que j sea diferente de i.*

Se denomina spline (Madhumangal, 2007) o ajuste cúbico a una función definida en el intervalo $[x_0, x_1]$. Si existen polinomios cúbicos $p_0(x), p_1(x), p_2(x),..., p_{n-1}(x)$, tales que:

$$(1)\dots \quad y(x)=p_i(x) \quad sobre\ [x_i, x_{i+1}], \quad i=0,1,2,...,n-1$$

$$(2)\dots \quad p'_{i-1}(x_i)=p'_i(x_i)\ , \quad i=1,2,...,n-1\ (igual \quad derivada\ )$$

$$(3)\dots \quad p''_{i-1}(x_i)=p''_i(x_i)\ , \quad i=1,2,...,n-1\ (igual \quad curvatura\ )$$

$$(4)\dots \quad p_i(x_i)=y_i\ ,\ \ p_i(x_{i+1})=y_{i+1}\ ;\ i=0,1,2,...,n-1$$

Podría notarse que en los puntos extremos x_0 , x_n , la continuidad sobre la pendiente y la curvatura no son asignadas. Las condiciones son asignadas en esos puntos, en general dependiendo de las aplicaciones.

Sea $[x_i, x_{i+1}]$, el intervalo que denota al i-ésimo intervalo.

Sea $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1,2,3,\ldots,n$ y sea $M_i = y''(x_i)$, $i = 0,1,2,\ldots,n$

Sea el ajuste cúbico para el i-ésimo intervalo:

$$(5)\ldots y(x) = a_i(x-x_i)^3 + b_i(x-x_i)^2 + c_i(x-x_i) + d_i \;\; en \; [x_i, x_{i+1}]$$

Mediante un proceso algebraico se determinan los coeficientes ***a**ᵢ*, ***b**ᵢ*, ***c**ᵢ*, **y** ***d**ᵢ*, lo cual representa el problema central de este modelo; obteniéndose para cada uno de ellos, las relaciones:

$$(6)\ldots \quad y_i = d_i$$

$$(7)\ \ldots\ b_i = \frac{M_i}{2}$$

$$(8)\ \ldots\ a_i = \frac{M_{i+1} - M_i}{6h_{i+1}}$$

$$(9)\ldots\ c_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{2h_{i+1}M_i + h_{i+1}M_{i+1}}{6}$$

De manera que, los coeficientes, a_i, b_i, c_i, **y** d_i en la ecuación (5) son determinados en términos de las (n+1) derivadas desconocidas: M_0, M_1, M_2, … M_n, Las cuales se calculan mediante la relación:

$$(10)\ \ldots\ 6\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}\right) = h_i M_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1})M_i + h_{i+1}M_{i+1}$$

Esta relación es cierta para $i = 1,2,3,\ldots,(n-1)$. Entonces se dispone de (n-1) ecuaciones para resolver las (n+1) cantidades desconocidas: M_0, M_1, M_2, … M_n.

Las ecuaciones 6, 7, 8, 9 y 10 son las expresiones representativas del modelo de interpolación “spline” natural.

Diseño de las actividades y de las pruebas

Las actividades consisten en la presentación del tema por los estudiantes, en esta se les pide que hagan uso de: un discurso matemático, esquemas, tablas, gráficas, software y el uso de un lenguaje simbólico, además se propició en el estudiante la búsqueda y organización de la información para prepararlo en el uso personal de material informativo, como condición del autoaprendizaje; con objeto de conjuntar la comprensión de la teoría con la aplicación práctica se le pidió que propusiera un problema o caso de estudio en el contexto de la ingeniería respecto del objeto en cuestión; para lo que se sugiere que el estudiante use recordatorios (notas), claves o formulas, ayuda con los detalles o pasos que conforman el algoritmo e iniciar la presentación con un problema en el contexto de la ingeniería. Se diseño un sistema de evaluación, en el que se incluye un examen único para los dos conjuntos de estudiantes, el experimental y el de control, el cual se aplica en igualdad de condiciones, a la misma hora y con la misma duración y consistiendo de un solo problema en el que se utilice el método de Newton (o Lagrange o spline, según sea el caso) para su solución.

Metodología

Los objetos matemáticos descritos, han sido tratados para su aprendizaje, por estudiantes de ingeniería, utilizando el modelo de aprendizaje sociocultural de Lev S. Vygotsky (Vygotsky, 1979) para el que se sostiene, que ambos procesos, desarrollo y aprendizaje, interactúan entre sí considerando el aprendizaje como un factor del desarrollo. Es esta estrecha relación entre desarrollo y aprendizaje la que Vigotsky destaca y lo lleva a formular su famosa teoría de la "Zona de Desarrollo Próximo" (ZDP), que se puede definir como la distancia entre el nivel de desarrollo, determinado por la capacidad para resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más capaz. Así mismo, subraya que el motor del aprendizaje es siempre la actividad del sujeto, la cual está condicionada por dos tipos de mediadores: "herramientas" y "símbolos", ya sea autónomamente en la "zona de desarrollo real", o ayudado por la mediación en la "zona de desarrollo potencial. Y la adquisición de aprendizajes se explica como formas de socialización. El autor concibe al hombre como una construcción más social que biológica, en donde las funciones superiores son fruto del desarrollo cultural e implican el uso de mediadores.

Las "herramientas" (herramientas técnicas) son las expectativas y conocimientos previos del alumno que transforman los estímulos informativos que le llegan del contexto. Los "símbolos" (herramientas psicológicas) son el conjunto de signos que utiliza el mismo sujeto para hacer propios dichos estímulos. Las herramientas no modifican los estímulos en sí mismos, pero sí modifican las estructuras de conocimiento cuando aquellos estímulos se interiorizan y se convierten en propios. Las "herramientas" están orientadas externamente y su función es, a su vez, orientar la actividad del sujeto hacia los objetos; al contrario los "símbolos" están orientados internamente y son un medio de la actividad interna que apunta al dominio de uno mismo. Todo este proceso recibe el nombre de “ley de la doble formación” puesto que el conocimiento se adquiere procesándolo, primero, desde el exterior, con las “herramientas” y reestructurándolo luego en el interior, a través de los “símbolos”.

Los conocimientos estructurados con ayuda de los mediadores (“herramientas” y “símbolos”) generan en el alumno la citada “zona de desarrollo potencial”, que le permite acceder a nuevos aprendizajes, creándose así un cierto grado de autonomía e independencia para aprender a aprender más.

En el aprendizaje escolar, la actividad del alumno está mediada por la actividad del profesor, que es quien debe ayudarle a activar los conocimientos previos (a través de las “herramientas”) y a estructurar los conocimientos previos (a través de los “símbolos”) proponiéndole experiencias de aprendizaje ni demasiado fáciles ni demasiado difíciles, sino en el límite de las posibilidades del sujeto. Es decir, en su “área o zona de desarrollo potencial” con el fin de ir ampliándola y desarrollándola. De esta forma, los procesos de aprendizaje y de enseñanza se solapan, convirtiéndose la propia actividad del alumno y la del profesor en mediadores de todo proceso de enseñanza-aprendizaje en el ámbito escolar.

Realización del Experimento

En nuestro experimento buscamos propiciar el desarrollo de las habilidades psicológicas proponiendo un conjunto de actividades tendientes a que el estudiante pueda resolver problemas usando los modelos numéricos aquí tratados, suponiendo que, para lograrlo sólo necesita cierta estructura, claves, recordatorios, ayuda con los detalles o pasos, aliento para seguir esforzándose; los cuales conjuntamente con la búsqueda de información para realizar una presentación, la interacción de la teoría con la aplicación práctica, el sistema de evaluación de conocimientos para considerar junto con el aprendizaje el logro de habilidades y hábitos positivos que propicien una educación continua y las implicaciones o resultados esperados (pensamiento crítico, autosuficiencia en el aprendizaje, hábitos y actitudes que configuren un tipo humano capaz de convertirse en agente consciente del desarrollo, creatividad, disciplina y organización en el trabajo, sentido de responsabilidad personal y social); son los elementos que constituyen los apoyos que se denominan en la teoría el andamiaje didáctico. En esta etapa de la indagatoria, el estudiante ha logrado resolver con relativa facilidad los problemas que se le proponen, en la medida en que los apoyos se aumentan en forma gradual, a fin de observar cuánta ayuda necesita y cómo responde.

Por su parte el maestro observa, escucha y toma notas cuidadosamente acerca de la forma en que el estudiante emplea la ayuda y el nivel de apoyo que necesita. Esta información ha servido para planear agrupamientos instruccionales, tutoría entre compañeros (actividad que en la teoría "vigotskyana", se denomina, la enseñanza recíproca), tareas de aprendizaje, trabajos para casa, uso de herramientas de programación de computadoras, uso de software de apoyo, etc. En este sentido el profesor ha guiado y facilitado con explicaciones, demostraciones y el trabajo con otros estudiantes, lo que hace posible el aprendizaje cooperativo. Así es como se ha experimentado para la aprehensión de los objetos matemáticos propuestos en esta indagatoria, de tal manera que teóricamente hemos supuesto que las herramientas psicológicas (Baquero, 1997), son el puente entre las funciones mentales inferiores y las funciones mentales superiores y, el puente entre las habilidades interpsicológicas (sociales) y las intrapsicológicas (personales).

Una vez hecha la presentación por parte de los estudiantes, en la siguiente fase del experimento se realiza el desarrollo matemático por parte del profesor, aclarando las inquietudes y dudas de los estudiantes y haciendo énfasis principalmente en las recomendaciones que se consideran pertinentes y de acuerdo con lo observado, lo escuchado y las notas que se tomaron cuidadosamente durante la presentación de los estudiantes; se ilustra con un caso resuelto en clase y se propone un caso de estudio para realizarse fuera del aula y desarrollarse, tanto en el escritorio, así como, valiéndose de los instrumentos electrónicos de cómputo. Finalmente se lleva a cabo una serie de ejercicios en el aula, tipo taller y organizada por estudiantes y profesor resolviendo varios problemas relacionados con el contexto de la ingeniería y discutiendo los resultados obtenidos. Por último se realiza un examen del objeto matemático tratado, en forma individual.

En la investigación se aplicó esta metodología a un grupo experimental, mientras que otro grupo recibió la instrucción en la forma tradicional; en la que el profesor es el expositor, realiza ejemplos pregunta acerca de dudas, las aclara, propone un caso de estudio para realizarse fuera del aula de clase, incluyendo prueba de escritorio y programa por computadora y aplica el examen en forma individual. En ambos casos; es decir, en el grupo experimental como en el grupo de control se utilizó el mismo tiempo para la enseñanza de los objetos de estudio (6.0 hrs.) y se aplicó el mismo tipo de examen; y cuyos resultados se analizan mediante la prueba t independiente de comparación simple.

Resultados y conclusiones

Lo que aprendemos depende de las herramientas psicológicas que tenemos, y a su vez, las herramientas psicológicas dependen de la cultura en que vivimos, consiguientemente, nuestros pensamientos, nuestras experiencias, nuestras intenciones y nuestras acciones están culturalmente mediadas; que es el hecho central de la teoría "Vygotskyana", en la que se postula que el ser humano, en cuanto sujeto que conoce, no tiene acceso directo a los objetos; el acceso es mediado a través de las herramientas psicológicas, de que dispone, y el conocimiento se adquiere, se construye, a través de la interacción con los demás mediada por la cultura, desarrollada histórica y socialmente. Por lo que hemos propuesto el probar experimentalmente que el estudiante puede lograr la construcción de sus propias estructuras para alcanzar el aprendizaje de los objetos matemáticos tratados (y de cualesquiera otros objetos matemáticos); coincidiendo con Vygotsky en el sentido de que la cultura nos dice qué pensar y cómo pensar; nos da el conocimiento y la forma de construir ese conocimiento, por esta razón, la teoría sostiene que el aprendizaje es mediado y que además la interacción social es el origen y el motor del aprendizaje. Concluyendo que la investigación ha comenzado a producir resultados satisfactorios, en contraste con aquellos grupos en los que se ha seguido con la enseñanza tradicional (grupo de control). Así mismo, resulta importante señalar, que se ha observado la dificultad de resolver problemas por parte de los estudiantes (grupo experimental), cuando se les retiran los apoyos estratégicos para sostener o soportar el aprendizaje; sin embargo, el grupo experimental da mejores resultados en el aprovechamiento escolar, que el grupo con enseñanza tradicional.

Referencias bibliográficas

Baquero, R. (1997). *Vygotsky y el aprendizaje escolar*. Buenos Aires: Aique S.A.

Madhumangal, P. (2007). *Numerical Analysis for scientists and enginners. Theory and C programs*. Londres: Alpha Science.

Ramos, R. y Aguilar, A. (2011). *Métodos Numéricos I*. México: FESC-UNAM

Vygotsky, L. (1979). *Desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Grijalbo-Crítica.

COMPRENSIÓN DE LA SINTAXIS DEL ÁLGEBRA EN TANGENTES A LAS CÓNICAS CON EL MÉTODO DE DESCARTES

Samantha Delfín Azuara
DME, Cinvestav, IPN México
samantha_delfin@ciencias.unam.mx

Resumen. Este artículo forma parte de la investigación maestría de la autora. En este artículo se identifican qué tendencias cognitivas presentan estudiantes de bachillerato cuando se enfrentan al tema de tangentes a las cónicas en un curso de Geometría Analítica (UNAM, 1996). También se analiza si este curso permite una mejor comprensión de la sintaxis algebraica.

Palabras clave: sintaxis algebraica, geometría analítica, tendencias cognitivas, tangentes, cónicas

Abstract. This article is part of author's master's degree research. It identifies which cognitive tendencies present high school students when they study tangents to conic in an Analytic Geometry course. We also analyze if it improves their comprehension of the algebraic syntax.

Key words: algebraic syntax, analytic geometry, cognitive tendencies, tangents, conics

Introducción

El contenido de este artículo forma parte de una tesis de Maestría en la disciplina de matemática educativa. La investigación se centra en la impartición del tema de tangentes a las cónicas a un grupo de educación media superior. El estudio se realizó en un colegio que emplea tanto el sistema del Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH) de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), como el sistema de bachillerato internacional General Certificate of Secondary Education (GCSE) de la Universidad de Cambridge.

El objetivo de esta investigación es encontrar si la enseñanza de la geometría analítica mejora o no la comprensión de la sintaxis del álgebra en estudiantes de nivel medio superior en México. La elección del tema de tangentes a las cónicas responde a que éste comprende contenidos tanto del álgebra como de la geometría, lo cual permitirá hacer un análisis que nos permita sacar conclusiones pertinentes sobre la hipótesis de la investigación. El presente proyecto es la continuación de la investigación de Neira (2010) sobre la sintaxis del álgebra en la enseñanza de la geometría analítica que también trabajó sobre las tangentes a las cónicas pero dirigido a docentes.

Para esto se utilizaron los Modelos Teóricos Locales (MTL) de Filloy, Rojano y Puig (2008) con el diseño de un modelo de enseñanza controlada basada en el modelo de competencias formales y el análisis de las tendencias cognitivas de los alumnos antes y después de estudiar este modelo de enseñanza. Las tendencias cognitivas nos permitirán comprender qué es lo que entienden, los estudiantes, del lenguaje algebraico.

Perspectiva teórica

La investigación se desarrolla a partir de los MTL mediante el diseño de un modelo de enseñanza controlada basado en el modelo de competencias formales y el análisis de tendencias cognitivas antes y después de estudiar este modelo de enseñanza. Las tres de los cuatro componentes de los MTL a utilizar son: modelos de enseñanza, modelos de competencias formales y modelos de procesos cognitivos. Debido a la duración de la maestría no se usará el componente restante, el de comunicaciones, como se explicará más adelante.

El presente artículo se restringe al desarrollo de uno de los métodos que se utilizan en el modelo de enseñanza: el método de Descartes para encontrar tangentes a las cónicas. En la investigación se emplea además el método de Fermat. Ambos matemáticos desarrollaron la concepción de la geometría analítica casi simultáneamente en el año 1637, con la diferencia que Descartes publicó sus resultados en el apéndice de *La Géométrie,* del libro *Discours de la méthode,* los resultados de Fermat fueron publicados por su hijo después de su muerte en la obra *Varia Opera Mathematica.*

La diferencia de estos métodos radica en que el método de Descartes es de una naturaleza completamente geométrica y algebraica mientras que el método de Fermat utiliza ideas primitivas del cálculo. Como consecuencia el método de Descartes sería más ampliamente aceptado por los matemáticos de hoy en día por su formalismo sin embargo encontramos que no sirve para curvas superiores. Por otro lado el método de Fermat funciona para cualquier curva, pero adolece de justificar (formalmente) la idea de límite.

Método de Descartes. El método de Descartes descrito en su libro de *La Géométrie* corresponde a suponer la existencia de un círculo tangente de la cónica en cuestión en el punto requerido. Claramente esto resuelve nuestro problema ya que basta encontrar el radio de este círculo respecto al punto. Recordemos que el radio del círculo es perpendicular a la tangente que pasa por el mismo punto. El método de Descartes para encontrar tangentes a las cónicas también se conoce como el método de las raíces idénticas (Cruse, 1982). A continuación éste se describirá con el ejemplo visto en la clase correspondiente.

Supongamos que tenemos la curva $(x-2)^2=4(y-2)$, que claramente es una parábola y nos preguntamos que ecuación tiene la tangente a esta curva que pasa por el punto $x=4$. Claramente la recta de la tangente que estamos buscando es de la forma: $y-3=m(x-4)$. Enseguida expandimos la ecuación de la parábola y despejando y obtenemos: $y=\frac{x^2-4x+12}{4}$. Igualamos esta última ecuación con la de la tangente y obtenemos una nueva ecuación: $\frac{x^2-4x+12}{4}-3=m(x-4)$. Agrupamos esta ecuación respecto a *x* para obtener la ecuación de segundo grado: $x^2+x(-4-4m)+16m=0$. Resolviendo ésta: $x=\frac{-(-4-4m)\pm\sqrt{(-4-4m)^2-4(16)}}{2}$. Ahora por definición de tangente, la intersección con la cónica debe ser única (de ahí que el método de Descartes funcione sólo para algunas curvas). Por lo tanto el discriminante de esta nueva ecuación debe ser cero. Es decir, $(-4-4m)^2-64=0$, una nueva ecuación que ahora sólo tiene como incógnita a *m*. Resolviendo esta nueva ecuación obtenemos el valor de *m*, que en nuestro caso es *m*=1, ya que aunque tengamos dos raíces sólo una de éstas produce una tangente, ya que la otra recta nunca toca a la parábola. Por lo cual la ecuación de la tangente buscada: $y=x-1$.

Como se mencionó al principio del artículo, esta investigación se encuadra bajo los MTL, estos constan de cuatro componentes: modelos de enseñanza, modelos para procesos cognitivos, modelos de competencia formal y modelos de comunicación. Esta investigación se limitará al uso de las primeras tres componentes antes mencionadas debido a la duración de la maestría.

Modelo de competencia formal. El modelo de competencia formal corresponde al conocimiento que tiene el investigador sobre el tema en cuestión. Se refiere al conocimiento que tiene el observador sobre el Sistema Matemático de Signos (SMS) (Filloy, 2008) en el tema en particular. El SMS que utiliza el observador deberá ser más abstracto que aquel que será utilizado en el modelo de enseñanza. Esta componente corresponde a la exploración de textos de la teoría matemática investigada.

Modelo de enseñanza. Según Filloy un modelo de enseñanza se caracteriza como sucesiones de textos matemáticos que son intercambiados entre alumno y maestro. Estos se producen a través de sistemas de signos matemáticos estratificados, es decir, se va de lo menos abstracto a lo más. Lo que se propone es "modelar" a partir de situaciones concretas (contextos familiares para los alumnos). Este modelo se desarrolla a partir de lo recolectado en el modelo de competencia formal. En nuestra investigación en particular esto se refiere a que la sintaxis del álgebra es mejor entendida en un contexto concreto, como lo es la geometría analítica, en lugar de sólo cuando los estudiantes lo ven en el curso correspondiente al álgebra pura.

*Modelo de procesos cognitivos***.** El modelo de procesos cognitivos analiza qué procesos se llevan a cabo durante el aprendizaje del álgebra. Filloy nos habla de seis de éstas: la percepción, la dirección de la atención y sus relaciones con los procesos del entendimiento, la memoria, procesos de análisis y síntesis entrelazados con el uso de la lógica, concepciones heurísticas y el aprendizaje. Para analizar estos procesos cognitivos se utilizarán las once tendencias cognitivas que se presentan en la enseñanza del álgebra descritas por Filloy.

Metodología

El proceso de investigación, que es de tipo cualitativo utilizará un análisis fenomenológico que consta de cinco etapas:

1. Evaluación de los alumnos antes de recibir las clases correspondientes a tangentes a las cónicas para poder determinar el nivel de comprensión de la sintaxis del álgebra.

2. Enseñar el tema con un modelo de enseñanza específico diseñado por el investigador, basado en los libros de texto de Eugenio Filloy, *Geometría Analítica* y el de Lehmann, *Geometría Analítica* y los textos correspondientes de Fermat y Descartes.

3. Aplicar un cuestionario para evaluar las dificultades de comprensión de la sintaxis del álgebra en el tema y la comprensión del mismo.

4. Hacer entrevistas semi-estructuradas a 3 tipos de alumnos: de alto, regular y bajo desempeño.

5. Sacar conclusiones basadas en los resultados.

El contenido del primer cuestionario fue sobre álgebra y algunas propiedades geométricas correspondientes a lo propuesto en la currícula de matemáticas de secundaria. El segundo cuestionario fue sobre tangentes a las cónicas haciendo énfasis en el uso de la sintaxis algebraica. El cuestionario diagnóstico consistió en encontrar la tangente de la parábola $(x-2)^2 = 4(y-2)$ cuando x=5.

El análisis de los resultados de los cuestionarios se hará respecto a las tendencias cognitivas que tengan los alumnos. La investigación se lleva a cabo en un grupo de segundo año de bachillerato de la Ciudad de México que consta de once estudiantes. El tema se impartió en una clase que duró dos horas, posterior a un repaso de las propiedades de las cónicas. Antes de introducir el método de Descartes (1637), también se habló un poco de la historia de las tangentes. La clase completa se presentó con un cañón. Se realizó la explicación teórica del método de Descartes y además se realizó un ejemplo detallado de cómo encontrar la tangente en una parábola indicando claramente por qué este método nos permite encontrar tangentes a las cónicas en general.

Resultados

Los resultados en este artículo corresponden exclusivamente a los obtenidos en el cuestionario correspondiente al método de Descartes. Se harán comparaciones con el primer cuestionario cuando sea pertinente. El primer cuestionario constó de 28 reactivos. La distribución del contenido de los reactivos fue la siguiente: diez reactivos respecto a la sintaxis del álgebra, uno respecto proporcionalidad, uno respecto a ecuaciones cuadráticas, ocho respecto a ecuaciones lineales, uno respecto a trigonometría y siete respecto a propiedades geométricas. En general el desempeño de los estudiantes fue muy bajo. El número de reactivos correctos máximo fue diez y el mínimo fue cero. El número de respuestas correctas más frecuente fue siete. Respecto a la sintaxis del álgebra encontramos que operan con sus propias reglas y que a veces éstas corresponden a una mala comprensión de las reales. La tendencia cognitiva que más presentaron en general fue: la articulación de generalizaciones erróneas.

Respecto al cuestionario correspondiente al método de Descartes encontramos que solamente cuatro de los once sujetos llegaron a la parte de encontrar la tangente algebraicamente. Sin embargo ninguno de estos pudo encontrar la tangente de la parábola. Los cuatro individuos entienden que multiplicar una igualdad por una constante afecta ambos lados de la igualdad, pero ninguno empleó la sintaxis correcta. Es decir, nos encontramos en la presencia de la tendencia cognitiva (Filloy, 1993): "la presencia de un proceso de abreviación de los textos concretos para producir reglas sintácticas nuevas". Además estos alumnos pudieron encontrar qué valor le correspondía a *y* dado *x*.

$$4\left(\frac{(x-1)^2}{4}-4=m(x-5)\right)$$

Figura 1. Sintaxis empleada por un alumno para indicar la multiplicación de una ecuación por una constante.

Tres de ellos pudieron desarrollar un binomio al cuadrado correctamente. Sin embargo, no lograron expandir un binomio al cuadrado con ambos términos negativos. Es decir, nos encontramos en presencia de la tendencia cognitiva: "la imposibilidad de desencadenar operaciones que podían hacerse antes".

$$y=\frac{x^2-10x+25}{4}$$

Figura 2. Expansión que corresponde al binomio $(x-5)^2$.

$$x=\frac{(10-4m)^2-60m+36}{2}$$

$$x=\frac{100-16m^2-60m+36}{2}$$

Figura 3. Expansión de un binomio negativo. Se observa que el estudiante sólo elevó al cuadrado ambos términos del binomio. Después de haber realizado la expansión observada en la figura 3.

Dos de los estudiantes entienden que los parámetros de una cuadrática no son necesariamente números.

$$x^2-10x\ -4mx+20m+9=0$$
$$x^2+x(-10-4m)+20m+9=0$$

Figura 5. Agrupación respecto a x. Observemos que los parámetros no son necesariamente números.

Estos mismos no entienden que un signo afecta a todos los elementos dentro del paréntesis y además no pueden resolver una cuadrática que tenga como incógnita una letra diferente a *x* (en este caso *m*). Estas dos conductas corresponden a la tendencia cognitiva: "la articulación de generalizaciones erróneas", ya que intentaron resolver la cuadrática pero escribieron que ésta era la solución de *x* en lugar de *m*.

$$16m^2-80m+136=0$$

$$x=$$

Figura 6. Un alumno llegó a esta cuadrática, pero cuando puso x= no supo cómo continuar a partir de su cuadrática.

Conclusiones

Los alumnos no entendieron el método de Descartes y sólo repitieron el procedimiento enseñado. Aunque muchas de sus concepciones de la sintaxis algebraica son incorrectas, éstas han mejorado respecto al primer cuestionario correspondiente a la investigación en curso.

Sus concepciones erróneas corresponden a lo que entendieron mal desde la enseñanza del álgebra en la secundaria e inclusive a la de la aritmética en la primaria. El uso de la geometría analítica sí mejoró su comprensión de la sintaxis algebraica, sin embargo no resuelve el problema por completo. Es necesario que se trabaje conjuntamente con los niveles de secundaria y primaria ya que es imposible que se corrija todo lo que entendieron mal desde su enseñanza básica en el nivel medio superior.

Referencias bibliográficas

Cruse A.B. y Lehman M. (1982). *Lecciones de Cálculo 1. Introducción a la derivada.* México: Fondo Educativo Interamericano. (Traducción Arizmendi H. y Lara M.)

Descartes, R. (1954). *The Geometry of Rene Descartes with a facsimile of the first edition*. (Smith D.E. y Latham M.L., Traducido) Nueva York, NY: Dover. (Trabajo original publicado en 1637).

Filloy, Y.E. (1993). Tendencias cognitivas y procesos de abstracción en el aprendizaje del álgebra y la geometría. *Enseñanza de las ciencias, 11*(22), 160-166.

Filloy, Y.E. (1999). *Aspectos Teóricos del Álgebra Educativa*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Filloy, Y.E., Rojano T. y Puig L. (2008). *Educational Algebra. A Theoretical and Empirical Approach*. Estados Unidos de América: Springer.

Neira, J.V. (2010). *Sintaxis del álgebra en la enseñanza de la geometría analítica*. Tesis de maestría no publicado, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Universidad Nacional Autónoma de México (1996). *Programa de estudio de Matemáticas. Semestres I al IV*. Educación Media Superior. México: CCH, UNAM.

EL PRINCIPIO HEURÍSTICO DE LA VISUALIZACIÓN Y SU CARÁCTER RECTOR PARA LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA DEL ESPACIO

Osvaldo Jesús Rojas Velázquez, Miguel Cruz Ramírez, Miguel Escalona Reyes, Mario Estrada Doallo, José Luís Sánchez Santiesteban
Universidad de Ciencias Pedagógica "José de la Luz y Caballero" Cuba
scmc@ucp.ho.rimed.cu

Resumen. La naturaleza de la geometría del espacio, las dificultades y carencias en su aprendizaje, revelan la existencia de un principio que enriquece la Didáctica de la Matemática, que está presente en todas las ramas de la Matemática y ayuda a la resolución de problemas. En la investigación se ofrecen los presupuestos epistémicos que sustentan el principio heurístico de la visualización, sus potencialidades axiológicas y su papel rector para la enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio. Se exponen los factores que justifican y viabilizan la presencia del principio, sus acciones y reglas. Su concreción favorece un proceso de enseñanza-aprendizaje desarrollador.

Palabras clave: principio heurístico, visualización, geometría del espacio

Abstract. The space geometry nature, as well as difficulties and shortages in its learning, show up the existence of a principle that enriches the Mathematic Didactics that is intrinsic in all of this science's branches, and constitutes an aid for solving problems. Throughout this research, epistemological foundations are presented in order to support the heuristic principle of visualization. Special attention is paid to this principle's axiological potentialities, likewise, to its rector role in the teaching – learning of space geometry. It is exposed the factors that justify and make feasible this principle, its actions and rules. Carry to the practice this proposal promotes a teaching-learning process of development.

Key words: heuristic principle, visualization, space geometry

Introducción

Es frecuente el empleo del término "principio" como regla que guía la conducta, fundamento de un sistema, entre otras acepciones. Los principios constituyen formas de sistematizar la teoría, permiten comprender la esencia de un proceso y tienen un carácter relativo al reflejar la realidad desde condiciones socio-históricas concretas del fenómeno o proceso objeto de estudio.

Mario Bunge, citado por Valiente (2009), aduce que los principios son categorías generales unificadoras dentro de la teoría científica:

> La ciencia es explicativa: intenta explicar los hechos en términos de leyes, y las leyes en términos de principios. [...] la ciencia deduce proposiciones relativas a hechos singulares a partir de leyes generales, y deduce las leyes a partir de enunciados nomológicos aún más generales (principios). (p. 3)

En el ámbito educativo, autores como Danilov (1978), Savin (1972), Klingberg (1972) y Labarrere y Valdivia (1988), identifican los principios didácticos como principios de enseñanza, pues de una forma u otra todos coinciden en plantear que los principios son guías, posiciones rectoras, postulados generales, normas para la enseñanza. También se plantea que estos "[...] se presentan como lineamientos prácticos que le permiten transformar la realidad, es decir, los principios de enseñanza son el punto de partida del profesor y tiene una función transformadora" (Labarrere y Valdivia, 1988, p. 53). En esta definición la *"función transformadora*" de la cual se habla es un ejemplo de búsqueda de un desarrollo en el alumno, pero en la misma se hace énfasis en la actividad de enseñar y relega a un segundo plano la actividad de aprender por parte del alumno, también adolece de un enfoque integral para el desarrollo de la personalidad y limita el aprendizaje al contexto del aula.

En correspondencia con las definiciones anteriores, en esta investigación se asume que los principios didácticos:

> [...] son aquellas regularidades esenciales que rigen el enseñar y el aprender, que permiten al educador dirigir científicamente el desarrollo integral de la personalidad de las alumnas y alumnos, considerando sus estilos de aprendizaje, en medios propicios para la comunicación y la socialización, en los que el marco del salón de clases se extienda en un continuo a la familia, la comunidad y la sociedad en general. (Zilberstein y Silvestre, 2004, p. 107)

Por otra parte, la propia naturaleza de la geometría del espacio, así como las dificultades y carencias en su aprendizaje, revelan la existencia de un principio que enriquece la Didáctica de la Matemática, que a la vez está presente en todas las ramas de la Matemática y ayuda a la resolución de problemas. En el diagnóstico se pudo constatar la existencia de evidencias empíricas de la manifestación de la visualización como principio heurístico. Por tales motivos este trabajo tiene como objetivo ofrecer los fundamentos psicológicos y epistémicos que sustentan al principio heurístico de la visualización y su papel rector para la enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio.

Desarrollo

Lo visual suele relacionarse con las imágenes, con las figuras, con los gráficos, con lo geométrico y aparece como una vía más de percibir la realidad del objeto del conocimiento, unido a la comunicación verbal, a lo abstracto y a lo analítico. La enseñanza de la geometría del espacio se favorece con el desarrollo de la visualización, en dos direcciones. Por un lado la construcción mental de objetos y procesos que un individuo asocia con objetos o sucesos percibidos por él como externos y, por otro, la construcción en algún medio externo de objetos o sucesos que el individuo identifica con objetos y procesos en su mente. En la geometría del espacio se necesita que el alumno visualice constantemente, mediante una interacción sujeto-objeto, donde se activen, estimulen y desarrollen los procesos lógicos del pensamiento para obtener el nuevo conocimiento geométrico espacial, de forma tal que le permita al alumno reflexionar, profundizar, definir, valorar, argumentar y plantear conjeturas.

La visualización facilita resolver problemas geométricos y situaciones de aprendizaje que requieren de la abstracción, que exijan que el alumno busque y explore las relaciones, propiedades y formas de representación de las figuras geométricas espaciales, sin la presencia de la figura geométrica o el objeto material para hacer referencia directa. De esta forma las exigencias intelectuales conducen a que el alumno opere con el conocimiento, hacia niveles cada vez más complejos para estimular así su desarrollo.

Por otra parte, la utilización de la computadora, a través de las software de geometría dinámica (SGD), es un aspecto fundamental para la visualización pues incide en la generalización, abstracción, detección de propiedades invariantes y en la posibilidad de conjeturar y experimentar el cumplimiento de propiedades geométricas espaciales que inicialmente no eran conocidas por el sujeto. Con el apoyo de la visualización, los conceptos y propiedades se revelan en su origen y desarrollo, propiciando la interacción del alumno con el conocimiento, ya sea mediante la vía metodológica inductiva o la deductiva para su formación. El desarrollo de la visualización facilita a los alumnos una vía para pensar, buscar y "hacer" geometría, con el fin de favorecer su aprendizaje y el desarrollo del pensamiento geométrico espacial.

Por otro lado la heurística tiene un importante papel en la enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio, en particular de los principios heurísticos, pues constituyen sugerencias para encontrar (directamente) la idea de solución principal de resolución, lo cual posibilita determinar los medios y las vías de solución. Los principios heurísticos generales y especiales son propicios para la búsqueda del nuevo conocimiento geométrico, así como en la resolución de problemas y situaciones de aprendizaje. Su papel desarrollador en la enseñanza de la geometría espacial es esencial y se manifiesta en diversos ámbitos. A continuación se ejemplifican algunos factores que justifican y viabilizan la presencia del principio heurístico de visualización:

- La geometría del espacio opera mediante representaciones mentales, representaciones externas y la imaginación.

- La necesidad de vincular objetos externos percibidos con su imagen mental y con su representación en un medio plano, donde se propicie el trabajo para la manipulación y se estimulen y desarrollen las formas de trabajo y de pensamiento de la Matemática.
- El complejo proceso de tránsito del pensamiento geométrico concreto al abstracto y viceversa.
- La búsqueda de nuevas vías que permitan estimular y desarrollar los procesos lógicos del pensamiento, mediante el procesamiento de imágenes que potencien el pensamiento concreto de objetos espaciales, lo cual es poco frecuente.
- El desarrollo tecnológico y su aplicación al contexto escolar, lo cual brinda nuevas posibilidades para el trabajo con imágenes y representaciones en el aula y fuera de esta.

También la Didáctica de la Matemática, en la práctica escolar, ha demostrado que existen evidencias que conducen al principio heurístico de visualización, pues este:

- Se refleja en las diferentes líneas directrices, tales como geometría, trabajo con variables, resolución de problemas, entre otras.
- Se revela en las situaciones típicas de la enseñanza de la Matemática, como el tratamiento a problemas geométricos, a conceptos y sus definiciones y a teoremas y sus demostraciones.
- Se pone de manifiesto en técnicas y procedimientos de solución de problemas, pues para autores como Cantoral y Montiel (2001) y López (2005) es una habilidad, para muchos entrenadores de olimpiadas es una técnica en la solución de problemas y, por otra parte, para Rojas (2009) constituye un elemento heurístico.

Por otra parte, este principio se sustenta en:

- Fundamentos psicológicos: estos están dados por el papel que tienen la percepción, la representación, la imaginación, las operaciones lógicas del pensamiento, los procesos mentales (procesamiento visual e interpretación de información figurativa); o sea, el rol de las funciones psíquicas superiores dadas por su naturaleza social y cultural, así como en la ley genética del desarrollo y la zona de desarrollo próximo (ZDP).
- Presupuestos epistémicos: evidenciados en las raíces gnoseológicas de la Matemática como una ciencia dinámica y cambiante, a partir de la resolución de nuevos problemas. Todo esto se refleja con suficiente elocuencia en la historia de la Matemática y de su enseñanza, donde la geometría ha constituido objeto de enseñanza desde la antigüedad.

- Potencialidades axiológicas: dadas por el beneficio que la visualización le puede aportar a los estudiantes, lo cual hace que el aprendizaje constituya una necesidad y motive un aprendizaje de mayor exigencia. Además, se dirige al desarrollo de un proceso crítico y transformador, favoreciendo cualidades importantes como la independencia del alumno y su laboriosidad.
- Fundamentos didácticos: el principio se integra con todos los componentes de la didáctica. Mediante el empleo de las tecnologías de la información y las comunicaciones (TIC), en particular de la computadora, se favorece y se desarrolla permitiendo una comprensión más completa del contenido geométrico. Además, se correlaciona y perfecciona al integrarse con los restantes principios heurísticos generales. Este principio constituye un recurso heurístico que permite fijar, comprender y reafirmar el contenido, pero también propicia encontrar y buscar el nuevo contenido geométrico, lo cual lo hace una potente herramienta heurística para la enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio.

Por lo antes planteado, se considera de un elevado valor y un nivel de generalidad que se ajustan a las posturas didácticas antes asumidas, un principio heurístico que se declara en la investigación: la visualización. Este principio consiste "en la búsqueda de una interpretación o reinterpretación geométrica de los objetos matemáticos y sus interrelaciones, donde el pensamiento geométrico se activa mediante el trabajo con la ZDP. En el proceso de búsqueda se reconfigura el significado y el sentido de estos objetos y sus interrelaciones, mientras el estudiante, ayudado por el maestro o por sí mismo, explora diversas vías y activa diferentes conceptos".

La base epistémica fundamental está dada en la conexión existente entre todas las ramas de la Matemática, que la fundamentan como una ciencia única. Por tanto, el principio de la visualización está presente en toda la enseñanza de la Matemática, pues al enfocar geométricamente los nuevos conocimientos se logra una fijación más profunda de ellos. Este principio no coincide con la conocida regla heurística de "construir una figura de análisis". Esta regla es solo una forma concreta de realización del principio y tiene un papel esencial en la geometría plana y del espacio. El principio de visualización es más universal y también está presente en la enseñanza de contenidos algebraicos y analíticos. Por ejemplo, el estudio de las funciones y sus propiedades no pueden ser posibles al margen de la representación gráfica. Incluso en la Educación Superior, la comprensión del concepto de continuidad uniforme se logra desplazando cierto rectángulo por el gráfico de la función. Allí los alumnos reconocen el extraordinario valor de la geometría, para esclarecer mejor la compleja definición que el Análisis Matemático tiene para este concepto (lenguaje ε-δ, según Cauchy).

Este principio no solo tiene lugar durante la formación de conceptos, sino también en el campo de de la resolución de problemas. Existe un ejemplo muy conocido, del ámbito de la resolución de ecuaciones con radicales, donde el principio juega un papel importante.

La formación de conceptos y la resolución de problemas son situaciones típicas de la enseñanza de la Matemática. El principio de visualización está presente en todas las situaciones típicas, pues la interconexión que dimana de todas las ramas del saber matemático también está presente en la enseñanza de esta ciencia. De aquí se desprende el carácter general del principio.

En el sentido lógico formal todo principio "debe ser un juicio necesario, estable y esencial" (Danilov, 1978, p. 121). La necesidad de la visualización ha quedado fundamentada sobre la base de las carencias que manifiestan los alumnos en el aprendizaje de la Matemática y, particularmente, en la resolución de problemas de la geometría del espacio.

La estabilidad se pone de relieve en la medida que el nuevo principio no entra en contradicción con los ya preestablecidos, sino que se integra a ellos de forma dialéctica. Una muestra de estabilidad está dada en la enseñanza de la geometría del espacio. La resolución de un problema de cálculo de cuerpos exige de la construcción de una figura de análisis (regla heurística), pero los límites antológicos del plano dificultan la imaginación espacial; lo mismo ocurre incluso con la presentación estática de un medio de enseñanza tridimensional. El principio de visualización logrará mayor efectividad si la imagen plana entra en movimiento con el auxilio de algún software, o cuando el medio de enseñanza la hace girar en diferentes ángulos. En fin, el principio de visualización se relaciona directamente con el principio heurístico especial de movilidad.

La esencialidad de este principio se evidencia en su carácter permanente e invariable, respecto a los fenómenos donde tiene lugar. Su exclusión deja un vacío en el orden teórico, pues no sería posible fundamentar una amplia diversidad de hechos similares a los explicados anteriormente (el concepto de continuidad uniforme y el sistema de ecuaciones antes ejemplificados). La unidad y contradicción dialéctica de las categorías esencia y fenómeno se ponen de manifiesto en las diferentes situaciones típicas, pues estas son dinámicas y variables mientras que el principio de visualización es más profundo y les es inherente a todas.

Un hecho particular, que requiere de explicación, consiste en la posibilidad de realización del principio de visualización en el aprendizaje de sujetos ciegos. Para ellos la visualización también es posible. De acuerdo al sistema de comprensión dinámica las vías y zonas cerebrales que dejan de funcionar son sustituidas por otras vías y zonas que asumen la función perdida (Asratian, 1962). Es este caso, para los ciegos se compensa el defecto por vía táctil y desarrollan así la imaginación basada en esta mediación táctil. Aunque el análisis de estos casos rebasa los límites del objeto en esta investigación, se considera oportuno llamar su atención, a fin de sugerir problemas abiertos para otras investigaciones.

El principio heurístico de visualización en algunos momentos y bajo ciertas condiciones se convierte en un principio integrador. En efecto, la resolución de problemas y ejercicios geométricos, por su propia naturaleza, exige la construcción de figuras (tridimensionales en el caso de la geometría del espacio). Este condicionante orienta todo el razonamiento alrededor de la figura de análisis, de modo que los restantes principios se rigen por la visualización. No significa esto que en tales condicione se le reste importancia a los otros principios, por el contrario, ellos se reflejan mediatizados por la visualización. Por ejemplo, el principio de la movilidad se manifiesta en la imaginación espacial.

Para aprovechar al máximo las potencialidades del principio de visualización, el profesor debe realizar las siguientes acciones:

- Análisis: se realiza un estudio de la información abstracta o no figurativa en imágenes visuales, o la lectura, comprensión e interpretación de las representaciones visuales usadas en geometría; para extraer la información que se necesita en la solución del ejercicio y/o problema. Es decir, se efectúa el análisis sobre las operaciones de las imágenes mentales o visuales, las cuales se realizan mediante el procesamiento visual e interpretación de información figurativa.
- Relación: Es el proceso de búsqueda y comparación al nivel mental que realiza el alumno sobre los conceptos, relaciones esenciales (propiedades y teoremas) y elementos, como resultado de la abstracción inmediata de la palabra o de la imagen sensoperceptual de las figuras geométricas; con el objetivo de ajustar la vía de solución a la situación o problemática dada, de tal forma que le permita resolver la situación.
- Representación mental: se comienza a imaginar internamente cada una de las partes y las relaciones entre estas, determinando la representación mental de la figura geométrica en su conjunto.
- Representación externa: se realiza con lápiz y papel, tiza y pizarra, materiales, con el uso de los SGD, programas informáticos o con ayuda de la tecnología.

- Vista geométrica: consiste en la representación de los elementos, propiedades y relaciones de las figuras geométricas del espacio en el plano.

Es importante destacar que, en correspondencia con lo que se quiere lograr, la manipulación se presenta en las cuatro primeras acciones, pues ella se usa para ajustar la visualización a lo que se busca o se exige en el problema o situación de aprendizaje. La visión espacial, junto con la representación inicial, tienen un papel importante en la interiorización y comprensión de las dos primeras acciones: análisis y relación. Por tal motivo, en aras de lograr mejores niveles de aprendizaje en la geometría del espacio, es necesario el principio heurístico de la visualización como un constante apoyo intra y extraescolar, a fin de que los alumnos sean provistos de métodos que les permitan obtener sus propios descubrimientos visuales sobre geometría del espacio. En la concreción de este principio se sugiere la implementación de reglas heurísticas que le son inherentes y propias:

- Objetivación de figuras geométricas: se pone de manifiesto en la representación del objeto concreto, en la representación simplificada, en la construcción de figuras de análisis y en construcciones auxiliares.
- Manipulación geométrica.
- Descomposición.
- Representación analítica: se refiere a buscar relaciones, a determinar los objetos y operaciones que se pueden establecer.

El principio heurístico de la visualización, mediante las acciones y reglas que son propias de él deviene en la práctica como método.

Este principio heurístico plantea al profesor las siguientes exigencias:

- Comprender la necesidad de las imágenes y la representación espacial, para la visualización en el proceso de aprendizaje de la geometría del espacio.
- Determinar la forma de emplear la visualización en la clase, como medio para la formación de abstracciones y generalizaciones, para obtener nuevos conocimientos geométricos, para la sistematización, etcétera.
- Concebir los medios visuales, en particular las TIC, que pueden utilizarse en el proceso de visualización para reproducir y representar las imágenes y figuras geométricas.
- Utilizar la visualización en problemas geométricos relacionados con objetos reales del medio, contextualizados a la vida cotidiana y a la actividad cognoscitiva del alumno.

- Crear las condiciones para que los alumnos utilicen la visualización, así como la forma de representar figuras y cuerpos en el plano.

Por la propia naturaleza de la geometría del espacio, el principio heurístico de la visualización, tiene un carácter rector para su enseñanza-aprendizaje, su uso en las clases es de gran utilidad, pues permite la búsqueda de nuevos conocimientos geométricos espaciales, así como la sistematización y generalización de otros.

Conclusiones

Los resultados investigativos sobre el principio heurístico de la visualización en la geometría del espacio, permite destacar algunos elementos que resultan determinantes en el logro del objetivo que se persigue. Ellos son:

Se exponen los fundamentos psicológicos y didácticos, así como los presupuestos epistémicos que sustentan al principio heurístico de la visualización y sus potencialidades axiológicas. También se proponen acciones, exigencias y reglas que son propias de este principio, entre las cuales tenemos la objetivación de figuras geométricas, la representación analítica, la descomposición y la manipulación geométrica. El principio heurístico de la visualización, mediante las acciones y reglas que son propias de él deviene en la práctica como método.

El principio heurístico de la visualización, es importante para lograr la efectividad en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio en el preuniversitario, pues se erige como principio rector en la enseñanza-aprendizaje de esta rama de la Matemática.

Referencias bibliográficas

Asratian, E. A. (1962). *Problemas de neurofisiología.* Buenos Aires: Quezal.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001). *Funciones: Visualización y Pensamiento Matemático.* México: Pearson Educación.

Danilov, M. A. (1978). *Didáctica de la Escuela Media*. La Habana: Pueblo y Educación.

Klingberg, L. (1972). *Introducción a la Didáctica General.* La Habana: Pueblo y Educación.

Labarrere, G. y Valdivia, G. (1988). *Pedagogía.* La Habana: Pueblo y Educación.

López, L. (2005). *Metodología para el perfeccionamiento del proceso enseñanza aprendizaje del cálculo vectorial, fundamentada en el desarrollo de la visualización matemática tridimensional.* Tesis de Doctorado no publicada. Universidad de Camagüey "Ignacio Agramante y Loynaz". Camaguey, Cuba.

Rojas, O. (2009). *Modelo didáctico para favorecer la enseñanza-aprendizaje de la geometría del* *espacio con un enfoque desarrollador*. Tesis de Doctorado no publicada. Universidad de Ciencias Pedagógicas "José de la Luz y Caballero". Holguín, Cuba.

Savin, N.V. (1972). *Pedagogía*. La Habana: Pueblo y Educación.

Valiente, P. (2009). La evaluación de la gestión directiva y los principios de la Dirección Educacional. En O. Coloma (Ed). *Memoria de pedagogía 2009 (1)*, (pp. 29-43). Holguín: Educación Cubana.

Zilberstein, J. y Silvestre, M. (2004). *Didáctica desarrolladora desde el enfoque Histórico Cultural.* México: CEIDE

CORRELATOS NEUROPSICOLÓGICOS DEL BAJO RENDIMIENTO EN MATEMÁTICAS EN ESTUDIANTES DE LA CARRERA DE PSICOLOGÍA: EL PAPEL DE LAS FUNCIONES EJECUTIVAS

José Gabriel Sánchez R., E. Alejandro Escotto C., Julieta Becerra C., Julieta Ma. de L. García P., Ma. del Socorro Contreras R., Ana Ma. Baltazar Ramos
FES Zaragoza - Universidad Nacional Autónoma de México México
josegsr@unam.mx; aescotto@unam.mx; juveka_mx@yahoo.com.mx

Resumen. El propósito de este estudio fue encontrar diferencias en las funciones ejecutivas entre estudiantes con bajo rendimiento en matemáticas y estudiantes con alto rendimiento. Funciones ejecutivas es un concepto de la neuropsicología que agrupa a un conjunto de capacidades relacionadas con la planeación, la iniciación de la actividad, la autorregulación y el uso de la retroalimentación. En este estudio se exploraron los posibles déficits en las funciones ejecutivas mediante el Cuestionario Disejecutivo. Participaron 295 estudiantes universitarios. Los resultados muestran que no existen diferencias significativas, entre ambos grupos de estudiantes, en todas las habilidades de las funciones ejecutivas. Aunque esto sugiere que el rendimiento en matemáticas, en los estudiantes universitarios, podría no estar directamente relacionado con las funciones ejecutivas, es necesario e importante explorar trastornos en ellas con pruebas neuropsicológicas más especializadas para confirmar los resultados obtenidos.

Palabras clave: funciones ejecutivas, neuropsicología del aprendizaje, rendimiento en matemáticas

Abstract. This research was aimed at finding differences in deficit of executive functions between university students with low academic achievement in mathematics and students with high academic achievement. Executive functions are a neuropsychology concept that comprises a whole of cognitive abilities that includes, for example: goal selection, planning, initiation of activity, self regulation and use of feed-back. The deficits in executive functions were explored with Dysexecutive Questionnaire. A sample of 295 students participated in the study. The results showed that, in general, concerning the state of the executive functions there are no significant differences between the two groups of students in all abilities of executive functions. This suggests that achievements in mathematics, in university students, may not be directly related to the executive functions. However, is necessary and important to explore possible disorders in executive functions with more specialized neuropsychological tests to confirm the results obtained.

Key words: executive functions, neuropsychology of learning, achievement in mathematics

Introducción

De acuerdo a Sánchez, Becerra, García y Contreras (2010a) para comprender el papel de los factores que intervienen facilitando o bloqueando el aprendizaje escolar, la investigación se ha conducido abordando variables distales (Carvallo, Caso y Contreras, 2007), por un lado o, por otro, variables personales (Papanastasiou, 2000). En el primer grupo de variables se encuentran, por ejemplo, el nivel socioeconómico, la escolaridad de los padres y el entorno familiar. En cambio en el segundo bloque se ubican las creencias, los afectos, las actitudes, la motivación al estudio, las atribuciones causales, el autoconcepto (Sánchez, Becerra, García y Contreras, 2010b) y la dimensión afectiva entre otras. A pesar de que la investigación se ha realizado desigualmente en factores de uno y otro grupo, en algunos se ha corroborado más sólidamente su papel en el rendimiento escolar en algunas asignaturas, pero en ciertos factores se requiere más evidencia que sugiera su relación con el rendimiento.

Por ejemplo, se ha documentado, aunque insistimos diferencialmente dado el desigual interés en cada caso, el papel de distintas variables sobre el rendimiento en matemáticas como de las creencias y concepciones, de la motivación, de variables afectivas, de las creencias y las actitudes hacia las matemáticas, del dominio afectivo la autoestima, la autoconfianza y la ansiedad hacia las matemáticas (González-Pienda, Núñez, Glez.-Pumariega y García, 1997), entre otras.

Sin embargo, al analizar de manera general los resultados hasta ahora obtenidos en algunas investigaciones realizadas, en tanto que a veces son sutiles las diferencias en las características de algunas variables entre los alumnos con bajo rendimiento en comparación con los alto rendimiento o a veces algunas variables parecen no influir significativamente en el rendimiento (Tárraga, 2008), podemos presuponer que la problemática en el aprendizaje o rendimiento en matemáticas, y otras asignaturas de la misma área (e. g., estadística y álgebra), no es un fenómeno unifactorial. Es decir, que en el rendimiento en matemáticas podría conjugarse el papel de variables distales y personales del alumno.

De esta manera surge la necesidad de desarrollar trabajos enfocados en variables que han recibido poca atención, sobre todo tomando en cuenta lo preocupante que resulta el bajo rendimiento estudiantil en matemáticas, y la relevancia de una educación o alfabetización en matemáticas, tanto en lo personal como en el desarrollo de un país. En México, según los resultados reportados por la Secretaría de Educación Pública del Gobierno Federal de evaluaciones académicas nacionales como las de ENLACE, la situación del bajo logro en matemáticas es particularmente preocupante.

Algunos aspectos teóricos

En este trabajo se presentan los resultados obtenidos hasta ahora al abordar una temática poco explorada en este campo (cf., Hamdy, 1990): algunos correlatos neuropsicológicos del aprendizaje de matemáticas, especialmente los relativas a las funciones ejecutivas (Pineda, 2000; entre otros). Aunque algunos autores antes ya habían insinuado la necesidad de tomar en cuenta los aspectos neurobiológicos en la conducta de logro académico y propuesto una combinación de factores contextuales con inherentes al estudiante para explicar el éxito académico. Estudios como este tienen sentido al admitir la importancia de ofrecer evidencia de los distintos aspectos que inciden en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

La neuropsicología se define como una rama de las neurociencias que estudia las relaciones entre el cerebro y la conducta tanto en sujetos normales como en aquellos que han sufrido algún daño cerebral. Se le identifica como una disciplina limítrofe entre la psicología y la neurología encargada de estudiar las funciones cerebrales superiores, por lo tanto se enfoca preferentemente, pero no exclusivamente, en el estudio de las áreas de la corteza asociativa, en general del cerebro. Dichas áreas corticales son muy susceptibles de sufrir deficiencias o daños. Uno de los primeros problemas que estudió la neuropsicología fue la afasia que se caracteriza como la pérdida de la capacidad para producir o comprender el lenguaje, debido a lesiones de diverso tipo en áreas cerebrales especializadas en estas tareas.

Específicamente, en este trabajo se exploraron las diferencias entre alumnos universitarios de alto y bajo rendimiento en matemáticas en un conjunto de capacidades denominado funciones ejecutivas (FE), cuya sede principal en el sistema nervioso central son los lóbulos frontales del cerebro, más específicamente las regiones anteriores, o áreas prefrontales, y sus conexiones con otras zonas corticales y subcorticales, como el cerebelo, el núcleo amigdalino y el diencéfalo. La razón de explorar las FE fue porque son esenciales para las funciones cognitivas superiores que regulan la conducta cognitiva, emocional y social de un sujeto. Además, porque con este concepto la neuropsicología contribuye significativamente a la explicación de alteraciones cuya base no es de naturaleza estrictamente psicológica ni ambiental sino que podría radicar en el cerebro. El propósito del trabajo fue obtener datos de posibles factores neuropsicológicos relativos a las FE que podrían estar debilitados en los estudiantes con mal rendimiento en matemáticas.

El concepto de funciones ejecutivas fue introducido inicialmente al ambiente científico por Fuster, posteriormente lo reconceptualizó Luria, relacionándolo con el de funciones intelectuales, y más recientemente lo popularizó Lezak (Barceló, Lewis y Moreno, 2006). Es importante destacar que a partir de Luria se desarrolló toda una conceptualización en torno al funcionamiento ejecutivo.

Aunque varios autores han estudiado y definido las funciones ejecutivas, coincidiendo sistemáticamente en que estas consisten en habilidades o capacidades cognitivas de orden superior mediante las cuales un individuo consigue un objetivo y en que son una actividad propia de los lóbulos frontales, la definición de Pineda (2000, cit. por Barceló et al., 2006) destaca porque caracteriza detalladamente sus componentes:

> (Las funciones ejecutivas)…permiten la anticipación y el establecimiento de metas, el diseño de planes y programas, el inicio de las actividades y de las operaciones mentales, la autorregulación y la monitorización de las tareas, la selección precisa

> de los comportamientos y las conductas, la flexibilidad en el trabajo cognoscitivo y su organización en el tiempo y en el espacio para obtener resultados eficaces en la resolución de problemas (p. 115).

Especialmente, la conceptualización de Pineda abre la posibilidad de presuponer explicaciones sobre las dificultades en el rendimiento escolar diferentes a las que lo atribuyen a fenómenos psicológicos como el desinterés del estudiante, su falta de motivación o a su inadaptación al entorno escolar, entre otros. Sin embargo, poca investigación se ha realizado en esta línea, aún menos enfocada hacia algunas asignaturas en particular. Por lo tanto, no hemos localizado ninguna investigación reportada realizada con esta perspectiva en el ámbito de la matemática educativa, tocante al tema de matemáticas.

Para evaluar la función cerebral frontal se ha diseñado un número importante de pruebas neuropsicológicas, entre otros las pruebas de clasificación de tarjetas de Wisconsin, la prueba de diseños, el test de fluidez verbal, la organización del aprendizaje, la torre de Hanoi o de Londres, el test de conflicto palabra color o la prueba de Stroop y la prueba de apertura de caminos (Trail making test) (Tirapu, Rios, Maestú y Arnau, 2011). Además, de la tecnología que se emplea en la exploración clínica, como el electroencefalograma, la resonancia magnética, etc. Sin embargo, en la mayoría de los casos requieren una considerable experiencia en ello. Una manera más práctica de aproximarse a los problemas en las funciones ejecutivas es evaluando sus disfunciones, específicamente el síndrome disejecutivo que involucra alteraciones del lóbulo frontal y se caracteriza por déficit de atención, fallas en la planificación y anticipación, déficit en las abstracciones y otras manifestaciones conductuales (Barceló et al., 2006). Para esto Wilson, Alderman, Burgess, Emslie y Evans (1996) propusieron el Cuestionario Disejecutivo (DEX).

Método

En el estudio participaron inicialmente 294 alumnos de la Carrera de Psicología de un campus de la UNAM, todos estaban inscritos por primera vez en el primer semestre, es decir, ninguno estaba en la condición de recursador. Los estudiantes tomaban el curso curricular de matemáticas y estadística cuyo contenido abarcó las unidades de álgebra, conjuntos y estadística descriptiva. Fueron escogidos por su disponibilidad en los días que se programó y realizó la evaluación de la variable del estudio. El criterio para agruparlos en la condición de bajo rendimiento fue obtener una calificación final en el curso de 5 o 6, y de alto rendimiento una calificación de 9 o 10. Asimismo, su bajo rendimiento se confirmó con la puntuación que en el Test de Razonamiento Lógico (Acevedo y Oliva, 1995, versión española del TOLT de Tobin y Capie). De este modo, el grupo de bajo rendimiento lo conformó el 38 % de la muestra total de estudiantes y el 12.5% el grupo de alto rendimiento. Una vez seleccionados de esta forma quedaron en el estudio 194 alumnos. Cabe mencionar que de los 294 participantes iniciales más del 60% logró una calificación máxima de 7 en el curso de matemáticas, el 4.7% una calificación de 10 y ninguno mostraba condiciones biológicas discapacitantes, como deficiencia sensorial o retraso mental.

Instrumentos

Para evaluar los déficits en las funciones ejecutivas se aplicó el Cuestionario Disejecutivo (DEX), el cual es un suplemento de un grupo o batería de pruebas neuropsicológicas llamada Behavioural Assessment of the Dysexecutive Syndrome (BADS) diseñada por Wilson, Alderman, Burgess, Emslie y Evans (1996). La BADS consta de seis tests diseñados para evaluar los efectos del síndrome disejecutivo que procuran eludir la pobre validez ecológica habitual en las medidas neuropsicológicas clásicas. A partir de estos tests se calcula un perfil neuropsicológico. El DEX es un cuestionario de 20 ítems que se responden en un formato tipo Likert de 5 puntos (entre 'nunca' y 'con mucha frecuencia'), para evaluar específicamente: problemas en el pensamiento abstracto, impulsividad, fabulación, problemas de planificación, problemas de secuenciación temporal, falta de insight, apatía, desinhibición, dificultades en el control de los impulsos, falta de interés, perseveración, inquietud, falta de habilidad para inhibir respuestas, disociación entre conocimiento y respuesta, distractibilidad, pobre habilidad en la toma de decisiones y falta de interés por las reglas sociales. El tipo de reactivos que contiene es el siguiente:

- *Tengo dificultades para tomar decisiones, o decidir lo que quiero hacer.*
- *Tengo dificultad para pensar cosas con antelación o para planificar el futuro.*
- *Tengo problemas para entender lo que otros quieren decir, aunque digan las cosas claramente.*

En el estudio de sus propiedades psicométricas, confiabilidad y de validez, se ha postulado que sus componentes se enfocan a la valoración de memoria ejecutiva, inhibición de respuestas, regulación, entre otras (Chaytor y Schmitter-Edgecombe, 2007; entre otros). El DEX ha mostrado una confiabilidad de .91 y .87 (Pedrero-Pérez, Ruiz Sánchez de León, Rojo, Llanero, Olivar, Bouso y Puerta, 2009; Pedrero-Pérez, Ruiz-Sánchez de León, Lozoya-Delgado, Llanero-Luque, Rojo-Mota y Puerta-García, 2011, respectivamente), así como validez con una varianza total explicada de 60.37% (Pedrero-Pérez et al, 2009). En este trabajo se evaluó la confiabilidad y validez del instrumento. Se observó una confiabilidad, con el alfa de Cronbach, de .88 y una validez, calculada con un análisis factorial, para una estructura pentafactorial de 32.70%, de varianza total explicada.

Procedimiento

Se aplicó el cuestionario DEX como prueba de screening a todos los participantes. Se estableció como principal criterio de exclusión para participar en el estudio que el estudiante estuviera repitiendo el curso de matemáticas. Se consultó su historial académico para determinar el tipo de rendimiento académico en matemáticas de los estudiantes.

Resultados

El análisis de los datos se realizó comparando, entre los grupos de alto y bajo rendimiento en matemáticas, tanto las frecuencias relativas observadas en cada uno de los puntos de la escala del cuestionario DEX para cada ítem, como las puntuaciones promedio obtenidas. Los resultados sugieren diferencias en algunos componentes de las funciones ejecutivas entre los dos grupos de participantes, los cuales parecen estar asociados al rendimiento académico en matemáticas, dependiendo del tipo de análisis estadístico realizado.

Por ejemplo, respecto a las puntuaciones promedio obtenidas en cada reactivo del DEX (Tabla 1) y considerando la función neuropsicológica que evalúa cada uno de ellos (del 1 al 20 respectivamente, *problemas en el pensamiento abstracto*, impulsividad, fabulación, *problemas de planificación*, euforia, *problemas de secuenciación temporal, falta de insight, apatía,* desinhibición, problemas en el control de impulsos, respuestas afectivas superficiales, agresión, *falta de interés, perseveración,* inquietud, *falta de habilidad para inhibir respuestas, disociación entre conocimiento y respuesta, distractibilidad, escasa habilidad en la toma de decisiones,* falta de interés en las reglas sociales; se pusieron en cursiva las que están más vinculadas en nuestro juicio con tareas académicas, en particular relativas a la solución de problemas), aunque en la mitad de todos los reactivos las diferencias sugieren trastornos de disejecución en los estudiantes de bajo rendimiento y en los demás reactivos en los de alto rendimiento, sólo hay diferencias significativas entre ambos grupos en el reactivo 12 (agresión) y en el 7 (falta de insight) ($t = 1.82$, $p < .05$; $t = 1.67$, $p < .05$; respectivamente). En el primer reactivo con una puntuación más alta en el de alto rendimiento. En el reactivo 7 el déficit se encontró en el grupo de bajo rendimiento.

El análisis de frecuencia, consistente en examinar la distribución de las respuestas de los alumnos en cada uno de los reactivos de DEX, sugiere en cambio que las diferencias principalmente se hallan en el ítem 4 (problemas de planificación), 6 (problemas de secuenciación temporal), en el 10 (dificultades de control de intencionalidad) y 14 (perseveración o memoria ejecutiva). En todos los casos apuntando a déficits en los alumnos de bajo rendimiento.

Conclusiones

Los resultados obtenidos, como se ha indicado, sugieren sólo diferencias en algunas de las habilidades de las funciones ejecutivas de acuerdo al tipo de rendimiento en matemáticas de los estudiantes. Si bien hay poca investigación en el tema, la tendencia de nuestros resultados coincide con los de Barceló et al (2006), en el sentido de que ellos encontraron diferencias según el rendimiento académico de los estudiantes únicamente en la prueba neuropsicológica que mide flexibilidad conceptual, y no en otras, lo cual está relacionado con perseveración, rigidez y tendencia al fracaso en tareas novedosas.

Tabla 1. Estadísticos en el Cuestionario DEX por tipo de rendimiento en matemáticas de los participantes

Ítem	Grupo	Media	Desviación estándar
1	Bajo rendimiento	.89	.583
	Alto rendimiento	1.25	.866
2	Bajo rendimiento	1.33	1.188
	Alto rendimiento	1.00	.853
3	Bajo rendimiento	.39	.502
	Alto rendimiento	.25	.452
4	Bajo rendimiento	.83	.924
	Alto rendimiento	.92	.669
5	Bajo rendimiento	.94	.802
	Alto rendimiento	1.33	1.073
6	Bajo rendimiento	.72	.826
	Alto rendimiento	.50	.674
7	Bajo rendimiento	.83	.924
	Alto rendimiento	.50	.522
8	Bajo rendimiento	1.39	.979
	Alto rendimiento	1.08	.900
9	Bajo rendimiento	.67	.686
	Alto rendimiento	.75	.754
10	Bajo rendimiento	1.33	1.138
	Alto rendimiento	.75	.866
11	Bajo rendimiento	.72	.958
	Alto rendimiento	1.17	.718
12	Bajo rendimiento	.94	1.162
	Alto rendimiento	1.67	.888
13	Bajo rendimiento	1.11	1.132
	Alto rendimiento	1.50	1.243
14	Bajo rendimiento	1.00	.907
	Alto rendimiento	1.58	1.084
15	Bajo rendimiento	1.94	1.552

	Alto rendimiento	1.83	1.115
16	Bajo rendimiento	1.33	1.283
	Alto rendimiento	1.17	.835
17	Bajo rendimiento	1.17	1.043
	Alto rendimiento	1.50	.674
18	Bajo rendimiento	2.39	2.062
	Alto rendimiento	1.50	1.087
19	Bajo rendimiento	1.17	1.098
	Alto rendimiento	1.67	.651
20	Bajo rendimiento	2.39	1.195
	Alto rendimiento	2.17	1.115

Tomando en cuenta la adecuada confiabilidad y validez del Cuestionario DEX observada en este estudio es viable considerar la búsqueda de las causas del nivel de rendimiento en matemáticas en otras variables contextuales y personales del alumno. Sin embargo, también se considera conveniente evaluar las funciones ejecutivas, es decir los correlatos biológicos del aprendizaje, empleando pruebas neuropsicológicas más especializadas, por ejemplo baterías de pruebas (cf., Flores y Ostrosky-Solís, 2008) para descartar o confirmar el papel de esta variable en el rendimiento en matemáticas de los estudiantes.

Trabajo financiado por la DGAPA-PAPIME, UNAM (Proyecto No. PE302111).

Referencias bibliográficas

Acevedo, D. J. A., y Oliva, M. J. Ma. (1995). Validación y aplicaciones de un test de razonamiento lógico. *Revista de Psicología General y Aplicada*. *48* (3); 339-351.

Barceló, M. E., Lewis, H. S., y Moreno, T. M. (2006). Funciones ejecutivas en estudiantes universitarios que presentan bajo y alto rendimiento académico. *Psicología desde el Caribe. 18*; 109-138.

Carvallo, P. M., Caso, N. J. y Contreras, N. L. A. (2007). Estimación del efecto de variables contextuales en el logro académico de estudiantes de Baja California. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*. 9 (2), 1-15.

Chaytor, N.,y Schmitter-Edgecombe M. (2007). Fractionation of the dysexecutive syndrome in a heterogeneous neurological sample: comparing the Dysexecutive Questionnaire and the Brock Adaptive Functioning Questionnaire. *Brain Inj*; 21: 615-21.

Flores, L. J. C., Ostrosky-Solís, F., y Lozano, A. (2008). Batería de Funciones Frontales y Ejecutivas. *Revista Neuropsicología, Neuropsiquiatría y Neurociencias*, *8 (1),* 141-158.

González-Pienda, J. A., Núñez Pérez, J. A., Glez.-Pumariega, S., y García. G. M S. (1997). Autoconcepto, autoestima y aprendizaje escolar. *Psicothema,* 9 (2); 271-289.

Hamdy, A. El-F. (1990). Tendencies of learning thinking styles and affect of mathematics learning. *Proceedings Fourteenth PME Conference.* Cd. de México, Julio 15 a 20.

Papanastasiou, C. (2000). Internal and external factors affecting achievement in mathematics. *Studies in Educational Evaluation*, 26, 1-7.

Pedrero Pérez, E. J.; Ruiz Sánchez de León, J. M.; Rojo, M. G.; Llanero, L. M.; Olivar, A. A.; Bouso, S. J. C; Puerta, G. C. (2009). Versión española del cuestionario disejecutivo (dex-sp): propiedades psicométricas en adictos y población no clínica. *Adicciones*, *21* (2): 155-166.

Pedrero-Pérez, E. J.; Ruiz-Sánchez de León, J. M.; Lozoya-Delgado, P.; Llanero-Luque, M.; Rojo-Mota, G.; Puerta-García, C. (2011). Evaluación de los síntomas prefrontales: propiedades psicométricas y datos normativos del cuestionario disejecutivo (DEX) en una muestra de población española. *Revista de Neurología. 52* (7): 394-404.

Pineda, D. (2000) La función ejecutiva y sus trastornos. *Revista de Neurología*, 30 (8) 764.

Sánchez, R. J. G., Becerra, C. J., García, P. J., y Contreras, R. Ma. del S. (2010a). La dimensión afectiva y el rendimiento en estadística en estudiantes universitarios. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 23, 429-437.

Sánchez, R. J. G., Becerra, C. J., García, P. J., y Contreras, R. Ma. del S. (2010b, Julio). *Influencia del autoconcepto del alumno sobre el aprendizaje de la estadística. Una experiencia en estudiantes de la Carrera de Psicología.* Trabajo presentado en la 24ª. Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, Cd. de Guatemala, Guatemala.

Tárraga, M. R. (2008). Relación entre rendimiento en solución de problemas y factores afectivo-motivacionales en alumnos con y sin dificultades del aprendizaje. *Apuntes de Psicología. 26* (1); 143-148.

Tirapu, U, J., Rios, L. M., Maestú, U. F., y Arnau, E. (2011). *Manual de Neuropsicología*. Barcelona (España): Viguera.

Wilson, B.A., Alderman, N., Burgess, P.W., Emslie, H. y Evans, J, J. (1996). *Behavioural assessment of the dysexecutive syndrome*. Bury St. Edmunds, UK: Thames Valley Test.

"EN MATEMÁTICAS SOY LA QUE SACO MEJOR CALIFICACIÓN": IDENTIDAD GENÉRICA Y REPRESENTACIONES SOCIALES DE LAS MATEMÁTICAS ESCOLARES

Claudia Rodríguez Muñoz
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN México
claurom65@yahoo.com

Resumen. La investigación internacional en Educación Matemáticas ha dado a conocer las diferencias de género existentes en el desempeño matemático entre estudiantes de distintos niveles, han dado cuenta de una gran variedad de factores que se relacionan a estas diferencias. Este trabajo reporta los resultados de tres de los instrumentos y técnicas empleadas en la primera toma de datos de un estudio longitudinal que tiene como propósito conocer cómo influye la construcción de la estructura de género en la creación de la representación social de las matemáticas escolares y su impacto en el desempeño matemático en mujeres estudiantes de primaria y secundaria. Visibilizar que está detrás del buen desempeño en matemáticas de las estudiantes analizando los factores afectivos, identitarios y representacionales asociados a ello, puede orientar la construcción de acciones afirmativas que permitan que las estudiantes accedan a un mejor enfrentamiento con las tareas Matemáticas en el aula y la vida cotidiana.

Palabras clave: identidad genérica, representaciones sociales, matemáticas

Abstract. International research in mathematics Education has released the gender gaps in mathematics performance between students of different levels, has also noticed a variety of factors related to these difference. This paper reports the results of three of the instruments and techniques used in the first collection of data from a longitudinal study that aims to understand how the construction affects of structure of gender in the creation of social representation of school mathematics and impact on woman`s mathematical performance of primary and secondary students. Visible behind the good performance student analyzing some of the emotional factors, representational identity associated with it, can guide the construction of affirmative action that allow student access to a better engagement with mathematical tasks in the classroom and everyday life

Key words: generic identity, social representation, mathematics

Introducción

En relación al aprendizaje de las matemáticas son muchos los factores que influyen en las diferencias que se detectan entre varones y mujeres. Las investigaciones nacionales e internacionales, realizadas en las últimas décadas, señalan como importantes: las creencias y concepciones (Andrews y Hatch, 2000); la motivación (Middleton & Spanias, 1999); algunas variables cognitivas y las actitudes (McGraw, *et al.*, 2006; Pierce, Stacey y Barkatsas, 2007); la auto-confianza para trabajar en Matemáticas (Eccles, 1989; Jacobs *et a.,* 2002; Ursini, Sánchez, Orendain & Butto, 2004); los aspectos afectivos (McLeod, 1992, Gómez-Chacón, 2011).

Las investigaciones que se interesan en el estudio de la afectividad, la autoconfianza, las actitudes de las y los estudiantes hacia las matemáticas, por lo general describen estos aspectos como fotos instantáneas inamovibles. Por ello se considera que una alternativa teórica-metodológica viable para *"develar la cultura en el aula de matemáticas",* es realizar investigaciones desde dos aproximaciones teóricas que adquieren un *status transversal*, que pueden interpelar y relacionar diversos campos de la investigación, reivindicando y no sólo sobreponiendo los distintos puntos de vista de disciplinas diversas. La Teoría feminista y la Teoría de las Representaciones Sociales que permiten explorar los significados que construyen el pensamiento social de las personas que participan del proceso de aprendizaje de las matemáticas.

Son pocos los estudios que indagan la condición de las mujeres frente a las matemáticas sin compararlas con los hombres, las investigaciones y los análisis realizados hasta hoy, no dan cuenta de que sucede con las mujeres a las que les va bien o no en matemáticas, que factores están asociados a la diversidad de logros académicos que presentan las estudiantes de educación básica.

Explorar e interpretar a las mujeres y las matemáticas escolares a partir las experiencias de las estudiantes, desde la construcción de sus identidades genéricas, sus formas de concebir, vivir, representar y construir sus conocimientos matemáticos nos permitirá conocer y comprender la forma en que las estudiantes se constituyen.

La pregunta de investigación

¿Cómo influye la construcción de la identidad genérica de las estudiantes de primaria y secundaria en la construcción de su representación social de las matemáticas escolares a lo largo de tres años y cuál es el impacto de esa representación social de las matemáticas escolares en el desempeño de las estudiantes de educación básica?

Desde la Teoría de las Representación Social y la Teoría Feminista del Punto de Vista se pretende dar respuesta a pregunta formulada.

Pertinencia del marco teórico en Matemática Educativa

La escuela, institución encargada de educar, tiene entre sus funciones también la de reproducir y fortalecer las diferencias de género, y lo hace a través de sus normas y contenidos curriculares (Bustos, 1994; Gomariz, 1992; Scott, 1996). Como lo señalan Horkheimer y Adorno (2004) y Foucault (1997), la educación reproduce las formas sociales de dominación y explotación, no solamente en las relaciones de poder que se dan en el ámbito educativo, sino por la formación del pensamiento que se modela a través de las relaciones en el aula y la imposición por decreto de los contenidos.

El feminismo es un movimiento que cuestiona los valores y la estructura de una sociedad determinada y propone acciones que permitan corregirlos o transformarlos. A través de esta perspectiva, resulta evidente que a lo largo de la historia han prevalecido formas de organización social que suponen la virtual exclusión de la mujer de muchas de las esferas de la vida (arte, ciencia, política, trabajo) y su confinamiento dentro de los límites de la vida doméstica. En sus comienzos, el movimiento feminista se concentró en el desarrollo de una agenda política consecuente con este esclarecimiento: la completa transformación del *status quo* y la creación de una sociedad sin sexismo. Más recientemente la búsqueda de este objetivo ha sido enriquecida con el desarrollo de una teoría social feminista que cuestiona de un modo fundamental la tradicional (masculina) forma de hacer ciencia (Harding, 1986).

La teoría feminista es una teoría de poder. Cuyo objetivo es explicar el "origen de la opresión, supresión y represión" de la mujer. El punto de partida de esta teoría es el señalamiento del dominio masculino sobre las mujeres en prácticamente todos los periodos de la historia (Godelier, 1993).

En este momento se hace necesario evidenciar la coexistencia y complementariedad de los marcos teóricos que sustentan esta investigación. En primer lugar, estas teorías (la feminista y de la Teoría de Representaciones Sociales) nacieron en un mismo momento de cambio social y surgieron como alternativas frente a los modelos hegemónicos dentro de la epistemología social, en ambas teorías, la producción de saber comprende e integra la subjetividad y afectividad. A nivel teórico, tanto en el feminismo como en las representaciones sociales, se toma como punto de partida la construcción de las realidades humanas a partir de los contextos sociales, culturales e históricos. Ontológicamente, ambas entienden al ser humano como productor de sentidos, y se focalizan en el análisis de las producciones simbólicas, de los significados, del lenguaje, a través de los cuales los seres humanos construyen el mundo en que viven.

En ambas teorías el método es otro punto de encuentro. Las representaciones sociales no han privilegiado ningún método o técnica de investigación en particular, la complejidad del fenómeno representacional legitima combinar enfoques o perspectivas teóricas, que de modo complementario, se articulan y asumen diferentes abordajes permitiendo un acercamiento más profundo y multidimensional, estos marcos ha servido en otros estudios llamados de género (Burton, 1995, Rodríguez.2009, Ursini, 2010) En el caso de la teoría feminista, cuando se habla de método y metodología, "*a menudo, se refieren más que a los procedimientos y técnicas de investigación, a la perspectiva y enfoque epistemológico*" (Kaplan, 1995, pág. 89).

Por último otro elemento de cercanía entre estas dos teorías es la esencia reivindicativa de las o los sujetos y la apuesta por un cambio social. En el caso del feminismo ambas cuestiones son las que impulsaron el movimiento. Simultáneamente expresiva y constructiva de lo social, la representación social no es sólo un medio de conocimiento, sino también un instrumento de acción, su particularidad estriba en la posibilidad de deconstrucción y reconstrucción, siendo entonces una posibilidad metodológica para utilizarla como herramienta de reflexión, interpretación y cambio. Así, al igual que las representaciones sociales, esta perspectiva funge a su vez como una metodología reconstructiva que apunta hacia el surgimiento de relaciones más justas, equitativas e igualitarias.

Estas representaciones sociales se constituyen a partir de una serie de materiales de muy diversas procedencias, gran parte de estos materiales como señalan Jodelet (1986) e Ibáñez (1992) provienen del fondo cultural acumulado en la sociedad a lo largo de su historia. Este fondo cultural común circula a través de toda la sociedad, bajo la forma de creencias ampliamente compartidas, de valores históricos y culturales que conforman la memoria colectiva y hasta la identidad de la propia sociedad. De tal forma, ese orden simbólico, traducido en arbitrariedad cultural es el que determina los límites dentro de los cuales es posible percibir y pensar, determina por tanto lo visible y lo pensable.

Consideraciones metodológicas

El presente trabajo es un estudio de tipo exploratorio-descriptivo. Con base en la evolución del fenómeno, se puede clasificar como longitudinal porque recolecta datos en distintos momentos, a lo largo de tres ciclos escolares (Hernández, Fernández y Baptista, 2006).

La investigación se realiza en las instalaciones de dos escuelas públicas (primaria y secundaria) ubicadas al sur de la Ciudad de México. El estudio en curso inicia su desarrollo y recolección de datos en el ciclo escolar 2009-2010 y concluirá la fase de recolección de datos a mediados del ciclo escolar 2011-2012.

El grupo de participantes en la investigación está integrado por 40 estudiantes mujeres inscritas en las escuelas seleccionadas, 20 son estudiantes mujeres que cursaron 4° de primaria, otras 20 son estudiantes mujeres que cursaron 1° de secundaria durante el ciclo escolar 2009-2010.

Los instrumentos y técnicas que se presentan en este reporte son:

- Asociaciones libres (Abric, 1994), sobre 10 problemas matemáticos propios del nivel educativo en que estudian las participantes. Se considera pertinente para este estudio, dado que permite recoger y analizar un conjunto de relaciones significativas que las estudiantes tienen sobre las matemáticas, diferenciando cada una de las áreas del conocimiento matemático que se abordan en la currícula de primaria y secundaria.

- ❖ Grupos focales (Marková 2003), sobre la experiencia vivida frente al fenómeno de aprendizaje de las matemáticas. Se aplica una guía abierta de discusión para grupos focalizados, dirigida a recabar información de las estudiantes sobre tres categorías de análisis: Actitud hacia las matemáticas, autoconfianza en el desempeño matemático y creencias en torno las matemáticas escolares.
- ❖ Entrevistas en profundidad (Bardín, 1996), con aquellas estudiantes que reportan el mejor aprovechamiento en sus aulas de matemáticas. Por entrevistas en profundidad entendemos reiterados encuentros cara a cara entre la investigadora y las informantes, encuentros dirigidos hacia la comprensión de las perspectivas que tienen las informantes respecto de sus vidas, experiencias o situaciones, tal como las expresan con sus propias palabras.

Resultados

Asociaciones libres: Las palabras asociadas a cada reactivo se analizaron con el programa Excel para obtener las frecuencias de los términos asociados por las estudiantes. Las evocaciones permitieron observar las creencias, la autoconfianza, la información y la actitud hacia las matemáticas, por medio de un análisis de contenido.

Las estudiantes de primaria tienen una mejor actitud y autoconfianza hacia trabajar con matemáticas que las estudiantes de secundaria, frente a los problemas planteados las palabras evocadas con mayor frecuencia por las estudiantes de primaria fueron: "fácil" (82), "si puedo" (45), "me gusta" (28); entre las asociaciones emitidas por las estudiantes de secundaria más recurrentes estan: "fácil" (54), "más o menos" (46).

Si jerarquizamos las áreas de las matemáticas escolares que se abordan en la curricula en relación a la autoconfianza de las estudiantes de primaria podriamos establecer que los problemas análisis de la información, los números, sus relaciones y sus operaciones, procesos de cambio, les generan emociones de mayor comodida y certidumbre.

En el caso de las estudiantes de secundaria se da un proceso distante, de autoconfianza negativa con el álgebra, los procesos de cambio y probabilidad.

Es relevante señalar que en Geometría, contrario a lo reportado en diversas investigaciones en matemática educativa, respecto a las diferencias de género que favorecen a los hombres cuando se enfrentan a problemas de visualización espacial, (Ben-Chaim, *et al.*, 1985; González, 2003) en este grupo de estudiantes de secundaria se han desarrollado mejores habilidades para visualizar, analizar, interpretar y representar una función cuadrática, aun cuando la tarea no era resolver el ítem, es evidente que las evocaciones emitidas por las estudiantes ponen al descubierto mayor autoconfianza ante este ítem en específico

Tanto en las estudiantes de primaria como en las de secundaria circulan creencias que alrededor de la Representación Social hegemónica de la sociedad mexicana, donde se piensa que las matemáticas son muy importantes para la vida cotidiana y la vida academica, pero al mismo tiempo permea la creencia de que son difíciles, complicadas, laboriosas, (sobre todo en las estudiantes de secundaria).

A lo largo del instrumento podemos constatar que las estudiantes de forma espontánea en general no reportan descontento o aversión hacia las matemáticas. Son pocos los casos en que la frase "no me gustan las Matemáticas" es plasmada o se ve reflejada en las producciones de asociación libre.

Grupos focales

Actitud hacia las matemáticas

A partir del análisis de los discursos podemos deducir que las mujeres se reconocen como participativas y con mejor actitud en la clase de matemáticas, atribuyéndolo al hecho de ser más disciplinadas y atentas. Al parecer, el ambiente de trabajo en el aula de matemáticas pocas veces favorece el aprendizaje. Con frecuencia las estudiantes manifestaban sentirse incomodas por las burlas constantes de sus compañeras y compañeros, lo que las lleva a sentir miedo de expresar alguna duda o de participar en la clase de matemáticas y a no ser asertivas.

> …son súper burlones y a mí me da miedo. Por ejemplo, los niños son los más burlones, más que nada me da miedo equivocarme. Cuando estoy segura de que sí es la respuesta correcta, pues sí la digo, sí participo.

Sólo el 20% de las estudiantes de secundaria y un 10 % de las estudiantes de primaria expresan abiertamente una actitud negativa hacia las matemáticas y justifican su falta de interés por no entenderlas.

Autoconfianza en el desempeño matemático

Las estudiantes de ambos niveles educativos manifiestan sentirse más seguras al trabajar en equipo porque pueden intercambiar ideas. Si bien existen matices en sus discursos, coinciden en que el trabajo en equipo puede ser más productivo y apoyarles en la comprensión de los contenidos matemáticos.

> Así es mejor, en equipo. Aja, es mejor que individual. Porque en lo individual nada más te quedas así, pensando si estaré bien o no.

La autoconfianza para trabajar en matemáticas es más positiva en las estudiantes de primaria que en las de secundaria.

Creencias en torno las matemáticas escolares

Tanto en las estudiantes de primaria como en las de secundaria circulan creencias que alrededor de la Representación Social hegemónica de la sociedad mexicana, donde se piensa que las matemáticas son muy importantes para la vida cotidiana y la vida académica, pero al mismo tiempo permea la creencia de que son difíciles, complicadas, laboriosas, esta creencia esta presente con mayor intensidad en las estudiantes de secundaria que en las de primaria.

Las chicas de secundaria además comparten la creencia de que no son buenas en matimáticas y en muchos de los casos no las consideran como algo que deseen estudiar en su formación futura. Las profesiones a las que aspiran siguen apelando al estereotipo de género, es decir, se inclinan por licenciaturas orientadas al cuidado o atención de los otros, deseando ser psicólogas, enfermeras, educadoras, profesoras, médicas, estilistas, azafatas.

> Me gustaría también ser educadora, sí, me encantan los niños chiquitos. Pero, todo, menos que sea algo de matemáticas!

Entrevistas en profundidad

Estas entrevistas en profundidad se realizan sólo con aquellas estudiantes que resultan más interesantes para la investigación, este reporte se enfoca a las estudiantes que muestran mayo éxito en su desempeño matemático.

La composición familiar de las estudiantes que tienen éxito en matemáticas es muy variada, en este momento de la evolución del estudio no podemos determinar que un tipo de familia favorezca (por su estructura) el desarrollo de conocimientos y habilidades matemáticas.

En términos de filiación identitaria de género podemos afirmar que la institucionalización de la falda en las escuelas oficiales de la Ciudad de México crea una apariencia física estereotipada en las estudiantes entrevistadas, sin embargo las actitudes y actividades que realizan dentro y fuera de la escuela no son estereotipadas.

Las cuatro estudiantes relatan en las historias de vida que realizan actividades deportivas extra escolares, todas ellas contribuyen en las labores del hogar, en casa se fomenta la equidad genérica, son estimuladas afirmativamente respecto a sus capacidades.

> Lavo mi ropa desde los 7 años de edad, cuando termino mis deberes de casa voy a la biblioteca a leer y saco libros para seguir leyendo en mi casa, mi mamá no

tiene dinero para comprarme libros, pero me ayudó a conseguir mi credencial de la biblioteca.

Siempre tengo calificaciones muy buenas, menos en historia y geografía, en matemáticas soy la que saco mejor calificación, eso me hace sentir muy feliz, pero me da pena que todos me vean cuando la maestra dice que soy la mejor.

La representación social de las matemáticas que construyen estas estudiantes está vinculada al pensamiento que permea en la sociedad mexicana, exceptuando la idea de que son una disciplina de dominio masculino, este estudio en desarrollo logra ir trazando las líneas que develen los que factores influyen en el éxito en el enfrentamiento de las tareas matemáticas en estas estudiantes.

Referencias bibliográficas

Abric, J.C. (1994). *Prácticas Sociales y Representaciones.* México: Ed. Coyoacán.

Andrews, P. y Hatch, G.(2000). A comparison of hungarian and english teachers' conceptions of mathematics and its teaching. *Educational Studies in Mathematics 43 (1),* 31-64.

Bardín, L. (1996). *El análisis de contenido.* Madrid, España: Akal Universitaria.

Ben-Chain, D., Lappand, G. y Houang, R. T. (1985). Visualizing rectangular solids made of small cubes: Analizing and effecting students' performance. *Educational Studies in Mathematics 16*, 389-409.

Burton, L. (1995). Moving Towards a Feminist Epistemology of Mathematics, *Educational Studies in Mathematics* 28, 275–291.

Bustos, O. (1994). La formación del género: El impacto de la socialización a través de la educación. *Antología de la sexualidad humana*. México: Porrúa.

Eccles, J. S. (1989). Bringing young women to math and science. In M. Crawford & M. Gentry (Eds.*), Gender and thought: Psychological Perspectives* (pp. 36-58). New York: Springer.

Foucault, M. (1997). *Microfísica del poder*. Madrid: La piqueta

Godelier, M. (1993). Las mujeres y el poder político. *Antropológicas* 7, 75-82

Gomariz, E. (1992). Los estudios de género y sus fuentes epistemológicas: Periodización y perspectivas. *Fin de Siglo. Género y Cambio Civilizatorio17*, 15-21

Gómez-Chacón, I. Mª (2011). Beliefs and strategies of identity in Mathematical Learning, In Roesken, B. & Casper, M. (Eds.). *Current State of Research on Mathematical Beliefs. XVII* Proceedings of the MAVI-17. (pp. 74-84), Bochum, Germany

González, R.M. (2003). Diferencias de Género en el Desempeño matemático. *Educación Matemática 15 (2),* 129-161

Harding, S. (1986). *The Science Question in Feminism, Ithaca*, NY: Cornell University Press

Horkheimer, M. y Adorno, T (2004). *La industria cultural, en Dialéctica de la Ilustración. Fragmentos Filosóficos*. Madrid: Tecnos.

Ibáñez, T. (1992). *Aproximaciones a la Psicología Social.* Barcelona: Sendai.

Jacobs, J. E., Lanza, S., Osgood, D. Eccles, J. & Wigfield, A. (2002). Changes in children's self-competence and values: Gender and domain differences across grades one through twelve. *Child Development, 73,* 509 – 527.

Jodelet, D. (1986). La representación social: fenómenos, concepto y teoría. En S. Moscovici (coord.) Psicología Social II. México: Paidós.

Kaplan, G. (1995). Feminist methodology is it a fact or fiction? *Bulletin de Méthodologie Sociologique, 46,* 88-98.

Marková, I. (2003). *Le focus groups. Em S. Moscovici* e *F. Buschini (Orgs.), Les méthodes des sciences* (pp.221-242). Paris: PUF.

McGraw, R., Lubienski, S. y Strutchens, M. E. (2006). A Closer Look at Gender in NAEP Mathematics Achievement and Affect Data: Intersections with Achievement, Race/Ethnicity, and Socioeconomic Status. *Journal for Research in Mathematics Education. 37(2),*129-150.

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: a reconceptualization. En D. A. Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* (p.p. 575-596). New York: Mc Millan.

Middleton, J.A. & Spanias, P. A. (1999). Motivation for achievement in mathematics: Findings generalizations and criticism of the research. *Journal for Research in Mathematics Education 30 (1),* 65-88.

Pierce, R., Stacey, K. & Barkatsas, A. (2007). A scale for monitoring students' attitudes to learning mathematics with technology. *Computers & Education 48 (2),* 285–300.

Rodríguez, C. (2009). *Diferencias de género en las representaciones sociales en la enseñanza de las Matemáticas con Enciclomedia.* Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Scott, J. (1996). El género: Una categoría útil para el análisis histórico. En M. Lamas (comp.) *El género: la construcción cultural de la diferencia sexual.* México: Porrúa-PUEGE.

Ursini, S. (2010). Diferencias de género en la representación social de las matemáticas: un estudio con alumnos y alumnas de secundaria. En N. Blazquez, F. Flores y M. Ríos (Coords.), *Investigación feminista. Epistemología, metodología y representaciones sociales.* (p.p. 79-104). México: UNAM, CIICH, CRIM Facultad de Psicolología.

Ursini S., Sánchez G., Orendain M. & Butto C. (2004). El uso de la tecnología en el aula de matemáticas: diferencias de género desde la perspectiva de los docentes. *Enseñanza de las Ciencias* 22(3), 409-424.

Watt, H.M.G. (2004). Development of Adolescents' Self-Perceptions, Values, and Task Perceptions According to Gender and Domain in 7th-through 11th-Grade Australian Students. *Child Development 75 (5)*, pp. 1556-1574.

PROCESOS DE GENERALIZACIÓN QUE INTERVIENEN EN EL APRENDIZAJE DEL ALUMNO AL HACER USO DE SUCESIONES

Juan Carlos Osorio Paulino
Cinvestav - IPN México
josorio@cinvestav.mx, thinkingmathematics@live.com

Resumen. El presente reporte de investigación de tipo cualitativo, tiene por objeto dar a conocer, como parte de la investigación, resultados relacionados con los procesos de generalización que se presentan en alumnos de edades 14-15 años al tratar con sucesiones figurativas, en donde el patrón matemático se comporta en forma lineal y cuadrática. Se señala que el hacer uso de patrones, desarrolla el pensamiento algebraico, así como también permite a los estudiantes desarrollar la comprensión del concepto como establecer relaciones matemáticas. Como parte de la perspectiva teórica se ha empleado el Modelo Teórico Local, considerando tres de los cuatro componentes: Competencia formal, modelo de enseñanza y procesos cognitivos..

Palabras clave: generalización, patrones, inducción

Abstract. This report of qualitative research, aims to raise awareness as part of research results related to generalization processes that occur in students aged 14-15 years in dealing with figurative sequences, where the pattern behaves mathematical linear and quadratic. It is noted that the use of patterns, algebraic thinking develops, and also allows students to develop an understanding of the concept and mathematical relationships. As part of the theoretical perspective we have employed the local theoretical model, considering three of the four components: Competition formal model of teaching and cognitive processes.

Key words: generalization, patterns, induction

Introducción

Varias investigaciones que tienen que ver con los procesos de generalización, identificar términos faltantes y las dificultades que tienen los alumnos al enfrentarse a una situación en la que implica hacer uso de patrones, están siendo tratadas de manera considerable.

La generalización es un medio que conlleva hacia la abstracción, por tanto el aprender un lenguaje algebraico, requiere de la comunicación y esta, se presenta cuando el alumno identifica un patrón e intenta expresarlo a alguien (Mason, Graham, Pimm & Gowar, 1985). El problema de investigación radica en que los alumnos, al tratar de construir una expresión algebraica de segundo orden mediante el tratamiento de sucesiones figurativas, presentan dificultades, no alcanzando a percibir los cambios que presenta una figura respecto a otra o identifican un patrón numérico y llegan a su posible generalización. Por tal razón, nuestro objetivo se centra en observar las tendencias cognitivas que presenta el alumno cuando se encuentra en la búsqueda del enésimo término de una sucesión figurativa tanto lineal como cuadrática y cómo proceden para llegar a generalizar el comportamiento que tiene el patrón matemático.

Como parte de la investigación, es indispensable contar con marco teórico y metodológico para la observación experimental en materia educativa: el Modelo Teórico Local (Filloy, 1999).

De este modelo se ha considerado a sólo tres de sus cuatro componentes: procesos cognitivos, modelo de enseñanza y la componente formal.

En este artículo se pretende dar a conocer los procesos de generalización que se observan en entrevista, cuando el alumno trata con este contenido: percibir un patrón, explicar en lengua materna y escrita cómo se obtuvieron tales elementos para cada uno de los términos correspondientes, y la construcción de una expresión algebraica.

Justificación

Las dificultades que se abordan a partir del álgebra mediante la generalización, han sido tema de investigación como es el caso de Mc Gregor & Stacey (1993) quienes mencionan que los estudiantes tienen dificultades para describir y expresar algebraicamente patrones. El estudio de patrones es una forma productiva para desarrollar el pensamiento algebraico en grados elementales o básicos según Ferrini, Lappan & Phillips (1997). Cuando los alumnos estudian patrones, hacen uso de inducción debido a que este proceso cognitivo parte de situaciones particulares en las que se observan ciertas regularidades que tienden a generalizar; es decir, buscan sintetizar un patrón que se identifica en una sucesión. Este proceso de descubrimiento ha sido debatido en el Curriculum and Evaluations Standards for School Mathematics (NCTM, 1989). De igual forma, Polya (1945) afirma que este tipo de razonamiento da lugar al conocimiento científico porque permite descubrir leyes generales a partir de la observación de casos particulares. Mientras que Mason et al. (1985) corroboran esto al decir que es una manera de acercarse al álgebra; como generalización o pensamiento en términos de número general. La inducción es un medio potente para la adquisición de conocimiento, para realizar descubrimientos matemáticos y para poner a los alumnos en una situación semejante a la de un matemático en su quehacer científico (Cañadas, M. C., Castro E. & Castro, E. 2008).

Método

La investigación es de tipo cualitativo, en una primera fase o como antecedente, se revisó el eje sentido numérico y pensamiento algebraico de la propuesta institucional referente a educación secundaria con el objeto de identificar cómo el contenido matemático aquí descrito es tratado y al mismo tiempo de qué manera está asociado con otros conceptos matemáticos referentes al álgebra, debido a que se encontraron insuficientes actividades relacionadas con patrones númericios o figurativos de segundo orden, siendo que en los programas de estudio se describe que el alumno debe ver lo general en lo particular (SEP, 2006) para obtener una expresión algebraica que le permita calcular el énesimo término de una sucesión regida por un patrón. Posteriormente, para el diseño de la experimentación es importante identificar, para la observación de casos, un corte didático; es decir un momento del programa de estudio, en el que lo aprendido por parte del alumno no permita que lo que se pretende enseñar pueda descubrirse en forma espontánea.

Todo con el fin de que encontrar tendencias y procesos de generalización que se presentan en la población en estudio, con lo aprendido anteriormente, ante las preguntas más elementales.

Para tales efectos y desarrollo de la experimentación, se eligió una población de 15 alumnos de tercer grado de una escuela secundaria general, a los cuales se les aplicaron dos cuestionarios exploratorios para medir la eficiencia en el uso de los SMS (Sistemas Matemáticos de Signos) que se consideran más concretos del nuevo SMS más abstracto.

De igual forma, al ser analizadas estas evaluaciones previas al diseño de actividades, permitirá observar y clasificar por perfiles o estratos a la población según sus desempeños en entrevista clínica y hacer un análisis e interpretación de las observaciones.

A la población en estudio la hemos clasificado bajo tres criterios que bien es apego a la estructura que tiene el cuestionario o evaluación diágnóstica, el primero está asociado a observar las competencias sintácticas de los alumnos en el uso del SMS más concreto, el segundo que tiene que ver con la semántica de esos SMS y el tercero vincula los usos intuitivos y espontáneos de los perfiles del SMS más concreto que son utilizados en las descodificaciones de las nuevas situaciones de enseñanza.

Resultados

A continuación mostramos un ejemplo de un reactivo, que forma parte del cuestionario exploratorio y en el que varios alumnos, al tratar de dar respuestas a las interrogantes presentaron semejantes dificultades, que sin duda, algunos son errores de procedimiento y están asociados con el proceso de generalización. Cabe remarcar, que la consigna consiste en completar el término cinco y seis respectivamente. Además, explicar cómo se encontraron valores, así como determinar una expresión algebraica que represente el comportamiento de dicha sucesión (ver figura 1).

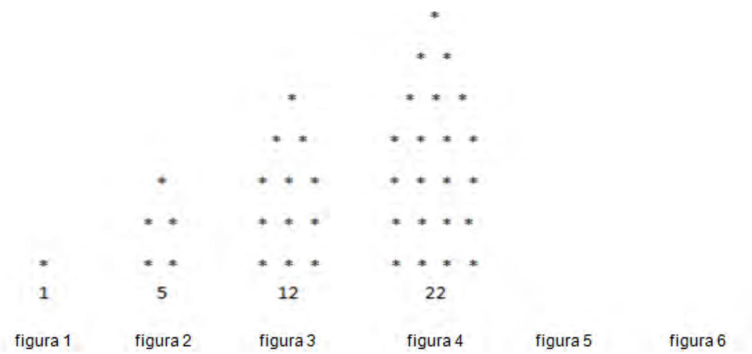


Figura 1.Ejemplo de sucesión cuadrática.

Una de las dificultades que presentaron los alumnos fue que no pudieron percibir un patrón; es decir, no se percataron que entre una y otra figura existe una regularidad, por tanto no se completan los términos faltantes. Percibir, forma parte del proceso de generalización, sin embargo, los alumnos no discriminan que sucede entre una figura y otra. A continuación se presenta la respuesta que se tuvo, en el cuestionario exploratorio, de uno de los varios casos que fueron observados, en específico, de una alumna que hemos denotado con la letra B (ver figura 2).

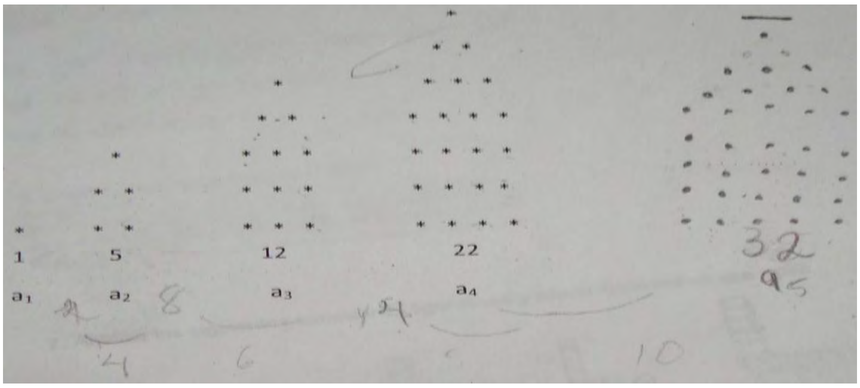


Figura 2. Respuestas al reactivo del cuestionario exploratorio por la alumna B.

Para dar cuenta de las respuestas escritas, se realizaron entrevistas. Consideremos un fragmento de una ellas, en donde la alumna B explica que procedimiento siguió para dar respuesta a las interrogantes que se le fueron planteandas:

Entrevistador: ¿Por qué corresponden 32 puntos a la figura 5?

B: Porque igual me basé en las figuras anteriores y fui anotando cuál era su variación entre cada una de las figuras, aquí este, me dio cuatro, ocho, catorce, y ya para terminar la siguiente igual tuve que hacer nuevamente otra, ver cuánto me faltaba, cuál era, si había una constante más entre las figuras, entonces saqué igualmente otra serie por así decirlo y me dio que iban aumentan… ésta si tenía una constante que sería el número dos y aquí va aumentando de dos en dos entonces eso me ayudo a determinar cuántos números de puntos yo iba a poner en la figura cinco.

La alumna B señala que de la figura uno a la figura dos, hay cuatro puntos de diferencia, luego para obtener la tercera figura, considera el número (variación, en palabras de la alumna B) obtenido, que es 4 y suma 8 para poder obtener los 12 asteriscos de la tercera figura, por tanto para obtener la cuarta figura sumó 8 más 14 para obtener un total de 22 asteriscos (ver figura 3).

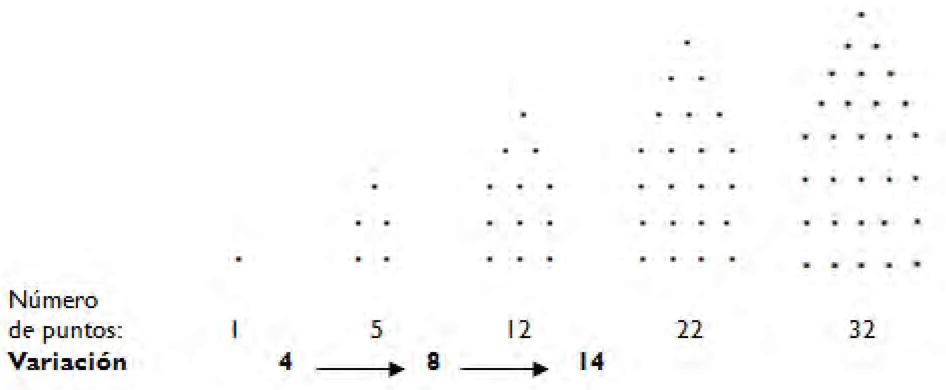


Figura 3. Representación de la obtención de los valores llamados "variaciones"

Si bien es cierto que aquí nos estamos centrando en un caso, no significa que estemos por el momento, universalizando la presencia de un proceso de generalización, pero si es importante que se tenga en cuenta que para llegar a la abstracción se requiere percibir, cosa que la alumna B, junto con otros compañeros, no observaron esas regularidades en las figuras, aún sabiendo que ellas son un recurso que pueden ayudar a contabilizar el número de elementos que contiene cada figura y encontrar un patrón.

Siguiendo en la misma línea, se cuestiono a B para saber cuántos asteriscos tendrá la quinta figura, B explico: "…para terminar la siguiente igual tuve que hacer nuevamente otra, ver cuánto me faltaba…" Observamos que primero realizo nuevamente una diferencia, entre la "variación" que obtuvo para encontrar una regularidad. Entre el número 8 y 4 hay 4 de diferencia, entre la número 14 y 8 hay 6 de diferencia (ver figura 4).

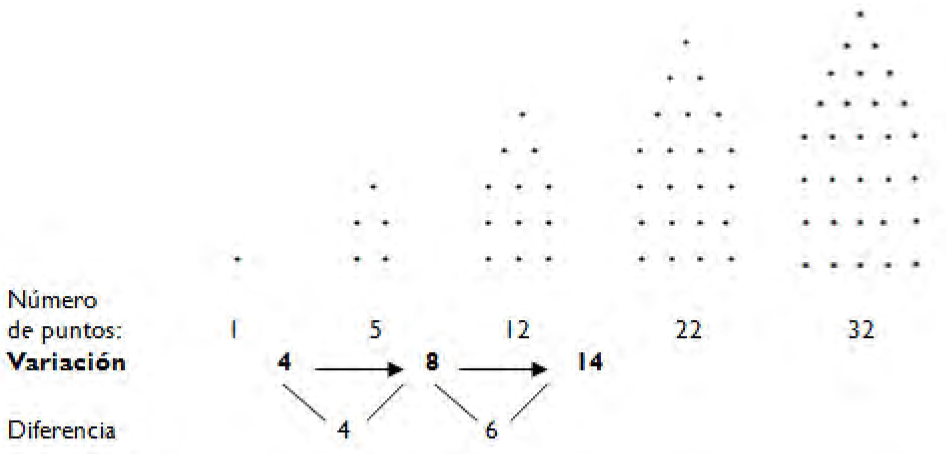


Figura 4. Representación de la diferencia existente entre los valores de la "variación".

Posteriormente B comento "…saqué igualmente otra serie por así decirlo…ésta si tenía una constante que sería el número dos y aquí va aumentando de dos en dos…" Esto quiere decir que obtuvo otros números, respecto a 4 y 6. Obtuvo el número dos, que ella denoto como constante, la cual iría aumentando en esa línea ese mismo número, por tanto, el siguiente número que corresponde a la línea llamada diferencia sería 8. Hemos encerrado en una circunferencia ese valor (ver figura 5)

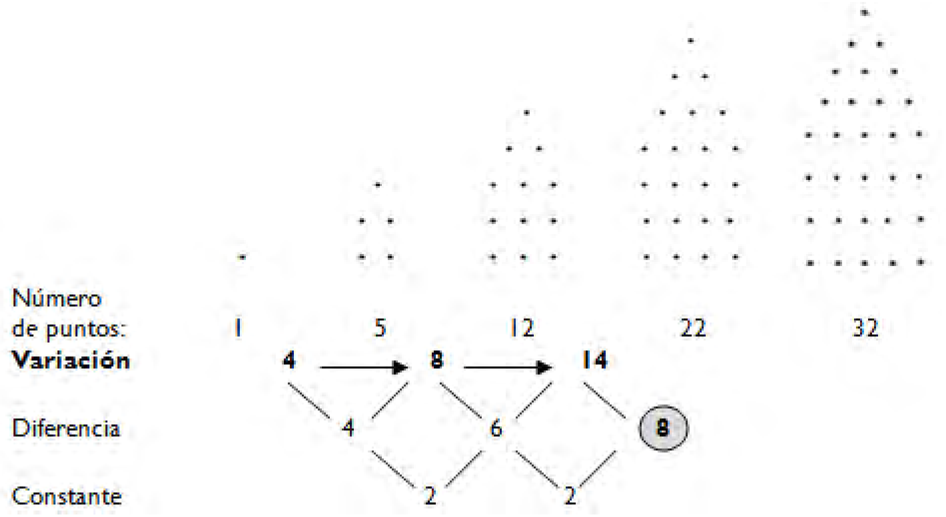


Figura 5. Representación de cómo B encontró la constante y determino el valor 8.

En entrevista B señala, que el primer número de la "variación" con la diferencia (así lo hemos denotado), estos números los suma y obtiene la segunda "variación", luego considera el segundo número de la "variación" con la segunda diferencia y los suma para obtener el tercer término de la "variación". Para obtener el cuarto término de la "variación" la entrevistada suma el tercer número de la "variación" que es 14 con el número que de acuerdo a la explicación que B dio debe ser 8 (el que está encerrado en la circunferencia), y una vez sumados nos da 22, que sería el siguiente número de la "variación", el cual está encerrado en un cuadrado (ver figura 6)

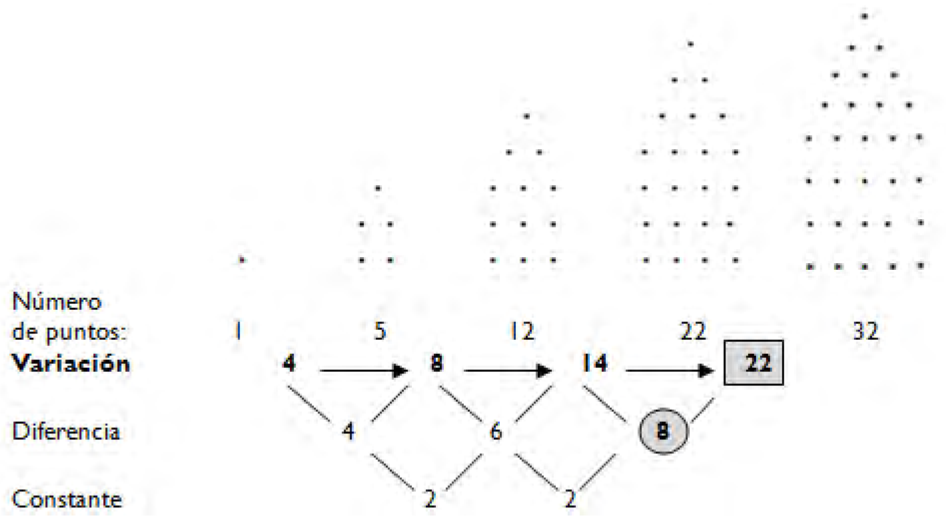


Figura 6. Representación de cómo B visualiza parcialmente la regularidad.

Para obtener el número total de puntos de una figura, recordemos que B ha sumado de acuerdo a su regla, la antepenúltima y penúltima "variaciones". Entonces significa que B sumó 14 y 22 para obtener 36, que es el valor en número de asteriscos que de acuerdo al procedimiento empleado, tendría la figura 5.

Por otra parte, una de las cosas que podemos destacar en esta actividad que llevaron a cabo los alumnos, es que parte de la población en estudio consideró que cada figura tenía una base, por ejemplo la figura 5 está representada por una base de 5×5, más las regularidades de los siguientes pisos.

Hay quienes contabilizaron de uno por uno el número de asteriscos para dibujar la subsecuente figura. Otros en cambio, utilizaron el método del tanteo al ser cuestionados sobre el número de asteriscos que tendría otra figura diferente a las que se le pedían en la consigna.

Otra cosa que debe destacarse es la presencia de las primeras y segundas diferencias que si bien en este caso están mal calculadas, conforman un procedimiento para obtener la expresión general de una sucesión, que contiene un proceso de generalización porque perciben regularidades, expresan en lenguaje materno y escrito cómo determinaron cada una de ellas al ser entrevistados.

También hubo alumnos quienes intentaban legitimar o validar expresiones algebraicas muy cercanas a la representación del comportamiento de una sucesión, percibieron un patrón puesto que completaron de manera correcta las figuras que se les pedía, explicaron claramente las regularidades que encontraron, así como describieron que tuvieron que hacer para completar o saber cuántos asteriscos tendría una subsecuente figura.

Conclusiones

Cuando se presenta una actividad a los alumnos con secuencias figurativas o numéricas de tipo lineal o cuadrática ellos, no todos, perciben una regularidad; observan lo que va pasando de una figura o número a otro.

Es importante mencionar que la población en estudio identificó mejor el patrón cuando se trataba con figuras, debido al tipo de arreglos, pues permitía observar claramente las regularidades, porque se analizan todas sus partes, desde que se descompone, por así decirlo, a la figura.

También podemos afirmar que el alumno al tratar con sucesiones figurativas le permite conjeturar e iniciarse en los principios del álgebra, debido a que hacen uso de expresiones verbales, palabra, dibujos y símbolos que les permiten acercarse a la simbolización.

Por tanto, los alumnos describen y dicen cuál es patrón numérico, registran numéricamente como va creciendo esa sucesión y además construyen una expresión que permite asociarla con el patrón numérico encontrado, debido a que identifican constantes y explican que significan cada uno de los términos que conforman a la expresión siempre y cuando el patrón sea lineal.

Sin embargo, no en todos los caso, se observó que cuando se trata de relacionar una figura o número cuyo patrón es de tipo cuadrático, sucede lo contrario, varios alumnos no se percatan de que está sucediendo de un término a otro, no observan qué pasa de una figura a otra, mucho menos expresan su respuesta, no dicen cuál el patrón que sigue dicha sucesión, por ejemplo, a la pregunta ¿cómo llegaste o encontraste la figura o número siguiente de la sucesión? En consecuencia, no expresan en forma simbólica el comportamiento que está teniendo el patrón. Esta tendencia que manifiestan los alumnos, se ve implicado más cuando se emplean numerales y no figuras. A pesar de que percibir una figura que forma parte de una sucesión de tipo grado dos, les ayuda a los alumnos a ver cuál es el patrón, a los alumnos no les permite establecer u obtener una expresión que generalice el comportamiento de la sucesión, ni mucho menos registrar con palabras u otros símbolos ese patrón, a menos que la sucesión sea de tipo lineal.

En general, los alumnos tienden a quedarse en la etapa de verbalización o la expresión escrita cuando tratan con sucesiones cuyo patrón es de segundo orden. Sin embargo, observamos que al hacer uso de sucesiones, siendo un caso de inducción, permite que el alumno genere sus propias estrategias.

Referencias bibliográficas

Cañadas, M. C., Castro, E. & Castro, E. (2008). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3° y 4° de Educación Secundaria Obligatoria en el problema de las baldosas. *PNA, 2*(3), 137-151.

Ferrini, J., Lappan G. & Phillips E. (1997). Experiencies with Patterning. *Teaching Children Mathematics 3 (6)* 282-289.

Filloy, E. (1999). *Aspectos Teóricos de Algebra Educativa.* México: Iberoamérica.

Mac Gregor, M y Stacey, K. (1993). "Seeing to patern and writing to rule", PME, *Psychology of Mathematics Education*, Ibaraki, Japón.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D. & Gowar, N. (1985). *Routes to roots of algebra*. Gran Bretaña: The Open University Press.

National Council of Teacher of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, Virginia: Council.

Pólya, G. (1945) *How to solve it,* University Press. Princeton.

SEP, 2006. *Programa de estudios 2006*. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas. Dirección General de Desarrollo Curricular, que pertenece a la Subsecretaría de Educación Básica, México.

CONFIGURACIONES EPISTÉMICAS DE LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO, EN LA ANTIGUA CIVILIZACIÓN CHINA

Angélica María Martínez, Mario Arrieche
Universidad Pedagógica Experimental Libertador de Maracay Venezuela
angelicmar5@yahoo.es, mariojose@hotmail.com

Resumen. Este artículo tiene como propósito fundamental mostrar el análisis realizado, en torno a las configuraciones epistémicas y el desarrollo histórico de la ecuación de segundo grado dada por la civilización china durante los siglos II a.C. al XIII d.C. El Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemática destaca la importancia de analizar la faceta epistemológica, porque permite vislumbrar bajo marcos institucionales específicos las configuraciones epistémicas, que en otras palabras constituyen el uso y relación de situaciones-problema, técnicas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, que dieron origen a dicha ecuación. Metodológicamente se realizó un estudio documental, teniendo en cuenta distintos períodos de China, para llegar a conclusiones de tipo didáctico; entre ellas, el uso de diversos métodos como: fan fa o elemento celeste, bajo argumentos aritméticos y geométricos, que pueden constituir una alternativa educativa al momento de resolver ecuaciones de segundo grado.

Palabras clave: ecuación de segundo grado, configuración epistémica, civilización china

Abstract. This article is intended to show the analysis done about the epistemic configurations and historical development of the second degree equation given by the Chinese civilization during the II century B.C. and the XIII century A.C. The onto-semiotic approach of Mathematical Cognition and Instruction emphasizes the importance of analyzing the epistemological facet is highlighted, because it allows a glimpse of the epistemic configurations arising from the institutional guidelines, which in other words constitute the use and relationship of problem-situations, techniques, languages, concepts, proposals, arguments and procedures, which led to the origin of this equation. Methodologically, a documental study was performed, taking into account different time periods of China, to reach conclusions of didactic type; among them, the use of various methods such: fan fa or celestial element, under arithmetic and geometric arguments, that can be an educational alternative when solving second degree equations.

Key words: second degree equation, epistemic configuration, historical development

Introducción

El presente estudio histórico-epistemológico se centró en la evolución de algunos de los problemas, ideas y conceptos fundamentales del álgebra, con énfasis en la conceptualización de la ecuación de segundo grado porque en gran medida este análisis permite redescubrir a través de la historia, dificultades y errores en el desarrollo de los conceptos matemáticos ligados a este tipo de ecuación, aspecto importante en la enseñanza de la matemática porque a su vez conlleva a relacionar métodos, técnicas, lenguaje, etc., que harán más accesible al educando el conocimiento de este objeto matemático, más aún cuando hace parte del currículo contemplado en educación media y el cual seguirá abordando en años consecutivos.

Por lo anterior, este artículo se orienta a identificar los elementos primarios y las configuraciones epistémicas asociadas a la ecuación de segundo grado durante la antigua civilización china; acorde con el modelo teórico del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del

Conocimiento e Instrucción Matemática, éstas son definidas por Godino, Batanero y Font (2009) y Arrieche (2010), como las redes y relaciones establecidas entre los objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas institucionales para concretar el significado de un objeto o noción matemática estudiada, y a partir de ellas se pueden tomar decisiones de tipo instructivo o curricular eficaces para la selección de los sistemas de prácticas matemáticas que mejor se adapten a un proyecto educativo. Para esto se ha realizado un estudio documental, a través de la revisión y lectura de diversas fuentes como: tesis doctorales, de maestría, libros, revistas y textos relacionados con el tema, para precisar y ahondar sobre su origen, desarrollo y papel en la matemática china; además, tal como plantean Finol de Navarro y Nava de Villalobos (1993): "La Documentación es el soporte de la Historia..., constituye además una fase de la investigación histórica, específicamente el estudio de las fuentes, la recolección y evaluación de la información" (p. 60).

Acorde a lo anterior, se mostrará a continuación y en forma sucinta, tres apartados: Desarrollo histórico-epistemológico de la ecuación de segundo grado durante la antigua civilización china, elementos primarios y configuraciones epistémicas, para concluir con reflexiones finales a nivel didáctico.

Desarrollo histórico-epistemológico de la ecuación de segundo grado durante la antigua civilización china

La civilización china es muy antigua; sin embargo, existen divergencias al tratar de ubicar cronológicamente sus inicios en el desarrollo matemático. Boyer (1999), señala que esta polémica se evidencia con su obra más antigua llamada Chou Pei Suan Ching, algunos historiadores la datan del 1200 a.C. y otros del 300 a.C. En ella, se habla del estudio de las órbitas circulares en el cielo y otros aspectos astronómicos, quizá por esto también se le conoce como el tratado de las Horas Solares. Fue escrito en forma de diálogo, donde un ministro le explica al príncipe como se relacionan el cuadrado y el círculo con la tierra y el cielo respectivamente, entre muchos otros temas. En general, se sabe que este tratado realiza trabajos geométricos basado en las necesidades de agrimensura de la época y vistos desde el aspecto aritmético o algebraico, por esto aparecen algunas indicaciones relacionadas con el teorema de Pitágoras, así como el uso de fracciones.

Otro tratado de gran importancia es el conocido Chui-chang suan-shu, que data más o menos del 250 a.C. (Boyer, 1999), también conocido como el libro de los Nueve Capítulos sobre el Arte Matemático, el cual incluye 246 problemas sobre ingeniería, agrimensura, cálculo, propiedades de triángulos, resolución de ecuaciones, etc. La escritura de estos problemas concretos era más bien explicativa, no se daban demostraciones, pero sí se indicaban los pasos en forma ordenada para resolverlos.

La matemática en este tratado de los Nueve Capítulos pasó por múltiples modificaciones desde el siglo I a.C. hasta el siglo VII d.C. (Ribnikov, 1987), convirtiéndose en un clásico y por así decirlo en una enciclopedia matemática de contenido variado; más adelante, durante los siglos VII al X d.C., sería obligatoria su lectura para todo aquel que prestara servicio al Estado.

El nombre de esta magna obra se debe a su presentación, realizada en pergaminos dispuestos en 9 libros. El libro 1 se denomina: Medición de Campos, en este, se toma el sistema de numeración decimal jeroglífico, se trabaja con las operaciones básicas, se calculan áreas.

El libro 2, llamado: Relación entre las diferentes formas de cereales, refleja el cobro de impuestos sobre el grano, el cual era medido en unidades de volumen. Debido a esto, los problemas tienen que ver con regla de tres y división proporcional.

El tercer libro, conocido como: División escalonada, continúa los trabajos de división proporcional de valores inversos y con regla de tres simple y compuesta. El cuarto libro, llamado Shao-Huan, expone trabajos para obtener raíz cuadrada y cúbica, tiene problemas donde se pide encontrar el lado de un rectángulo dados su área y el otro lado, o en otros para encontrar elementos del círculo y la esfera.

El libro 5, Estimación de los trabajos, recopila problemas relacionados con cálculos para la construcción de paredes fortificadas, murallas, diques, entre otros. En el libro 6, conocido como: Distribución proporcional, aparecen problemas similares a los del libro 3, donde se busca repartir equitativamente los impuestos; sin embargo, se añade el trabajo con progresiones aritméticas y problemas sobre el trabajo colectivo.

El séptimo libro, llamado: Exceso-defecto, presenta problemas donde intervienen ecuaciones de primer grado y sistemas de ecuaciones lineales, siendo detallada su solución para casos particulares. Mientras que el octavo libro, profundiza este trabajo, perfeccionando y generalizando la solución de sistemas de ecuaciones lineales más complejas a través de una regla llamada fan-chen. También aparecen números negativos y la regla del cheg-fu, algo así como la regla del más-menos, representando un gran adelanto en consideración a otras obras como las de Chuquet y Leibnitz donde se mencionan estos temas unos cuantos siglos más adelante.

El noveno y último libro, abarca problemas donde se requiere determinar distancias y alturas, destacándose el uso del teorema de Pitágoras y las propiedades de triángulos semejantes, la formulación de reglas de tipo algebraico y la solución a ecuaciones cuadráticas.

Perero (1994), señala que los chinos trabajaban las propiedades de los triángulos rectángulos y conocían el teorema de Pitágoras, llamándolo Gou-Gu. Como ejemplo, del libro de los Nueve Capítulos, presenta el problema seis del último libro, el cual dice:

> Un acuario tiene una base cuadrada de lado 10 “chi”. Una caña nace en el centro del acuario y crece perpendicularmente a la base hasta salirse 1 “chi” sobre la superficie del agua. Si se inclina la caña hacia un lado, su tope tocará el borde del acuario exactamente al nivel del agua. ¿Cuál es la profundidad del agua y cuál es la longitud de la caña?. (Perero, 1994, p. 133)

Para solucionarlo, se parte del gráfico referencial número 1, donde x representa la profundidad del acuario, mientras “h” será la hipotenusa o en otras palabras es la longitud de la caña y equivale por lo tanto a $x+1$; entonces, si la caña está en el centro del acuario uno de los catetos mide 5 y por Pitágoras se tendrá: $h^2 = x^2 + 5^2$, siendo a su vez equivalente a $(x+1)^2 = x^2 + 5^2$, de donde $x = 12$, así la profundidad del acuario es de 12 chi y la longitud de la caña de 13 chi.

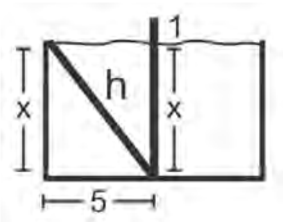


Gráfico 1. Problema Chino del acuario y la caña

Para ejemplificar ecuaciones cuadráticas, Ribnikov (1987), detalla el problema 11 del capítulo 9 donde se trata de conseguir las dimensiones de una puerta, conociendo el valor de su diagonal y la diferencia entre su longitud y su ancho. A través de nuestra simbología actual, si a la diagonal se le llama “c” y a la diferencia entre longitud y ancho se le llama “k” (obsérvese el gráfico 2), implicaría en nuestro lenguaje actual la formulación de las ecuaciones $x^2 + y^2 = c^2$, $y - x = K$, de las cuales emerge a su vez la ecuación $2x^2 + 2kx + k^2 - c^2 = 0$.

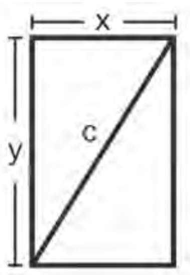


Gráfico 2. Problema chino sobre las dimensiones de una puerta

El ruso E. I. Berezkina, traductor del tratado de los Nueve Capítulos en el año 1965, escribe la forma como los chinos encontraron la solución al anterior problema, desde la simbología actual.

Partiendo de $x_{1,2} = \sqrt{\frac{c^2 - 2\frac{k^2}{2}}{2}} \pm \frac{k}{2}$, "sea $x_{1,2} = z \pm \frac{k}{2}$, entonces $x_1^2 + x_2^2 = 2z^2 = 2\left(\frac{k}{2}\right)^2 = c^2$, de donde $z = \sqrt{\frac{c^2 - 2\frac{k^2}{2}}{2}}$ " (Ribnikov, 1987, p. 37)

Junto con esta obra, vale rescatar algunos aportes de matemáticos chinos, entre ellos Ch'in Chiu-Shao (1201-1261 d.C., también conocido por otros autores como Chin Kin Shao), de quien se dice fue el autor del título de la tradicional obra los Nueve Capítulos. Este matemático obtuvo un método llamado método del elemento celeste (así se denominaba a la incógnita) para resolver ecuaciones y es parecido al conocido método Horner-Ruffini (descubierto a mediados del siglo XIX d.C.), usado hoy en día para resolver ecuaciones de tercer grado en adelante y para la división entre polinomios (Ribnikov, 1987).

Sobre este método Boyer (1999) muestra con un ejemplo como Ch'in Chiu-Shao se aproxima a la raíz de la ecuación $x^2 - 71.824 = 0$, empezando con el valor de 200 realiza un cambio de incógnita al tomar $x = y + p$, con p = 200, por lo cual la ecuación inicial queda como $(y + 200)^2 - 71.824 = 0$, igual a $y^2 + 400y + 40.000 - 71.824 = 0$, y por tanto equivalente a $y^2 + 400y - 31.824 = 0$. Para esta segunda ecuación, Chiu-Shao determina la raíz con un valor aproximado de 60; de nuevo realizando otra sustitución de $y = z + 60$, queda $(z + 60)^2 + 400(z + 60) - 31.824 = 0$, donde por procedimientos simples da la tercera ecuación: $z^2 + 520z - 4.224 = 0$, con la cual se obtiene una raíz exacta por medio del método Horner-Ruffini, siendo z igual a 8, y así en la ecuación original se tendrá por sustitución de los valores encontrados, que x es igual a 268.

Otro notable matemático fue Chu Shih-Chieh, de quien se sabe tuvo mayor influencia en las matemáticas durante los años 1280 al 1303 d.C., fue un sabio errante que enseñaba matemática y logró escribir dos tratados, siendo el más importante el conocido como Espejo Precioso de los Cuatro Elementos, escrito en el 1303 d.C.

Boyer (1999) indica que este libro trata sobre sistemas de ecuaciones, trabaja con ecuaciones de grado 14 y recopila el amplio desarrollo del álgebra China. También destaca el uso del método de Horner, el cual era llamado por Chu Shih-Chieh como fan fa.

Para ilustrar un ejemplo del uso de este método, Boyer (1999) explica en simbología actual como llega a la solución de la ecuación $x^2 - 252x - 5.292 = 0$:

> ...se obtiene en primer lugar por tanteo la aproximación $x = 19$, lo cual significa que la ecuación tiene una raíz entre $x = 19$ y $x = 20$, y a continuación utiliza el fan fa, en este caso la transformación $y = x - 19$, para obtener la ecuación $y^2 + 290y - 143 = 0$ con una raíz entre $y = 0$ e $y = 1$. El valor aproximado de la raíz buscada de última es $y = \frac{143}{1+290}$, y por lo tanto el correspondiente valor de x es $19\frac{143}{291}$ (Boyer, 1999, p. 267)

En relación al EOS, el interés de realizar este análisis de la historia de las matemáticas, interpretada desde un punto de vista epistemológico, radica en el hecho de permitir recabar información sobre los sistemas de prácticas utilizadas para solucionar situaciones-problemas en relación a marcos institucionales específicos, como es el caso de la civilización china; interés que no sólo abarca los problemas, sino también las otras entidades primarias como: las técnicas, los lenguajes, las notaciones, los conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos (Godino, 2003), y sobre todo la forma como estas entidades se relacionan originando las configuraciones epistémicas en cada momento y circunstancia (Godino y Font, 2007). A continuación se detallarán los elementos primarios y las configuraciones epistémicas generadoras del objeto matemático en estudio.

Elementos primarios y configuraciones epistémicas

El trabajo algebraico alcanzado por la civilización china es notorio, se manejó un lenguaje retórico y finalizando el siglo XII comenzaron a presentar un lenguaje sincopado. Las situaciones problema se ven afectadas por los asuntos socio-económicos del momento, como: las necesidades de construcción, de transacciones comerciales, la irrigación, el transporte, la construcción de obras, entre otros, situaciones que conllevaban a problemas tanto de tipo aritmético como algebraico. Se tenía conocimiento de conceptos básicos, como áreas, longitud, operaciones básicas, coeficientes de un binomio (hoy en día determinados a través del llamado: "Triángulo de Pascal"), círculo, radio, circunferencia, progresiones y llegaron a tener conocimiento de números negativos. Entre las proposiciones sabían de proporción, de regla de tres, del teorema de Pitágoras (conocido por los chinos como gou-gu) y llegaron a plantear métodos para operar con números negativos. En cuanto a procedimientos, fijaron reglas a situaciones particulares con ecuaciones de segundo grado empleando el método del elemento celeste, el de fan fa, la aproximación de raíces y para ciertos casos las soluciones propuestas eran una serie de pasos sin demostración formal, ajustadas precisamente a casos particulares; y a fin de argumentar sobre los procesos realizados se apoyaban en lo aritmético, lo geométrico y deductivo informal.

En el siguiente cuadro A, se muestra una síntesis de este análisis, clasificando brevemente los elementos primarios señalados:

Cuadro A: Red de Entidades Primarias vs. Período histórico

Entidades Primarias / Período histórico	Lenguaje	Situa-prob.	Conceptos	Proposici.	Procedi.	Argument.
China (s IIaC al XIII dC)	Retórico y Sincopado	Agrimensura, ingeniería, impuestos, cálculo, etc.	Area, círculo, triángulo rect. números, regla de tres	Trabajan ecuac. de la forma $x^2+bx+c=0$ con proporciones, regla de tres, Teorema del Gou-gu	Método del elemento celeste, fan fa, Aproximación de raíces	Se transmite la técnica, razonamiento deductivo aritmético

Para el análisis de configuraciones epistémicas, se parte de los problemas específicamente tratados por los chinos, considerándose los elementos primarios y la manera cómo se entretejen para ayudar a resolver el problema. Vale aclarar que para cada problema propuesto se requiere analizar su configuración epistémica, pero por la brevedad en la presentación de este artículo, se analizan solamente dos ejemplos.

En los problemas del acuario y la puerta, se pudieron determinar elementos primarios como el uso de términos no ostensivos, entre ellos: área, largo, ancho, dimensiones; también se observa como objeto ostensivo la elaboración de gráficos por medio de los cuales emergen conceptos como dimensiones de un triángulo y de un rectángulo ayudando a sustentar proposiciones como el gou-gu que permite conseguir la longitud de lo que actualmente denominamos hipotenusa. En procedimientos, se destaca la sustitución de valores y el método del elemento celeste. Se puede notar que la forma de justificar la solución es a través de argumentos basados en deducciones informales, en el razonamiento de tipo geométrico y equivalencia de valores. Los aspectos simbólicos son poco tratados por esta civilización, pero bajo la lupa de nuestra escritura, o dicho de otra forma, contextualizándolo a nuestra época, requiere el uso de la "x", de fórmulas específicas como la de Pitágoras y de otras más específicas para el caso del problema con la puerta.

A modo de resumen visual y para concluir con este apartado, las configuraciones dadas a los problemas propuestos se esbozan en los siguientes cuadros B y C respectivamente:

Cuadro B: Configuración epistémica dada al problema del acuario y la caña

LENGUAJES:	SITUACIONES/PROBLEAMA:
Ordinario: (Términos/Expresiones) Largo, ancho, dimensión, diferencia, entre otros **Gráfico:** (Icónos, dibujos) Dibujo de un rectángulo y una de sus diagonales **Simbólico:** (Notaciones) Números, operaciones aritméticas, uso la incógnita X (fórmulas) $x^2 + y^2 = c^2$ $y - x = k$ $2x^2 - 2kx + k^2 - c^2 = 0$ $x_1^2 + x_2^2 = 2z^2 = 2\left(\frac{k}{2}\right)^2 = c^2$ $z = \sqrt{\frac{c^2 - 2\left(\frac{k}{2}\right)^2}{2}}$	Problema: Conseguir las dimensiones de una puerta, conociendo el valor de su diagonal y la diferencia entre su longitud y su ancho Motivan / Resuelven Expresa **CONCEPTOS/DEFINICIONES:** Previos: Rectángulo, longitud, ancho, dimensiones, diferencia, perpendicularidad Emergentes: Relación entre el ancho y la longitud como la diferencia dada, así: $y - x = k$ Ayuda **PROPIEDADES/PROPOSICIONES:** Previos: Aditividad y multiplicidad de la medida Propiedad asociativa y conmutativa de la adición Propiedad de raíz cuadrada y potencias Teorema de Pitágoras (llamado Gou-Gu) Emergentes: Determinan el valor de la diagonal como una relación pitagórica: $x^2 + y^2 = c^2$ Surge la ecuación: $2x^2 - 2kx + k^2 - c^2 = 0$ **PROCEDIMIENTOS:** Razonamiento geométrico Sustitución de valores Método del elemento celeste (hoy en día método de Horner-Ruffini) Multiplicación elemental, extracción de raiz Cálculo de la hipotenusa Justifican **ARGUMENTOS:** Deductivo informal Razonamiento geométrico. Aplicación del teorema de Pitágoras o Gou-gu Equivalencia de valores

Cuadro C: Configuración epistémica dada al problema de dimensiones de una puerta

LENGUAJES:	SITUACIONES/PROBLEAMA:
Ordinario: (Términos/Expresiones) Area, largo, ancho **Gráfico:** (Icónos, dibujos) Dibujo de un rectángulo Triángulo Rectángulo **Simbólico:** (Notaciones) Números, operaciones aritméticas, uso la incógnita X (fórmulas) $(x+1)^2 = x^2 + 5^2$	Problema: Conseguir profundidad de un acuario y lo largo de una caña Motivan / Resuelven Expresa **CONCEPTOS/DEFINICIONES:** Previos: Rectángulo, área, longitud, ancho, unidad de medida longitudinal, perpendicularidad Emergentes: Dimensiones de un triángulo Ayuda **PROPIEDADES/PROPOSICIONES:** Previos: Aditividad y multiplicidad de la medida Propiedad asociativa y conmutativa de la adición Propiedad de raíz cuadrada y potencias Teorema de Pitágoras (llamado Gou-Gu) Emergentes: Encuentran que la hipotenusa es igual a $x + 1$ **PROCEDIMIENTOS:** Aumenta una unidad la caña Razonamiento geométrico Sustitución de valores Multiplicación elemental, extracción de raiz Cálculo de la hipotenusa y profundidad Justifican **ARGUMENTOS:** Deductivo informal Razonamiento geométrico. Aplicación del teorema de Pitágoras o Gou-gu

Reflexiones finales a nivel didáctico

Tal como refiere el enfoque ontosemiótico, gracias a este análisis histórico-epistémico se puede tener una visión más global del lenguaje, de los problemas, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos que han propiciado el surgimiento de la ecuación de segundo grado durante la antigua civilización china, pudiéndose precisar a través de estos elementos primarios aspectos relevantes de su origen e importancia en el contexto matemático. En tanto a nivel didáctico, se constatan diversas maneras de resolver este tipo de ecuación durante el período histórico descrito, siendo fuente interesante para realizar diversas actividades con los estudiantes, ya sea para discutir sobre los procedimientos o para replantear problemas similares.

Por lo general el uso de la resolvente suele ser la única manera como los estudiantes solucionan ecuaciones cuadráticas, haciendo su estudio y aprendizaje muy mecanizado (Martínez, 2008). No es de extrañar que para la mayoría de los educandos aprenderse algo de memoria es más aburrido, muchos desconocen el origen de las fórmulas empleadas y en otros casos su aplicación para contextos cotidianos. Por esto, es necesario rescatar según los ejemplos observados, diversas técnicas para deducir las raíces de la ecuación de segundo grado en el momento de su enseñanza-aprendizaje; entre ellas el método del fan fa, del elemento celeste o de aproximación, considerando problemas con casos simples hasta llegar a los más complejos pero que reviertan interés para el alumno, y conlleven aplicaciones hacia la geometría, comercio, ciencia, industria, y otros campos.

También puede incluirse la formulación de problemas similares a los propuestos por los chinos con la ecuación de segundo grado, a fin de entablar (acorde con el EOS) comparaciones entre las configuraciones epistémicas con las configuraciones cognitivas dadas por los estudiantes al resolverlos, esto permitirá dilucidar otras formas de abordar pedagógicamente el objeto matemático en estudio.

Otro aspecto a considerar, es dedicar un espacio para platicar sobre la biografía de personajes chinos dedicados a la matemática, como Chu Shih-Chieh, mencionando sus aportes en la consolidación de la ecuación de segundo grado; aspecto que confluye en el aprendizaje cultural del estudiante, además humaniza, sensibiliza y hace ver menos rígida la enseñanza de la matemática.

Finalmente, estas conclusiones son apenas un pequeño aporte, sólo al momento de tratarlo en clase, surgirán otras estrategias y otros mecanismos según las características propias del medio físico, emocional, social, presentes en el aula. Lo importante es reencontrar a través de este recorrido histórico, la importancia de enseñar la ecuación de segundo grado y las muchas formas para tratar este objeto matemático y convertirlo en un tema más accesible para nuestros estudiantes.

Referencias bibliográficas

Arrieche, M. (2010). *Significados institucionales y personales del objeto matemático función en la Formación de Profesores de Educación Integral*. Trabajo presentado para optar a la categoría de profesor titular, Departamento de Matemática de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador de Maracay, Venezuela.

Boyer, C. (1999). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Universitaria.

Finol de Navarro, T. y Nava de Villalobos, H. (1993). *Procesos y Productos de la Investigación Documental*. Maracaibo: EDILUZ.

Godino, J. D. (2003). *Marcos teóricos de referencia sobre la cognición matemática.* Recuperado el 10 de enero de 2010 de http://www.ugr.es/local/jgodino/ indice_eos.htm

Godino, J. D., y Font, V. (2007). *Algunos desarrollos de la teoría de los significados sistémicos*. Recuperado el 10 de abril de 2007 de http://www.ugr.es/local/ jgodino/indice_eos. htm

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2009). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. Recuperado el 8 de junio de 2009 de http://www.ugr.es/ local/jgodino/indice_eos.htm

Martínez, A. (2008). *Significados personales de la ecuación de segundo grado en la formación inicial de profesores de matemática.* Tesis maestría no publicada, Universidad Pedagógica Experimental Libertador de Maracay, Venezuela.

Perero, M. (1994). *Historia e Historias de Matemática*. México: Iberoamericana.

Ribnikov, K. (1987). *Historia de las Matemáticas*. Moscú: Mir.

EL DESEMPEÑO DE LOS ESTUDIANTES EN UN PROBLEMA CUYA SOLUCIÓN DEBERÍA SER UN NÚMERO NEGATIVO: LA INFLUENCIA DEL CONTEXTO, DEL LENGUAJE Y DEL DATO SOBRANTE

Lidia Aurora Hernández Rebollar, Josip Slisko Ignjatov, Luis David Benítez Lara
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla México
lhernan@fcfm.buap.mx, jslisko@fcfm.buap.mx

Resumen. Presentamos los resultados de un instrumento diseñado para estudiar el desempeño de estudiantes del primer año de una facultad de ciencias físico matemáticas ante un problema que involucra números con signo. En este instrumento se planteó un problema de un libro de texto de educación media básica y se encontró que más del cincuenta por ciento no utiliza un signo negativo como se espera que lo hagan. Con el instrumento y las respuestas de los estudiantes analizamos la pertinencia del contexto, la influencia del lenguaje utilizado y la influencia de un dato sobrante.

Palabras clave: problemas contextualizados, números negativos, modelo situacional

Abstract. We present the results of an instrument designed to study the performance of students in the first year of a mathematics faculty to physical problems involving signed numbers. This tool uses a problem of a high school textbook and we found that over fifty percent do not use a negative sign as expected to do. With this instrument and the responses of the students we analyze the relevance of the context, the influence of the language used and the influence of the excess data.

Key words: contextualized problems, negative numbers, situation model

Introducción

Los problemas contextualizados de matemáticas están siendo sugeridos como una herramienta para motivar y lograr un aprendizaje significativo de las mismas (Bickmore-Bran, 1993; Font, 2006; Ramos y Font, 2006; Ainley, 2012), así como para evaluar las competencias matemáticas de los estudiantes (PISA, 2003). De estas sugerencias ha surgido la inquietud en algunos investigadores de determinar o caracterizar los contextos más adecuados que nos permitan alcanzar los fines mencionados. Por un lado, Palm (2006) recomienda usar contextos auténticos y, por el otro, Wiest (2001) ha analizado la pertinencia de los contextos basados en la fantasía. El problema que estudiamos en esta investigación utiliza un contexto deportivo, un salto de longitud, el cual debería de ser conocido por los estudiantes de secundaria. Sin embargo, con el fin de que intervenga un número negativo en la solución del problema, el autor logra una redacción que no evoca el uso del número negativo. Así, un contexto pertinente no es suficiente cuando la redacción del problema no propicia la construcción del modelo de la situación, paso básico para la construcción del modelo matemático y la solución del problema, según la teoría de Kintsch (1998) sobre comprensión de textos.

Marco Teórico: números negativos, problemas contextualizados y modelo situacional

Es conocido el gran problema didáctico que implica la enseñanza y el aprendizaje del concepto de número negativo. Su complicado desarrollo histórico sugiere un obstáculo epistemológico para su construcción como objeto mental verdadero (Bachelard, 1980). Uno de los problemas de la enseñanza es vencer este obstáculo epistemológico y ayudar a los estudiantes a construir un modelo coherente para los números negativos (Schwarz, Kohn y Resnick, 1994). Retomando los estudios de Freudenthal (1983), varios autores coinciden en sugerir la construcción de los números negativos a través de la extensión de los números positivos. Con estas extensiones los números negativos adquieren algunos significados que los relacionan con el mundo físico: como cantidades dirigidas, como objetos que se combinan o particionan, como objetos que cambian o como objetos que representan posiciones sobre la línea recta. A partir de estos significados, hay algunos modelos tradicionales que han sido usados para enseñar los números negativos. Schwarz, Kohn y Resnick (1994) hacen un recuento de estos modelos: de deudas, de cancelación, los cuales incluyen monedas, colores, damas chinas; elevadores, en el que se trabajan posiciones; tiempo (antes y después de Cristo); temperatura y, por supuesto, el modelo formal.

Con respecto a la contextualización, Kulm (1984) y Boaler (1993) consideran que el contexto parece influenciar en las etapas de comprensión de un problema y en la planeación de su solución. Voyer (2011) utiliza problemas verbales aritméticos en los que el contexto puede o no ser tomado en cuenta para obtener la solución y varía diferentes tipos de información en el enunciado de los problemas: información situacional, información explicativa (que ayuda a comprender el problema) y la que ayuda a resolver el problema (datos numéricos). Tal investigador concluye que la información sobre la situación influye positivamente en el desempeño del estudiante cuando éste la toma en cuenta, pero que, los estudiantes con pocas habilidades aritméticas retienen más información del tipo explicativa que de la situación.

Para describir el proceso que siguen los estudiantes al tratar de entender el problema mencionado, nos basaremos en las ideas de Kintsch (1998) y Kintsch & van Dijk (1978). Ellos afirman que en la comprensión de un texto son importantes dos etapas básicas: la construcción de la base de texto y la construcción del modelo situacional. La base de texto se elabora a partir de las proposiciones del texto y expresa su contenido semántico, tanto a nivel global como local. El modelo situacional se construye mediante la integración del contenido textual en los esquemas de conocimiento del lector. Es una representación mental de la situación que plantea el problema y es un paso previo al modelo matemático.

En un trabajo previo (Hernández, Rodríguez y Slisko, 2010) hemos estudiado el mismo problema (ver adelante) con un grupo de segundo grado de secundaria. Los resultados fueron sorprendentes: ningún estudiante dio como respuesta un número negativo como lo pide el problema. Como creemos que esos resultados no fueron causados por la edad de los estudiantes ni por la falta de conocimientos matemáticos, sino por la inadecuada contextualización y formulación del problema, preparamos esta investigación.

Metodología

Diseñamos cuatro instrumentos con variantes del problema en estudio que permitieran detectar dificultades con el contexto, lenguaje inadecuado y uso de un dato sobrante.

El problema al que se refiere esta investigación se encuentra en un libro de texto del segundo grado de educación secundaria distribuido por la SEP (Arriaga, Benitez y Cortés, 2008). A este problema le llamaremos la versión original.

> "Cecilia participa en una competencia de salto de longitud. Si del punto límite camina 15 pasos en sentido contrario a la fosa y un paso de ella equivale a 0.70 m y su salto es de 3.80 m, ¿con qué número con signo representas el recorrido previo al salto?"

En el libro no aparece un dibujo, por lo que, en los instrumentos agregamos la instrucción:

1. En el espacio de abajo, dibuja, lo más fiel posible, la situación descrita en el problema, tal como la entiendes tú.

A cada parte importante del dibujo agrega un nombre e incluye todos los números que aparecen en el texto del problema.

Elaboramos otra versión del problema, a la que llamaremos versión modificada, de tal manera que el lenguaje y la redacción del problema evocaran la idea de número negativo. En esta versión modificada, hemos cambiado la palabra recorrido por posición y también hemos cambiado algunos signos de puntuación.

> "Cecilia participa en una competencia de salto de longitud. Del punto límite camina 15 pasos en sentido contrario a la fosa. Un paso de ella equivale a 0.70 metros. El salto de Cecilia usualmente es de 3.8 metros. ¿Qué número con signo describe mejor la posición de Cecilia al realizar los 15 pasos?"

Las otras dos versiones que comparamos son la versión original y esta misma versión con una advertencia sobre el dato sobrante.

Los participantes fueron 122 estudiantes del primer año de las carreras de matemáticas, matemáticas aplicadas, física, física aplicada y actuaría de una universidad pública. Estos estudiantes se encontraban cursando la materia de Cálculo Diferencial y pertenecían a cuatro grupos, dos matutinos, que llamaremos A y B, y dos vespertinos que llamaremos C y D. En todos ellos había estudiantes de las 5 carreras mencionadas y esta información no fue tomada en cuenta para el análisis de las respuestas. Se sabe que en el grupo A se encontraban los estudiantes con mejor promedio obtenido en el bachillerato debido a los lineamientos administrativos que se siguen para seleccionar sus horarios. Así, por la misma razón, en los grupos C y D consideramos que se encontraban estudiantes con un promedio menor.

Las versiones original y modificada se aplicaron en los grupos A, C y D. La versión original con y sin advertencia se aplicó en los grupos A y B.

En las cuatro versiones aparece la instrucción 1 que pide a los estudiantes hacer un dibujo que describa la situación que plantea el problema.

La pregunta siguiente también aparece en todas las versiones: ¿Qué parte del texto del problema consideras dudosa o incomprensible?

Los dibujos y las respuestas de los instrumentos que hemos diseñado se analizan con el objetivo de conocer el desempeño de los estudiantes y de determinar si la formulación del problema es adecuada para inducir el uso de números negativos.

Resultados principales

Consideramos que la respuesta correcta al problema es -10.5 m en el caso de las dos versiones del problema. Que el dato sobrante es que la longitud del salto de Cecilia es 3.8 m y que un dibujo que describe adecuadamente la situación que plantea el problema es el que mostramos en la Figura 1.

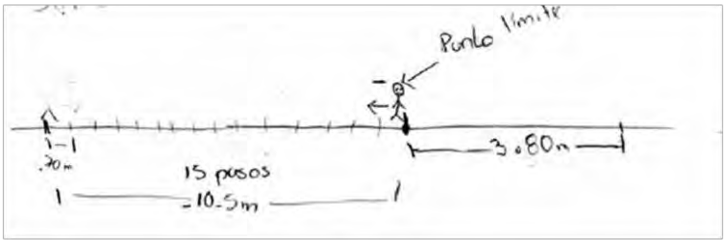


Figura 1. Ejemplo del dibujo de un estudiante

Los resultados que presentamos muestran que, aún en este nivel, más de la mitad de los estudiantes no dan como resultado un número negativo.

	Versión Original			Versión Modificada		
	Correctos	Incorrectos	Total	Correctos	Incorrectos	Total
A	13	12	25	11	7	18
B	7	19	26	0	0	0
C	10	6	16	4	10	14
D	5	6	11	6	6	12
Subtotales	35	43	78	21	23	44
Porcentajes	44.8%	55.2%		48%	52%	

Tabla 1. Respuestas correctas en las versiones original y modificada

La Tabla 1 muestra que en ambas versiones las respuestas correctas no alcanzan el 50% del total de los encuestados, pero que la versión modificada con la palabra "posición" en lugar de "recorrido" supera en 3 puntos porcentuales a la versión original. Aunque cabe hacer notar que en el grupo C, con menor promedio en el bachillerato, hubo un porcentaje mayor de respuestas correctas en la versión original (62%) que en la modificada (28%). Mientras que en el grupo A, con mejor promedio en el bachillerato, se obtuvieron más respuestas correctas en la versión modificada (61%) que en la original (52%). Por otro lado, el mayor porcentaje de respuestas correctas se obtuvo en este grupo A.

Las respuestas incorrectas que con mayor frecuencia dieron los estudiantes se muestran en la Tabla 2.

10.5 metros	24
21 metros	6
0 metros	6
Signo negativo	5
14.3 metros	4
Menos 15 pasos	4

Tabla 2. Respuestas erróneas más frecuentes

Uso del dato sobrante

En el total de los encuestados sólo 18 estudiantes de 122 usaron el dato sobrante de 3.8 para hallar la solución del problema, es decir, solo el 15%. Al comparar las versiones con advertencia y sin advertencia, las cuales fueron aplicadas a los grupos A y B, obtuvimos lo siguiente:

Sin adevertencia		Con advertencia	
Usaron 3.8	No usaron 3.8	Usaron 3.8	No usaron 3.8
9	21	2	37
30%	70%	5.12%	94.88%

Tabla 3. El uso del dato sobrante

En la Tabla 3, se observa que la advertencia de que en el texto del problema había un dato sobrante, disminuyó el uso de este dato de un 30% a un 5%.

En la Figura 2 se muestra la forma en la que un estudiante utiliza el dato sobrante.

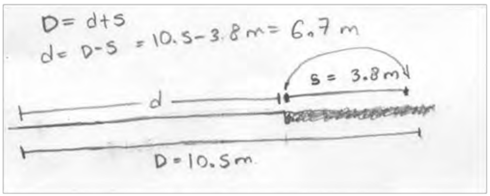


Figura 2. Respuesta de un estudiante que hace uso del dato sobrante.

Dificultades en la construcción de la base de texto

En el enunciado del problema podemos observar que no se describe claramente la posición de Cecilia ya que, al no contar con un dibujo, el lector no conoce la ubicación del punto límite ni de la fosa. Para muchos estudiantes no es claro si Cecilia salta después de dar los 15 pasos o si salta desde el punto límite. El obstáculo principal que hemos detectado para la comprensión del texto es que se pide el recorrido previo al salto, y este incluye los 15 pasos que da Cecilia para alejarse de la fosa (10.5 metros) y otros 10.5 m que tiene que recorrer para dar el salto. Los estudiantes que interpretan de esta forma esta situación no entienden por qué la respuesta debe ser un número negativo. Para detectar los problemas que dificultan la construcción de la base de texto, observamos las respuestas de los estudiantes a la pregunta ¿Qué parte del texto del problema consideras dudosa o incomprensible? Las respuestas más frecuentes se muestran en la Tabla 4.

15 pasos en sentido contrario	32
Número con signo	20
La pregunta	18
Punto Límite	15
Ninguna	12
El salto de Cecilia	10
¿Qué es fosa?	8

Tabla 4. Partes del texto dudosas o incomprensibles según los estudiantes.

Dificultades en la construcción del modelo de la situación

Al observar los dibujos de los estudiantes, detectamos que la redacción del problema y el lenguaje utilizado impiden la construcción de la base de texto, lo que a su vez dificulta la construcción del modelo situacional. Aproximadamente, la mitad de los estudiantes encuestados construyeron modelos situacionales distintos al que plantea este problema. Algunas de las interpretaciones que pudimos registrar son las siguientes:

1. Cecilia camina 15 pasos en sentido contrario a la fosa y después salta 3.8 metros (Figura 3).
2. Cecilia recorre 10.5 metros en sentido contrario a la fosa y después recorre otros 10.5 metros hacia la fosa (Figura 4).
3. Cecilia recorre -10.5 metros y después 10.5 metros (Figura 5).
4. Cecilia recorre 10.5 metros hacia la fosa y salta 3.8 metros (Figura 6).

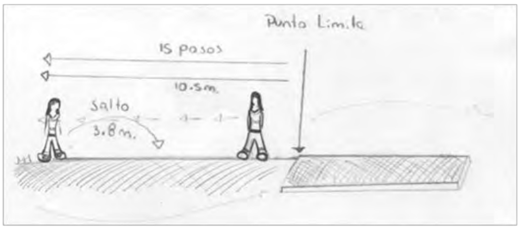


Figura 3. Representación de la situación 1

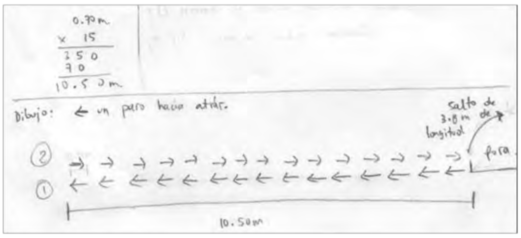


Figura 4. Representación de la situación 2

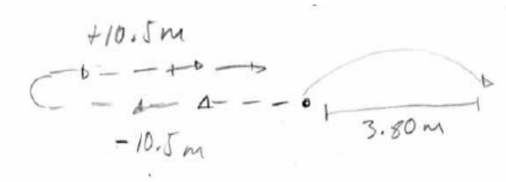


Figura 5. Representación de la situación 3

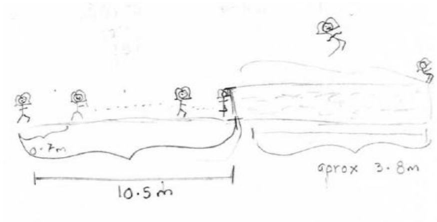


Figura 6. Representación de la situación 4

Análisis

Los resultados obtenidos en esta investigación son alarmantes si se considera que fue realizada con 122 estudiantes de una facultad de ciencias en su primer año de estudio. A casi un año de haber concluido el bachillerato y con algunos cursos de matemáticas a nivel superior, no queda duda de que estos estudiantes han trabajado bastante con números negativos y con varios tipos de problemas de matemáticas. Así pues, es justificable que volteemos la mirada al problema cuando buscamos las causas de tantas respuestas "erróneas". Algunas de las causas las describimos a continuación. El contexto de este problema es una competencia deportiva la cual debería ser familiar a los estudiantes. Sin embargo, detectamos que algunos de ellos la confundieron con una de salto de altura, mientras otros no sabían qué era la fosa.

Por otro lado, el autor del problema afirma que "Cecilia camina 15 pasos en sentido contrario a la fosa". Este es un movimiento inusual en el salto de longitud y ubica a este problema como no auténtico, de acuerdo a la clasificación de Palm (2006), pues el evento que se describe no es real. Tal vez por esta razón 32 estudiantes la seleccionaron como una frase incomprensible. La base de texto de este problema no puede ser construida adecuadamente por la mitad de los estudiantes debido entonces a problemas con el contexto ya que no se cuenta con suficiente información para relacionar lo que ahí se describe. Por ejemplo, el recorrido antes del salto no es asociado a un número negativo. Esta palabra es entendida como distancia, por lo que se considera positiva. En los modelos tradicionales de enseñanza de números negativos aparece la posición (en la recta real, en elevadores, etc.) como un significado o una aplicación de estos números. Por esto es que en esta investigación hemos preferido usar esta última palabra y hemos mejorado los resultados, aunque la mejora alcanzada es realmente baja. Creemos que se debe modificar aún más el enunciado del problema y el contexto para obtener un aumento significativo de respuestas con un número negativo.

Conclusiones

El problema aquí estudiado nos ha servido para observar el proceso que siguen los estudiantes para construir el modelo de la situación de un problema contextualizado. Del análisis realizado concluimos que la base de texto del problema impide, en casi la mitad de los estudiantes, la construcción de un modelo situacional aceptable y que ésta es la razón por la que no se obtiene el resultado esperado. Por otro lado, el problema pide un "número con signo" el cual es un término poco conocido según lo manifestaron los propios estudiantes. Algunos dieron como respuesta un signo negativo o positivo. La palabra "recorrido" también genera confusión en el enunciado pues no evoca el significado de número negativo. Las respuestas con signo negativo consideramos que fueron motivadas por la frase "camina 15 pasos en sentido contrario".

Para comprender un problema verbal de matemáticas los estudiantes deben poder crear una representación mental de la situación que plantea el texto. En este trabajo hemos tenido la oportunidad de visualizar estas representaciones a través de los dibujos realizados por los estudiantes y también hemos podido comprobar la importancia de la base de texto.

Como una implicación de este trabajo a la enseñanza de las matemáticas debemos llamar la atención, de quienes elaboran los problemas contextualizados de matemáticas, acerca de la necesidad de un uso correcto del lenguaje y de descripciones precisas de la situación con el fin de permitir en los estudiantes la construcción de las diferentes etapas por las que debe transitar hacia la solución del problema.

Consideramos que esta investigación será de gran ayuda para los profesores que deben seleccionar los problemas y de preparar las posibles intervenciones de su parte antes de presentarlos a los estudiantes

Este trabajo se realizó como parte del proyecto "*La contextualización en la educación matemática: el diseño de los problemas y las estrategias de solución de los estudiantes*", apoyado por la VIEP de la BUAP en el año 2011

Referencias bibliográficas

Ainley, J. (2012). Developing purposeful mathematical thinking: a curious tale of apple trees. *PNA, 6* (3), 85-103.

Arriaga, A., Benítez, M. M. y Cortés, M. C. (2008). *Matemáticas 2, Introducción a las competencias. Educación Secundaria*. México: Pearson Educación.

Bickmore-Brand, J. (1993). Implications from Recent Research in Language Arts for Mathematical Teaching. In J. Bickmore-Brand (Ed.), *Language in mathematics* (pp.1-9). Portsmounth, NH: Heinemann.

Font, V. (2006), Problemas en un contexto cotidiano. *Cuadernos de pedagogía* 355, 52-54

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht, Holland: D. Reitel.

Hernández, L. A., Rodríguez, F. J. y Slisko, J. (2010). Las dificultades de los estudiantes de secundaria al resolver un problema que involucra los números con signo: una interpretación ontosemiótica. *Memorias del VIII Congreso Virtual Internacional de Enseñanza de las Matemáticas: CVEM 2010.*

Kintsch, W. & van Dijk, T. A. (1978). Toward a Model of Text Comprehension and Production. *Psychological Review* 85 (5), 363-394.

Kintsch, W. (1998). *Comprehension: A Paradigm for Congnition*. Cambridge, MA: Cambridge University Press.

Kulm, G. (1984). The Classification of Problem-Solving Research Variables. En G. A. Goldin & C. E. McClintock (editores.), *Task variables in mathematical problem solving* (pp.1-21). Philadelphia: The Franklin Institute Press.

Palm, T. (2006). Word Problems as Simulations of Real-World Situations: A Proposed Framework. *For the Learning of Mathematics,* 26 (1), 42–47.

PISA. (2003). Assessment Framework: Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills-Publications 2003. Recuperado el 3/03/2011, de http://www.oecd.org/document/29/0,3746,en_32252351_32236173_33694301_1_1_1_1,00.html

Ramos, A. B. y Font, V. (2006). Contesto e contestualizzazione nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica. Una prospettiva ontosemiotica. *La Matematica e la sua didattica, 20* (4), 535-556.

Schwarz, B. B., Kohn, A. S. y Resnick, L. B. (1994). Positives about Negatives: A Case Study of an Intermediate Model for Signed Numbers. *The Journal of the Learning Sciences 3 (1),* 37-92.

Voyer, D. (2011). Performance in Mathematical Problem Solving as a Function of Comprehension and Arithmetic Skills. *International Journal of Science and Mathematics Education, 9* (5), 1073-1092.

Wiest, L. (2001). The Role of Fantasy Contexts in Word Problems. *Mathematics Education Research Journal. 13* (2), 74-90.

DISEÑO, DESARROLLO Y EVALUACIÓN DE OBJETOS DE APRENDIZAJE EN MATEMÁTICAS BÁSICAS

Sergio Correa, Evelia Reséndiz, Ramón J. Llanos, Miguel Salazar, José F. Sánchez
Universidad Autónoma de Tamaulipas México
scorrea@uat.edu.mx, erbalderas@uat.edu.mx

Resumen. En esta investigación, en proceso, pretendemos el diseño, desarrollo y evaluación de Objetos de Aprendizaje (OA) lo que permitirá probar y validar una metodología de diseño y producción de OA al interior de la institución, así como la utilización de la Web como medio de interacción y cooperación entre individuos en los procesos educativos. La producción de OA con esta metodología se plantea bajo un equipo de trabajo que analiza las necesidades del grupo destinatario, los contenidos, los recursos tecnológicos, los procesos de evaluación, entre otros, para la producción de cada OA.

Palabras clave: objeto de aprendizaje, matemáticas, evaluación

Abstract. The research in process presented here pretends to design, develop and evaluate the learning objects (LO) that we will allow to prove and validate a designing and producing methodology of LO inside the institution, and it will also allow the use of the web as a cooperation and interaction tool among individuals in the education processes. The production of LO in this methodology is set out under a team work that analyzes the needs of the target group, the contents, the technological resources, the processes of evaluation among others for the production of every LO.

Key words: learning objects, mathematics, evaluation

Introducción

La Universidad Autónoma de Tamaulipas (UAT) se propone fortalecer la innovación de nuevos ambientes y métodos de enseñanza-aprendizaje donde la utilización de las TIC´s incida en la formación autónoma y permanente de los estudiantes (Plan de Desarrollo Institucional 2010-2014). Una forma de responder a lo anterior es a través del uso de Objetos de Aprendizaje (OA) que, siendo entidades de información reutilizables, pueden adaptarse a los diversos programas académicos de diferentes contextos y sistemas pedagógicos y a los diversos enfoques de enseñanza y de aprendizaje que se ponen en juego en los nuevos y flexibles ambientes educativos generados por la utilización de las TIC´s en las instituciones educativas.

En relación al grupo destinatario y los contenidos de los OA (Objetos de Aprendizaje), en esta investigación, se parte de la constatación de las deficiencias en el domino de contenidos básicos de matemáticas que presentan los aspirantes a ingresar a la UAT. Los resultados de las pruebas de Evaluación Nacional del Logro Académico de Centros Escolares (ENLACE) de los egresados de la Educación Media Superior, como del Examen Nacional de Ingreso a la Educación Superior (EXANI II) así lo confirman (CENEVAL, 2011). Por ejemplo, en los últimos 3 años, más del 40% de los egresados de la Educación Media Superior (EMS) obtuvo un nivel insuficiente de dominio de los contenidos de matemáticas. Si se incluye a los alumnos que alcanzan el nivel elemental, el porcentaje alcanza al 80% de los egresados de la EMS. Asimismo, en el ingreso a la Unidad de Ciencias, Educación y Humanidades de la UAT, en las últimas 3 evaluaciones los aspirantes alcanzaron en promedio 942 puntos en Razonamiento Matemático y 928 en Matemáticas, valores por debajo de la media teórica de dificultad del examen (1000 puntos, equivalente al 50% de respuestas correctas). Por tal motivo, la investigación se limitará, en cuanto a población, a los alumnos de primer ingreso a la universidad (como segmento población que guarda características formativas similares de quienes estudian en la EMS) y, en cuanto a temática, a los contenidos matemáticos por las deficiencias señaladas anteriormente.

El objetivo de la presente investigación en proceso (en su primera etapa) consiste en diseñar un objeto de aprendizaje de Matemáticas Básicas (asignatura común a los distintos programas académicos de licenciatura en la institución de referencia) para estudiantes de ingreso a primer semestre en la Unidad Académica Multidisciplinaria de Ciencias de la Educación y Humanidades de la UAT (la segunda etapa contempla el desarrollo y evaluación del OA).

Marco teórico

Las innovaciones tecnológicas están brindando un acceso significativo a la información, provocando grandes cambios en la sociedad actual, en su forma de organización, en los valores, comportamientos, actitudes, etc., creando lo que se ha llamado "Sociedad de la Información".

Las TI (tecnologías de la información) están cambiando nuestros trabajos y nuestras vidas y el sistema educativo debe adaptarse para poder cumplir su misión esencial: preparar a los individuos para el trabajo y para la vida. En particular, el sistema educativo debe prepararse para una de las tareas que serán esenciales en los años futuros: la capacidad de convertir la materia prima: *información* en producto: *conocimiento* (Fuentes, 1998).

Para responder a esta demanda, en el campo de la educación ha surgido la tendencia de crear entidades de información llamadas *objetos de aprendizaje* que, estructuradas de manera correcta, pueden ser reutilizados para desarrollar materiales educativos útiles en diversas áreas.

Como menciona Chiappe (2009), cuando hacemos referencia a un objeto de aprendizaje no nos referimos a "algo" que se pretende aprender, sino al medio por el cual se busca producir un aprendizaje con la incorporación de las TIC´s en la educación, como un material educativo digital.

Para Roig-Vila (2005), el planteamiento basado en objetos de aprendizaje es, actualmente, uno de los pilares del aprendizaje a través de internet. Para Wiley (2000), los objetos de aprendizaje son cualquier recurso digital que pueda ser reutilizado como soporte del aprendizaje.

En lo que respecta al entendimiento de los objetos de aprendizaje y su aplicación pedagógica, lo que refleja el interés de este trabajo, es necesario hacer una reflexión sobre los objetos de aprendizaje lo que "…supone primero aceptarlos como un instrumento válido de formación humana y segundo requiere la construcción de un acervo teórico alrededor de su estructura conceptual y de su papel dentro de la práctica pedagógica." (Chiappe, 2009).

La siguiente definición considera los elementos necesarios para ser analizados desde una perspectiva técnico-pedagógica. Es necesario entender y comprender la definición de objeto de aprendizaje ya que esto posibilita su adecuada implementación:

> Un objeto de aprendizaje se entiende como una entidad digital, autocontenible y reutilizable, con un claro propósito educativo, constituido por al menos tres componentes internos editables: contenidos, actividades de aprendizaje y elementos de contextualización. A manera de complemento, los objetos de aprendizaje han de tener una estructura (externa) de información que facilite su identificación, almacenamiento y recuperación: los metadatos (Chiappe *et al.* 2007).

Analizando la definición presentada respecto a los OA, es importante destacar su categorización como entidad *digital*, condición que solo es posible bajo la incorporación de las TIC´s como instrumentos educativos. Como menciona Chiappe (2009) en su estudio, "lo digital es natural en las TIC´s, es su lenguaje propio, es parte de su propia constitución. Es por esto que, desde este marco de referencia, resulta apropiado considerar los objetos de aprendizaje como entidades digitales."

El segundo aspecto de los OA es el de ser *autocontenible*. Esta condición de autonomía supone en los objetos de aprendizaje la existencia de un requerimiento muy particular: los OA deben tener consigo todo lo necesario para cumplir su función. En otras palabras, estamos refiriéndonos a que el usuario debe tener acceso a la totalidad de los recursos necesarios para cumplir el propósito educativo para el cual el OA fue pensado *(*Chiappe, 2009*)*. Con lo anterior no se establece que los OA sean cerrados y aislados de otros materiales; es cierto que en su diseño estructural deben contener todo el material e información necesaria que se brindará al alumno, pero para cumplir con esto pueden, y deben hasta cierto punto, enlazarse con materiales externos a ellos para cumplir con su propósito educativo.

Ser *reutilizable*, este es el aspecto que lo diferencia de los Materiales Educativos Computarizados (MEC) por lo cual puede considerarse como la razón de ser de los OA. Es necesario en este punto aclarar la diferencia entre reutilizar y reusar. Para Jouglard *et al.* (2003), reusar es el uso de algo en más de una ocasión sin variar su función o propósito. Mientras que, el diccionario de la Real Academia de la Lengua define la palabra reutilizar como utilizar algo, bien con la función que desempeñaba anteriormente o con otros fines (Chiappe, 2009).

La integración de estos *objetos de aprendizaje* en la práctica didáctica, debe tomar en cuenta varios aspectos, algunos de ellos, son las teorías del aprendizaje, necesarias para el desarrollo del material educativo y el cambio de los métodos de enseñanza y aprendizaje por nuevos enfocados en un ambiente tecnológico.

Metodología

Los Objetos de Aprendizaje están presentes cada vez con mayor fuerza en el ámbito educativo en todos los niveles, en especial a nivel superior. Por lo cual la necesidad e interés por diseñar y desarrollar estas herramientas digitales es mayor. Sin embargo, la elaboración de los OA´s no es fácil ya que se deben considerar los aspectos característicos que deben cumplirse para que nuestro producto pueda considerarse como un verdadero Objeto de Aprendizaje.

Metodología ADDIE para el diseño de OA en Matemáticas

El modelo ADDIE es un proceso sistemático de diseño instruccional que se presenta como un flujo de procesos en forma lineal que representan las interrelaciones de sus etapas. Los resultados de la evaluación formativa de cada etapa pueden conducir al diseñador de regreso a cualquiera de las fases previas. El producto final de cada etapa es el producto de inicio de la siguiente etapa. El nombre del modelo se toma de las cinco etapas de las cuales consta, las cuales son: Análisis, Diseño, Desarrollo, Implementación y Evaluación (Montero y Herrero, 2008).

Dado el progreso del proyecto, se presenta por ahora, los avances en la primera etapa. No obstante, puede señalarse que para la etapa de diseño se retomarán las aportaciones que desde el enfoque sociocultural se han venido haciendo en el marco de la enseñanza de las matemáticas. Asimismo, las etapas de desarrollo e implementación seguirán la metodología institucional de desarrollo de material audiovisual interactivo que se ha venido trabajando en la Universidad Autónoma de Tamaulipas (Padilla y Treviño, 2009). Para la etapa de evaluación del OA de Matemáticas se tiene proyectado su utilización en los cursos de inducción y/o propedéuticos que se ofrecen al ingreso a la universidad.

Etapa de Análisis

Es importante desde el inicio dejar muy claros los objetivos y alcances del OA que se desarrollará, en este caso, del Objeto de Aprendizaje de Matemáticas. En este punto es necesario identificar una necesidad o deficiencia en el aprendizaje para determinar qué es lo que se va a enseñar y a quien.

Nuestro análisis referente a la identificación de la necesidad o deficiencia en el aprendizaje se basa en la información obtenida de los resultados del EXANI-II, la cual es una prueba confiable, válida, pertinente y objetiva, empleada para apoyar los procesos de selección de instituciones de educación superior en el ámbito nacional. Su objetivo es medir las habilidades y conocimientos de los sustentantes que desean realizar estudios profesionales. Este examen proporciona información integral a las instituciones sobre quiénes son los aspirantes con mayores posibilidades de éxito en los estudios de licenciatura y cuál es su nivel de desempeño en áreas fundamentales para el nivel superior.

De manera particular, el EXANI-II de selección *evalúa la habilidad para analizar y resolver problemas con base en principios elementales de las matemáticas*: el sustentante debe generalizar, abstraer, clasificar y emplear su imaginación espacial para solucionar expresiones matemáticas; situaciones que requieren operaciones algebraicas, aritméticas, trigonométricas y geométricas elementales; y problemas que involucran series con elementos visuales y alfanuméricos.

Los resultados de la última evaluación de aspirantes de ingreso a la UAT (agosto de 2011) sigue confirmando las deficiencias en el aprendizaje de las matemáticas. De entrada, el promedio general en el índice global del EXANI-II (*M* = 986.0 y DS = 86.57) se ubica por debajo de la media teórica (1000 puntos, equivalente a 50% de respuestas correctas), lo que nos señala deficiencias en el dominio de las habilidades y conocimientos de los aspirantes a cursar estudios de nivel superior en las distintas áreas evaluadas. Sin embargo, estas deficiencias se acentúan cuando se analiza por separado las puntuaciones de la evaluación de las habilidades de Razonamiento Lógico Matemático (*M* = 979.02 y DS = 118.59) y los conocimientos de Matemáticas (M = 971.46, DS = 105.57).

Por lo tanto, los resultados de la última aplicación del EXANI-II nos señalan la necesidad de atender las deficiencias en el aprendizaje de matemáticas de los aspirantes de la UAT, lo cual puede llevarse a cabo a través del diseño y desarrollo de Objetos de Aprendizaje de Matemáticas. Es necesario aclarar que, hasta este punto de nuestra investigación, solo hemos obtenido información relacionada con la prueba de selección y, de manera general, hemos podido evidenciar la necesidad de fortalecer la formación en matemáticas de los aspirantes de la UAT. No obstante, no se ha podido establecer aún los contenidos específicos en las cuales se presentan las mayores deficiencias.

Conclusiones

La tecnología puede ayudar a los estudiantes en el aprendizaje de matemáticas. Por ejemplo, con la utilización de calculadoras y computadoras los alumnos pueden examinar más ejemplos o representaciones de expresiones algebraicas y formas geométricas de las que es posible hacer manualmente, de tal manera que fácilmente pueden realizar exploraciones y conjeturas. El poder gráfico de las herramientas tecnológicas posibilita el acceso a modelos visuales que son poderosos, pero que muchos estudiantes no pueden, o no quieren, generar en forma independiente. El nivel de compromiso y apropiación por parte de los alumnos de ideas matemáticas abstractas puede fomentarse mediante la tecnología. Ésta enriquece el rango y calidad de las investigaciones porque suministra una manera de visualizar las ideas matemáticas desde diferentes perspectivas. La tecnología también suministra un punto focal cuando los estudiantes discuten entre sí y con su maestro acerca de los objetos que muestra la pantalla y los efectos que tienen las diferentes transformaciones dinámicas que permite realizar la tecnología.

La tecnología ofrece a docentes opciones para adaptar la instrucción a necesidades específicas de los alumnos. Los estudiantes que se distraen fácilmente, pueden concentrarse mejor cuando las tareas se realizan en un computador, y aquellos que tienen dificultades de organización se pueden beneficiar con las restricciones impuestas por un ambiente de computador. Los estudiantes que tienen problema con los procedimientos básicos pueden desarrollar y demostrar otras formas de comprensión matemática, que eventualmente pueden a su vez, ayudarles a aprender los procedimientos.

Todas estas ventajas de la tecnología en el aula pueden ser recuperadas en los objetos de aprendizaje dado su condición de entidad digital, pero agregando además las ventajas de ser autocontenible y reutilizable.

Referencias bibliográficas.

CENEVAL. (2011). *Guía del EXANI-II 2011*. Recuperado el 24 de marzo de 2011 de http://archivos.ceneval.edu.mx/archivos_portal/7596/GuiadelEXANI-II2011.pdf

Chiappe L., A. (2009). Acerca de lo pedagógico en los objetos de aprendizaje. Reflexiones conceptuales hacia la construcción de su estructura teórica. *Estudios Pedagógicos, 35(1),* 261-272

Chiappe, A., Segovia, Y. y Rincon, H. Y. (2007). Toward an instruccional design model based on learning objects. *Educational Technology Research and Development*, 55: 671-681.

Jouglard, C., Echeverría, A. y Herrera, L. (2003). *Una metodología de desarrollo de un framework para la simulación de sistemas multifísica.* Recuperado el 10 de marzo de 2008 en: http://www.cimec.org.ar/ojs/index.php/mc/article/view/780/735

Leal, J.M. (2010). *Plan de desarrollo institucional 2010-2014*. Universidad Autónoma de Tamaulipas, México 2010. Recuperado el 7 de marzo de 2011 de http://portal.uat.edu.mx/contenido/portal2010/transparencia/reglamentos_portal/plan_desarrollo.pdf

Montero, J., Herrero, E. (2008). Las herramientas de autor en el proceso de producción de cursos en formato digital. Pixel-Bit. *Revista de Medios y Educación* 33, 59-72.

Padilla, G., Treviño, M. (2009). La elaboración de objetos de aprendizaje como propuesta estratégica para la innovación educativa y la incorporación de las tecnologías de información y comunicación (TIC) en la práctica docente. *Actas del IV Congreso Internacional de Innovación Educativa: La innovación educativa, una estrategia para la transformación,* 708-717. Tampico, México.

Roig-Vila, R. (2005). Diseño de materiales curriculares electrónicos a través de Objetos de Aprendizaje. *Revista de Educación a Distancia. RED, IV,* 1-10.

Wiley D, 2000, *The Instructional Use of Learning Objects*: Version Online 2000. Recuperado el 20 de mayo de 2011 de http://www.reusability.org/read/

CONSTRUCCIÓN DEL ESQUEMA MENTAL PARA LA APROPIACIÓN DEL CONCEPTO DE LA INTEGRAL

Karla Liliana Puga Nathal, Eduardo Miranda Montoya
Instituto Tecnológico de Cd. Guzmán México
ITESO
karlalpn4@hotmail.com, emiranda@iteso.mx

Resumen. El trabajo que se presenta muestra los avances de una investigación con la que se espera obtener un acercamiento teórico a un esquema mental, –desde el marco de referencia APOE– para la apropiación del concepto de la Integral, para ello se pretende explorar, describir y explicar los niveles de construcción intra, inter y trans que subyacen en la apropiación del concepto. El trabajo se desarrolla dentro del paradigma constructivista, donde se concibe que el conocimiento se construye a partir de la interacción sujeto–objeto (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews y Thomas, 2004), se destaca que la experiencia resultante de esta interacción desencadena una serie de estructuras mentales que le permiten al sujeto generar deducciones en torno al objeto.

Palabras clave: esquema, APOE, nivel

Abstract. The document shows the progress of an investigation which is expected to obtain a theoretical approach to a mental scheme from the APOE framework for the appropriation of the concept of Integral. With this in mind, we pretend to explore, describe and explain the levels of building intra, inter and trans, underlying of the concept. The research is developed within the constructivist paradigm, that explain the knowledge is arising from the subject-object interaction (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews and Thomas, 2004), emphasizing that the experience resulting from this interaction prompts a number of mental structures that allow the subject generates inferences about the object.

Key words: scheme, APOS, level

Problema de investigación

La presente investigación, –aun en etapas primarias–, surge en el marco de una reforma educativa en la que se convino reformular los programas de estudio de educación superior y adoptar el enfoque basado en competencias. Dentro de estas reformas se incluyen los cursos de matemáticas, en los cuales se observa que todavía son escasos y superficiales los trabajos que han realizado las universidades en torno al enfoque por competencias para tal disciplina, sin embargo la presente investigación considera que dentro un sistema educativo con un enfoque en base a competencias o no, las matemáticas en la vida de un estudiante universitario deben ser vistas como herramientas que le permitan entender, explicar, discernir y tomar decisiones –fundamentadas– de su entorno sea escolar, familiar o social. En estos planteamientos se potencia la necesidad de que los estudiantes universitarios desarrollen la capacidad de *matematizar* problemas situados sea en su contexto escolar, social o laboral.

Matematizar en términos generales, se refiere a la capacidad del sujeto de trasladar un problema del mundo real al de las matemáticas para que en éste analice, razone y una vez resuelto, comunique las ideas matemáticas que darán respuestas desde la perspectiva del mundo real (Rico, 2003). El trabajo parte de la premisa de que, para matematizar, deberán estar presente la comprensión de los *conceptos matemáticos*, si el sujeto no se apropia de estos, difícilmente podrá ubicar un problema situado dentro de algún campo de las matemáticas, de hecho difícilmente sabrá que puede interpretar y resolverlo haciendo uso de esta herramienta.

Tratamiento de un concepto complejo: la integral

Por otro lado, en la universidad, a diferencia de los niveles escolares de formación básica, los conceptos son más complejos y abstractos (Planchard, 2007), por ejemplo en los libros de matemáticas un concepto se define desde registros de representación numéricos, algebraicos, contextuales y geométricos. Entonces es necesario que el concepto sea construido desde sus distintos registros o marcos de representación, de acuerdo con Camarena (2010): numérico, algebraico, analítico, contextual y geométrico, este último incluye gráficas, diagramas, esquemas y dibujos, ya que en el proceso de matematización muchas veces es necesario transitar entre esos diferentes registros.

En los diversos cursos de matemáticas que se ofertan en las escuelas de nivel superior, se incluyen una gran cantidad de conceptos, todos importantes sin embargo, algunos de estos son medulares para la construcción de otros conceptos y en la formación matemática futura de un sujeto, ejemplo de ello es el concepto de *la Integral*, que se estudia en los primeros semestres de las carreras de ingeniería y que es el foco de atención para el presente trabajo.

La Integral como objeto matemático comúnmente es utilizada en los programas educativos de matemáticas de ingeniería para resolver problemas relacionados con cantidades infinitesimales, en las que se requiere, por un lado sumas infinitas de cantidades finitas, y por otro lado el desarrollo de los métodos de cuadratura, a los que Newton llamó método inverso de las tangentes. La suma de la acumulación de áreas, es un tema que explícitamente no se ve con frecuencia en los libros de cálculo ni en las estrategias didácticas que se sugieren en algunos planes de estudio (CUCEI, 2010; UNAM, 2004; SNEST, 2008), sin embargo en los cursos posteriores de matemáticas, como ecuaciones diferenciales y física, que pertenecen a la formación básica del futuro ingeniero la idea de función primitiva y la suma de la acumulación de cantidades son importantes para entender ciertos fenómenos tales como: enfriamiento de cuerpos, las leyes del movimiento de partículas, termodinámica, trabajo y energía, cinemática, costo marginal, crecimiento y decrecimiento poblacional, por mencionar algunos.

Por otro lado, es común que los estudiantes de ingeniería requieran muestrear datos de algún fenómeno y obtener razones de cambio, ejemplo de ello es el enfriamiento de un horno, en determinados instantes de tiempo se registra la variación de la temperatura respecto del tiempo y con ello se describe su temperatura. Evidentemente el estudiante solo cuenta con datos numéricos, si ubica esas razones de cambio en el plano cartesiano y además ha comprendido el sentido geométrico de la función primitiva a partir de la acumulación de áreas o desde la recta tangente, podrá encontrar una curva que muestre información suficiente para entender, describir y predecir el comportamiento de la temperatura del horno en determinado tiempo, sin necesidad de pasar por algoritmos algebraicos, que sería el camino más popular para resolver este tipo de problemas.

Algunos libros (por citar algunos Boyce y Diprima, 1994; Larson, Hostetler, y Edwards, 2009; Leithold, 1983; Purcell, Varberg y Rigdon, 2001; Stewart, 2008; Swokowski, 1989 y Zill, 1987) citados en los programas de estudio de algunas escuelas mexicanas formadoras de Ingenieros, se observa que la Integral es tratada desde diversos enfoques: es el área limitada por curvas, es un límite específico, es la operación inversa a la derivada, es el trabajo que realiza una fuerza, es la longitud de una curva, es el volumen de un sólido, es la función primitiva, sin embargo, en párrafos anteriores se resaltó la idea que en matemáticas, a diferencia de otros campos del conocimiento, los conceptos matemáticos se deben entender desde diferentes registros o campos representación, entonces, dado los diferentes enfoques que se le asignan al concepto, se torna necesario conocer los registros en los que deberá ser estudiada la Integral, al respecto algunos autores que hacen alusión a diversos registros, Souto y Gómez (2010) mencionan que para entender el concepto de la Integral, se deben coordinar diferentes registros de representación, al respecto se rescata: registro analítico, registro visual y numérico.

Ordóñez y Contreras (2010) en su investigación, centran el concepto de la "Integral Definida" en distintos registros de representación desde lo que ellos llaman *componente epistémica de la Integral Definida*, esto es, los distintos significados que se le asignan al concepto. Los autores mencionan que la integral definida es tratada desde una idea estática (registros de representación numéricos): cálculo de áreas, volúmenes, longitudes de arco, densidad, presión, intensidad de un campo magnético, que surge a partir de la idea de sumar cantidades infinitamente pequeñas; así como registro de representación algebraico.

Se destaca, como producto de una revisión bibliográfica que la Integral es abordada desde los siguientes registros de representación:

(1) Algebraico (algorítmico): se refiere a procesos algorítmicos como el uso de tablas o fórmulas.

(2) Visual (Geométrico, Gráfico): Se refiere a figuras geométricas y gráficas de funciones a las que se recurre para explicar la idea de Integral como la sumatoria de cantidades infinitas y al estudio de las funciones primitivas.

(3) Aritmético: esto es, a la operación que implica realizar la suma de cantidades infinitamente pequeñas.

(4) Numérico: se refiere a lo que representa el número que se obtiene como resultado de un proceso de integración, Esto es, qué representa la constante que se obtiene al resolver una integral definida.

Por otro lado, algo que escasamente se observa en los libros citados de cálculo, es el énfasis entre la relación geométrica entre la Integral y la Derivada lo que para la presente investigación se considera esencial, dado que si el estudiante comprende esta relación, principalmente desde un registro geométrico, estará posibilitado para interpretar diferentes fenómenos físicos: la obtención de una función desplazamiento a partir de la función velocidad, la obtención de una función trabajo a partir de la representación geométrica de una fuerza variable, aplicaciones de la Integral dentro del campo de la física y matemáticas superiores que estudian los Ingenieros, la cual permite resolver problemas relacionados con la compresión y estiramiento de resortes, bombeo de líquidos en recipientes de diferentes formas geométricas, entre otras aplicaciones.

La historia da cuenta de la trascendencia que dentro de las matemáticas tienen los registros de representación geométricos, sin embargo diversas investigaciones explican algunas dificultades que existen en el énfasis estas representaciones dentro del aula. Al respecto, Cortes (2011) menciona que los registros de representación numérico, algebraico y gráfico son "…representaciones de los objetos matemáticos y cada uno de ellos presenta cierto tipo de información del objeto, además permiten cierto tipo de actividades cognitivas en el sujeto" (p.1). Además la representación visual de un concepto generalmente es incluida por el profesor cuando explica tal concepto y enlaza la representación algebraica del mismo, la cual permanece en la mayoría del tiempo que se dedica a estudiar el concepto.

Algunos investigadores (Cortés, 2011; Hitt, 2003) enfatizan en la importancia que tienen las relaciones visuales en la construcción de diferentes conceptos matemáticos como el infinito, límites, derivada, Integral, al respecto Hitt (2003), menciona:

> "… si la enseñanza del cálculo se restringe a sus aspectos algebraicos sin poner atención al uso de representaciones diferentes a las algebraicas, difícilmente los alumnos llegarán a una comprensión profunda del cálculo. Es difícil concebir que

un alumno pueda entender el cálculo sin haber desarrollado, por ejemplo, habilidades visuales ligadas a la construcción de conceptos del cálculo" (p. 1).

Un estudiante de Ingeniería debe comprender conceptos matemáticos desde sus diferentes registros de representación (visual, aritmético, numérico, algebraico) dado que dependerá del contexto de la situación problema la elección del registro pertinente para la manipulación de cantidades y obtención de la solución correspondiente. Existen propuestas didácticas que sustentan y describen la apropiación del concepto de la Integral (Boigues, 2010; González y Aldana 2010; Delgado, 2009; Morales, 2009; Souto y Gómez, 2010 y Crisóstomo, 2011) que relacionan registros geométricos con numéricos, algebraicos con algebraicos y algebraicos con numéricos, pero al momento no se ha encontrado un mecanismo –con fundamentación teórica y metodológica– que posibilite documentar cuáles son los niveles de construcción de las estructuras mentales que desarrolla el sujeto para la comprensión del concepto de la Integral desde un registro geométrico (acumulación de cantidades que varían) a otro registro geométrico (la gráfica de una función primitiva), entonces la investigación tiene como objetivo responder a la pregunta ¿Cómo un estudiante universitario construye el concepto de la Integral?, además ¿Qué construcciones mentales previas moviliza el estudiante universitario para conformar las estructuras necesarias que faciliten la comprensión del concepto de la Integral a partir de registros de representación visual?

Marco teórico

La investigación se ubica dentro del paradigma constructivista, específicamente la teoría psicogenética de Piaget la cual afirma que el conocimiento surge de la interacción sujeto–objeto (Dubinsky, 1991). La experiencia que resulta de esta interacción desencadena una serie de estructuras mentales que le permiten al sujeto generar deducciones en torno al objeto. Piaget explica que en la reorganización de los diferentes niveles de los estadios del conocimiento existen dos mecanismos la *abstracción empírica*, en la que se destaca el conocimiento físico que extrae y analiza el sujeto del objeto, y la *abstracción reflexiva*, la cual se manifiesta a partir de las acciones y operaciones físicas y mentales que el individuo realiza sobre un objeto. La abstracción reflexiva se refiere a "las acciones y operaciones del sujeto y a los esquemas que le conducen a construir" (Piaget y García, 2004, p. 247).

La abstracción reflexiva surge a partir de dos procesos, el primero, llamado *reflejamiento,* se refiere a que el individuo es capaz de establecer representaciones (o proyectar) de un estadio inferior (actual) de conocimiento a uno superior a partir de las acciones que haya realizada sobre un objeto (de la acción a la representación). El segundo se refiere a una *reflexión,* esto es, a la reconstrucción y reorganización de aquel conocimiento para formar nuevas estructuras mentales. En los procesos de reorganización para la consolidación de estadios mentales superiores el individuo debe recurrir a estadios mentales inferiores, por lo que la adquisición de conocimiento no se da en forma lineal.

Los esquemas son sistemas mentales organizados en acciones o pensamientos que le permiten al individuo representar de manera abstracta los objetos y eventos de su mundo. Todos los seres humanos poseemos esquemas de pensamiento y mientras que el individuo sea capaz de organizar y desarrollar esquemas nuevos, mejor será su *interpretación* y *adaptación* a su entorno (Piaget y García, 2004).

Piaget y García (2004, p. 33) caracterizan en tres niveles la construcción de un esquema mental:

a) Nivel Intra: Se refiere a que el sujeto ha logrado un esquema a un nivel operatorio, pero no logra de manera independiente generalizar estas operaciones o establecer relaciones con otras, en consecuencia el nuevo esquema se considera aislado, desvinculado de otros esquemas.
b) Nivel Inter: Una vez que se logra la construcción de un esquema a nivel operatorio (intra) y el sujeto internalice estas operaciones se dice que el esquema adquiere un nivel inter, en este momento el sujeto, en su mente, es capaz de generalizar y desarrollar las operaciones, sin necesidad de instrucciones que provengan del exterior.
c) Nivel trans: Cuando el individuo logra trasladar el esquema y vincularlo con otros lo cual conduce a la construcción de estructuras.

Las ideas de Piaget sobre la adquisición del conocimiento ha inspirado la generación de propuestas teóricas, cuyo objeto de estudio es la construcción del conocimiento matemático, tal es el caso de APOE (acciones, procesos, objetos, esquemas) desde donde se pretende describir, entender y documentar cómo un estudiante de nivel superior (y medio superior) construye un concepto matemático.

La idea de la manipulación de objetos físicos que establece Piaget para las primeras etapas de la construcción de conceptos, son tratados, desde la perspectiva de APOE como manifestaciones no solo físicas (debido a la complejidad de los conceptos matemáticos avanzados) sino como manipulaciones de objetos mentales (Asiala et al, 2004). APOE propone elementos que permiten reflexionar sobre la comprensión de un concepto matemático, además de elementos didácticos para su instrucción, para ello es necesario acercarse al concepto desde su epistemología, visto desde las matemáticas mismas, para ello APOE propone lo que denomina *descomposición genética* del concepto, esto es, "un conjunto estructurado de construcciones mentales que pueden describir cómo un concepto se puede desarrollar en la mente de un individuo" (Asiala, et al., 2004, p.5).

Entonces el desarrollo de la comprensión de un concepto inicia cuando el sujeto realiza, –lo que significa la parte medular de la teoría APOE–, *acciones* sobre objetos matemáticos (Dubinsky & Lewin, 1986) ya que es a través de las acciones que el sujeto se acerca al objeto de conocimiento, a partir de un proceso dialéctico logra internalizar *procesos* para que estos sean encapsulados en *objetos* matemáticos, los cuales se espera sean desencapsulados y regresados a su estado inicial y con esto integrar un *esquema*. Cuando el sujeto es capaz de manipular tales objetos, se desencadenan una serie de procesos mentales que pueden ser descritos a partir de lo que Piaget en la construcción del conocimiento lógico–matemático llama *abstracción reflexiva* (Dubinsky & Lewin, 1986).

Desde APOE, un esquema involucra las construcciones personales de las acciones, los procesos, los objetos (e incluso el uso de otros esquemas) para la comprensión de determinado concepto matemático, estos a su vez están interconectados en la estructura mental del individuo (estas conexiones pueden ser conscientes o inconscientes). Para formar el esquema para la comprensión de un concepto matemático, es necesario organizar en forma estructurada, una colección de procesos y objetos (Trigueros, 2005).

Metodología

Para entender el objeto de estudio y contestar las interrogantes que surgen en la investigación, y en sintonía con el marco teórico en que se encuentra ubicado su objeto de estudio, se considerará incluir el *método crítico (o método de exploración crítica)*, ya que este propone un estudio transversal, basado en técnicas de observación y exploración, de las construcciones mentales de un individuo, a partir del establecimiento de una relación dialéctica entre el investigador y el sujeto.

El método de exploración crítica (Inhelder, Sinclair y Bovet,1996), ubicado en el paradigma constructivista, es propio de la Psicología Genética, sus raíces se encuentran en el método clínico que originalmente fue utilizado por Piaget para indagar cómo un sujeto construye su conocimiento. El método posibilita establecer una relación dialéctica entre el entrevistador y el entrevistado que permita indagar sobre las construcciones mentales, con la finalidad que este último exprese los "por qué" de sus manipulaciones y conclusiones, sus percepciones sobre el objeto, sus dudas, y a partir de sus respuestas se generen nuevas preguntas para el investigador.

A manera de conclusión

Se pretende establecer una metodología con un enfoque cualitativo con doble finalidad, la primera describir los niveles intra, inter y trans por los que transita un sujeto para la apropiación del concepto de la Integral y como producto de tales descripciones se propondrá desde el marco de APOE una descomposición genética del concepto de la Integral que promueva la apropiación de este último, con lo que se pretende impactar en el campo de la didáctica de las matemáticas, –específicamente en el terreno del Cálculo Integral– dado que se aportarán elementos, reflexiones y resultados al estado del conocimiento en torno a la descripción de las estructuras mentales que moviliza el sujeto y que promueven la construcción de esquemas cognitivos para la apropiación del concepto de la Integral.

Referencias bibliográficas

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D.J., Dubinsky, E., Mathews, D., Thomas, K., (2004). *A Framework for Research a Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education*. Recuperado el 2 de Septiembre del 2010 de: http://www.math.kent.edu/~edd/Framework.pdf

Boigues, F. (2010). *Una propuesta de descomposición genética para la integral definida en estudiantes de ingeniería*. Recuperado el 24 de febrero del 2011 de: http://www.seiem.es/actividades/archivosactividades/JORNADASDIDACTICAANALISIS.pdf

Camarena, P. (2010). Las matemáticas en el contexto de las ciencias. *Revista INNOVACIÓN Educativa*, 46(9), 15-25.

Cortés, C. (2011). Diferencias y Acumulación vs Derivada e Integral. Por publicarse.

CUCEI. (2010). Planes y progrmas de estudio. Recuperado el 10 de Octubre del 2010 en: http://www.cucei.udg.mx/portal/index.php

Crisostomo, E. (2011). Conocimiento profesional de los profesores-formadores sobre la didáctica del cálculo. XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil.

Delgado, M. (2009). Matemática visual: Simulaciones relativas al Teorema Fundamental del Cálculo. El Cálculo y su Enseñanza. Cinvestav del Instituto Politécnico Nacional, México D.F. Recuperado el 12 de abril del 2011 de: http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/data/docs/Em3v4rTYf11.pdf

Dubinsky, E., Lewin, P. (1986), *Reflective Abstraction and Mathematics Education: The Genetic Decomposition of Induction and Compactness*. Recuperado el 12 de Febrero del 2010 de:

http://www.math.kent.edu/~edd/publications.html#C.)%20Mathematics%20Education%20-%20Refereed

Dubinsky, Ed. (1991). *Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking*. Recuperado el 2 de Septiembre del 2010 de http://www.math.kent.edu/~edd/publications.html#C.)%20 Mathematics%20Education%20- %20Refereed

Dubinsky, E. (2000). De la investigación en la matemática teórica a la investigación en la matemática educativa: un viaje personal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 3, (1). 47 – 70.

González, T. y Aldana, E. (2010). *Comprensión de la Integral Definida en el marco de la Teoría APOE.* 4-22. Recuperado el 24 de Febrero del 2011 de: http://www.seiem.es/actividades/archivosactividades/JORNADASDIDACTICAANALISIS.pdf

Hitt, F. (2003) Dificultades en el aprendizaje del cálculo. *Memoria del XI encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel medio superior.* Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Morelia, Michoacán, México.

Inhelder, B., Sinclair, H. y Bovet, M. (1996). *Aprendizaje y Estructuras del Conocimiento*. Madrid: Ediciones Morata.

Larson, R., Hostetler, R., Edwards, B. (2009). *Cálculo Integral*. México: Mc Graw Hill.

Leithold, L. (1983). *El Cálculo con Geometría Analítica*. México: FEM.

Ordoñez, L. y Contreras, A. (2010). La Integral Definida en las Pruebas de Acceso a la Universidad (pau): Sesgos y Restricciones en la Enseñanza de este objeto en 2o de bachillerato. M*emoria de la Sociedad Española de Investigación en educación Matemática. 23-41*

Paschos, T. & Farmki, V. (2006). *The Reflective Abstraction In The Construction Of The Concept Of The Definite Integral: A Case Study*. Recuperado el 2 de Febrero del 2011 de: ftp://ftp.emis.de/pub/EMIS/proceedings/PME30/4/337.pdf

Piaget, J. y García, L. (2004), *Psicogénesis e Historia de las ciencias*. (10ª Edición). México: Siglo XXI Editores.

Purcell, E., Varberg, D., Rigdon, S. (2001). *Cálculo.* México: Prentice Hall.

Rico, L. (2003). *Competencias matemáticas e instrumentos de evaluación en el estudio PISA 2003*, *Proyecto Pisa 2003*. Recuperado el 15 de Junio de 2009 de: http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2756510

SNEST. (2008). Tomado el 23 de marzo del 2010 de: http://www.dgit.gob.mx/index.php/quienes_somos/informacion/snest.html

Souto, B., Gómez, I. (2010). Comprensión visual y concepto de la Integral en la enseñanza universitaria. *Memoria de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. 80-94.

Stewart, J. (2008). *Cálculo, trascendentes tempranas*. México: CENGAGE learning.

Swokowski, E., (1989). *Cálculo con Geometría Analítica*. México: Grupo editorial Iberoamérica

Swokowski, E., (1989). *Cálculo con Geometría Analítica*. (2ª edición). México: Grupo editorial Iberoamérica.

Trigueros, M. (2005). La Noción de Esquema en la investigación en Matemática Educativa a Nivel Superior. *Revista Educación matemática, 1(17),* 5-31.

UNAM. (2010). *Planes de estudio para las carreras de Ingenierías*. Recuperado el 10 de Octubre del 2010 de: https://www.dgae.unam.mx/planes/carrera.html

Wenzelburger, E. (1994). *Didáctica, Calculo Integral*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Zill, D., (1987). *Cálculo con Geometría Analítica*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

PERCEPCIÓN DE LOS ALUMNOS SOBRE SUS CONOCIMIENTOS EN EL CURSO DE NIVELACIÓN

Marta Lía Molina, Marta Inés Cirilo, Carolina Ana Rotger
Facultad de Ciencias Económicas. Universidad Nacional de Tucumán Argentina
mliamolina@yahoo.com.ar, martainescirilo@yahoo.com.ar

Resumen. Los graves problemas de articulación entre los diferentes niveles de formación, al llegar al universitario, se traducen en un alto índice de deserción o de repitencia en los primeros años de las carreras. En el presente trabajo comparamos la percepción que tienen los alumnos de sus conocimientos en Matemática y el rendimiento de ellos en los temas que ellos perciben que tienen mayor dificultad, en la FACE-UNT.

En el estudio realizado algunas de las percepciones de los estudiantes coincide con los resultados obtenidos en la Prueba Final. Estos primeros resultados, por sí solos, no tienen una intencionalidad explicativa sino exploratoria ya que forman parte del análisis de reflexiones y acciones que puedan contribuir al mejoramiento de la enseñanza de la matemática y converger con el nuevo mecanismo de ingreso restricto.

Palabras clave: percepción, rendimiento académico, paso a la universidad

Abstract. The serious problems of coordination between different levels of education, finishing at university, result in a high dropout rate or repetition in the early years of university. In this paper we compare the students' perception of their knowledge in Mathematics and their performance in the issues they perceive they have greater difficulty in the FACE-UNT.

In the study some of the perceptions of students are consistent with the results obtained in the Final Exams. These first results, by themselves, are only exploratory not explanatory but since they are part of the analysis of thoughts and actions; they can contribute to the improvement of the teaching of mathematics and concur with the new mechanism of restricted entrance.

Key words: perception, academic performance, transition to college

Introducción

En la actualidad, nuestro sistema educativo presenta, en diferentes medidas, graves problemas de articulación entre los distintos niveles de formación, que al llegar al universitario, se traduce en un alto índice de deserción o de repetición en los primeros años de las carreras.

Esta situación compromete a las instituciones universitarias a favorecer una educación de buena calidad que impulse el desarrollo armónico e integral del individuo y de la comunidad, y que permita la innovación de los esquemas de participación social en torno a las instituciones educativas en un ambiente de respeto y corresponsabilidad, Braslavsky(1985).

En la gran mayoría de las universidades públicas argentinas prevalece el dictado de las asignaturas basado en el Paradigma tradicional (Gimeno y Pérez, 1993) y no centrado en el aprendizaje del alumno. Sin embargo, algunos grupos de investigación de las mismas, vienen señalando diversas problemáticas en torno a los procesos de enseñanza y el aprendizaje en este nivel, entre ellos Moyano (2000). El análisis sistemático de la problemática del ingreso y la permanencia aparece en la agenda pública en años recientes (Amago, 2005).

Contexto y problemática

La deserción promedio en la Universidad Nacional de Tucumán (UNT) de la cohorte 2008 es de un 43% en primer año, mientras que en la Facultad de Ciencias Económicas (FACE), el promedio es inferior a la media de la universidad y es de 35%, UNT-FACE-Cátedra de Estadística (2010).

Estos datos corroboran la información empírica de los docentes, del Ciclo Básico de las distintas carreras que se cursan en la FACE. De ella podemos mencionar: un elevado número de alumnos que no supera satisfactoriamente las primeras pruebas parciales; una cantidad importante de estudiantes que quedan libres tras el cursado (no logran aprobar los exámenes finales o lentifican en extremo su permanencia en la universidad lo que llamamos *alta tasa de repitencia*), estudiados por Moyano y otros (2003) y Gvirtz y Oria (2010).

En cuanto al ingreso en la disciplina Matemática observamos que existe un alto porcentaje de aspirantes que tienen una ausencia de conocimientos y/o saberes previos indispensables para su desempeño en el nivel superior, en estudios realizados por las autoras Yañez, Cirilo y Molina (2008) y Cirilo, Molina y Rotger (2009) para la FACE-UNT.

Como una solución a la problemática planteada, el Consejo Directivo de la FACE viene implementando el dictado del Curso de Concientización (actitud) y Destreza (aptitud) para los aspirantes al ingreso a partir del año 2008 con distintas exigencias. A partir del año 2011, las condiciones para ingresar dependen de los resultados de dicho curso que es evaluado con una prueba final de Matemática.

Este trabajo forma parte de una investigación más ambiciosa sobre la discusión y análisis de reflexiones y acciones operativas que puedan contribuir al mejoramiento de la enseñanza de la matemática y converger con el nuevo mecanismo de ingreso restricto aplicado en el presente año en la FACE.

En el marco de este trabajo nos proponemos:

- Determinar, cuáles de los temas de Matemática de este curso presentan más dificultad, de acuerdo a la percepción que tienen los aspirantes al ingreso sobre los mismos.
- Analizar el rendimiento de los alumnos en los temas que ellos percibieron como aquellos con más dificultad.
- Analizar si existen cambios en el rendimiento del alumno, luego de realizar el Curso de Concientización y Destreza.

El estudio realizado en la presente comunicación reúne dos indagaciones importantes, ya que contextualiza las percepciones que los alumnos tienen de sus propios conocimientos matemáticos y el rendimiento que los mismos obtuvieron en las evaluaciones. La información reunida y los resultados obtenidos serán utilizados para elevar una propuesta a la institución a fin de reestructurar los contenidos y metodología de enseñanza para cursos posteriores.

Marco Teórico

La actitud, las creencias, expectativas y motivaciones en el aprendizaje de la Matemática han sido motivo de estudio de numerosos autores como Aiken (1976), Head (1981), Gal y Ginsburg (1994) que señalaron la importancia de las mismas. Aunque no son netamente cognitivas y resulta complejo cruzar estas cuestiones apreciativas y valorativas con las cognitivas para obtener información que nos permita operar sobre metodologías de clase y sobre contenidos, especialmente los procedimentales y actitudinales.

En nuestro caso nos interesan particularmente las valoraciones personales de los estudiantes respecto a cuales temas estudiados en el Curso de Destreza les ocasionaron mayor dificultad en cruce con el rendimiento académico en la Prueba Final de Suficiencia.

De acuerdo a los objetivos planteados anteriormente nuestra principal variable de estudio es "la percepción del alumno acerca de los temas que le ocasionaron mayor dificultad", entendiendo por "percepción" el resultado de un proceso intelectual y afectivo de apreciación y discernimiento de situaciones y experiencias que permite dar una valoración o evaluación global sobre las mismas, analizado por Rembado, Ramírez, Viera, Ros y Wainmaier (2009).

Focalizando ahora el encuadre teórico de nuestra variable (la percepción del alumno acerca de los temas que le ocasionaron mayor dificultad) podemos decir que la misma está conformada por una componente afectiva y una componente meta-cognitiva.

La afectividad se manifiesta en las creencias de los estudiantes y en sus expectativas, las cuales condicionan su percepción de dificultad.

Entendemos que existe un acercamiento a lo meta-cognitivo cuando le pedimos a los alumnos que identifiquen los temas que le causan mayor dificultad. Por ello recordamos que *meta-cognición* es la capacidad que tenemos de auto-regular el propio aprendizaje, es decir de planificar qué estrategias se han de utilizar en cada situación, aplicarlas, controlar el proceso, evaluarlo para detectar posibles fallos, y transferir todo ello a una nueva situación.

La variable con la cual se realiza el cruce es el *Rendimiento Académico*, entendido por Pizarro (1985) como una medida de las capacidades respondientes o indicativas que manifiestan en forma estimativa, lo que una persona ha aprendido como consecuencia de un proceso de instrucción o formación. El autor también define el rendimiento desde la perspectiva del alumno como la capacidad de responder del mismo frente a estímulos educativos, susceptible de ser interpretado según objetivos o propósitos educativos pre-establecidos.

Himmel (1985) ha definido el rendimiento escolar o efectividad escolar como el grado de logro de los objetivos establecidos en los programas oficiales de estudio. En nuestro caso, medimos el rendimiento académico de los alumnos mediante la nota obtenida en la Prueba de Suficiencia o Final.

Metodología

Para determinar los temas en los que los alumnos perciben que tienen mayor dificultad se confeccionó un cuestionario, el mismo fue aplicado el 1er. día de clases a todos los asistentes. Se elaboró a partir de una base de datos de ítems elaborados por profesores responsables del Ingreso lo que asegura la validez del contenido al estar referidos a los contenidos del programa. Se midió la confiabilidad del instrumento a través del coeficiente Alfa de Cronbach obteniendo un valor de 0.76.

Se extrajo una muestra aleatoria simple de 352 alumnos de una población de 995 alumnos que rindieron la prueba final para ingresar a la FACE. Realizamos una comparación entre las notas obtenidas en la Prueba Diagnóstica y la Final.

Resultados

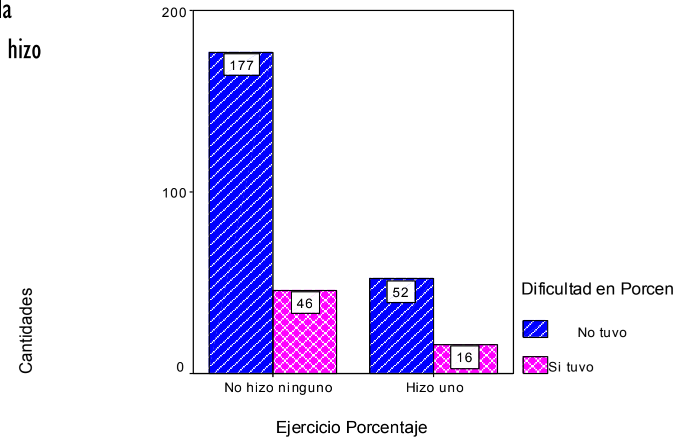
Los temas tratados en el Curso de Destreza fueron: Números Reales: Operaciones. Razones y Porcientos, Expresiones algebraicas: Operaciones, Factoreo, Ecuaciones de 1° y Ecuaciones de 2°. Sistemas de Ecuaciones lineales y Logaritmo.

Podemos decir que la mayor parte de los alumnos (49%) considera que en el tema de Geometría Analítica en es aquel en el que tienen más dificultad, le siguen Factoreo (22%), Razones y Porcientos (22%), Sistemas de ecuaciones(20%), Logaritmos (18%), Expresiones algebraicas(17%), Ecuaciones de 2° grado(7%), Ecuaciones de 1° grado(4%), Operaciones con números reales(3%). El cálculo de estos porcentajes se realizó sobre una base de 352 alumnos.

De los 352 alumnos de la muestra aleatoria del Curso de Destreza, sólo rindieron la Prueba Final 291 alumnos.

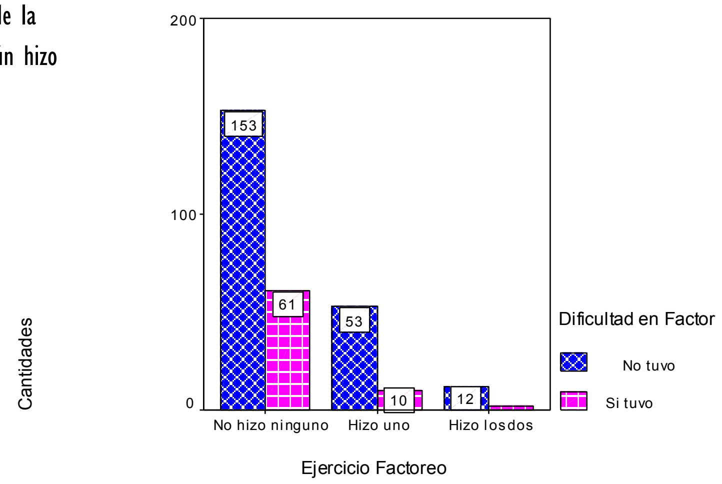
Analizamos la percepción de los alumnos sobre sus dificultades con los resultados obtenidos en la Prueba Final en los temas Geometría Analítica, Factoreo y Razones y Porcientos (considerados por ellos los de mayor dificultad). Para ello presentamos a continuación los siguientes gráficos, sobre los 291 alumnos que se presentaron a la Prueba Final.

Gráfico Nº 1: Distribución de frecuencia de la percepción de la Dificultad en Porcentaje según hizo o no el ejercicio de este tema



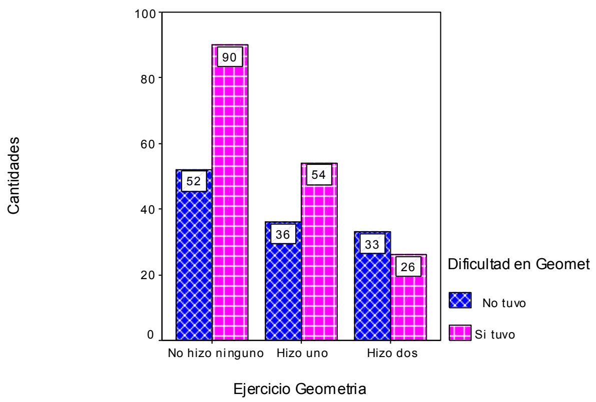
Fuente: Elaboración propia

Gráfico Nº 2: Distribución de frecuencia de la percepción de la Dificultad en Factoreo según hizo o no los dos ejercicios de este tema



Fuente: Elaboración propia

Gráfico Nº 3: Distribución de frecuencia de la percepción de la Dificultad en Geometría Analítica según hizo o no los dos ejercicio de este tema



Fuente: Elaboración propia

Del análisis de los gráficos se puede observar que la percepción sobre sus conocimientos de un número importante de alumnos no coincide con el rendimiento de los mismos en la prueba final, en los temas de Razones y Porcientos y de Factoreo.

Para analizar si existen cambios en el rendimiento del alumno, luego de realizar el Curso de Concientización y Destreza, comparamos las notas obtenidas por los alumnos en la Prueba Diagnóstica realizada el primer día de clases con las notas obtenidas en la Prueba Final.

Mediante esta comparación podemos asegurar que existen diferencias significativas entre las notas obtenidas por los alumnos en la Prueba de Diagnóstico y las notas obtenidas en la Prueba Final. La media de la nota final es mayor que la de la prueba de diagnóstico.

En el estudio realizado algunas de las percepciones de los estudiantes coinciden con los resultados obtenidos en la Prueba Final. Sin embargo estos primeros resultados no tienen una intencionalidad explicativa sino exploratoria ya que es muy importante la identificación de factores condicionantes en este trayecto formativo. Es importante mencionar que los alumnos no tienen incorporada la cultura de la evaluación, lo que podría haber generado impacto y nerviosismo en ellos a la hora de rendir la Prueba Final. Situación que consideramos puede revertirse en algunos casos que podremos corroborar o no luego de tener los resultados de la Prueba de Recuperación brindada a los alumnos que no aprobaron la prueba final.

Referencias bibliográficas

Aiken, L.R., (1976). Two scales of attitude towards mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education. (5),* 67-71.

Amago, L (2005). Principales dificultades de los estudiantes de primer ingreso al grado. Estudio preliminar sobre el estado del conocimiento, *II Jornadas sobre docencia: los docentes universitarios ante los nuevos escenarios para la formación del estudiante,* Buenos Aires, Universidad Nacional General Sarmiento, pp. 11–24.

Braslavsky, C. (1985). *La discriminación educativa en Argentina*. Buenos Aires: FLACSO. CEAL.

Cirilo, M. I., Molina, M. L. y Rotger, A. C. (2009). El ingresante a la FACE-UNT desde una mirada socio-cultural**.** *La Universidad como Objeto de Investigación. VI Encuentro Nacional y III Latinoamericano.* ISBN N° 978-950-33-0746-5. Universidad Nacional de Córdoba.

Gal, I. y Ginsburg, L. (1994). The role of beliefs and attitudes in learning statistics: Toward an assessment framework. *Journal of Statistics Education.* Disponible en: http://www.amstat.org/ publications/jse/v2n2/gal.html

Gimeno, S, J. y Pérez Gómez, A. (1993). *Comprender y transformar la enseñanza*. Madrid: Morata.

Gvirtz, S.; Oria, A. (2010). Evaluar el Rendimiento Interno y Académico: un Desafío para la Macro y la Micro Política. Lecciones a Partir de un Estudio de Caso. Disponible en http://rinace.net/riee/numeros/ vol3-num2/art7_htm.html

Head, J. (1981). Personality and the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics (12),* 339-350.

Himmel, (1985). *Rendimiento académico previo y el currículo en el hogar sobre la autoestima de los alumnos.* Disponible en: http:// contexto-educativo.com.ar.

Moyano, M. (2000). El ingreso a las universidades: un desafío pendiente. En *Revista Voces*. N°24.

Moyano, M. y otros (2003). *El rol de la universidad pública: políticas de ingreso y permanencia e igualdad social*. Recuperado el 16 de febrero de 2011 de http://conedsup.unsl.edu.ar/ Download_trabajos/Trabajos/Eje_1_Politicas_de_educacion_superior/Moyano%20y%20

Pizarro, R. (1985). *Rasgos y Actitudes del Profesor Efectivo.* Tesis para optar al Grado de Magister en Ciencias de la Educación. Pontificia Universidad Católica. Chile.

Rembado, F.; Ramírez, S.; Viera, L.; Ros, M. y Wainmaier, C. (2009). *Condicionantes de la trayectoria de formación en carreras científico tecnológicas: las visiones de los estudiantes.* Disponible en: http://redalyc.uaemex.mx/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=13211178002

U.N.T.- FACE- Cátedra De Estadística (2010). *Deserción, graduación y duración real de las carreras de la U.N.T. 1976-2009*. UNT. Tucumán.

Yañez, D., Cirilo, M. I. y Molina, M. L. (2008). Una primera aproximación en la reflexión sobre la problemática de la comunicación matemática. *6ª Jornada de Economía y Sociedad del NOA*. Universidad Nacional de Santiago del Estero.

CONOCIMIENTO ADQUIRIDO Y EL CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO: IMPLICACIONES PARA EL BACHILLERATO TECNOLÓGICO

Rogelio Martínez García, Fausto Mendoza Díaz, Ignacio Garnica Dovala, Héctor Chávez Rivera, Ana María Ojeda Salazar
Instituto Politécnico Nacional, DME Cinvestav México
rerg2002@yahoo.com.mx, mendizf@hotmail.com, igarnica@cinvestav.mx, chavez_santiago@yahoo.com.mx, amojeda@cinvestav.mx

Resumen. Con una perspectiva cualitativa, se realizó una indagación de los procesos de enseñanza-aprendizaje de las funciones trigonométricas en el aula, mediante la referencia al círculo unitario, en paralelo con una investigación de los fundamentos cognitivos respectivos, de 104 estudiantes de tres grupos del segundo semestre de bachillerato tecnológico. La aplicación de un cuestionario de investigación y de otro de indagación, así como de cinco entrevistas clínicas, ubicó al conocimiento adquirido previo de los estudiantes requerido para el tema de esa enseñanza en el nivel 0 del modelo de Van Hiele y reveló la prevalencia de procedimientos automatizados de pre-álgebra, que evidenciaron la ausencia de las nociones de geometría en foco. Los resultados sugieren un examen acucioso del programa de estudios.

Palabras clave: conocimiento adquirido, círculo trigonométrico, bachillerato

Abstract. From a qualitative point of view, an inquiry on the process of the teaching-learning of trigonometric functions by using the unit circle was carried out in three second semester classrooms of the technological preparatory, with 104 students, simultaneously with a research of their corresponding cognitive bases. According to the data collected with two questionnaires, one for research and another for an inquiry, as well as with five clinical interviews, the students' previous knowledge required for the teaching of that subject was situated at level 0 of Van Hiele's model. The data collected also revealed the prevalence of pre-algebra automated procedures, which showed the lack of the notions of Geometry in focus. The results pointed to a detailed examination of the syllabus of the corresponding grade.

Key words: acquired knowledge, trigonometric circle, high school

Introducción

El conocimiento adquirido en los cursos previos al ingreso a la Educación Media Superior es determinante para el futuro desempeño del sujeto. Por ello, para conocer los rasgos del desempeño académico de estudiantes del primer año de bachillerato tecnológico mexicano, se realizan acciones de naturaleza dual: de indagación de los procesos de enseñanza-aprendizaje en el aula y de investigación de sus fundamentos cognitivos. Esta investigación se realiza en condiciones institucionales de aula y se enfoca en el círculo unitario.

La estrategia de enseñanza para introducir las funciones trigonométricas se basó en el círculo trigonométrico. En consecuencia, el interés de la investigación se centró en identificar el conocimiento adquirido por los estudiantes de las bases del tema de círculo trigonométrico antes de su empleo en la enseñanza de las funciones trigonométricas. En tanto, el interés de la indagación fue identificar la aplicación de nociones del círculo trigonométrico para responder preguntas relativas a situaciones en general tratadas durante la enseñanza previa a la de las funciones trigonométricas.

Marco de referencia

Como referentes de la presente investigación, se consideran la producción teórica referida al razonamiento geométrico y la propuesta de la modalidad bivalente del bachillerato, denominada bachillerato tecnológico porque prepara al estudiante tanto para una carrera técnica como para acceder al nivel superior.

Modelo Van Hiele

Diversos autores (por ejemplo, Fuys & Geddes, 1984) han recurrido a la propuesta de Van Hiele (1957) para el estudio del pensamiento geométrico. Los primeros plantean que, con la enseñanza apropiada, ese pensamiento del estudiante evoluciona en cinco niveles: Nivel 0: identifica, nombra, compara y opera sobre figuras geométricas; Nivel 1: analiza figuras en términos de sus componentes y sus relaciones y descubre propiedades o reglas de una clase de formas empíricamente; Nivel 2: siguiendo o dando argumentos informales, interrelaciona lógicamente propiedades o reglas descubiertas previamente; Nivel 3: prueba teoremas deductivamente y establece interrelaciones entre redes de teoremas; Nivel 4: establece teoremas en diferentes sistemas de postulados y analiza o compara estos sistemas. Este modelo ha derivado en lineamientos, correspondientes a los niveles citados, para la enseñanza de la Geometría, a saber: preguntas/información, orientación dirigida, explicación (explicitación), orientación libre, integración (Fouz y de Donosti, sf).

Propuesta institucional

El curso *Geometría y Trigonometría* (Dirección de Educación Media Superior del IPN, 2008) se imparte en el segundo semestre del bachillerato tecnológico, con el objetivo de "aplicar conocimientos matemáticos a situaciones diversas que puedan presentarse a fenómenos y procesos propios de las ciencias exactas y sociales" (p. 3). El curso está constituido por tres unidades: *Funciones exponenciales y logarítmicas* (Unidad I), *Geometría Euclidiana* (Unidad II) y *Trigonometría* (Unidad III). En particular, esta última tiene el propósito de que el estudiante emplee "… las funciones trigonométricas en la solución de triángulos y ecuaciones que se presentan en situaciones de su entorno académico, personal y/o social" (p. 3).

El círculo trigonométrico se propone al docente como estrategia de enseñanza de la tercera unidad, en actividades en las que él: "Expone las funciones trigonométricas a partir del círculo unitario y sus respectivas gráficas" (p. 13). El conocimiento relativo al círculo y a la circunferencia es contenido de la segunda unidad. En ésta se especifica, como actividades sustantivas de aprendizaje, la identificación de "los elementos relevantes del triángulo, polígonos, circunferencia y círculo" (p. 11); y, como evidencia de este aprendizaje, la representación y reconocimiento "de las características particulares de: triángulos, polígonos, circunferencia y círculo" (p. 11). De entre los criterios de evaluación de esta unidad, la propuesta indica que el estudiante realice "inferencias de tipo geométrico a partir de las características de: triángulos, polígonos, circunferencia y círculo" (p. 11).

El conocimiento básico del círculo trigonométrico implica el de la definición del círculo, sus componentes y las relaciones entre ellas (centro, radio, radián, longitud de la circunferencia, cuerda, diámetro, tangente a una circunferencia, ángulos centrales, su medida en radianes y en grados, y las razones trigonométricas). Consideramos a esas componentes y relaciones en las categorías de forma y figura, medición y relaciones.

Métodos e instrumentos

De forma cualitativa y *en curso* (véase en www.matedu.cinvestav.mx/~cognicion), se llevaron a cabo una investigación y una indagación con las características siguientes.

Escenarios y participantes

El seminario "Matemática Educativa en el Bachillerato Tecnológico" conjugó la investigación y la indagación de la docencia en matemáticas en esa modalidad educativa, mediante reflexiones y acciones de sus integrantes (investigadores y docentes), relativas a la enseñanza de las matemáticas en condiciones institucionales de aula. En este seminario se discutieron y acordaron los objetivos y los métodos e instrumentos por aplicar en el aula y en la sala de interrogatorios (cámara Gesell), se analizaron los datos recopilados e identificaron los resultados obtenidos de ese análisis.

Participaron en la investigación 104 alumnos, con edades de entre 14 y 17 años, de tres grupos del CECyT No. 4 Lázaro Cárdenas, del Instituto Politécnico Nacional, en México, D. F., en las aulas del curso *Geometría y Trigonometría* del 2° semestre, dos docentes titulares y tres investigadores.

Instrumentos y técnicas

Se diseñaron dos cuestionarios, uno de investigación (**I**) y otro de enseñanza (**E**), para identificar el conocimiento adquirido de los estudiantes requerido antes de la enseñanza de las funciones trigonométricas mediante el círculo unitario. Los cuestionarios, impresos en papel, se contestaron individualmente con lápiz o pluma en el aula de matemáticas a la hora habitual de clase. Por las respuestas obtenidas con ellos y por la disposición mostrada por tres estudiantes, se aplicaron a éstos cinco entrevistas en cámara Gesell, a manera de clínica, para profundizar sobre su comprensión de los conceptos requeridos por el círculo trigonométrico. Las entrevistas, de una hora de duración, se videograbaron y transcribieron.

Cuestionario I

El objetivo general de este instrumento fue obtener datos sobre el estado de conocimiento de espacio y forma adquirido por estudiantes que inician un proceso de aprendizaje del tema de las funciones trigonométricas. Se plantearon 15 reactivos con preguntas abiertas, en tres secciones, a contestar cada sección en 15 min (véase la Tabla 1).

Las situaciones de referencia para contestar los reactivos se presentaron con figuras y/o lengua escrita y la tercera sección incluyó, además, tres arreglos en tablas.

Tabla 1. Caracterización del Cuestionario I.

Sección	Objetivo: Reconocer	Contenido	Reactivos	Acciones requeridas
Figura y forma	Propiedades geométricas sin sistema de referencia. Relaciones formales básicas.	Alturas de triángulos, la circunferencia, su longitud, ángulos centrales. Circunferencia y recta tangente. Ángulos y lados de figuras triangulares.	1, 2, 3, 4 y 5 6, 7, 8	Trazar. Identificar. Expresar en lengua escrita y la notación angular. Usar símbolos geométricos.
Medición	Propiedades de la medida.	Longitud de figuras abiertas irregulares, de un trapezoide irregular y de figuras cerradas regulares; del círculo, de arco, de la circunferencia; noción de π. Ángulo central en grados y en radianes.	1, 2, 3, 4, 5	Trazar. Expresar en lengua escrita y notación de medidas angulares. Contar unidades, calcular longitud con teorema de Pitágoras.
Relaciones trigonométricas	Propiedades y relaciones en triángulos rectángulos.	Suma de ángulos internos; razones entre lados, sus nombres, ángulos asociados y su medida.	1, 2, 3, 4, 5	Nombrar. Expresar en lengua escrita. Convertir unidades angulares. Calcular longitud con teorema de Pitágoras y ángulos a partir de lados.

Cuestionario E

Este instrumento es de los que se aplican por norma a los alumnos de los CECyTs del IPN; contuvo 17 reactivos (véase la Tabla 2) y se le contestó en una hora. El objetivo general fue identificar los conocimientos adquiridos como requisito para cumplir los objetivos que propone la Unidad de Aprendizaje Geometría y Trigonometría.

Guiones de entrevistas I, E

En ambos casos se consideró el contenido de cada cuestionario, I o E, aplicado. Para la entrevista I de investigación se tomó en cuenta lo siguiente:

Figura y forma. Alturas del triángulo; ubicación del centro de la circunferencia; longitud de una cuerda; longitud de una circunferencia y de un arco [$2\pi r$; $r\theta$]; si $l = 2\pi$ entonces r = ?; noción de tangencia (cómo asegurar que el punto es único); los valores de los ángulos interiores de figuras formadas por triángulos (noción de semejanza).

Medición. Cálculo de: la longitud de cierta trayectoria; el área del círculo dada la longitud de su circunferencia, de $l = 2\pi r$ a $A = \pi r^2$; la medida del ángulo que subtiende un arco de longitud r; el perímetro de figuras que requiera del teorema de Pitágoras. Conversión de radianes a grados y su representación en el círculo.

Para la entrevista E de enseñanza se hizo especial énfasis en la solución de problemas relativos a razón y semejanza.

Forma y figura. Elementos del triángulo rectángulo; noción de paralelismo.

Medición. El círculo unitario y medidas angulares en el plano cartesiano; suma de los ángulos interiores de un triángulo; semejanza de triángulos; cálculo de áreas y perímetros de figuras circulares y poligonales; aplicación del teorema de Pitágoras.

Relaciones trigonométricas. Identificación nominativa.

Cálculo. Resolución de problemas del triángulo rectángulo y de razón y semejanza.

Tabla 2. Caracterización del Cuestionario E.

Sección	Objetivo: Reconocer	Contenido	Reactivos	Presentación
Figura y forma	Reconocer los elementos constitutivos (ángulos y nombre de catetos) del triángulo rectángulo	(8) Elementos del triángulo rectángulo	[8(a, b, c)] [*2;5*]	(8) Expresión escrita sin inclusión de figura
Medición	Reconocer los procedimientos para calcular la medida de: a) áreas compuestas; b) la longitud de perímetros y de lados de triángulos rectángulos.	(9) Medidas angulares en el círculo unitario; (11) Medida de la longitud de un cateto y la noción de semejanza	[9 (a, b, c); 10; 11] [*1;3;4;6;7*]	(9)Expresión escrita, con inclusión de figura circular en sistema cartesiano; (11) Figuras [dos triángulos rectángulos]
Relaciones trigonométricas	Reconocer la nominación de las funciones trigonométricas	(12) Nombre de las razones trigonométricas	12 (a, b);	Expresión escrita sin inclusión de figura
Elementos básicos	Reconocer la propiedad de composición de áreas	(3) Áreas compuestas de figuras circular y cuadrilátera	3, 6	Expresión escrita con inclusión de figuras diferenciadas

Cálculo	Aplicar el teorema de Pitágoras y los criterios de semejanza al resolver un problema	(7) Triángulo rectángulo (10) Razón de semejanza	7, 10	Expresión escrita con inclusión de la figura del triángulo rectángulo

Resultados del análisis

El análisis de los datos recopilados con los instrumentos de investigación referido al modelo de Van Hiele arrojó los siguientes resultados.

Conocimiento previo adquirido

Del dato cuantitativo obtenido con el Cuestionario I resultó lo siguiente: el 70% de los estudiantes manifiesta una tendencia de aproximación a las características del nivel 0 del modelo de van Hiele; el 30% podría considerarse incluido en este nivel y sólo el 9% cubre la transición al nivel 1. De los datos cualitativos sobre el conocimiento adquirido de geometría elemental resultó lo siguiente:

Figura y Forma. 1) No se reconoce el sistema referencial para determinar las alturas del triángulo (véase ejemplo de respuesta en la Figura 1a); 2) La noción de que la intersección de dos diámetros define el centro de la circunferencia se manifiesta por dos acciones de doblar a contra luz la figura en el papel; 3) Se recurre al uso de instrumentos u objetos para medir; 4) Nueve casos reconocen la condición de tangencia; 5) Se reconocen los ángulos internos de triángulos rectángulos.

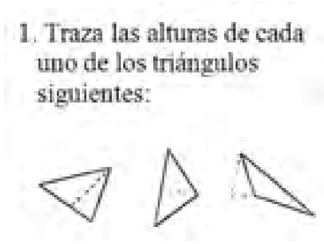


Figura 1a. Ejemplo de reactivo de Figura y forma

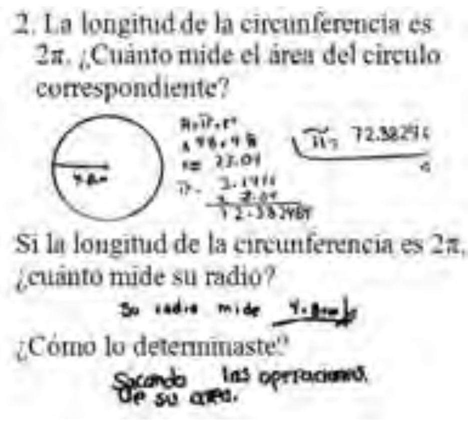
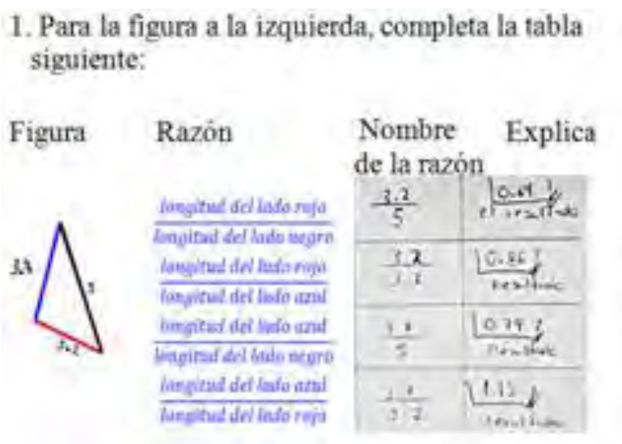


Figura 1b. Ejemplo de reactivo de Medición

Medición. 1) Casos aislados manifiestan ideas intuitivas para la medición de la longitud de curva; 2) La noción de π, ya sea como literal, como número irracional o como representación de la medida angular, se presenta sin sentido; 3) la representación de la medida angular en grados y en radianes está ausente; 4) no se reconoce la relación de la medida de la longitud de la circunferencia con su radio y π (véase ejemplo de respuesta en la Figura 1b); 5) Las medidas de áreas y de lados se determinan con procedimientos confusos y argumentos inconsistentes.



1. Para la figura a la izquierda, completa la tabla siguiente:

Figura	Razón	Nombre de la razón	Explica
	longitud del lado rojo / longitud del lado negro	3.2 / 5	[illegible]
	longitud del lado rojo / longitud del lado azul	[illegible]	[illegible]
	longitud del lado azul / longitud del lado negro	[illegible]	[illegible]
	longitud del lado azul / longitud del lado rojo	[illegible]	1.15

Figura 1c. Ejemplo de reactivo de Relaciones trigonométricas

Relaciones trigonométricas. 1) No se reconoce la razón geométrica entre los lados del triángulo rectángulo y las explicaciones manifiestan la ausencia de la noción en cuestión (véase ejemplo de respuesta en la Figura 1c).

Entrevistas I

Los resultados obtenidos con el Cuestionario I se confirmaron en las tres entrevistas de investigación realizadas en cámara Gesell. En los pasajes siguientes, nos referiremos a los casos Al y Lo y hemos denotado por I la intervención del investigador.

Figura y forma. Al reconoce a los triángulos rectángulos, nombra sus lados e identifica ángulos rectos; también al cuadrado, con sus lados iguales y su área. Respecto a la circunferencia, la reconoce y a algunos de sus elementos, como radio, diámetro y arco, pero no a la cuerda. Sus respuestas exhiben la inestabilidad de sus conocimientos.

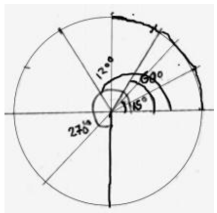


Figura 2a). Caso Al.

Al Bueno, ya éste …. Éste mide noventa.

I ……. Más o menos. Fíjate, eso te complica, porque … es decir, más o menos, [inentendible] … poco más, poco menos, ésta … ¿cómo se llama esta parte, cómo se llama esto? [Señala con el lápiz en la Figura 2a) en donde más o menos serían 60°. Señala a continuación con la punta del lápiz los extremos de tres arcos subtendidos por los ángulos marcados por Al].

Al Arco.

I ….. ¿Con qué está relacionada la longitud de la circunferencia?

Al ¿Con el radio?

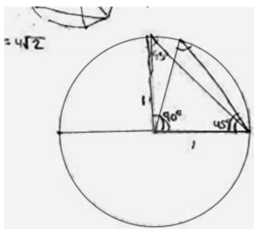


Figura 2b). Caso Al.

I …… ¿Cómo se llama ese elemento? [Se refiere a la hipotenusa del triángulo rectángulo trazado en el círculo; véase la Figura 2b)].

Al Cateto.

I Sí, pero en la circunferencia y en el círculo tiene un nombre especial éste. ¿Cómo se llama?

Al Sssecante.

I ¿Cómo?

Al ¿Secante?

I No te acuerdas. Ésta es una cuerda, ¿verdad?

Al Cuerda.

I Una cuerda, ¿no? Y este triángulo que se forma aquí, ¿cómo es? ¿Qué tipo de triángulo es ése?

Al ¿Isósceles?

Medición. Lo requirió de la intervención del investigador (véanse las Figuras 3b) y 3c)) para advertir la propiedad de la adición de las longitudes de las partes de una curva (véanse las Figuras 3a) y 3d)) para determinar su longitud total.

I ¿Cómo le harías para medirla?

Lo ¿Por… rangos?

I ¿Cómo la tomas por rangos?

Lo Tomar la cresta: traza marcas que limitan a la primera cresta.

I En general, ¿qué es más fácil medir?

Lo Las cosas que están rectas.

I ¿Qué harías, entonces, para medirla? Si dices que lo más fácil son las rectas, las cosas rectas ...

Lo Por medio del punto, de aquí acá: traza un segmento que une los extremos.

I Pero eso no me lo mide… La voy a partir. ¿Te sería fácil medirlo?

Lo [Asiente].

I Pero, te falta, ¿no?

Lo Sí [remarca la cresta].

I ¿Qué harías, entonces, ahí?

Lo ¡Ah! Podríamos utilizar una cuerda …. Con la regla.

I … imagínate que éste es un río y el río está larguísimo.

Lo … trazos pequeños: hace cinco marcas más para tener seis partes "iguales" [véase la Figura 3d)].

… los trazos… pequeños… podemos medir de aquí a acá [señala los extremos de la primera cresta].

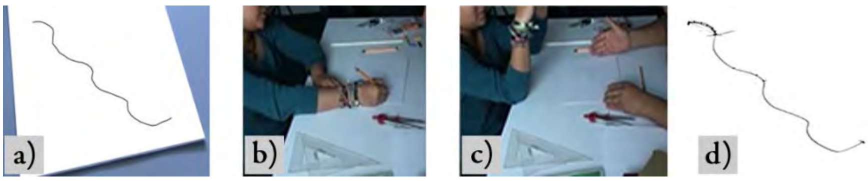


Figura 3. Ejemplos de reactivos y de respuestas al Cuestionario I del caso Lo en entrevista.

Relaciones trigonométricas. Aunque **Al** reconoció lo que es un triángulo rectángulo y un triángulo isósceles, y pudo hacer referencia al teorema de Pitágoras para relacionar los lados de triángulos rectángulos, todos estos conocimientos fueron inestables ante la vaguedad de su idea de número irracional, en particular de $\sqrt{2}$, que podría ser debida a que $\sqrt{1^2+1^2}$ se ancle a la identidad $1^2 = 1$ (véase la Figura 4).

I Y aquí trazo esa cuerda, ya me dijiste que éste vale cuarenta y cinco y éste vale cuarenta y cinco porque tus lados son iguales [véase la Figura 4].

I …Pero estás de acuerdo conmigo: este radio y este radio son …

Al Iguales.

I Eso no ha cambiado.

Al: No, ajá.

I: Yo le estoy poniendo, para asentir algo, que éste vale uno y éste vale uno [señala a cada cateto en la figura; véase la Figura 4].

Al: Uno. Precisamente éste vale uno [señala a la hipotenusa].

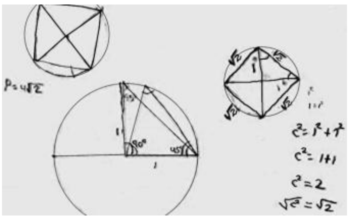


Figura 4. Caso Al.

Cuestionario E

De la enseñanza, del dato cuantitativo resultó lo siguiente: el 9% de los estudiantes dieron entre 17 y 14 respuestas formales, el 30% entre 8 y13, el 61% de 1 a 8. Los datos cualitativos son: 1) Los estudiantes no dan justificación alguna de los ángulos formados por dos paralelas cortadas por una secante transversal; 2) No aplican la semejanza de triángulos no obstante haber sido tema del curso anterior *Razones y proporciones*; 3) No argumentan acerca del teorema de Pitágoras, pues lo aplican mecánicamente y les es difícil trazar los distintos ángulos en el círculo trigonométrico.

Entrevistas E

Los estudiantes entrevistados (casos Vi y Al) sólo reconocieron resultados numéricos con expresión decimal, mostraron confusión al expresar los lados de un triángulo dado como razón, pero mejoraron sus procedimientos en la solución de problemas típicos. Por ejemplo, Vi respondió, a la vez que D le leía las instrucciones, en cuatro tiempos [T] (véase la Figura 5), como se muestra con la transcripción siguiente:

D T1 *Problema.* Una casa de dos plantas tiene una altura de seis punto veinte metros.

T2 … y proyecta una sombra de cuatro metros con sesenta centímetros.

T3 En el preciso instante que una antena, colocada en la azotea, proyecta una sombra de dos metros con ochenta centímetros.

T4 La pregunta es: "*Calcular la altura de esa antena*". ¿Cómo le harías?

Traza el modelo. Establece las relaciones. Calcula. Obtiene la solución.

Figura 5. Secuencia del proceso de solución en la entrevista E al caso Vi.

Sin recurrir a la relación de semejanza de triángulos, **Vi** utilizó la regla de tres simple (T2), identificó la incógnita (T3) y con la calculadora encontró su valor (T4); sin embargo, **Vi** no pudo argumentar a favor de su uso de la regla de tres en su procedimiento.

Conclusiones y comentarios finales

De manera generalizada, el pensamiento geométrico de los estudiantes participantes en la investigación se manifestó en el Nivel 0 del modelo de Van Hiele, en lugar de en una esperada transición del Nivel 1 al 2 dado que se trata de bachillerato. No exhibieron un dominio de la red de conceptos y propiedades implicados en el círculo trigonométrico, por lo que la estrategia recomendada en el programa para la enseñanza de las funciones trigonométricas no era viable. Antecede a la unidad de aprendizaje de las funciones trigonométricas la que incluye al tema del círculo unitario, cuyo objetivo no se logró.

Por otro lado, la investigación e indagación sobre los conocimientos elementales de geometría necesarios para recibir la enseñanza de las funciones trigonométricas reveló, además, deficiencias en el concepto de número, en particular del irracional, manifiestas en los procedimientos que implicaron a raíz de dos y π durante las entrevistas, limitados éstos a una expresión decimal. Igualmente, se identificaron deficiencias en las operaciones aritméticas básicas supuestamente resueltas en el nivel educativo anterior.

Los resultados sugieren un examen acucioso del programa de estudios y el impulso a la indagación e investigación.

Referencias bibliográficas

Dirección de Educación Media Superior, Secretaría Académica, Instituto Politécnico Nacional (2008). Geometría y Trigonometría. *Plan de Estudios*. México: IPN.

Fouz, F. & De Donosti, B. (sf). *Modelo de van Hiele para la didáctica de la Geometría. Un paseo por la Geometría*. Recuperado el 11 de marzo del 2011 de http://divulgamat.ehu.es/weborriak/testuakonline/04-05/pg-04-05-fouz.pdf.

Fuys, D. & Geddes, D. (1984). *An Investigation on van Hiele's Levels of Thinking in Geometry Among Sixth and Ninth Graders: Research Findings and Implications*. Brooklyn, New York: Brooklyn Coll. School of Education.

Van Hiele, P. M. (1957). *De Problematick van het Inzicht Gedemonstreed van het Inzicht von Schodkindren in Meetkundeleerstof*. Ph.D. dissertation. University of Utrecht.

ANÁLISIS DE UN PROCESO DE ESTUDIO SOBRE EL OBJETO MATEMÁTICO FUNCIÓN MEDIANTE LOS CRITERIOS DE IDONEIDAD DIDÁCTICA

Ana Peña, Mario Arrieche
Universidad de Carabobo y Universidad Pedagógica Experimental Libertador Venezuela
guadkar30@hotmail.com,marioarrieche@hotmail.com

Resumen. El presente trabajo se encuentra inserto en la línea de investigación "Perspectivas del enfoque semiótico antropológico para la didáctica de la matemática" (Arrieche, 2003). El propósito de esta investigación es analizar el proceso de estudio sobre el objeto matemático función mediante los criterios de idoneidad didáctica. Teóricamente se fundamentará en las nociones teóricas propuestas en el EOS. Se hará énfasis sólo en las idoneidades epistémica e interaccional; donde se evidenciará las situaciones problemas, el lenguaje, elementos regulativos, argumentos y acciones propuestas por el docente y los modos de interacción.

Palabras clave: función, idoneidad epistémica, idoneidad interaccional

Abstract. This work is embedded in the research "Perspectives of the semiotic and anthropological approach to the mathematics' teaching" (Arrieche, 2003). The purpose of the study is to analyse the process of study the function mathematical object by teaching the eligibility criteria. Theoretically is based on theoretical notions proposed in the EOS. Emphasis will be placed only in the epistemic and interactional suitabilities, where problems become evident situations, language, regulatory elements, arguments and actions proposed by the teacher and the interaction's.

Key words: function, suitabilities epistemic, suitabilities interactional

Introducción

La matemática es una asignatura de gran importancia en cualquier currículo de educación, ya que ella brinda herramientas necesarias a los estudiantes para desenvolverse en la sociedad, y sobre todo en la actualidad, donde se requiere asumir una matemática que tenga aplicabilidad, capaz de permitir modelizaciones de situaciones en términos matemáticos. En este sentido esta ciencia constituye un quehacer humano, producido como respuesta a situaciones problemáticas del mundo real, social e intramatemático (Godino, 2003).

Entonces, es conveniente realizar investigaciones que permitan mostrar cómo se está llevando a cabo el proceso de enseñanza y aprendizaje de esta disciplina. Cabe destacar que el trabajo que se presenta a continuación está a nivel de proyecto, en el que se tomará como objeto de estudio a las funciones, no por pretensión sino porque "el concepto de función puede considerarse como un eje transversal dentro del currículo matemático del sistema educativo venezolano" (Hernández, 2008, p.4).

Actualmente, para el estudio de la Educación Matemática existen diversas teorías, enfoques, perspectivas, siendo uno de ellos el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) propuesto por Godino, (2003), teniendo cómo noción principal la de significado. Sin embargo, existen otras nociones teóricas actualmente dentro del EOS, como son los criterios de idoneidad didáctica, entendiéndose por idoneidad didáctica, "el criterio sistémico de pertinencia o adecuación de un proceso de instrucción al proyecto educativo" (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007, p.1).

En esta investigación se analizará un proceso de estudio sobre el concepto matemático función para determinar su grado de idoneidad didáctica y luego realizar una construcción de este proceso, de instrucción, que sea idóneo tomando en cuenta solamente las idoneidades epistémica e interaccional.

El artículo está estructurado en: el problema, objetivos y justificación de la investigación, marco teórico referencial, metodología y las referencias bibliográficas.

El problema

En el sistema educativo venezolano son diversos los temas algebraicos que se estudian, entre los cuales se pueden mencionar: ecuaciones de primer grado en diversos conjuntos numéricos (N, Z, Q y R), polinomios, factorización de polinomios, funciones, productos notables, resolución de ecuaciones de segundo grado, sistemas de ecuaciones lineales y el estudio de varios tipos de función: lineal, afín, cuadrática, polinómica, identidad y constante (Currículo y orientaciones metodológicas para los Liceos Bolivarianos, 2007).

Sin embargo, en este estudio se tomará solamente el tópico función, teniendo en cuenta que es fundamental que el estudiante aprenda este objeto matemático por su utilidad para modelizar un gran número de situaciones de la vida cotidiana (propagación de una bacteria, la pérdida y ganancia de un negocio), pertenecientes a otras áreas del saber (cómo la física, la biología, la química, etc.) y dentro de la misma matemática (estructuras algebraicas de grupo, anillo, cuerpo y espacio vectorial) (Arrieche, 2010). Existen otros autores, como Leithold, (1998); Hernández, (2007); Godino y Font, (2003) quienes señalan que las funciones son fundamentales en el Cálculo porque permiten proporcionar en la práctica determinadas funciones como modelos matemáticos que tienen aplicación a situaciones del mundo real.

Por otro lado, investigaciones realizadas en el nivel de educación media general, sobre las funciones, muestran que los estudiantes presentan dificultades para apropiarse de este objeto matemático, indicando que es debido al proceso de enseñanza y aprendizaje de este tópico y adicionalmente plantean que en el ambiente del aula de clase no se fomenta la aplicación que tienen las funciones a la vida cotidiana, teniendo en cuenta que esta noción es un contenido integrador, así como también son pocas las sesiones o casi nulas en las que se destaca el origen, evolución e historia de este objeto matemático. (Chiavaroli, 2010; Hernández, 2007).

En este mismo orden de ideas, los registros del rendimiento académico de los estudiantes, emitidos por el Departamento de Control de Estudios del Liceo Nacional "José Andrés Castillo" del municipio Montalbán- estado Carabobo; muestran que en los últimos 3 años escolares (2007 – 2008, 2008 – 2009, 2009 - 2010) es necesario realizar por lo menos 2 veces la evaluación correspondiente al tema de las funciones, mostrando resultados desfavorables, mostrado este fenómeno en que existe un 70% de aplazados cada vez que se evalúa ese contenido.

De lo expuesto en los párrafos anteriores, surge una primera interrogante para este estudio: ¿Cómo se está impartiendo la enseñanza y aprendizaje de las funciones en tercer año de educación media general?; la cual a su vez genera una segunda interrogante: ¿Cuál es el grado en que los modos de interacción permiten identificar y resolver conflictos de significado y favorecen la autonomía en el aprendizaje sobre el objeto matemático función?

En relación a lo anterior, este estudio se plantea como primer problema el uso de situaciones problemas en el proceso de enseñanza y aprendizaje por parte del docente así cómo verificar cuáles son las situaciones contextualizadas que se le presentan a los estudiantes; comprobar si éstas contribuyen a la comprensión matemática, argumentación, validación y establecimiento de relaciones, articulaciones del objeto matemático función. Como segundo problema, se tiene cómo son los modos de interacción durante el proceso de estudio de las funciones, dichos modos son: las interacciones entre docente-discentes, discentes-discentes, además de verificar cómo se favorece la autonomía en los estudiantes para asumir la responsabilidad del estudio de las funciones.

En virtud de la importancia que tiene la noción de función dentro de la comprensión de la matemática, su aplicación en las diversas ciencias, las dificultades que se presentan en su proceso de estudio y los modos de interacción, se propone la siguiente investigación, que debe permitir responder a las siguientes interrogantes, clasificadas en las facetas epistémica e interaccional, presentadas en Godino (2003); Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006);

Idoneidad Epistémica:

¿Cuál es el grado de representatividad de los significados institucionales implementados o pretendidos, respecto al significado de referencia en torno a las funciones?

Idoneidad Interaccional:

¿Cuál es el grado en que los modos de interacción permiten identificar y resolver los conflictos semióticos de significado para favorecer la autonomía en el aprendizaje de las funciones?

Objetivo General

Analizar un proceso de estudio sobre el objeto matemático función mediante los criterios de idoneidad didáctica, en un curso de tercer año de educación media general. Haciendo énfasis en la idoneidad epistémica e interaccional.

Objetivos Específicos

1. Describir el grado de representatividad de los significados institucionales implementados o pretendidos, respecto a un significado de referencia en torno a las funciones.

2. Caracterizar los modos de interacción presentes en el proceso de estudio de las funciones a un grupo de estudiantes de tercer año de educación media general.

A través de esta caracterización se pretende realizar una descripción de los modos de interacción docente-discente, discentes-discentes, la autonomía en los estudiantes en el proceso de estudio de las funciones y la evaluación formativa, con la finalidad de identificar los conflictos semióticos de significado.

3. Determinar los grados de las idoneidades epistémica e interaccional en el proceso de estudio implementado.

Marco teórico referencial

El marco teórico se fundamenta en el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS), entre las nociones teóricas que lo conforman y que se pondrán en funcionamiento en este trabajo se describen las siguientes: práctica, institución, significado, significados personales e institucionales de un objeto matemático, objeto matemático, conflictos semióticos, idoneidad didáctica, criterios de idoneidad didáctica, configuraciones y trayectorias didácticas.

Debido a que la noción de significado es la base del EOS es importante entenderlo como "el sistema de prácticas (actuativas o discursivas) que realiza una persona (significado personal), o compartidas en el seno de una institución (significado institucional) para resolver un tipo de situaciones problemas" (Godino, Batanero y Font, 2009, p.5). Según la definición anterior, estos pueden ser establecidos por una institución o concebidos por el sistema de prácticas realizadas por una persona; en este sentido se clasifican en significados personales y significados institucionales.

Los *Significados Personales* de un objeto matemático se refieren "al sistema de prácticas personales de una persona p para resolver el campo de problemas del que emerge el objeto matemático en un momento dado" (Godino, 2002, p.13)

El significado institucional de un objeto matemático puede entenderse como “el sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge significado institucional en un momento dado”. (Godino, 2002, p.13)
En el párrafo anterior se hace referencia a *Conflictos Semiótico* entendiéndose estos, como “toda disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa y pueden explicar las dificultades y limitaciones de los procesos de aprendizaje y las enseñanzas implementadas”. (Godino, 2002, p.14)

Otro noción mencionada durante el desarrollo de la teoría es, *Objeto Matemático*, entendiéndose éste como todo aquello que pueda ser indicado, todo lo que pueda señalarse o a lo cual puede hacerse referencia, cuando hacemos, comunicamos o aprendemos matemáticas (Godino, 2002, 2003).

En relación a lo anterior se puede decir que existe una diversidad de objetos matemáticos. Se agruparán en dos categorías: las entidades primarias y las entidades secundarias. En este sentido la agrupación obedece a una caracterización de tipo pragmático y en otras subcategorias a saber:

> En nuestro caso proponemos las siguientes categorías o tipos de entidades matemáticas basándonos en los diversos papeles o funciones desempeñadas por estas entidades en el trabajo matemático: *situaciones, acciones, lenguaje, conceptos-reglas, propiedades, argumentaciones.* Considerando estos tipos como “entidades primarias”, las que se pueden a su vez agrupar en entidades secundarias como: praxis, logos, praxeologias, conceptos-sistema, campos conceptuales, teoría de grupos, aritmética, geometría, entre otras. (Godino, 2002, p.5)

Con el transcurrir del tiempo, el EOS comenzó a desarrollar nuevas nociones para estudiar y analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, una de esas nociones es la *idoneidad didáctica,* entendiéndose ésta como el criterio sistémico de pertinencia o adecuación de un proceso de instrucción al proyecto educativo, cuyo principal indicador empírico puede ser la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes y los significados institucionales pretendidos / implementados. (Godino, 2003; Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006).
Para hacer operativa la noción de idoneidad didáctica se hace necesaria la interacción de las idoneidades parciales: epistémica, cognitiva, mediacional, emocional, interaccional y ecológica.

Es importante mencionar que la valoración de un proceso de estudio se puede aplicar a un estudio puntual implementado en una sesión de clases, a la planificación o el desarrollo de una unidad didáctica, o a un nivel más global, como puede ser el desarrollo de un curso o una propuesta curricular. También pueden ser útiles para analizar aspectos parciales de un proceso de estudio, como un material didáctico, un manual escolar, respuestas de estudiantes a tareas específicas, o "incidentes didácticos" puntuales. Godino, Batanero y Font (2009)

Para efecto de esta investigación se aplicarán las herramientas de análisis de un proceso de estudio a las sesiones de clases correspondientes a la noción de función.

> Para hacer operativa la definición de idoneidad didáctica, se introducen seis criterios parciales de idoneidad atendiendo a las siguientes dimensiones que caracterizan y condicionan los procesos de enseñanza y aprendizaje: *epistémica* (relativa a los significados institucionales), *cognitiva* (significados personales), *mediacional* (recursos tecnológicos y temporales), *emocional* (actitudes, afectos, emociones), *interaccional* (interacciones docente – discentes), y *ecológica* (relaciones intra e interdisciplinares y sociales). (Godino, Batanero y Font, 2006).

A continuación se presentan los componentes y descriptores de las idoneidades parciales que intervienen en la definición de idoneidad didáctica planteados por Godino (2003); Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006):

- Idoneidad epistémica. Se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia.
- Idoneidad cognitiva. Expresa el grado en que los significados pretendidos/ implementados están en la zona de desarrollo potencial así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/implementados.
- Idoneidad mediacional. Es el grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.
- Idoneidad emocional. Es el grado de implicación, interés y motivación de los estudiantes durante el proceso de estudio.
- Idoneidad interaccional. Es el grado en que los modos de interacción permiten identificar y resolver conflictos de significados y que permiten favorecer la autonomía en el aprendizaje.

- Idoneidad ecológica. Es el grado de adaptación curricular, socio-profesional y conexiones intra e interdisciplinares.(p.4)

Metodología

La naturaleza de la investigación está bajo una metodología cualitativa. El diseño de la investigación comprende dos fases, que se corresponden con cada uno de los objetivos; es así como para la primera fase se realizará una investigación documental para el estudio epistemológico de las funciones donde se profundice sobre la génesis, evolución, desarrollo, aplicaciones, problemas y obstáculos que dieron origen a esta noción. En la segunda fase se realizará una investigación bajo la modalidad de estudio de caso entendiéndose ésta cómo: un estudio intensivo y sistemático del estado actual, contexto circunstancial de una unidad social, bien sea un individuo, un grupo, una institución o una comunidad. Constituye un seguimiento, registro e interpretación a profundidad de fenómenos individuales o grupales muy específicos. Se caracterizan por su intención de identificar los procesos interactivos involucrados en la situación singular estudiada, los cuales pueden pasar inadvertidos en estudios clásicos de análisis muestral. (Orozco, Labrador y Palencia, 2002)

Sujetos y contexto de la investigación

El contexto de estudio será el Liceo Nacional "José Andrés Castillo" del Municipio Montalbán, ubicado en el occidente del estado Carabobo, por ser el único plantel que existe en la parroquia de Montalbán, atiende desde primero hasta quinto año de educación media general. Cuenta con una población de 1230 estudiantes y 85 profesores. Los sujetos seleccionados para este estudio es el docente a cargo de la asignatura matemática de tercer año y una de sus secciones conformada por 20 estudiantes. Es de hacer notar que se toman los estudiantes porque son necesarios para analizar el proceso de estudio de las funciones.

Dichos informantes han sido seleccionadas de manera intencional de acuerdo a los intereses específicos del estudio (Hurtado y Toro, 1997), donde los sujetos investigados permiten evidenciar el fenómeno a estudiar según el juicio del investigador

Técnicas e instrumentos de recolección de datos

En función de los objetivos propuestos en el presente estudio, se empleará una serie de instrumentos y técnicas de recolección de la información orientadas de manera esencial a alcanzar los fines propuestos. Cómo técnicas se tienen: la revisión y análisis documental y la observación no participante.

Revisión y análisis documental

Para Balestrini (2006) es aquella que se realiza a partir de la observación documental, como punto de partida en el análisis de las fuentes documentales, mediante una lectura general de los textos, donde se iniciará la búsqueda y observación de los hechos presentes en los materiales escritos consultados que son de interés para la investigación. (p.152)

Esta técnica se utilizará en la primera fase del estudio, debido a que se realizará un estudio documental sobre las funciones, con la finalidad de dar respuesta al objetivo concerniente a la dimensión epistémica relacionada con los significados de referencia.

Observación no participante

Según Palella y Martins (2006) la definen cómo aquella técnica en la cual se recoge la información desde afuera, sin intervenir para nada en el grupo social, hecho o fenómeno investigado. Ésta permite que el investigador pueda realizar observaciones más fieles de la realidad. Durante el estudio se realizarán grabaciones y filmaciones que evidencien el desarrollo de las cuatro (4) sesiones de clases que se realizarán, para categorizar los modos de interacción del docente y los estudiantes.

Reflexiones finales

Una vez culminado el proyecto de investigación se espera poder realizar aportes al proceso de enseñanza y aprendizaje del tópico de las funciones, mediante la valoración del proceso de estudio de este objeto matemático, donde se pretende realizar una valoración del proceso de estudio a posteriori con la finalidad de diseñar un proceso de estudio idóneo de dicho objeto, atendiendo particularmente las facetas epistémica e interaccional. Por otro lado, mediante la reconstrucción epistemológica se espera realizar un aporte a la historia de la matemática, ya que se indagará sobre el origen, evolución y aplicaciones del tema de las funciones. Además de realizar una descripción de los significados pretendido e implementado respecto a un significado de referencia en torno a este concepto.

Referencias bibliográficas

Arrieche, M. (2003). Línea de investigación Perspectivas del enfoque semiótico antropológico para la didáctica de la matemática. *Paradigma, 2* (XXIV), 151-160

Arrieche, M. (2010). *Significados Institucionales y Personales de las funciones en la Formación de Profesores de Educación Integral.* Trabajo de Ascenso a la categoría Profesor Titular. Departamento de Matemática UPEL-Maracay.

Balestrini, M. (2006). *Cómo se elabora el Proyecto de Investigación.* Caracas. BL Consultores Asociados.

Chiavaroli, A. (2010). *Análisis de la idoneidad epistémica de un proceso de estudio sobre la función afín.* Tesis de Magister no publicada, Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Maracay.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. [Documento en línea]. Disponible: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/ 3_SignificadosIP_RDM94.pdf

Godino, J. D. (2002). *Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las Funciones Semióticas en Didáctica de las Matemáticas*. Departamento de Didáctica de la matemática. Universidad de Granada.

Godino, J. D. y Font, V (2003). *Razonamiento Algebraico y su Didáctica para Maestros*. *Manual Para estudiantes.* Departamento de Didáctica de la matemática. Universidad de Granada.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. (2006). *Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas.* X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. (2007). *Pauta de análisis y valoración de la Idoneidad Didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática.* Departamento de didáctica de la matemática. Universidad de Granada. Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/pauta_valoracion_idoneidad_5enero07.pdf

Godino, J. D y Batanero, C. y Font, V. (2009). *Un Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática.* The internacional Journal on Mathematics Education, 39 (1-2), 127 -135Disponible en: http://www.urg.es/local/jgodino.

Hernández, G. O. (2007). *Significados Institucionales de las Funciones en Educación Básica.* Tesis de Magister no publicada, Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Maracay.

Hurtado, I. y Toro, J. (1997). *Paradigmas y métodos de investigación en tiempos de cambio*. Valencia, Venezuela: Episteme.

Leithold, L. (1998). *El Cálculo. 7ma Ed. México: Oxford.*

Ministerio del Poder Popular para la Educación. (2007). *Currículo y Orientaciones Metodológicas Liceos Bolivarianos:* 2007. Caracas: Autor

Orozco, C., Labrador, M. y Palencia, A. (2002). *Metodología Manual Teórico Práctico de Metodología para Tesistas, Asesores, Tutores y Jurados de Trabajos de Investigación y Ascenso.* Valencia: Venezuela

Palella, S. y Martins, F. (2006). *Metodología de la Investigación Cuantitativa.* FEDEUPEL.

LA GESTIÓN METACOGNITIVA EN EL PROCESO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN Y SU RELACIÓN CON LA COMPETENCIA DEL RESOLUTOR

Álvaro Encinas, Ramiro Ávila Godoy
Universidad Autónoma de Baja California México
Universidad de Sonora
aencinasb@uabc.edu.mx, ravilag@gauss.mat.uson.mx

Resumen. Se presenta un estudio sobre la actividad de gestión metacognitiva desarrollada por estudiantes de ingeniería con el fin de resolver problemas de optimización. El análisis de las prácticas de los estudiantes se hace con base en las nociones de objetos y procesos matemáticos del Enfoque Ontológico-Semiótico (EOS) de J. D. Godino así como algunas nociones referentes a los procesos metacognitivos y competencia para resolver problemas. Problemas de Optimización de textos escolares se aplicaron a estudiantes de Cálculo en la Universidad Autónoma de Baja California, México. Se les solicitó que escribieran sus respuestas y, simultáneamente, externaran en voz alta sus pensamientos, lo que estaban pensando, esto se grabó y transcribió. El análisis se efectuó sobre esas respuestas y transcripciones, evidenciando diversos obstáculos en el proceso y estilos distintos de gestión metacognitiva.

Palabras clave: gestión metacognitiva, resolución de problemas, competencia

Abstract. We present a study on metacognitive management activities developed by students engineering to solve optimization problems. The analysis of the practices of students is based on the notions of mathematical objects and processes from Ontological-Semiotic Aproach (EOS) of J.D. Godino and some notions concerning metacognitive processes and competence to solve problems. Optimization problems textbooks were applied to Calculus students at the Autonomous University of Baja California, Mexico. They were asked to write their answers and simultaneously, express their thoughts aloud what they were thinking, this was recorded and transcribed. The analysis was performed on these answers and transcripts, showing various obstacles in the process and different styles of management metacognitive.

Key words: metacognitive management, problem solving, competence

Introducción

A lo largo de su formación, los estudiantes de ingeniería estudian los procesos de optimización en diferentes contextos y con distintas técnicas. Sin embargo, cuando tratan de resolver problemas de optimización en sus cursos de Cálculo, muestran un bajo desempeño. Éste se pone de manifiesto en tres aspectos básicos del proceso de resolución de problemas: 1) en los significados que asignan a los objetos matemáticos que utilizan, 2) en el plan que desarrollan al tratar de resolver los problemas y 3) en el nivel de conciencia que muestran de las ineficiencias de su propio plan de resolución.

Existen diversos estudios sobre la resolución de problemas de optimización, entre otros, (Contrerasy Luque, 2004; Malaspina, 2007) los cuales la abordan desde diferentes marcos teóricos. Gusmao, Font y Carajaville (2009) introducen en su análisis de resolución de problemas, además de los significados de los objetos matemáticos, algunos elementos metacognitivos.

En este trabajo se presenta un estudio sobre las prácticas matemáticas desarrolladas por estudiantes de ingeniería al tratar de resolver problemas de optimización. Se identifican objetos y procesos matemáticos así como elementos de gestión metacognitiva que aparecen en el proceso de resolución de los problemas. El propósito de esta investigación es mejorar la comprensión de los procesos a través de los cuales los estudiantes intentan resolver problemas matemáticos. Se parte de la premisa de que, en la medida en que se entiendan estos procesos, se podrán proponer cambios en los procesos de instrucción que aumenten la eficacia con que los estudiantes resuelven dichos problemas.

Referentes teóricos

El estudio de las respuestas de estudiantes ante problemas de optimización se realizó con varias herramientas proporcionadas principalmente por el Enfoque Ontológico Semiótico (EOS) (Godino, 2003; Font y Rubio, 2008; Font, Planas y Godino, 2010), y por otros referentes teóricos (González, 1999), (Gusmao, Font y Cajaraville, 2009, (Flavell y Wellman, 1977) y (Schoenfeld, 1992).En este trabajo, se utiliza una metodología de análisis de las prácticas de resolución de problemas que parte de la identificación de los objetos y de los procesos matemáticos que intervienen y los procesos metacognitivos del resolutor, para tratar de explicar el papel que juegan éstos en el nivel de competencia que tiene dicho resolutor. En esta investigación, esta metodología se aplica al caso de la resolución de problemas de optimización.

A continuación se presentan los elementos teóricos involucrados en el análisis.

El conjunto de actividades realizadas por un *sujeto* para resolver un problema constituye un *sistema de prácticas.* De los sistemas de prácticas que un sujeto (persona) utiliza para analizar, interpretar y resolver cierto tipo de situaciones problemáticas emergen los *objetos matemáticos* (personales). Dichos sistemas de prácticas constituyen los significados que ese sujeto tiene de tales objetos. La diversidad de objetos matemáticos puede relacionarse con alguno o algunos de los siguientes seis tipos de objetos primarios (Godino, 2003):

- ❖ Lenguaje: términos, expresiones, notaciones, gráficos en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, etc.)
- ❖ Situaciones problemáticas: aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios, etc.
- ❖ Conceptos- definición: introducidos mediante definiciones o descripciones
- ❖ Proposiciones: enunciados sobre conceptos

- Procedimientos: algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, etc.
- Argumentos: enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo.

La actividad matemática tiene su origen o razón de ser en las *situaciones problemáticas*. Los restantes objetos matemáticos se representan a través del lenguaje; los *argumentos* justifican los *procedimientos* y *proposiciones* que relacionan los *conceptos* entre sí. A su vez, estos objetos se organizan en entidades más complejas como sistemas conceptuales y teorías, entre otras.

Interpretar los procesos matemáticos como secuencias de prácticas, en correspondencia con los tipos de objetos matemáticos primarios, proporciona criterios para categorizar los procesos. La constitución de los objetos lingüísticos, problemas, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos tiene lugar mediante los respectivos procesos matemáticos de comunicación, problematización, definición, enunciación, algoritmización y argumentación (Font y Rubio, 2008).

La resolución de problemas puede ser considerada como un "megaproceso" matemático ya que implica configuraciones complejas de los procesos matemáticos primarios tales como el establecimiento de conexiones entre los objetos y la generalización de técnicas, reglas y justificaciones.

La realización efectiva de los procesos de resolución de problemas requiere, además, la ejecución de secuencias de prácticas de planificación, control y evaluación (supervisión) que conllevan procesos metacognitivos (Flavell y Wellman, 1977), (González, 1999), (Gusmao, Font y Cajaraville, 2009) y (Schoenfeld, 1992).

La gestión del proceso de resolución de problemas a cargo de un resolutor es un aspecto muy importante del mismo proceso. La comprensión del enunciado, la selección de estrategias para abordar el problema, el monitoreo del progreso de la resolución y su evaluación se consideran parte de la actividad metacognitiva.

La noción de competencia se considera, en este trabajo, íntimamente asociada a las acciones del sujeto resolutor que le permiten tener éxito en el proceso de resolución de problemas y se reconoce que dicha competencia requiere de la integración de conocimientos, habilidades y actitudes necesarios para la ejecución de las tareas surgidas en el proceso de resolución de los problemas (Argudín, 2007) y (Villa y Poblete, 2008).

Metodología de la Investigación

El procedimiento utilizado para la toma de datos consistió, primero, en seleccionar seis problemas propuestos en el libro de texto de Louis Leithold (1998) utilizado en la Facultad de Ingeniería Campus Mexicali (FIM) de la Universidad Autónoma de Baja California, México. Dichos problemas se seleccionaron utilizando dos criterios: que correspondieran a diferentes contextos y que se modelaran con diferentes tipos de funciones elementales.

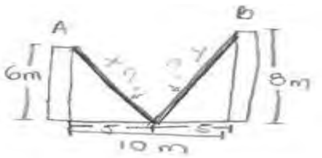
Luego se seleccionaron diez de los estudiantes considerados, por sus profesores, exitosos en el tema de optimización del curso de Cálculo que aceptaron participar en la investigación al invitarlos. A estos estudiantes se les indicó que, al resolver el problema, escribieran su respuesta en una hoja proporcionada para ello y, además, se les pidió que externaran en voz alta sus pensamientos durante la resolución del problema y se les informó que su voz se grabaría.

El análisis de los datos recabados se efectuó en dos etapas. En la primera, se analizó lo escrito por los estudiantes al tratar de resolver el problema y se identificaron los objetos y procesos que intervinieron en su práctica de acuerdo al EOS. En la segunda etapa, se analizaron las transcripciones de las grabaciones recabadas cuidando de registrar los tiempos de avance del proceso. Este análisis se hizo con el fin de identificar los diversos procesos de la gestión metacognitiva y elementos de la competencia.

Resultados y su análisis

Para ilustrar el tipo de análisis realizado se presenta el caso de la alumna N, a la que se le aplicó el siguiente problema: "Dos postes con longitudes de seis y ocho metros respectivamente se colocan verticalmente sobre el piso con sus bases separadas una distancia de 10 metros. Calcule la longitud mínima de un cable que puede ir desde la punta de uno de los postes hasta un punto en el suelo entre los postes y luego hasta la punta del otro poste". Como puede verse, se trata de un problema clásico de un curso de Cálculo Diferencial, formulado en un contexto geométrico que se modela con una función radical.

A continuación se presenta una parte de la respuesta escrita por la alumna N seguida de una pequeña parte de la transcripción de lo exteriorizado verbalmente al estar tratando de resolver el problema; inmediatamente después se presentan los resultados y comentarios del análisis que el investigador hizo de lo escrito y hablado por la alumna:



Poste "A" → 6m
Poste "B" → 8m
d $P_A P_B$ → 10m

$$hip = \frac{opuesto}{adyacente} = C^2 = a^2+b^2$$

* Para Longitud del cable desde el Poste "A" hasta el centro de los dos Postes:

$$hip = \frac{opuesto}{adyacente} = L = \frac{6m}{5m} = 1.2m$$

* Para longitud del cable desde el Poste "B" hasta el centro de los dos postes:

$$hip = \frac{opuesto}{adyacente} = L = \frac{8m}{5m} = 1.6m$$

→ Entonces:

$c^2 = a^2+b^2$ → sustituyendo:

$c^2 = (1.2)^2+(1.6)^2$

$c^2 = 1.44 + 2.56$

$c^2 = 4$

$c = \sqrt{4}$

$c = \pm 2 \therefore C_1 = 2$ y $\cancel{C_2 = -2}$

Posible solución

ó

$L_T = L_1 + L_2$

$L_T = 1.2m + 1.6m$

$L_T = 2.8m$

Posible solución

Respuesta escrita:

Transcripción de lo expresado oralmente por la alumna N, a partir del instante 01:20 minutos del inicio del proceso de resolución del problema:

"*01:20 …¡ah! lo voy a leer otra vez para entenderlo mejor… dos postes con longitudes de seis y ocho metros respectivamente, se colocan verticalmente sobre el piso con sus bases separadas a una distancia de diez metros, calcule la longitud mínima… de un cable… mínima de un cable que puede ir desde la punta de unos de los postes hasta un punto en el suelo entre los postes; o sea las bases y luego hasta la punta del otro,… bien, a la punta del otro,… ok… o sea* desde la punta del poste A *hasta en medio de los dos* postes *Lo primero que voy a hacer va a ser un dibujo que me muestre los dos postes,…ok… aquí está un poste y a una distancia de diez metros en el suelo está el otro poste,…ok… uno mide ocho y uno mide seis metros. ok…pues si se forman triángulos está diciendo que es entre los dos postes entonces la mitad van a ser* 5…*la fórmula para… cómo es… bueno me voy a fijar en los apuntes del cuaderno, creo que es la fórmula de la hipotenusa…ok…*"

a) Los objetos matemáticos más relevantes identificados:

- ❖ Lenguaje

- Verbal: términos precisos: longitud, distancia, opuesto, adyacente, hipotenusa. Otros términos: Poste, cable, "centro de los dos postes", "en medio de los dos postes".
- Gráfico: dibuja un poste A de altura 6 m y de la punta sale un cable hacia el centro de las bases de los dos postes y de allí hacia la punta del poste B de 8 m.
- Simbólico: A,B, $d\overline{P_A P_B}$, $c^2 = a^2 + b^2$, $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

❖ Conceptos explícitos: longitud, triángulo rectángulo, suma, raíz cuadrada, hipotenusa, opuesto, adyacente.

❖ Procedimientos explícitos: calcular raíz cuadrada (con calculadora), estimar longitudes, sumar, multiplicar, dividir, elevar al cuadrado.

❖ Proposiciones: teorema de Pitágoras, la longitud es aditiva.

❖ Argumentos: asegura que sí existe una longitud mínima del cable y la encuentra, la longitud del cable que une las puntas de los postes toca un punto a la mitad de las bases.

b) Algunos de los procesos identificados y algunos comentarios sobre los mismos:

❖ El problema se presenta a la alumna a través de un texto que debe interpretar (proceso de comunicación). La alumna muestra una competencia interpretativa pobre al interpretar que *estar entre* significa *estar en el punto medio*, lo cual puede verse en el proceso de representación gráfica que hace del enunciado y en lo que expresa oralmente. Este error en la interpretación del enunciado del problema tuvo repercusiones graves en la interpretación global del mismo pues no logró darse cuenta que se trata de un problema de optimización, lo que a su vez originó que la estrategia diseñada para la resolución del mismo no fuera la adecuada.

❖ El proceso de modelación matemática del problema resultó incorrecto, no sólo por la interpretación errónea del texto, sino también por significaciones incorrectas de los objetos matemáticos intervinientes (obsérvense las fórmulas que utiliza para calcular la longitud de la hipotenusa de un triángulo).

❖ En lo que respecta al proceso comunicativo, también mostró ser poco competente para elaborar un texto para comunicar y justificar los procedimientos utilizados en la resolución del problema, así como el resultado.

Después de 32:42 minutos de iniciado el proceso de resolución del problema por parte de la alumna, el investigador se hizo presente y entabló un diálogo con ella, sobre la interpretación que hizo de la expresión "*estar entre*" logrando que tomara conciencia de lo que realmente planteaba el problema e intentara resolverlo bajo esta nueva interpretación.

c) El análisis de la transcripción de lo expresado oralmente por la alumna permitió identificar varios procesos metacognitivos y los recursos utilizados para llevarlos a cabo. Algunos de estos procesos son los siguientes:

- ❖ El primer proceso metacognitivo detectado es el desarrollado para tratar de entender el problema y los recursos utilizados para ello, son: *leer varias veces el enunciado del problema, hacer un dibujo de los postes y el cable*.

- ❖ Cuando concluye que ya ha comprendido el problema, se pone de manifiesto un segundo proceso metacognitivo cuyo propósito es la elaboración de un plan o estrategia de resolución, en este caso, el primer recurso utilizado por la alumna, fue *tratar de recordar la fórmula* necesaria y, al no conseguirlo, echó mano de otro recurso, *la consulta de un libro de texto y de sus notas de clase*.

- ❖ Un tercer proceso metacognitivo es el de supervisión evidenciado con expresiones tales como "*se me hace muy poca distancia*", "*voy a leer a ver qué tan mal ando fijándome en el libro*". En la acción regulativa, la resolutora identifica donde se ha equivocado (según ella) y corrige en dos ocasiones el rumbo del proceso al seleccionar nuevas estrategias (fórmulas) para resolver el problema. Finalmente, evalúa las soluciones obtenidas decidiendo por una respuesta que no está ligada a la resolución correcta de un problema de optimización.

Comentarios generales

El análisis del desempeño de los estudiantes participantes en la investigación permite afirmar que existe una estrecha relación entre las significaciones que se tienen de los objetos y procesos matemáticos intervinientes, el nivel de desarrollo de las habilidades intelectuales que se ponen en juego al desarrollar tanto los procesos matemáticos como los metacognitivos, así como las actitudes que se muestran al estar tratando de resolver el problema y el nivel de competencia del resolutor.

Se ha encontrado que estudiantes de ingeniería de la FIM, considerados exitosos por sus profesores de Cálculo, muestran bajo nivel de competencia cuando pretenden resolver un problema de optimización de manera independiente, sin el apoyo del profesor. Este bajo nivel se observa en prácticamente cada una de las etapas del proceso, así como en el desarrollo de cada uno de los subprocesos como son: modelar, planear, supervisar, regular y verificar. La excepción se observa en la etapa del procedimiento algebraico el cual es ejecutado de mejor manera.

El diálogo que el investigador entabló con cada estudiante, después de que éste manifestaba haber terminado de resolver el problema, permitió observar que es factible desencadenar en

él, un proceso de valoración de la manera en que procedió, a la vez que evocar, rápidamente, conocimientos y estrategias más eficaces para avanzar en la resolución del problema. Se detectó que una buena gestión metacognitiva requiere, entre otras características, que el resolutor no pierda de vista lo que conoce, lo que desconoce y el punto donde se encuentra; también se pudo establecer la importancia de las actitudes como elemento de la competencia, entre las que destacan la disposición a enfrentar el reto que representa el problema y la tenacidad para tratar de resolverlo.

Consideraciones finales

El análisis de los procesos desarrollados por los estudiantes al tratar de resolver los problemas planteados, ha permitido valorar la importancia de los procesos metacognitivos de gestión, planeación, supervisión y regulación, entre otros, pues pudo observarse que los estudiantes con mayor desarrollo de su gestión metacognitiva tienen un mejor desempeño y por tanto, mayor competencia en el proceso de resolución del problema. Esta observación lleva a considerar la conveniencia de promover que se atienda de mejor manera, en los cursos de Matemáticas, la formación metacognitiva de los estudiantes.

Referencias bibliográficas

Argudín, Y. (2007). *Educación basada en competencias* .México: Trillas.

Contreras, A. y Luque, L., (2004). Una perspectiva didáctica en torno a los contextos y a los sistemas de representación semiótica del concepto de máximo. *Educación Matemática* 16(1), 59-87.

Flavell, J. y Wellman, H. (1977). Metamemory. En Kail y Hagran (Eds.). *Perspectives on the development of memory and cognition*(pp. 3-33),Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Font, V., Planas, N., y Godino, J. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y aprendizaje* 33(1), 89-105.

Font, V. y Rubio, N. (2008). Ontho-semiotic tools for the analysis of our practice. En B. Czarnocha (Ed.). *Handbook of mathematics teaching Research: Teaching Experiment*, (pp. 165-180), Krakow: University of Rzeszow.

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición e instrucción matemática.* Universidad de Granada. Recuperado en abril de 2007 de http://www.ugr.es/local/jgodino.

Gusmao,T., Font, V. y Cajaraville, J.(2009). Análises cognitivo e metacognitivo de prácticas de resolução de problemas. *Educação Matematica Pesquisa*, 11 (1), 8-43.

González, F. (1999). Los procesos cognitivos y metacognitivos que activan los estudiantes. *Épsilon. Revista de la SAEMThales*, 43-44, 199-208.

Leithold, L. (1998). *El Cálculo.* México, D.F: Oxford University Press.

Malaspina, U. (2007). Intuición, Rigor y Resolución de Problemas de Optimización. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10 (3), 365- 399.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grows (Ed.), *Handbook for research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370), New York: MacMillan.. Recuperado en agosto 2010 de: http://gse.berkeley.edu.faculty/AHSchoenfeld/LearningToThink/Learning_to_think_Math.html.

Villa, A. y Poblete, M. (2008). *Aprendizaje basado en competencias*. Universidad del Deusto. Bilbao: Ediciones mensajero.

LOS CÓDIGOS DEL LENGUAJE MATEMÁTICO EN LA GEOMETRÍA EUCLIDEANA

Marisol Radillo Enríquez
Departamento de Matemáticas, CUCEI, Universidad de Guadalajara México
marisol.radillo@red.cucei.udg.mx

Resumen. Este artículo reporta la base teórica construida para una investigación cuyo objetivo consistió en identificar los errores relacionados con el lenguaje matemático en la solución de problemas de la Geometría Euclideana. El estudio se llevó a cabo con estudiantes de licenciatura del Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías (CUCEI) de la Universidad de Guadalajara, México. En la primera parte del reporte se abordan los términos básicos y los supuestos de investigación. La segunda parte contiene la discusión teórica que llevó a conformar los códigos o conjuntos de normas que rigen las diferentes representaciones lingüísticas utilizadas comúnmente en la Geometría Euclideana, de acuerdo a las normas institucionales del CUCEI. Finalmente se proponen algunas reflexiones que pretenden ser útiles para profesores y estudiantes de la materia, así como para futuras investigaciones de Matemática Educativa, que aborden la solución de problemas matemáticos desde un enfoque lingüístico.

Palabras clave: lenguaje matemático, representación, geometría, lingüística

Abstract. This paper reports the theoretical basis for an investigation whose objective was to identify errors related to the language of mathematics in solving problems of Euclidean geometry. The study was conducted with undergraduate students of the University Center of Exact Sciences and Engineering (CUCEI) at the University of Guadalajara, Mexico. The first part of the report deals with the basic terms and assumptions of research. The second part contains the theoretical discussion that conforms to codes or sets of rules governing the different linguistic representations commonly used in Euclidian Geometry, according to institutional standards CUCEI. Finally we propose some reflections intended to be useful for teachers and students of the subject, as well as for future investigations of Mathematics Education, addressing the solution of mathematical problems from a linguistic approach.

Key words: mathematical language, representation, geometry, linguistic

Introducción

Aprender a resolver problemas implica adquirir el dominio de los códigos lingüísticos que rigen las diversas formas de representación los objetos matemáticos y las relaciones entre ellos. Por ejemplo, un teorema de Geometría Euclideana suele plantearse en forma verbal y para demostrarlo se dibuja la figura correspondiente (representación gráfica) y, en la actualidad, el procedimiento involucra la notación matemática (representación simbólica); los problemas de construcción utilizando regla y compás se resuelven de manera gráfica, aunque en el nivel licenciatura se pide al estudiante que justifique la validez de su respuesta, ya sea en forma verbal y/o simbólica.

No obstante, las producciones escritas de los estudiantes de matemáticas (tareas, exámenes, etc.) ponen de manifiesto deficiencias en el manejo del lenguaje matemático (Radillo y Varela, 2007), mismas que suelen ser catalogadas como diversos tipos de errores. De este tipo de situaciones surgió el interés por analizar desde un punto de vista lingüístico los errores que cometen los estudiantes en la solución de problemas de Geometría Euclideana, para determinar si éstos se deben exclusivamente al desconocimiento del lenguaje matemático o si involucran además fallas de razonamiento deductivo o aplicación de los teoremas involucrados (axiomática).

El presente trabajo se reporta únicamente la construcción teórica para el análisis lingüístico, que consta de la construcción de los códigos o conjuntos de normas que rigen las diversas formas de representación del lenguaje matemático. Sobre esta base teórica fue posible clasificar los errores relacionados con el lenguaje matemático de acuerdo a las normas quebrantadas, ya fuera de sintaxis, de traducción entre códigos o en la construcción de enunciados (Radillo, 2009).

Lenguaje matemático

Históricamente, los primeros símbolos escritos que surgieron en el ámbito de las Matemáticas fueron los numerales, hace más de 5,000 años en el marco de la civilización sumeria. Posteriormente los griegos del período clásico (600-300 a.C.) utilizaban las representaciones verbal y gráfica, aunque los primeros registros de la notación "algebraica" corresponden a Diofanto de Alejandría y datan del año 250 a. C.; estos símbolos se utilizaban para denotar la incógnita en una ecuación y para señalar la sustracción y la igualdad; con ellos surgió la llamada *álgebra sincopada*, que consistía en una mezcla de símbolos con "palabras" del lenguaje natural. No fue sino hasta el S. XVI que Vyeta introdujo una notación simbólica más estructurada, nuevamente para el Álgebra, misma que a través de los siglos ha evolucionado hasta constituirse en la notación matemática.

En la actualidad, el lenguaje matemático está conformado no solo por la notación simbólica que introdujo Vyeta, pues también incluye los diversos tipos de representación utilizados comúnmente utilizados como el numérico, el verbal y el gráfico o geométrico. Aunque algunos autores se refieren indistintamente al lenguaje numérico, lenguaje geométrico, etc., (Pimm, 1999; Alcalá, 2002), desde el punto de vista lingüístico es más adecuado referirse a las formas de representación lingüística numérica, simbólica, gráfica, etc., que a una diversidad de "lenguajes". Los autores que trabajan desde la Semiótica, prefieren referirse al registro matemático (Duval, 1998; Font, 2000; Godino, 2003), aunque desde esta perspectiva abordan la cognición en las matemáticas escolares, mas no analizan los textos construidos por los estudiantes ni los errores que éstos cometen en la solución de problemas.

La base teórica de la presente investigación proviene de la Lingüística Aplicada, en la cual se considera que un *lenguaje especializado* está conformado por mucho más que un simple listado de términos técnicos (léxico) creados *ex profeso* para referirse a la temática específica de un campo del conocimiento humano, pues se tienen recursos léxicos, sintácticos, morfológicos y textuales especiales para comunicarse adecuadamente en un contexto profesional determinado (Cabre, s/f). Tal es el caso del *lenguaje especializado de las matemáticas* o *lenguaje matemático*, el cual tiene además el propósito de caracterizar los hechos y las reglas de razonamiento con precisión, así como las relaciones y conexiones entre los objetos matemáticos y sus propiedades.

La ventaja principal de considerar la perspectiva teórica de los lenguajes especializados consiste en que permite especificar la gramática que rige al lenguaje matemático, y en consecuencia se definen los recursos necesarios para su aprendizaje y enseñanza. Por ejemplo, los códigos que se reportan en este trabajo constituyen la base para realizar un análisis lingüístico de las producciones escritas de los estudiantes de Geometría; los resultados del análisis permitieron identificar algunas causas y consecuencias de los errores cometidos por los alumnos y, posteriormente, modificar el diseño instruccional del curso (Radillo, 2009).

Formas de representación en las Matemáticas

El concepto de representación que se utiliza en la Didáctica de las Matemáticas se aproxima a una "señal externa que muestra y hace presente un concepto matemático, también como signo o marca con el que los sujetos piensan las matemáticas e, incluso, como aquellos esquemas o imágenes mentales con los que la mente trabaja sobre ideas matemáticas" (Rico, 2000). En la opinión de Duval (1998), "ningún objeto real" se puede considerar como un representante perfecto de los objetos matemáticos, si se tiene acceso a ellos por medio de la percepción, por lo que es necesario referirse a ellos a través de alguna de sus formas de representación; se necesitan por lo menos dos representaciones diferentes, el lenguaje natural y el lenguaje matemático, para tener una idea de dicho objeto (Duval, 1998).

Representación de las proposiciones matemáticas en la Geometría Euclideana

La representación de objetos y proposiciones matemáticas se aborda desde un punto de vista lingüístico y se centra la atención en las tres formas de representación más comunes en la Geometría Euclideana:

- Verbal. Consiste en la descripción de un objeto o enunciado matemático, expresado solo en palabras (*español especializado de la geometría euclideana*).
- Simbólica. Descripción de uno o más objetos matemáticos, sus propiedades y/o

relaciones, expresado solamente con símbolos (notación matemática).

- Gráfica. Dibujo de uno o más conceptos matemáticos y las relaciones entre ellos. Suele incluir letras que le asignen nombres específicos a la figura.

La relación entre estas tres formas de representación se pone de manifiesto en diferentes tipos de problemas de la Geometría Euclideana. Por ejemplo, el planteamiento de una demostración requiere el pasaje de una representación verbal a sus correspondientes representaciones gráfica y simbólica.

Los códigos del lenguaje matemático

Las partes de la Lingüística aplicables a los códigos del lenguaje matemático son la sintaxis, el léxico y la morfología (Leal, 2000), por lo que para llevar a cabo el análisis lingüístico de la solución a un problema, se establecieron los códigos lingüísticos para cada tipo de representación utilizada en la materia: simbólica, gráfica y verbal. Estos códigos no fueron creados con propósitos docentes, sino para contrastar las respuestas de los estudiantes con normas estructuradas conforme a la Lógica Teórica y el desarrollo axiomático propio de la Geometría Euclideana.

El código verbal. La construcción del código verbal consistió en (a) una lista de términos geométricos que constituyen el léxico de la Geometría Euclideana, con las normas institucionales que se proporcionan a los estudiantes, y (b) la clasificación de los sustantivos y un listado de adjetivos con los que pueden ser utilizados en la formación de proposiciones y enunciados. Por ejemplo, el adjetivo "perpendiculares" solamente se aplica al sustantivo "rectas", es decir no se utiliza con otros sustantivos como "puntos" o "círculos" puesto que constituyen un "sin sentido"; el adjetivo "circular" puede ser aplicado a sustantivos tales como "arco", "sector", "segmento", "sección", "cilindro", "cono" y "trapecio". El sustantivo "recta", en singular, admite la utilización de adjetivos diferentes (oblicua, 'perpendicular a', secante, tangente) mientras que su expresión en plural, "rectas" (concurrentes, determinadas, distintas, oblicuas, paralelas, 'perpendiculares entre sí').

Aunque los autores de la Didáctica de las Matemáticas se refieren a las "palabras" del lenguaje matemático (Pimm, 1999; Alcalá, 2002), desde el punto de vista lingüístico es preferible referirse a *términos,* los cuales pueden estar compuestos por una o más "palabras". Por ejemplo, la expresión *ángulos alternos internos* es un término formado por tres "palabras" que al aparecer juntas en ese orden tienen un significado determinado y pueden ser considerados *grosso modo* como "sintagmas nominales".

Un aspecto importante para la enseñanza de las matemáticas estriba en identificar aquellos términos lingüísticamente complejos, ya que involucran varios conceptos matemáticos y/o condiciones necesarias para operar con ellos. Algunos términos complejos en la geometría son "equidista", "mediatriz", "bisectriz", "circunscrito", "inscrito", "media proporcional", que si bien corresponden a la geometría elemental, su traducción a los códigos simbólico y/o gráfico lleva implícitas determinadas condiciones.

El código simbólico. Otro aspecto del lenguaje matemático que merece especial atención se relaciona con las normas o convenciones no escritas que se tienen en el ámbito escolar, las cuales debilitan el rigor del código simbólico y dan origen a polisemia o ambigüedad. Tal es el caso de escribir *sen2x*, en vez de *sen(2x),* de uso frecuente en los textos y cursos de cálculo, aunque el hecho de eliminar los paréntesis propicia que el estudiante inexperto interprete de dos maneras diferentes la expresión mencionada a saber: *(sen2)x* o bien *sen(2x)* (Díaz, 2006). Este tipo de situaciones conflictivas se solucionan si se conoce el código o conjunto de reglas de sintaxis, semántica y morfología que se utiliza a partir de un léxico dado.

Las normas establecidas para la representación simbólica en la Geometría Euclideana se reorganizaron desde una perspectiva de Lingüística y Lógica Teórica, en base a las reglas aprobadas para su uso por la academia de Geometría Euclideana del CUCEI. El código comienza con la definición de términos, los cuales se clasifican en constantes numéricas y variables individuales tanto en expresiones simples como en las expresiones compuestas. Se finaliza con las reglas de formación de enunciados a partir de las variables individuales. Algunas de las reglas se sintaxis de la representación simbólica en la Geometría Euclideana son las siguientes:

- A, B, C, … letras latinas mayúsculas designan puntos (excepto 'R' en las expresiones de medidas angulares)
- α, β, … letras griegas representan planos o ángulos (excepto 'π' en las expresiones de medidas angulares)
- a, b, c… letras latinas minúsculas con el diacrítico superpuesto '↔' representan rectas.
- AB, CD, PQ… pares de letras latinas mayúsculas representan longitudes.
- $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{PQ}$… pares de letras latinas mayúsculas con el diacrítico superpuesto '—' representan segmentos de recta.
- $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{PQ}$ …pares de letras latinas mayúsculas con el diacrítico superpuesto '↔' representan rectas.

- ❖ $\zeta \perp \xi$ es enunciado si y sólo si ζ y ξ representan segmentos, rayos, rectas o planos.
- ❖ $\zeta \parallel \xi \parallel \eta$ es enunciado si y sólo si ζ, ξ y η representan segmentos, rayos, rectas o planos.
- ❖ $\zeta \cap \xi = \eta$ es un enunciado si y sólo si ζ y ξ representan segmentos, rectas, rayos o circunferencias y η representa un conjunto de puntos

La reformulación de las reglas de la notación simbólica se hizo con propósitos de investigación, ya que la lista de símbolos y su uso, elaborada por los profesores del CUCEI se hizo como una referencia para unificar el lenguaje, pero no es adecuada para el análisis lingüístico de los textos producidos por los alumnos. Por ejemplo, las reglas para la formación de enunciados simbólicos no se explicitan en tal documento, sino que se proporcionan ejemplos que cada profesor deberá explicar en clase, sin embargo para el análisis y clasificación de los errores detectados en el trabajo de campo es indispensable explicitar todas estas reglas.

El código gráfico. En el ámbito escolar es inusual encontrar el planteamiento de problemas que utilicen solamente el código gráfico, pues este se usa para complementar la información dada en expresiones simbólicas y/o verbales; por esta razón se detecta poco rigor en el cumplimiento de las normas de este código. Un ejemplo muy común es la marca especial de los ángulos rectos, que suele omitirse en los esquemas y se deja a la percepción visual, lo cual es completamente inaceptable en los códigos simbólico o verbal.

Otra dificultad para establecer un código gráfico es la falta de rigor en la representación de los elementos básicos, como la línea recta. En la figura 1 se aprecian tres formas de la representación gráfica de una línea recta. La característica esencial en este caso es la longitud indefinida de una recta, que suele ser representada con puntas de flecha en los extremos (inciso a), aunque no existe una convención universal al respecto; suele añadirse nombre a dos puntos sobre la recta para referirse a ella en los códigos verbal y/o simbólico. En el inciso b la recta se representa con prolongaciones punteadas, aunque dichas prolongaciones también suelen representarse en línea continua después de los puntos marcados sobre la recta.

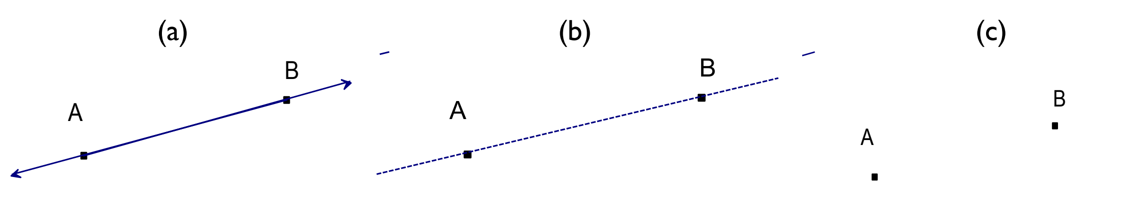


Figura 1. Tres formas equivalentes de representación gráfica de una recta.

El código gráfico se distingue del simbólico y del verbal en que no contiene oraciones en sentido estricto, ya que los trazos no son signos ordenados (n-tuplos de signos), y por ende pueden ser leídos de diversas maneras. Mientras que las oraciones de los otros dos códigos son conjuntos ordenados de signos que no pueden ordenarse de cualquier manera puesto que se altera su significado, en el código gráfico es más adecuado referirse a "combinaciones" de elementos.

Conclusiones

Aunque el lenguaje matemático es universal, se tienen "variantes dialectales" debidas a que los criterios para algunas notaciones simbólicas o gráficas varían según el grupo social que las ejerce y/o según el texto matemático que se consulte. Se recomienda establecer claramente las normas institucionales que profesores y estudiantes utilizarán durante los cursos, así como dar a conocer las variantes que se encuentran en los libros de texto.

Las normas del español especializado de la Geometría Euclideana son poco conocidas por los estudiantes ya que el código verbal es poco utilizado por ellos para redactar enunciados, quienes suelen utilizar expresiones mixtas (texto acompañado de símbolos y figura) para expresar el procedimiento de solución a los diversos tipos de problemas. Por otro lado se carece de reglas claras para la redacción de la justificación en las demostraciones euclideanas, a diferencia de la Lógica, por lo que cada alumno redacta y abrevia a su modo los argumentos en los que basa sus afirmaciones.

Mediante la construcción de los códigos y los procesos de traducción entre ellos fue posible detectar que la dificultad lingüística para representar en el código simbólico algunos términos complejos del código verbal , tales como "equidista", "mediatriz", "bisectriz", "circunscrito", "inscrito", "media proporcional" "circunscrito", "inscrito", "semi-inscrito" y los sintagmas que se forman con ellos en el código verbal ya que les corresponden varias proposiciones en el código simbólico, e incluso en la representación gráfica. La dificultad lingüística de estos términos estriba en su carácter sintético, ya que cada uno de ellos involucra varios conceptos matemáticos y/o condiciones necesarias para operar con ellos. Tal es el caso del sintagma "punto que equidista de los lados de un ángulo" ya que implica saber que la distancia entre un punto y una recta es igual a la longitud del segmento perpendicular que une al punto con la recta o rayo.

En el código simbólico también existen términos lingüísticamente complejos, ya que fue creado para condensar mucha información, y puede obtenerse mucha información de ellos. Por ejemplo, la expresión $\{A, B, C, D\} \subset \odot_O$, que, a primera vista, podría traducirse casi de manera literal diciendo que los puntos A, B, C y D están sobre la circunferencia con centro en el punto O, o que forman un subconjunto de la circunferencia con centro en O, contiene más información implícita que podrá inferirse en el contexto del problema planteado:

- $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}, \overline{OD}$ son radios de la circunferencia con centro en O
- $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{AD}, \overline{BD}, \ldots$ son cuerdas
- $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{CD}, \overleftrightarrow{DA}$ son rectas secantes a la circunferencia con centro en O
- $\angle AOC, \angle AOD, \angle BOC, \angle DOC$ son ángulos centrales
- $\angle ABC, \angle ACD, \angle BDC, \ldots$ son ángulos inscritos en la circunferencia con centro en O

Ante tal variedad de proposiciones implicadas por una sola proposición simbólica dada el estudiante debe aprender a interpretar adecuadamente la información relevante para la solución de un problema determinado. Si esta proposición simbólica se interpreta en forma conjunta con otros enunciados simbólicos, o acompañados de una figura, en el contexto de una demostración, la información que se puede obtener sería aún mayor.

La falta de reglas explícitas para la traducción entre códigos hace que la comprensión y manejo de estos términos constituya un obstáculo en la solución de problemas matemáticos. Se recomienda a los profesores elaborar un listado de los términos complejos y explicar a sus alumnos que se requiere de varias proposiciones para expresar el significado matemático completo al ser traducido a los otros códigos, pues una traducción incompleta es una potencial fuente de errores en la solución de problemas.

Para finalizar estas reflexiones cabe mencionar que existen algunos términos del código verbal que carecen de representación gráfica, como lo son las medidas de segmentos o ángulos; otros términos carecen de representaciones gráfica y simbólica, tales como *centro, partes homólogas, lados proporcionales antecedente, consecuente* y deben expresarse de forma mixta, es decir, con una figura que complemente la notación simbólica.

Referencias bibliográficas

Alcalá, M. (2002). *La construcción del lenguaje matemático*. Barcelona: Grao

Cabre, M. T. (s/f). Recursos lingüísticos en la enseñanza de lenguas de especialidad. Recuperado el 24 de septiembre de 2011 de http://cvc.cervantes.es/lengua/aeter/ conferencias/cabre.htm

Díaz, P. (2006). *Lenguaje matemático y lenguaje audiovisual. Dos componentes de los programas de estudio de la enseñanza de la matemática del siglo XXI.* Consultado el 17 de abril de 2008 en: http://www.uned.ac.cr/MemEncMate/Ponencias/Aspectosteoricos/Lenguaje%20Matem%C3%A1tico%20y%20Audiovisual%20Msc.%20Pedro%20D%C3%ADaz.pdf

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en matemática Educativa II* (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Font, V. (2000). Representaciones ostensivas que pueden ser activadas en el cálculo de f'(x). El caso de la función seno. *UNO Revista de Didáctica de las matemáticas 25,* 21-40.

Godino, J. D. (2003). *Marcos teóricos de referencia sobre la cognición matemática*. Recuperado el 2 de octubre de 2004 de http://www.ugr.es/local/jgodino/

Leal C., F. (2000). Diez preguntas sobre el lenguaje, y un intento por responderlas desde una perspectiva principalmente sintáctica. En V. Alcaraz (Coord.), *Una mirada múltiple sobre el lenguaje* (pp. 33-92). Guadalajara: Editorial de la Universidad de Guadalajara.

Pimm, D. (1999). *El lenguaje matemático en el aula.* 2ª Edición. Madrid: Ed. Morata.

Radillo, M. (2009). *Obstáculos relacionados con las deficiencias en la traducción entre códigos en la solución de problemas de la Geometría Euclideana en el nivel de licenciatura*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Guadalajara. México.

Radillo, M., Varela, S. (2007). Obstáculos en el aprendizaje de la geometría euclideana, relacionados con la traducción entre códigos del lenguaje matemático, en R. Abrate, y Pochulu, M. (Ed.), *Experiencias, propuestas y reflexiones para la clase de matemática* (pp. 263-280). Argentina: Universidad Nacional de Villa María.

Rico, L. (2000). *Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática.* Recuperado el 8 de noviembre de 2005 de: http://www.ugr.es/~seiem/Actas/Huelva/LRico.htm

UN ESTUDIO DE INVESTIGACIONES COGNITIVAS ACERCA DEL CONCEPTO DE LÍMITE. EL CASO DE HABLA HISPANA

Catalina Navarro Sandoval, Elika Sugey Maldonado Mejía, Erika López López
Universidad Autónoma de Guerrero México
nasacamx@yahoo.com.mx

Resumen. En este trabajo se reportan resultados de investigaciones sobre el concepto de límite, particularmente aquellas centradas en el aspecto cognitivo, y estos, tanto en el nivel medio superior como en el nivel superior. Estas investigaciones las clasificamos en tres grupos: las que tratan el preconcepto de límite, sobre las concepciones que se tienen del concepto de límite y las que reportan dificultades al tratamiento del concepto de límite. Algunos de los resultados de estas investigaciones es que el preconcepto está asociado a "una barrera no rebasable"; en cuanto a las concepciones sobre el concepto están las que se relacionan con "valor inalcanzable", "como aproximación", entre otras; y algunas dificultades como al redactar la definición del límite.

Palabras clave: límite, perspectiva cognitiva, preconceptos, concepciones

Abstract. In this work we report the results of research on the concept of limit, particularly those focusing on the cognitive aspect, from high school and higher levels of education. We have classified these investigations into the following three groups: those who try the preconception of limit, the conceptions of the concept of limits and those reporting difficulties in treatment of the concept of limit. Some of the results of this research are that the preconception is associated with "a barrier that cannot be passed"; within the conceptions there are those associated with "unattainable value", "for example approximation", among others, and some difficulties in drafting the definition of limit.

Key words: limit, cognitive perspective, beliefs, preconceptions

Introducción

Existen diversas investigaciones alrededor del concepto de límite, que se pueden diferenciar por marcos teóricos, niveles educativos y por diferentes perspectivas como la epistemológica, la didáctica, la cognitiva, la histórica, etc. Aunque hasta ahora, no se ha logrado incidir de manera benéfica en la enseñanza aprendizaje de este concepto. De este modo, nos interesamos en identificar y reportar resultados de investigaciones de habla hispana desde una perspectiva cognitiva, pues estas investigaciones buscan explicar la naturaleza de las dificultades de los que aprenden. Este tipo de investigaciones nos permiten entender en parte las causas, aportando entonces en la construcción y exploración de posibles tratamientos didácticos para remediar las mismas, pues se sabe que para los estudiantes el concepto de límite les resulta árido, poco atractivo, demasiado abstracto, que lo olvidan fácilmente y es uno de los más difíciles de enseñar y aprender (Cantoral, 1993, Blázquez y Ortega, 2001).

Investigaciones sobre el concepto de Límite

La Matemática educativa es una disciplina, que estudia los procesos de transmisión y adquisición del conocimiento, de los diferentes contenidos matemáticos, uno de ellos, es el

Cálculo, mismo que ocupa un lugar predominante en la enseñanza contemporánea. La labor en tal asignatura inicia desde el bachillerato y continúa en la universidad hasta llegar a estudios más profundos y particulares según los intereses de cada individuo (Patiño, 2007). Los cursos de Cálculo diferencial e integral en dichos niveles educativos abordan temas como funciones, límites, derivadas, integrales, entre otros. En particular, el concepto de límite es uno de los más importantes del análisis, ya que es necesario para introducir otros (continuidad, derivada, integral) y, por lo tanto su estudio se hace necesario. Por otro lado, de acuerdo a una revisión de programas de estudio de nivel medio y superior, el concepto de límite aparece por primera vez en el nivel medio superior, también se encontró que en los libros de texto del tercer grado de secundaria, el concepto es usado implícitamente en el análisis de funciones asintóticas de la forma: $f(x) = \frac{1}{x}$ (Block y García, 2006, Marván y Bravo, 2007). En ese sentido en Blázquez y Ortega (2001), Flores, Herrera y González, (2007) y Sierra, González y López (2000) reportan que la mayoría de los estudiantes, desde el nivel medio superior, presentan grandes dificultades, una de ellas es la comprensión del concepto, que van desde la exposición del tema por el profesor hasta las definiciones que aparecen en los libros de texto. También se encontró que el concepto de límite es uno de los conceptos matemáticos que trae consigo mayor cantidad de dificultades durante el proceso de enseñanza-aprendizaje, problemas inherentes al propio concepto, y como su estudio es necesario, los investigadores en didáctica de las matemáticas se sienten obligados a emitir algún tratamiento a los problemas que presenta dicho concepto, llevando a cabo investigaciones y proyectos de innovación de la enseñanza (Artigue, 1995).

Cabe señalar que la noción de límite está ligada con otras nociones tales como la variable, función, continuidad, infinito, infinitesimal, número real, continuo numérico y sucesión, y para convertirse en concepto tuvo los siguientes obstáculos: Horror al infinito, separación de lo geométrico y lo numérico, obstáculo geométrico, transferencia de lo finito a lo infinito, principio de continuidad de Leibniz (transferir una propiedad de una sucesión convergente a su límite), obstáculo relativo a funciones, el límite se alcanza o no y obstáculos de la simbología (Sierpinska, 1985, citado en Hernández y Andonegui, 2002).

En el análisis de las investigaciones de corte cognitivo, se organizaron de acuerdo con aspectos que sobresalen de éstas. En primer lugar se tienen las investigaciones sobre preconceptos, en segundo momento sobre concepciones, y, por último sobre dificultades.

Con el *preconcepto* se señala que están ligados a la construcción de estructuras cognitivas débilmente fundamentadas y ajenas al contexto cotidiano del estudiante, y no siendo esta situación deseable, resulta importante reconstruir esos preconceptos hacia "conceptos fuertes" construidos, no sobre la formalización del lenguaje matemático sino por el contrario, con base en estrategias didácticas traducidas en acciones individuales de aprendizaje dentro de un "escenario de aprendizaje" prediseñado; lograr que el estudiante observe situaciones contextuales de su vida cotidiana y de ella interiorice en acción, y así abstraer de manera natural las características esenciales y las no esenciales de cada concepto, de tal forma que antes de que se dé el proceso de estudio formal, el alumno construya y aprehenda los conceptos bajo un proceso ajeno a la memorización, pero sí dirigido a su autoconstrucción (Alvarado y García, 2005).

En cuanto al término *concepción*, Páez (2005) define una concepción (en el sentido de Duroux, 1983) como un saber local que se produce cuando se privilegian ciertas situaciones, en menoscabo de otras, en la adquisición del conocimiento. Por lo tanto, una concepción es operante sobre una parte de lo que Vergnaud designa como campo conceptual y por ende presenta necesariamente insuficiencias. Es así que las concepciones de los alumnos designan una estructura mental de carácter general, que incluye creencias, conceptos, significados, reglas, imágenes mentales y preferencias, conscientes o inconscientes (Thompson, 1992, citado en Sierra *et al*, 2000).

Por último, *dificultad* es denominada cómo toda restricción o ausencia (debida a una deficiencia) de la capacidad de realizar una actividad en la forma o dentro del margen que se considera normal para un ser humano. O aquello que impide conseguir o entender una cosa. En cuanto en el aula de clase, una dificultad no solamente está en el proceso enseñanza-aprendizaje de los alumnos, sino también puede notarse en los esfuerzos de los matemáticos de antaño, específicamente los del siglo XIX, para poder definir el concepto de "límite de una función".

El preconcepto de límite

Alvarado y García (2005) reportan que el preconcepto de límite algunos estudiantes lo asocian básicamente al de una barrera no rebasable, que en efecto corresponde con el concepto matemático de un "límite lateral" cuando se analiza un extremo del dominio de las funciones. En ese sentido los investigadores señalan que la mayoría de los estudiantes que han cursado el bachillerato presentan un preconcepto restrictivo del límite, lo que dificulta el concepto formal. Respecto a la reconstrucción, ellos reportan qué las acciones de aprendizajes individuales, pero sobre todo en el análisis de la presentación dada en una acción les permitió crear los preconceptos asociados a contextos naturales, y los preconceptos se lograron a través de la metodología mayéutica y son aceptables para iniciar su estudio dentro del curso formal del Cálculo, si se representan andamiajes adecuados, del mismo modo sugieren que se debe considerar el efecto de los preconceptos en el aprendizaje del Cálculo al igual que en cualquier área del conocimiento como limitante o acelerador de los procesos formales de aprendizaje, según se establece en las teorías cognitivas. En particular, indican que se emplee como rescate de los preconceptos las vivencias contextuales de los estudiantes y reconstruir con mayor cuidado el preconcepto de límite.

Concepciones del concepto de límite

En cuanto a las concepciones que tienen los estudiantes respecto del concepto de límite son diversas, por ejemplo Sierra, et al, (2000), aquellas que asocian al concepto con la *utilización de límites laterales*, otra es *aproximación* y con *el valor de la función en el punto*. La definición formal fue usada ocasionalmente.

Dificultades del concepto de límite

Diversos autores, expresan que las dificultades que presentan los estudiantes respecto a la comprensión del concepto del límite son difíciles de corregir (Sierpinska, 1985; Cornu, 1991; Williams, 1991; Tall, 1992 y Sierra *et al.*, 2000, citados en Hernández y Andonegui, 2002), la razón de este problema radica en dos factores:

- Por la complejidad propia del concepto.
- Las creencias o concepciones que los estudiantes adquieran personalmente.

De acuerdo con lo anterior, se ha encontrado que cuando los estudiantes se enfrentan a tareas respecto al concepto de límite, no utilizan la definición formal del mismo, sino ciertos esquemas o concepciones que se han construido mentalmente, a partir de los ejemplos que ha puesto el profesor, interrelaciones con los compañeros, apuntes, enseñanzas anteriores, utilización de libros de textos, etc. Por tal razón, los estudiantes tienen una multitud de concepciones las cuales se evidencian cuando se enfrentan a ciertos ejercicios, ellos utilizan la concepción que creen conveniente. Y se ha verificado que algunas de las concepciones están relacionadas con las que han aparecido a lo largo de la historia de las matemáticas, por lo que proponen los investigadores que en los cursos de formación de los profesores se debe incluir la historia de la matemática desde la perspectiva de su enseñanza.

Conclusiones

Dado que nos interesamos en identificar y reportar resultados importantes de investigaciones desde una perspectiva cognitiva, a continuación destacamos los resultados relevantes.

Respecto del *preconcepto de límite* que presentan los estudiantes de nuevo ingreso en el nivel superior se encontró:

PC1- El preconcepto de límite está asociado básicamente al de "una barrera no rebasable".

Este resultado los investigadores lo relacionan con el concepto matemático de un "límite lateral" cuando se analiza un extremo del dominio de las funciones. Es cierto que los estudiantes tienen un preconcepto de límite como una barrera no rebasable, pero eso no siempre implica que tenga relación con el concepto matemático de un "límite lateral", ya que cuando se habla sobre éste, se hace referencia acerca de ciertos intervalos ya sea por la izquierda o por la derecha. Pues este puede ser un resultado que surge de sus experiencias personales, ya que se menciona que los estudiantes no habían tomado cursos de cálculo.

Respecto de las *concepciones de límite* que tienen los estudiantes del nivel medio superior, superior y posgrado se identificaron los siguientes:

CP1- La concepción de límite como un valor "inalcanzable".

CP2- La concepción de límite como "aproximación".

CP3- La concepción de límite como el valor que toma la función en un punto (ó como una sustitución).

CP4- La concepción de usar la definición de límites laterales para determinar límite de alguna función.

CP5- La concepción de que para cada ε basta tomar el δ igual a ε. (Esta estrategia es correcta para el caso de algunas funciones).

CP6.- La concepción como un proceso dinámico.

Los resultados CP1, CP2 y CP6, se deben a la forma de cómo están presentadas las definiciones del concepto de límite en los libros de cálculo. Por ejemplo: $\lim_{x\to a} f(x) = L$, y se dice "el límite de $f(x)$ es igual a L cuando x tiende a a" si podemos acercar arbitrariamente los valores de $f(x)$ a L (tanto como queramos) aproximando x a a pero sin igualar a a. Es decir, con la palabra "tiende" el estudiante piensa que el límite nunca se alcanza o se aproxima, aún después de haber trabajado el concepto.

Con CP3 y CP4, suponemos que la forma en cómo se presentan y desarrollan los ejemplos en los libros de cálculo influyen en estas concepciones. Aunque CP3 falla cuando los estudiantes se enfrentan a funciones racionales de la forma *f(x)= g(x)/h(x)* en donde existe un valor para *x* que hace que *g(x)* y *h(x)* sean *cero*.

Esto es, el límite es el valor que se obtiene al sustituir *a* en la función $f(x)$ ($\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$).

Por ejemplo:

Calcular el $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{1^2-1}{1-1} = \frac{0}{0} = 1!$

Calcular el $\lim_{x\to 1} x^3 + 2 = 1^3 + 2 = 3$

En cuanto a CP4 algunos estudiantes proceden como sigue:

Calcular el límite de $f(x) = \frac{x^3-8}{x-2}$, cuando $x \to 2$

Los valores que toma *x* se acercan a 2 por la izquierda $\longrightarrow$

Los valores que toma *x* se acerca 2 por la derecha $\longleftarrow$

X	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2	2.001	2.01	2.1	2.3	2.5
F(x)	9.25	9.76	10.29	10.86	11.41	12	12.006	12.06	12.6	13.8	15

Tabla 1

Por lo tanto el límite de $f(x) = \frac{x^3-8}{x-2}$, cuando $x \to 2$, es igual a 12.

Respecto CP5. Suponemos que algunos estudiantes durante el trabajo inicial con el tema de límites, específicamente cuando se abordan las funciones elementales se casa con la idea de que δ=ε, esto se cumple solo en caso de: $f(x) = x + c$ siendo c una constante y no para otras funciones.

Por último, en cuanto a las *dificultades asociadas al concepto del límite* de los estudiantes del nivel superior, encontramos lo siguiente:

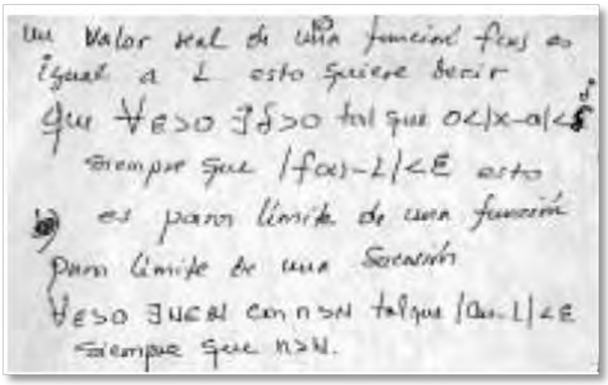
DF1- Dificultad al redactar la definición de límite, es decir, una gran parte de estudiantes se les dificulta la interpretación del simbolismo algebraico vinculado a la función valor absoluto, a las desigualdades, el uso de los cuantificadores, el orden de la implicación y la confusión de los papeles de delta y épsilon.

DF2- Dificultad para reconocer e interpretar límites laterales.

DF3- Dificultad respecto a la interpretación de entornos reducidos

DF4- Dificultad de la comprensión del concepto de límite aun después de su enseñanza o cuando tratan la definición formal de límite.

Por ejemplo:


un Valor real de una función $f(x)$ es igual a L esto quiere decir que $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que $0<|x-a|<\delta$ siempre que $|f(x)-L|<\varepsilon$ esto es para límite de una función

Para límite de una sucesión $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ con $n > N$ tal que $|a_n - L| < \varepsilon$ siempre que $n > N$.

Figura 1

En la figura 1, se observa que el estudiante ha suministrado la definición del límite de una función, cambiando el orden de la implicación, esto es, afirmó que $|f(x) - L| < \varepsilon \Rightarrow |x - a| < \delta$. Es decir, muchos estudiantes invierten el orden de la implicación, los investigadores reportan que esto se debe a una mala memorización de la definición, pero también, es posible que dicha definición corresponda a la dada por algunos libros de cálculo en la que se establece que $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \varepsilon$.

Por otro lado, se muestra que algunos estudiantes memorizan las definiciones de los conceptos y al querer recordarlas, recuperan sólo algunas partes de éstas, esto puede ser ya que algunos docentes, no muestran y/o destacan las características esenciales de concepto. Así mismo, creemos que es importante atender más a la comprensión del concepto que al desarrollo de algoritmos.

Referencias bibliográficas

Alvarado, M. y García, C. (2005). Preconceptos en el aprendizaje del cálculo. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18,* 11-17. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En P. Gómez (Ed.), *La enseñanza de los principios del cálculo: Problemas epistemológicos, cognitivos y didácticas*. Bogotá. Grupo editorial Iberoamérica.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación a la enseñanza del límite. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 4(3),* 219-236.

Block, D. y García, S. (2006). *Matemáticas 3*. México: Serie Construir.

Cantoral, R. (1993). Hacia una didáctica del cálculo basada en la cognición. *Publicaciones centroamericana 7,* 391-410.

Flores, S., Herrera, A. y González, M. (2007). *Problema de aprendizaje del concepto de límite en el contexto de la cinemática.* Recuperado el 16 de marzo del 2010, en http://www.dialnet@unirioja.es.

Hernández, J. y Andonegui, M. (2002). Matemática Educativa: Concepciones acerca de la noción de límite. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *16,* 125-131. México: Clame.

Marván, L. y Bravo, C. (2007). *Matemáticas 3.* México: Castillo.

Páez, R. (2005). *Reconstrucción del concepto de límite: Estudio de un Caso.* universidad Francisco de Paula Santander, Cúcuta-Colombia. Recuperado el 08 de Octubre 2007, de http://www.rpaez@mail.cinvestav.com.mx.

Patiño, D. (2007). *Estudio de comportamientos análogos de funciones algebraicas y trigonométricas usando transformaciones gráficas.* Tesis de licenciatura no publicada, Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Sierra, M. González, T. y López, C. (2000). Concepciones de los alumnos de bachillerato y curso de orientación universitaria sobre límite funcional y continuidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 3(1)*, 71-85.

ANÁLISE PRAXEOLÓGICA E ARTICULAÇÃO DE CONHECIMENTOS MATEMÁTICOS: NOÇÃO DE FUNÇÃO AFIM NO ENSINO MÉDIO NO BRASIL

Marlene Alves Dias, Tânia Maria Mendonça Campos, Sirlene Neves de Andrade
UNIBAN Brasil
alvesdias@ig.com.br,taniammcampos@hotmail.com,sirlene-neves@hotmail.com

Resumen. El objetivo de este trabajo de investigación es identificar las organizaciones praxeológicas que permiten la articulación de la noción de función afín con otras nociones tanto en el contexto matemático como extramatemático en la Educación Media en Brasil. Los análisis se apoyan en la Teoría Antropológica de lo didáctico de Chevallard (2001) y los enfoques teóricos en términos de marcos definidos por Douady (1992) y niveles de conocimiento que se esperan de los estudiantes según la definición de Robert (1997). Tres libros de texto que fueron analizados darán una visión general de las relaciones institucionales que sobreviven actualmente en Brasil. Observamos la existencia de diferentes formas de articulación que dependen de las técnicas desarrolladas, necesitando la atención de profesores que deben proponer el mayor número posible de situaciones para que sus estudiantes puedan aplicar la noción de función afín en diferentes tareas, sean ellas escolares o no.

Palabras clave: función afín, praxeologías, niveles de conocimiento, marcos, puntos de vista

Abstract. The objective of this research work is to identify the praxeological organizations that allow articulation of the notion of function in order with other notions in a mathematical and extramathematical context in brazilian high school. Analyses are based on the Anthropological Theory of Didactic of Chevallard (2001) and the theoretical approaches in terms of frames as defined by Douady (1992) and levels of knowledge expected from students as defined by Robert (1997). Three textbooks were analyzed to give an overview of the institutional relationships that survive today in Brazil. We observed the existence of different forms of articulation that rely on techniques developed, requiring the attention of teachers who should propose the largest possible number of situations so that students can apply the notion of function in order for different tasks, whether related or not

Key words: linear function, praxeology, levels of knowledge, frames, points of view

Introdução

No Brasil, em função das necessidades impostas pela sociedade, a partir de 2000 por meio dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – Brasil (2000, 2006) são propostas mudanças no Ensino Médio fundamentadas na formação geral dos estudantes de forma que os mesmos desenvolvam as capacidades de pesquisar e analisar informações, relacioná-las, selecioná-las, aplicá-las de maneira a aprenderem e serem capazes de criar e formular quando defronte a situações desconhecidas, mas para as quais dispõe-se de conhecimentos para resolvê-las.

Isso conduz a propostas de ensino e aprendizagem que possibilitem a articulação das noções a serem desenvolvidas no Ensino Médio tanto quanto se consideram a própria Matemática assim como aquelas de contexto que os estudantes podem encontrar em sua vida cotidiana e profissional.

Dessa forma, o objetivo desse trabalho é mostrar quais as propostas institucionais, aqui denominadas relações institucionais no sentido apresentado em Chevallard (1992), que sobrevivem atualmente quando se considera o ensino e a aprendizagem da noção de função afim no Ensino Médio brasileiro.

Para isso, escolhe-se como referencial teórico dessa pesquisa a noção de praxeologia (tipos de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias) e ostensivos e não ostensivos conforme definição de Chevallard (2001), a abordagem teórica em termos de quadros conforme definição de Douady (1992), a noção de nível de conhecimento esperado dos estudantes segundo definição de Robert (1997).

Isso possibilitou a construção de uma grade de análise que permitiu propor o estudo e a identificação das relações institucionais existentes via livros didáticos indicados para serem utilizados pelos estudantes brasileiros do Ensino Médio. Foram analisados três livros didáticos que mostram a existência de diferentes relações institucionais para o desenvolvimento da noção de função afim, em particular, quando se considera a proposta de articulação dessa noção com a noção de juros simples, que corresponde a um possível contexto profissional para os estudantes do Ensino Médio, observou-se que ela só é desenvolvida em um dos livros analisados.

Em relação às articulações na própria matemática, essas são desenvolvidas parcialmente em duas das obras analisadas e com maiores detalhes na obra que propõe a articulação da função afim com a noção de progressão aritmética e juros simples. Isso mostra que, mesmo que essas articulações não sejam trabalhadas em sala de aula, os estudantes dispõem de meios para completarem seus estudos, pois espera-se que ao final do Ensino Médio os mesmos tenham autonomia suficiente para tanto, uma vez que o objetivo dessa etapa escolar é de desenvolver as capacidades apresentadas no início desse resumo. A seguir apresentamos uma breve discussão do referencial teórico utilizado na pesquisa.

Referencial teórico

Iniciamos considerando os aportes teóricos da Teoria Antropológica do Didático desenvolvida por Chevallard (1992, 1994, 2001) por terem sido as noções de relações institucional e pessoal, organizações praxeológicas e ostensivos e não ostensivos centrais para o desenvolvimento da pesquisa.

Chevallard (1992) parte das noções primitivas de objeto O, pessoa X e instituição I, e define relação pessoal ao objeto O quando esse existe para pelo menos uma pessoa X e relação institucional a esse mesmo objeto O quando uma instituição I tem uma relação com esse objeto O. Segundo Chevallard (1992) tudo é objeto, existem por exemplo os objetos “escola”, “professor”, “aprender”, “saber”, “dor de dente”, etc. Logo, a noção de função afim é segundo essa definição um objeto O, no caso um objeto matemático.

Consideramos ainda para as nossas análises o conceito de organização praxeológica ou praxeologia, segundo Chevallard uma praxeologia é composta de tipos de tarefas, tipos de técnicas, tecnologias ou discurso sobre as técnicas e teorias que são as tecnologias das tecnologias. Nessas organizações o par tipos de tarefas e técnicas corresponde ao bloco prático (saber como fazer) e o par tecnologia e teoria corresponde ao bloco teórico (saber descrever, explicar, justificar e controlar as técnicas) como indica a própria palavra praxeologia.

Para melhor identificar os elementos que permitem desenvolver e justificar as técnicas utilizadas consideramos também as noções de ostensivos e não ostensivos introduzidas em Chevallard (1994), que define ostensivos como sendo os objetos que têm para nós uma forma material e sensível e portanto podem ser manipulados, isto é, eles correspondem às representações externas e os não ostensivos que usualmente denominamos noções, conceitos, ideias, etc, que ao contrário dos objetos ostensivos só podem ser evocados por meio da manipulação dos ostensivos que lhe são associados.

Chevallard (1994) considera os seguintes exemplos de ostensivos – objetos materiais (uma caneta, um compasso, etc) ou ostensivos materiais, os gestos ou ostensivos gestuais, as palavras, e, mais genericamente, o discurso ou ostensivos discursivos, os esquemas, desenhos e grafismos ou ostensivos gráficos, as escritas e formalismos ou ostensivos escriturais.

É importante observar que Chevallard (1994) ressalta a existência de uma dialética necessária entre ostensivos e não ostensivos, pois segundo ele os ostensivos são manipulados por meio de regras, cuja distinção é feita pelos não ostensivos, enquanto que os não ostensivos são evocados por meio da manipulação dos ostensivos.

Para refinar as análises recorremos ainda às noções de quadro e mudança de quadros introduzidas por Douady (1992). Apresentamos a seguir uma breve descrição dessas ferramentas teóricas de análise.

Douady (1992) define quadro como um ramo da Matemática constituído de objetos, suas relações, formulações eventualmente diversas que permitem a desenvolver imagens mentais associadas a esses objetos, relações e formulações e cujo papel essencial é servir de ferramenta para o funcionamento do quadro.

Essa definição lhe permite transpor para a didática a forma de trabalho do matemático por meio da noção de mudança de quadros que consiste em obter diferentes formulações para um mesmo problema que possibilitam utilizar ferramentas e técnicas que não se aplicavam na primeira formulação.

Para as nossas análises a noção de quadro permite identificar as necessidades em termos de conhecimentos que possam dispor e mobilizar os estudantes para efetuar as mudanças de quadros quando essas são pedidas implícita ou explicitamente nas tarefas que lhes são propostas.

Para melhor compreender as reais possibilidades dos estudantes em termos de utilização de seus conhecimentos quando da resolução de uma tarefa sobre a noção de função afim que lhe é proposta ao final do Ensino Médio recorremos à abordagem teórica em termos de níveis de conhecimento esperados dos estudantes conforme definição de Robert (1997) que introduz os três níveis, técnico, mobilizável e disponível para os quais consideramos a definição dada por Robert e um exemplo sobre o objeto de estudo desse trabalho por nós identificado na sequência.

O nível técnico corresponde a um trabalho isolado, local e concreto, em geral, associado às definições e ferramentas a serem utilizadas em determinada tarefa. O estudante encontra, na tarefa, todos os elementos necessários para sua realização. Exemplo: os exercícios de fixação de uma definição ou propriedade como, por exemplo, determinar o valor numérico da função f(x) dado x.

O nível mobilizável corresponde a resolver uma tarefa por meio da identificação de um saber que é pedido explicitamente. Nesse caso, é preciso saber utilizar ferramentas específicas de forma correta e em alguns momentos o conhecimento a ser mobilizado já corresponde a uma determinada organização. Exemplo, esboçar o gráfico de uma função afim dada por meio do ostensivo de representação escritural simbólico (fórmula).

O nível disponível corresponde a responder corretamente a tarefa dada, porém não é indicado nenhum caminho ou ferramenta que possam auxiliar na sua resolução. Nesse nível é preciso dispor de meios para encontrar ou criar contra-exemplos, para articular diferentes noções matemáticas fazendo as relações necessárias entre elas, para efetuar mudanças de quadros utilizando os ostensivos de representação adequados, aplicar métodos não previstos. Exemplo:

07. Para estipular o preço por seu trabalho, o pintor de paredes André cobra uma taxa fixa de R$ 50,00 e mais uma taxa de R$ 10,00 por m^2 pintado. André vai pintar uma parede de $10m^2$. Quanto André cobrará por esse trabalho?

(A) R$ 50,00
(B) R$ 100,00
(C) R$ 150,00
(D) R$ 200,00

Figura 1: Saresp 2005 - Prova de Matemática da 1º série do Ensino Médio

Na sequência apresentamos a metodologia utilizada na pesquisa considerando a grade de análise construída a partir do referencial teórico apresentado acima e com um exemplo que auxilia a compreender a sua necessidade, a forma de análise desenvolvida e os resultados encontrados.

Metodologia

Trata-se de uma pesquisa documental desenvolvida em três fases:

1. Construção de uma grade de análise, inspirada na grade de Dias (1998), que serviu de instrumento para identificar tanto as organizações matemáticas como as didáticas.

2. Análise das diferentes formas de organizações matemáticas e didáticas existentes via análise de livros didáticos, documentos oficiais e macro-avaliações.

3. Identificação das tarefas usuais privilegiadas por meio da análise de dois livros didáticos avaliados e indicados pelo Ministério da Educação e um livro indicado para a formação de professores do Ensino Médio.

Para a análise dos documentos escolhidos, em particular, dos livros didáticos construímos a seguinte grade de análise:

- Nível de conhecimento exigido na tarefa:
- Ostensivos de representação dados no enunciado:
- Quadro em que a tarefa é enunciada:
- Ostensivos de representação exigidos na solução da tarefa:
- Não ostensivos em jogo na tarefa:
- Quadro em que a tarefa é resolvida:
- Níveis de conhecimento necessários para a execução da tarefa em relação às noções que serão utilizadas:

Exemplo de aplicação da grade

08. Uma companhia de telefonia celular possui dois planos de tarifação para seus usuários: Plano I: taxa de R$ 20,00 por mês, mais R$ 0,30 por minuto de conversação Plano II: sem taxa mensal e R$ 0,50 por minuto de conversação O plano I é o mais vantajoso para as pessoas que, por mês, falam

(A) mais do que 100 minutos
(B) menos do que 100 minutos
(C) mais do que 40 minutos
(D) menos do que 40 minutos

Figura 2: Saresp 2005 - Prova de Matemática da 1º série do Ensino Médio

- Nível de conhecimento exigido na tarefa: disponível;
- Ostensivos de representação dados no enunciado: ostensivos discursivo (língua natural)
- Quadro em que a tarefa é enunciada: numérico;
- Ostensivos de representação exigidos na solução da tarefa: ostensivos escriturais (representação algébrica intrínseca e explícita) e ostensivos gráficos (representação gráfica)
- Não ostensivos em jogo na tarefa: a noção de função afim, a noção de taxa de variação
- Quadro em que a tarefa é resolvida: algébrico
- Níveis de conhecimento necessários para a execução da tarefa em relação às noções que serão utilizadas: reconhecimento da função afim no anunciado da situação, articulação entre a noção de função afim e a noção de taxa de crescimento. Esta tarefa é ideal para mostrar a importância do ostensivo de representação gráfico, pois quando se esboça o gráfico das funções torna-se mais simples a análise da estratégia mais vantajosa, por meio da interpretação dos dados no gráfico.

A seguir apresentamos alguns resultados retirados das análises efetuadas.

Alguns Resultados

O referencial teórico escolhido e a grade construída em função desse referencial nos permitiu identificar as diferentes praxeologias que sobrevivem atualmente no Ensino Médio brasileiro quando se introduz a noção de função afim.

A análise foi feita considerando três livros didáticos indicados pelo Programa Nacional do Livro Didático que distribui livros para todos os estudantes das escolas públicas brasileiras, o que permitiu considerar este material como uma das fontes para a identificação das relações institucionais ao objeto função afim que os estudantes se sujeitam quando cursam o atual Ensino Médio brasileiro.

Esse estudo identifica os diferentes ostensivos e não ostensivos em jogo nas tarefas propostas aos estudantes dessa etapa escolar assim como dos quadros privilegiados (quadros numéricos e algébrico) e das possíveis articulações intramatemáticas (função afim e progressão aritmética, função afim e reta em geometria analítica, função afim e taxa de variação e função linear e grandezas diretamente proporcionais) e extramatemáticas (função afim e termologia, movimento uniforme, juros simples, situações contextualizadas e do cotidiano).

Além disso, foi possível saber qual o nível de conhecimento (técnico, mobilizável e disponível) pode ser esperado dos estudantes brasileiros que terminam o Ensino Médio e qual o nível de conhecimento que era esperado dos alunos que terminaram o ensino fundamental em relação aos conhecimentos matemáticos que podem ser associados à noção de função afim e que são considerados como conhecimentos prévios disponíveis para aqueles que iniciam o Ensino Médio.

Observamos ainda que a grade de análise serviu, também, para verificar as regularidades e diferenças existentes nos livros escolhidos e se esses estavam ou não em conformidade com as propostas oficiais.

Nesses mesmos livros foi possível identificar que existe um discurso tecnológico ou uma tecnologia, diferente nos livros analisados, mas que pode auxiliar professores e estudantes, em particular, quando se trata de desenvolver tarefas que exigem o nível mobilizável ou disponível tanto da noção de função afim como das outras noções em jogo.

Em geral, nas tarefas destinadas aos estudantes (exercícios propostos) verificamos que na maioria dos casos, fica a cargo do estudante desenvolver a maioria das tarefas que apresentam um contexto de uma situação-problema, exigindo dele um bom nível de leitura e interpretação de textos, além de conhecimentos matemáticos ou relacionados a outras ciências que se supõe tenham sido adquiridos anteriormente e que nesse momento são considerados disponíveis.

Esse trabalho nos permitiu retirar algumas considerações que apresentamos a seguir.

Considerações Finais

Observamos a existência de relações institucionais que privilegiam a articulação de conhecimento intramatemáticos e extramatemáticos já adquiridos no Ensino Fundamental e os que estão sendo trabalhados no Ensino Médio, mas é preciso que professores e estudantes fiquem atentos para todas as possibilidades de articulação entre as diferentes formas de conhecimento relacionadas à noção de função afim e suas respectivas representações, necessitando ter como referência o maior número de casos possíveis para ser capaz de trabalhar de forma autônoma em um nível disponível.

Certamente, não é uma tarefa fácil, mas para os estudantes do Ensino Médio que desejam continuar seus estudos, principalmente nas áreas de ciências exatas em que a noção de função afim e suas representações são essenciais para o desenvolvimento de tarefas tanto intramatemáticas como extramatemáticas.

Ressaltamos ainda que não é possível tratar todas as situações cotidianas ou contextualizadas associadas a uma determinada noção matemática e sempre ficará para o estudante um trabalho em nível disponível que ele, mesmo depois de certo tempo, deverá ser capaz de desenvolver, isto é, o estudante deve ser suficientemente autônomo para desenvolver seu próprio projeto de estudo.

Verificamos por meio das análises efetuadas, que as articulações de quadros, manipulação de ostensivos e respectiva evocação do não ostensivo associado devem ser explicitadas por meio de um discurso tecnológico ou tecnologia que as justifique e que só assim é possível compreender quais os diferentes níveis de conhecimento em jogo no desenvolvimento da noção de função afim. Seguramente, não se deve utilizar toda essa terminologia no trabalho em sala de aula com os alunos, mas uma reflexão por parte dos professores sobre essas questões poderá facilitar a compreender as dificuldades dos estudantes.

Referências bibliográficas.

Bianchini, E. e Paccola, H. (2006). Matemática. São Paulo: Moderna.

Brasil. (2000). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio.* Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica – Brasília: MEC, SEMTEC. Acesso em 20 de março de 2010, de http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf

Brasil. (2006). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio +: Ciências da Natureza* e *suas tecnologias***.** Ministério da educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. – Brasília: MEC, SEMTEC. Acesso em 20 de março de 2010, de http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématique* 12(1), 73-112.

Chevallard, Y. (1994). Ostensifs e non-ostensifs dans l'activité mathématique. En *Actes* du Séminaire de l'Associazione Mathesi, (pp. 190-200). Itália: Séminaire de l'Associazione Mathesis.

Chevallard, Y. (2001). Organiser l'étude.1. Structures & Fonctions. En *Actes de la XI école d'été de didactique des mathématiques* (pp.3-22). França: La Pensée Sauvage.

Dante, L.R. (2007). Matemática. São Paulo: Ática.

Dias, M.A. (1998). Les problèmes d'articulation entre points de vue "cartésien" et "paramétrique" dans l'enseignement de l'algèbre linéaire. Paris: IREM Paris 7.

Douady, R. (1992) Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères IREM* 6, 132-158.

Lima, E.L., Carvalho, P.C.P., Warner, E. e Morgado, A.C. (2007). A Matemática do Ensino Médio. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática.

Robert, A. (1997). Quelques outils d'analyse epistemologique et didactique de connaissances mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. En *Actes de la IX école d'été de didactique des mathématiques de Houlgate*, (pp.193-212). França: Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques.

São Paulo (2005). *Saresp: Encontro de Matemática Avaliações externas.* Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas – São Paulo: SEE, CENP.

PONTOS DE VISTA E A MANIPULAÇÃO DE OSTENSIVOS E EVOCAÇÃO DE NÃO OSTENSIVOS EM ÁLGEBRA LINEAR

Tânia Maria Mendonça Campos, Marlene Alves Dias, Elizabeth Fracarolli Jammal
UNIBAN Brasil
taniammcampos@hotmail.com, alvesdias@ig.com.br, bethjammal@gmail.com

Resumen. En este trabajo presentamos una parte del estudio sobre la transición Educación Media y Superior relacionado al desarrollo de la disciplina Álgebra Lineal en los Cursos de la Licenciatura en Matemáticas cuando se consideran los conocimientos previos disponibles de los estudiantes que inician esa etapa escolar. De esa forma, alcanzar el objetivo que es mostrar la importancia de considerar diferentes puntos de vista, según la definición de Rogalski (2001), para el desarrollo del Álgebra Lineal, observando la correspondencia de estos con los cambios de marcos según Douady (1992) y las praxeologías variadas que dependen de los ostensivos y no ostensivos en juego en las tareas, conforme a las definiciones de praxeología y ostensivos y no ostensivos presentadas en Bosch y Chevallard (1999), que posibilitan la articulación de los nuevos conocimientos con los conocimientos previos disponibles.

Palabras clave: marcos, ostensivos y no ostensivos, organizaciones praxeológicas, puntos de vista

Abstract. In this paper we present a part of the study on the transition from high school and college related to the development of the discipline of Linear Algebra in master degree courses in mathematics when considering the available previous knowledge of students who start school this step. This way, to achieve the goal which is to show the importance of considering different points of view, as the definition of Rogalski (2001), for the development of Linear Algebra, noting such correspondence with frame changes as defined by Douady (1992) and varied praxeology, wich depend of ostensive and non-ostensive presented in tasks, as definitions of praxeology and ostensive e non-ostensive presented in Bosch e Chevallard (1999), that enable the articulation of new knowledge with the previous knowledge available

Key words: frames, ostensives and non-ostensives, praxeological organizations, points of view

Introdução

O objetivo desse trabalho é mostrar que considerar diferentes pontos de vista pode corresponder a uma mudança de quadros que permite desenvolver organizações praxeológicas que diferem em relação às técnicas associadas a um mesmo tipo de tarefa, consequentemente às tecnologias e teorias que as sustentam, possibilitando assim desenvolver um novo conhecimento considerando os conhecimentos prévios dos estudantes.

Em função desse objetivo utilizamos como referencial teórico para essa pesquisa a noção de pontos de vista introduzida em Rogalski (2001), em particular, os pontos de vista associados à noção de posto, isto é, os pontos de vista família de vetores, aplicação linear, matriz e sistema linear que são desenvolvidos em função da escolha do quadro em que se aplicam.

Isso conduziu a introduzir a noção de quadro conforme definição de Douady (1992), isto é, um quadro corresponde a um ramo da Matemática constituído de objetos, suas relações, formulações eventualmente diversas que permitem desenvolver imagens mentais associadas a esses objetos, relações e formulações e cujo papel essencial é servir de ferramenta para o funcionamento do quadro.

É essa noção que possibilitou a distinção dos quadros da geometria afim euclidiana, dos sistemas de equações lineares, das matrizes, dos determinantes e da álgebra linear e a noção de organização praxeológica que é composta de um bloco prático que corresponde aos tipos de tarefas e técnicas associadas ao desenvolvimento de um determinado domínio ou noção em matemática e um bloco teórico que corresponde às tecnologias, ou discurso sobre as técnicas, e teorias, ou discurso sobre as tecnologias, que descrevem, explicam e justificam as técnicas e tecnologias empregadas.

Além disso, recorremos às noções de ostensivos e não ostensivos, conforme definição de Bosch e Chevallard (1999) e Chevallard (1994), que são os elementos essenciais para o desenvolvimento das técnicas, pois os ostensivos são utilizados na manipulação das noções, conceitos e ideias empregadas nas técnicas enquanto essas últimas constituem os não ostensivos evocados durante a realização da atividade matemática.

A metodologia usada para a pesquisa foi o da pesquisa documental com a identificação das propostas institucionais via planos de ensino da disciplina Álgebra Linear para os Cursos de Licenciatura em Matemática de universidades públicas e privadas, em que identificamos por meio da bibliografia básica e complementar as obras mais indicadas para essa disciplina. Na sequência identificamos nessas obras as praxeologias privilegiadas e os quadros e pontos de vista utilizados por meio de uma grade de análise construída para esse fim.

Observamos que nas obras mais antigas as praxeologias estão centradas no desenvolvimento do quadro da Álgebra Linear privilegiando os pontos de vista família de vetores e aplicação linear e nas obras atuais, que começam a ser utilizadas com maior frequência, existe uma preocupação com a articulação dos quadros da geometria afim euclidiana, das matrizes, dos determinantes e dos sistemas lineares fazendo intervir também os pontos de vista matrizes e sistemas lineares, o que em relação ao trabalho realizado no Ensino Médio brasileiro possibilita uma introdução das noções de combinação linear, dependência e independência linear, base e dimensão e aplicação linear para os espaços vetoriais de IR^n por meio da articulação dos quadros da geometria, dos sistemas lineares e das matrizes antes de considerar a axiomática que permite definir os espaços vetoriais de dimensão finita e infinita e demonstrar suas propriedades.

Apesar de já anunciado o referencial teórico a metodologia e alguns resultados da pesquisa, iniciamos pelo referencial teórico dando mais detalhes sobre o trabalho realizado e os resultados encontrados.

Referencial teórico

Observamos que o referencial teórico central da pesquisa é a noção de pontos de vista que segundo Rogalski (2001) é uma ferramenta potente para o ensino e aprendizagem, em particular para a Álgebra Linear, pois ela permite olhar um objeto ou uma situação matemática de diferentes maneiras e deste modo por aproximação das conclusões retiradas podemos obter novos resultados. Assim, para Rogalski (2001) uma mudança de quadros para estudar um objeto matemático já corresponde a uma mudança de ponto de vista, mas também é possível mudar de ponto de vista dentro de um mesmo quadro. Um exemplo, corresponde à noção de posto em Álgebra Linear para a qual Rogalski (2001) identificou os quatro pontos de vista a seguir que definimos e apresentamos um exemplo.

Posto de uma família de vetores: O posto de uma família de vetores é a dimensão do subespaço vetorial gerado por essa família, isto é, o número máximo de vetores linearmente independentes que se pode extrair da família. Exemplo: Dada a família de vetores {(1, 3, 1); (3, 8, 2) e (2, 9, 5)} de IR^3. Determina-se o posto de uma família de vetores aplicando o método de Gauss sobre a coluna da tabela de números que correspondem a dispor esses mesmos vetores em colunas. Para interpretar os resultados indicam-se os vetores e as operações realizadas sobre os mesmos.

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} a & b-3a & c-2a \\ \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} a & b-3a & (c-2a)+3(b-3a) \\ \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} \approx \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \approx \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Após a aplicação do método de Gauss verifica-se que o vetor c = 11a – 3b é combinação dos vetores a e b e que a e b são linearmente independentes. Logo, o posto da família de vetores dados é igual a 2.

Posto de uma aplicação linear: Dados dois espaços vetoriais de dimensão finita E, F e uma aplicação linear f de E em F, o posto da aplicação linear f é a dimensão da imagem de f. Exemplo: Seja f: IR^2 □ IR^3 definida por $(x, y) \mapsto (x + y, x - y, 2x + y)$. Logo $Im(f) = \{(x + y, x - y, 2x + y) \in IR^3\}$. Efetuando a passagem do ostensivo a representação paramétrica “implícita-tabela” para o ostensivo de representação paramétrica “explícita-tabela” definidos por Dias (1998) e ilustrado pelo exemplo $(x + y, x - y, 2x + y) = x(1, 1, 2) + y(1, -1, 1)$, em que o primeiro e o segundo ternos ordenados são exemplos dos ostensivos de representação paramétrica indicados acima.

O ostensivo de representação paramétrica "explícita-tabela" permite identificar os vetores (1, 1, 2) e (1, -1, 1) como geradores do espaço vetorial Im(f). Como esses vetores não são proporcionais, eles determinam uma base de Im(f). Logo. A dimensão do espaço vetorial Im(f) é igual a 2, portanto, o posto da aplicação linear f: IR^2 □ IR^3 definida por (x, y) $\mapsto$ (x + y, x – y, 2x + y) é igual a 2.

Posto de uma matriz: O posto de uma matriz é o número máximo de linhas (ou colunas) linearmente independentes, isto é, o número de linhas (ou colunas) diferentes de zero após o escalonamento da matriz, como se pode observar por meio do exemplo:

Seja A = $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & 11 & 14 \end{vmatrix}$

Escalonando em relação às colunas da matriz dada, temos duas linhas diferentes de zero. Portanto, o posto da matriz é 2. Observa-se aqui que o posto da matriz A é igual ao posto da transposta de A.

Posto de um sistema linear: O posto de um sistema de equações lineares é o número de equações independentes do sistema de equações lineares e homogêneas associado ao sistema dado, após aplicação do método de Gauss. $\begin{cases} x+y+z = a \\ 2x+3y-2z = b \\ 3x+4y-z = c \end{cases}$

No exemplo acima, após a aplicação do método de Gauss ao sistema linear e homogêneo associado ao sistema dado, identificam-se duas equações independentes, portanto o posto do sistema é 2.

Considerando os pontos de vista acima apresentados, ressaltamos a observação feita por Rogalski (2001) que a passagem de um ponto de vista para o outro não se realiza por meio de uma simples tradução de um quadro para o outro sendo necessária a utilização de teoremas que garantem as propriedades do invariante que é a noção de posto.

Isso nos conduziu a considerar a noção de quadro e mudança de quadros definidas por Douady (1992). A definição da noção de quadro lhe permite transpor a forma de funcionamento do matemático profissional para a didática por meio das mudanças de quadros, que consistem em obter diferentes formulações para um mesmo problema que possibilitam utilizar ferramentas e técnicas que não se aplicavam na primeira formulação.

Observamos assim que as mudanças de pontos de vista e de quadros estão associadas às técnicas utilizadas para o desenvolvimento das tarefas que são propostas aos estudantes e as representações externas e internas que eles dispõem.

Isso nos conduziu a considerar em nosso referencial teórico as noções de organizações praxeológicas ou praxeologias e de ostensivos e não ostensivos introduzidos por Bosch e Chevallard (1999) e Chevallard (1994).

Segundo Bosch e Chevallard (1999) uma organização praxeológica ou praxeologia é composta de: tipos de tarefas, tipos de técnicas, tecnologias ou discurso sobre as técnicas e teorias que são as tecnologias das tecnologias. Assim, nessas organizações o par tipos de tarefas e técnicas corresponde ao bloco prático que indica o saber como fazer e o par tecnologias e teorias corresponde ao bloco teórico que permite descrever, explicar, justificar e controlar as técnicas utilizadas durante a execução das tarefas.

Para a execução das tarefas existem os elementos que permitem manipular as técnicas que Chevallard (1994) denomina ostensivos e correspondem às representações externas, mas ao mesmo tempo é preciso evocar os conceitos, noções e ideias em jogo nas tarefas para explicá-las, justificá-las e controlá-las, ou seja, as representações internas que Chevallard (1994) chama de não ostensivos. Como exemplos de ostensivos temos: objetos materiais como uma caneta, um compasso, etc, os gestos ou ostensivos gestuais, as palavras, e, mais genericamente, o discurso ou ostensivos discursivos, os esquemas, desenhos e grafismos ou ostensivos gráficos e as escritas e formalismos ou ostensivos escriturais.

Como os ostensivos são manipulados por meio de regras, cuja distinção é feita pelos não ostensivos, enquanto que os não ostensivos são evocados pela manipulação dos ostensivos, Chevallard (1994) observa a existência de uma dialética necessária entre ostensivos e não ostensivos indicando que são eles os ingredientes essenciais para o desenvolvimento das técnicas que permitem resolver os diferentes tipos de tarefas.

Utilizamos ainda a noção de níveis de conhecimento esperados dos estudantes definidos por Robert (1997), a saber, os níveis técnico, mobilizável e disponível. O nível técnico corresponde a um trabalho isolado, local e concreto, em geral, associado às definições e ferramentas a serem utilizadas em determinada tarefa. O nível mobilizável corresponde a resolver uma tarefa por meio da identificação de um saber que é pedido explicitamente. Nesse caso, é preciso saber utilizar ferramentas específicas de forma correta e em alguns momentos o conhecimento a ser mobilizado já corresponde a uma determinada organização. O nível disponível corresponde a responder corretamente à tarefa dada, porém não é indicado nenhum caminho ou ferramenta que possam auxiliar na sua resolução. Nesse nível é preciso dispor de meios para encontrar ou criar contra-exemplos, para articular diferentes noções matemáticas fazendo as relações necessárias entre elas, para efetuar mudanças de quadros utilizando os ostensivos de representação adequados, aplicar métodos não previstos.

Escolhido o referencial teórico que dá suporte às análises consideradas como importantes para atingir o objetivo da pesquisa, isto é, mostrar que considerar diferentes pontos de vista pode corresponder a uma mudança de quadros que permite desenvolver organizações praxeológicas que diferem em relação às técnicas associadas a um mesmo tipo de tarefa, consequentemente às tecnologias e teorias que as sustentam, possibilitando assim desenvolver um novo conhecimento em função dos conhecimentos prévios dos estudantes, organizou a seguinte metodologia para esse estudo.

Metodologia

A metodologia utilizada na pesquisa foi a da pesquisa documental organizada da seguinte forma:

- ❖ Análise das propostas institucionais via planos de ensino da disciplina Álgebra Linear para os Cursos de Licenciatura em Matemática de universidades públicas e privadas. A bibliografia contida nessas propostas permitiu considerar as obras mais indicadas para essa disciplina.
- ❖ Análise das praxeologias privilegiadas e dos quadros e pontos de vista utilizados por meio de uma grade de análise construída para esse fim para quatro livros didáticos que são os mais indicados nos planos de ensino de universidades públicas e privadas.

Para a análise dos livros didáticos construímos a seguinte grade:

A grade de análise

A grade de análise segue o modelo utilizado por Dias (1998) em sua tese e serve para identificar as praxeologias privilegiadas e permite mostrar como os diferentes pontos de vista são eficazes para aproximar conclusões retiradas de cada um deles para obter novos resultados.

- ❖ Quadros em que a tarefa é enunciada;
- ❖ Ostensivos utilizados no enunciado;
- ❖ Não ostensivos utilizados no enunciado;
- ❖ Quadros para solução da tarefa;
- ❖ Ostensivos utilizados na solução da tarefa;

- ❖ Ponto de vista em jogo;
- ❖ Níveis de conhecimentos necessários para a solução da tarefa.

Considerando que em Álgebra Linear a noção de subespaço vetorial pode ser trabalhada por meio de dois pontos de vista: o ponto de vista cartesiano que corresponde a definir um subespaço vetorial por meio de um sistema de equações lineares homogêneas linearmente independentes e o ponto de vista cartesiano que corresponde a definir o subespaço por meio de uma família de vetores linearmente independentes. Observamos que o trabalho sobre esses dois pontos de vista facilita o planejamento, execução, justificativa e controle dos resultados encontrados quando da solução das tarefas usuais de um curso de introdução de Álgebra Linear. Isso permite articulares os diferentes pontos de vista associados à noção de posto enunciados acima, que possibilitam melhor compreender as noções de combinação linear, dependência e independência linear, base e dimensão.

Dessa forma, a grade de análise possibilita identificar como esses pontos de vista são tratados, quando da Introdução à Álgebra Linear, nos Cursos de Licenciatura em Matemática nas universidades brasileiras.

Exemplo de aplicação da grade de análise

O exemplo a seguir permite compreender as escolhas teóricas e metodológicas apresentadas acima.

Determinar o subespaço de IR³ solução do seguinte sistema $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y-2z=0 \\ x+4y-5z=0 \end{cases}$

Em geral, o contrato didático relativo a tal tarefa implica que a solução seja dada por meio do ponto de vista paramétrico utilizando o ostensivo de representação "explícita-tabela" apresentado acima. Portanto, é necessária a passagem do ponto de vista cartesiano para o ponto de vista paramétrico.

Aplicando a grade, temos:

- ❖ Quadros em que a tarefa é enunciada; algébrico;
- ❖ Ostensivos utilizados no enunciado; ostensivo de representação equações;
- ❖ Não ostensivos utilizados no enunciado; sistema de equações lineares e subespaço vetorial;
- ❖ Quadros para solução da tarefa; algébrico;

- Ostensivos utilizados na solução da tarefa; ostensivo de representação equações e ostensivo de representação tabela para os vetores dados em coordenadas;
- Ponto de vista em jogo;cartesiano e paramétrico;
- Níveis de conhecimentos necessários para a solução da tarefa: disponível, pois o estudante deve reconhecer a questão do contrato didático e dar o conjunto solução por meio do ponto de vista paramétrico. O planejamento, execução, justificativa e controle dependem da disponibilidade da articulação ponto de vista cartesiano e paramétrico que está associada à determinação do posto do sistema de equações e do posto da família de vetores que gera o subespaço solução e da relação entre eles.

Na sequência apresentamos alguns resultados encontrados nas análises efetuadas nos quatro livros didáticos que são atualmente os mais indicados nos planos de ensino dos Cursos de Licenciatura em Matemática de algumas universidades brasileiras.

Alguns resultados

Observamos que nas obras de Callioli, Domingues e Costa (1990) e Boldrini, Costa, Figueiredo e Wetzler (1980) as praxeologias estão centradas no desenvolvimento do quadro da Álgebra Linear privilegiando os pontos de vista família de vetores e aplicação linear, mas não se faz explicitamente a articulação entre eles.

Nas obras de Anton e Rorres (2008) e Kolman e Hill (2006) existe uma preocupação com a articulação dos quadros da geometria afim euclidiana, das matrizes, dos determinantes e dos sistemas lineares fazendo intervir também os pontos de vista matrizes e sistemas lineares, mas também não se faz uma articulação explícita entre eles.

Se apreciamos o trabalho realizado no Ensino Médio brasileiro podemos considerar que o mesmo possibilita uma introdução das noções de combinação linear, dependência e independência linear, base e dimensão e aplicação linear para os espaços vetoriais de IR^n por meio da articulação dos quadros da geometria, dos sistemas lineares e das matrizes antes de considerar a axiomática que permite definir os espaços vetoriais de dimensão finita e infinita e demonstrar suas propriedades.

Considerações finais

Observamos que o estudo dos espaços vetoriais de R^n permite explicitar a passagem cartesiano/paramétrico e paramétrico/cartesiano, lembrando que para determinadas tarefas um ou outro ponto de vista mostra-se mais adequado, muitas vezes por facilitar o trabalho a ser realizado. Observa-se ainda que para tarefas em que se deseja determinar a inclusão ou interseção de subespaços, dependendo do ponto de vista utilizado a passagem é indicada por facilitar a solução da tarefa, mas para isso é preciso tratar a articulação desses dois pontos de vista por meio dos teoremas que justificam essa passagem. Esses pontos de vista dependem também da introdução de diferentes ostensivos e não ostensivos como mostra o exemplo de aplicação da grade de análise.

Referências Bibliográficas

Anton, H. & Rorres, C. (2008). *Álgebra Linear com aplicações*. Porto Alegre: Bookman.

Boldrini, J.L., Costa, S.R., Figueiredo,V.L. & Wetzler, H.G. (1980). *Álgebra Linear*. São Paulo: Harper e Row do Brasil.

Bosch, M. & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Grenoble: *Recherches en didactique des mathématiques* 19(1), 77-123.

Callioli, C.A., Domingues, H.H. & Costa, R.C. (1990). *Álgebra Linear* e *Aplicações*. São Paulo: Atual Editora.

Chevallard, Y. (1994). Ostensifs e non-ostensifs dans l'activité mathématique. En *Actes du VI Séminaire de l'Associazione Mathesi 6,* 190-200. Itália: Séminaire de l'Associazione Mathesis.

Dias, M.A. (1998). Les problèmes d'articulation entre points de vue "cartésien" et "paramétrique" dans l'enseignement de l'algèbre linéaire. Paris: IREM Paris 7.

Douady, R. (1992). Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères IREM* 6, 132-158.

Kolman, B. & Hill,D.H. (2006). *Introdução à Álgebra Linear com aplicações*. São Paulo: Editora LTC.

Robert, A. (1997). Quelques outils d'analyse epistemologique et didactique de connaissances mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. En *Actes de la IX école d'été de didactique des mathématiques de Houlgate* 9, 193-212. França: Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques.

Rogalski, M. (2001). Les changements de cadres dans la pratique des mathématiques et les jeu des cadres de Régine Douady. En *Actes de la journée en hommage à Régine Douady*, 13-31. França: IREM Paris7.

SITUAÇÕES DIDÁTICAS: ARTICULAÇÕES ENTRE ATIVIDADES POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVAS E SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS

Laerte Silva da Fonseca, Divanízia do Nascimento Souza, Marlene Alves Dias
IFS, UFS, UNIBAN Brasil
laerte.fonseca@uol.com.br, divanizi@ufs.br, alvesdias@ig.com.br

Resumen. El objetivo de este trabajo es analizar de qué forma el uso de la computadora, como herramienta pedagógica, puede ayudar a superar a estudiantes brasileños de 1º año de una Escuela Técnica de Nivel Medio Integrado en el estado de Sergipe las dificultades de aprendizaje del 1º modelo de funciones trigonométricas a partir de la presentación de atividades potencialmente significativas. Los análisis se apoyan en la Teoría de las Situaciones didácticas de Brousseau (2008), en los princípios de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1988) y en los conocimientos previos conforme a Moreira (2005). Se analisa la trayectoria histórica de las funciones trigonométricas, tres libros didácticos y, por último, la secuencia didáctica propuesta.

Palabras clave: situaciones didácticas, actividad significativa, secuencia didáctica, dificultad de aprendizaje, ordenador

Abstract. The purpose of this study is to examine how the use of computers as a pedagogical tool can take brazilian students from the first grade of the Technical Courses of the Integrated Middle Level in Sergipe to overcome their learning difficulties about the 1st model of the trigonometric functions by means of the presentation of activities potentially significative. The analyzes rely on the Theory of Didactical Situations by Brousseau (2008), the principles of Didactical Engineering by Artigue (1988) and the Previous Knowledges by Moreira (2005). We analyzed the historical trajectory of the trigonometric functions, three textbooks and, finally, the mentioned didactical sequence.

Key words: didactic situations, significative activity, didactic sequence, learning difficulty, computer

Introdução

É comum ouvirmos reclamações de estudantes do Ensino Médio sobre a dificuldade de aprender os conteúdos matemáticos que, praticamente, não tem sentido e nem significado para a vida deles. Essa dificuldade pode estar associada a duas correntes de pensamento, a saber: à ausência de elementos didáticos na formação do professor ou aos estudantes que não dispõem dos conhecimentos prévios para desenvolver os conteúdos matemáticos desta etapa de ensino.

Nesta pesquisa, selecionamos a noção de função trigonométrica e suas representações, para analisar de que forma o uso do computador, enquanto ferramenta pedagógica, é capaz de levar os estudantes da 1ª série do Ensino Técnico de Nível Médio Integrado em Sergipe a superarem suas dificuldades de aprendizagem percebendo o sentido e significado presente em tal abordagem.

Desta forma, baseamo-nos nos *princípios* (pelo menos quatro das suas etapas) da Engenharia Didática de Artigue (1988), nos pressupostos de Brousseau (2008) para abordar a Teoria das

Situações Didáticas, visto que segundo o pesquisador boa parte dos professores não alicerçam seus planos de ensino em teorias capazes de auxiliar no desenvolvimento da Aprendizagem Matemática do aluno e na proposta sobre a Aprendizagem Significativa Crítica de Moreira (2005) que defende a importância de considerar os conhecimentos prévios supostamente disponíveis na integralização de atividades potencialmente significativas.

Sobretudo, decorrente dessa investigação, acreditamos que é possível construir atividades didáticas potencialmente significativas e culturalmente inseridas no contexto dos estudantes, uma vez que esses seguiam o curso Técnico de Nível Médio Integrado de Informática, desde que se faça a opção por um método de ensino no qual a participação do estudante como propõe a Teoria da Aprendizagem Significativa Crítica é essencial no processo de construção do conhecimento.

Referencial teórico da pesquisa

Concentrando o foco da fundamentação teórica em nossa primeira hipótese, cujo intuito é inserir elementos didáticos constituintes – possivelmente ausentes na formação do professor de Matemática – selecionamos a Teoria das Situações Didáticas por está associada à possibilidade de construção de uma sequência de ensino onde se consideram as fases de ação, formulação, validação e institucionalização. Para Brousseau (2008), o conceito que fundamenta o sentido das situações matemáticas corresponde a "todas aquelas que levam o aluno a uma atividade matemática sem a intervenção do professor". (Brousseau, 2008, p. 21). Todavia, o sentido da Atividade Matemática é compreendido por Falcão (2003) – um dos autores pioneiros no Brasil, a partir das pesquisas em Psicologia da Educação Matemática, área cujo objeto de pesquisa foca-se na Atividade Matemática, como sendo:

> Algo que se passa em contexto específico (a atividade escolar), envolvendo basicamente um conteúdo, professores e alunos, mas sem que se perca de vista que este contexto específico se insere em contexto mais amplo, aquele referente às práticas culturais cotidianas extraescolares e à matemática enquanto domínio epistêmico socialmente compartilhado. (Falcão, 2003, p. 20)

Além disso, outro conceito importante que se dever esclarecer repousa sobre o de situação que segundo Brousseau (2008), refere-se ao

> modelo de interação de um sujeito com um meio específico que determina certo conhecimento, como o recurso de que o sujeito dispõe para alcançar ou conservar, nesse meio, um estado favorável. (Brousseau, 2008, p. 19)

Mais especificamente, Brousseau (2008), postula que "reservamos o termo *situações didáticas* para os modelos que descrevem as atividades do professor e do aluno [...] é todo o contexto que cerca o aluno, nele incluídos o professor e o sistema educacional". (Brousseau, 2008, p. 21)

O intuito de termos recorrido ao sentido atribuído por Brousseau (2008) quando se refere às *situações didáticas* (SD) é, portanto, mostrar que o professor necessita criar um dispositivo que abranja um meio material e as regras de interação com esse dispositivo. Assim, para Brousseau (2008) o ensino produzido a partir do funcionamento e desenvolvimento real desse dispositivo só poderia ser verificado se a aprendizagem for alcançada primeiro pela adaptação do aluno e, depois pela mudança de comportamento que incorpora (assimilação e acomodação) o meio criado por uma situação sem qualquer interferência do professor ao longo do processo.

Nessa preocupação de Brousseau (2008), já estava implícita a existência de indícios em que as primeiras engenharias foram trabalhadas por meio da Teoria das Situações Didáticas, o que nos conduziu a construir uma sequência didática observando os princípios da Engenharia Didática.

Essa, como uma metodologia de pesquisa, isto é, ficou mais conhecida pelos trabalhos desenvolvidos por Artigue (1988). Desenvolve-se a sequência a partir de quatro dos princípios elencados pela autora: uma análise preliminar epistemológica, uma análise *a priori* do ponto de vista cognitivo, a experimentação, uma análise *a posteriori* e a validação da sequência.

A primeira fase, análises preliminares ou prévias, equivale na concepção da engenharia civil, por exemplo, a sondagem do terreno: tipo de solo, composição dos materiais, tipo e utilidade da estrutura a ser construída etc. É, sem dúvida, uma investigação prévia que antecede a elaboração do projeto propriamente dito. No caso da Engenharia Didática, essa sondagem deve satisfazer as seguintes orientações:

> [...] considerações sobre o quadro teórico didático geral e sobre os conhecimentos didáticos já adquiridos sobre o assunto em questão, bem como: a análise epistemológica dos conteúdos contemplados pelo ensino, a análise do ensino atual e de seus efeitos, a análise da concepção dos alunos, das dificuldades e obstáculos que determinam sua evolução [e] a análise do campo dos entraves no qual vai se situar a efetiva realização didática. (Machado, 1999, p. 201)

Na presente investigação, os elementos garimpados, formaram o sistema didático encontrado no campo da pesquisa, que se estruturaram nos arredores da concepção de fenômenos naturais – mais especificamente, os ondulatórios –, do conceito matemático da função trigonométrica seno, na perspectiva de utilizar esse conceito matemático para as representações geométricas e algébricas dos fenômenos ondulatórios (o som), bem como na compreensão do "som" como motivação para o ensino da função trigonométrica seno.

Conforme Fonseca (2011), não obstante haver um estado de estabilização na simbiose do sistema didático analisado, encontrou-se vários elementos que tornavam insatisfatória tal simbiose. Assim, analisou-se as possíveis barreiras responsáveis pelo equilíbrio desejado e buscou-se sugerir propriedades para constituir um novo centro de gravidade ainda mais satisfatório.

A segunda fase, concepção e análise *a priori* das situações didáticas, equivale, na concepção da engenharia civil, por exemplo, à iniciação do planejamento estratégico, determinando variáveis imprescindíveis para o controle da execução do projeto: mão de obra, máquinas e equipamentos, recursos físicos e financeiros, orçamento, materiais etc. São as condições necessárias para gerir a execução da obra.

A exemplo da Engenharia Didática, Artigue (1988), entende essas variáveis como sendo variáveis de comando divididas em variáveis macrodidáticas (ou globais, dizem respeito a organização global da pesquisa) e variáveis microdidáticas (ou locais, tratam à organização local da pesquisa quando focaliza uma fase ou uma sessão).

No caso dessa pesquisa, as variáveis macrodidáticas foram determinadas após diagnóstico dos entraves, tais como: mudança do ambiente de aprendizagem, modificação da metodologia de ensino, incentivo ao trabalho em grupo, valorização do método indutivo, estímulo à redescoberta, valorização à participação oral, valorização à criatividade, incentivo à percepção da interligação entre as representações algébricas e geométricas, incentivo à aplicação do conteúdo estudado em cotidianos diversificados, apoio às hipóteses levantadas pelos alunos, incentivo ao desenvolvimento de projetos de pesquisa.

Quanto às variáveis microdidáticas, consideramos a função seno em sua forma canônica $f(x) = a + b.sen(cx + d)$, consentindo mais flexibilidade para sensibilizar e atrair a atenção dos alunos a partir de três momentos distintos: a) observação e percepção (sem manipulação): ocorreu por meio da representação gráfica da senoide, numa situação real exibida nas cenas do vídeo assistido na primeira atividade; b) observação, percepção e articulação (com manipulação): aconteceu durante a representação gráfica da senoide por meio de simuladores de ondas na segunda atividade; c) observação, percepção, articulação e criatividade (com manipulação): incidiu na representação algébrica-gráfica da senoide por meio software

Graphmatica, a partir da variação dos coeficientes reais *a, b, c* e *d* da função *f(x)* da terceira à nona atividade.

A primeira atividade foi inserida com o propósito de mostrar aos alunos como a utilização dos conhecimentos matemáticos ajuda ao homem em tarefas sofisticadas. Assim, o aparecimento dinâmico das ondas sonoras representadas por desenhos num computador de bordo demonstrava como é possível visualizar o som sem necessariamente relacionar a um modelo matemático algébrico decorrente, possivelmente, da série de Fourier. Analisando matematicamente na vida prática, os coeficientes *a, b, c* e *d* da função $f(x) = a + b.sen(cx + d)$ são reais de fato e, por isso, contribuem para uma aproximação otimizada da realidade.

Em contrapartida, observando os livros didáticos para o ensino das Funções Trigonométricas de Dante (2008), Facchini (2006) e Iezzi (2002) e, por transitividade, a exposição deste conteúdo nas salas de aula de Matemática, verifica-se o quão limitada é a forma como é apresentado aos estudantes este tema sempre que autores e professores utilizam-se de coeficientes inteiros para esboçar os respectivos gráficos. Com efeito, ressalta-se este ponto como sendo uma das lacunas que implicam para a não ocorrência da aprendizagem significativa.

Na segunda atividade objetivou-se criar um elo entre a primeira atividade e as oito últimas, pois naquele momento, o aluno, além de observar e perceber imagens e variações, poderia também interferir por meio da manipulação nos ícones de comando que cada um dos simuladores disponibilizava. Neste Sentido, iniciava-se a articulação entre as representações gráficas e as variações dos coeficientes no modelo algébrico.

Da terceira atividade em diante, a finalidade foi de mostrar a importância da compreensão dos coeficientes *a, b, c* e *d* inseridos na forma algébrica da função $f(x) = a + b.sen(cx + d)$ para ampliar o domínio sobre a representação gráfica. No decurso dessas atividades, discutiu-se sobre algumas propriedades (translação e reflexão), domínio e imagem.

Para mostrar aos alunos o sentido de aprender as Funções Trigonométricas, introduziu-se uma soma de funções seno representando um desenho bem aproximado das vibrações sonoras assistidas no vídeo, com o objetivo de se fazer a articulação entre a Matemática não escolar e a da sala de aula. Em seguida, a fim de valorizar o potencial criativo dos alunos e verificar a capacidade deles para a elaboração de estratégias e validação dos conceitos aprendidos, solicitou-se para eles que apresentassem um desenho de uma situação por meio algébrico e gráfico seguidos de seus respectivos domínios.

Estabelecida a disposição da sequência didática, realizou-se a análise *a priori*, cujo objetivo, segundo Machado (1999), é constituir relações entre as escolhas feitas, os comportamentos dos alunos e o significado de cada um desses comportamentos. Importa ressaltar que aluno é o único protagonista desse cenário.

Conforme Machado (1999), esta análise está dividida em descrição e previsão, tendo que obedecer às seguintes condições:

- descrever cada escolha local feita (eventualmente relacionando-as às escolhas globais) e as características da situação a-didática decorrentes de cada escolha;
- analisar qual o desafio da situação para o aluno decorrente das possibilidades de ação, de escolha, de decisão, de controle e de validação de que ele disporá durante a experimentação;
- prever os comportamentos possíveis e mostrar no que a análise efetuada permite controlar o sentido desses comportamentos; além disso, deve-se assegurar que, se tais comportamentos ocorrerem, resultarão do desenvolvimento do conhecimento visado pela aprendizagem. (Machado, 1999, p. 205-206)

A terceira fase, experimentação, equivale na concepção da engenharia civil, por exemplo, a realização ou execução do projeto. Neste caso, versa sobre aplicação da sequência didática. Para Machado (1999), esta fase deve considerar:

- a explicação dos objetivos e condições de realização da pesquisa à população de alunos que participará da experimentação;
- o estabelecimento do contrato didático;
- a aplicação dos instrumentos de pesquisa;
- o registro das observações feitas durante a experimentação (observação cuidadosa descrita em relatório, transcrição dos registros audiovisuais, etc.). (Machado, 1999, p. 206)

Por fim, a fase da análise *a posteriori* e validação, equivale na concepção da engenharia civil, por exemplo, a checagem do projeto ou vistoria da obra. Para a Engenharia Didática, representa o momento de confrontação entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*, cujo objetivo é validar ou refutar as hipóteses iniciais da pesquisa. Para tanto, tem-se de considerar todos os dados recolhidos durante a investigação, por exemplo: os registros de observações, os registros nos protocolos dos alunos, questionários, filmagem etc.

Sendo assim e considerando ainda que a Aprendizagem Significativa Crítica e Atividades Potencialmente Significativas, segundo Moreira (2005) consistem em inserir o sujeito na sua cultura e ao mesmo tempo estar fora dela, o que nos parece estar em conformidade com a forma de tratamento dos conhecimentos matemáticos por meio da Teoria das Situações

Didáticas e da possibilidade de considerar o computador como uma ferramenta essencial para estudantes do Ensino Técnico de Nível Médio Integrado em Informática cuja cultura vigente está associada à utilização constante das novas tecnologias, no caso, o computador.

Metodologia da pesquisa

Para alcançar os objetivos previstos neste trabalho, iniciamos a nossa pesquisa com a análise prévia sobre as funções trigonométricas conforme Artigue (1988) e que acreditamos auxiliar na criação de atividades potencialmente significativas. Assim, decorreu a proposta de estudar o som considerando sua natureza de fenômeno ondulatório, cujas representações estão associadas ao conceito de senóide.

Ainda segundo orientação do trabalho de Artigue (1988), verificamos a partir da análise em livros didáticos de Matemática do Ensino Médio a noção de função trigonométrica, especificamente a função seno.

Desta forma, e considerando o perfil dos sujeitos envolvidos na investigação, desenvolvemos uma sequência didática com as diferentes fases consideradas por Brousseau (2008), da qual decorreu a análise preliminar, *a priori*, a experimentação, a análise *a posteriori* e a validação, conforme Artigue (1988).

Análises e Resultados encontrados

O estudo epistemológico do som, permitiu identificarmos que foi a transformação do sinal da voz em impulsos elétricos que possibilitou a otimização das relações econômicas e o desenvolvimento de outros setores do mundo moderno, como por exemplo, os serviços de inteligência secreta. Aqui, enfatiza-se a origem da inspiração para caracterizar, conforme Brousseau (2008), a Situação de Ação (elo com o cotidiano), encontrada na exibição de um vídeo sobre o som como fenômeno possível de ser reconhecido pelo movimento harmônico e representado pela Função Trigonométrica $f(x)=a+b.sen(cx+d)$. Ainda assim, importa ressaltar que, nestes termos, acreditamos que a compreensão e domínio sobre as propriedades do "som" possibilitaram subsidiar o Ensino das Funções Trigonométricas.

Por meio das análises de livros didáticos, verificamos que em nenhum dos livros analisados foram encontradas propostas de atividades que fizessem uso de softwares livres como o Graphmatica, Geogebra, entre outros. Constatamos ainda, a partir das análises sobre o Estado da arte, que no Brasil são poucas as pesquisas no campo da Educação Matemática que permitem uma discussão interdisciplinar entre Física e Matemática, bem como vincular com exclusividade a Teoria das Situações Didáticas e a Noção de Conhecimentos Prévios Supostamente Disponíveis.

Meticulosamente planejadas, as atividades foram desenvolvidas em cinco sessões de três horas cada uma, onde foi possível conferir resumidamente que, por simples observação: a mudança da "atenção" dos alunos quando se concentravam nas atividades, pois, além de conseguirem os objetivos previstos, demonstraram interesse, responsabilidade e desejo.

Por meio das análises dos protocolos, outro ponto que merece destaque refere-se à liberdade de manipular uma função a partir de um software dinâmico, pois verificamos que se propicia a construção do conceito inerente ao conteúdo selecionado, incentiva-se a independência intelectual e o autodidatismo, estimula-se a pesquisa por meio da curiosidade e da criatividade.

Percebemos também que, alguns alunos foram incisivos, objetivos e claros, demonstrando a partir de seus registros que os coeficientes _a_, _b_, _c_ e _d_ $\in$ R da função $f(x)=a+b.sen(cx+d)$ são responsáveis pela apresentação geométrica do gráfico e, mais especificamente, pela *translação vertical, amplitude, frequência (período)* e *translação horizontal*, respectivamente.

Considerando-se oito dos protocolos dos alunos das últimas atividades, verificamos que os inventários das funções criadas por eles fazem variações em todos os coeficientes da função $f(x)=a+b.sen(cx+d)$, em que a sua maioria explicita o domínio de *f(x)* possível de compreender a própria criação (FONSECA, 2011). Os alunos manipulavam as funções a partir do significado que criaram dos coeficientes, buscando dessa forma representar graficamente o sentido resultado das suas imaginações que geralmente se referiam a artefatos, elementos da natureza (sons e ondas), etc. Ao nosso ver, essa atitude representa a união entre sentido e significado cuidadosamente apresentados a essa turma, conforme postulam Falcão (2003) e Moreira (2005).

Particularmente, um aluno criou um modelo matemático para representar as "estalactites", destacando-se de todos os outros por apresentar a função *f(x)* como sendo uma soma de funções. Os esboços, bem como as impressões de gráficos apresentadas nesta atividade, demonstraram que os alunos convenceram-se de que todo fenômeno pode ser matematizado por meio de equações, cujas incógnitas associadas responsabilizam-se por particularidades desse fenômeno.

Neste sentido, o protocolo de outro aluno associa "caus" (sic) e "tranquilidade" a um inventário de funções matemáticas, mesmo que seja incipiente suas ideias por ausência de um arsenal matemático mais sofisticado. Vale à pena ainda destacar o cuidado e a "perfeição" com que um aluno "X" esboça seu desenho – "*uma corda ou o interior de um cabo de alumínio"* – agrupando algebricamente e sobrepondo geometricamente, representações matemáticas decorrentes da forma canônica da função seno.

Considerações Finais

Baseando-nos no itinerário metodológico descrito acima, e também nos resultados obtidos a partir dos estudos de Artigue (1998), Brousseau (2008), Falcão (2003), Machado (1999), Moreira (2005) e Fonseca (2011), pudemos concluir que é possível construir atividades didáticas potencialmente significativas e culturalmente inseridas no contexto dos estudantes, uma vez que esses seguiam o curso Técnico de Nível Médio Integrado de Informática, desde que se faça a opção por um método de ensino no qual a participação do estudante como propõe a Teoria da Aprendizagem Significativa Crítica é essencial no processo de construção do conhecimento.

Referências bibliográficas

Artigue, M. (1988). Engenharia Didática. In : Brun, J. (org.). *Didática das Matemáticas*, 193-217. Instituto Piaget, Lisboa.

Brousseau, G. (2008). *Introdução ao estudo das situações didáticas: conceitos e métodos de ensino*. Ática, São Paulo, Brasil.

Dante, L. R. (2008). *Matemática, volume único*. Ática, São Paulo, Brasil.

Facchini, W. (2006). *Matemática para a escola de hoje: livro único*. FTD, São Paulo, Brasil.

Falcão, J. T. da R. (2003). *Psicologia da Educação Matemática: uma introdução*. Autêntica, Belo Horizonte, Brasil.

Fonseca, L. S. (2011). *A aprendizagem das Funções Trigonométricas na perspectiva da Teoria das Situações Didáticas*. UFS (Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática), São Cristóvão, Brasil.

Iezzi, G. *et al.* (2002). *Matemática, volume único.* Atual, São Paulo, Brasil.

Machado, S. D. A. (1999). Engenharia Didática. In. MACHADO, S. D. A. *et al. Educação Matemática: uma introdução*. EDUC, São Paulo, Brasil.

Moreira, M. A. (2005). *Aprendizagem significativa crítica*. Editora da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil.

LAGRANGE Y LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES NUMÉRICAS: PERSPECTIVA HISTÓRICA EPISTEMOLÓGICA

Flor M. Rodríguez-Vásquez, Modesto Sierra
Universidad Autónoma de Guerrero México
Universidad de Salamanca España
flor_r@usal.es, mosiva@usal.es

Resumen. Presentamos parte de una investigación de corte histórica epistemológica cuyo objetivo fue el de vislumbrar la evolución histórica del concepto ecuación a partir de un análisis de libros tanto históricos como de texto. Específicamente expondremos lo obtenido del análisis de la obra Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrees, avec des notes sur plusieurs points de la théorie des équations algébriques, escrita por J. L. Lagrange.

Palabras clave: análisis histórico epistemológico, ecuaciones

Abstract. In this paper, we show a part about a historical epistemological research in which the aim was to portray the historical evolution of the equation concept from an analysis of both historical and text books. Below we discuss what obtained from the analysis of Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrees, avec des notes sur plusieurs points de la théorie des équations algébriques oeuvre that was writing by J. L. Lagrange.

Key words: historical epistemological analysis, equations

Introducción

En Didáctica de la Matemática, la investigación histórica-epistemológica tiene entre algunos de sus fines, el mostrar la evolución de los conceptos, de su vinculación con otros que le son consustanciales, de sus distintas formas de representación y tratamiento y principalmente el de mostrar el saber erudito en su forma natural.

Los estudios históricos epistemológicos son de suma importancia en la educación, en parte debido a lo que Sierra, González y López (1999) consideran, y es que algunos de los fundamentos de la enseñanza de la matemática se basan en la génesis misma de los conocimientos; y en parte debido a la problemática del abuso de la transposición del conocimiento lo que en consecuencia sugiere que se deben considerar formas adecuadas para la introducción del conocimiento matemático escolar tanto teóricamente como metodológicamente hablando. Además Cantoral, Farfán, Cordero, Alanís, Rodríguez y Garza (2008) nos hacen reflexionar acerca de que la matemática se construyó socialmente en ámbitos no escolares y por lo tanto se deben hacer consideraciones pertinentes para su incorporación al sistema de enseñanza.

Hoy día la literatura muestra que el impacto de la historia de la matemática no sólo a nivel descriptivo o cronológico, sino también práctico, es decir, en varios países como por ejemplo

Francia, Grecia, e Inglaterra, se propone que la enseñanza de la matemática debe incluir la formación histórica de los conceptos desde su institucionalización curricular (CERME 2009), lo cual desde nuestra opinión enriquece metodológicamente en la práctica docente pues además de la formación basada en operaciones y abstracciones, la parte epistémica del conocimiento se incluye en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Marco teórico - metodológico

Acudimos a la investigación histórica-epistemológica con base en el método histórico de Ruiz Berrio (1976) en donde se plantea que se deben seguir fundamentalmente cuatro fases:

- ❖ Heurística: localización y clasificación de los documentos.
- ❖ Crítica histórica: crítica externa; crítica interna.
- ❖ Hermenéutica: interpretación histórico-pedagógica de los hechos.
- ❖ Exposición: explicaciones convenientes del trabajo histórico.

De aquí que se propuso la metodología de análisis de libros históricos siguiente:

<table>
<tr><th>Campo de análisis</th><th colspan="2">Unidades de análisis</th><th>Categori-zación</th><th>Descripción general de los propósitos</th></tr>
<tr><td>Ficha de referencia de la obra</td><td colspan="2">Nombre del autor
Fechas de nacimiento y fallecimiento del autor
Primera edición
Edición analizada
Localización del manual utilizado</td><td>CP1</td><td>Nos permite enmarcar la obra en el momento en que fue escrita.</td></tr>
<tr><td rowspan="7">Contextos y propósitos de la obra y del autor</td><td colspan="2">Momento histórico y lugar en que fue escrita la obra</td><td>CP1</td><td rowspan="7">Contextualización y caracterización de la obra en función de los sucesos que influyeron para su divulgación.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Contexto histórico-cultural de las matemáticas en general</td><td>CP2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Formación del autor</td><td>CP3</td></tr>
<tr><td>Estructura general del material</td><td>Extensión y estructura del material
Secuenciación de los contenidos de la obra
Tipografía de la obra</td><td>CP4</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivos generales de la obra</td><td>CP5</td></tr>
<tr><td colspan="2">Innovaciones introducidas por el material</td><td>CP6</td></tr>
<tr><td colspan="2">Otras obras publicadas</td><td>CP7</td></tr>
<tr><td>Tipo de proceso utilizado en la resolución de</td><td>Geométrico (G)</td><td>Ejemplos y problemas
Tipos de expresiones utilizadas</td><td>PG</td><td>Explicación del tratamiento didáctico con base en periodos</td></tr>
</table>

ecuaciones		Conceptos involucrados Gráficas empleadas		históricos representativos.
	Algebraico (A)	Ejemplos y problemas Tipos de expresiones utilizadas Conceptos involucrados	PA	
	Numérico	Ejemplos y problemas Tipos de expresiones utilizadas Conceptos involucrados	PN	

Tabla 1. Categorías para el análisis de libros históricos. Rodríguez-Vásquez (2010).

Ecuaciones numéricas en la obra de Lagrange

El análisis de la obra *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrees, avec des notes sur plusieurs points de la théorie des équations algébriques* (1808), escrita originalmente por Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) en 1798, fue considerada en la investigación debido a que es una de las obras escritas en un periodo crítico en cuanto a la cuestión social del desarrollo de la matemática misma, influencia del periodo de la ilustración y la revolución francesa.

El *Traite* está formado por seis capítulos, cada uno dividido por secciones y catorce notas sobre la teoría de ecuaciones algebraicas. El contenido versa sobre el método para encontrar en una ecuación numérica cualquier el valor entero más aproximado a cada una de sus raíces reales; sobre la manera de tener las raíces iguales y las raíces imaginarias de ecuaciones; el nuevo método para aproximar raíces de ecuaciones numéricas (refiriéndose al planteado por él en la obra); sobre la aplicación de los métodos precedentes a ejemplos cualquiera; y sobre las raíces imaginarias.

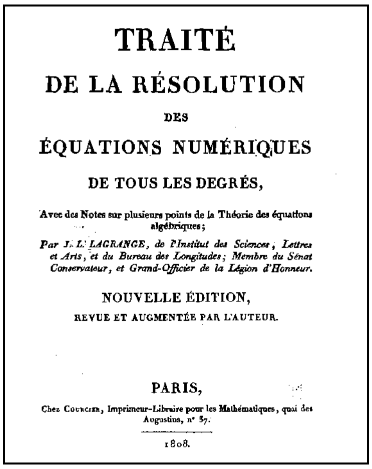

TRAITÉ
DE LA RÉSOLUTION
DES
ÉQUATIONS NUMÉRIQUES
DE TOUS LES DEGRÉS,
Avec des Notes sur plusieurs points de la Théorie des équations algébriques;
Par J.-L. LAGRANGE, de l'Institut des Sciences, Lettres et Arts, et du Bureau des Longitudes; Membre du Sénat Conservateur, et Grand-Officier de la Légion d'Honneur.
NOUVELLE ÉDITION,
REVUE ET AUGMENTÉE PAR L'AUTEUR.
PARIS,
Chez Courcier, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, nº 57.
1808.

Figura 1. Portada del Traité

En la introducción, se menciona que la solución de todo problema determinado se reduce, a la resolución de una o de varias ecuaciones, cuyos coeficientes son números dados, refiriéndose específicamente a las llamadas ecuaciones numéricas. De aquí la importancia de obtener métodos para resolver completamente estas ecuaciones y la relevancia de la obra dado que en ella misma se expresa que contiene un método para lo anterior y se anexan los principales puntos sobre la teoría de ecuaciones algebraicas.

Se observó de la obra que Lagrange hace la diferencia de la resolución de ecuaciones numéricas de la que llama en álgebra resolución general de ecuaciones (y que en la actualidad seguimos llamándole así), la primera es propiamente dicha, una operación aritmética fundamentada en los principios generados por la teoría de ecuaciones. La extracción de raíces cuadradas y cúbicas son la operación más simple de este género y asimismo la resolución de ecuaciones numéricas de segundo y tercer grado. En consecuencia, señala que se deja a la Aritmética las reglas de la resolución de ecuaciones numéricas y al Álgebra su demostración, ya que dependen de la teoría general de ecuaciones. Sostiene que el sentido del álgebra es más amplio, establece que el arte de determinar los factores desconocidos para las funciones de cantidades conocidas; la resolución general de ecuaciones consiste en encontrar, para todas las ecuaciones de un mismo grado, las funciones de los coeficientes de estas ecuaciones quienes pueden representar todas sus raíces. Menciona, además, la dificultad que existe en los casos de ecuaciones irreducibles. Posteriormente señala que afortunadamente, se han encontrado los medios para superarlo en los grados tercero y cuarto, por la consideración de la trisección de ángulos y por la ayuda de tablas trigonométricas, aunque esto depende de que la división de ángulos no es aplicable en los grados más elevados sino sólo a una clase muy limitada de ecuaciones. En consecuencia recurre a un método aritmético, el cual, es precisamente objeto del *Traité*.

Da crédito a Viète (1540-1603) como el primero en ocuparse de la resolución de ecuaciones numéricas de cualquier grado, y que Harriot (1550-1621), Oughtred (1574-1660) y Pell (1611-1685), entre otros, que investigaron para facilitar el uso del método presentado por Viète, proporciona reglas particulares para disminuir los ensayos, según los diferentes casos que tienen lugar en las ecuaciones respecto de sus signos y de sus términos, mas la multitud de operaciones que se generan llevan a la incertidumbre del éxito en un gran número de los casos. El método, al cual se refiere es, al de Newton (1643-1727), y se describe enseguida:

> A la méthode de Viète a succédé celle de Newton, qui n'est proprement qu'une méthode d'approximation, puisqu'elle suppose que l'on ait déjà la valeur de la racine qu'on cherche, à une quantitè près moindre que sa dixième partie: alors on substitue cette valeur plus une nouvelle inconnue à l'inconnue de l'équation proposée, et l'on a une seconde équation dont la racine est ce qui reste à ajouter à la première valeur pour avoir la valeur exacte de la racine cherchée: mais, à cause de la petitesse supposée de ce reste, on néglige dans la nouvelle équation le carré et les puissances plus hautes de l'inconnue; et l'équation étant ainsi rabaissée au premier degré, on a sur-le champ la valeur de l'inconnue. Cette valeur ne sera encore qu'approchée; mais on pourra s'en servir pour en trouver une autre plus exacte, en faisant sur la seconde équation la même opération que sur la première,

> et ainsi de suite. De cette manière, on trouve à chaque opération une nouvelle quantité à ajouter ou à retrancher de la valeur déjà trouvée, et l'on a la racine d'autant plus exacte qu'on pousse le calcul plus loin. (Lagrange, 1826, IX)

Sin embargo, señala que, aunque dicho método es el más comúnmente usado para la resolución de ecuaciones numéricas, sólo se aplica a un cierto número de ellas puesto que no es del todo seguro.

En consecuencia, Lagrange parte fundamentalmente de un problema que expresa textualmente como sigue:

> Le problème qu'on doit se proposer dans cette partie de l'Analyse est celui-ci: Étant donnée une équation numérique sans aucune notion préalable de la grandeur ni de l'espèce de ses racines, trouver la valeur numérique exacte, s'il est possible, ou aussi approchée qu'on voudra de chacune de ses racines. Ce problème n'avait pas encore été résolu; il fait l'objet des recherches suivantes. (Lagrange, 1826, X)

Es decir, pretendía resolver el problema de encontrar el valor numérico exacto o tan aproximado como se desee, de cada una de las raíces de cualquier ecuación numérica sin noción preliminar de su tamaño ni de su tipo de raíces.

Lo que propuso fue un análisis de la ecuación a resolver en función de las características de sus coeficientes, sus signos y cambios de signo, al sustituir valores consecutivos de la variable x definir así su solución. En general, para resolver una ecuación de la forma:

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \cdots + K = 0 \qquad (a)$$

Se propuso encontrar una ecuación auxiliar que nos permita decidir cuántas raíces reales e imaginarias tiene (*a*). Lo cual presume una ventaja sobre el método de aproximación de Newton. La ecuación auxiliar se encuentra sustituyendo valores enteros sucesivos en (*a*) para encontrar una aproximación inicial, el fundamento es el cambio de signo en el valor obtenido de dicha sustitución, es decir se busca x tal que $x > p$ y $x < p + 1$ o sea $x = p + \frac{1}{y}$. De donde, sustituyendo este valor en (*a*), se obtendrá una nueva ecuación (*b*) en términos de y.

Continuando de esta manera, se aproxima cada vez más al valor de la raíz buscada. Y, en el caso de que cualquiera de estos números $p, q, \ldots$ sean una raíz exacta, entonces se tendrá que $x = p$ o $y = q, \ldots,$ y la operación estará terminada; luego, se encontrará para x un valor conmensurable. En los otros casos, el valor de la raíz será necesariamente inconmensurable, y se podrá solamente aproximar muy cerca al valor verdadero.

El resultado, las *fracciones continuas* en la resolución de ecuaciones numéricas. Ver Figura 2.

22. Soient donc $p, q, r, s, t, \ldots$ les valeurs entières approchées des racines des équations (a), (b), (c), ..., en sorte que l'on ait

$$x = p + \frac{1}{y}, \quad y = q + \frac{1}{z}, \quad z = r + \frac{1}{u}, \quad \ldots$$

Substituant successivement ces valeurs dans celle de x, on aura

$$x = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{s + \ldots}}}$$

Figura 2. Fracciones continuas. Lagrange (1808, p.45)

Una característica en el proceder es que método propuesto conserva el carácter iterativo y asegura el encontrar el valor solución de la ecuación numérica.

En resumen, si se quiere resolver por ejemplo la ecuación $x^3 - 2x - 5 = 0$,

25. Je prendrai pour premier exemple l'équation que Newton a résolue par sa méthode, savoir,

$$x^3 - 2x - 5 = 0.$$

Figura 3. Lagrange (1808, p. 51)

Se obtienen las aproximaciones $p, q, \ldots$ y finalmente la solución expresada en una fracción continua

En continuant de cette manière, on trouvera les nombres

$$2,\ 10,\ 1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 1,\ 1,\ 12,\ \ldots,$$

de sorte que la racine cherchée sera exprimée par cette fraction continue

$$x = 2 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}}$$

Figura 4. Lagrange (1808, p. 53)

Como su nombre lo indica, partiendo de la definición de continuidad en esa época, una fracción continua será entendida como una expresión en fracción que se presenta en una sola función.

La construcción y tratamiento del método expuesto por Lagrange refleja la susceptibilidad de un planteamiento puramente algebraico sobre lo geométrico, a diferencia de los antecesores que habían estudiado al respecto de la resolución de ecuaciones numéricas. La obra es sin duda una de las fortalezas de la fundamentación algebraica.

Cabe mencionar que el tratamiento Lagrangiano para la resolución de ecuaciones trajo consigo descubrimientos en la matemática, pues no sólo da solución real sino plantea la solución de ecuaciones con raíces imaginarias, asimismo, dicho tratamiento dio pie para el fortalecimiento de los procesos de separación de raíces.

Conclusión

A la resolución de ecuaciones no lineales se les presta poca atención en el sistema escolar. En consecuencia, un graduado de nivel superior, experimenta dificultades encontrándose ante la necesidad de resolver una ecuación trascendente sencilla. (Vilenkin (1984); Ortega y Ortega (2003)). Lo anterior se debe a que, desde la enseñanza elemental de la matemática, hasta el nivel medio superior, se favorecen los métodos determinados sobre los aproximados.

El estudio de la obra de Lagrange, revela un tratamiento de resolución no sólo para ecuaciones lineales sino, en la obra misma, se enfatiza, en la solución de las ecuaciones sin importar su extensión ni su grado. En consecuencia, se plantea retomar la perspectiva histórica epistemológica para realizar acciones a favor de la enseñanza de la matemática ya que uno de sus fundamentos se sujeta en la génesis misma de los conocimientos. Además de que este tipo de análisis permite ampliar los conocimientos alrededor de un concepto, además, de mostrar que la matemática es un conjunto de conocimientos en evolución continua, y que aunque el contexto de la época cambia sin duda del saber erudito al saber enseñar, se hace necesaria la inclusión de la perspectiva histórica en el desarrollo del conocimiento matemático escolar, pues se dota no sólo al profesor sino al estudiante de un nuevo paradigma de la matemática escolar.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R., et al. (2008). *Desarrollo del pensamiento matemático.* México: Ed. Trillas

Lagrange, J. L. (1808). *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrees, avec des notes sur plusieurs points de la théorie des équations algébriques.* Gauthier-Villars. París.

Ortega, J. F. y Ortega, J. A. (2003). *Matemáticas-0: Un temario a discusión*. Recuperado el 6 de octubre de 2010 de http://www.uv.es/asepuma/XI/04.pdf

Rodríguez, V. (2010). *Desarrollo conceptual de los métodos iterativos en la resolución de ecuaciones no lineales: un enfoque didáctico*. Recuperado el 22 de octubre de 2010 de http://gredos.usal.es/jspui/handle/10366/76557

Ruiz Berrio, J. (1976). El método histórico en la investigación histórica de la educación. *Revista Española de Pedagogía 134*, 449-475.

Sierra, M., González, M.T. y López, C. (1999). Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de Bachillerato y Curso de Orientación Universitaria: 1940-1995. *Enseñanza de las Ciencias 17 (3)*, 463-476.

Vilenkin, N. Ya. (1984). *Método de las aproximaciones sucesivas.* Moscú: Editorial Mir.

Workgroup 15. Theory and research on the role of history in mathematics education. *Proceedings of CERME 6*, January 28th-February 1st 2009, Lyon France INRP 2010. Recuperado el 22 de marzo de 2011 de www.inrp.fr/editions/cerme6

DESEMPENHO DE ESTUDANTES DO 3º. ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL DE ESCOLA MUNICIPAL DE SÃO PAULO EM PROBLEMAS DOS CAMPOS ADITIVO E MULTIPLICATIVO

[1]Leika Watabe; [2]Maria Helena Palma de Oliveira
[1]Universidade Bandeirante de São Paulo – UNIBAN Brasil
[1]leika_watabe@uol.com.br; [2]mhelenapalma@gmail.com

Resumen. Se ha analizado el desempeño de 33 estudiantes en la resolución de problemas de los campos aditivo y multiplicativo, en un aula de 3° año de enseñanza básica, a fin de identificar factores que influyen en el fenómeno de resolución. Se presentaron cinco situaciones problema: tres del campo aditivo y dos del campo multiplicativo. Los análisis de desempeño indican que hubo dificultades en relacionar la pregunta con los datos presentados en el enunciado; muchos alumnos identificaron la operación que resolvería el problema, pero fallaron al aplicar el algoritmo convencional por no comprender su funcionamiento, algunos alumnos no consiguieron explicitar su propio procedimiento en la resolución, pero las preguntas hechas por la investigadora desencadenaron un proceso que los ayudó a organizar mejor su razonamiento y a explicitarlo por medio de palabras, como no lo habían hecho anteriormente. La discusión de los procedimientos mediada por la intervención oportuna es un factor relevante para los procesos de aprendizaje de matemática.

Palabras clave: problem solving, multiplicative structures, additive structures, reading ability, interaction

Abstract. This text present an analysis of the performance of 33 students on problems related to the conceptual fields of additive and multiplicative structures, in a 3rd grade class (third year of compulsory education), in order to identify factors which influence success. Five problem situations are considered: three from the conceptual field of additive structures and two involving multiplicative structures. The analyses indicate the existence of a certain difficulty in connecting the question with the data presented in the problem text; many students identified the operation to be used in the solution, but erred in the application of the conventional algorithm because they did not understand its functioning; some students were not able to explain their own solution procedures, but the researcher's questions helped them better organize their reasoning and explain this in words. Discussion of the procedures mediation by adjusted intervention on the part of the researcher is a important factor for the processes of learning mathematics.

Key words: resolución de problemas, estructura aditiva, estructura multiplicativa, capacidad de lectura, interacción

Introdução

O ensino da resolução de problemas tem se constituído um grande desafio para muitos professores da unidade escolar em que foi realizada esta investigação. As dificuldades que os alunos apresentam relatadas pelo grupo de docentes da referida escola, estão relacionadas à insuficiência na interpretação do texto típico de resolução de problemas relativa às operações. Sem dúvida, uma leitura proficiente de texto é condição para a resolução do problema. No entanto, hoje sabemos que para que os alunos desenvolvam a capacidade de resolver problemas não basta ter a habilidade de leitura, depende muito do tipo de trabalho matemático proposto em sala de aula. Citando Vergnaud, Mendonça; Pinto; Cazorla; Ribeiro

(2007, p.236) afirmam: "o resultado evidencia que não se trata de um problema de estruturas cognitivas do aluno, mas do ensino, pois segundo Vergnaud (1982) a expansão do campo conceitual aditivo passa necessariamente pelo processo de ensino".

Portanto, consideramos que o sucesso ou o insucesso na resolução dos problemas depende do domínio de algumas competências:

- de leitura, o que envolve questões linguísticas.
- de seleção de informações pertinentes no texto, considerando a pergunta a ser respondida.
- de busca do sentido da operação dentro da situação a ser resolvida.
- de resolução da operação, seja através de contagem ou de cálculo (e este, algorítmico ou mental).

Em relação ao aspecto linguístico, é sabido que apenas a tarefa de decodificar um texto não garante a sua compreensão e, nesse sentido, mesmo alguns dos alunos que desenvolvem uma leitura fluente deparam-se com as dificuldades na resolução, muitas vezes por não entender um conceito da própria língua nativa, assim como afirma Kleiman:

> A incapacidade de extrair informações do texto afeta todo o desempenho escolar da criança, que não tem a oportunidade de demonstrar todo o seu potencial, qualquer que seja a matéria: na aula de matemática, o problema de aritmética é insolúvel porque o texto é para ela ininteligível e não porque ela seja incapaz de multiplicar. (Kleiman, 2008, p.92)

As dificuldades podem estar relacionadas à incipiente construção dos conceitos das operações. O ensino de conceitos tem sido confundido com o ensino das técnicas operatórias convencionais. Nessas práticas, a ênfase é dada ao ensino de um único procedimento de cálculo, aquele mecânico sem uma reflexão sobre os números envolvidos, o que pode gerar uma consequência: a impossibilidade de o aluno buscar outras alternativas de resolução. A resolução de problemas, nesses casos, costuma ser introduzida após muito treino e exercitação dos tais algoritmos convencionais e os problemas então acabam por ser apenas um simples pretexto para aplicar as "contas" que foram aprendidas. Dessa forma, o texto em que se apresenta a situação-problema parece não se constituir um objeto de análise por parte dos alunos, bastando a estes apenas a aplicação da técnica operatória aprendida.

Dessa forma, a Teoria dos Campos Conceituais elaborada por Gèrard Vergnaud, traz importantes reflexões para que o ensino, de fato, possa contribuir na formação dos conceitos das operações pelos alunos.

Há que se considerar ainda o papel da interação para que os alunos possam realizar com ajuda, o que no momento não conseguem realizar de modo individual e assim provocar reestruturações e mudanças nos esquemas de conhecimento que tornarão possível uma futura atuação independente. (Onrubia, 1997) Nesse sentido, esse contexto em que há a interação é mediado pela linguagem, que segundo Vygotsky tratando-se de um instrumento, que juntamente com a experiência sociocultural é a base do desenvolvimento do pensamento (Vygotsky, 1987, p.44). Nesse sentido, a linguagem que se utiliza para se explicitar os esquemas favorece a tomada de consciência do conhecimento construído pelo aluno, permitindo uma reorganização das suas ideias e concretizando o processo metacogntivo.

Procedimentos Metodológicos

O trabalho foi realizado com uma turma de 3º ano (do ensino fundamental de 8 anos), composta por 34 alunos, com idade entre 8 e 9 anos de idade, sendo que todos dominam o sistema de escrita alfabética e realizam a leitura de forma autônoma.

Foram propostas a resolução de 5 situações-problema cujas orientações foram: a realização individual; utilização de qualquer procedimento para resolução (desenhos, esquemas, algoritmo convencional ou não); as eventuais dúvidas deveriam ser dirigidas à professora ou à pesquisadora, e recomendação para uma leitura cuidadosa dos enunciados selecionando as informações mais pertinentes à resolução das situações-problema.

Seguem as 5 situações cujos respectivos enunciados são comentados brevemente.

1. *Em um grande supermercado há três andares de estacionamento, e em cada andar trabalham 3 funcionários. No primeiro andar estão estacionados 21 carros da marca vokswagen, 12 da fiat e 13 da chevrolet. No segundo andar, 15 carros da volkswagen e 28 da chevrolet. Quantos funcionários trabalham nestes estacionamentos?*

Trata-se de uma situação de estrutura aditiva que foca a ideia de composição. Apresentam-se as partes (número de funcionários por andar) e pede-se para encontrar o todo (total de funcionários) – uma situação prototípica, no entanto há mais dados do que os necessários para a sua resolução. Esse tipo de proposição é pouco tratada na escola e, justamente por isso, foi introduzida no rol de enunciados para verificar como esses alunos lidam com essa situação em que precisam selecionar os dados para resolver problema.

2. *Um time de futebol dispõe de 3 modelos de camisetas, 4 cores de calções. De quantas formas diferentes este time pode se apresentar nos jogos?*

É um enunciado de estrutura multiplicativa que envolve a ideia de combinação. São apresentados dois tipos de coleções que precisam ser combinadas para responder qual é o produto dessas combinações.

3. *Júlia foi às compras no mercado municipal. Na banca de carnes gastou R$ 47,00, na de frutas gastou R$ 25 reais e na lanchonete gastou R$ 12,50. Ao chegar em casa verificou que ainda lhe havia sobrado R$ 13,50. De quanto foi a despesa de Júlia no mercado?*

Há uma ideia de transformação, mas com a pergunta colocada, a ideia predominante é a de composição, pois basta juntar as partes (quanto gastou em cada lugar) para se saber o todo (o gasto total). A hipótese é a de que os alunos podem se apoiar em palavras-chave (no caso, a palavra "gastou") para selecionar a operação que resolve o problema.

4. *Renato e João são atletas. Em uma prova, Renato correu 4 800 m e João 3550m. Quantos metros Renato correu a mais que João?*

Outro enunciado de estrutura aditiva, mas o sentido é de comparação. Há aqui também a presença da palavra "*mais*" que pode se constituir um fator que influencia no sucesso ou não da resolução (no caso daqueles alunos que se apoiam em palavras-chave para resolver os problemas).

5. *Sílvia precisa empacotar 156 bolinhas de gude, devendo colocar 12 bolinhas em cada pacote. Quantos pacotes ela precisará para empacotar todas as bolinhas?*

O enunciado próprio da estrutura multiplicativa traz a ideia de proporcionalidade. É um problema que canonicamente se resolveria por uma divisão.

Análise e discussão do desempenho dos alunos

Ao analisar a produção dos alunos, foram considerados dois aspectos: acerto na identificação da operação que resolve o problema e acerto no resultado da operação. Isso se faz necessário porque ocorre que muitos alunos colocam em ação esquemas pertinentes para a resolução, mas ao resolver a operação (contagem ou cálculo) cometem erros que produzem resultados incorretos.

Na sequência, apresentamos a descrição da ocorrência de acertos na resolução das situações-problema propostas.

Situação 1

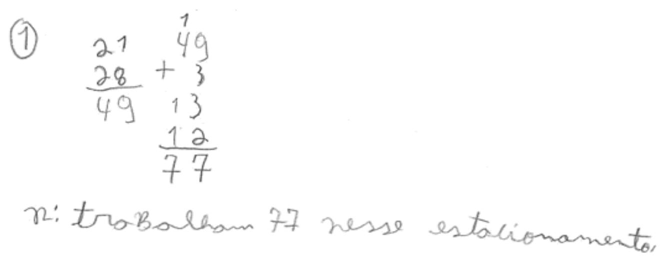
Ao iniciar a resolução, logo após a leitura do primeiro enunciado pelos alunos a dúvida maior que colocaram foi sobre qual objeto se procurava o todo, pelo fato da presença de grande quantidade de informações.

A seguinte pergunta dos alunos foi bastante recorrente:

" É para saber quantos carros tem no estacionamento?"

"O que precisa calcular?"

Esse fato parece revelar uma dificuldade em selecionar primeiro a questão que precisa ser respondida e depois de selecionar as informações que precisam ser tratadas para se planejar uma resolução. Também parece denunciar uma prática que se transmite – indiretamente – que sempre precisa utilizar todos os dados constantes no texto. Ocorre então que alguns dos alunos utilizaram todos os números que são apresentados no enunciado sem procurar um sentido para eles. E isso se revela na seguinte resolução:



No entanto, 21 alunos obtiveram acerto na resolução, mas 20 acertaram o resultado da operação.

Situação 2

A maior ocorrência de acertos foi observada no enunciado 2 (23 acertos na identificação da operação que resolve o problema e 22 no resultado da operação). Esse desempenho pode ser explicado segundo a informação da professora da turma de que é um tipo de situação que propõe com bastante frequência aos alunos. Dos 23 alunos que acertaram, 14 identificaram que a operação 3 x 4 resolveria o problema. E 9 alunos utilizaram-se de esquema de combinação de calção com camiseta.

Dos que erraram, 5 alunos fizeram a operação 3 + 4 = 7. Isso pode mostrar que esses alunos não atribuíram sentido nem à operação e nem aos números utilizados.

Situação 3

Apesar de haver no texto a palavra "gastou" que poderia induzir os alunos a utilizarem a operação de subtração, isso não ocorreu, certamente pelo fato de que os dados eram 3 valores (R$ 25,00, R$ 47,00 e R$ 12,50) e a palavra se repetia três vezes.

20 alunos identificaram a operação adequada, porém apenas 15 acertaram o resultado da operação.

Situação 4

Constataram-se 21 ocorrências de acerto na identificação da operação e 14 nos resultados da operação. Dos que erraram na identificação da operação, acredita-se que se orientaram pela palavra "mais", o que os levou a somar os dados.

Situação 5

Nessa situação-problema, a ocorrência de acerto na identificação da operação foi a menor: 16, e nem todos utilizaram a divisão. Muitos realizaram adições e uma aluna subtração, apelando para as representações figurativas como apoio para chegar ao resultado. Nesses casos, como ocorreu a contagem, muitos apresentaram erro no resultado.

Socialização das resoluções: importância para todos: alunos e professor

Uma segunda parte da aula foi planejada para que ocorresse uma discussão com a turma sobre as diferentes resoluções – corretas ou não. A aprendizagem dos conceitos matemáticos não ocorre apenas quando o aluno resolve as situações, mas também e fundamentalmente pela explicação que precisa elaborar para o outro sobre seu procedimento de resolução. Para isso o aprendiz precisa buscar justificativas e argumentar as suas escolhas, o que permite organizar seu conhecimento e tomar consciência do que já sabe (Onrubia, 1998).

A importância da socialização está também no fato de que outros alunos observam as diferentes formas para resolver o mesmo problema. Contribui ainda para que aqueles que ainda não conseguem ter uma autonomia para pensar em uma estratégia de resolução possam fazê-lo.

Ao professor, observar o procedimento e as justificativas permite identificar como os alunos estão se apropriando dos conceitos, o que traz indicadores importantes para pensar intervenções que façam com que construam novos esquemas. É preciso, portanto, um olhar atento para a produção que apresentam, porque muitas vezes é necessária uma intervenção local imediata, problematizando ou informando conforme a situação que se coloca. Como, por exemplo, quando uma criança explicou que resolveu o problema 2 com a adição 3 + 4.

P: Por que 3 + 4?

A: ...

P: O que vocês acham? Essa conta resolve o problema?

F: Não.

P: Por quê?

F: Porque ta perguntando de quantos jeitos o time pode se apresentar.

P: Serviria (essa conta) se a pergunta do problema fosse qual?

F: Se estivesse perguntando qual o total de camisetas e calções que o time tem. Aí sim, tinha que somar tudo.

P: Vocês ouviram, a F. disse uma coisa muito importante, que estaria correto se a pergunta do problema fosse quantas camisetas e calções o time dispõe, só que nesse problema a pergunta é outra, de quantas formas diferentes de uniforme, o time pode se apresentar?

Um olhar menos atento sobre as produções dos alunos pode implicar em uma análise equivocada de desempenho de alguns alunos. A produção da aluna Daniela, ao resolver a primeira situação registrou a operação 12 – 3, o que chamou a atenção da pesquisadora.

P: Explica como você fez D?

D: Fiz 12 – 3 que deu 9.

R: Eu fiz 3 + 3 + 3 que deu 9.

P: Por que você somou 3?

R: Porque o 3 são os funcionários por andar, e somei 3 vezes porque eram 3 andares.

P: Muito bem R. O resultado da D também deu 9, mas ela pensou de um outro jeito. Explica D. como você pensou.

D....

P: Deixa ver se eu entendi o que você fez. Me diga se foi assim mesmo que você pensou: parece que você já tinha feito de cabeça e tinha dado 9 não é?

D.: É, eu tinha feito 6 + 3.

P: Que tinha dado 9, e por que você pegou o 12 e tirou 3?

D: ...

P.: Vocês concordam que a conta era 12 – 3?

F: Não.

P. Mas o resultado deu 9.

F.: Mas não tem nada a ver "somar" 12 e 3, número de carro com número de funcionário!

Observar para além do registro produzido pelos alunos e colocar em ação uma intervenção ajustada faz-se necessário para o entendimento do que foi feito e do porque foi feito. É preciso considerar que a resolução do problema envolve o "fazer" e a socialização e discussão dos procedimentos do grupo de alunos torna explícita "as razões do fazer" (Quaranta e Wolman, 2006, p.126)

Considerações finais

Esta investigação mostrou que muitos fatores influenciam no desempenho dos alunos na resolução de problemas que envolvem as estruturas aditivas e multiplicativas. Embora boa parte dos alunos tenha identificado as operações adequadas para resolver os problemas, há também uma considerável parcela que não conseguiu essa identificação, o que indica a necessidade de uma continuidade no investimento de um trabalho matemático que vise a ampliação dos conceitos das estruturas aditiva e multiplicativa, e para isso um ensino que proponha não uma classe de situações, mas uma diversidade pois uma situação não se analisa com um único conceito.

Alguns alunos que identificaram a operação adequada, não conseguiram chegar à resposta correta por erro na utilização do procedimento do algoritmo convencional, uma possível consequência do ensino das operações baseado apenas na formalização do procedimento convencional. Porém, vale destacar que outros alunos não apresentaram um domínio do procedimento formal da operação e colocaram em ação esquemas traduzidos por uso de representações figurativas (como riscos, bolinhas etc.). Esse tipo de linguagem ajudou-os no raciocínio, no planejamento e no controle de uma sequência de ações sobre as quais ainda não tinham domínio (Vergnaud,1996) como na resolução da situação 5.

O papel da interação (professor-aluno, aluno-aluno) é fator de significativa importância na ampliação da competência dos alunos: é preciso planejar as intervenções ajustadas, olhando para além da produção dos alunos, procurando entender o que está por trás da produção. Sem dúvida, essa é uma competência que o professor precisa valorizar, pois é o faz pensar em boas perguntas para mobilizar os esquemas existentes no sentido de provocar os alunos para construírem novos esquemas, ou ainda para que possam tomar consciência do que sabem e acreditar no que sabem. Muitas vezes, a prática escolar estabelece um contrato didático que legitima e valida apenas uma forma de resolução e a crença de que os números a serem utilizados para operar devem estar presentes no enunciado.

Um último ponto a destacar é o fato de que, em algumas ocasiões, os alunos não conseguiram explicitar o próprio procedimento na resolução. Nesse caso, as perguntas feitas pela pesquisadora foram de extrema importância, porque muitas vezes oferecer esse andaime pode ser uma forma de desencadear um processo que ajuda a organizar melhor o raciocínio e permite a explicitação do mesmo por meio de palavras, o que não era possível até então. Provavelmente, sem essa fase planejada da pesquisa, os alunos que argumentaram não teriam vivenciado a oportunidade de mostrar seu conhecimento.

Referências bibliográficas

Kleiman, A. (2008). *Leitura: ensino e pesquisa* (pp.91-116) – Campinas, SP: Pontes.

Mendonça, T.M., Pinto, S.M., Cazorla, I.M., Ribeiro, E. (2007). As estruturas aditivas nas séries iniciais do ensino fundamental: um estudo diagnóstico em contextos diferentes. In *Revista Lationamericana de Investigación em Matemática Educativa* 10 (2), 219-239.

Onrubia, J. (1997). Ensinar: criar zonas de desenvolvimento proximal e nelas intervir. In C. Coll. (Ed.). *Construtivismo na sala de aula* (pp.123-151), São Paulo: Ática

Quaranta, M.E. e Wolman, S. (2006) Discussões nas aulas de matemática: o que, para que e como se discute. In: M.Panizza (org.), *Ensinar matemática na educação infantil e nas séries iniciais – análise e propostas* (pp. 111-142), Porto Alegre: Artmed

Vergnaud, G. (1996) A teoria dos campos conceituais. In: J. Brun (dir.) *Didática das matemáticas*.(pp.155-191), Lisboa: Instituto Piaget/Horizontes Pedagógicos.

Vygotsky, L.S. (1987) *Pensamento e linguagem*. São Paulo: Martins Fontes.

LOS MODOS DE PENSAMIENTO EN QUE EL CONCEPTO DE DIMENSIÓN FINITA DE UN ESPACIO VECTORIAL REAL ES COMPRENDIDO POR ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

Isabel Maturana Peña, Marcela Parraguez González
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso Chile
isamatup@hotmail.com, marcela.parraguez@ucv.cl

Resumen. El artículo que presentamos a continuación corresponde a una investigación en didáctica del álgebra lineal relacionada al concepto de dimensión de un espacio vectorial real finito; bajo la teoría de los modos de pensamiento de Anna Sierpinska (2000) como marco teórico y un diseño metodológico de estudio de caso múltiple. A partir de esta investigación se obtuvo información respecto al modo de pensar geométricamente los vectores, así como también su escasa relación con las estructuras matemáticas que sustentan al concepto de dimensión finita de un espacio vectorial real, por otra parte se pudo comprobar para los cinco casos considerados que el modo de pensamiento que los estudiantes privilegian es el analítico–aritmético, que corresponde sólo a una de los tres modos de pensamiento que según el marco teórico son necesarios para comprender el álgebra lineal.

Palabras clave: álgebra lineal, dimensión, modos de pensamiento

Abstract. The subject of this article is to investigate the linear algebra concept of dimension on a finite real vector space, under the theory of modes of thinking of Anna Sierpinska (2000) theoretical framework, and methodological design of multiple case study. As a result we obtained information about the geometrical way of thinking vectors, and the poor relation with the mathematical structures that support the concept of finite dimension of a finite dimensional real space. On the other hand, we found that of the five cases considered, the students privileged the analytical-arithmetical, being this just one of the three modes of thinking that are needed to understand the linear algebra, according to the theoretical framework under consideration.

Key words: linear algebra, dimension, modes of thinking

Problemática

El presente artículo en didáctica de la matemática tiene como ámbito matemático general el álgebra lineal, tema que según reconocidos investigadores en el área posee variadas dificultades, por ejemplo Dorier y su equipo (Dorier, Robert, Robinet, y Rogalski, 1997) hablan acerca del obstáculo del formalismo. Estos autores concluyen que: "para la mayoría de los estudiantes, este tipo de álgebra no es más que un catálogo de nociones muy abstractas que ellos nunca pueden imaginarse" (Dorier, Robert, Robinet, y Rogalski, 1997, p. 116). Dorier & Sierpinska (2001) han reportado que el discurso matemático escolar del álgebra lineal privilegia el tratamiento algorítmico a través de las llamadas técnicas de resolución, en desmedro de la comprensión conceptual. Parraguez en el 2009 nos recuerda en su tesis que:

> El estudio de la enseñanza del álgebra lineal en algunos programas universitarios, y el fracaso de una buena parte de los estudiantes al abordar los conceptos básicos de esta área ha motivado la creación de grupos de investigación en países como Canadá, Estados Unidos, Francia y México, entre otros. (Parraguez, 2009, p. 22).

Por otra parte, la formación matemática en tópicos de álgebra lineal en carreras de Ingeniería en Universidades Latinoamericanas es hoy y ha sido por muchos años un pilar esencial y siendo la temática del álgebra lineal muy amplia, focalizaremos nuestra atención en el concepto de dimensión de un espacio vectorial real finito. Posicionándonos desde la matemática, la cual se encuentra inmersa en una variedad de contenidos que la sustentan y que los sustenta. Por una parte es necesaria la comprensión de los conceptos matemáticos basales para el álgebra lineal, como el de espacio vectorial real, conceptos de dependencia e independencia lineal, conjuntos generadores, base, hasta finalizar con el concepto de dimensión, el cual dentro de nuestro contexto es un índice invariante que caracteriza clases de espacios a través de los números naturales.

El concepto de dimensión lo entenderemos dentro del álgebra lineal, pero es un tema que va más allá de estas fronteras deslindando con los orígenes del pensamiento geométrico. Desde lo intuitivo la dimensión de un sistema es el número de los parámetros independientes necesarios para describir un punto en el sistema, esta es una concepción próxima a la versión física del concepto. Por lo general, el primer acercamiento del concepto de dimensión de un espacio vectorial real finito se corresponde con la siguiente definición: "Se dice que un espacio vectorial *V* tiene dimensión *r* si tiene una base de *r* vectores de *V*" (Aburto, Johnson y Jiménez, 1996, p. 60).

Por otra parte, a pesar de la existencia de una amplia variedad de investigaciones en didáctica de la matemática relacionada con el tema de "álgebra lineal", y a los conceptos que ella involucra, no es posible encontrar información explícita en investigaciones sobre el concepto de dimensión de un espacio vectorial real finito. ¿Es posible que este concepto no ofrezca dificultades? Motivadas por esta pregunta plantearemos a la luz del marco teórico de los Modos de Pensamiento de Sierpinska, ¿Cuál es el modo de pensamiento en que estudiantes universitarios mayoritariamente comprenden el concepto de dimensión de un espacio vectorial finito? A continuación una breve reseña sobre el marco teórico.

Marco teórico. Modos de pensamiento

Los modos de pensamiento es un marco teórico de la didáctica de la matemática formulado por Anna Sierpinska, la cual sostiene que el desarrollo del álgebra lineal se inició como un proceso de pensar analíticamente acerca del espacio geométrico, considerando que desde una perspectiva muy general, se podrían distinguir, dos grandes pasos referidos a dos procesos: el primero la aritmetización del espacio, que tuvo lugar al pasar de la geometría sintética a la geometría analítica en $\mathbf{R}^n$ y el segundo la desaritmetización del espacio a su estructuración, con la que los vectores abandonan las coordenadas que los ataban a los números y se convierten en elementos abstractos cuyo comportamiento está definido por un sistema de axiomas. De esta forma Sierpinska (2000) define tres modos de pensamiento: el sintético-geométrico, el analítico-aritmético y el analítico-estructural, que pueden verse como el resultado de una superación de dos obstáculos: uno que rechaza los números dentro de la geometría y el otro, que rechaza que la "intuición geométrica" pueda ser llevada a un dominio puramente aritmético.

Cada uno de los tres modos de pensamiento en álgebra lineal utiliza un sistema específico de representaciones.

- El modo de pensamiento *sintético-geométrico* utiliza el lenguaje de las figuras geométricas, planos y líneas, intersecciones, así como sus representaciones gráficas convencionales.
- En el modo *analítico-aritmético* las figuras geométricas son entendidas como conjuntos de "n-uplas" de números que satisfacen ciertas condiciones que son escritas, por ejemplo, en la forma de sistemas de ecuaciones. En el modo analítico-aritmético, las componentes numéricas de los objetos geométricos, como puntos o vectores son importantes. Así, por ejemplo: una recta vectorial será reconocida por sus generadores, es decir $\ell_v = \langle (x_1, x_1, \ldots, x_n) \rangle$, donde $v = (x_1, x_1, \ldots, x_n)$.
- El pensamiento *analítico-estructural* va más allá de este tipo de análisis y sintetiza los elementos algebraicos de las representaciones analíticas dentro de conjuntos estructurales. Por ejemplo reconoceremos que un estudiante posee este modo de pensar, si a través del concepto de dimensión logra establecer que dos subespacios vectoriales son isomorfos.

Nos propusimos estudiar el modo de pensamiento que los estudiantes privilegian para comprender el concepto de dimensión de un espacio vectorial real finito, pero por lo que se ha expuesto es esperable que exista una tendencia hacia el modo de pensamiento analítico aritmético, producto de la facilidad que los procesos algorítmicos procuran; por otra parte parecería que el concepto de dimensión se ve restringido a esta realidad algorítmica, por la forma que toma su definición, la cual da cuenta de un simple conteo de vectores, pero la dimensión de un espacio vectorial real , a pesar de su simpleza es un indicador que es capaz de determinar por ejemplo: si dos espacios vectoriales son isomorfos.

Formulamos un cuestionario con el propósito de verificar cual es el modo de pensamiento que nuestros estudiantes privilegian para comprender el concepto de dimensión de un espacio vectorial real, con este propósito se enunciaron preguntas relativas a subespacios del plano y el espacio, para dejar abierto el camino a lo geométrico, además se incluyeron dos preguntas donde lo geométrico se escondió en apariencia al obstaculizar la forma de encontrar los generadores, con el fin de evidenciar si en la respuesta daba cuenta de lo que significa la aplicación del concepto de dimensión de un espacio vectorial, este tipo de pregunta posee un formato integrador, pues no es puramente aritmética-geométrica-estructural, es necesario integrar los tres modos de pensamiento para responder.

Diseño metodológico

Consideramos para desarrollar la investigación un enfoque metodológico cualitativo, pues está en relación directa con la naturaleza de la problemática a estudiar. Dentro del enfoque cualitativo optamos por un estudio de casos múltiple, dado que se centra en el estudio de dos o más sujetos, situaciones o depósitos de datos (Arnal, Del Rincón & Latorre, 1994), lo cual nos brindara el soporte científico necesario para sustentar nuestras conclusiones.

Para el diseño de la investigación se siguieron los pasos que a continuación detallaremos; un primer momento, para una aproximación de carácter fundacional, con la que formulamos las bases de la investigación, través de la administración de un cuestionario exploratorio, orientado a obtener antecedentes respecto de la caracterización de las variables de conocimiento, valoración y expresión del concepto en estudio, en la configuración conceptual del álgebra lineal, de ejercicio en los actores de la unidad de Estudio, (Tabla 1).

Tabla 1. Resumen de informantes y técnicas de recogida de información.

Tipo de estudiante	Curso	**Caso1** Ingeniería Civil (15 estudiantes)	**Caso2** Construcción Civil (10 estudiantes)
Universitario	Álgebra lineal	Cuestionario Entrevista Registros de observación	Cuestionario Entrevista Registros de oobservación

En un segundo momento, acceso al campo de carácter intensivo o en profundidad a 3 carreras –Licenciatura en matemáticas, Licenciatura en física e Ingeniería Civil Industrial –, permitiendo de esta manera una comprensión mas acabada de cómo el concepto de dimensión de un espacio vectorial real de dimensión finita es comprendida por un grupo de estudiantes universitarios, (Tabla 2).

Tabla 2. Resumen de informantes y técnicas de recogida de información.

Tipo de estudiante	Curso	Caso3 (Eg1) Lic. en Matemáticas (1 Estudiante)	Caso4 (Eg2) Ing. Civil ndustrial (1 Estudiante)	Caso5 (Eg3) Lic. en Física (1 Estudiante)
Estudiante Universitario de último año	Algebra Lineal Realizado hace más de un año.	Cuestionario Entrevista Registros de observación	Cuestionario Entrevista Registros de observación	Cuestionario Entrevista Registros de observación

Las unidades de estudio fueron trabajadas como "casos", y se vinculan a las siguientes 3 categorías: heterogeneidad de los estudiantes, diversidad de formación y accesibilidad de los investigadores.

Con el marco teórico y metodológico definido, nos propusimos diseñar instrumentos, cuestionarios, entrevistas y registros de observación de los mismos, para la generación de antecedentes que den luces de lo que podría estar sucediendo con la comprensión del concepto en estudio.

Instrumentos de recogida de datos

Para recoger y registrar la información, propia del estudio de caso múltiple, y acceder a la comprensión que tenían los estudiantes sobre la temática en cuestión, es decir el concepto de dimensión de un espacio vectorial real, optamos por la técnica de las entrevistas en profundidad, para el primer momento y para el segundo momento aplicamos un cuestionario, en forma individual, realizado a la luz del marco teórico con el propósito de generar antecedentes en los dos casos del primer momento de la investigación antes mencionados. Por otra parte hemos realizado entrevistas en profundidad. Con respecto al tipo de entrevista utilizado, optamos por una entrevista estructurada, que parte de un guión- cuestionario el cual se aplico en el estudio exploratorio (primer momento), de preguntas abiertas que se han delimitado en función del marco teórico los modos de pensamiento.

A continuación mostraremos una de las preguntas del cuestionario, adjuntando su análisis a priori.

Pregunta

Determinar la dimensión de V < **R³**, *si se sabe que:* $V = \left\{ (x, y, z) \in R^3 : x + y + z = 0 \right\}$.

La pregunta por un parte persigue un objetivo secundario, identificar la forma en que los estudiantes hacen el cálculo de la dimensión de un espacio vectorial, y por otro, identificar el modo de pensamiento puesto en juego. En otras palabras, mirar si los conceptos insertos en el álgebra lineal que anteceden al de dimensión, como dependencia lineal, base y espacio generado, impiden calcularla adecuadamente. Se plantea la pregunta, definiendo el subespacio vectorial de **R³** través de una ecuación lineal, en este caso esperamos que el estudiante encuentre una base para el espacio, comprobar que el conjunto propuesto es base, es decir el conjunto es linealmente independiente y genera el subespacio. Al tener el número de generadores tiene la dimensión del espacio.

A partir del modo de pensamiento analítico- aritmético entregamos la siguiente respuesta consideremos una base B_V para V, donde $B_V=\{(-1,1,0),(-1,0,1)\}$, es un conjunto linealmente independiente, que genera a V. En efecto $\langle(-1,1,0),(-1,0,1)\rangle\subset V$, también $V\subset\langle(-1,1,0),(-1,0,1)\rangle$, pues si $(x,y,z)\in V$, entonces $x+y+z=0$, de donde $x=-y-z$. Luego $\{(-y-z,y,z)\}\in V$, entonces $\{(-y,y,0)+(-z,0,z)\}\in V$, lo que implica que está en el subespacio generado. De esta forma es posible concluir que la $\dim V=2$, pues B_V posee dos elementos.

Al considerar la geometría en el espacio incluiremos el modo de pensamiento sintético-geométrico y de esta forma asociar la ecuación del plano que describe al espacio vectorial V como un subespacio de dimensión dos, concluyendo desde la geometría la dimensión del plano, bajo el supuesto que un plano posee dos vectores directores (generadores) que lo determinan.

Entre otras respuestas, esperamos de los estudiantes lo que sigue: (a) que determina la dimensión contando el número de ecuaciones que definen a V. En este caso particular es uno, (b) Determine una base para el subespacio, (c) Determine la dimensión a través del vector normal al plano y (d) Determine la dimensión de V restando al número de coordenadas, el número de ecuaciones.

Los momentos y las evidencias obtenidas

En lo que sigue mostraremos algunas de las respuestas de los estudiantes correspondientes al segundo momento de la investigación, con su respectivo análisis a posteriori.

Para dar respuesta a la pregunta Eg1 (estudiante caso 5) realiza los cálculos adecuados en la búsqueda de los generadores que conforman la base del espacio vectorial, (Figura 1).

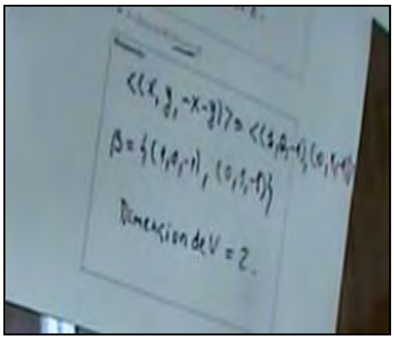


Figura 1. Cálculos pregunta 1.b)

Haciendo uso, del concepto de generadores de un espacio vectorial como recurso para la búsqueda de la base que le permita calcular la dimensión del espacio vectorial. Podemos decir que su respuesta adhiere al modo de pensamiento analítico –aritmético.

La respuesta de Eg3, caso 5; el estudiante trata de identificar la ecuación con un objeto geométrico, para ello se da puntos en el espacio, prediciendo en primera instancia que es una recta y por lo tanto debe tener dimensión uno. Al darse puntos se da cuenta geométricamente que no es una recta, por lo que la dimensión ya no es uno, concluye que la "figura" correspondiente a la ecuación que define al subespacio, que en realidad está asociada a la grafica de un plano, es dos.

Lo cual es correcto, su modo de pensamiento es claramente sintético – geométrico. La figura 2 muestra el instante en que el estudiante mediante la visualización, gráfica supone que el espacio definido por la ecuación $x+y+z=0$ es una recta y al darse puntos logra dudar de que lo sea.

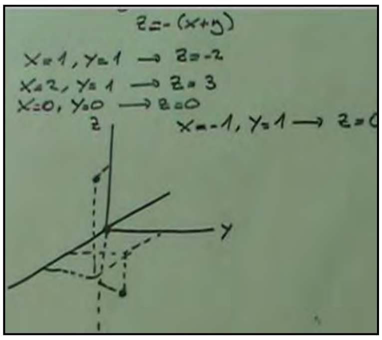


Figura 2. Tratando de ver una recta.

Hemos incluido esta respuesta, pues es una evidencia que el estudiante al poseer un sólo modo de pensamiento, sintético–geométrico, fue capaz de dar respuesta en forma adecuada a la pregunta, se podría pensar que al privilegiar el modo de pensamiento analítico– aritmético se obtienen respuestas adecuadas a las preguntas relativas al concepto de dimensión de un espacio vectorial real, pero ¿es suficiente el manejo de este único modo de pensamiento, para comprender el concepto de dimensión? A continuación algunas conclusiones.

Conclusiones a la luz de las evidencias

De acuerdo al trabajo realizado por los estudiantes en el cuestionario, tanto en el primer momento de la investigación, como en los tres casos del segundo momento, observamos que para este grupo de estudiantes hacen uso sólo de un modo de pensamiento para dar respuesta a las preguntas planteadas, siendo en forma preferente el modo de pensamiento analítico-aritmético. Además pone en evidencia la necesidad que los estudiantes conozcan las relaciones geométricas que originan los conceptos en el álgebra lineal, es decir, movilizar el modo de pensamiento sintético-geométrico a los otros dos –analítico-aritmético y analítico-estructural- con el propósito de comprender en su totalidad el concepto de dimensión finita de un espacio vectorial real.

Por otra parte un resultado importante que arrojó esta investigación para los casos de estudio, independiente que en su currículo contengan más o menos cursos de geometría, es que no existe una conexión entre los distintos modos de pensamientos al abordar los problemas de dimensión finita de un espacio vectorial real. Observamos también que los estudiantes utilizan un modo de pensamiento y no recurren a los otros aún cuando la situación matemática lo requiera. Asimismo los participantes en la investigación, evidencian dificultades en el modo de pensamiento analítico-estructural pues no consideran, por ejemplo, las propiedades generales de los subespacios vectoriales.

Para finalizar, queremos propiciar con esta investigación una breve reflexión sobre las estrategias para lograr que nuestros estudiantes realicen los tránsitos entre los diferentes modos de pensamiento, pues es sabido que durante el aprendizaje de los conceptos en matemáticas es usual que los estudiantes adquieran conocimientos mediante una serie de pasos, que observan y luego reproducen, lo que se traduce en una serie de técnicas algorítmicas las cuales lo encasillan en un solo modo de pensamiento, pero para comprender las definiciones es necesaria la reflexión, por esta razón proponemos plantear situaciones desconocidas para el estudiante, donde los algoritmos preestablecidos no sean suficientes, y que propicien el desarrollo entre los diferentes modos de pensamiento como una estrategia para adquirir los conceptos matemáticos, y en este caso el de dimensión de un espacio vectorial real finito.

Referencias Bibliográficas

Aburto, L., Johnson, R. y Jiménez, D. (1996). *Algebra Lineal.* Valparaíso: Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Arnal, J., Del Rincón, D. & Latorre, A. (1994). *Investigación Educativa: Fundamentos y Metodología.* Barcelona: Labor.

Dorier, J.-L., Robert, A., Robinet , R. & Rogalski, M. (1997). L'Algèbre Linéaire: L'obstacle du Formalisme à travers diverses recherches de 1987 à 1995. En J.-L. Dorier (Ed), *L'Enseignement de l'Algèbre Linéaire en Question* (pp. 105-147). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Dorier, J. & L. Sierpinska A. (2001). Research into the teaching and learning of linear algebra. In Derek Holton (Ed.), *The teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (pp. 255-273. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Parraguez, M. (2009). *Evolución Cognitiva del Concepto de Espacio Vectorial*. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

Sierpinska, A. (2000). On Some Aspects of Students' thinking in Linear Algebra. En Dorier, J. L. (Eds.), *The Teaching of Linear Algebra in Question* (pp. 209-246). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

LA COMPRENSIÓN DE LA DERIVADA EN ESTUDIANTES DE INGENIERÍA AGRONÓMICA. LOGROS Y DIFICULTADES

Silvia Vrancken, Adriana Engler, Daniela Müller
Facultad de Ciencias Agrarias. Universidad Nacional del Litoral Argentina
svrancke@fca.unl.edu.ar; aengler@fca.unl.edu.ar; dmuller@fca.unl.edu.ar

Resumen. Ante la necesidad de la búsqueda de elementos que permitan al alumno la construcción activa del conocimiento, decidimos abordar el estudio de uno de los conceptos del cálculo, la derivada. Nos propusimos estudiar las nociones que construyen los alumnos cuando interactúan con actividades articuladas en torno a la idea de variación y cambio, que promueven el manejo de diversos sistemas de representación.

Diseñamos e implementamos una secuencia de actividades para la introducción de la derivada. Con la finalidad de aportar datos a la valoración de la experiencia, preparamos una serie de preguntas que fueron incluidas en el examen parcial con el que debían evaluarse, entre otros, los contenidos desarrollados con la secuencia.

En este trabajo presentamos algunas de esas preguntas, un breve análisis de las mismas y un estudio, esencialmente cualitativo, de las respuestas de los estudiantes.

Palabras clave: pensamiento variacional, derivada, representaciones

Abstract. Given the need to look for elements that allow students to actively construct knowledge, we have decided to approach the study of one of the concepts of calculus, the derivative. We proposed to study the notions that students construct as they interact with activities articulated around the idea of variation and change, promoting the management of various systems of representation.

We've designed and implemented a sequence of activities for the introduction of the derivate. In order to provide data to the valoration of the experience, we prepared a serie of questions that where included in the mid term exam, in wich the contents developed with the sequence, were to be evaluated, among other things.

In this work we have shown some of this questions, a brief analysis of them and a study, essentially qualitative, of the students' responses

Key words: variational thinking, derivative, representations

Introducción

El cálculo es la matemática de la variación y el cambio. Esto lo convierte en necesario para modelar, explicar, predecir y cuantificar el movimiento. Sin embargo, en el sistema educativo actual, en general se ha perdido este enfoque y se han priorizado procesos de construcción y validación formales así como sus aspectos algorítmicos. Es común que el conocimiento se trate fuera de los contextos apropiados, presentando a los alumnos problemas estereotipados, desvinculados generalmente de la realidad. Esto potencia las dificultades, especialmente en el caso de carreras donde la mayoría de los estudiantes van a ser usuarios de la matemática y no matemáticos de profesión.

Toda esta situación se refleja en que, aunque aprueban los cursos de cálculo, no comprenden de manera satisfactoria los conceptos y no desarrollan adecuadamente los métodos de pensamiento propios de esta rama de la matemática, de manera de poder afrontar más adelante la solución de problemas de áreas específicas de sus carreras.

Ante la necesidad de la búsqueda de elementos que puedan hacer significativo el aprendizaje y permitan al alumno la construcción activa del conocimiento, decidimos abordar el estudio de una de las nociones básicas del cálculo diferencial, la derivada.

Numerosas investigaciones realizadas en el marco de la educación matemática señalan la importancia del desarrollo de ideas variacionales para la comprensión de este concepto.

> "Estudiar qué es lo que varía -y cómo- en fenómenos cambiantes permite dotar a la derivada de significados que se alejan del manejo de fórmulas de derivación, hecho al cual se suele limitar su enseñanza" (Buendía y Ordóñez, 2009, p. 8).

Enmarcamos nuestro trabajo en la línea del pensamiento y lenguaje variacional, que se interesa específicamente por los procesos del pensamiento que inciden en el estudio de la matemática del cambio.

> El pensamiento y lenguaje variacional estudia los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el medio social que le da cabida. Hace énfasis en el estudio de los diferentes procesos cognitivos y culturales con que las personas asignan y comparten sentidos y significados utilizando diferentes estructuras y lenguajes variacionales (Cantoral, Farfán, Cordero, Alanís, Rodríguez y Garza, 2003, p. 185).

Como marco de referencia para el análisis de los procesos cognitivos que se involucran en el pensamiento matemático consideramos la teoría de los registros semióticos de Duval (1998, 2008). Dado que los objetos matemáticos no son directamente accesibles por medio de los sentidos, es fundamental el papel que juegan las representaciones en la construcción de conocimiento matemático.

El autor señala que la comprensión integral de un objeto está basada en la coordinación de al menos dos sistemas de representación pertenecientes a registros diferentes. Manifiesta que llegar a adquirir conceptualmente un objeto matemático implica realizar procesos de conversión entre diferentes registros de representación, manifestados por la posibilidad de movilización y de articulación entre los mismos.

En este contexto, nos propusimos indagar las nociones, relacionadas a la derivada, que construyen los estudiantes cuando se formulan actividades articuladas en torno a la idea de variación y cambio, que promueven la utilización de diversos sistemas de representación.

Aspectos metodológicos

Diseñamos e implementamos una secuencia de actividades para la introducción de la derivada. No pretendimos un estudio teórico riguroso sino una presentación simple e intuitiva que tenga en cuenta las tres nociones físicas fundamentales: la variación, la razón de cambio media y la razón de cambio instantánea, y que explore la relación de estas últimas con la medida de la pendiente. La idea fue, siguiendo a Dolores (2007, p. 198):

> ...ubicar como eje rector de todo el curso de Cálculo Diferencial al estudio de la variación, de modo que la derivada no sea un concepto matemático abstracto sino un concepto desarrollado para cuantificar, describir y pronosticar la rapidez de la variación en fenómenos de la naturaleza o de la práctica.

La secuencia se llevó al aula con todos los alumnos cursantes de Matemática II de la carrera Ingeniería Agronómica de la Facultad de Ciencias Agrarias de la Universidad Nacional del Litoral. Los mismos ya habían aprobado o regularizado Matemática I, asignatura en la cual se desarrollan ampliamente los contenidos correspondientes a funciones.

Las observaciones de clase, el análisis de hojas de trabajo de los alumnos, el desarrollo de entrevistas nos permitieron analizar las producciones de los alumnos y estudiar las nociones que pusieron en juego al encarar las distintas situaciones. Con la finalidad de obtener más datos que aporten a la valoración de la experiencia, preparamos una serie de preguntas que fueron incluidas en el examen parcial con el que debían evaluarse, entre otros, los contenidos desarrollados con la secuencia.

Las preguntas se diseñaron para explorar los avances y obstáculos en el desarrollo del pensamiento variacional de los alumnos. Específicamente indagamos sobre el comportamiento variacional de las funciones relacionado a la noción de derivada. Pretendimos además identificar el tratamiento en los registros de representación verbal, numérico, gráfico y analítico, así como si existen rasgos de conversión entre ellos.

Algunos resultados obtenidos

Por razones de extensión mostramos sólo algunas actividades, un breve análisis de las mismas y un estudio, esencialmente cualitativo, de las respuestas dadas por 26 alumnos (de los cuales 16 resolvieron el tema I y 10 el tema II). Analizamos especialmente los aspectos concernientes a la interpretación física y geométrica de la derivada.

La derivada y su interpretación física

Pregunta 3 – TEMA I
Una epidemia azota a los habitantes de una ciudad y los médicos estiman que la cantidad de personas enfermas t días después del principio de la epidemia está dada por e(t).
i) Explique el significado de e(30) = 2700 y e' (30) = 90 en términos de la situación planteada. ii) ¿Por qué es significativo el signo de e' (30)?

A partir de una situación de cambio presentada en los registros verbal y analítico se pretende analizar qué conocen los alumnos respecto de la información que proporciona la derivada acerca de la función. La descripción verbal y escrita de los significados implica un acercamiento cualitativo al fenómeno, que permitirá sacar algunas conclusiones y hacer las primeras predicciones con respecto a lo que sucederá con los elementos involucrados con el transcurso del tiempo. Esperamos que, en las respuestas, los alumnos utilicen argumentos relacionados al significado de la derivada en el problema, en específico a cómo está creciendo la cantidad de personas enfermas en determinado momento. Pretendemos además determinar si realizan el tratamiento en los registros planteados o si convierten al gráfico.

Con respecto a e'(30) = 90, el 50% de los alumnos dio una respuesta aproximada. Uno de ellos escribió: *"A los 30 días de iniciada la epidemia la enfermedad se está propagando a razón de 90 personas por día"*.

Seis alumnos (37,5%) respondieron incorrectamente. Cinco de ellos confundieron el valor de la derivada con la imagen de la función en dicho punto. Uno expresó: "*La cantidad de personas enfermas a los 30 días es 90"*.

En relación al significado del signo de la derivada, seis alumnos (37,5%) se acercaron a la respuesta. Uno escribió: *"El signo muestra que la cantidad de personas enfermas está aumentando ya que es positivo"*.

Ocho alumnos (50%) dieron respuestas incorrectas.

Tres de ellos confundieron la interpretación del signo de la derivada con el crecimiento de la velocidad, o sea de la función derivada. Una de las respuestas fue: *"La derivada es positiva porque la velocidad con que se están enfermando las personas está creciendo"*.

Destacamos que, a pesar de las dificultades observadas, la mayoría intentó referirse al enunciado del problema, utilizando términos variacionales que describen el fenómeno. Todos los alumnos explicaron verbalmente, utilizando algunos la misma simbología presentada en el enunciado de la pregunta.

Pregunta 3 – TEMA II

Para combatir el smog, una compañía liberará en la atmósfera desde las 0 horas y durante un período de 12 horas diarias, cierta cantidad de toneladas de una sustancia química dada por la función $s(x) = 0{,}2x^2 + 2x$.

a) ¿Cuántas toneladas de la sustancia química habrá en la atmósfera desde que se empieza a liberar hasta dos horas después?

b) Determine $\frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{s(x_0 + \Delta x) - s(x_0)}{\Delta x}$ si $x_0 = 0$ y $\Delta x = 2$. ¿Cuál es el significado de esta cantidad en términos del problema?

c) Calcule $\frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{s(x_0 + \Delta x) - s(x_0)}{\Delta x}$. ¿Cuál es el significado de lo obtenido en términos del problema? ¿Cómo lo interpreta geométricamente?

d) Calcule $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{s(x_0 + \Delta x) - s(x_0)}{\Delta x}$. ¿Cuál es el significado de lo obtenido en términos del problema? ¿Cómo lo interpreta geométricamente?

e) ¿Qué concepto aplicó en el inciso anterior? ¿Cómo lo escribe simbólicamente?

Esta actividad se relaciona con la cuantificación de los cambios. Las diferencias permiten cuantificar los cambios de las variables, la razón de cambio promedio proporciona una aproximación a la rapidez de la variación, mientras que la razón de cambio instantánea permite la cuantificación exacta de la rapidez con que cambia una variable con respecto a la otra en cualquier instante y está asociada a la derivada de la función en un punto.

En general, los alumnos hicieron un tratamiento aceptable en el registro algebraico. Las mayores dificultades se detectaron en la interpretación de los resultados. En particular en el inciso d), todos hicieron el planteo del límite, mientras que sólo la mitad llegó al resultado correcto. Con respecto al significado, esperábamos que expresen de alguna manera que lo obtenido representa cuánto está cambiando la cantidad de sustancia con respecto al tiempo en $x = x_0$. Sólo dos alumnos (20%) interpretaron aceptablemente, aunque uno solo se refirió al fenómeno planteado. Tres alumnos (30%) relacionaron el límite con la cantidad de sustancia en un instante. Presentamos la respuesta de un alumno (Figura 1).

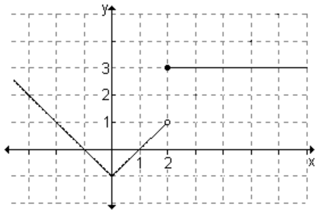
d) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{0{,}2(x+\Delta x)^2 + 2(x+\Delta x) - (0{,}2x^2+2x)}{\Delta x}$ el significado de esto es la velocidad instantánea con la que cambia la cantidad de sust. qca en toneladas presentes en la atmósfera en el instante x. En toneladas x hora. Geométricamente es la pendiente de la recta tangente a la gráfica en $(x; f(x))$

Figura 1

La derivada y su interpretación geométrica

Pregunta 2- TEMA I

Dada la función y = f(x) definida gráficamente, determine la derivada en x = –2 y x = 4. Explique cómo obtiene.



En esta pregunta esperábamos que los alumnos usen el mismo registro gráfico para explicar, recurriendo al comportamiento variacional de la función dada.

Sólo dos alumnos parecen haber trabajado de esa manera, relacionando la derivada con la pendiente de la gráfica en el punto. Ambos realizaron igualmente los cálculos de las pendientes. Esto no era necesario, ya que el segundo tramo es una función constante y para el primero está marcado el cuadriculado que permite fácilmente determinarla. Además cometieron errores. Mostramos un trabajo (Figura 2).

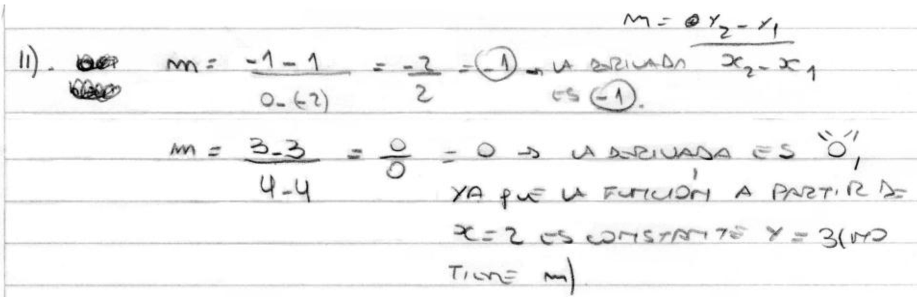


Figura 2

La mayoría (11 alumnos, o sea el 68, 75%) convirtió al registro algebraico para trabajar. Determinaron la ley de la función y calcularon la derivada en los valores pedidos.

No consideramos que no conocieran (por lo menos todos los alumnos) la relación con el comportamiento variacional de esta función, sino que les resulta más sencillo trabajar analíticamente o bien se sienten más cómodos o seguros justificando en este contexto.

Pregunta 5 – TEMA I

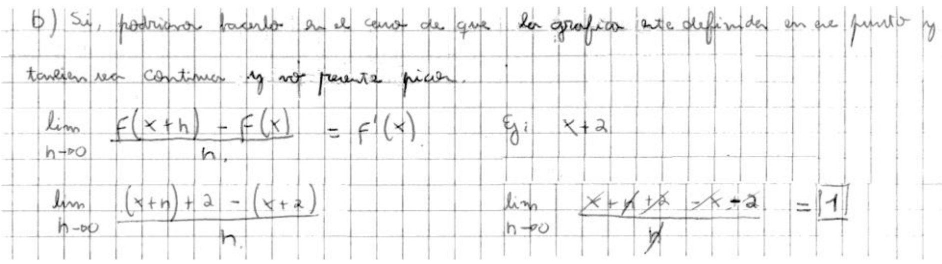
Disponemos de la representación gráfica de una función f y nos piden que calculemos la derivada de f en un punto, ¿podríamos hacerlo? En caso afirmativo, explique cómo lo haría y muestre con un ejemplo.

La pregunta indaga acerca de la interpretación geométrica de la derivada en un punto como la pendiente de la tangente a la gráfica en dicho punto. Esperábamos que los alumnos realicen el tratamiento verbal de la situación o conviertan al registro gráfico.

Tres alumnos trabajaron de esa manera y mostraron mucha claridad en sus explicaciones y ejemplos. Aprovecharon el cuadriculado de la hoja para determinar fácilmente la pendiente o graficaron una recta de pendiente cero y asociaron estos valores a la derivada. Esto nos muestra cómo relacionan la pendiente de la recta tangente con la dirección de la curva en un determinado punto y con la manera en que va cambiando la misma, aspecto fundamental desde el punto de vista variacional.

Las respuestas de otros dos alumnos fueron incorrectas, aunque mostraron tener conocimiento de la relación de la derivada con la recta tangente en un caso y con una pendiente en el otro e intentaron responder en el registro gráfico.

Casi el 50 % convirtió al registro analítico. Mostramos el trabajo de un alumno (Figura 3).


b) Sí, podríamos hacerlo en el caso de que la gráfica este definida en ese punto y también sea continua y no presente picos.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) \qquad Ej: x+2$$

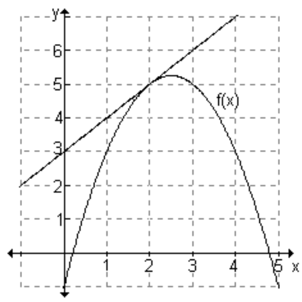
$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)+2-(x+2)}{h} \qquad \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x}+\cancel{h}+\cancel{2}-\cancel{x}-\cancel{2}}{\cancel{h}} = \boxed{1}$$

Figura 3

Pregunta 1 – TEMA II

¿Cuál es el valor de f ' (2)? Explique.

i) f ' (2) = 5	ii) f ' (2) = 3
iii) f ' (2) = –1	iv) f ' (2) = 1
v) f ' (2) = 3/5	vi) Otro: ....



En esta actividad, de opción múltiple, se presenta la representación gráfica de una función y la recta tangente en determinado valor del dominio. Se solicita el valor de la derivada en dicho punto. La respuesta implica dos actividades fundamentales. La primera y más importante, la correlación entre la derivada y la pendiente de la recta tangente. La otra, la obtención de la pendiente a partir del gráfico dado.

Como señalamos en la actividad anterior, para que el concepto de pendiente contribuya a la formación del pensamiento variacional, debe procurarse la comprensión de su estrecha relación con la razón de cambio. La conceptualización de la pendiente a partir de la razón de cambio entre los incrementos de magnitudes posibilitará, posteriormente, la comprensión del proceso aproximativo que subyace a la construcción de la derivada.

Está planteada en el registro gráfico y esperábamos que los alumnos puedan responderla realizando el tratamiento en este mismo registro. Cinco alumnos (50%) respondieron y explicaron correctamente. Sólo tres explicaron verbalmente a partir de lo que observaron en la gráfica. Los otros dos apoyaron su justificación determinando la ecuación de la recta (convirtieron al registro analítico). Mostramos una de las respuestas (Figura 4).

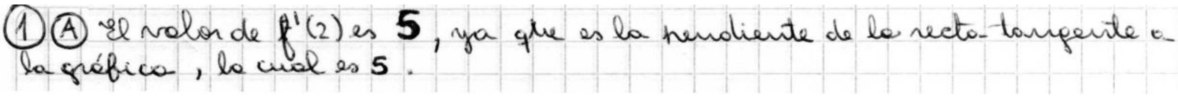

1 A El valor de $f'(2)$ es 5, ya que es la pendiente de la recta tangente a la gráfica, la cual es 5.

Figura 4

Cuatro alumnos seleccionaron la primera opción. Dos de ellos mostraron conocer la interpretación geométrica de la derivada, pero no la pudieron utilizar en el registro planteado. Los otros dos tuvieron más dificultades, relacionaron con la recta tangente pero no específicamente con la pendiente. Un alumno no respondió.

Análisis global de los resultados y reflexiones

Haciendo una revisión general de las actividades de los dos temas, notamos resultados dispares en las distintas actividades.

Las preguntas 3 del tema I y 3d) del tema II están planteadas en un contexto físico, esperando que los alumnos relacionen la derivada con la velocidad instantánea. En la primera de las actividades, el 50% dio una respuesta aceptable, mientras que en la otra, sólo el 20% interpretó como una razón de cambio instantánea y la mitad de ellos relacionó con el problema. Les costó reconocer y analizar el significado de la expresión analítica.

Las preguntas 2, 5 del tema I y 1 del tema II están diseñadas para explorar la correspondencia que los alumnos pudieran establecer entre la derivada y algún aspecto relacionado con la interpretación geométrica.

En la pregunta 2 del tema I, los alumnos podían dar la respuesta directamente en el registro gráfico, observando el comportamiento variacional de la función. En ambos tramos de la función el crecimiento es constante, por lo que la razón de cambio es la misma en cualquier intervalo y en cualquier punto.

Sólo dos alumnos (12,5%) intentaron trabajar con la pendiente, aunque tuvieron dificultades. Casi el 70% convirtió al registro analítico, determinando la ley de la función y obteniendo la derivada por definición o reglas prácticas. El 43,75% lo hizo correctamente.

En la pregunta 5 del mismo tema se explora la determinación de la derivada en el registro gráfico. Esto exige relacionarla con la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto.

Sólo el 18,75% explicó correctamente trabajando en este registro. Varios alumnos expresaron que obtendrían la ley de la función graficada y a partir de ahí con definición o reglas calcularían la derivada.

En la pregunta 1 del tema II, el 50% de los alumnos relacionó la expresión obtenida con la pendiente de la tangente. Notamos que sólo el 30% explicó verbalmente según lo observado en el gráfico. Los demás buscaron la ecuación de la recta o determinar su pendiente.

Consideramos que estos resultados confirman lo reportado por otras investigaciones (Cantoral y otros, 2003). Los alumnos están más acostumbrados a utilizar procedimientos analíticos y algorítmicos, dejando de lado los argumentos visuales, que además, son de mayor dificultad cognitiva. Creen que estos aspectos son los esenciales y de esa manera trabajan también en las evaluaciones.

A pesar de las dificultades, los resultados obtenidos nos manifiestan que los alumnos han logrado avances importantes, en el sentido de llegar a construir una noción de derivada con significado. Mostraron una evolución positiva en la comprensión de las nociones y de las interpretaciones de las mismas en diferentes registros. En distintos momentos utilizaron estrategias de trabajo que implican el uso del pensamiento y lenguaje variacional.

Los avances se observaron de manera significativa en el desarrollo de los temas posteriores. Pudimos observar claramente cómo los alumnos lograron asociar la derivada con la variación, dejando de lado un tratamiento abstracto y estático, avanzando mucho más allá de la asociación de la derivada con un límite.

Referencias bibliográficas

Buendía, G. y Ordóñez, A. (2009). El comportamiento periódico en la relación de una función y sus derivadas: significados a partir de la variación.En R.M. Fárfan, J. Lezama y E. Oaxaca (Eds.), *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 12* (1), 7-28.

Cantoral, R.; Farfán, R; Cordero F.; Alanís, J.; Rodríguez R. y Garza A. (2003). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Trillas.

Dolores, C. (2007). La derivada y el Cálculo. Una mirada sobre su enseñanza por medio de los textos y programas. En C. Dolores, G. Martínez, R. Farfán, C. Carrillo, I. López y C. Navarro (Eds.). *Matemática Educativa. Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula* (pp. 169-204). México: Ediciones Díaz de Santos.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.). *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (2008). Eight problems for a semiotic approach in mathematics education. En L. Radford, G. Schubring and F. Seeger (Eds.), *Semiotics in mathematics education: epistemology, historicity, classroom, and culture* (pp. 39-62). Rotterdam: Sense Publishers.

SIGNIFICADOS INSTITUCIONALES DE REFERENCIA DE LOS POLINOMIOS EN EDUCACIÓN MEDIA GENERAL

Dorenis Mota, Mario Arrieche
Universidad de Carabobo y Universidad Pedagógica Experimental Libertador-Maracay Venezuela
dorenismota@yahoo.es, marioarrieche@hotmail.com

Resumen. Se presentan algunos resultados de una investigación titulada "significados institucionales de los polinomios en Educación Media General" que se está desarrollando en Venezuela. Se caracterizan los significados institucionales de referencia de los polinomios, describiéndose aquellos elementos históricos y epistemológicos que hicieron posible su concepción actual. Como referente teórico se emplearon herramientas del modelo ontológico y semiótico de la cognición e instrucción matemática propuesto por Godino (2003) como la noción de significado institucional de referencia, las entidades primarias que dan lugar a un objeto matemático y las configuraciones epistémicas que surgen a partir de la interacción entre esas entidades. Metodológicamente es un estudio interpretativo de corte documental. Entre los hallazgos se destacan la evolución del lenguaje algebraico (notación de los polinomios a través del tiempo), la noción de variable, exponente y el cálculo de raíces de polinomios.

Palabras clave: polinomios, historia de la matemática, epistemología, modelo ontológico y semiótico

Abstract. In this article they present some results of a titled investigation " institutional meanings of the polynomials in a Medium General Education " which is developing in Venezuela, in this opportunity there are characterized the institutional meanings of polynomial's reference, those historical and epistemological elements have been described that made possible his current conception. Since theoretical modal tools of the ontological and semiotic model of the cognition and mathematical instruction proposed by Godino (2003) as the notion of institutional meaning of reference, the primary entities are giving a place to a mathematical object and the epistemic configurations that are formed from the interaction between those entities. Methodologically it is an interpretive study of documentary cut. Between the findings they emphasize the evolution of the algebraic language (notation of the polynomials across the time), the notion of variable, exponent and the calculation of roots of polynomials.

Key words: polynomials, history of mathematics, epistemology, ontological and semiotic model

Introducción

La realización de un análisis histórico-epistemológico sobre los polinomios, permitirá clarificar la naturaleza y los diversos significados que puedan ser atribuidos a este objeto matemático a lo largo del tiempo, (Godino, 2003; Arrieche 2002; Arrieche, 2010), ya que se dará respuesta a interrogantes como: ¿Cuál es el origen de los polinomios? ¿Cómo ha evolucionado a lo largo del tiempo este objeto matemático? ¿Cuál es la importancia que tiene para la matemática y como aplicación a otras ciencias?

En las próximas páginas se le espera dar respuesta a las interrogantes del párrafo anterior, no sin antes aclarar que dichas respuestas no son absolutas, puesto que estarán inevitablemente afectadas por la subjetividad del investigador y de los documentos bibliográficos que se emplearon para tal fin. En este caso se realizó una revisión de libros de historia de la matemática, trabajos de investigaciones de Maestría afines, tesis doctorales, memorias de eventos sobre investigaciones en didáctica de la matemática y revistas digitales e impresas.

El material fue analizado utilizando categorías propuestas por el modelo Ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática, entre estas, la noción de significado institucional de referencia que responde a aquellos textos matemáticos correspondientes a un objeto matemático, a orientaciones curriculares y, de manera general, a la consideración de los expertos sobre tal objeto; grosso modo, en esta oportunidad, es el conocimiento válido para las instituciones matemáticas y didácticas. Para describir el significado de referencia de los polinomios se recurrió a libros de historia de la matemática, trabajos de grado de Maestría, tesis doctorales, artículos científicos, entre otros, todos relacionados con la historia de los polinomios. El análisis del material consultado se hizo mediante el uso de las entidades primarias (situación problema, acciones o procedimientos, conceptos, propiedades, argumentaciones y lenguaje) que son elementos de ese significado; por último, y no menos importante, está el constructo de configuración epistémica que se forma cuando esas entidades interactúan entre sí y le dan sentido a la actividad matemática. (Godino, 2002).

Origen y evolución de los polinomios

Los polinomios están presentes prácticamente en los primeros registros matemáticos de los que se tiene conocimiento; y eso se hace evidente en el cálculo de ceros o raíces de polinomios que forman parte de los problemas más antiguos conocidos, estos problemas se han encontrado en el estudio de la matemática de civilizaciones antiguas, entre ellas Babilonia y Egipto.

De Babilonia puede afirmarse que la resolución de los ceros de polinomios de grado dos y tres constituyó un logro que vale la pena señalar, no únicamente por el alto nivel de habilidad técnica sino también por la madurez y flexibilidad de los conceptos algebraicos que intervienen en el proceso si se toma en consideración que los babilonios no empleaban la simbología utilizada actualmente, así "El álgebra babilónica alcanzó un nivel de abstracción tan extraordinario que las ecuaciones $ax^4+bx^2=c$ y $ax^8+bx^4=c$ fueron consideradas correctamente como simples ecuaciones cuadráticas disfrazadas, es decir, como ecuaciones cuadráticas en x^2 y x^4" (Boyer, 1986, p. 58). En ese mismo orden de ideas, Pastor y Babini (2000) señalaron que, desde el punto de vista matemático, la resolución de esas ecuaciones lineales y cuadráticas son las novedades más relevantes de los textos babilónicos.

En relación a la civilización egipcia, vale la pena destacar el carácter práctico que predomina en los Papiros egipcios estudiados, cuyo elemento principal es el cálculo numérico de cuestiones específicas planteadas. Parece que el objetivo estuvo dirigido a facilitar o justificar los procedimientos empleados más que a la búsqueda del por qué de las teorías implícitas, por lo tanto no existen generalidades sino el estudio de casos muy concretos. (Ortega, 2002).

Por su lado, historiadores como Bell (1985) mencionan que los griegos tenían que haber conocido de alguna manera el álgebra babilónica para avanzar en su matemática, pero no hay evidencia concreta de ello, lo cierto es, que gracias a los aportes de estos últimos hubo un gran avance no sólo en el álgebra sino en el desarrollo de la matemática misma.

Muchos de estos avances se le atribuyen a matemáticos de la época, entre ellos está Diofanto, al respecto Boyer (1986) asegura que la diferencia existente entre la sincopación diofántica y la notación algebraica moderna está en la ausencia de simbología para las operaciones y para la notación exponencial y en las relaciones, lo que le da el título a Diofanto de ser considerado "el padre del álgebra". Bell (1985) por su parte asegura que Diofanto no solamente hizo aportaciones en la notación algebraica, además de plantear soluciones a problemas de esta disciplina. A diferencia de la solución que muchos planteaban a esos mismos problemas de forma geométrica, dichos problemas estaban relacionados con el cálculo de las raíces de polinomios de primer grado con dos o tres incógnitas. Otro matemático griego que influyó considerablemente en el origen del álgebra fue Euclides, en su trabajo puede evidenciarse la relación de ciertas expresiones polinómicas con la geometría, donde problemas relacionados con el cálculo del área de ciertos rectángulos fueron determinantes.

En China se han encontrado documentos que confirman la contribución de esta civilización a la consolidación del álgebra, y por consiguiente a la de los polinomios. Estos documentos son los de Chi´n Chiu-Shau (siglos X y XI) y Chu Shin-Chieh (siglo XIV), el primero destaca en su obra (las nueve secciones de matemática) problemas relacionados con agricultura, agrimensura, ingeniería, impuestos, entre otros, en los que se resuelven ecuaciones algebraicas tanto determinadas como indeterminadas, empleando cierto simbolismo rudimentario, cuya forma de resolución era parecida a la que actualmente se le conoce con el método de Ruffini-Horner. El segundo estudia ecuaciones y sistemas hasta de grado 4 en el tratado titulado "el precioso espejo de los cuatro elementos", allí hace uso de un triángulo conocido hoy en día como triángulo de Pascal, y se emplea un método para hallar las raíces de los polinomios de diferentes grados llamado fan-fa que consiste en la aplicación de cambios de variables.

En cuanto a la matemática hindú, se tiene que contribuyó significativamente al lenguaje algebraico ya que fue precursora del álgebra sincopada; los hindúes diferenciaban los números positivos y negativos, que eran interpretados como créditos y débitos para los que existían símbolos específicos, permitiéndoles unificar así las ecuaciones de segundo grado en un tipo único, sin importar el valor de los coeficientes y donde se podían admitir soluciones negativas sin problema alguno, aunque no se tomaban en consideración. Entre los matemáticos hindúes de mayor trascendencia por los trabajos que realizaron en relación al álgebra se pueden mencionar Brahmagupta (siglo VII) y Bhaskara (siglo XII).

En tanto la matemática árabe, partiendo del trabajo de Al-Khowarizmi, quien motivado por los problemas de la época relacionados con leyes y herencias, escribió el Al-jabr sin sospechar que la influencia de su trabajo trascendería y se diseminaría por toda Europa años más tarde perdurando por largo tiempo. Gracias a las traducciones del nombre de Al-Khowarizmi al latín nace la palabra algoritmo, con la que hoy se designa a todo aquel procedimiento matemático empleado en la resolución algebraica de cualquier problema o ejercicio, y de su obra heredamos la palabra álgebra, que también constituye en el presente el nombre una de las ramas de esta Ciencia formal. En la obra de Al-Khowarizmi se muestran problemas de distinta naturaleza, y eso se le atribuye quizás a la influencia de la matemática babilónica, egipcia y griega en esta civilización, ya que los problemas allí planteados recogen los aspectos conocidos por esas civilizaciones. Otro matemático que dejó huellas en la matemática árabe fue Omar Khayyam (1050-1123) quien extendió la obra de Al-Khowarizmi al hallar de forma geométrica (usando intersección de secciones cónicas) las raíces de polinomios de grado tres.

En relación a la matemática desde la época Medieval hasta el Renacimiento, se tomarán en cuenta algunas reflexiones que Ortega (2002) hace al respecto donde señala que el trabajo matemático de esos siglos estuvo motivado originalmente por la necesidad de estudiar más a fondo las obras de la matemática griega que llegaron a manos de muchos matemáticos gracias a la imprenta, pero no se pueden descartar las motivaciones de tipo práctico (los comerciantes y los contadores se planteaban problemas de cálculo, los artistas presentaban dilemas para ser resueltos geométricamente, entre otros). Sin embargo, más allá de esto último, se cree que el factor que influyó considerablemente en el desarrollo del álgebra en esa época fue el estilo.

> […] casi deportivo que acicateó a los matemáticos para desafiarse públicamente. Como en ningún otro momento de la historia, estas competencias llegaron incluso a motivar al público en general y el aspecto lúdico de la matemática tuvo un papel importante entre las motivaciones que hicieron avanzar las teorías matemáticas. (Ortega, 2002, p. 43)

Entre los matemáticos que tuvieron protagonismo en esta época por su destacado trabajo en el campo del álgebra, y más específicamente en la resolución de polinomios de grado uno, dos tres y cuatro, están: Leonardo Pisano mejor conocido como Fibonacci, Sciope del Ferro, Antonio María Fior, Niccoló Fontana o Tartaglia, Gerone Cardano, Ludovico Ferrari y Rafael Bombelli.

Para finales del siglo XVI y el desarrollo del siglo XVII, floreció el álgebra simbólica, mediante los trabajos de François Viète (1540-1603), Thomas Harriot (1560-1621) y René Descartes (1596-1650) y, como era de esperarse con ese desarrollo, también estuvo involucrada intrínsecamente la evolución de los polinomios. El trabajo de Viète tuvo un gran impacto para otros matemáticos debido al uso de simbología en la solución de los problemas que se planteaba, por ejemplo, fue el primero en designar las primeras letras del abecedario para los valores conocidos y las últimas para las incógnitas (tal como se usan actualmente). Entre esos matemáticos, que fueron influidos por Viète, estuvo Harriot a quien se le atribuye no sólo la continuidad del uso del simbolismo que tomó de Viète sino la introducción de otros tales como los que representan la relación de orden entre cantidades (mayor que > y menos que <). Así mismo Descartes, también da aportes interesantes al álgebra y a los polinomios en su obra *Géometrie*, donde resuelve problemas que involucran el cálculo de raíces de polinomios de grados mayores que dos, empleando propiedades novedosas para la época.

Luego de estas aportaciones, según Bell (1985), no parece haber una contribución importante hacia los polinomios hasta el siglo XVIII cuando matemáticos como Tschirnhaus (1651-1708) se preocuparon por hallar una solución general de tipo racional para el cálculo de raíces de funciones polinómicas de cuarto grado, pero sin tener éxito en las de quinto grado. Un siglo después, aproximadamente en 1786, Bring (1736-1798) redujo la ecuación general de quinto grado a la forma de trinomio $x^5+ax+b=0$, sustentándose en una demostración de Tschirnhaus con coeficientes afectados de una raíz cúbica y de tres raíces cuadradas, resultando de gran importancia para la solución de la ecuación de quinto de grado de manera trascendental.

Posteriormente Euler resolvió la ecuación general de cuarto grado por un método distinto al de Ferrari en 1770 pero, al igual que Tschirnhaus, no tuvo éxito con las que quinto grado. Entre los años de 1770 y 1771 Lagrange intentó resolver la ecuación general de cuarto grado con nuevos métodos a los acostumbrados y parecía que había encontrado una expresión general hasta que, topándose con una ecuación de quinto grado, no pudo reducirla, al contrario, su grado aumentó en un valor; no obstante parece no haber notado que estas ecuaciones no tendrían solución por ese camino.

En este momento histórico surgió una importante reestructuración del álgebra y de los polinomios como consecuencia del incremento de científicos interesados en esta ciencia, provenientes principalmente de países como Inglaterra, Francia y Alemania, Italia, Rusia, Suiza y los Países Nórdicos y Estados Unidos. Pérez (2004) afirma que dicha reestructuración se inicia con el teorema fundamental del álgebra cuya demostración rigurosa del mismo se le atribuye a Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Sin embargo, esta demostración no fue tan precisa como la que mostró Argand luego en 1806.

En esta época la preocupación seguía siendo la manera de hallar la solución general a ecuaciones polinómicas de un grado mayor al cuarto grado, a la cual Gauss también hizo su contribución dando una respuesta a la ecuación $x^n-1=0$ con n primo impar, con la aparición de grupos cíclicos; es así como Ruffini (1765-1822) plantea la imposibilidad de resolver la ecuación de quinto grado pero sin lograr demostrar tal planteamiento. En tanto Abel (1802-1829), después de encontrar el error en lo que creyó era la solución de estas ecuaciones mediante radicales, demostró definitivamente la imposibilidad de resolver esas ecuaciones mediante radicales empleando argumentos más poderosos que los usados por Ruffini. Este resultado fue el inicio de la teoría de Galois (1811-1832) quien estudió las relaciones existentes entre las raíces de los polinomios.

Algunas aplicaciones de los polinomios

Desde entonces hasta hoy en día, los polinomios constituyen una herramienta dentro de la misma matemática y para el desarrollo de otras ciencias. En problemas intramatemáticos podemos citar, por ejemplo, la relación de los polinomios en geometría donde éstos intervienen en el cálculo del área de ciertos polígonos y del volumen de algunos sólidos, también existe un fuerte vínculo entre los polinomios y el cálculo diferencial e integral, y esto se hace evidente en tópicos como límites, integrales y ecuaciones diferenciales. En el caso de otras ciencias, por mencionar algunas, se ve una fuerte influencia de los polinomios modelizando problemas en el área de la física, la tecnología, la biología, la administración, entre otros. Cabe destacar que esto es sólo una muestra de la cantidad de aplicaciones que este contenido algebraico ha tenido en el desarrollo de la matemática y de otras áreas del saber científico.

Síntesis y conclusiones

A manera de síntesis se presentará en el Cuadro No 1 las configuraciones epistémicas de las principales civilizaciones involucradas en el origen y la evolución de los polinomios, así como algunas de las aplicaciones que se le dan a este objeto matemático en la actualidad; ello se hará tomando en cuenta las entidades primarias (lenguaje, situación problema, acciones, conceptos, propiedades y argumentaciones) extraídas del Enfoque Ontológico y Semiótico de la cognición e instrucción matemática (Godino, 2003).

Cuadro No 1: Configuración epistémica de los polinomios.

ENTIDAD PRIMARIA / CIVILIZACIÓN		LENGUAJE	SITUACIÓN PROBLEMA	PROCEDIMIENTOS	DEFINICIONES/ PROPIEDADES	ARGUMENTACIONES
BABILONIA		Retórico (netamente verbal)	De aplicación: cálculo de área, agrimensura, comercio. Con sospecha de alguna actividad de carácter recreativo.	Uso de tablillas con respuestas aproximadas, método de "sustitución" y completación de cuadrados.	Área, largo, ancho, no obstante no estaban explícitos como tal.	No se evidenciaban, al parecer los problemas se trataban de casos particulares.
EGIPTO		Escritura hierática o sagrada. Tosca representación gráfica.	Relativos a la aritmética, cálculo de cantidades. Longitudes relacionadas con situaciones de su cotidianidad.	"falsa posición" o "regula falsi", factorización, adición de fracciones (los dos últimos para algunos problemas)	Cantidad, igualdad de cantidades. Altura, largo, ancho y volumen de ciertas figuras geométricas.	No se evidenciaban, al parecer los problemas se trataban de casos particulares. Es decir, sin generalización alguna.
GRECIA	HELÉNICOS Y HELENÍSTICOS	Retórico y geométrico	De tipo geométrico al parecer propuestos por mera curiosidad matemática.	Proposiciones del libro de Euclides	Área, figuras geométricas planas: cuadrado, rectángulo.	Los problemas eran particulares, pero alguno de ellos relacionados entre sí que suponían algún tipo de generalización.
	DIOFANTO	Sincópado: empleo de primeras notaciones algebraicas.	Aritméticos relativos al cálculo de raíces de grado uno, dos y tres.	Método diofántico.	Conservación de la igualdad, números positivos,	Parece algún tipo de analogías en varios de los problemas pero no se evidencian indicios de axiomatización.
CHINA		Sincópado	Relativos a la agrimensura, agricultura, compañía, ingeniería, impuestos, cálculo, resolución de ecuaciones y propiedades de los triángulos rectángulos.	El método del Fan fa conocido posteriormente como el método de Horter-Ruffini.	Elementos de una ecuación: variable, exponente, coeficiente y cambio de variable o transformación.	Los Chinos reconocían el gran alcance y la generalidad del método fan fa mediante el trabajo de Chu Shih-Chieh
INDIA		Sincópado	Los problemas involucran la resolución de ecuaciones cuadráticas o cálculo de raíces de polinomios de segundo grado, al parecer motivados por el deseo del desarrollo de la matemática como un arte.	Se halla la fórmula general de la ecuación lineal $x=p+mb, y=q-ma$, donde m es un entero arbitrario sabiéndose que el máximo divisor de a y b debe dividir a c, y a y b son primos entres sí. También se estudia la ecuación cuadrática de Diofanto $x^2=1+py^2$.	Se manejan los números negativos como parte de la solución, se tiene noción de números primos, máximos divisores, números enteros.	Se asumen algunas generalidades, ya que se aplica un mismo método (hallar una solución a partir de otra solución ya conocida) a varias ecuaciones similares.
ARABIA		Retórico (un paso atrás en el simbolismo)	Problemas relacionados con las leyes que regían la herencia de la época, también existía una motivación por el desarrollo de la matemática como expresión del arte y en algunas ocasiones se escribían los problemas en forma poética.	Completación de cuadrados, intersección de secciones cónicas (polinomios de tercer grado)	Conocimiento de la representación gráfica de ciertas curvas (secciones cónicas) y el vínculo de estas con expresiones polinómicas de tercer grado.	No se especifican generalidades, se toman en cuenta sólo problemas particulares y de distintas naturaleza (aritmética, algebraica, geométrica).

EUROPA MEDIEVAL (SIGLO XIII) HASTA EL RENACIMIENTO (SIGLO XV Y XVI)	Retórico - Sincópado	El interés era encontrar la solución general para el cálculo de raíces de polinomios de grado tres y cuatro motivados por el carácter competitivo.	Reducción de polinomios de grado tres a polinomios de grado dos mediante el cambio de variable y sustitución; para el cálculo de raíces de polinomios de cuarto grado, se introduce un término indeterminado en una diferencia de cuadrados.	Concepto de ecuación, trinomio cuadrado perfecto, factorización, diferencia de cuadrados, raíz cuadradas, entre otros.	Se conocían las bondades que puede proporcionar el hallazgo de formas generales para el cálculo de raíces de polinomios de grado tres y cuatro y se trabajaba en eso,
FINALES DEL SIGLO XVI Y SIGLO XVII	Sincópado - Simbólico (importante desarrollo del lenguaje algebraico)	Se plantearon problemas sobre el cálculo de raíces de polinomios de segundo, tercer, cuarto y hasta de sexto grado, se establece la relación entre expresiones algebraicas y las curvas que las representan.	Se introducen nuevas incógnitas para reducir ecuaciones de cúbicas a cuadradas; empleo del método Horner para la resolución aproximada de ecuaciones, se usa el método algebraico para ecuaciones de tercer grado,	Relación entre raíces y coeficientes de polinomios, la factorización, la noción de aproximación; se ignoran los valores negativos de las raíces cuadradas.	Existe gran interés en la generalización y en la creación de un lenguaje que permitiera la unificación de criterios y evitara la complicación que supone el uso del lenguaje verbal.
SIGLO XVIII HASTA LA ACTUALIDAD	Simbólico	Se esclarecerse la situación de la búsqueda de la fórmula general para el cálculo de raíces de polinomios de quinto grado en adelante, demostrándose y aceptándose la inexistencia de tal fórmula, desde entonces el enfoque ha sido el desarrollo de problemas vinculados a la relación existente entre las raíces de los polinomios y las numerosas aplicaciones de este objeto matemático tanto dentro de la misma matemática como para otras ciencias.	Se aplican para el cálculo de raíces de polinomios de cuarto grados o menores los métodos actualmente conocidos: factorización, completación de cuadrados, resolvente… también se incorpora el teorema de Abel – Ruffini y se aplica para el desarrollo de ciertos polinomios el teorema del binomio de Newton.	Se tiene una clara idea de los conceptos que rodean al polinomio y a la relación de este con sus raíces.	Se demuestran y establecen teoremas que desde entonces rigen las pautas de los trabajos que se realizan con polinomios, entre ellos: El teorema de Abel – Riffini, el del binomio de Newton y el Teorema Fundamental del Álgebra.

Referencias bibliográficas

Arrieche, M. (2010). *Significados Institucionales y Personales del objeto matemático función en la Formación de Profesores de Educación Integral.* Trabajo de Ascenso no publicado. Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Maracay, Venezuela.

Arrieche, M. (2002). *La teoría de conjuntos en la formación de maestros: Facetas y factores condicionantes del estudio de una teoría matemática*. Tesis de Doctorado no publicada. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. España.

Bell, E. T. (1985). Historia de las Matemáticas. (2° edición), México: Fondo de Cultura Económica.

Boyer, C. (1986). *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza.

Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 22 (2/3), 237–284.

Godino, J. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Recuperado el 12 de diciembre de 2009 de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/monografiatfs.pdf

Ortega, I. (2002). *La historia que vivieron los matemáticos*. Recuperado el 04 de marzo de 2011 de http://personales.ya.com/casanchi/did/historia.pdf

Pastor, J. y Babini, J. (2000). *Historia de la matemática.* Barcelona: Gedisa.

Pérez, J. (2004). *El quehacer matemático. Un recorrido por la historia. Parte II la matemática en el siglo XVII*. Recuperado el 04 de marzo de 2011 de http://personales.ya.com/casanchi/did/historia.pdf

LA ARISTA LÓGICA DEL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE: EL CASO DE LOS CONCEPTOS EN LA MATEMÁTICA ESCOLAR

Celia Rizo, Luis Campistrous
Universidad Autónoma de Guerrero México
Instituto Central de Ciencias Pedagógicas Cuba
celrizo@yahoo.com.mx

Resumen. En este artículo se hace una incursión en el trabajo con conceptos, como una de las tres formas básicas de explicación del mundo, conjuntamente con los juicios y los razonamientos que no serán abordados en esta oportunidad. También se presentan algunos de los procedimientos lógicos asociados al trabajo con conceptos y se ejemplificará su uso en la matemática, aunque los conocimientos y el uso de la lógica no es exclusiva de ella. La intención es destacar la importancia de desarrollar adecuadamente el pensamiento lógico en la escuela, desde edades tempranas y la contribución, positiva o negativa que puede tener en ese desarrollo los medios de enseñanza que están establecidos.

Palabras clave: conceptos, pensamiento lógico, procedimientos lógicos del pensamiento

Abstract. In this article an incursion is done in the work by concepts, as one of three basic forms of explanation of the world, together with the judgments and the reasonings that will not be approached in this opportunity. Also they present some of the logical procedures associated with the work with concepts and his use will be exemplified in the mathematics, though the knowledge and the use of the logic is not exclusive of her. The intention is to emphasize the importance of developing adequately the logical thought in the school, from early ages, and the contribution, positive or negative that can have in this development the means of education that are established.

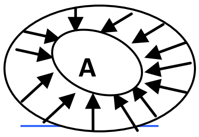
Key words: concepts, logical thought, logical procedures of the thought

Introducción

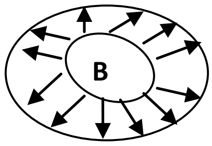
En este artículo, el término "lógica" se usa referido a lo relacionado con el pensamiento o la razón, esto nos remite a un rasgo esencial del ser humano: la racionalidad. Esta característica de los seres humanos significa que pensamos racionalmente y para ello nos valemos de la utilización de conceptos, juicios y razonamientos. Dentro de la formación de esta arista lógica del conocimiento es esencial aprender a operar correctamente con la extensión de los conceptos, pues las transformaciones que va a hacer de la realidad objetiva las "adelanta" al operar con ellos, aspecto que ocupa este artículo sobre el trabajo con conceptos. En el caso de la enseñanza de la matemática y de su didáctica, este componente lógico es esencial.

Operaciones lógicas con conceptos

Entre las que más se utilizan en la escuela se encuentran la limitación y generalización, la división y dentro de ella el caso especial de la clasificación, y la definición. A continuación se precisarán algunas ideas acerca de estas operaciones con conceptos. La limitación de conceptos significa que se añaden propiedades esenciales al concepto y por ello aumenta su contenido (tiene más propiedades esenciales pero disminuye su extensión, o sea la cantidad de representantes que tengan esa propiedad.



Caso A: Pasar de un concepto a otro subordinado: Limitación

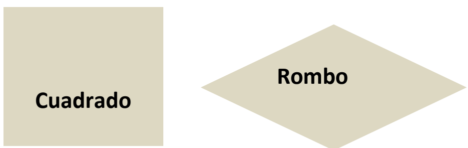


Caso B: Pasar de un con-cepto a otro subordinante:

Por ejemplo si se parte del concepto "cuadrilátero y se añade la propiedad de "tener sus cuatro lados iguales" estamos en presencia de un nuevo concepto que es el de rombo. Observen que se ha aumentado el contenido del concepto (mas propiedades) de cuadrilátero pasan a ser rombos por lo que la extensión disminuye porque ya todos los cuadriláteros no están. En este caso el rasgo escogido es "la igualdad de sus lados". Igual sucede si al conjunto de los dígitos {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} le añades la condición de que sus elementos sean todos pares, entonces queda {0,2,4,6,8} que es un conjunto más limitado que el original.

El caso contrario a la limitación es la generalización de conceptos, que significa pasar de un concepto a otro subordinante, es decir se limita el contenido, aunque aumenta su extensión. Esta acción significa que se debe renunciar a algunas propiedades esenciales para obtener una clase de objetos que es más amplia pues satisface todas las propiedades esenciales del concepto dado. Al hacer esta operación se escoge un rasgo del concepto con respecto al cual se hará la generalización y que determina qué propiedades esenciales se suprimen. En ambos casos es posible volver a hacer una generalización renunciando a la otra propiedad y se obtiene un paralelogramo. Por el contrario, limitar un concepto es pasar a otro subordinado para lo cual se deben añadir propiedades esenciales. También en este caso se escoge un rasgo que determina las propiedades que se añaden.

Un ejemplo de ***generalización*** es el del cuadrado cuando se prescinde de la **perpendicularidad** y se obtiene el rombo.



Un ejemplo de limitación es el del rectángulo cuando se añade la igualdad de los cuatro lados y se obtiene el cuadrado

División

El estudio de un concepto se facilita cuando se separa su extensión en grupos caracterizados por poseer determinadas propiedades. Esta separación se hace recurriendo a otra operación lógica con los conceptos: la división. Desde el punto de vista de la lógica, esta división debe hacerse a partir del contenido del concepto. Es decir, no se trata de analizar objeto por objeto de los que pertenecen al concepto y separarlos en grupos, lo que puede ser imposible. Se trata de escoger un rasgo determinado y según ese rasgo distribuirlos en diferentes grupos. Ese rasgo constituye la base de la división. Por ejemplo, en una escuela hay 150 alumnos de un grado. Como no es posible ubicarlos en un solo grupo, es necesario por lo menos, dividirlos en tres grupos. Esta división se puede de diferentes maneras, aunque es muy natural y simple repartirlos atendiendo a un determinado rasgo que pudiera ser según la inicial del apellido (A-F; G-P; Q-Z), por la fecha de nacimiento o por la región de procedencia, entre otros rasgos.

Es evidente que al hacer esto hay que tener algunos cuidados, entre ellos que se incluyan a todos y que la división se haga siguiendo un solo criterio. No se podría separar atendiendo a la inicial del apellido y a la fecha de nacimiento pues pudiera ocurrir que un alumno tuviera que estar en un grupo por la inicial y en otro, por la fecha de nacimiento.

a) Un mismo alumno no se puede inscribir en más de un grupo.

b) Cuando los grupos obtenidos por una división se subdividen a su vez, no pueden saltarse etapas. Por ejemplo, si en cada grupo se consideran las filas como una subdivisión, no pueden dividirse los alumnos en grupo A, grupo B, fila 1, fila 2 (no pueden dividirse a la vez por grupos y por filas, pues son dos escalones distintos).

Resumiendo:

La división es la operación lógica que consiste en dividir la extensión del concepto en clases, atendiendo a un rasgo o criterio escogido de antemano al que se le denomina base de la división.

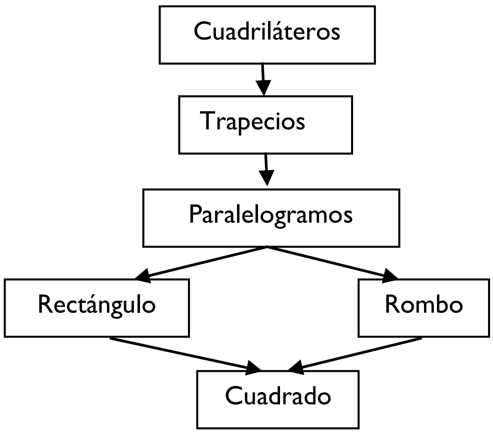
La división está sometida a leyes:

- Debe ser proporcionada (incluye a todos los objetos).
- Se hace sobre una sola base.
- Las clases deben ser disjuntas (sin elementos comunes).
- Debe ser continua, sin saltos.

Clasificación

Un ejemplo muy importante de división es la denominada clasificación que se utiliza mucho en el trabajo en matemática y en otras áreas de conocimiento como la Biología. Es importante entonces destacar que Cuando una división es estable, o sea, agrupa los objetos en clases por semejanzas esenciales, y estas clases además de disjuntas son exhaustivas, o sea todo elemento está solo en algunas de ellas, se llama clasificación. A continuación se ponen ejemplos con incorrecciones para que comprendan mejor el concepto de división, y en especial el de clasificación que es el que más se usa en la enseñanza.

Un caso en el que comúnmente se cometen errores y que es necesario mostrar es considerar una "clasificación", que en realidad no lo, es como es el caso de la los cuadriláteros cuando se subdividen en trapecios y paralelogramos y este último, en rectángulo y rombo y ambos relacionados con el cuadrado.



En este caso se presenta otra forma lógica importante del trabajo con conceptos que es la sistematización, en este caso de los cuadriláteros, que se puede representar como se aprecia en el modelo a la derecha. En ese modelo se hace visible que no es una clasificación pues las clases no son disjuntas, pero si es una sistematización en la que se puede distinguir las relaciones que se pueden establecer entre los diferentes conceptos derivados.

Una manera inmediata de decidir que no es una clasificación, es que las clases no son disjuntas!

Un ejemplo correcto de clasificación es la de los triángulos según sus ángulos, que se clasifican en acutángulos, rectángulos y obtusángulos.

Definicion

Esta es una de las más importantes operaciones lógicas con conceptos porque es la que está asociada a la explicación del significado. En síntesis, es la que asocia al nombre del concepto su contenido.

La definición es la operación lógica que consiste en precisar el significado del concepto mediante la concreción de los rasgos esenciales y la diferenciación de otros conceptos parecidos

Ahora bien, la explicación del significado no es algo simple, pues para aclarar un término hay que utilizar otros, que a su vez necesitan aclaración. Estas complejidades de la definición son muy visibles en las que aparecen en el diccionario. Entre estos problemas de las definiciones del diccionario se encuentran la circularidad, la falta de actualización, la falta de precisión, por lo que objetos diferentes se describen casi igual, y por último el inconveniente de que no todas las definiciones dicen lo mismo.

Con respecto a los diferentes significados de un término, hay que destacar que en los casos de términos muy frecuentes en el lenguaje común, el mismo término denota muchos conceptos relacionados entre sí y, por tanto, se tiene la sensación de vaguedad, ya que en diferentes lenguas momentos y para diferentes personas, el nombre representa conceptos distintos según las necesidades y las costumbres. Por ejemplo, guagua: en la norma cubana significa ómnibus, pero en otros lugares de América significa niño.

Este problema de los diferentes significados para un mismo término es típico en las Ciencias Sociales. No obstante, por el carácter de "ciencia exacta" que se le atribuye a la matemática, por lo general no sucede, aunque siempre es conveniente precisar el significado tal y como lo entiende cada uno, para evitar discutir sobre conceptos diferentes con un mismo nombre. Algunos ejemplos que evidencian el problema de los diferentes significados para un mismo término como es el caso del concepto triángulo el que se puede definir como:

- La figura que se forma cuando se unen, dos a dos, tres puntos no alineados.
- Un polígono de tres lados.

En este caso los significados se puede decir que son equivalentes porque ambos son conceptos con la misma extensión. Podemos ver que la precisión del significado de un concepto se hace mediante palabras que lo denotan y esto complica la comprensión, ya que no siempre las palabras tienen un significado preciso y claro.

Uno cuyo <u>significado se quiere precisar</u> definiens o determinado	Otro cuyo <u>significado es conocido</u> definiendum o determinante

Como antes se planteó, la definición es la operación lógica que consiste en precisar el significado del concepto mediante la concreción de los rasgos esenciales y la diferenciación de otros conceptos parecidos. Esta concreción de los rasgos esenciales supone, casi siempre, la utilización de otro concepto, es decir, en las definiciones se relacionan dos conceptos: El concepto conocido es el determinante o definiendum mientras el que se quiere definir es el determinado o definiens.

Tipos y definiciones explícitas

Las definiciones explícitas pueden ser por sinónimo, genéticas y por género próximo y diferencia específica.

- Definición por sinónimo: A veces el concepto determinante y el determinado son equivalentes (los términos que designan son sinónimos), y es suficiente definir uno mediante el otro. Por ejemplo, en algunos países se le llama examen a una investigación.

En matemática esto es muy poco usual. En general, este tipo de definición puede ser criticado pues dos términos no son nunca sinónimos exactos. En este tipo de definición se establece explícitamente el significado del concepto, por eso es un tipo de definición explícita. Otros tipos de definiciones explícitas son las genéticas y las definiciones por género próximo y diferencia específica.

- ❖ En las definiciones genéticas, se determina el concepto describiendo su origen. Por ejemplo, en el libro de Matemática de Sexto Grado en Cuba, se denomina ángulo a la unión o intersección de dos semiplanos cuyos bordes se cortan o intersecan.
- ❖ Las definiciones por género próximo y diferencia específica son consideradas por algunos autores como las más adecuadas. Quizás esto sea una exageración, pero algo sí es cierto: no solo explican el significado sino que también llaman la atención sobre las propiedades diferenciantes. Es una de las más utilizadas en la matemática. Como su nombre lo indica, en estas definiciones se determina un concepto subordinante (género próximo) del que se quiere definir y se expresan las propiedades que lo diferencian de los restantes subordinados al mismo género (diferencia específica). Por ejemplo, la definición de "rectángulo" cuando la misma se expresa de la forma siguiente: Es un paralelogramo (género próximo) en el que los lados consecutivos son perpendiculares (diferencia específica).

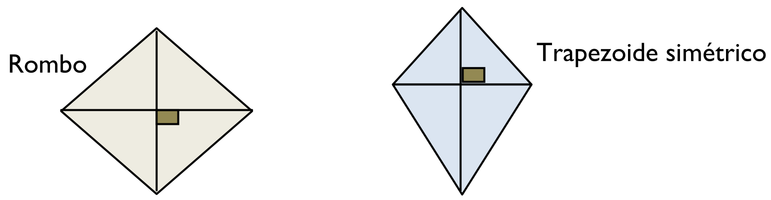
Entre los peligros de usar este tipo de definición se encuentran los siguientes:

- ❖ Que el definiendum y el definiens no sean equivalentes. Esto sucede cuando:

Las propiedades diferenciantes sean excesivas o escasas. En este caso la definición no es proporcionada, es o demasiado estrecha o demasiado amplia. Algunos ejemplos son:

♦ Movimiento rectilíneo uniforme es el movimiento en el que el cuerpo recorre espacios iguales en tiempos iguales. Observen que esta definición es demasiado amplia pues esa condición la cumple también, por ejemplo, el movimiento circular uniforme.

♦ Rombo es el cuadrilátero con diagonales perpendiculares. Observen que también el trapezoide simétrico cumple esa condición.



- ♦ Rectángulo es un paralelogramo con lados consecutivos perpendiculares e iguales. Esta definición es demasiado estrecha pues solo incluye al cuadrado.

- ♦ Mesa es un mueble que consiste en una tabla sostenida por cuatro patas. Es una definición estrecha, pues hay mesas con tres patas e incluso con una sola.

Otro peligro es utilizar el definiens en el definiendum, porque en este caso se introduce el error de círculo vicioso en la definición, que ya antes se ha ejemplificado. También se les denomina errores tautológicos. Este error es poco común dentro de la matemática porque por lo general se usan equivalencias. Tratando de dar una idea de ese error en matemática, supongamos que se quiere definir qué es un número par usando el concepto de divisibilidad. Entonces decimos:

1ro. Los números pares son los números divisibles por dos.

2do. Un número es divisible por dos si es par.

❖ Ambigüedad en la redacción: el significado pierde claridad y precisión.

Ejemplo: Mediana de un triángulo es un segmento que va de un vértice a un lado opuesto y lo divide en dos partes iguales. Pero, ¿a quién divide, al lado o al triángulo? Es anfibológico.

❖ Incluir negaciones: este procedimiento posibilita la introducción de errores.

Ejemplo: Mediana es un segmento que va desde un vértice al lado opuesto y no es ni un lado, ni una bisectriz, ni una altura.

En este caso se han excluido las líneas notables usuales pero se incluye cualquier otro segmento trazado del vértice al lado opuesto. Ahora bien, en aquellos casos en que solo hay un número pequeño de posibilidades se pueden utilizar definiciones negativas. Por ejemplo, si se ha definido una sucesión convergente como la que tiene límite, entonces las divergentes son las que no son convergentes. Otro ejemplo sería definir rectas secantes (en el plano) como las que no son paralelas o viceversa, pues solo hay dos posibilidades. En el espacio esto no es posible, pues las rectas no paralelas pueden ser secantes o cruzarse. Sin embargo, se puede decir que dos rectas se cruzan si no se cortan ni son paralelas.

En resumen, en las definiciones por género próximo (definiens) y diferencia específica (definiendium), el definiens debe dar:

a. Un concepto subordinante del concepto a definir.

b. Propiedades que lo distinguen de otros conceptos también subordinados.

Por ejemplo: Un paralelogramo (definiendum) es un cuadrilátero (subordinante) con lados opuestos paralelos (observen que la condición de tener lados opuestos paralelos es lo que lo distingue de otros conceptos y está dentro del definiens).

En ellas es obligado que el definiens y el definiendum sean equivalentes, o sea el definiens no debe ser demasiado amplio ni demasiado estrecho.

1. La definición no debe contener círculo vicioso.
2. La redacción debe ser clara, precisa, sin ambigüedades.
3. En general, se deben evitar negaciones en la definición.

Dado que en una definición por género próximo y diferencia específica el definiendum y el definiens son equivalentes, se puede enunciar en forma de equivalencia, es decir, listando propiedades que equivalen a la precisión del significado, o sea que precisen el significado.

Veamos dos maneras de expresar lo mismo: en la primera solo se expresan propiedades y en la segunda ofrece además un concepto.

Ejemplo 1: Observen que en este ejemplo, al inicio solo se expresan propiedades que caracterizan al rectángulo, y después se expresa la definición por género próximo y diferencia específica.

Dos maneras diferentes de expresar lo mismo

- Solo se dan propiedades
  - Una figura es un **rectángulo** si y solo si:
    - ❑ Tiene cuatro lados.
    - ❑ Los lados opuestos son paralelos.
    - ❑ Los lados consecutivos son perpendiculares.
- Se da un concepto y propiedades
  - Un rectángulo es un **paralelogramo** en el cual **los lados consecutivos son perpendiculares.**

Comparemos esta última definición por género próximo y diferencia específica con la primera en la que se listan todas las propiedades del concepto que se define. Como se observa en la primera se precisa claramente todas las propiedades del objeto y en la segunda, hay un grupo de esas propiedades que quedan implícitas o involucradas en el "género próximo", que en este ejemplo es "paralelogramo".

En muchas ocasiones la equivalencia es una forma más conveniente de enunciar las definiciones que por género próximo y diferencia específica. Un ejemplo de ello para definir que la proporcionalidad inversa por género próximo y diferencia específica sería: "La proporcionalidad inversa es una relación entre dos variables en la que el producto de dichas variables permanece constante". El término *relación entre dos variables* es el concepto subordinante (género próximo) en este ejemplo y *el producto de dichas variables permanece constante*" es la diferencia específica.

Este mismo concepto definido por equivalencia, sería decir que x e y son inversamente proporcionales es lo mismo que decir x·y es constante. En síntesis, lo antes expresado con respecto a la definición de variables inversamente proporcionales muestra dos formas equivalentes de hacer la misma.

Las definiciones también pueden redactarse de forma implícita, cuando el significado del concepto se explica en un párrafo. Un ejemplo es la definición del concepto de unidad imaginaria (i) que se dice simplemente que "la unidad imaginaria es un número cuyo cuadrado es –1". También las definiciones de forma implícita pueden expresarse mediante un procedimiento inductivo o axiomático como es el caso de los axiomas de Peano. Por otro lado, la definición del "factorial de un número natural" por un procedimiento inductivo sería n! = n(n-1)(n-2)….3.2.1 en forma explícita y en forma implícita sería:

$$n! = \begin{cases} 1! = 1 \\ n! = n(n-1)! \end{cases} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

Es necesario precisar que una definición puede aclarar el significado de un concepto o solo de un término que denota un concepto. Cuando la definición aclara el significado de un concepto se dice que esa definición es real. Por ejemplo: Cuadrado es una figura geométrica formada por cuatro lados iguales cuyas diagonales son congruentes. Existen también las definiciones nominales, cuando solo se aclara el significado de un término, es decir, se le pone nombre a ese significado. Un ejemplo de este tipo de definición es la siguiente: dos ángulos consecutivos a un lado de una recta se llaman adyacentes.

A modo de conclusión de lo relativo a las definiciones se puede plantear que las mismas dan una explicación completa del significado de un concepto, aclaran sus propiedades esenciales y las diferencian de otras parecidas. No obstante, no siempre es necesario dar una explicación tan abarcadora y pueden utilizarse explicaciones del significado semejantes a la definición. Esas otras formas menos abarcadoras son la caracterización, la descripción y la ejemplificación.

En la caracterización se explican los rasgos esenciales del concepto pero no se atiende a su diferenciación de otros parecidos, en una descripción se dan propiedades externas que permiten diferenciar el concepto, pero no se dan sus propiedades esenciales. No obstante, a veces, se combinan ambos procedimientos, o sea la descripción y la caracterización. Por último, la ejemplificación que es la explicación del significado señalando un ejemplo, es decir, un objeto que pertenece a la extensión del concepto. A veces la explicación se hace describiendo el objeto, pero otras se hace señalando un objeto físico de la extensión del concepto. Este tipo de explicación de denomina explicación "ostensiva". No obstante hay términos indefinibles que son aquellos términos simples que no se pueden explicar mediante una definición y por eso se definen ostensivamente; este es el caso de los colores o los sabores (dulce, amargo). Esto puede ser criticado porque puede ser interpretado de diversos modos, aunque el contexto resuelve el problema y trata de explicar esos términos con definiciones, lo que conduce inevitablemente a círculos viciosos.

Referencias bibliográficas

Álvarez, M. (1999). *Lógica* y *Procedimientos Lógicos*. (Pág. 2 a 9). Material Impreso. La Habana. Editorial del Ministerio de Educación.

Campistrous, L. (1994). *Lógica*. (Pág. 3 a 9).Material Impreso. La Habana. Editorial del Ministerio de Educación.

Copi, I. (1967). *Introducción a La Lógica*. Buenos Aires. Editorial Universitaria.

Fingermann, G. (1990). *Lógica y Teoría del Conocimiento*. Buenos Aires. Editorial El Ateneo

Rizo, C. y otros. (1991). *Matemática 6*. (pág. 147 a 214). La Habana. Editorial Pueblo y Educación. Editorial Pueblo y Educación.

Rizo, C. y otros. (l990). *Matemática 5*. (pág. 165 a 196). La Habana. Editorial Pueblo y Educación.

EL VIDEO COMO AUXILIAR DIDÁCTICO EN EL RENDIMIENTO ACADÉMICO DE MATEMÁTICAS A NIVEL SUPERIOR

Juan José Díaz Perera, Cristina Antonia Lagunes Huerta, Myrna Delfina López Noriega, Carlos Enrique Recio Urdaneta
Universidad Autónoma del Carmen México
jjdiaz@pampano.unacar.mx, clagunes@pampano.unacar.mx, mdlopez@pampano.unacar.mx, crecio@pampano.unacar.mx

Resumen. El propósito del estudio fue determinar el efecto que tiene el uso del video en el rendimiento académico de los alumnos de nuevo ingreso a nivel superior periodo agosto-diciembre 2009 de la Universidad Autónoma del Carmen. El estudio fue de tipo correlacional con diseño cuasi-experimental. Se tuvo una muestra no probabilística de 140 alumnos distribuidos en 6 grupos (tres experimentales y tres de control). Para dar respuesta a la pregunta de investigación se aplicó la prueba ANOVA. Los resultados indican que hubo diferencias entre las medias del rendimiento académico que alcanzaron los alumnos del curso de Matemáticas I en la tercera experiencia de aprendizaje que utilizaron el video como auxiliar didáctico y los que no lo usaron, favoreciendo a los grupos experimentales. En base a los resultados obtenidos se sugieren reforzar las destrezas en la temática de polinomios con el uso de videos, ya que mejoran el rendimiento académico de los alumnos y se propone hacer posteriores evaluaciones para corroborar los resultados.

Palabras clave: video, archivo académico, matemáticas

Abstract. The intention of the study was to determine the use´s effect of video in the academic performance of freshmen at higher Education, August to December 2009 at Universidad Autonoma del Carmen. The study, quasi-experimental, was correlational with a probabilistic sample of 140 students in 6 groups (three experimental and three control). ANOVA test was applied to answer the research question. The results indicated that there were differences between the average academic of Mathematics I students, in the third learning experience whose use the video as a teaching assistant and those who have not used it, favoring the experimental groups. Based on the results obtained, we suggest reinforce skills in the subject of polynomials with the use of videos, because they improve the academic performance of students and is proposed to make subsequent evaluations to corroborate the results.

Key words: video, academic achievement, mathematics

Introducción

Los tiempos piden cambios de paradigmas, transitar de lo tradicional a lo innovador, de la enseñanza al aprendizaje, de docente a facilitador, de educación presencial a la virtual, de un currículo rígido a uno flexible, en otras palabras, de un modelo centrado en la enseñanza a uno centrado en el aprendizaje, en matemáticas esto representa un gran reto.

Los resultados del Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes (PISA) en México muestran que hay deficiencias en el área de matemáticas, en 2000 fue de 385, mientras que en el 2003 fue de 364 lo que representa un retroceso; ocupando el último lugar en ambas ocasiones, entre los países de la OCDE. Por otra parte Bautista (2007) señala que el desempeño en matemáticas de los estudiantes de las escuelas del estado de Campeche que participaron en el PISA 2003 fue de 378 puntos significativamente inferior con respecto a varios estados de la República Mexicana. Como se puede observar es un problema que inicia desde la formación básica de los estudiantes Campechanos, de cierta manera se ve afectado por su paso en los diferentes niveles educativos: secundaria, preparatoria y por qué no mencionar a nivel superior.

Es por ello, que la enseñanza de las matemáticas en cada uno de sus niveles representa una tarea difícil, tanto para los alumnos como para los profesores. Ya que la matemática representa un área con alto grado de abstracción, sin embargo en los últimos años la educación matemática, propone el uso de recursos didácticos para obtener un mejor acercamiento a los contenidos matemáticos.

Santandreu (2004) define como recurso didáctico a todo material que se utiliza en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, por tanto en esta categoría se incluye: videos, hipertexto, calculadoras, programas informáticos, etc. Además menciona que los recursos didácticos deben estar integrados en el curriculum matemático como medio importante para elevar la calidad de la enseñanza. Es por ello que la inclusión de los medios de comunicación en la enseñanza no debe ser el resultado de moda, sino el producto de una política planificada que ingrese los medios educativos dentro del currículum, con el objeto de racionalizar y mejorar el proceso de enseñanza- aprendizaje (Moreno,2004). Dentro los medios educativos, el audiovisual es uno de los que más ha impactado en los contextos educativos, ya que forma parte de la cultura y sobre todo la cotidianeidad de los alumnos (De Pablos, 1988).

Por otra parte, Ruiz (2009) define el video como medio de transmisión de conocimiento, que puede representar una alternativa al tipo de enseñanza tradicional, sustituyendo al profesor en algunas actividades de tipo conceptual y descriptivo, y sirviendo de repaso a estas explicaciones y a los contenidos de tipo simbólico o matemático, previamente explicados en clase por métodos tradicionales, también puede ser empleado en el caso de explicaciones repetitivas, en aquellos casos donde sea preciso introducir una variación de estímulos después de una explicación larga o excesivamente compleja, en la enseñanza programada, enseñanza ocupacional y en la educación a distancia.

Es de gran importancia señalar que la intención del uso del video no es sustituir al profesor, pero sí imponer un cambio en la labor docente, es por ello que las tareas mecánicas como impartir conocimientos, informaciones, quedarán confiadas a los recursos tecnológicos para que el profesor se centre en las tareas más humanas como motivar conductas, orientar trabajos de los estudiantes, resolver dudas etc., ya que en estas funciones el profesor no puede ser sustituido (Machado, Ripoli y Pastori, 2006).

El video por su distinción y objetivos didácticos según Schmidt (1987) los clasifica en: a) Instructivos. Su objetivo es guiar o lograr que los estudiantes alcance el dominio de los contenidos de una asignatura; b) Cognoscitivos. Pretenden dar a conocer a los estudiantes diferentes aspectos relacionados con la temática que se esté estudiando; c) Motivadores. Su intención es preparar al estudiante de manera positiva hacia la realización de una tarea específica; d) Modelizadores. Son lúdicos o expresivos destinados a los estudiantes con el objetivo que puedan aprender y comprender el lenguaje audiovisual.

La incorporación de los videos en el ambiente educativo es un hecho por la accesibilidad que se tiene a un gran número de estos recursos debido al fenómeno de la digitalización, sin duda la fuente más importante para la adquisición de este recurso audiovisual es el internet.

El modelo educativo centrado en el aprendizaje de la Universidad Autónoma del Carmen (UNACAR) eje central señalado en el Plan Faro U 2010, incidiendo en los cuatro dominios del aprendizaje (Garibay, 2002). Menciona que son derivados de la propuesta de la UNESCO como pilares de la educación: 1) Saber conocer, 2) Saber hacer, 3) Saber ser y 4) Saber convivir. Esto es, en otras palabras conocimientos, habilidades, actitudes y relaciones, para lograr en los egresados un mejor desempeño en el ámbito laboral.

Sin duda alguna son muchas las ventajas que ofrece el modelo educativo, una de ella es que los profesores deben planear de manera diferente las experiencias de aprendizaje, por lo menos diferente a lo de un profesor tradicional (Salazar, 2006). Esto da lugar a que el profesor pueda diseñar sus actividades para el curso utilizando recursos didácticos como los son: videos, software, calculadoras, etc.

En la UNACAR existe un programa sello de matemáticas (Matemáticas I) que se imparte en primer semestre a nivel superior, esto significa que todos los programas educativos de la universidad contienen este curso. En un estudio realizado por las maestras Lagunes, López y Herrera (2009) observaron que 44% de los alumnos aprobaron el curso en su primera oportunidad, 47% repitió el curso y 8.8% abandonó la escuela. Por otra parte, mencionaron que la temática de polinomios es la que más se les complica a los alumnos.

Ante esta situación, los docentes del cuerpo académico de matemática educativa de la Universidad Autónoma del Carmen se dan a la tarea de buscar y aplicar experiencias de aprendizaje que conlleven a un aprendizaje significativo en los alumnos y una de estas experiencias es el uso de tecnologías de información y comunicación (TIC) en el curso de matemáticas I con el objetivo de lograr una mejor transmisión del conocimiento. Ya que la obtención de los conocimientos que se pretenden alcanzar con el curso sello de matemáticas I es de suma importancia para cursos posteriores como estadística, cálculo, matemáticas financieras entre otras.

Por tal razón surgió la idea de insertar el video como apoyo didáctico en la clase de Matemáticas I, que permita a los alumnos reducir las deficiencias acarreadas de cursos anteriores, que no pueden ser cubiertas en un solo semestre de Matemáticas. A continuación se describen los materiales y métodos utilizados en esta investigación.

Materiales y métodos

El tipo de estudio fue correlacional con diseño cuasi-experimental con pre test y pos test. Los alumnos que participaron en el estudio fueron de nuevo ingreso periodo agosto- diciembre 2009 de la Universidad Autónoma del Carmen que cursaban la materia de Matemáticas I a nivel superior, la muestra estuvo constituida por 140 alumnos de una población de 553. La muestra fue no probabilística debido a la organización de los grupos a nivel superior, por lo que fueron elegidos de manera intencionada, tomando en cuenta como criterio de selección a los grupos tuvieran promedios semejantes, horarios, aulas para proyección, y que el profesor ofreciera el mismo curso a dos grupos. Los seis grupos (tres experimentales y tres de control) quedaron distribuidos como se muestra en la tabla 1.

Tabla 1. Distribución de la muestra

Grado	Grupo	H	M	Total
1°	B (Experimental)	9	11	20
1°	C (Experimental)	5	16	21
1°	E (Experimental)	8	15	23
1°	H (Control)	5	20	25
1°	I (Control)	6	19	25
1°	K (Control)	11	15	26
Total		44	96	140

Fuente: Lista de asistencia de los alumnos de nuevo de ingreso período Agosto-Diciembre 2009.

Con la finalidad de medir el rendimiento académico de los alumnos antes y después del tratamiento se diseñaron dos instrumentos (pre test y post test) para la recolección de datos. Estos instrumentos fueron pruebas objetivas sobre la temática de polinomios, divididas en 3 áreas de análisis de acuerdo a los objetivos específicos de conocimientos del programa de Matemáticas I de la experiencia de aprendizaje III. Para medir la confiabilidad de los instrumentos se piloteó con un grupo de alumnos que tuvieran características similares a los grupos del experimento, seguidamente se aplicó la fórmula Kr20 obteniendo un índice de confiabilidad del 0.786, esto demostró que la prueba era altamente confiable.

Los instrumentos quedaron constituidos por 30 ítems de selección múltiples divididos en tres áreas de análisis: Analizar los conceptos básicos de polinomios, formular estrategias de solución de ejercicios de polinomios y resolver problemas de aplicación. En la tabla 2 se muestran los indicadores y sus correspondientes ítems.

Tabla 2. Distribución de ítems por indicador

Indicadores	Ítems
Analizar los conceptos básicos de polinomios (Conceptualización).	1, 2, 4, 9, 13, 14, 27, 29
Formular estrategias de solución de ejercicios de polinomios (Operatividad).	5, 6, 7, 8,10, 11, 15, 19, 22, 25, 26, 30
Resolver problemas de aplicación (Aplicación).	12, 16, 17, 18, 20, 21, 23, 24, 28

Fuente: Instrumento

Esta distribución de los ítems se encuentra en las dos pruebas (pre test y pos test), con el objetivo de establecer cualquier modificación en el desempeño académico de los alumnos antes y después del tratamiento con o sin el uso de videos. Además se aplicó una encuesta para conocer la impresión de los alumnos sobre el uso didáctico de los videos en la clase.

Los videos utilizados en el estudio fueron creados por el Cuerpo Académico de Matemática Educativa resultado de un proyecto de investigación titulado "Diseño y elaboración de recursos didácticos en el aprendizaje de las matemáticas" registrado en la Universidad Autónoma del Carmen. Los videos fueron de tipo instructivo, ya que el objetivo principal fue de guiar a los alumnos hacia el dominio de los contenidos de la temática de polinomios.

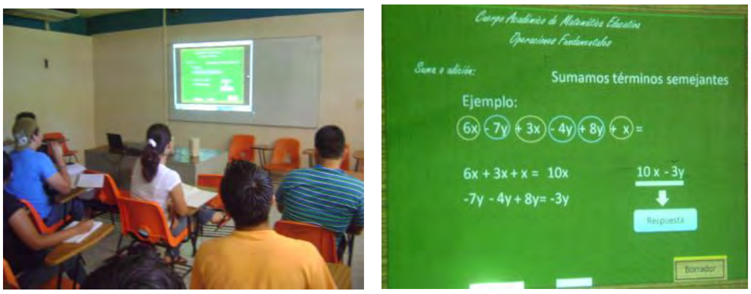


Figura 1

Procedimiento para la obtención de los datos: a) en primer lugar se aplicó el pre test a los grupos experimental y de control para conocer los conocimientos previos con que contaban los alumnos, seguidamente se aplicó la prueba ANOVA de un factor o de efecto fijo para determinar la homogeneidad entre los grupos; b) aplicación del tratamiento. Los alumnos del grupo experimental en el proceso de enseñanza-aprendizaje fueron dirigido con el uso de video como auxiliar didáctico en el aprendizaje de polinomios, y los alumnos del grupo de control abordaron la temática de polinomios de la tercera experiencia de aprendizaje del curso de Matemáticas I de manera normal, es decir, sin el uso de video, según lo planeado en el cronograma de actividades de la experiencia; c) se aplicó el pos test a los grupos experimental y de control con la finalidad de conocer el rendimiento académico de los alumnos al término del tratamiento, y se aplicó nuevamente la prueba ANOVA de un factor para determinar la diferencia del rendimiento académico entre los alumnos que utilizaron el video como auxiliar didáctico (grupo experimental) y los que no lo usaron (grupo de control).

Resultados

En este apartado se da a conocer el análisis e interpretación de la información recabadas por los instrumentos (pre y pos test) que miden el rendimiento académico de los alumnos antes y después del tratamiento.

Tabla 3. Medias y desviaciones estándar del pre test de los grupos

Grupos del estudio							
Experimental				Control			
Grupo	N	Media	Desviación Estándar	Grupo	N	Media	Desviación Estándar
1	20	12.7	5.420	1	25	10.96	3.445
2	21	14	5.108	2	25	11.96	4.127
3	23	13.21	5.089	3	26	13.61	4.792
Total	64	13.31	5.145	Total	76	12.19	4.258

Fuente: Estadística Descriptiva

En cuanto a la tabla 3, indica que la media total del grupo experimental fue 13.31 cercana a la media total del grupo de control que fue de 12.19. Por otra parte la media más alta obtenida fue 14 por el grupo 2 experimental y la media más baja fue de 10.96 por el grupo 4 de control. Comparando las medias entre los grupos, se puede observar que los grupos 1, 3 y 6 obtuvieron medias muy cercanas (12.7, 13.21 y 13.61) y mayores que los grupos 4 y 5 (10.96 y 11.96 respectivamente).

Con respecto a la prueba de análisis de varianza (ANOVA) que se aplicó al pre test de polinomios para comprobar la homogeneidad de los grupos de control y experimental antes del tratamiento, se utilizó el programa estadístico StatGraphics Plus versión 5.1, donde el valor de "p" calculado fue de 0.227, resultó mayor que el nivel de significancia de 0.05, esto es, (0.227 > 0.05). Por lo que no hubo diferencia estadística significativa entre los grupos experimental y de control al inicio del tratamiento.

Tabla 4. Medias y desviaciones estándar del pos test de los grupos

Experimental				Control			
Grupo	N	Media	Desviación Estándar	Grupo	N	Media	Desviación Estándar
1	20	14.15	4.545	1	25	11.16	4.597
2	21	15.761	4.276	2	25	11.04	4.025
3	23	16.956	5.431	3	26	14	4.185
3	64	15.687	4.866	3	76	12.092	4.439

Fuente: Estadística Descriptiva

Los resultados de la tabla, indican que existe diferencia entre la media del grupo experimental (15.687) y de control (12.096). La media más alta del grupo experimental fue de 16.956, mayor a la más alta del grupo de control que fue de 14, y la más baja fue del grupo 2 de control con una media de 11.04.

Para probar si la diferencia entre las medias de los dos grupos experimental y de control es estadísticamente significativa al término del tratamiento con un nivel de confianza de 0.05 se aplicó la prueba "z" con el programa estadístico StatGraphics Plus versión 5.1, donde el valor de "p" calculado fue 0.000013, el cual resultó menor que el nivel de significancia de 0.05, esto es ($0.000 < 0.05$). Este resultado pone en manifiesto que existe diferencia significativa entre los dos grupos (experimental y de control), por lo que se pudo observar que el rendimiento académico de los dos grupos fueron diferentes al término del tratamiento.

Prueba de hipótesis. Es de gran relevancia señalar que la hipótesis nula (H_0): "No existe diferencia estadística significativa entre las medias del rendimiento académico que alcanzaron los alumnos del curso sello de Matemáticas I generación 2009 de la Universidad Autónoma del Carmen en el pos test que utilizaron el video como auxiliar didáctico en la temática de polinomios (grupo experimental) y los que no lo usaron (grupo control)" fue rechazada; y en consecuencia, la hipótesis de investigación (H_1): "Existe diferencia estadística significativa entre las medias del rendimiento académico que alcanzaron los alumnos del curso sello de Matemáticas I generación 2009 de la Universidad Autónoma del Carmen en el pos test que utilizaron el video como auxiliar didáctico en la temática de polinomios (grupo experimental) y los que no lo usaron (grupo control)." fue aceptada.

De acuerdo a los resultados de la encuesta aplicada a los para conocer la impresión sobre el uso didáctico de los videos en la clase de matemáticas. El 82% de los alumnos estuvieron de acuerdo y totalmente de acuerdo que se asimila mejor los conceptos de matemáticas cuando se emplea el video, sin embargo 11% no opino y 7% restante estuvo en desacuerdo y totalmente en desacuerdo. Además 95% de los encuestados opinaron en estar de acuerdo y totalmente de acuerdo que los videos empleados en el curso fueron de gran ayuda, y 5% restante no opino al respecto.

Conclusiones

Haciendo hincapié en los resultados obtenidos se tiene las siguientes conclusiones:

Se encontraron diferencias estadística significativa entre las medias del rendimiento académico que alcanzaron los alumnos del curso sello de Matemáticas I período agosto - diciembre 2009 de la Universidad Autónoma del Carmen en el pos test que utilizaron el video como auxiliar didáctico en la temática de polinomios (grupos experimentales) y los que no lo usaron (grupos de control).

Los resultados obtenidos sugieren reforzar las destrezas en la temática de polinomios con módulos de videos, ya que ayudan en el rendimiento académico de los alumnos en las pruebas de polinomios, por lo que se podría considerar como complementos en los cursos de matemáticas que aborden la temática de polinomios.

De acuerdo a los resultados por indicador, se encontró que los videos que más ayudaron en el rendimiento académico de los alumnos fueron los que contenían los subtemas de: lenguaje algebraico; grado de una expresión; grados y raíces de un polinomio; identificación de los productos notables y su factorización; reducción de términos semejantes; operaciones con expresiones irracionales, solución de ecuaciones y problemas de aplicación.

El video como recurso didáctico favoreció el proceso de enseñanza- aprendizaje de las matemáticas obteniendo un mejor aprendizaje los alumnos que utilizaron este medio didáctico, esto se puede apreciar en los resultados de las medias obtenidas por los grupos experimentales y de control. Como se puede ver los recursos audiovisuales en su formato de video insertados en la programación del curso de matemáticas I ayudaron a cumplir los objetivos planteados.

El video ayuda a los docentes a diseñar experiencias más dinámicas en el aula con la intención de crear clases más atractivas para los alumnos. Es por ello, importante el uso de las TIC para crear nuevos ambientes de aprendizaje que sorprendan al alumno motivándolo hacia el estudio de la asignatura.

La experiencia personal que nos ha dejado la elaboración de este trabajo de investigación, nos hace reflexionar y atrevernos a recomendar que los recursos audiovisuales en su formato de video deban de formar parte de la planificación del curso de todo docente que se encuentra en el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas. Desde luego que para lograrlo hace falta cambiar no solo nuestra actitud, sino renovar el ambiente en las aulas para convertirlas en nuevos espacios de aprendizajes.

En base a los resultados obtenidos en la investigación y de la comparación con otros reportes de investigación sobre el uso de videos, se hacen las siguientes recomendaciones:

Diseñar estrategias de enseñanzas en el aula con recursos audiovisuales que sean congruentes con los objetivos del programa.

Se podría repetir el estudio con otras poblaciones que tenga problemas similares con los contenidos matemáticos propuestos en los videos, o con otro nivel educativo. Además de integrar el video en el curriculum matemático para sensibilizar a los profesores y a los alumnos en la utilización de recursos didácticos (video) en aula o fuera de ella.

Se recomienda capacitar a profesores para creación y edición de videos acorde a las necesidades y lenguaje de los alumnos para reforzar los contenidos del curso.

Elegir adecuadamente los videos para actividades en el aula, debe ser acorde a los contenidos de la asignatura para que impacte en la actitud de los estudiantes.

Referencias bibliográficas

Bautista, S. (2007). *Relación entre desempeño en matemáticas y autoeficacia en estudiantes campechanos que participaron en el proyecto pisa 2003*. Memorias COMIE. Recuperado el 4 de mayo de 2008, de http://www.comie.org.mx/congreso/memoria/v9/ponencias/at10/PRE1178560308.pdf

De Pablos, J. (1988). Equipamiento y utilización de medios audiovisuales. Encuesta a profesores. *Revista de Educación. 286*, 371-392.

Garibay, B. (2002). *Experiencias de Aprendizaje*. México: Universidad Autónoma del Carmen.

Lagunes, C. López, M. y Herrera, S. (2009). *La habilidad matemática, un enfoque de género en alumnos de nuevo ingreso en el área de educación y humanidades*. VII Encuentro Participación de la Mujer en la Ciencia

Machado, G.; Ripoli, J. y Pastorino, S. (2006). *"¿Vale una imagen más que mil palabra?.* Actas de las VII Jornadas de Enseñanza Universitaria de la Química: Universidad Tecnológica Nacional, La Plata (1900), Argentina. 191-195.

Moreno, M. (2004). El vídeo en el aula. *Agora digital*, 7, 1-10.

Ruiz, A. (2009). La utilización educativa del vídeo en educación primaria. *Revista digital: Innovación y experiencias educativas. Enero*.

Salazar, A. A. (2006). *El modelo educativo de la Universidad Autónoma del Carmen. Una experiencia de aprendizaje institucional*. México: Universidad Autónoma del Carmen.

Santandreu, M. (2004). Recursos TIC en la enseñanza y aprendizaje del área de matemáticas. *Comunicación y Pedagogía*, *200*, 65-70.

Schmidt, M. (1987). *Cine y vídeo educativo*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

LAS FILIACIONES Y RUPTURAS EPISTEMOLÓGICAS ENTRE LA PROPORCIONALIDAD Y LA LINEALIDAD

Juan Alberto Acosta Hernández, Carlos Rondero Guerrero, Anna Tarasenko
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo México
acostah@uaeh.edu.mx, crondero6@hotmail.com, anataras@uaeh.edu.mx

Resumen. Se han identificado algunas de las filiaciones y rupturas epistemológicas entre las nociones de proporcionalidad y linealidad, lo cual ha permitido hacer un rescate de algunos de sus significados. Una filiación epistemológica es un cúmulo de atributos conceptuales que se vinculan entre las nociones y sus significados, y una ruptura epistemológica es la separación que se va dando entre las nociones, debido a la evolución propia de una de ellas. Tal rescate permite aportar elementos en la estructuración de un discurso didáctico congruente y articulado en la matemática escolar.

Palabras clave: linealidad, proporcionalidad, filiaciones, rupturas, didáctica

Abstract. It has been identified some affiliations and epistemological ruptures between the notions of proportionality and linearity, which has allowed a recovery of some of its meanings. A epistemological affiliation is a cluster of attributes linked conceptual notions and their meanings, and an epistemological rupture is the separation due the own development of one of them. Such recovery can provide some aspects in shaping a articulated and structured didactic discourse in school mathematics.

Key words: linearity, proportionality, affiliations, ruptures, didactic

Introducción

Se tiene referencia de rupturas epistemológicas que han sido sustentadas en el desarrollo histórico de las ideas matemáticas. Para este trabajo es de interés identificar las filiaciones y rupturas epistemológicas entre las nociones de proporcionalidad y *linealidad*, de tal manera que ello permita realizar un rescate de algunos de sus significados que incidan en el diseño de situaciones de aprendizaje.

En cuanto a los aspectos metodológicos que se han empleado, se parte de la detección de la problemática en la Didáctica de saberes vinculados con las nociones de proporcionalidad y *linealidad*, y se asocian con sus orígenes epistemológicos y las causas socioculturales de su emergencia, dando pauta a la identificación de sus filiaciones y rupturas. Bajo el entendido que una filiación epistemológica es un cúmulo de atributos conceptuales que se vinculan entre las nociones y sus significados, su identificación y empleo representan un elemento metodológico a tomarse en cuenta en el proceso del rescate de las ideas matemáticas en la historia.

Por otra parte, una ruptura epistemológica es la separación que se va dando entre las nociones, debido a la evolución propia de una de ellas que se manifiesta en la estructuración de sus significados inherentes (Acosta, 2011).

Para un mejor análisis de las filiaciones y rupturas, (Chevallard, 1997) se delimitaron cuatro escenarios históricos (Acosta, Rondero y Tarasenko, 2008), aunque estas etapas no son definitivas ni exhaustivas, sí son representativas de ciertas características epistemológicas que le dan peculiaridad a cada una de las mismas.

El primer escenario se remonta a las culturas ancestrales egipcia, china y babilónica, donde el cobro de impuestos se calculaba a través de la proporción directa respecto de los bienes del contribuyente. Además emplearon la progresión aritmética para cálculos similares de lo que ahora llamamos interés simple. En el segundo, se toma como referencia principal a autores clásicos de la cultura griega, particularmente Arquímedes, quienes emplearon a la noción de proporcionalidad como elemento epistemológico de construcción de muchos de sus resultados en geometría y para resolver problemas cotidianos de cálculo.

El tercero, se caracteriza por ser una época en donde se presenta un enlace conceptual entre la noción de proporcionalidad y la noción de linealidad, siendo Fermat y Descartes quienes dieron pleno sentido a los trabajos de Apolonio acerca de lugares geométricos.

El último escenario, parte del origen del Álgebra Lineal, cuyo sustento epistemológico está dado por la noción de linealidad, la cual genera conceptos tales como: dependencia e independencia lineal, rango, entre otros.

Algunas filiaciones y rupturas epistemológico-históricas y su articulación con la didáctica actual

Al tomar en cuenta lo que comenta Artigue (1998) respecto a las dificultades ligadas a la necesaria ruptura que se requiere dar con respecto al pensamiento algebraico, cuando se aborda el campo conceptual del Análisis elemental (Cálculo). Es posible tomar esta consideración en referencia a la necesaria ruptura del pensamiento proporcional, cuando se tratan problemas relacionados con proporción inversa, y también, posteriormente, cuando se formaliza la noción de linealidad en el Álgebra lineal.

En las culturas ancestrales mencionadas se empleó la proporción directa, a través de una expresión de proporcionalidad de interés simple, de tipo discreto, para el cálculo de impuestos, que en sintaxis moderna se escribe:

$$I=C_0\,it$$

Donde: I representa al interés simple, C_0 es el monto total gravable, i la tasa de interés, y t el periodo de tiempo. La proporción directa está manifiesta en que el impuesto por cobrar aumenta, si aumenta el periodo de tiempo, y que disminuye el impuesto, si el lapso de tiempo es más corto, ya que el capital inicial es constante:

$$I \propto C_0 t$$

Entonces se aprecia que la tasa de interés *i* es la constante de proporcionalidad.

En la didáctica moderna, a pesar de que sí se aborda, no se hacen evidentes las filiaciones conceptuales entre la proporción directa y los hechos socioculturales del cobro de impuestos en la antigüedad, e incluso en la modernidad, aunque a veces los pagos al fisco están calculados a través de expresiones de interés compuesto.

A su vez, tampoco en el escenario escolar se enfatizan tales filiaciones epistemológicas, cuando se trata el modelo más completo, para el cálculo de un capital *C* que está variando cuando gana o pierde un interés que se considera constante en cada uno de los periodos:

$$C=C_0\,(1 \pm it),$$

donde: t = 1, 2, 3,…n

Esta expresión, que es obtenida de la proporcionalidad, ya es una forma lineal, aunque modelada en un fenómeno discreto (ya que en esa época no se podría conceptuar de otra manera), como lo habría conceptualizado posteriormente Descartes para el caso continuo. Otra importante aportación de este escenario es el surgimiento explícito de la referencia a una constante de proporcionalidad, dada por una tasa impositiva, que en otros momentos históricos evolucionará hacia una tasa de variación constante. Dicho de otro modo en el proceso de evolución de la noción de proporcionalidad hacia la noción de *linealidad*, ésta característica epistémica no se pierde a lo largo del tiempo.

En relación al segundo escenario histórico, los griegos teorizaron acerca de de la proporción directa, en particular, hacia 370 a. c. Eudoxio de Cnido (408 – 355) (Hofmann, 2002), define indirectamente a la proporción directa como la igualdad de dos razones:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

Además por otra parte Arquímedes aplica la proporcionalidad directa entre variables de la misma dimensión, en tal caso, afirma que el volumen de la esfera es directamente proporcional al diámetro elevado al cubo.

$$V \propto d^3$$

En cuanto a la relación entre las dos cantidades, el volumen y el cubo del diámetro, existe la proporción directa, en el sentido de que si aumenta el cubo del diámetro, también hay un incremento del volumen. Es de resaltarse que Arquímedes contribuye a llevar a la proporcionalidad a un nuevo estatus al realizar una "comparación" entre cantidades de igual dimensión, en tal caso el volumen con el diámetro al cubo, el área con el radio al cuadrado, el volumen de una esfera, con el radio al cubo.

Estos hechos anteriores, generalmente no se toman en cuenta en las prácticas docentes cotidianas, esto es, no hay una filiación explícita entre la noción de proporción directa y los conceptos de las dimensiones espaciales de las cantidades geométricas que empleó Arquímedes al hacer sus contribuciones.

La noción de proporcionalidad no aparece de manera explícita cuando Descartes propone a la línea recta como lugar geométrico, determinando la situación de un punto en un plano por su posición respecto al eje de las x. Esto representa una ruptura epistemológica con respecto a los trabajos antiguos de Apolonio sobre lugares geométricos. Descartes representa a la recta que pasa por el origen, de la forma:

$$b\,x = a\,y,$$

y considera

$$a\,x + b\,y = c$$

como la ecuación de una recta en su forma general. Pero de manera implícita está presente la proporción directa, en el caso de $c = 0$, $b \neq 0$ y $a \neq 0$, lo cual es una filiación epistemológica entre la proporcionalidad y la recta. En cambio si $c \neq 0$, $b \neq 0$, implica una ruptura del mismo tipo. Sin embargo en ambos casos si está presente la razón de cambio constante.

Este hecho histórico de trascendencia epistemológica, no se lleva al escenario didáctico de los cursos de matemáticas de secundaria, ni tampoco de Geometría analítica en el bachillerato. Por lo cual se desprenden rupturas cognitivas, al perderse la filiación conceptual de la recta con la proporción directa, ya que no se hace evidente la razón de cambio constante como característica inherente a la recta misma.

Es de resaltar que en expresiones de proporcionalidad directa como:

$$A \propto B,$$

que se usaban en las culturas antiguas como la griega, babilónica y egipcia, la constante de proporcionalidad k, como aparece en la siguiente expresión:

$$A = k\,B,$$

surgió a partir de la comparación entre números (*A* y *B*) que también podrían estar representando segmentos, ya que en ese entonces aun no se concebía a la variable como está definida en la actualidad. Por otra parte en la ecuación de la recta que pasa por el origen, cuya expresión es:

$$y=k\,x$$

la constante de proporcionalidad conlleva a una relación entre variables, que pueden tomar valores continuos o discretos.

En la didáctica actual, a menudo no se resalta la diferencia conceptual entre "las dos constantes de proporcionalidad", ya que la primera, es referida a la comparación entre "cantidades dadas", y la segunda entre "cantidades variables", de hay su denominación como tasa de variación constante. Por otra parte sus respectivas representaciones son distintas, para la primera proporción, sus elementos se pueden ubicar en la recta numérica, en cambio la proporción entre variables, tiene asociada una gráfica de una recta que pasa por el origen.

Esta filiación epistemológica tampoco se explicita de manera enfática en el escenario escolar. Cuando en un curso de Física de bachillerato se estudia la segunda ley de Newton, puede verse como una relación proporcional entre dos fuerzas horizontales distintas y las respectivas aceleraciones que producen, guardando entre ellas una relación de la forma:

$$\frac{F_1}{a_1}=\frac{F_2}{a_2}$$

Esta expresión puede ser reescrita como:

$$F = m\,a$$

Donde la masa *m* adquiere el papel de constante de proporcionalidad, con una connotación distinta, por la naturaleza misma de las variables mecánicas.

Es en el tercer escenario donde se empiezan a dar las condiciones para la ruptura epistemológica entre la noción de proporcionalidad y la noción de linealidad, ya que a partir del estudio de la solución de sistemas de ecuaciones lineales, es como se fue teorizando y dándole forma incipiente a los conceptos del Álgebra lineal (Dorier, 2000).

A mediados del siglo XIX, ya en el cuarto escenario histórico aparecen de manera preponderante conceptos, tales como dependencia lineal entre vectores definidos en *R*. En términos didácticos no se hace evidente la filiación epistemológica de la dependencia lineal con la proporción directa, ya que dados dos vectores v_1 y v_2 definidos en el espacio vectorial *V*. Partiendo de la consideración de que:

$$v_2 = cv_1,$$

para un escalar *c* diferente de cero, o sea dos vectores colineales, es evidente que

$$c_1 v_1 - c_2 v_2 = 0, \text{ donde } c = \frac{c_1}{c_2}.$$

que implica que dichos vectores son linealmente dependientes. Entonces existen constantes c_1 y c_2 tal que $c_1 v_1 + c_2 v_2 = 0$. Por lo que si $c_1 \neq 0$ y despejando v_1 se tiene

$$v_1 = -\frac{c_2}{c_1} v_2$$

El decir que v_1 es múltiplo escalar de v_2 implica una filiación epistemológica en cuyo caso la "constante de proporcionalidad" toma el estatus de razón de cambio constante entre vectores:

$$k = -\frac{c_2}{c_1}, \text{ por lo que } v_1 = k\, v_2$$

Aunque históricamente la conceptualización de dependencia e independencia lineal surge de la relación que hay entre las ecuaciones en un sistema, esto proviene del hecho de que una ecuación sea múltiplo de otra, o no lo sea (Dorier, 2000), sin embargo existe una filiación epistemológica entre lo anteriormente dicho y la proporción directa, lo cual debiera jugar un papel determinado en la didáctica. Esto es, en parte, al menos lo que le daría un significado a la definición formal de dependencia lineal (Grossman, 1996):

Dependencia e independencia lineal Sean $v_1, v_2, \ldots, v_n$, n vectores en un espacio vectorial V. Entonces se dice que los vectores son linealmente dependientes si existen n escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ no todos cero tales que

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n = 0$$

Si los vectores no son linealmente dependientes, se dice que son linealmente independientes.

[….], $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son linealmente independientes si la ecuación

$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n = 0$ se cumple sólo para $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$

Sin embargo, para la generalización de la dependencia lineal entre *n* vectores, se requiere hacer una ruptura epistemológica con la proporcionalidad para "dar paso" a la construcción más amplia de los conceptos de independencia y dependencia lineal. Ello es parte de la propia evolución de la noción de linealidad, lo cual da evidencia del estatus metamatemático que tiene, ya que es un elemento de información y conocimiento acerca del funcionamiento en general del aprendizaje de las matemáticas.

Desde la perspectiva teórica de las filiaciones y rupturas epistemológicas entre las nociones de proporcionalidad y linealidad, se rescata una *idea germinal*, (Cantoral, 2001) de la *linealidad*., la *ratio mutabilitas constant* –razón de cambio constante- (Acosta, 2011).

Conclusiones

El análisis aquí desarrollado, deja entrever varias filiaciones y rupturas epistemológicas entre determinados significados de las nociones de proporcionalidad y linealidad, que tiene su trascendencia en la didáctica.

Hay necesidad de hacer explícitas las filiaciones y rupturas epistemológicas de la *linealidad* en la didáctica vigente, desde la matemática elemental hasta la matemática avanzada. Esto significa, primero identificarlas, después darles seguimiento, y posteriormente dar alternativas sobre su puesta en escena en ambiente escolar.

La linealidad está encajada en los procesos de proporcionalidad directa, y esto se palpa en resultados ancestrales y ha representado un elemento de análisis y descubrimiento.

Se han mostrado los distintos estatus epistemológicos que tiene la constante de proporcionalidad durante su evolución conceptual, lo cual permite desde una comparación entre: cantidades dadas (adimensionales y dimensionales), números reales, variables y vectores, entre otros.

Se considera a la constante de proporcionalidad, como un antecedente conceptual que va a evolucionar en la *ratio mutabilitas constant*, la cual se ha propuesto como la idea germinal que denota a la tasa de variación constante.

A partir de la visión de esta investigación se valora a la noción de linealidad como un ingrediente básico en la construcción del saber matemático. Tal noción cumple un cometido de articulación entre la matemática elemental y la matemática avanzada.

En el caso de dos vectores hay una clara filiación entre la noción de proporcionalidad con la dependencia lineal, aunque cabe aclarar que cuando se hace referencia a tres o más vectores, se involucran nuevos conceptos vinculados a los espacios vectoriales, que le van dando sustento a la dependencia lineal y al mismo tiempo contribuyen a la construcción de la noción de linealidad.

A través del rescate epistemológico de las filiaciones y rupturas, entre los significados de las nociones de proporcionalidad y linealidad, se posibilita el estructurar un discurso didáctico congruente y articulado en la matemática escolar.

Referencias bibliográficas

Acosta, J. (2011). *La noción de linealidad. Una aproximación epistemológica, cognitiva, didáctica y sociocultural.* Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Instituto Politécnico Nacional, México.

Acosta, J., Rondero, C., Tarasenko, A. (2008) Un enfoque histórico y epistemológico de la noción de linealidad. *Memoria HPM* (pp. 301-308). México: Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Acosta, J., Rondero, C., Tarasenko, A. (2010) La resignificación de la noción de linealidad. *ALME 23* México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cantoral, R. (2001). *Matemática Educativa. Un estudio de la formación social de la analiticidad*. México: Grupo Editorial Iberoamérica

Chevallard, Y. (1997) *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. Editorial* Aique. Buenos Aires: Argentina.

Dorier, J. (2000). *On the Teaching of Linear Algebra*. Dordrecht. Kluwer Academic Publishers.

Grossman, S. (1996). *Álgebra lineal.* (5ª ed.). México: Editorial Mc Graw Hill

Hofmann, J. (2002). *Historia de la Matemática.* México: Editorial Limusa.

UNA APROXIMACIÓN A LA PRUEBA A TRAVÉS DE LA ARITMÉTICA

Jesús Salinas Herrera, Alexander Maz Machado
Colegio de Ciencias y Humanidades, UNAM — México
Departamento de Matemáticas Universidad de Córdoba — España
jes54@servidor.unam.mx, ma1mamaa@uco.es

Resumen. Se presentan resultados de un experimento de enseñanza, en el que se utiliza una perspectiva histórica y cultural de las matemáticas. Este experimento se llevó a cabo con alumnos de primer semestre de bachillerato con el propósito de introducirlos en el aspecto deductivo de las matemáticas, a través de la aritmética. Se observa el uso que hacen los estudiantes de diagramas de la aritmética pitagórica y se analiza el tipo de desarrollo cognitivo que muestran.

Palabras clave: historia, cultura, números poligonales, prueba

Abstract. We present the results of a teaching experiment, which uses a historical and cultural perspective of the mathematics. This experiment was carried out by students of the first semester of high school with the intention to introduce them in the deductive aspect of mathematics, through the arithmetic. It is observed the use that they do of the Pythagorean graphs and there is analyzed the type of cognitive development that they show.

Key words: history, culture, polygonal numbers, proof

Introducción

En este documento se reportan los resultados de un experimento de enseñanza (Steffe & Thompson, 2000; Salinas, 2010) que se realizó en un curso regular con alumnos de primer semestre de bachillerato, cuyos contenidos están centrados en la aritmética y el álgebra. El tratamiento histórico aquí, destaca el valor del racionalismo creado por los griegos en las matemáticas. Por medio de este enfoque generamos las condiciones para que los alumnos encuentren interés y pongan en marcha un proceso de validación (Balacheff, 2000)

Se aborda el tema de los números poligonales, el cual fue estudiado por los pitagóricos desde la antigüedad como parte de una temprana teoría de números. Los números poligonales han influido en la construcción de muchos resultados matemáticos a lo largo de la historia (Duke, 1997; Guy, 1994). En el ámbito de la educación matemática existen múltiples trabajos que han abordado el tema de los números poligonales, tanto para reflexionar desde un punto de vista cognitivo como para realizar propuestas de tipo curricular (Andrew, 1990; Norman, 1991; Castro, 1995). Sin embargo, son más abundantes los estudios que relacionan a los números poligonales con el desarrollo del pensamiento algebraico y los procesos de inducción.

Problema de Investigación

¿El tratamiento histórico de la noción de número puede contribuir para introducir a los alumnos a la demostración?

Marco teórico

Nuestra perspectiva central es que la interacción entre la historia de las matemáticas y la educación matemática ayuda a construir estrategias que contribuyen al proceso de enseñanza de las matemáticas (Fauvel & Mannen, 2000; Maz-Machado, 1999).

Una manera de conectar con este enfoque es considerar diferentes ámbitos de estudio que se relacionan con el aspecto socio cultural. Así, consideramos la perspectiva sociocultural de Vygotsky (1995), en la cual el proceso de aprendizaje es considerado un proceso de apropiación de los métodos de acción y de representación de una cultura dada (Radford, 1997). En dicha apropiación, los instrumentos psicológicos o simbólicos desempeñan una función esencial en el desarrollo cognitivo, son los recursos simbólicos: signos, símbolos, textos, formulas, medios gráfico-simbólicos que ayudan al individuo a realizar procesos de pensamiento más complejos (Kozulin, 2000). Este experimento de enseñanza se basa en utilizar los diagramas pitagóricos de los números poligonales para realizar una demostración.

Metodología

De acuerdo con nuestro marco teórico, en las actividades se propició la interacción interpersonal de grupos pequeños de personas, fundamentalmente entre parejas de estudiantes. Las intervenciones del profesor-investigador estuvieron orientadas a describir previamente el contexto histórico y cultural en el que se desarrolló la aritmética pitagórica, e hizo énfasis en la relación de las matemáticas con el pensamiento filosófico de los pitagóricos. Las actividades que realizaron los estudiantes fueron de investigación documental para complementar la información sobre los orígenes de la filosofía y la diferencia de la matemática helena con respecto a las antiguas culturas de Egipto y Mesopotamia. En las siguientes sesiones, los estudiantes debían observar e interpretar los diagramas pitagóricos que se representan en la fig. 1, y reconocer los patrones aritméticos y geométricos que les permitieran resolver algunos problemas que adaptamos de la aritmética pitagórica.

La población de estudio

La población observada fue un grupo de 24 alumnos de primer semestre del bachillerato del Colegio de Ciencias y Humanidades, UNAM, durante las actividades escolares de un curso ordinario. Participaron 12 hombres y 12 mujeres con edades entre 15 y 16 años.

Procedimiento

Se aplicó una unidad didáctica en la que se realizaron diversas actividades. La duración fue de 6 horas. En dos sesiones de una hora, cada una, el profesor-investigador describió y explicó a los estudiantes algunas ideas centrales del pensamiento numérico de los pitagóricos, en el marco de su contexto cultural (Klein, 1992). Estás fueron esencialmente “la visión del universo físico como un cosmos, como un universo ordenado, en contraposición al caos. Un universo regido por la armonía, por unas leyes asequibles a la razón” (González Urbaneja, 2009, p. 13). Asimismo, la idea de que todo en el universo es número y gracias a los números el universo es inteligible.

Los alumnos complementaron esta información con una investigación documental. En las siguientes dos sesiones, de hora y media cada una, los estudiantes tenían que observar el diagrama de la fig. 1 y resolver los siguientes problemas:

1. Indica los números triangular, cuadrado, pentagonal y hexagonal que siguen a los que están en la tabla; y dibújalos.

2. Indica las series a partir de las cuales se forman los números poligonales que aparecen. Escribe los números poligonales que siguen, hasta los números decagonales. Asimismo, escribe las series que permiten formar dichos números.

3. Dibuja el patrón geométrico que permite construir las figuras de la tabla.

Finalmente, los estudiantes debía probar el siguiente teorema: Probar que todo número cuadrado es la suma de dos números triangulares sucesivos.

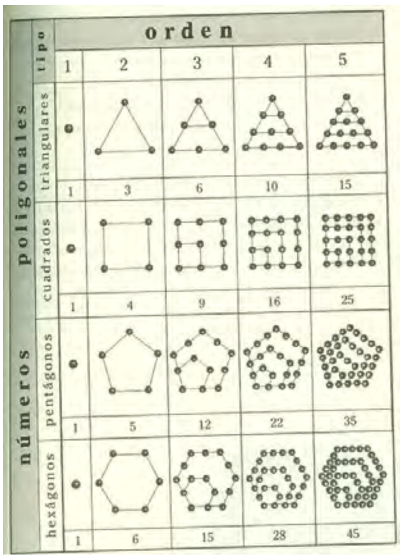


Figura 1. Representación de los números triangulares, cuadrados, pentagonales y hexagonales. Tomado, de González Urbaneja (2009).

Instrumentos de observación

Los datos que se obtuvieron fueron tomados de las hojas de actividades realizadas en el salón de clase. Tales datos fueron expresados en forma de textos y se realizó un análisis cualitativo de ellos. En la primera sesión interesó observar si los alumnos interpretan adecuadamente los patrones aritméticos y geométricos del diagrama de la Fig. 1. En la segunda sesión, se observó si los estudiantes establecen conexiones entre la secuencia numérica, la secuencia de representaciones geométrica y la secuencia de desarrollos aritméticos, de los números poligonales; y si aplican estas conexiones para caracterizar otros números poligonales. Finalmente, se observó que hacen estos estudiantes al intentar probar un teorema de la aritmética pitagórica. El análisis de las respuestas a esta actividad es en que se centra este reporte.

Resultados y discusión

En las actividades previas, a la que vamos a analizar, los alumnos manifiestan habilidad para la representación aritmética y geométrica de los números poligonales, incluso no limitadas a los números triangulares y cuadrados. Se observa que reconocen, el patrón geométrico y aritmético que se encuentra en la fig. 1; vinculan ambos patrones y dan continuidad a las secuencias de números representados. Esta situación les permite realizar tareas donde trabajan con sucesiones y series de números y relaciones entre ellas, es decir hay un desarrollo en la operatividad o tratamiento del registro de representación aritmético. Las respuestas para probar el enunciado general, tienen diferentes características, las cuales reflejan un distinto desarrollo cognitivo. El mayor número de alumnos, 66.6%, solo responden poniendo dos o tres ejemplos. Dibujan casos de dos números triangulares sucesivos y el número cuadrado resultante.

En la respuesta que se muestra a continuación hay un tratamiento por separado en cada uno de los registros de representación usados, el aritmético y el geométrico. Posteriormente, establecen una correspondencia entre ellos. Así, primero realizan la suma de casos de números triangulares sucesivos y encuentran el resultado, enseguida representan geométricamente los números de las operaciones aritméticas realizadas y muestran que corresponde con un número cuadrado. Las figuras se usan como mera ilustración, no se opera con ellas, no se analizan en partes, etc.

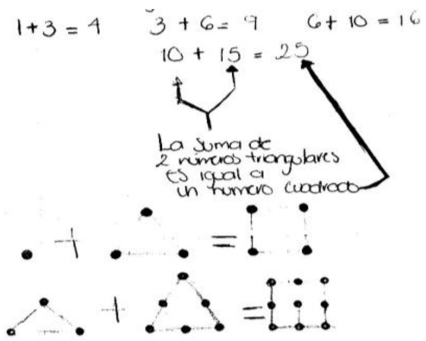


Fig. 2. En esta respuesta los alumnos incorporan otro código, distinguen dos colores uno para los números triangulares y otro para los números cuadrados.

Así, las figuras no proporcionan un soporte intuitivo fundamental, no juegan un papel heurístico para guiar la demostración que se requiere construir. Este modo de validación es el más rudimentario en los procesos de prueba. Se le ha denominado empirismo ingenuo y "consiste en asegurar la validez de un enunciado después de haberlo verificado en algunos casos" (Balacheff, 2000, p. 26). Otras respuestas, 25% de ellas, muestran indicios, de percibir el carácter general de la tarea. A continuación se muestra dos ejemplos de este tipo de repuesta.

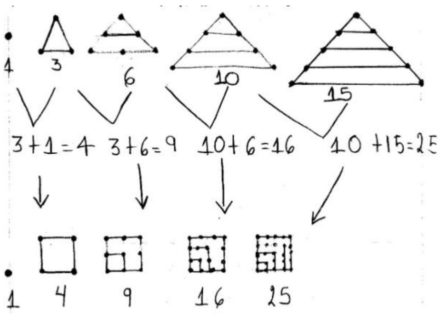


Fig. 3. Otra prueba pragmática.

Análogamente al caso anterior, el papel intuitivo que están jugando las figuras se remite a la mera representación de los números triangulares y cuadrados. Las figuras solo aparecen como dibujos que ilustran que la suma de dos números triangulares da un número cuadrado. Sin embargo, los alumnos no realizan ningún tipo de tratamiento figural. No se muestra ninguna relación geométrica entre los triángulos y cuadrados que están representando a dichas sucesiones de números. Los triángulos y cuadrados aparecen separadamente. De esta manera, es claro que las figuras aparecen como dibujos que no juegan un papel heurístico para guiar a los alumnos en la elaboración de la prueba que se les pide hacer. Este tipo de prueba es ostensiva, como la anterior. "Las operaciones y los conceptos que ésta entraña son ejecutados; no son diferenciados ni articulados, y solamente se presentan para ser observados" (Balacheff, 2000, p. 20). En términos de Balacheff ambas son pruebas pragmática, es decir, aquellas que recurren a la acción o a la ostentación (Balacheff, 2000).

Sin embargo, esta prueba es diferente a la anterior, la prueba que aportan estos alumnos sugiere un proceso inductivo, puesto que las operaciones que realizan parecen indicar que podrían seguirse haciendo indefinidamente. En este sentido es claro que los alumnos se percatan del carácter general del enunciado. Por lo tanto, estas sugieren un tránsito hacia las pruebas intelectuales, puesto que éstas se fundamentan "en la toma de conciencia del carácter general de las situaciones consideradas" (Balacheff, 2000, p. 22). Otras respuesta, que exhibe una rasgo cognitivo diferente es la que tiene un tratamiento figural.

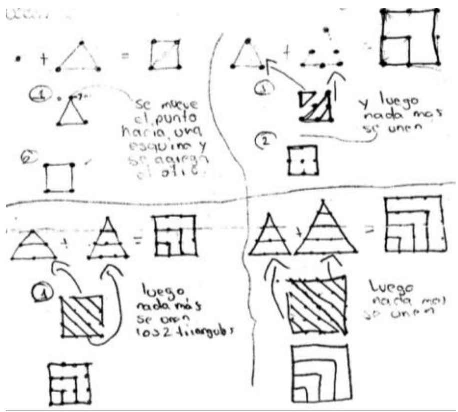


Fig. 4. Esta respuesta muestra habilidad de las alumnas para hacer un tratamiento figural.

En ésta la representación geométrica opera como un apoyo heurístico importante para producir una argumentación que busca validar el enunciado que se quiere demostrar. En este caso, la figura del cuadrado que representa el número poligonal que resulta de dos números triangulares sucesivos, es descompuesto en otras unidades geométricas. Esta respuesta prefigura una habilidad necesaria para la realización de una prueba intelectual.

Finalmente, encontramos una respuesta en la cual los alumnos muestran una reconfiguración de la figura, análoga a la comentada anteriormente, pero además hacen explícita la distinción entre diferentes ámbitos matemáticos y sus respectivos registros de representación.

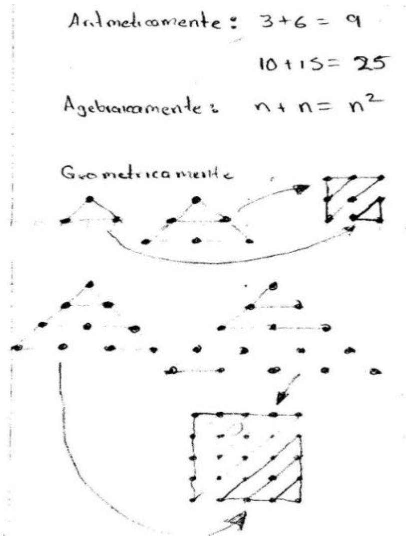


Fig.5. En esta respuesta se usan formulaciones de propiedades y sus relaciones.

Los alumnos intentan probar la verdad del teorema en cuestión utilizando algebra, pero de manera errónea. No manejan bien el lenguaje algebraico, para expresar que la suma de dos números sucesivos que tienen la propiedad de ser triangulares da como resultado un número cuadrado. Sin embargo, por la intensión, podemos decir que ésta es un tipo de prueba que muestra indicios de la que Balacheff denomina intelectual, es decir, “pruebas que separándose de la acción, se apoya en formulaciones de las propiedades en juego y sus relaciones." (Balacheff, 2000, p. 22).

Conclusiones

En general, para probar un resultado matemático, los estudiantes tienen una idea inductiva característica de las ciencias experimentales, que para el caso de las matemáticas confunde dos procesos distintos: la construcción del conocimiento y la prueba de su verdad. Esta situación requiere de un tratamiento explícito de parte del profesor.

Es importante señalar que en algunos alumnos aparecen indicios de desarrollo cognitivo que apunta a separarse de las pruebas pragmáticas, basadas en la ostentación. Así, el experimento de enseñanza permitió observar diferente desarrollo cognitivo en los alumnos para la realización de pruebas y en consecuencia abre la posibilidad de indagar que medios pueden ser utilizados para provocar el desarrollo cognitivo deseado.

El tratamiento geométrico que realizan algunos estudiantes para probar el teorema en cuestión, sugiere la conveniencia de indagar si esta habilidad está relacionada con cierto desarrollo cognitivo provocado o estimulado por el uso del diagrama de la figura 1.

Considerando que el experimento de enseñanza se realiza con alumnos que en el siguiente semestre abordaran temas de geometría euclidiana, los resultados obtenidos hacen recomendable abordar este tipo de problemas para introducir gradualmente a los alumnos al aspecto deductivo de la matemática, previamente al curso de geometría.

Referencias bibliográficas

Andrew, P. (1990). Generalising number patterns. *Mathematics in School.* pp. 9-13

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas.* Bogotá: Universidad de los Andes.

Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales*. Granada: Edit. Comares.

Duke, W. (1997). Some old problems and new results about quadratic forms. *Notices of the AMS 44 (2),* 190-196.

Fauvel, J. & Mannen, J. V. (2000). *History in Mathematics Education:* the ICMI study, Dordreght: Kluwer Academic Publisher.

González Urbaneja, P. M. (2009). *Pitágoras. El filósofo del número.* Madrid: Nivola.

Guy, R. K. (1994). Every number is expressible as a sum of how many polygonal numbers?, *Amer. Math. Monthly 101*,169-172.

Klein, M. (1992). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días, I*. Madrid: Alianza Editorial.

Kozulin, A. (2000). *Instrumentos Psicológicos*. Barcelona: Paidós.

Maz-Machado, A. (1999). Historia de la matemática en clase: ¿por qué? Y ¿para qué? En Berenger, Mª. I.; Cardeñoso, J. Mª. y Toquero M. (Eds.)(1999). *Investigación en el aula de matemáticas. Matemáticas en la sociedad.* Granada: Sociedad Thales y Departamento de Didáctica de la matemática.

Norman, F. A. (1991). Figurate Numbers in the classroom. *Arithmetic Teacher38(7),* 42-45

Radford, L. (1997). L`invention d`une idée mathematique: la deuxieme inconnue en algebra. *Repères, Revue des IREMs **28*** (july), 81-96

Salinas, J. (2010). El uso de la historia de las matemáticas para el aprendizaje de la geometría en alumnos del bachillerato. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* 557-568. Lleida: SEIEM.

Steffe, L. & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements. En A. E. Nelly y R. A. Lesh (Eds). *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Mahwah: NJ: Lawrence Erlbaum.

Vygotsky, L. S. (1995). *Pensamiento y Lenguaje*. Barcelona: Paidós.

¿QUÉ COMPRENDEN DE ECUACIONES ALGEBRAICAS LOS ALUMNOS AL FINALIZAR LA ESCUELA SECUNDARIA?

Marcel Pochulu, Raquel Abrate, Ivana Gabetta, Silvina Sierra
Universidad Nacional de Villa María Argentina
marcelpochulu@hotmail.com

Resumen. Este trabajo tuvo por objetivo determinar lo que han comprendido sobre ecuaciones algebraicas los alumnos, al finalizar la escuela secundaria e ingresar en la universidad. Para ello, analizamos las producciones escritas de 55 alumnos aspirantes a ingresar a una carrera de nivel universitario, posicionándonos en el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática, como marco teórico y metodológico de la Didáctica de la Matemática. Analizar la comprensión que tienen los alumnos sobre las ecuaciones, nos llevó a determinar si reconocen el campo de problemas en que se involucra este objeto matemático, aplican y recuerdan (implícitamente en la mayoría de los casos) los conceptos, propiedades y procedimientos que se requieren para llevar a cabo exitosamente las tareas, y utilizan lenguaje y argumentos apropiados en sus explicaciones. Como resultado final, obtuvimos una aproximación a la configuración cognitiva de cada estudiante, lo que permitió valorar la comprensión que tienen sobre el objeto matemático en cuestión.

Palabras clave: ecuaciones, comprensión, evaluación diagnóstica en matemática, enfoque ontosemiótico

Abstract. This work had as goal to establish what the students have learnt about algebraic equations after finishing high school and getting into college. For this reason, we have analyzed written productions of about 55 applicant students to join a college career, finding the position of the Onto-Semiotic Approach to Mathematics Education, as theoretical and methodical framework in the Teaching of Mathematics. After finding out as much as possible about the students´ understanding in equations, let us determine if they are able to recognize in process of completion of the mathematical object; if they can apply and remember (in most cases implied) concepts, properties and procedures required to carry out successful tasks. And if they have the chance to use suitable language and arguments in their explanations. As the final outcome, we approached the cognitive features of each student and it allowed us to regard students´ comprehension about the mathematical object in question.

Key words: equations, understanding, diagnostic mathematics assessment, onto-semiotic approach

Introducción

Cuando los alumnos finalizan la escuela secundaria y siguen estudios superiores en la universidad, donde la Matemática está presente en el diseño curricular de la carrera escogida, es frecuente que atraviesen por cursos de admisión o de nivelación, los cuales suelen tener como objetivo determinar lo que saben sobre ciertos temas considerados básicos en la disciplina. Habitualmente se les administra evaluaciones donde se presentan actividades y el éxito o fracaso obtenido, cuantificado en una calificación, termina siendo un indicador de lo que "saben" del tema. Esta calificación, puesta en el mejor de los casos con absoluta justicia, puede indicar que el alumno sabe de ciertos temas, pero no cuánto sabe de él, cómo lo sabe o por qué sabe lo que sabe.

Determinar cuánto sabe un alumno de un determinado tema y cómo lo sabe, nos remite a valorar la comprensión que tiene de un objeto matemático. En este sentido, en Rodríguez (2010) se expresa, como producto de un consenso entre especialistas sobre aspectos cognitivos referidos a la enseñanza de la Matemática, que:

> Comprender un objeto matemático significa haber transitado por diversas experiencias que le permitan al estudiante producir, organizar y reorganizar la red de relaciones que se deben establecer en la resolución de una situación problemática (intra y extra-matemática) que "obliga" al funcionamiento del objeto, los procedimientos o técnicas que se despliegan para resolverla, las definiciones, propiedades, argumentos que validan las acciones realizadas, todas ellas soportadas y reguladas por el lenguaje simbólico, propio de la Matemática, y la lengua natural. (p. 122)

Bajo esta concepción, nos hemos propuesto dar respuesta a la siguiente pregunta directriz de nuestra investigación: ¿Qué han comprendido sobre ecuaciones algebraicas los alumnos al ingresar a la Universidad? Como contexto de estudio hemos considerado las prácticas operativas y discursivas realizadas por alumnos aspirantes a ingresar a una carrera de ingeniería de la Universidad Nacional de Villa María (UNVM), de Argentina.

Como objetivo de trabajo nos propusimos valorar lo que han comprendido sobre ecuaciones algebraicas con una incógnita (lineales, cuadráticas, fracciones racionales y las que involucran radicales) los alumnos al ingresar a la universidad, con la finalidad de guiar a nuestros estudiantes en el aprendizaje sobre este objeto matemático en particular. No hemos considerado las ecuaciones trascendentes, pues no fueron objeto de estudio en el nivel secundario.

Marco teórico

El trabajo se encuentra encuadrado dentro de la Teoría de Funciones Semióticas, una de las herramientas provistas por el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción matemática (EOS), como línea de investigación en Didáctica de la Matemática.

El EOS entiende el significado de un objeto matemático en términos de lo que se puede hacer con él en una práctica matemática. Esta correspondencia se realiza a través de una función semiótica que tiene por antecedente a un objeto matemático (o la expresión que puede designarlo), y como consecuente al sistema de prácticas matemáticas realizadas por una persona (o compartida en el seno de una institución) ante una cierta clase de situaciones-problemas. En consecuencia, el significado de un objeto, considerado como "expresión" en una función semiótica, será el "contenido" de esta función semiótica, y ha sido establecido por un sujeto siguiendo una regla o criterio de correspondencia.

Por otra parte, el EOS concibe a la comprensión básicamente como competencia y no tanto como proceso mental (Godino 2000, Font 2001), pues sostiene que un sujeto comprende un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diferentes prácticas. A su vez, Godino (2000) expresa que se puede entender a la comprensión en términos de funciones semióticas. Cuando un sujeto realiza una práctica matemática es necesario que active un conglomerado formado por algunos (o todos) de los elementos primarios que componen un objeto matemático:

- *Lenguaje*: es entendido en este marco teórico como los términos, expresiones, notaciones, gráficos, etc., los que se presentan, a su vez, en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, etc.).
- *Situaciones-problemas*: son las actividades, tareas o ejercicios, tanto extra-matemáticas como intra-matemáticas.
- *Conceptos-definición*: corresponden a aquellas construcciones o elementos que son introducidos mediante definiciones o descripciones de un objeto.
- *Proposiciones*: enunciados o afirmaciones sobre los conceptos.
- *Procedimientos*: comprenden algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo o modos de ejecutar determinadas acciones.
- *Argumentos*: comprenden enunciados y razonamientos usados para validar, justificar o explicar las proposiciones y los procedimientos, o la validez de la solución a un problema, los cuales pueden ser deductivos o de otro tipo.

A su vez, estos seis objetos primarios se organizan en entidades más complejas para constituir sistemas conceptuales y teorías. Se relacionan entre sí formando configuraciones, definidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos, y constituyen los elementos del significado de un objeto matemático. Estas configuraciones pueden ser epistémicas si son redes de objetos institucionales, o cognitivas si representan redes de objetos personales. Tanto los sistemas de prácticas como las configuraciones se proponen como herramientas teóricas para describir los conocimientos matemáticos, en su doble versión, personal e institucional (Godino y Batanero, 1994). Más específicamente, la Teoría de las Funciones Semióticas establece que el significado de un objeto matemático es el par "Configuración epistémica/prácticas que posibilita", siendo la definición (explícita o implícita) del concepto matemático solo uno de los componentes de la configuración epistémica.

Metodología de la investigación

Hemos analizado las prácticas matemáticas (operativas y discursivas) que efectuaron 55 alumnos aspirantes a ingresar a una carrera de ingeniería, a quienes se les propuso la realización de un conjunto de tareas referidas a ecuaciones. Posteriormente seleccionamos los que habitualmente se considerarían "aprobados" por haber logrado resolver correctamente el 50% o más de las consignas planteadas (13 alumnos sobre el total de 55). De estos trabajos, examinamos las producciones enfocándonos en el análisis del sistema de prácticas matemáticas realizadas por los estudiantes ante las situaciones–problemas planteadas. Finalmente, intentamos establecer la relación entre este conglomerado de prácticas que los alumnos son capaces de realizar con el objeto matemático en cuestión (ecuaciones) y el significado que pudieron construir acerca del mismo.

Analizar la comprensión que tienen los alumnos sobre las ecuaciones, posicionados en el EOS, nos llevó a determinar si reconocen el campo de problemas en que se involucra este objeto matemático, si aplican y recuerdan (implícitamente en la mayoría de los casos) los conceptos, propiedades y procedimientos que se requieren para llevar a cabo exitosamente las tareas, y si utilizan lenguaje y argumentos apropiados en sus explicaciones.

Para ello, llevamos a cabo actos de semiosis con la intención de establecer una correspondencia entre objetos matemáticos (expresión-contenido) a través de una función semiótica, para la cual se ha seguido una regla o criterio de correlación dada por nuestra experiencia como docentes e investigadores. Como resultado final obtuvimos una aproximación a la configuración cognitiva de los alumnos, lo que permitió valorar la comprensión que tienen sobre el objeto matemático ecuaciones, al compararla con una configuración epistémica de referencia. A su vez, con la finalidad de efectuar un análisis profundo de la comprensión que se tiene de ecuaciones, realizamos algunas entrevistas clínicas para ahondar aún más en la problemática en cuestión.

Algunos resultados y discusión

Para cada alumno se realizó una configuración cognitiva y se la comparó con la configuración epistémica construida para el objeto matemático ecuaciones. Es de destacar que si consideramos la unión de todas las configuraciones cognitivas, encontramos todos los elementos de la configuración epistémica. Esto es, el conocimiento se halla distribuido en los estudiantes, de tal forma que ningún alumno sabe acabadamente del tema, pero todos los alumnos saben sobre algo.

Transcribimos a continuación fragmentos de las evaluaciones de los alumnos con las interpretaciones realizadas para conformar cada configuración cognitiva. Las interpretaciones son realizadas teniendo en cuenta los 6 objetos primarios que considera el EOS que componen una configuración cognitiva o epistémica: situación problema, conceptos, propiedades, procedimientos, argumentos y lenguaje. Sólo expondremos algunas actividades que consideramos representativas, en tanto se rescatan algunos significados construidos por los alumnos en torno a las ecuaciones.

La alumna A1 (figura 1) aplica en forma correcta la propiedad distributiva y resuelve adecuadamente la ecuación utilizando una fórmula (procedimiento). Sin embargo, no advierte que si un producto es nulo, algún factor o todos deben serlo (propiedad), con lo que le hubieran resultado mucho más sencillos los cálculos. Tampoco verifica (procedimiento) que el valor encontrado es la solución (concepto) de la ecuación dada.

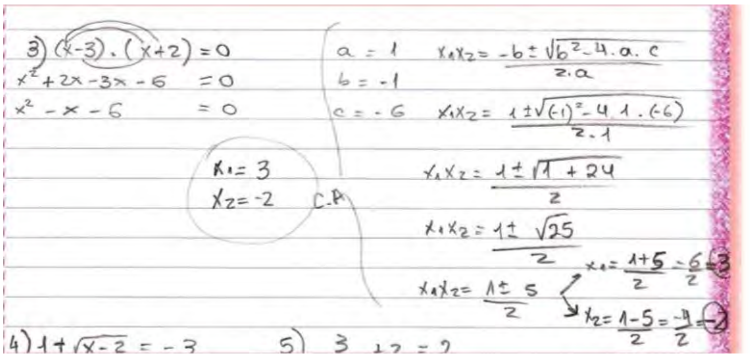


Figura 1. Resolución de la actividad 3 de la alumna A1

El alumno A2 (figura 2) aplica correctamente la transposición de términos (procedimiento) para resolver las ecuaciones, reconoce propiedades de la radicación y opera (procedimiento) adecuadamente con números enteros, a pesar de indicar de manera incorrecta el cuadrado de -4. En la ecuación del ítem 5, no advierte que si una fracción es igual a cero, entonces debe serlo el numerador (propiedad). Continúa operando sin advertir la propiedad de elemento absorbente del cero en la multiplicación lo que lo lleva a obtener un cociente con divisor cero (concepto) que ignora, y termina incorrectamente la resolución. En ambas ecuaciones asume que el resultado obtenido con el procedimiento empleado ya es una solución (concepto) de la misma, y no verifica ni expresa el conjunto solución.

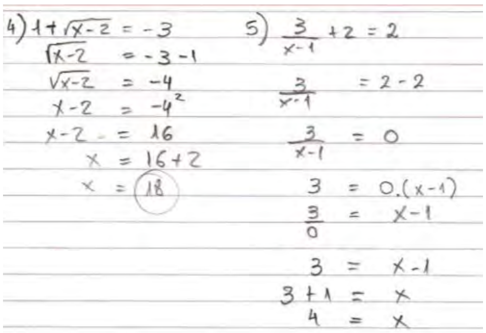


Figura 2. Resolución de las actividades 4 y 5 del alumno A2

Algo similar ocurre con el alumno A3 (figura 3) que, ante la misma ecuación (actividad 5), resuelve correctamente (procedimiento) y concluye que la última expresión obtenida no es una igualdad (concepto) pero nada dice acerca de la solución de dicha ecuación.

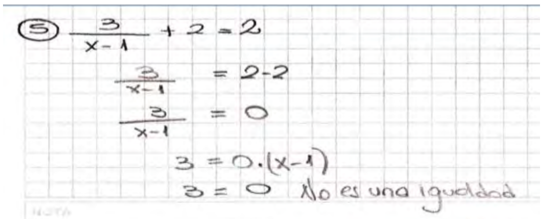


Figura 3. Resolución de la actividad 5 del alumno A3

El alumno A4 (figura 4) aplicó la propiedad distributiva para encontrar el cuadrado de un binomio (concepto). Si bien el trinomio cuadrado perfecto que obtiene es correcto, interpreta que la expresión obtenida es una ecuación de segundo grado (concepto) y busca el conjunto solución aplicando una fórmula (procedimiento), equivocándose en el proceso y obteniendo un único valor para la incógnita, omitiendo su multiplicidad (concepto). No obstante, el valor que obtiene al final de dicho procedimiento no es tratado como solución (concepto) de una ecuación puesto que en ningún momento verifica que efectivamente satisface la "supuesta" ecuación.

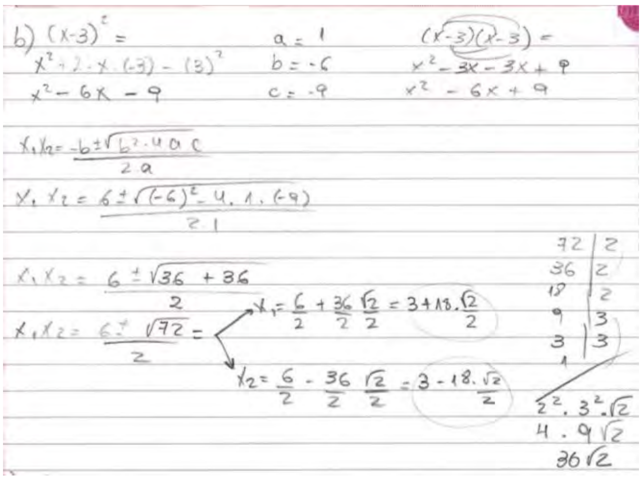


Figura 4. Resolución de la actividad 8 del alumno A4

En la entrevista con la alumna A5 (figura 5) se advierte que aplica en forma correcta la transposición de términos (procedimiento) para resolver ambas ecuaciones, reconoce propiedades de la radicación y opera (procedimiento) adecuadamente con números enteros. Sin embargo, en su argumentación, utiliza la expresión "término" (concepto) como sinónimo de "miembro" de una ecuación (concepto). A su vez, aparecen elementos lingüísticos incorrectos, como "*radicandos de un término*", "*números independientes*" y "*signo opuesto, la suma*". En este último caso, se pone de manifiesto que no advierte la diferencia entre "signo" y "operación" (conceptos). Asimismo, alude a proposiciones que son enunciadas en términos de metáforas operacionales, según Abrate, Pochulu y Font (2009, p. 124): "*pasamos hacia el otro término con la operación inversa*", "*pasamos la raíz como exponente cuadrado*", "*quede mi variable sola en compañía de su coeficiente*", "*Si está multiplicando lo pasamos dividiendo o viceversa*", entre otras.

La alumna A6 (figura 6) resuelve correctamente la situación problemática con datos numéricos que se le presenta en primera instancia; sin embargo, no es capaz de resolver la situación que se le presenta a continuación, con datos representados por símbolos, cuya estructura es idéntica a la primera.

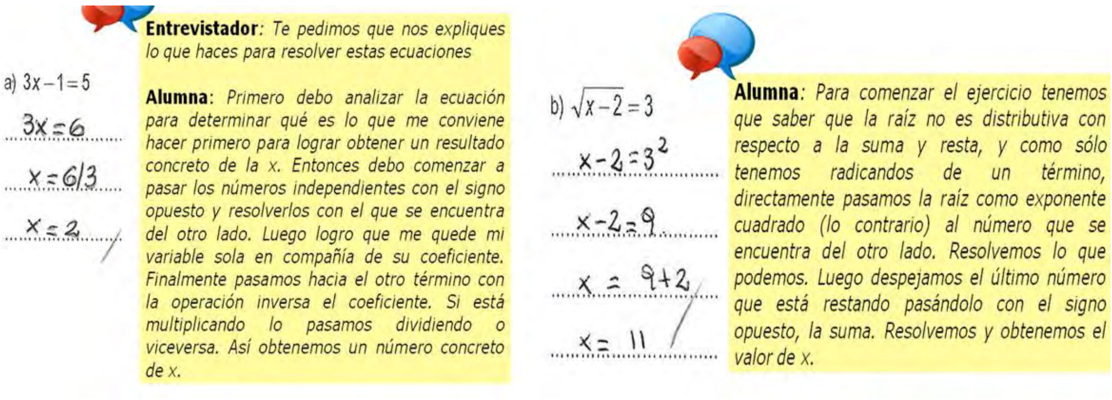


Figura 5. Entrevista con la alumna A5

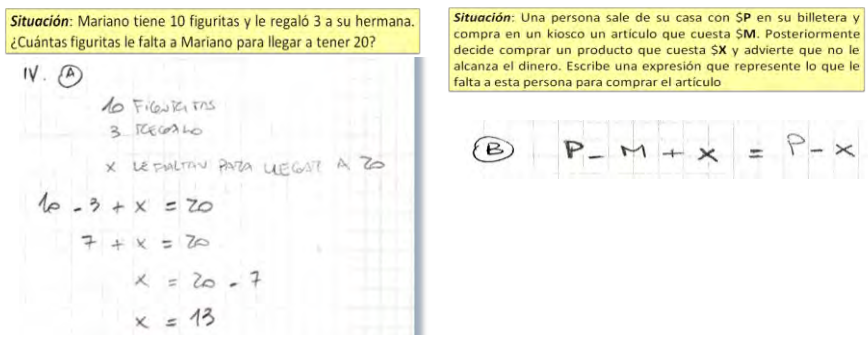


Figura 6. Resolución de la actividad 9 de la alumna A6

En la entrevista con la alumna A7 (figura 7) interpretamos que distingue objetos matemáticos como "monomio" y "término semejante" (conceptos) pero no el de "miembro de una ecuación", a quien designa como "término". No conoce las propiedades de la igualdad, razón por la cual juzga de incorrectos los procedimientos utilizados a pesar de dar por válida la solución (concepto) que se indicaba en el ejercicio. A su vez, desconoce el concepto de ecuación equivalente y por este motivo sólo advierte la presencia de una sola ecuación (concepto).

$$\begin{gathered}5x-6=3x\\5x-6-3x=3x-3x\\2x-6=0\\2x-6+6=0+6\\2x=6\\\frac{2x}{2}=\frac{6}{2}\\x=3\end{gathered}$$

Alumna: *Los procedimientos fueron incorrectos, ya que tres veces se agregaron en cada término números iguales y luego se los resolvía. Aquí se agregó en ambos términos el monomio −3x, entonces se lo agrupó a un lado con el término semejante y del otro se lo resolvió. (...)*
Entrevistador: *¿Cuántas ecuaciones identificás en el ejercicio?*
Alumna: *Una*
Entrevistador: *¿Por qué?*
Alumna: *El resto es el desarrollo de los procedimientos de esa ecuación..*

Figura 7. Entrevista con la alumna A7

A modo de conclusiones

Para cerrar nuestro trabajo, retomamos nuestra pregunta inicial ¿qué saben los alumnos sobre ecuaciones algebraicas al ingresar a la universidad? Como respuesta a ella, podemos decir que los alumnos: (a) No distinguieron, en muchos casos, el campo de problemas de las ecuaciones, dadas en contextos intra o extramatemáticos; (b) No tienen claros los conceptos de ecuación, solución, miembros de una ecuación, términos de una ecuación, ecuación equivalente, entre otros; (c) Desconocen las propiedades asociadas a la resolución de ecuaciones (propiedades de la igualdad, producto de factores iguales a cero, el cero como absorbente de la multiplicación, entre otras); (d) Utilizan como único procedimiento de resolución de ecuaciones la transposición de términos, y en muchos casos, con errores en su aplicación; (e) La mayoría de los argumentos no han sido adecuados e introducen elementos lingüísticos que no se encontrarían en una configuración epistémica asociada a ecuaciones.

Esta valoración nos lleva a decir que los estudiantes no tienen una comprensión cabal del objeto matemático ecuaciones, en tanto no han podido utilizarlo de manera competente en diferentes prácticas. Esto guarda relación con el hecho de que la configuración cognitiva referida a ecuaciones de cada alumno evaluado es incompleta -en tanto no domina la totalidad del sistema de prácticas relacionadas con este objeto matemático-. No obstante, rescatando lo que cada alumno ha comprendido sobre ecuaciones, se logra estructurar la configuración epistémica deseada y utilizada como referencial para el estudio. Esto nos lleva a concluir que si se organizaran procesos de enseñanza y aprendizaje cuidadosamente planificados, se mejoraría la comprensión global que los estudiantes lograrían tener sobre las ecuaciones.

Referencias bibliográficas

Abrate, R., Pochulu, M. y Font, V. (2009). Metáforas en contextos de resolución de ecuaciones. En M. Pochulu, R. Abrate y S. Visokolskis (Eds.), *La Metáfora en la Educación: descripción e implicaciones* (pp.95-126), Villa María: EDUVIM.

Font, V. (2001). Processos mentals versus competencia. *Biaix 19*, 33-36.

Godino, J. D. (2000). Significado y comprensión en matemáticas. *UNO 25*, 77-87.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques 14(3)*, 325-355.

Rodríguez, M. (Coord.). (2010). *Proyecto de mejora para la formación docente inicial de profesores para el nivel secundario – Área Matemática.* Buenos Aires: Instituto Nacional de Formación Docente. Recuperado el 1 de marzo de 2011 de http://www.cin.edu.ar/download.php?file=proyecto.pdf

ETNOMATEMÁTICAS EN ARTESANÍAS DE TRENZADO: ASPECTOS METODOLÓGICOS

Veronica Albanese, María Luisa Oliveras, María del Carmen Rodríguez
Universidad de Granada España
very_alba@hotmail.it, oliveras@ugr.es, chacha@mecanica.cujae.edu.cu

Resumen. En el marco de la etnomatemática, la intención es elaborar un instrumento de investigación que permite acercarse, a través de la etnografía, a las labores artesanales de trenzado y entonces a los conceptos matemáticos presentes en el desarrollo de estas artesanías. Del trabajo artesanal se consideran dos aspectos con diferentes perspectivas: el producto final se estudia etnográficamente (MET: Método Etnográfico) y el proceso llevado a cabo para realizar el mismo producto se modeliza según la perspectiva de la matemática formal (MOM: Modelización Matemática).

Palabras clave: etnomatemáticas, artesanías de trenzados, etnografía, modelización matemática, metodología

Abstract. In the context of Ethnomathematics, the idea is to develop a research tool that lets you zoom through ethnography, the braiding crafts and then the mathematical concepts that come out in the development of these crafts. Of the craftsmanship we consider two aspects from different perspectives: the final product is studied ethnographically (MET: ethnographic method) and he process carried out to realize the same product is modeled from the perspective of the formal mathematics (MOM: Mathematical Modeling).

Key words: ethnomathematics, braiding craft, ethnography, mathematical modeling, methodology

Planteamiento

La Etnomatemática es un paradigma holístico, contextualizado en un movimiento que aglutina teoría y práctica, en los campos: epistemológico, matemático, investigativo, educativo y social. Actúa y estudia la manera en que los grupos culturales elaboran, comprenden y utilizan conceptos, estructuras o significados, que el investigador considera como matemáticos, en el desarrollo de su cultura, en el desempeño de sus profesiones y en la vida cotidiana (D'Ambrosio, 2008).

En el contexto de este campo de investigación educativa y social, se trata de relacionar la matemática con la artesanía, considerando ambas como productos culturales. Entendemos como artesanía la labor de creación o decoración de manera predominante manual y artística, de objetos de alguna utilidad práctica en la sociedad. El area técnica donde se contextualiza esta investigación es el area de las artesanías de trenzados, o sea, artesanías de tejido en las cuales predomine una dimensión, cuyos productos se indican como cordeles, trenzas. Las trenzas son productos de un tipo de tejidos simple que se realiza utilizando solamente las manos. Los cordeles son más complejos, en general involucran un mayor número de hilos, respecto a las trenzas y, para tejerlos, se utilizan aparatos suplementarios.

Objetivos

Los objetivos de la investigación son: (O.1) Describir artesanías de trenzados identificando los constructos matemáticos implícitos en ellas. (O.2) Crear un instrumento metodológico de análisis que se ajuste al interés del estudio y a la tipología específica del objeto estudiado.

En este artículo nos vamos a centrar sobre el segundo objetivo que podemos desplegar en:

O.2.1 Crear un método para el análisis etnográfico de la artesanía.

O.2.2 Elaborar un procedimiento de análisis que, a través de la matemática formal, modelice el producto y el proceso.

El intento es crear un puente lingüístico entre la manera de expresión informal de la microcultura artesanal y el lenguaje de la microcultura académica, que indicamos como formal. La investigadora asume el rol de traductora y propone una reelaboración lingüística en términos académicos de lo que ella interpreta que ocurre en el proceso de realización del producto artesanal a nivel de la comprensión matemática por parte del artesano (Oliveras, 1996).

Antecedentes y marco teórico

La relevancia del estudio está en el creciente interés hacia la influencia de la cultura en la didáctica, en búsqueda de nuevas maneras de hacer matemáticas en las aulas (Sandella, 2004; Santillán & Zachman, 2009); en la presencia de las prácticas matemáticas como herramientas indispensable para la idealización y producción de artesanías (Oliveras, 1996); en la importancia de artesanías de trenzados como manifestación sociocultural, por ejemplo los quipus en la cultura precolombina de los incas, el trenzado en cuero en la cultura gaucha– criolla argentina (Ascher & Ascher, 1981; Osornio, 1934). El antecedente más cercano a este trabajo es la investigación de Parra (2003) con los tejidos del pueblo Ticuna de Amazonia.

La investigación se inserta en el marco teórico del Modelo MEDIPSA (Oliveras, 1996), sigla para Matemáticas, Epistemología, Didáctica, metodología de investigación Interpretativa, Psicología, Sociología y Antropología, que es un conjunto multidisciplinar de áreas científicas en las que se toman teorías que tienen sus raíces en una misma concepción relativista y contextualizada de la realidad y de la naturaleza del conocimiento. Se elige un enfoque fenomenológico y cualitativo para describir e interpretar una situación que se produce de forma natural o se crea en un determinado escenario. Se consideran las aportaciones del enfoque constructivista social con un concepto práctico y funcional del conocimiento.

Los fines de la investigación son describir e interpretar una situación que se crea en un determinado escenario, mirando todos los aspectos y las interacciones en perspectiva holística. Este proceso implica entender una sociedad dinámica, articulada por sujetos que interactúan en un medio. Las conjeturas elaboradas se verifican y refinan cíclicamente con sucesivas recogidas de datos.

En el marco interpretativo se elige un enfoque teórico, en el sentido de que el fin es dar una interpretación, comprender la vida social, además de describirla (prioridad, en cambio, del enfoque descriptivo). Dentro del estudio teórico se privilegia una perspectiva formal frente a una sustancial, porque la formal intenta explicar aspectos abstractos, constructos conceptuales, mientras la substancial se focaliza en unas áreas directas, concreta.

El diseño de investigación es de tipo *no experimental* porque no se interviene activa-intencionalmente para modificar las situaciones observadas; *trasversal*, ya que los datos se consideran recogidos durante un mismo momento observatorio; y exploratorio, puesto que la idea es realizar una modelización de elementos del contexto de las artesanías en términos matemáticos. Se elige una metodología etnográfica (Martínez, 2007) por su orientación naturalista y fenomenológica: la constante atención al contexto sociocultural que caracteriza la componente "étnica" de la investigación.

En este escrito se presentan los resultados del primer análisis de documentos sobre artesanías de trenzado (Grant 1950; Owen, 1995; Osornio, 1934) que ha dejado en claro la necesidad de creación de un instrumento metodológico que se ajuste a la especificidad del área técnica de investigación elegida, la artesanía de trenzado. En el desarrollo del instrumento ha sido clave la definición de *factores*, para el análisis etnográfico del producto, y *fases,* para el análisis matemático del proceso. Esta manera de proceder determinando factores y fases, ha sido análoga a la utilizada por Bolaños (2009) en la modelización geométrica de las pintaderas canarias.

Instrumento metodológico: MOMET

El *instrumento metodológico* que se crea para este estudio interpretativo formal de artesanías de trenzado tiene en cuenta dos aspectos: el producto final de la labor artesanal analizado en su complejidad global y el proceso que se lleva a cabo para realizarlo. La idea es desarrollar un método para realizar la investigación desde el punto de vista etnográfico (producto) y después desde el punto de vista de la matemática formal (proceso). Esta herramienta metodológica que creamos está constituida entonces por un Método de análisis Etnográfico (MET) y por un modelo de análisis matemático o Modelización Matemática (MOM). El conjunto de los dos nos proporciona el instrumento metodológico MOMET.

Ponemos de manifiesto que, por su especificidad, a una definición teórico-conceptual del *objeto de estudio*, se prefiere una descripción operativa, o sea una caracterización del mismo a través de *casos* o ejemplos paradigmáticos concretos que indicaremos como *ejemplares*. Entonces como unidad de análisis se considera *el ejemplar* concreto y real.

MET: Método de análisis Etnográfico

Vamos a identificar principales factores sobre los cuales se basa la metodología del análisis etnográfico (MET):

1. Factor de caracterización.

Se refiere a la forma de definición o descripción del objeto de estudio:

a. Proveniencia histórico geográfica del *ejemplar*;
b. Rápida descripción del *ejemplar*;
c. Imagen del *ejemplar*;

2. Factor utilidad.

Se indica:

a. Para qué acción (en la construcción, en la industria, en la agricultura, con animales, etc.) y
b. Donde (lugar geográfico o contexto macro, lugar social o contexto micro: la casa, el campo, el taller, etc.) cada *ejemplar* de cordel es utilizado.

3. Factor material

Se tratan varios aspectos de los materiales empleados:

a. Se considera la *cualidad* natural del material (por ejemplo cuero, algodón, lana, etc.) o *naturaleza* del material;
b. Se estudia cómo se realiza la *preparación* de los materiales.

4. Factor modalidad de tejido

Se analizan los tipos de tejido, o forma en que se mezclan las fibras:

a. Se distingue entre los ejemplares que presentan nudos, *"anudados"*,
b. No presentan nudos, *"trenzados"*. La modalidad "trenzado" tiene la peculiaridad de que, en cualquier punto, si se deja sin atarla, se va soltando.

Para la modelización matemáticas que sigue este factor es esencial: de aquí en adelante, o sea para el sucesivo factor Diseño, se van considerando solo los ejemplares cuya modalidad de tejido es el "trenzado".

El uso de herramientas o aparatos puede intersecar con varias modalidades de tejido.

5. Factor diseño

Este es el factor que caracteriza *el proceso de trenzar*. Acá se consideran:

a. El *número de hilos*, donde por hilo se entiende el cabo, la unidad primordial que se va trenzando;
b. El *número de colores*, si hay distintos, y *cuantos hilos* hay por color;
c. La *forma* del artefacto que se va tejiendo, o sea la "visión global" predominante (cuadrado, redondo, linear, etc.);
d. La *manera* de trenzar, la secuencia de acciones que se tienen que cumplir para llegar a realizar el trenzado, *el proceso dinámico*.

MOM: Modelización Matemática: Modelización con grafos

La conexión entre los aspectos etnográficos y matemáticos que estudiamos en esta sección se realiza a nivel del factor 5 y precisamente en el proceso activo de trenzar. Vamos a desarrollar una modelización teórica que traduzca, en el lenguaje de la matemática formal, el diseño del trenzado, y precisamente a partir de la manera activa de realizar la acción de trenzar.

Realizamos el análisis en dos momentos considerando primero el proceso según su desarrollo en *sección horizontal*, imaginando mirar la trenza o el cordel en construcción desde el punto de vista de la cola, o sea de donde los hilos están a punto de ser trenzados, y posteriormente en *sección vertical*.

El lenguaje de la matemática formal que utilizamos ahora en la modelización de la *sección horizontal* es el de la teoría de grafos. Un grafo G es un par ordenado G = (V, E) donde V es un conjunto de vértices o nodos, y E es un conjunto de arcos o aristas, que relacionan estos nodos. Se considera V finito y se llama orden de G al número de vértices de V, indicado |V|.

En la modelización que presentamos, los vértices o nudos representan las posiciones de los hilos a punto de ser trenzados, los indicaremos con letras minúsculas. Los arcos o aristas representan los movimientos de los hilos, respecto a la posición, que el artesano tiene que hacer cumplir a los hilos para crear la trama. Estudiamos la *secuencia mínima* de movimientos, que se van repitiendo posteriormente en el desarrollo de la *sección vertical* y que caracterizan unívocamente el trenzado.

Distinguimos varias fases:

1. *Movimiento mínimo*: es el movimiento que involucra dos o más hilos que intercambian sus posiciones; el conjunto de hilos es el mínimo tal que cada cabo del conjunto, en su movimiento, vaya ocupando una posición dejada vacía por el movimiento de otro cabo del

conjunto y, a su vez, deje una posición vacía que sea ocupada por otro cabo del conjunto. Se describe en el grafo a través de un circuito simple. Está caracterizado por:

a. Cuantas y cuales posiciones se intercambian, o mejor dicho, lo que se intercambian son los hilos que se encuentran en determinadas posiciones. Aclaramos que, por razones de claridad y fluidez del discurso, de aquí en adelante con "posiciones" nos referimos a los hilos que se encuentran en las posiciones determinadas en el paso en cuestión.

b. Un sentido horario o anti horario.

2. *Paso*: un paso del proceso de trenzar es el máximo conjunto de movimientos mínimos tal que cada vértice no pertenece a más de un movimiento. Un paso se representa en un único grafo en el que aparecen eventualmente más circuitos no conectados. Está caracterizado por

a. Números de movimientos mínimos que constituyen el paso.

b. Orden de los movimientos mínimos.

3. *Secuencia simple o compuesta*: si la secuencia mínima se describe con un solo paso, es suficiente un solo grafo para describirla (simple); si la secuencia incluye más de un paso, se necesita más de un grafo para describirla (compuesta).

Señalamos que todos los grafos de cada paso tienen la misma estructura (o esqueleto), o sea, en términos técnicos, el grafo *vacío* asociado, cuyo conjunto de aristas es nulo, es el mismo. Esto significa que, si a cada grafo de cada paso le "quitamos" las aristas, obtenemos siempre el mismo grafo vacío, que acá llamamos *grafo estructura*. El *grafo estructura* está determinado por el diseño. Los grafos estructuras que consideramos, son todo cuadrados, o sea los vértices o nudos se disponen sobre los lados de un cuadrado.

Observamos que en este estadio del análisis no nos interesan particularmente los colores de los hilos, pero cómo se disponen los hilos, si son de distintos colores, en el momento de iniciar el trabajo, influye mucho sobre la apariencia final del cordel. Así que cuando vayamos a analizar ejemplares concretos constituidos con hilos de dos o más colores, daremos la *disposición inicial* de los hilos, según los colores, en el *grafo estructura*.

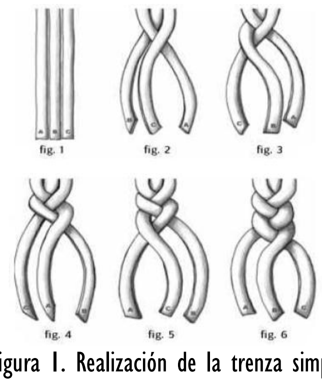


Figura 1. Realización de la trenza simple

Para aclarar el concepto, hagamos un ejemplo con la *trenza simple de tres hilos*, la clásica trenza del pelo. Se trata de una secuencia compuesta, en particular está formada por dos pasos así que se necesitan dos grafos para describirla. Llamamos a las posiciones de los hilos con las letras minúsculas *a, b, c*. En este caso, los nudos los visualizamos así: *a* sobre el lado horizontal arriba del cuadrado, *b* sobre el lado vertical de la derecha y *c* sobre el lado vertical de la izquierda. Los dos pasos de la secuencia son, en el orden siguiente: el primero constituido por un circuito simple horario entre las posiciones *a* y *b*; el segundo constituido por un circuito simple anti horario entre las posiciones *a* y *c*.

La aclaración del punto (1.a.) significa que las letras "no se mueven", o sea quedan asociadas a la posición, así que, en pasos sucesivos, siguen refiriéndose al mismo nudo del *grafo estructura* asociado al diseño.

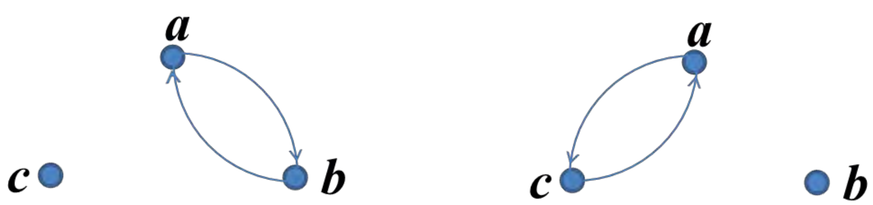


Figura 2. Grafos estructuras de la trenza simple

Conclusiones: Aportaciones y Futuro

Nuestro trabajo se desarrolla en una línea de investigación muy novedosa, de la que existen pocos precedentes por lo que las aportaciones requieren mayor esfuerzo y son de un gran nivel de creatividad. Las aportaciones de esta investigación se sitúan a nivel teórico. Aportamos a la creación de metodologías contextualizadas, que es una de las facetas de mayor riqueza que aportan las Etnomatemáticas como Programa de Investigación, al paradigma cualitativo interpretativo de investigación en la Didáctica de la Matemática. En la línea de este paradigma, optamos por la comprensión global de la realidad y su interpretación en términos de formas de pensamiento y de creación social de las matemáticas, que pueden tener repercusión en los procesos de enseñanza tanto formal como no formal, por lo que nuestros métodos creemos que son de gran interés.

Los aportes consisten en la *elaboración de una metodología* (MOMET), que define y permite aplicar de forma integrada: A) un modelo MET para el *estudio etnográfico* de artesanías de trenzados, definiendo *factores* relevantes para su análisis y B) un modelo MOM para la *elaboración de una modelización matemática* del proceso de fabricación de cordeles. Además se aporta el uso emergente del método en un *ejemplar,* o caso del objeto de estudio.

Un primer objetivo en el desarrollo futuro de esta investigación consistirá en crear un catálogo de *ejemplares* artesanales existentes en las comunidades culturales de la zona geográfica tomada como núcleo de interés y limítrofes (Cono Sur americano), y proceder a su análisis.

También consideramos que una de las principales áreas de expansión de esta investigación es la educativa, relativa a la formación de profesores de matemáticas y el desarrollo curricular de los programas de matemáticas, de las enseñanzas profesionales, y de las educaciones obligatoria y secundaria postobligatoria.

El desarrollo curricular contextualizado en la cultura local, es objetivo presente en las directrices educativas de la mayoría de los países hoy día, y la preparación del profesorado para docencia con tal enfoque es una necesidad de primer orden.

Referencias bibliográficas

Ascher, M., & Ascher R. (1981).*Code of the Quipu: a study in media, mathematics and culture.* Ann Arbor, MI: The University of Michigan Press.

Bolaños, J. (2009). *Una visión etnomatemática de las pintaderas canarias*. (Tesis de Maestría no publicada). Universidad de Granada, España.

D'Ambrosio, U. (2008). *Etnomatemática - Eslabón entre las tradiciones y la modernidad*. México: Limusa.

Grant, B. (1950). *Leather braiding*. Cambridge, MD: Cornell Maritime Press.

Martínez, M. (2007). *La investigación cualitativa etnográfica en educación*. México: Trillas.

Oliveras, M. L. (1996). *Etnomatemáticas. Formación de profesores e innovación curricular*. Granada: Comares.

Osornio, M. (1934). *Trenzas gauchas.* Buenos Aires: Hemisferio Sur.

Owen, R. (1995). *Braids: 250 patterns from Japan, Peru & beyond*. Loveland, Colo: Interweave Press

Parra, A. (2003). *Acercamiento a la Etnomatemática*. Tesis de Licenciatura no publicada: Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

Sandella, O. (2004). La geometría en las danzas folklóricas argentinas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 801-806.

Santillán, A., & Zachman, P. (2009). Una experiencia de capacitación en Etnomatemática. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 2(1), 27-42.

INVESTIGACIÓN SOBRE LA CALIDAD DE LAS GUIAS DE ESTUDIO PARA LA AUTORREGULACIÓN DEL APRENDIZAJE DEL ALGEBRA

Analía Mena, Graciela Abraham, Mabel Rodríguez Anido, Graciela Galindo, Marta Golbach
Facultad Regional Tucumán, Universidad Tecnológica Nacional Argentina
m-pappalardo@cgcet.org.ar, graju6@yahoo.com.ar

Resumen. El propósito de este trabajo, fue evaluar las guías de estudio que se utilizan en la asignatura Álgebra y Geometría Analítica de la carrera Ingeniería en Sistemas de Información, como parte de las actividades de investigación del proyecto que tiene como objetivo elaborar materiales didácticos que propicien la autorregulación y autoevaluación del aprendizaje. Se aplicó a un grupo de alumnos un cuestionario tipo likert basado en las pautas indicadas por Cabero, J, (2006): a) Calidad, b) Suficiencia, c) Diseño y d) Contenido de herramientas que propicien la autorregulación. Los resultados obtenidos muestran que el material debe ser enriquecido con herramientas didácticas que propicien la independencia y la autosuficiencia en el aprendizaje.

Palabras clave: guías de estudio, evaluación, autorregulación

Abstract. The purpose of this paper was to evaluate the study guides that are used in the subject algebra and analytical geometry for students of informatics engineering, as a part of the research activities that aim to create didactic materials which provide self-regulation and self-evaluation of the knowledge. A group of students received a Likert questioner based in the following guidelines Cabero, J (2006): a) Quality, b) Sufficiency, c)Design and d) Content tools that could provide self-regulation. The results obtained show that the material must be enriched with didactic tools that can give the student independence and self-sufficiency

Key words: study guides, evaluation, self-regulation

Introducción

El presente trabajo forma parte de las actividades de investigación del proyecto "Actualización Epistémica y Didáctica de la Matemática. Sistema de Autorregulación y Autoevaluación en la Estructuración de Nuevo Material Didáctico". El mismo, tiene como propósito mostrar los resultados obtenidos en un estudio realizado a un grupo de alumnos de primer año de la Facultad Regional Tucumán de la Universidad Tecnológica Nacional, que cursaron la asignatura Álgebra y Geometría Analítica en el ciclo lectivo 2010.

Se sometió a la "Guía de Trabajos Prácticos", a un proceso de prueba para realizar una primera evaluación. La mencionada guía contiene un listado, bastante extenso de ejercicios, correspondientes a cada unidad temática. Para la evaluación de la misma, se tuvieron en cuenta los indicadores que surgieron de los criterios considerados por Cabero (2006) en las investigaciones realizadas al analizar los medios de enseñanza. Es importante la evaluación preliminar, ya que se trata de una instancia central en la validación de una propuesta. De manera que la recolección de la información suministrada por los alumnos respecto de la calidad del material de estudio analizado, permitirá realizar la revisión y el ajuste necesarios para la implementación de un nuevo material didáctico sustentados en enfoques constructivistas que propicien la autorregulación y la autoevaluación del aprendizaje, que contribuya en la formación de un estudiante independiente en futuros ciclos lectivos.

Fundamentación teórica

Los materiales didácticos escritos son un importante soporte para el aprendizaje del estudiante, puesto que mediante la resolución de los ejercicios, el alumno va incorporando gradual y sistemáticamente los nuevos conocimientos y reforzando los ya adquiridos. Los materiales didácticos deben incluir, además de los contenidos propios de la asignatura, elementos de orientación, que permitan al estudiante construir los conocimientos, desarrollar actitudes y hábitos, y favorecer el estudio independiente. Además, debe tener calidad pedagógica para lograr un aprendizaje significativo y ser un instrumento que promueva y acompañe al estudiante en su proceso de autorregulación. La guía debe contribuir a un proceso de formación integral que permita al estudiante, aprender a aprender, aprender a conocer, aprender a hacer (Zabala, 1989; Gimeno, 1991, citados por García Aretio, 1995).

Rivera (1999) sostiene que para que los materiales didácticos, tengan calidad deben tener implícitos los siguientes parámetros: *a) Elementos introductorios*: introducción al tema, objetivos, esquemas conceptuales, entre otros. *b) Elementos de contenido*: Lo referido a la tarea docente *c) Elementos retroalimentadores* tales como: la bibliografía básica y complementaria, y preguntas o ejercicios de autoevaluación. Y es recomendable que en su diseño se tengan en cuenta elementos de la conversación didáctica, que oriente al estudiante en el tema, indicándole qué va a hacer. Además, este autor señala que estas orientaciones, se hacen a través de las ¨ayudas¨ que se le da al estudiante y que pueden ser: *Anteriores*: Se hacen antes que el estudiante comience la lectura del texto básico, contextualizando para cada capítulo, tema o contenido. *Paralelas*: Ayudas que se brindan progresivamente en el desarrollo del tema. *Posteriores*: Dadas para la orientación de la revisión de los contenidos.

Por su parte Cabero (2006), afirma que en la selección de los contenidos se debe contemplar: a) *Calidad en el sentido de pertinencia y relevancia*: En este punto se debe considerar que los materiales didácticos deben ser el eje articulador entre el docente y el alumno para orientar ayudar y conducir el proceso enseñanza aprendizaje. Se deben plasmar los contenidos teniendo en cuenta el contexto y las necesidades de los estudiantes conjuntamente con las estrategias docentes para el logro de un aprendizaje significativo.

b) *Cantidad o suficiencia según los objetivos de la asignatura*: Los materiales tienen que ser coherentes con los objetivos de la institución, en lo referido a qué, cuándo y cómo enseñar y evaluar. c) *Estructuración o diseño*. Los materiales escritos, deben contener actividades prácticas que favorezcan en el alumno la apropiación de conocimientos, que incluyan elementos facilitadores de un aprendizaje significativo y de una actitud investigativa y que potencien su crecimiento personal. d) *Contenido de herramientas que propicien la autorregulación del aprendizaje*.

Autorregulación del Aprendizaje

Los mecanismos de regulación y control se han vuelto el centro de atención de muchos investigadores y la necesidad de potenciar niveles altos de control del aprendizaje, se ha relacionado con conductas de tipo metacognitivo. Los resultados de investigaciones, efectuadas en el campo del aprendizaje y solución de problemas de dominios específicos, muestran que los estudiantes más competentes aplican en mayor medida y más efectivamente estrategias de autorregulación. Y los estudiantes menos competentes, al enfrentarse a la solución de un problema, tienden a actuar de forma inmediata y asistemática sin supervisar su actuación (Lawson y Chinnappan, 1994).

Los procesos de enseñanza utilizados en el nivel universitario son poco reguladores del proceso de aprendizaje que se desea lograr (Boekaerts, Pintrich & Zeidner, 2000).

Los estudiantes autorregulados dirigen su aprendizaje a través de la puesta en práctica de una serie de estrategias cognitivas, metacognitivas, motivacionales y de apoyo que les permiten construir sus conocimientos de forma significativa, siendo capaces de regular y controlar de forma intencional todo el proceso. Conocen sus habilidades, los conocimientos que poseen, saben qué deben hacer para aprender, han aprendido a monitorizar sus conductas de estudio, ajustan sus conductas y actividades a las demandas de estudio, están motivados para aprender y son capaces de regular su motivación, etc. (Pintrich, 2004)

La forma más adecuada para hacer consciente el aprendizaje de las matemáticas, consiste precisamente en posibilitar actividades de enseñanza y de aprendizaje que permitan que los alumnos adquieran conceptos a partir del desarrollo de actividades metacognitivas autorreguladoras y que pueden agruparse bajo las siguientes dimensiones (Schraw & Moshman, 1995): *1) Planificar los pasos a seguir*: Es decir, secuenciar las estrategias y asignar tiempo en forma selectiva antes de comenzar una tarea. *2) Monitorear*: Se refiere a la revisión que llevamos a cabo cuando ejecutamos una tarea, resolvemos un problema o tratamos de comprender algo. Esta actividad se puede definir como la habilidad para involucrarnos en un proceso periódico de autoevaluación cuando estamos aprendiendo, almacenando o recuperando información. *3) Evaluar*: Examinar, revisar y evaluar las estrategias utilizadas durante el proceso de aprendizaje Es decir, se refiere a la apreciación de los procesos reguladores y de los productos de nuestra comprensión y nuestro aprendizaje.

Desarrollo

El estudio realizado fue descriptivo, de corte transversal y la población bajo estudio estuvo compuesta por una muestra aleatoria simple de 327 alumnos de primer año de la carrera de Ingeniería en Sistemas de Información, sobre una población de 745 que cursaron la asignatura Álgebra y Geometría Analítica en el período lectivo 2010. Los datos se recolectaron mediante una encuesta que se aplicó en la mitad de iniciado el cursado, y de los resultados académicos obtenidos una vez finalizado el mismo.

La encuesta constó de 2(dos) partes entre las cuales, se requirieron los datos personales del estudiante: edad, sexo, procedencia respecto del establecimiento de nivel medio, se indagó sobre la calidad, cantidad, estructuración o diseño de la guía de estudios. Y finalmente, se averiguó sobre el contenido de herramientas que propicien la autorregulación del aprendizaje en las mismas. Cada aspecto fue evaluado a través de una serie de ítems que intentaron capturar la información necesaria para evaluar el material didáctico elaborado.

Construcción de la variable Calidad del Material Didáctico

Se construyó una variable aditiva relacionada con los criterios o pautas consideradas para la evaluación de la calidad del material didáctico, mediante la suma de los puntajes obtenidos en los 27(veintisiete) ítems de las variables: a) Calidad en el sentido de pertinencia y relevancia, b) Cantidad o suficiencia según los objetivos de la asignatura c) Estructuración o diseño. d) Contenido de herramientas que propicien la autorregulación del aprendizaje.

Las respuestas consideradas como totalmente desfavorables (nunca) se le asignaron el valor 1 (uno), y el puntaje fue aumentando hasta 5 (cinco) asignado a las respuestas totalmente favorables (siempre). El procesamiento de la información se realizó mediante el software estadístico SPSS.

Rendimiento Académico

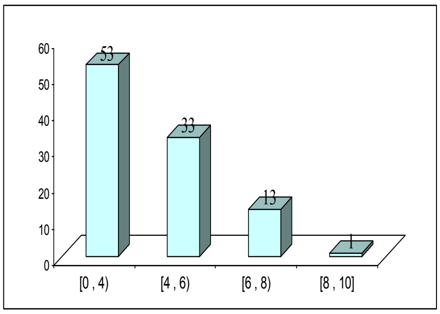
Como medida del mismo, se consideraron las notas obtenidas en los dos parciales de los alumnos que cursaron la asignatura Álgebra y Geometría Analítica.

Resultados

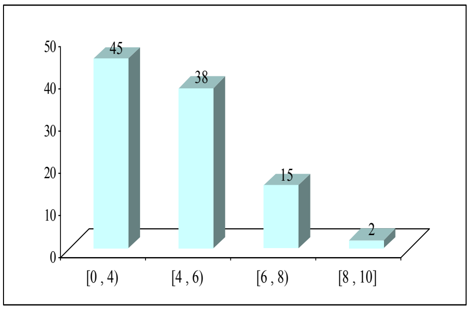
Datos Identificatorios – Rendimiento Académico.

Los alumnos de la muestra tenían edades entre 18 y 26 años, una edad mediana de 19 años y una moda de 18. Siendo el 60% mujeres. De los 327 encuestados, el 60% manifestó que cursó el nivel medio en una institución privada y el resto en una pública. Respecto del Rendimiento Académico de los alumnos, las notas correspondientes a los dos parciales de la asignatura, se pueden observar en el Gráfico N° 1.

Gráfico N °1: Distribución porcentual de 327 alumnos, según los Rendimientos Académicos del Primero y Segundo parcial de Álgebra Geometría Analítica



Rendimiento Académico 1° Parcial



Rendimiento Académico 2° Parcial

Se observa que un alto porcentaje de alumnos desaprobó los parciales, lo que indica un rendimiento académico muy bajo. Este resultado es importante de considerar al realizar la modificación de las guías de estudio, puesto que la incorporación de un nuevo material tiene consecuencias tanto para la práctica docente como para los procesos de aprendizaje.

Calidad del material didáctico

Para recabar la información se aplicó a los alumnos un cuestionario autoinforme tipo likert, con ítems relacionados con la evaluación de la calidad de los materiales escritos. Para su construcción se siguieron una serie de pasos metodológicos dentro del marco de un proceso de validación. El proceso se fundamentó en realizar revisiones y mediciones que permitieron estudiar propiedades como la validez y confiabilidad del instrumento. Por medio del Coeficiente de Confiabilidad Alpha de Cronbach, se encontró una muy buena consistencia entre los mismos (Alpha de Cronbach=0.75).

A continuación mostramos los resultados obtenidos al medir los indicadores que se consideraron para la variable Calidad del Material Didáctico:

a) Calidad en el sentido de pertinencia y relevancia. El comportamiento en cuanto a la calidad del material, se observa en el Gráfico N ° 2.

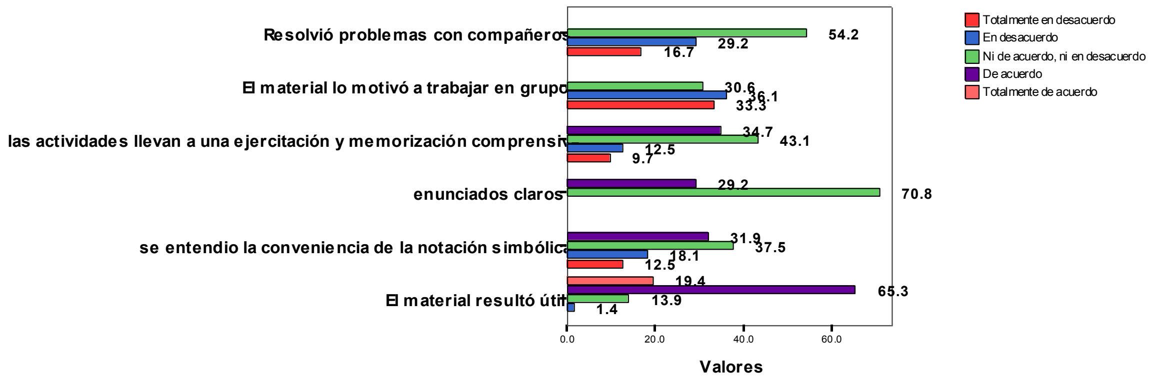


Gráfico N ° 2: Distribución porcentual de 327 alumnos según su opinión respecto de la calidad del material didáctico

En cuanto a la resolución de problemas, alrededor de la mitad de los alumnos encuestados afirmó que la guía no lo motivó a resolverlos con compañeros en la clase práctica ni a trabajar en grupo fuera de la facultad. Se puede considerar que lo mencionado es un indicador de la falta de ejercicios en la guía que planteen actividades que obliguen a realizar un trabajo colaborativo con el grupo. En este punto se debe aclarar que las clases prácticas son netamente expositivas, puesto que el docente resuelve la mayoría de los ejercicios sin fomentar el trabajo grupal. Aspecto que también es necesario mejorar conjuntamente con la guía.

Además, es bajo el porcentaje de los alumnos que consideró que los enunciados eran claros y pudo diferenciar entre datos e incógnitas.

b) Cantidad o suficiencia según los objetivos de la asignatura. El siguiente gráfico, refleja los resultados referidos a la cantidad o suficiencia

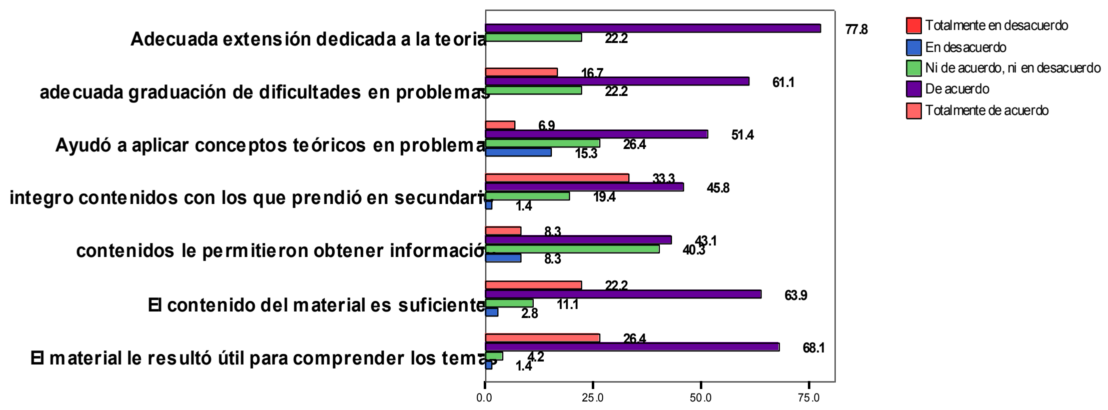


Gráfico N ° 3: Distribución porcentual de 327 alumnos según su opinión respecto de la Cantidad o suficiencia del material didáctico

En general, los estudiantes consideran que la Cantidad o Suficiencia del material es adecuada.

c) Estructuración o diseño. En cuanto a este indicador, se observa en el Gráfico N ° 4 que, los alumnos encuentran en el material un instrumento apropiado, para utilizar en su aprendizaje, con contenidos presentados en forma amena, y con una graduación adecuada en lo referido a la complejidad de los ejercicios planteados.

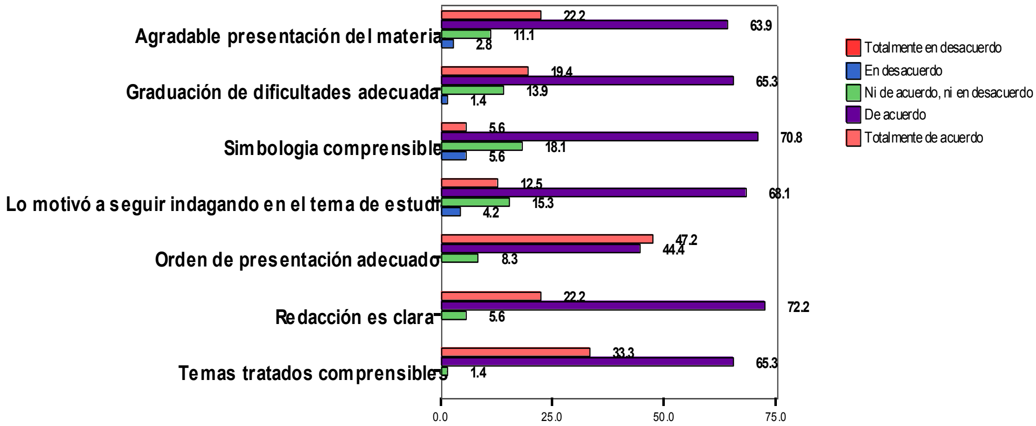


Gráfico N °4: Distribución porcentual de 327 alumnos según su opinión respecto de la estructuración y diseño del material didáctico

d) Contenido de herramientas que propicien la autorregulación del aprendizaje: Según la opinión de los alumnos, el material presenta deficiencias en el contenido de herramientas que propicien la autorregulación, como se puede observar en gráfico N °5.

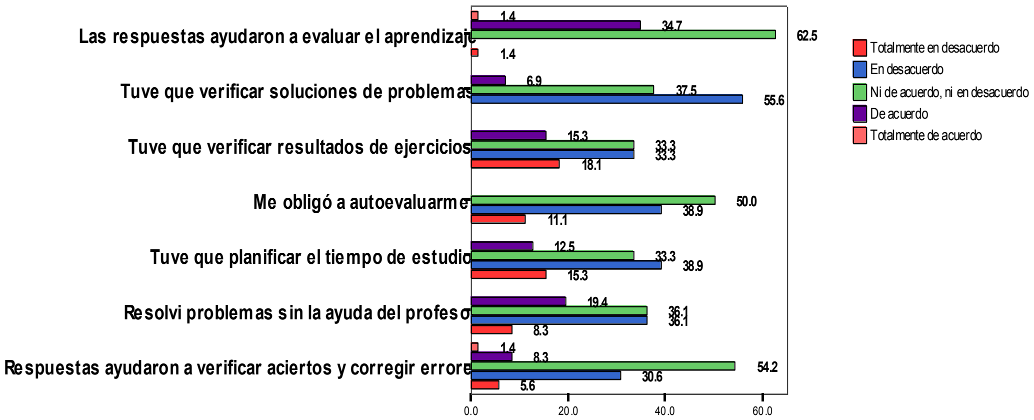


Gráfico N ° 5: Distribución porcentual de 327 alumnos según su opinión respecto del contenido de herramientas que propicien la autorregulación del aprendizaje en el material didáctico

Se observa que es muy bajo el porcentaje de los alumnos que "planificó y cumplió el tiempo de estudio", "verificó si el resultado obtenido, al resolver un ejercicio era el correcto", "logró resolver los problemas propuestos sin la ayuda del profesor" y "las respuestas de los ejercicios lo ayudaron a evaluar el avance del aprendizaje". También son muy bajos los porcentajes que se obtuvieron al indagar respecto a "Tuvo que verificar si la solución encontrada al resolver un problema, tenía sentido respecto de las condiciones del problema", "las respuestas ayudan a verificar aciertos y corregir errores" y "El material me obligó a autoevaluarme para lograr que el aprendizaje sea efectivo". Estos resultados evidencian que en la guía faltan actividades, que obliguen al alumno a involucrarse en un proceso de autoevaluación y de apreciación de la eficacia de estrategias utilizadas en el proceso de aprendizaje.

Variable Calidad del Material didáctico

Como se mencionó, para captar información acerca de la calidad del material didáctico (variable latente) se recurrió a una escala de Likert aditiva como indicadora de esa variable latente. La gráfica N ° 6 muestra los resultados de su análisis.

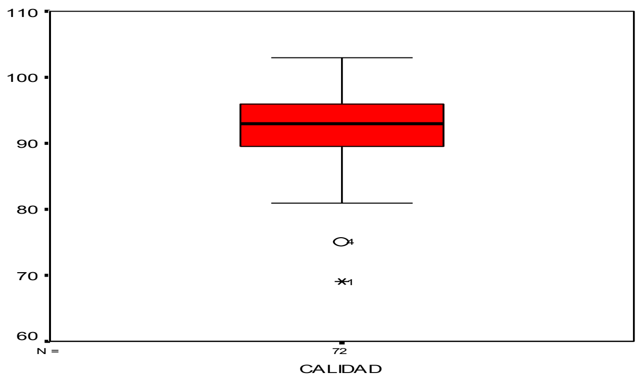


Gráfico N ° 6: Box – Plot de las puntuaciones totales registradas

Si tenemos en cuenta que un puntaje de 27 refleja la ausencia de calidad y uno de 135 la presencia de la misma, se considera que el valor mínimo (69) y máximo (103) que se obtuvo, sumado a que el 57% presenta puntajes por arriba de la media (91,79), son valores que indicarían que el material posee una calidad "media".

Estos resultados muestran deficiencias en lo referido a la falta de herramientas que propicien la autorregulación del aprendizaje, la falta de motivación para el trabajo grupal, las falencias en los alumnos de metodologías para la resolución de problemas.

Conclusiones

La guía de trabajos prácticos que se utiliza actualmente en la cátedra, muestra deficiencias en cuanto a los requerimientos necesarios para una buena Calidad del Material Didáctico. Si bien en general es comprensible, útil, con redacción clara y un diseño adecuado, puede ser enriquecida con actividades que propicien la autoevaluación y el trabajo colaborativo.

Cada unidad de estudio debe contar con un mapa conceptual donde se refleje todo el contenido a trabajar, la importancia del tema a tratar con los objetivos perseguidos y los conocimientos previos requeridos. Además de ejercicios resueltos que le sirvan de orientación para su trabajo independiente y que a la vez les permita autorregular su aprendizaje. Continuando con un listado de ejercicios y problemas de diferentes niveles de complejidad para que sean resueltos en la clase práctica donde el docente deberá utilizar estrategias adecuadas que aseguren la actividad del alumno en la clase. Se deben proponer además en esta guía, una cantidad suficiente de ejercicios para resolver de manera independiente después de la clase práctica. Y finalizar cada unidad debe contar con una autoevaluación para que los alumnos reconozcan sus fortalezas, y debilidades que les permita desarrollar una actitud crítica y reflexiva. Por último, un listado con las respuestas de los ejercicios que se proponen, dado que les ayudaría a verificar aciertos, corregir errores e ir evaluando los avances de su aprendizaje.

Referencias Bibliográficas

Boekaerts, M., Pintrich, P.R. & Zeidner, M. (2000). *Handbook of Self-Regulation*. San Diego: Academic Press.

Cabero, J. (2006). *Análisis de Medios de Enseñanza. Aportaciones para su selección, utilización, diseño e investigación.* Sevilla: Alfar.

García Aretio, L. (1995). *Educación a distancia hoy*. Madrid: U:N:E:D:

García, M., De la Fuente, J., Justicia, F. (2002). *Autorregulación del aprendizaje en el aula*. Sevilla: Consejería de Educación. Junta de Andalucía.

Jorba, J. y Casellas, E. (1997). *La regulación y la autorregulación de los aprendizajes*. España: Síntesis.

Lawson, M.J. & Chinnappan, M. (1994). *Generative activity during geometry problem solving: comparison of the performance of high-achievrment and low-achievement students*. Cognition and Instruction. 12 (1), 61-93.

Pintrich, P.R. (2004). The role of goal orientation in self–regulated learning. En M.

Rivera, F. (1999). *La metacognicion como un proceso de autorregulación del aprendizaje significativo en matemáticas*. Tesis de maestría no publicada, Instituto Tecnológico y de estudios superiores de Monterrey. Universidad virtual. Monterrey. Mexico.

Schraw, G &., Moshman (1995). Metacognitive theories. Revista. *Educational Psychology Review*, (7), 51-71.

ESTRATEGIAS Y ESTÁNDARES PARA LA EVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE EN MATEMÁTICAS

Rogelio Ramos Carranza
Universidad Nacional Autónoma de México México
egorrc@gmail.com

Resumen. El planteamiento del problema en la presente indagatoria es el cómo estructurar un modelo de evaluación mediante los conceptos de las estrategias para la evaluación del aprendizaje y los estándares para la evaluación en matemáticas. En particular se discuten las funciones de la evaluación en los distintos modelos de aprendizaje. Se utilizan los estándares para la evaluación en matemáticas según el paradigma del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM por sus siglas en inglés: National Council of Teachers of Mathematics); el cual consta de cuatro fases: planeación de la valoración, recolección de evidencias, interpretación de las evidencias y utilización de los resultados; estas fases interactúan y se retroalimentan entre ellas. Los estándares se refieren a matemáticas, aprendizaje, apertura, equidad, coherencia e inferencia. Los elementos teóricos considerados se han aplicado a las componentes que conforman el sistema de evaluación en cursos de cómputo científico.

Palabras clave: estrategias, estándares, evaluación, aprendizaje, matemáticas

Abstract. The problem statement in this investigation is how to structure an assessment model through the concepts of strategies for learning assessment and standards of assessment for mathematics. In particular we discuss the functions of evaluation in different learning models. Standards for assessment in mathematics are used according to the paradigm of the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM for its acronym in English: National Council of Teachers of Mathematics), which consists of four phases: planning assessment, evidence gathering, the interpretation of the evidence and use of results, these phases interact and feedback each other. The standards relate to mathematics, learning, openness, fairness, consistency and inference. The theoretical consideration have applied to the components that make up the ongoing evaluation of scientific computing.

Key words: strategies, standards, assessment, learning, mathematics

Introducción

¿Cómo se puede caracterizar la práctica educativa actualmente, específicamente, en el contexto del aprendizaje en matemáticas y de las estrategias y estándares de la evaluación utilizadas en ese proceso?

La pregunta planteada esta orientada a proponer un marco teórico correspondiente a los aspectos que se han considerados en este trabajo a fin de responder al problema planteado; es decir, la indagatoria esta fundamentada teóricamente en una breve descripción de las habilidades matemáticas, una idea básica de las estrategias de evaluación del aprendizaje y un tercer aspecto teórico referente a los estándares para la evaluación del aprendizaje en matemáticas y de esta manera explicar que es lo que se enseña, como se enseña, como se aprende y de cómo evaluar lo que se aprende.

Así pues, se planteará la problemática que enfrenta la evaluación en la dependencia donde se lleva a cabo la práctica docente a la que hace referencia este trabajo. Lo más característico es el énfasis en enseñar procedimientos, en especial procedimientos de cálculo. Se presta poca atención a ayudar a los alumnos a desarrollar ideas conceptuales. El curriculum de matemáticas en México y en particular en la Facultad de Estudios Superiores de la Universidad Nacional Autónoma de México, suministra pocas oportunidades a los alumnos de resolver problemas retadores y de participar en el razonamiento, la comunicación, la conjetura, la justificación y la demostración. La instrucción matemática en las aulas universitarias puede caracterizarse con ligeras variaciones, como la actividad que consiste en la explicación del contenido por el profesor, trabajo individual de los alumnos sobre las tareas propuestas y corrección de las mismas, dirigidas al gran grupo, en la pizarra. La mayoría de las veces, y debido a la dificultad del contenido o al tiempo disponible, la explicación se dirige hacia un nivel medio de la clase, cuando no al más alto, y hacia el aprendizaje directo de determinados algoritmos o definiciones. El resultado de tal práctica es, por lo general, una prevalencia de aprendizajes rutinarios, carentes de significado, y la construcción de esquemas conceptuales débiles por los alumnos, que se manifiestan en una pobre actuación, sobre contenidos supuestamente aprendidos, después de un cierto tiempo. Los profesores enseñan de la misma forma en que fueron enseñados en la escuela. Lo expuesto, podría explicar en parte por qué no se enseña matemáticas con base en habilidades, estrategias de evaluación del aprendizaje y apoyados en los estándares para la evaluación de la matemática.

Se establecerán entonces los elementos conceptuales metodológicos que sustentan esta indagatoria y con los que se ataca a la problemática planteada en el proceso de enseñanza aprendizaje en matemáticas; en particular en el área del cómputo científico o los métodos numéricos. Se considera pertinente plantear aquí los propósitos de este trabajo; es decir, se pretende utilizar un modelo de evaluación diseñado en base a los tres aspectos teóricos ya mencionados (habilidades, estrategias de evaluación y los estándares de evaluación en matemáticas). Así mismo, se pretende destacar en las componentes del sistema de evaluación, aquellos elementos que provienen de múltiples fuentes de información; es decir, se han considerado diversas actividades para conformar al citado sistema. Uno de los principales objetivos es conformar un sistema basado en múltiples fuentes de información, El modelo propuesto aquí, consiste de diversas actividades; además de los tradicionales exámenes, se integran casos de estudio, una presentación realizada por el estudiante, un portafolios, la participación y la asistencia. Los casos de estudio que el estudiante realizará como una actividad fuera del aula, están compuestos de un problema planteado en el contexto de las diferentes áreas de las ingenierías, como son la mecánica, eléctrica, industrial, química, y la ingeniería en alimentos para ser resuelto en el escritorio, el cual debe ser acompañado de un programa por computadora y el algoritmo correspondiente al tema o método que se esta tratando. La presentación esta diseñada para contener un resumen o nota breve del método que se esta tratando con objeto de que los estudiantes tengan notas breves o recordatorios o formulas que usaran como guías en la solución de problemas.

Por último es importante mencionar que el modelo de evaluación se aplica para todos y cada uno de los métodos que contiene la asignatura objeto de estudio.

Elementos conceptuales metodológicos

Las Habilidades en matemáticas

La idea básica de habilidad matemática se refiere a la capacidad del estudiante para la comprensión de conceptos, planteamiento y realización de algoritmos y resolución de problemas y aplicación de los conceptos a la solución de problemas de casos reales. En el desarrollo de la habilidad matemática es muy importante la capacidad del estudiante para comprender y efectuar generalizaciones y abstracciones. La habilidad matemática es un tipo de inteligencia formal. Saber matemáticas, no es una materia, es una habilidad del cerebro humano y como todas las habilidades, dependen más de la manera como las percibimos, que de las propias capacidades. El objetivo de la enseñanza de las matemáticas no es sólo que se aprenda las tradicionales reglas, procedimientos o algoritmos, sino que su principal finalidad es que puedan resolver problemas y aplicar los conceptos y habilidades matemáticas para desenvolverse en la vida cotidiana. Un profesor de matemáticas tiene una gran oportunidad. Si dedica su tiempo a ejercitar a los alumnos en operaciones rutinarias, matará en ellos el interés, impedirá su desarrollo intelectual y acabará desaprovechando su oportunidad. Pero si, por el contrario, pone a prueba la curiosidad de sus alumnos planteándoles problemas adecuados a sus conocimientos, y les ayuda a resolverlos por medio de preguntas estimulantes, podrá despertarles el gusto por el pensamiento independiente y proporcionarles ciertos recursos para ello.(Álvarez, Morfin, Ramos, Díaz, Anguiano, Álvarez, 2007)

Estrategias de aprendizaje y de evaluación del aprendizaje

¿Qué es lo que distingue a los alumnos que aprenden bien de los que aprenden mal?

Una diferencia es la capacidad del estudiante para usar las estrategias de aprendizaje. Las estrategias de aprendizaje tiene muy variadas acepciones, entre ellas podemos mencionar las siguientes: conductas o pensamientos que facilitan el aprendizaje. Involucran procedimientos; son intencionales, por su carácter deliberado; requieren esfuerzo; son necesarias en los comportamientos de personas expertas en un área; son voluntarias y facilitativas, también se entienden como todo tipo de pensamientos, acciones, comportamientos, creencias e incluso emociones que permitan y apoyen la adquisición de nueva información y su relación con el conocimiento previo, así como la recuperación de la información ya existente. Otros autores las refieren al aprender a aprender. Pueden entenderse como un conjunto de procesos que sirven de base a la realización de tareas intelectuales. También se les concibe como un método para emprender una tarea o más generalmente para lograr un objetivo. Las estrategias, establecen lo que se necesita para resolver bien, determinan las técnicas más adecuadas a utilizar, controlan su aplicación y la toma de decisiones posteriores en función de los resultados. Por tanto, son siempre conscientes e intencionales, dirigidas a un objetivo relacionado con el aprendizaje.

Por su parte las Estrategias de Evaluación, son las encargadas de verificar el proceso de aprendizaje. Se llevan a cabo durante y al final del proceso; en estas estrategias se realizan actividades como: Revisar los pasos dados, valorar si se han conseguido o no los objetivos propuestos, evaluar la calidad de los resultados finales, decidir cuando concluir el proceso emprendido, cuando hacer pausas, la duración de las pausas o no hacer pausas. No es un instrumento, sino un proceso, mediante el cual se emiten juicios de valor acerca de un atributo a considerar, el fin de ésta es la toma de decisión. Es necesario explicitar los atributos, niveles y modalidades a evaluar, así como la metodología a seguir. Es importante destacar que la calificación, y la evaluación son procesos diferentes que atienden a lo administrativo y a lo educativo respectivamente. La evaluación es ante todo, una práctica reflexiva propia del docente; sin embargo, definir evaluación puede llegar a ser tan complejo como delimitar el número de autores, corrientes y teorías que lo han hecho. Las funciones de la evaluación son la formativa, sumativa, orientadora y diagnóstica.

Estándares para la evaluación en matemáticas

Esta perspectiva incluye las nociones matemáticas que se espera aprendan y puedan utilizar los alumnos, la forma en que las han aprendido y cómo debe evaluarse su progreso, y que los profesores puedan ser jueces justos y congruentes de las diversas actuaciones. La evaluación de los estudiantes debe coincidir con la instrucción y ser parte integral de ella. Deben usarse varias fuentes de información, los métodos de evaluación deben de ser apropiados para sus propósitos, es necesario evaluar todos los aspectos del conocimiento matemático y sus conexiones, al juzgar en la calidad de un programa deben considerarse, por igual la enseñanza y el plan de estudios. Así mismo se debe considerar que una variedad equilibrada de situaciones problemáticas “ricas”, que alienten a los estudiantes a establecer vínculos entre los diversos temas matemáticos y que reflejen la diversidad cultural a fin de aprender matemáticas para la investigación, planteamiento, representación, razonamiento y aplicación de una variedad de estrategias a la resolución de problemas; alejándose de la acción de solo ser mostradas o verbalizadas, memorizadas y repetidas. La función de los maestros hacia preguntar y escuchar, a medida que sus grupos se convierten en comunidades estimulantes de aprendizaje intelectual y alejarse de solo decir al estudiante que hacer; persiguiendo altas expectativas, trabajo desafiante, respeto mutuo y asistencia en el apoyo del rendimiento de los estudiantes y un cambio en el enfoque de la evaluación hacia un sistema basado en evidencias de múltiples fuentes.

Los estándares de evaluación utilizados aquí reflejan los valores y las metas asociadas al sistema de evaluación que debe lograrse en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. El proceso de evaluación puede considerarse formado por cuatro fases interrelacionadas que destacan los puntos primordiales en los que es necesario tomar decisiones críticas. Estas fases son: planear la valoración, reunión de evidencias, interpretación de evidencias y uso de resultados.

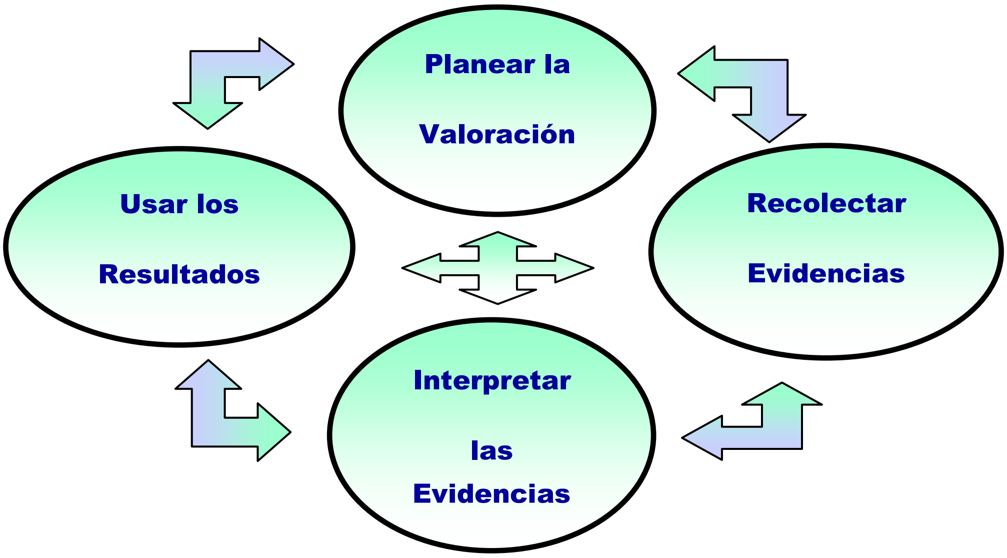


Figura 1. Las cuatro fases de la evaluación

La planeación de la valoración se refiere al objeto que tiene la evaluación, al marco de referencia para enfocar y equilibrar las actividades, a los métodos que se usan para reunir e interpretar evidencias, los criterios para juzgar los desempeños en las actividades y los formatos que se emplean para resumir los juicios y reportar los resultados.

La reunión de evidencias se refiere al cómo son creadas o seleccionadas las actividades y las tareas y al cómo se seleccionan los procedimientos para comprometer a los estudiantes en las actividades y al cómo deben juzgarse los métodos para crear y preservar las evidencias de los desempeños.

La interpretación de las evidencias se refiere a la determinación de la calidad de las evidencias, a la inferencia de los desempeños a partir de las evidencias, los criterios específicos para juzgar los desempeños, aplicación idónea de criterios, y al resumen de juicios de resultados.

El uso de resultados se refiere a: cómo reportar resultados, cómo hacer las inferencias a partir de los resultados, la acción con base en las inferencias, asegurarse que los resultados se incorporen en la instrucción y evaluación subsecuentes, el proceso valorativo en sí incluye una combinación de decisiones y acciones extraídas de las cuatro fases, este enfoque de valoración debe de ser válido para cualquier propósito valorativo.

Son seis los estándares de evaluación que constituyen los criterios a usar para juzgar prácticas de evaluación y se consideran cuatro categorías generales de objetivos de enseñanza para los que suelen reunirse evidencias del desempeño del estudiante. Con la intención de desarrollar el *poder matemático* en todos los estudiantes, la evaluación debe apoyar el aprendizaje matemático continuo de cada alumno, y esta es la meta central de la evaluación para las matemáticas escolares. Los estándares de evaluación proporcionan criterios para juzgar la calidad de la evaluación en matemáticas. Los seis estándares considerados en esta investigación son: matemáticas, aprendizaje, equidad, apertura, inferencias y coherencia.

En el estándar de Matemáticas, se establece que la evaluación ha de reflejar el contenido matemático que todos los estudiantes necesitan conocer y aplicar. Todos los estudiantes deben conocer y poder aplicar las matemáticas destacadas por los estándares curriculares y de evaluación, las matemáticas y su uso en la sociedad continúa creciendo y cambiando. En consecuencia, las matemáticas que se enseñan en la escuela continúan evolucionando. La evaluación debe de reflejar las matemáticas que son más importantes que aprendan los estudiantes. Poseer *poder matemático* significa ser capaz de aplicar la comprensión matemática en nuevas situaciones y estar predispuestos a ello, así como a tener la confianza para hacerlo.

El estándar de aprendizaje sostiene que las evaluaciones son oportunidades de aprendizaje, así como ocasiones para que los estudiantes muestren lo que saben y lo que pueden hacer. Además orienta la enseñanza subsecuente y puede mejorar aun más el aprendizaje, incluye las evaluaciones externas al aula y las evaluaciones incluyen escuchar a los estudiantes, observarlos, y dar sentido a lo que dicen y hacen. El trabajo de los estudiantes en el salón de clase, junto con la realización de proyectos y trabajo adicional fuera del aula, constituye una fuente rica de datos de evaluación para hacer inferencias respecto al aprendizaje de los estudiantes. A medida que ocurre el cambio de grupos centrados en el maestro a grupos centrados en los alumnos, éstos se vuelven participantes más activos en la evaluación.

El estándar de equidad establece que las prácticas equitativas en la evaluación benefician a todos los estudiantes al centrar la atención en el aprendizaje de cada estudiante. Para cada estudiante, aumenta las expectativas, aclara lo que son las matemáticas y ayuda a que aprenda. Apegarse a una norma de equidad significa que los estudiantes alcancen altos niveles de logro. También significa que a cada estudiante se le proporcionen oportunidades para alcanzar dichos niveles y el apoyo necesario para hacerlo.

El estándar de apertura considera que la evaluación debe ser un proceso abierto, los estudiantes pueden no conocer las preguntas exactas que se les plantearan, aunque conocen su naturaleza. La apertura en la evaluación contribuye a hacer evaluaciones equitativas. La apertura en la evaluación significa informar al público con respecto al proceso, un proceso de evaluación abierto destaca la implicación profesional. Un tercer aspecto de la apertura es que el proceso de evaluación está abierto al escrutinio y la modificación. La evaluación de tipo abierto implica responsabilidades compartidas por estudiantes, maestros y público.

En el estándar de inferencia, la evaluación debe promover inferencias válidas acerca del aprendizaje de las matemáticas, la evaluación es un proceso de recopilación de evidencias y elaboración de inferencias a partir de tales evidencias, con diversos propósitos. Una inferencia sobre aprendizaje es una conclusión respecto a procesos cognitivos del estudiante que no pueden observarse directamente. Una dependencia exclusiva en un solo tipo de evaluación puede frustrar a los estudiantes, disminuir su autoconfianza y hacerlos sentir angustia con respecto a las matemáticas.

El estándar de coherencia; establece que la evaluación debe ser un proceso coherente, este estándar conecta a los otros con los sistemas de evaluación, los propósitos de la evaluación, el currículo y la enseñanza y asegura que los evaluadores desarrollen actividades y criterios de desempeño a la medida de los propósitos de cada evaluación, la coherencia se relaciona con todos los aspectos del proceso de evaluación y además subraya el principio de que la evaluación debe coincidir con la enseñanza.

Un propósito importante de la evaluación es monitorear el avance de los estudiantes hacia las metas de aprendizaje, la retroalimentación se utiliza en un esfuerzo por promover el crecimiento de cada estudiante con respecto al poder matemático. Otro propósito es la toma de decisiones en la enseñanza, y el uso de evidencias referentes al progreso de los estudiantes para tomar decisiones de enseñanza. Un tercer propósito es evaluar el logro de los estudiantes, e incluye el alcance de sus metas; así como la forma y comprensión de cada estudiante en relación con las metas que se espera que logre. El propósito de evaluar los programas es observar el funcionamiento del programa de matemáticas en relación con las metas y las expectativas para los estudiantes.

Los seis estándares son válidos para cada tipo de evaluación. No obstante, puede variar el modo en que se aplica un estándar particular en evaluaciones realizadas para diferentes propósitos. Los maestros necesitan implicarse en el proceso de evaluación para todos los propósitos. En la practica de la evaluación se garantizan varios cambios cuando: se evita solamente evaluar el conocimiento, se aleja de simplemente indicar si sus respuestas son correctas o no, se evita la sola dependencia en respuestas de preguntas breves en cuestionarios y pruebas de capítulo y se evita que maestros y organismos externos como únicos jueces del progreso.

El concepto de *poder matemático,* incluye una aptitud del estudiante para: explorar, conjeturar y razonar lógicamente y se entiende como la facultad de usar eficazmente una variedad de métodos matemáticos para resolver problemas no rutinarios. Las tareas de desempeño, los proyectos y los portafolios son algunos ejemplos de actividades de enseñanza y de evaluación más complejas y constituyen oportunidades para que los estudiantes muestren crecimiento en su poder matemático. (NCTM, 2002)

Desarrollo del modelo de evaluación

El proceso de evaluación, fue diseñado para aplicarse en la asignatura de Métodos Numéricos (también denominados por los expertos como computo científico). Para lo cual, hemos considerado los elementos que constituyen el proceso a partir del marco teórico conceptual establecido; así que se tendrá por objeto en la experimentación que los alumnos puedan resolver problemas y aplicar los conceptos y habilidades matemáticas para desenvolverse en la vida cotidiana como ingenieros.

El desarrollo del proceso está centrado en los estudiantes más que en el profesor, de tal manera que el primer elemento utilizado es una presentación por parte del profesor acerca del objeto matemático en cuestión, describiendo de manera muy breve la parte conceptual y la algorítmica, y se acompaña a esta presentación con una práctica en la que el estudiante tiene la oportunidad de experimentar, conjeturar y observar y realizar pruebas para resolver problemas relacionados con el objeto matemático o método numérico particular. Uno de los propósitos al llevar a cabo esta primera etapa del proceso es el que el estudiante deje de lado la parte mecanicista del objeto matemático y de la formulación y experimente con lo que es posible hacer, utilizando diversos medios de apoyo, como calculadora, software para graficar, uso de esquemas y tablas y programas por computadora con aplicaciones del método tratado. Es importante aclarar que el profesor explicará con toda claridad el proceso de desarrollo del modelo matemático correspondiente al método que se esté tratando.

La siguiente etapa del proceso consiste en una presentación del estudiante, en la que se le pide, establecer con toda claridad el objetivo y la meta de aprendizaje, y que seleccione los conocimientos previos que son necesarios para llevarla a cabo, se le pide explicar el objetivo que tiene el aprendizaje del método en cuestión, sus antecedentes, una breve descripción de la formulación (práctica del discurso matemático), y que el estudiante realice el planteamiento de un problema en el contexto de la ingeniería, mostrando la solución que realizó en el escritorio; la cual debe de coincidir con la que realiza el programa por computadora (correspondiente a la aplicación del método tratado) utilizado por el profesor en su exposición y que deberá ser reproducido por el estudiante (ya sea el que proporcionan los expertos o el que normalmente puede desarrollar el estudiante, con sus propios recursos). En esta actividad se pone especial interés en que el profesor pone a prueba la curiosidad de sus alumnos para que se planteen problemas adecuados a sus conocimientos, y les ayuda a resolverlos por medio de preguntas estimulantes, con el propósito de despertarles el gusto por el pensamiento independiente y proporcionarles ciertos recursos para ello.

Otra actividad que realiza el estudiante es la solución de un caso de estudio propuesto por el profesor. Se ha planificado que conjuntamente a la presentación hecha por el profesor, se propone el caso de estudio, luego se realiza la presentación por parte del estudiante, se utiliza una sesión a manera de taller para resolver problemas propuestos y finalmente se efectúa un ejercicio en el aula que forma parte de la evaluación. Estas actividades se realizan en un tiempo de 6.0 horas; asignando para la presentación del profesor junto con la experimentación y solución de problemas una clase con un tiempo de 1.5 horas; otro tanto igual para la presentación por parte del estudiante; una actividad muy importante es aquella donde se resuelven varios ejercicios bajo la guía y supervisión del profesor, en la que el alumno recibe retroalimentación y además se observe, se escuche y se estimule al estudiante para continuar con las soluciones de problemas diseñados para que tenga oportunidad de explorar, conjeturar, discutir con compañeros y tengan un significado en el área de estudio; así mismo se han propuesto los problemas de manera que el grado de dificultad vaya en aumento; a esta actividad se le dedica una sesión de 1.5 horas; y por último para la solución de un problema o ejercicio, resuelto en forma individual se dedica una clase de 1.5 horas. Como parte de la programación de actividades para la evaluación, el estudiante debe conjuntar estas actividades en un portafolio, con cada uno de los métodos tratados a lo largo del curso. Así mismo, cada una de estas actividades tendrá un peso específico para la valoración del aprendizaje y desarrollo de cada estudiante.

Conclusiones o propuestas

La función de los maestros hacia preguntar y escuchar, a medida que sus estudiantes se convierten en comunidades estimulantes de aprendizaje intelectual para alejarse de solo decir al estudiante que hacer; aunado a la función del profesor de búsqueda de altas expectativas, propuesta de trabajo desafiante, respeto mutuo y asistencia en el apoyo del rendimiento de los estudiantes y un cambio en el enfoque de la evaluación hacia un sistema basado en evidencias de múltiples fuentes, nos ha permitido tener una mejoría en la calidad de la evaluación, para revisar e interpretar adecuadamente los resultados obtenidos por los estudiantes en relación a los objetivos propuestos para la apropiación del conocimiento en cada tema, método u objeto matemático estudiado; a la vez que, nos permite llevar a cabo la retroalimentación correspondiente, con la finalidad de propiciar en el alumno la reestructuración continuada del conocimiento, necesario para la vida profesional.

El vigilar el avance de los estudiantes en el aula ha permitido mejorar el aprendizaje de cada alumno en la medida en que se facilita y motiva el acto de aprendizaje continuo y ayuda a que cada estudiante se convierta en un aprendiz independiente. Los estudiantes que logran esclarecer sus metas de aprendizaje y el progreso que realizan en la consecución de estas, tiene más probabilidades de ser aprendices de matemáticas reflexivos y seguros.

El uso de los estándares de evaluación para evaluar el rendimiento de los estudiantes puede asegurar que las inferencias sean confiables y que el proceso sea equitativo. Comparar el desempeño de los alumnos con criterios establecidos de manera abierta, concentrarse en evidencias del poder matemático de los estudiantes, depender de fuentes de evidencia múltiples y equilibradas y reportar resultados como perfiles de aprovechamiento, son prácticas que han podido mejorar los informes sumarios del rendimiento de los estudiantes.

Un programa de matemáticas se juzgará de manera más apropiada cuando en una evaluación se aplican los estándares de evaluación a las evidencias del logro de los estudiantes y a sus oportunidades para aprender.

Los cambios en la evaluación, en la currícula y en la enseñanza de las matemáticas no son un destino, sino un viaje. Los estándares proporcionan afirmaciones compartidas, para juzgar nuestro avance en ese viaje en compañía de otras personas. Considérese a los sistemas o modelos de evaluación, como un mapa que orientara el viaje. Los caminos pueden ser diferentes pero la meta es la misma; desarrollar el *poder matemático* en todos los estudiantes.

El uso de estándares bien definidos, tiene como finalidad, la de normar criterios que estén de acuerdo a los objetivos de los contenidos curriculares de las matemáticas; por lo que la aplicación sistemática de los criterios de evaluación podría conducir a resultados alentadores en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. También se podría conseguir el aplicar el sistema de evaluación a fin de impartir cursos de matemáticas que sean evaluados de acuerdo a los estándares de calidad, propios de una universidad de clase internacional.

Referencias Bibliográficas

Álvarez, M., Morfin, M., Ramos, R., Díaz, J., Anguiano, C., Álvarez, A. (2007). *Estrategias de evaluación del aprendizaje I*. México: Universidad de Guadalajara.

The National Council of Teachers of Mathematics Inc. (2002). *Assessment Standars for schools Mathematics*. USA: NCTM

UN ESTUDIO DE LAS RELACIONES ENTRE EL RESULTADO ACADÉMICO DE LOS ESTUDIANTES DE ELEMENTOS DE MATEMÁTICA Y LOS NIVELES DE PREFERENCIA EN SUS ESTILOS DE APRENDIZAJE

Liliana Cagliolo, Cristina Junco, Adriana Peccia
Universidad Nacional de Luján Argentina
lilianacagliolo@infovia.com.ar,juncocris@hotmail.com, adriana.peccia@tecnoforum.com.ar

Resumen. A partir de nuestra investigación sobre la relación entre los estilos de aprendizaje (pragmático, teórico, activo y reflexivo), definidos por las teorías de Honey, Gallego y Alonso, diagnosticados a 53 estudiantes de la carrera de Licenciatura en Administración de la Universidad Nacional de Luján, y los resultados académicos obtenidos por ellos en la asignatura Elementos de Matemática, se concluyó que, los más significativos en relación con las notas más altas fueron el Activo y el Teórico. Como continuación de dicha investigación, en el presente trabajo se explora, aplicando un diseño factorial con interacciones y tres categorías para cada uno de los dos estilos, los niveles de preferencia que más influyen en las notas. Como resultado de la misma: el nivel bajo o muy bajo del Activo y alto o muy alto del Teórico son los que influyen más significativamente sobre las notas.

Palabras clave: estilos de aprendizaje, resultado académico, niveles de preferencia

Abstract. From our research on the relationship between learning styles (pragmatic, theoretical, active and reflective), defined by the theories of Honey, Gallego and Alonso, diagnosed to 53 students in the career of Bachelor in Administration from Universidad Nacional de Luján, and the academic results obtained by them in Elements of Mathematics course, it was concluded that the most significant in relation to the higher notes were the Active and Theoretical styles. Following that investigation, in this work is explored, using a factorial design with interactions and three categories for each of the two styles, the preference levels that most influence the notes. As a result of the research: low or very low Active and high or very high theorical style are the most significant influence on the notes.

Key words: learning styles, academic result, preference levels

Introducción

Según Amago (2005), es conocida la problemática de los estudiantes a la hora de iniciar y continuar sus estudios universitarios. Un alto porcentaje de ellos no logra cumplir con éxito las metas deseadas en los tiempos previstos. Recortando esta problemática general, y de acuerdo con Litwin (1997) en cuanto que los estudiantes difieren en la manera de acceder al conocimiento en términos de intereses y estilos, en el sentido de poseer puertas de entrada diferentes para que inicien el proceso del conocimiento, nos detendremos en el aspecto del aprendizaje y particularmente en el Estilo de aprender de los estudiantes, con la intención de encontrar alguna relación entre los estilos y el resultado académico en la materia Elementos de Matemática. Está presente en el espíritu de este trabajo, favorecer futuras decisiones de enseñanza y un mejor conocimiento del estudiante en tanto sus potencialidades y dificultades a la hora de emprender esta tarea.

Marco teórico

Algunos autores como Kolb (1976), Hunt (1978), Dunn y Dunn (1978), Keefe (1979 en Keefe 1988), Alonso, Gallego y Honey (1994), Guild y Garger (1998), Ebeling (2000 en Ebeling, 2002), Lozano (2000), Cazau (2004), entre otros, han dado sus propios conceptos y definiciones sobre Estilos de Aprendizaje, entre las que se destacan:

Dunn y Dunn (1978) definen Estilos de Aprendizaje como un conjunto de características personales, biológicas o del desarrollo, que hacen que un método, o estrategia de enseñar sea efectivo en unos estudiantes e inefectivo en otros.

Alonso y otros (1994:p48) de acuerdo con Keefe (1988) explican que los Estilos de Aprendizaje son "los rasgos cognitivos, afectivos y fisiológicos que sirven como indicadores relativamente estables, de cómo los discentes perciben, interrelacionan y responden a sus ambientes de aprendizaje".

Guild y Garger (1998) consideran que los Estilos de Aprendizaje son las características estables de un individuo, expresadas a través de la interacción de la conducta de alguien y la personalidad cuando realiza una tarea de aprendizaje.

La definición de Keefe (1988) recogida por Alonso, Gallego y Honey (1997:p57) puntualiza que: "los estilos de aprendizaje son los rasgos cognitivos, afectivos y sicológicos que sirven como indicadores relativamente estables, de cómo los alumnos perciben interacciones y responden a sus ambientes de aprendizaje".

Además de las definiciones, diversos autores han presentado instrumentos de diagnóstico que cuentan con la validez y fiabilidad probada a lo largo de los años en distintas investigaciones en los campos educativos, empresariales, sicológicos y pedagógicos y han dado origen a un gran número de libros y de publicaciones de artículos científicos.

Para identificar el estilo de aprendizaje se aplicó el Cuestionario Honey-Alonso de Estilos de Aprendizaje (C.H.A.E.A.) el cual consta de 80 afirmaciones que se califican en una escala binaria: signo positivo si se está más de acuerdo que en desacuerdo y con signo negativo si se está más en desacuerdo que en acuerdo. A partir de las respuestas se le asigna a cada estilo un puntaje entre 0 y 20 y con ello se elabora el perfil de aprendizaje de acuerdo a los tipos: activo, reflexivo, teórico y pragmático.

El cuestionario CHAEA surge de la traducción y adaptación al contexto académico español, del cuestionario de estilos de aprendizaje LSQ de Peter Honey elaborado para profesionales de empresas del Reino Unido.

Para el análisis de este instrumento adaptado, los autores Alonso, Gallego y Honey (1995) realizaron:

- las pruebas de confiabilidad utilizando el coeficiente Alfa de Cronbach para medir la consistencia interna de la escala y
- las pruebas de validez mediante los siguientes análisis: de contenidos; de ítems; factorial del total de 80 ítems; factorial de los 20 ítems de cada uno de los cuatro factores teóricos (estilos) y factorial de los cuatro estilos de aprendizaje a partir de las medias totales de sus veinte ítems.

Los resultados de los cuestionarios se remitieron al F.U.N.D.E.C. (Fundación de Estudios Cognitivos) donde se le aplicaron las pruebas de validez y confiabilidad las que dieron satisfactorias.

La necesidad de tener en cuenta los estilos de aprendizaje en la enseñanza ha quedado demostrada en numerosas investigaciones, según Alonso (1992). Después de la adaptación del cuestionario, Alonso (1992) diseñó y desarrolló una investigación con 1371 alumnos de diferentes facultades de las Universidades Complutense y Politécnica de Madrid basándose en los resultados obtenidos en su investigación elaboró una lista con características que determinan el campo de destrezas de cada Estilo:

Estilo activo: Improvisador, descubridor, espontáneo.

Estilo reflexivo: Receptivo, analítico, exhaustivo, observador.

Estilo teórico: Metódico, lógico, crítico, estructurado.

Estilo pragmático: Experimentador, práctico, eficaz.

Algunos trabajos de investigación realizados en la Argentina, que han usado el cuestionario C.H.A.E.A. son:

"Estilos de aprendizaje de los estudiantes en dos sistemas curriculares diferentes: basado en asignaturas y en la solución de problemas". Universidad Nacional de Río Cuarto (Conicet). Córdoba.

"Estilos de aprendizaje de estudiantes que cursan la primera asignatura de la carrera de medicina en el nordeste argentino". Universidad Nacional del Nordeste.

"Estilos de aprendizaje una investigación con alumnos universitarios". Universidad Nacional de Rosario.

Variables para el diseño de la investigación

a) Los cuatro Estilos de Aprendizaje de cada estudiante:

El instrumento que identificó los Estilos de Aprendizajes fue el CHAEA.

b) El resultado académico de cada estudiante:

Definimos esta variable como las notas finales de la asignatura con calificación mayor o igual que cuatro. Si bien los 53 estudiantes pertenecen a distintos grupos de estudio (comisiones), cabe aclarar que los exámenes se realizan con un contenido y criterio de evaluación únicos para todos los estudiantes de la materia.

Para el análisis de las relaciones de estas variables se utilizó un modelo estadístico de tipo factorial con interacciones. El procesamiento se realizó con el paquete estadístico R versión 2.11.1.

Objetivos

Nuestro trabajo sobre los estilos de aprendizaje se propone un objetivo general y otro particular:

General: Explorar los Estilos de Aprendizaje de los estudiantes para mejorar la calidad de la enseñanza.

Particular: Conocer las relaciones existentes entre los niveles de preferencia de los Estilos Activo y Teórico con el resultado académico de los estudiantes, en la disciplina citada.

Resultados obtenidos en la primera etapa de esta investigación

Se consideraron los cuatro estilos como los factores del modelo, cada uno de ellos con dos niveles 0 y 1. Las unidades experimentales fueron los 53 estudiantes de la Carrera de Licenciatura en Administración de la Universidad Nacional de Luján – Centro Regional San Miguel que aprobaron la asignatura Elementos de Matemática en el 1° cuatrimestre de sus estudios.

Se aplicó el siguiente modelo:

$$N = \alpha_0 + \alpha_1 A + \alpha_2 R + \alpha_3 T + \alpha_4 P + \alpha_5 A * R + \alpha_6 A * T + \alpha_7 A * P + \alpha_8 R * T + \alpha_9 R * P + \alpha_{10} T * P + \varepsilon$$

A: Estilo Activo

R: Estilo Reflexivo

T: Estilo Teórico

P: Estilo Pragmático

N: Notas

El nivel 0 correspondía a puntajes entre 0 y 13 y el nivel 1 a puntajes entre 14 y 20.

Se probaron las hipótesis de ajuste del modelo las cuales mostraron un resultado satisfactorio.

El ANOVA produce los siguientes resultados:

El estadístico F para la interacción Activo-Teórico es mayor que el de la tabla de distribución de F con 5 % de nivel de confianza, por lo que aceptamos que los estilos Activo y Teórico influyen significativamente sobre las notas, con dicho nivel de confianza.

La tabla del ANOVA es la siguiente:

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value
Activo	1	15.268	15.268	3.4061
Reflexivo	1	0.056	0.056	0.0124
Teórico	1	0.387	0.387	0.0864
Pragmático	1	0.065	0.065	0.0144
Activo-reflexivo	1	0.457	0.457	0.1019
Activo-teórico	1	26.088	26.088	5.8200
Activo/pragmático	1	0.173	0.173	0.0386
Reflexivo-teórico	1	0.347	0.347	0.0774
Reflexivo/pragmático	1	0.002	0.002	0.0005
Teórico-pragmático	1	1.875	1.875	0.4184
Residuals	42	188.264	4.482	

Nuevos avances de la investigación

Luego de los resultados obtenidos en la primera parte de esta investigación decidimos estudiar cuáles eran los niveles de preferencia de cada uno de estos dos estilos que tenían mayor influencia sobre las notas de Elementos de Matemática, ahora bajo un modelo factorial que incluyera a estos dos estilos únicamente.

Para esto y siguiendo el esquema de preferencias trazado por Honey, Gallego y Alonso, buscamos en nuestra población los niveles muy bajos, bajos, medio, altos y muy altosde las mismas para los estilos Activo y Teórico.

Los autores definen preferencia muy baja para aquellos puntajes menores del percentil del 10% de la población, preferencia baja a aquellos puntajes entre el percentil del 10% y del 30%, preferencia media a los puntajes entre el percentil del 30% y el del 70%, preferencia alta a los puntajes entre el percentil del 70% y del 90% dejando la preferencia muy alta para aquellos puntajes mayores del percentil del 90%. Buscamos los valores de la media y el desvío estándar de estos estilos.

Análisis de los Estilos de Aprendizaje Activo y Teórico

Medias y desvíos estándar de los estilos de aprendizaje Activo y Teórico

Puntajes para definir las preferencias:

MEDIAS Y DESVÍACIÓN ESTÁNDAR			
ACTIVO		ACTIVO	
Media 11.7	Media 11.7	Media 11.7	Media 11.7

Una vez hallados los percentiles que definen cada una de las preferencias para estos dos estilos obtuvimos los siguientes puntajes en cada una de las categorías y decidimos agrupar en los niveles 0, 1 y 2 las distintas preferencias y avanzar con el estudio factorial, a continuación se muestran las categorías y sus niveles para cada estilo:

Para el Estilo Activo definimos los niveles que incluímos en el estudio factorial a partir de agrupar las preferencias muy baja y baja en el nivel 0, media en el nivel 1 y alta y muy alta en el nivel 2. Es decir que en el nivel 0 consideramos los puntajes entre 0 y 10, en el nivel 1 los puntajes entre 11 y 13 y en el nivel 2 aquellos puntajes entre 14 y 20.

PREFERENCIAS Y NIVELES PARA EL ESTILOS ACTIVO				
Muy baja	Baja	Media	Alta	Muy alta
0-8	9-10	11-13	14-16	17-20
Nivel 0	Nivel 0	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 2

Para el Estilo Teórico definimos los niveles que incluimos en el estudio factorial a partir de agrupar las preferencias muy baja y baja en el nivel 0, media en el nivel 1 y alta y muy alta en el nivel 2. Es decir que en el nivel 0 consideramos los puntajes entre 0 y 12, en el nivel 1 los puntajes entre 13 y 15 y en el nivel 2 aquellos puntajes entre 15 y 20.

PREFERENCIAS Y NIVELES PARA EL ESTILOS TEORICO				
Muy baja	Baja	Media	Alta	Muy alta
0-9	10-12	13-15	16-17	18-20
Nivel 0	Nivel 0	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 2

Como ya dijimos para indagar sobre aquellos niveles de preferencia de estos estilos que más influyen en las notas obtenidas por los estudiantes planteamos el siguiente modelo:

$$N = \alpha_0 + \alpha_1 A * T + \varepsilon$$

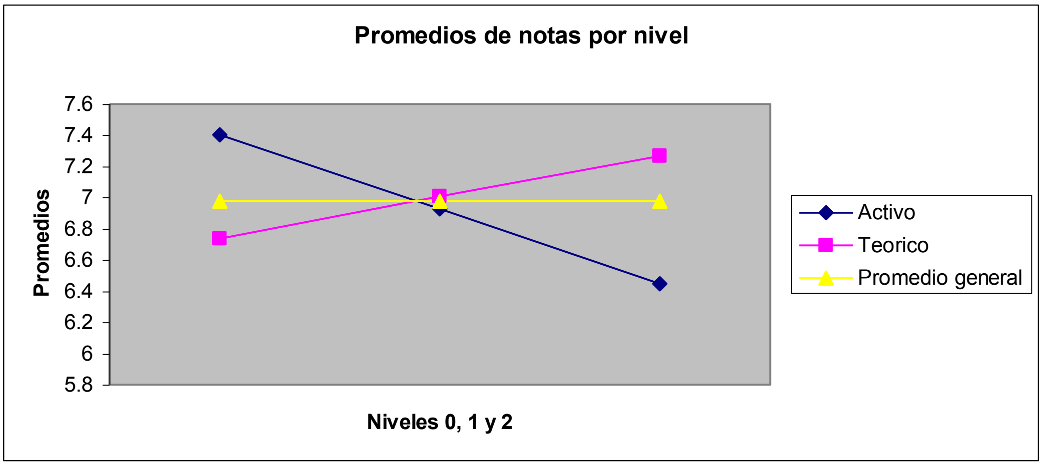
Donde en este caso Activo y Teórico tienen los tres niveles mencionados.

En la siguiente tabla del ANOVA, observamos que aumenta el valor del estadístico F a 6.05 y por lo tanto podemos trabajar con un nivel de significación del 1%.

	df	Sum Sq	Mean Sq	F-value
Activo	1	4.797	4.797	1.1715
Teórico	1	2.778	2.778	0.6785
Activo-teórico	1	24.768	24.768	6.0477
Residuals	49	200.642	4.0947	

Cuando se estudian las medias de las notas para estos dos estilos puede observarse el comportamiento ascendente de los mismas en función de los niveles más altos para el Estilo Teórico en contraposición con el comportamiento descendente de los promedios de notas para los niveles mayores del estilo Activo, anticipando una interacción significativa entre estos dos estilos.

El siguiente gráfico muestra estas variaciones comparadas con el promedio general:



Estudio de las interacciones

Pasemos a estudiar la interacción de los factores Activo – Teórico que resulta significativa luego de la aplicación del ANOVA. Cuando estudiamos la tabla de medias para la interacción de estos estilos resulta clara la influencia de dicha interacción entre los niveles 0 del Activo y 2 del Teórico para obtener el promedio más alto para las notas, en cambio la combinación del nivel 2 del Activo y nivel 0 del Teórico producen notas más bajas.

ACTIVO = 0			ACTIVO = 1			ACTIVO = 2			PROMEDIO GENERAL
TEÓRICO			TEÓRICO			TEÓRICO			
Nivel 0	**Nivel 1**	**Nivel 2**	**Nivel 0**	**Nivel 1**	**Nivel 2**	**Nivel 0**	**Nivel 1**	**Nivel 2**	6.98
6.5	6.7	8.85	6.63	6.67	7.11	5.33	6.5	6.7	
Rep: 2	Rep: 6	Rep: 6	Rep:16	Rep: 6	Rep: 8	Rep: 3	Rep: 4	Rep: 2	

Conclusiones

Los resultados obtenidos en la población de 53 alumnos, objeto de esta investigación, fueron los siguientes:

A medida que aumentan los niveles de preferencia del estilo Activo las notas van disminuyendo, esta disminución coincide con la disminución de los niveles de preferencia del estilo Teórico.

A medida que aumentan los niveles de preferencia del estilo Teórico las notas van aumentando, dicho crecimiento coincide con la disminución en los niveles de preferencia del estilo Activo.

En la interacción Activo – Teórico las notas más altas se dan en la combinación de preferencia muy baja y baja del Activo y alta y muy alta del Teórico.

En la interacción Activo – Teórico las notas más bajas se dan en la combinación de preferencia alta y muy alta del Activo y baja y muy baja del Teórico.

Nuestro próximo trabajo será estudiar relaciones entre Estilos y notas tanto aprobadas como desaprobadas. La investigación de la cual forma parte el presente trabajo tiene como objetivo poder contribuir al mejoramiento de la Enseñanza de la Matemática dentro del marco de las mejores formas de enseñar y aprender.

Referencias bibliográficas

Alonso, C. (1992) *Estilos de Aprendizaje: Análisis y Diagnóstico en Estudiantes Universitarios.* Madrid: Editorial Universidad Complutense.

Alonso, C., Gallego, D. y Honey, P. (1994). *Los Estilos de Aprendizaje: Procedimientos de diagnóstico y mejora.* Bilbao: Ediciones Mensajero

Alonso, C., Gallego, D. y Honey, P. (1995) *Los Estilos de Aprendizaje. Procedimientos de diagnóstico y mejora*". Bilbao: Mensajero

Alonso, C., Gallego, D. y Honey, P. (1997). *Los estilos de aprendizaje.* Bilbao: Mensajero

Alonso, C., Gallego, D. y Honey, P. (1999). *Los estilos de aprendizaje: procedimientos de diagnóstico y mejora.* Bilbao: Mensajero

Amago L. (2005). *Los docentes universitarios ante los nuevos escenarios para la formación de los estudiantes. Estudiantes ingresantes a la universidad*. II jornada sobre docencia Argentina. Universidad de General Sarmiento

Cazau, P. (2004a). *Guía de Estilos de Aprendizaje*. Recuperado el 30 de noviembre de 2010

http://galeon.hispavista.com/pcazau/guia_esti.htm

Cazau, P. (2004b). *Estilos de aprendizaje: Generalidades*. Recuperado el 30 de noviembre de 2010. http://pcazau.galeon.com/guia_esti01.htm

Cuestionario *C.H.A.E.A.*(sf). Recuperado el 23 de Marzo de 2012 de http://www.estilosdeaprendizaje/chaea/chaea.htm

Dunn, R. y Dunn, K. (1978). *Teaching Students throught their Individual Learning Styles: A practical aproach*. New Jersey: Prentice Hall.

Ebeling, V. (2002). *Educating America in the 21st Century*. published by Vicki Ebeling with Little Leaf Press, Lavalette, WV, 2002, ISBN:1-893385-11-6.

Guild, P. y Garger, S. (1998). *Marching to Different Drummers*.USA: ASCDAssociation for Supervision and Curriculum Development.

Hunt, D. (1978). En Hunt, D.E. (1979). *Student Learning styles: diagnosis and prescribing*

program. Virginia: Reston

Keefe, J. (1979, 1987). En Keefe, J.W. (1988). Profiling and Utilizing Learning Style. Virginia: Reston National Association of Secondary School Principals.

Kolb, D. (1976). *The Learning Style Inventory: Technical Manual.* Boston, Ma.: McBer

Kolb, D (1984). *Experiential Learning. Experience as the source of learning and development. Englewood Cliffs*. New Yersey: Prentice-hall

Litwin, E, (1997*). Las configuraciones didácticas*. Bs.As.: Paidos.

Lozano, A. (2000). *Estilos de Aprendizaje y Enseñanza. Un panorama de la estilística*

Educativa . ITESM Universidad Virtual - ILCE. México: Trillas.

R for Windows. Versión 2.11.1. Recuperado el 31 de Mayo de 2010 de http://cran.r-project.org

Seber, G.A. (1984). *Multivariate Observations*, New Zeland: J.Wiley

Stapleton, J. (1995). *Linear Statistical Models*. N.Y.: J.Wiley

Tójar Hurtado, J.C.(2001) *Planificar la investigación educativa: una propuesta integrada.* Bs. As.: Fundec

Tukey, J., Hoaglin, D. y Mosteller, F. (1983.) *Understanding Robust and Exploratory Data Analysis.* N.Y.: J.Wiley

PROCEDIMIENTOS GEOMÉTRICOS PARA EVALUAR INTEGRALES DEFINIDAS Y SUS IMPLICACIONES DIDÁCTICAS

Rogelio Acosta González
Universidad de las Tunas Cuba
racosta@ult.edu.cu

Resumen. La evaluación de integrales definidas utilizando la definición consume demasiado tiempo. Esto puede explicar por qué, en los textos y en la práctica docente, se procura establecer lo más rápidamente posible la fórmula de Newton−Leibniz. El tránsito acelerado desde los aspectos conceptuales hasta la parte procedimental, relativa al cálculo de una integral definida con la fórmula de Newton−Leibniz, puede tener un costo en lo que a comprensión conceptual se refiere. Esto plantea el siguiente problema: ¿Será aconsejable demorar la introducción de la fórmula de Newton−Leibniz y concentrar los esfuerzos iniciales en promover la comprensión conceptual, mediante el desarrollo de actividades concebidas para que los estudiantes utilicen la definición, interpretaciones, propiedades y aplicaciones para evaluar integrales definidas? En el trabajo se aborda esta problemática y empleando procedimientos geométricos se calculan integrales definidas no triviales, con un consumo aceptable de tiempo y la participación activa de los estudiantes.

Palabras clave: integral definida, procedimientos geométricos de cálculo

Abstract. The evaluation of definite integrals using its definition consumes too much time. This can explain why, in textbooks and educational practice, it's attempted to establish the Newton-Leibniz formula as quickly as possible. The accelerated transfer from the conceptual aspects to the procedural part, relative to the calculation of a definite integral with the Newton-Leibniz formula, may have a cost referring to conceptual comprehension. From this arises the following problem: Will it be advisable to delay the introduction of the Newton-Leibniz formula and focus the initial efforts in promoting the conceptual comprehension, through the development of activities conceived so that the students use the definition, interpretations, properties and applications to evaluate definite integrals? This paper addresses this issue, and non-trivial definite integrals are calculated applying geometric procedures, within an acceptable period of time and active participation of the students.

Key words: definite integral, geometrical calculation procedures

Introducción

La integración de funciones reales de una variable real se desarrolla en las disciplinas de formación matemática en carreras de perfiles agropecuarios, técnicos y económicos, entre otras. Es frecuente en el aula, y en muchos textos, que se inicie la exposición con las integrales indefinidas. Menos común, aunque también legítimo, es comenzar con las integrales definidas. Este ordenamiento es el que se sigue, por ejemplo, en Cálculo con trascendentes tempranas (Stewart, 2002), libro que se utiliza en Cuba como texto básico para las carreras de Ciencias Técnicas. Por más de diez años, en carreras que se desarrollan en la Universidad de Las Tunas, el autor ha seguido este orden, etapa en el cual ha procurado fundamentar sus ventajas, concibiendo y desarrollando medios para su puesta en práctica (Acosta, 2010).

La necesidad de introducir la fórmula de Newton−Leibniz lo antes posible, atendiendo a las dificultades que comporta el proceso de evaluación de una integral definida cuando se utiliza únicamente la definición, se refleja en cómo se trata la integración en los textos y en el aula; fundamentalmente en esta última, donde la disponibilidad de tiempo es limitada.

El tránsito acelerado que entonces se lleva a cabo, desde los aspectos conceptuales hasta los procedimentales, puede tener un efecto negativo sobre los primeros, porque se corre el riesgo de que las habilidades de cálculo analítico de integrales definidas, que es necesario desarrollar por parte de los estudiantes, se logren al margen o en detrimento de la comprensión conceptual, que es la cuestión más importante que se debe atender en la formación matemática de los estudiantes (concentrarse en la comprensión de los conceptos es la primera recomendación de la Conferencia para la Reforma del Cálculo, Universidad de Tulane, 1986, citada por Stewart, 2002).

De las consideraciones anteriores se revela una contradicción. De una parte se tiene la necesidad de disponer tempranamente de la fórmula de Newton−Leibniz, como medio eficiente para calcular integrales definidas, ante los inconvenientes prácticos que se presentan al hacerlo mediante la definición. Por otro lado, se puede comprometer la comprensión conceptual si no se mantiene el foco de atención de los estudiantes sobre el concepto, las propiedades, interpretaciones y aplicaciones de la integral definida.

¿Es una contradicción sin solución? ¿Será aconsejable demorar la introducción de la fórmula de Newton−Leibniz y concentrar los esfuerzos iniciales en promover la comprensión conceptual, mediante el desarrollo de actividades concebidas para que los estudiantes utilicen la definición, interpretaciones, propiedades y aplicaciones para evaluar integrales definidas?

En este trabajo, que se fundamenta en la concepción histórico-cultural (Vygotsky, L. S., 1973) y donde se asumen preupuestos del Aprendizaje Cooperativo, se plantean posibles respuestas a esta cuestión. La idea básica es la siguiente: mediante procedimientos geométricos intuitivos y asequibles, como son los de rotación, traslación y reflexión, junto con conocimientos previos sobre longitudes, áreas y volúmenes, se pueden evaluar integrales definidas no triviales con un costo aceptable de tiempo. Este proceso de evaluación se concibe con la participación activa de los estudiantes, se materializa utilizando la definición y recurre a sus propiedades, interpretaciones y aplicaciones.

Algunos resultados sobre el cálculo integral

Tanto en los textos como en la práctica docente predomina el enfoque de introducir el concepto de integral definida de una función $y = f(x)$, que es continua y no negativa en un intervalo cerrado $[a, b]$, en estrecha relación con el problema de la determinación del área del trapecio curvilíneo correspondiente (figura 1). Para una función continua que no conserva el signo en el intervalo de integración, a la integral definida se le interpreta como una suma algebraica de áreas con signo.

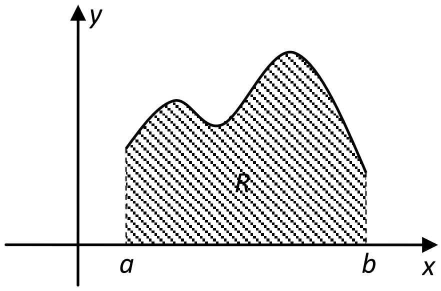


Figura 1. La integral definida de la función $y = f(x)$, continua y no negativa en $[a, b]$, es numéricamente igual a la medida del área de la región R, que está limitada por arriba por la gráfica de $y = f(x)$ en este intervalo.

Ya definido el concepto de integral definida como el límite de las sumas integrales, se precisa con todo rigor la noción intuitiva de área de una figura plana, al tiempo que se garantiza que existe la integral definida en $[a, b]$ para toda función $y = f(x)$ que es continua en este intervalo. Sobre la base de la definición, y manteniendo una fuerte apelación a la interpretación geométrica, lo que favorece su comprensión, se establecen algunas de las propiedades más importantes de la integral definida, otras interpretaciones y aplicaciones. También es práctica usual que se desarrollen algunos ejemplos.

Un ejemplo de integral definida aplicando la definición

La evaluación de una integral definida utilizando la definición es un proceso complejo, pero que no se debe eludir porque brinda la mejor oportunidad de trabajar con el concepto y su interpretación en términos de áreas. Seguidamente se desarrolla el ejemplo que corresponde a la función exponencial natural $f(x) = e^x$ en $[0, 1]$ (Piskunov, 1983), que es continua en todo R, de manera que existe la integral definida correspondiente, y el límite de la suma integral que la define no depende de la partición que se haga del intervalo, ni de cómo se seleccione el punto que se requiere en cada intervalo parcial. Por eso, lo mejor es dividir $[0, 1]$ en n ($n \in N$) subintervalos de la misma amplitud h, mediante la partición

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < \ldots < x_n = 1, \text{ siendo } x_k = kh \text{ para } k = 0, 1, \ldots, n, \text{ donde } h = \frac{1}{n}.$$

Seleccionando el extremo izquierdo en cada subintervalo, se obtiene la siguiente suma integral (es la suma integral inferior por ser $f(x) = e^x$ creciente):

$$S_n^I = \frac{1}{n} + \frac{\sqrt[n]{e}}{n} + \frac{(\sqrt[n]{e})^2}{n} + \cdots + \frac{(\sqrt[n]{e})^{n-1}}{n}.$$

Cada sumando es numéricamente igual al área de un rectángulo, y la propia suma S_n^I representa el área conjunta de la figura escalonada que resulta de la unión de todos los rectángulos, y constituye una aproximación por defecto del área del trapecio curvilíneo determinado por $f(x) = e^x$ en [0, 1]. Después de extraer el factor común $1/n$ y observar que multiplica a la suma de los primeros n términos de la progresión geométrica de primer término $a = 1$ y razón $q = \sqrt[n]{e}$, se aplica la fórmula para la suma de los primeros n términos en tales progresiones y se obtiene la expresión

$$S_n^I = \frac{1}{n}(1 + \sqrt[n]{e} + (\sqrt[n]{e})^2 + \cdots + (\sqrt[n]{e})^{n-1}) = \frac{e-1}{n(\sqrt[n]{e}-1)}.$$

Con el cambio de variables $x = \frac{1}{n}$ se expresa $S_n^I = \frac{(e-1)x}{e^x - 1}$, donde $x \to 0^+$ si $n \to +\infty$. De la aplicación de la Regla de L'Hospital se tiene $\lim_{n\to+\infty} S_n^I = e - 1$, de modo que

$$\int_0^1 e^x dx = e - 1,$$

que se interpreta como la medida del área del trapecio curvilíneo determinado por la función exponencial natural $f(x) = e^x$ en el intervalo [0, 1].

Integral definida de una función impar en [–b, b], b>0. Consecuencias

De la interpretación como una suma algebraica de áreas con signo, la integral definida de una función impar y continua en $[-b, b]$, donde $b > 0$, es igual a cero, resultado que se formaliza con la igualdad

$$\int_{-b}^{b} f(x)dx = 0 \qquad (1)$$

Al sumar a la función impar y continua $f(x)$ su máximo M en $[-b, b]$, se obtiene una nueva función, definida por la expresión **$g(x) = f(x) + M$**, que determina una traslación vertical de $f(x)$, ya que su grafica resulta de trasladar M unidades hacia arriba la gráfica de $f(x)$. La gráfica de $g(x)$ descompone al rectángulo con vértices en los puntos de coordenadas $(-b, 0)$, $(b, 0)$, $(b, 2M)$ y $(-b, 2M)$ en dos regiones congruentes y por eso con la misma área, igual a la mitad del área del rectángulo. Una de estas regiones es el trapecio curvilíneo determinado por la gráfica de $g(x)$ en $[-b, b]$. De la interpretación geométrica de la integral definida de una función que es no negativa, como es $g(x)$ en $[-b, b]$, se obtiene que

$$\int_{-b}^{b} g(x)dx = \int_{-b}^{b} (f(x)+M)dx = 2bM \qquad (2)$$

Adicionalmente, si $y = f(x)$ es impar en $[-b, b]$, se define $\boldsymbol{h(x) = g(x-k) = f(x-k) + M}$, donde M es el máximo de $f(x)$ en este intervalo y k es un número real. Así $\boldsymbol{h(x)}$ es el resultado de una traslación vertical (M unidades hacia arriba) seguida de una horizontal (hacia la derecha para $k > 0$; para la izquierda en caso de ser $k < 0$) de $y = f(x)$. Observar que las traslaciones son movimientos geométricos, de manera que los términos utilizados, sobre las traslaciones de $y = f(x)$, se deben interpretar como traslaciones de su gráfica.

La integral definida de $h(x)$ en cada intervalo $[-b+k, b+k]$ es igual a $2bM$ y es lo que se ilustra en la figura 2 para $k = b$ y se formaliza en (3)

$$\int_{k-b}^{k+b} h(x)dx = \int_{k-b}^{k+b} (f(x-k)+M)dx = 2bM \qquad (3)$$

Las relaciones (1), (2) y (3) pueden interpretarse como la aplicación del teorema del valor medio a las correspondientes funciones e intervalos. Ejemplos donde se apliquen las relaciones (1), (2) y (3) se obtienen precisando una función impar y los parámetros b y k, así como determinando el máximo M en $[-b, b]$. Si el valor de b se prefija, la aplicación de la relación (3) a $h(x) = g(x-k) = f(x-k) + M$, para todo $k \neq 0$, permite obtener un ejemplo para cada elección de k.

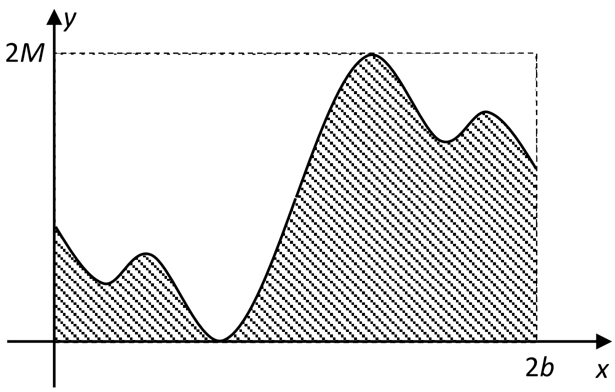


Figura 2. La integral definida de $y = h(x)$ en el intervalo $[0, 2b]$ es igual a $2bM$. La función $h(x)$ resulta de una traslación vertical (M unidades) seguida de una horizontal (b unidades) de la función $f(x)$, continua e impar en $[-b, b]$.

Por ejemplo, tomando $b = 1$ y la función impar $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, resultan las integrales $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{2x}{x^2+1}dx = 0$ y $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{(x+1)^2}{x^2+1}dx = 2$, ya que $M = 1$ es el máximo de $f(x)$ en $[-1, 1]$ y la relación (2) se aplica a $g(x) = f(x)+1 = \dfrac{2x}{x^2+1}+1 = \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$.

Volúmenes de revolución

Otra recurso para evaluar integrales definidas no triviales es la fórmula integral para el cálculo del volumen del cuerpo de revolución que se obtiene de la rotación alrededor del eje *x* del trapecio curvilíneo determinado por $y = f(x)$ en $[a, b]$. La fórmula es

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx, \tag{4}$$

y se establece como el límite de la suma integral V_n de la función $g(x) = \pi(f(x))^2$. Este resultado se basa en la interpretación de cada término de V_n como el volumen de un disco. La integral definida en (4) existe si $y = f(x)$ es continua en $[a, b]$. Si el cuerpo de revolución que resulta tiene volumen conocido, entonces la integral definida que se obtiene de aplicar la fórmula integral (4) es numéricamente igual a ese volumen.

Por ejemplo, de la rotación de un semicírculo de radio *R* alrededor de su diámetro se obtiene un cuerpo esférico. Definiendo un sistema de coordenadas cartesianas con eje de las abscisas conteniendo al diámetro y eje de las ordenadas por el centro del semicírculo, entonces la semicircunferencia que limita al semicírculo es la gráfica de la función definida por $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$. De la aplicación de la relación integral (4), y de la conocida fórmula para calcular el volumen de un cuerpo esférico de radio *R*, se obtiene que

$$\pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2) dx = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

De la última integral se obtiene la integral definida de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, R]$. Se comienza multiplicando sus dos miembros por $1/\pi$, luego se usa la propiedad de linealidad para expresar el miembro de la izquierda como la diferencia entre las integrales definidas de R^2 y x^2, y finalmente se despeja la integral definida de $f(x) = x^2$.

$$\pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2) dx = \frac{4\pi R^3}{3} \Leftrightarrow \int_{-R}^{R} R^2 dx - \int_{-R}^{R} x^2 dx = \frac{4R^3}{3} \Rightarrow \int_{-R}^{R} x^2 dx = 2R^3 - \frac{4R^3}{3} = \frac{2R^3}{3}.$$

La integral definida de la función constante $h(x) = R^2$, igual a $2R^3$, se obtiene como consecuencia de su interpretación como la medida del área del rectángulo de base $2R$ y altura R^2. Para pasar de $[-R, R]$ a $[0, R]$ se apela a una sutileza geométrica: $f(x) = x^2$ es **par** y de ello

$$\int_0^R x^2 dx = \frac{R^3}{3}.$$

Un ejemplo interesante

Las funciones $f(x)$ = sen x y $g(x)$ = cos x son no negativas en [0, π/2]. Los trapecios curvilíneos que ambas determinan en este intervalo son congruentes, ya que cualquiera de ellos es el reflejo del otro con respecto a la recta paralela al eje de las ordenadas por el punto $x = \pi/4$. Por lo tanto, si esos trapecios rotan alrededor del eje x, se forman cuerpos de revolución del mismo volumen V (en la figura 3 se representa el cuerpo que corresponde a $g(x)$ = cos x). Al aplicar a estas funciones la fórmula (4), resulta

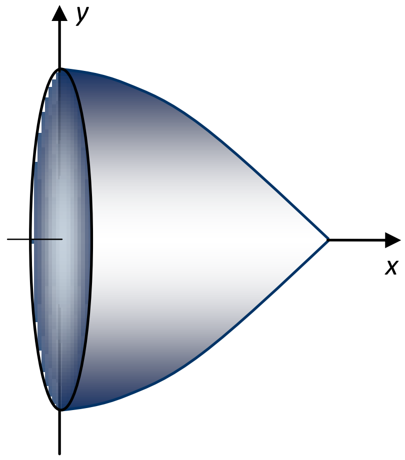


Figura 3. Cuerpo de revolución que se obtiene de la rotación alrededor del eje de las x del trapecio curvilíneo determinado por $g(x) = \cos x$ en [0,π/2].

$$V = \pi\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x dx = \pi\int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx.$$

El valor $V = \pi^2/4$ se obtiene de la siguiente secuencia de igualdades:

$$2V = \pi\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x dx + \pi\int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx = \pi\int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) dx = \pi\int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi^2}{2} \Rightarrow V = \frac{\pi^2}{4},$$

consecuencia de utilizar la propiedad de linealidad, luego la identidad trigonométrica fundamental y finalmente la interpretación de la última integral a la derecha como la medida del área del rectángulo de base π/2 y altura 1, que es el trapecio curvilíneo determinado por la función constante $h(x) = 1$ en [0, π/2]. Sustituyendo $V = \pi^2/4$ y multiplicando por $1/\pi$ todos los miembros de la relación para V, se obtienen las integrales

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{4}.$$

Integral definida de una función si se conoce la de su inversa

Se supone ahora que se conoce el valor de la integral definida de cierta función $y = f(x)$ en $[0, b]$, para algún $b > 0$, donde ella es continua, creciente y no negativa. Mediante una reflexión con respecto a la recta de ecuación $y = x$ del trapecio curvilíneo determinado por $y = f(x)$ en $[0, b]$, se determina la integral definida de su inversa $y = g(x)$ en $[f(0), f(b)]$.

Si $y = f(x)$ es continua, no negativa y creciente en $[0, b]$, para $b > 0$, entonces se cumple que

$\int_0^b f(x)dx + \int_{f(0)}^{f(b)} g(x)dx = bf(b)$, donde $y = g(x)$ es la inversa de $y = f(x)$. Esta igualdad es la expresión analítica de un hecho geométrico: el área del rectángulo con vértices en los puntos de coordenadas (0, 0), (b, 0), (b, $f(b)$) y (0, $f(b)$) —dada por el producto $bf(b)$—, es la suma de las áreas de las dos regiones en que la gráfica de $y = f(x)$ en [0, b] descompone a ese rectángulo. Al aplicar esta relación a $f(x) = e^x$ en [0, 1] y a su inversa $g(x) = \ln x$ en [$f(0)$, $f(1)$] = [1, e], se obtiene que $\int_0^1 e^x dx + \int_1^e \ln x dx = e$, y luego el valor $\int_1^e \ln x dx = 1$, pues utilizando la definición ya se determinó que $\int_0^1 e^x dx = e - 1$.

Sobre la legitimidad de los resultados obtenidos

Hasta aquí una muestra de integrales que pueden obtenerse de procedimientos geométricos, como resultado de actividades diseñadas para el trabajo grupal cooperativo.

Dos cuestiones importantes se plantean: ¿Es legítimo establecer resultados sobre la base exclusiva de procedimientos geométricos? ¿Se puede asegurar que son correctas las integrales definidas obtenidas de la aplicación de esos procedimientos?

La respuesta a la segunda interrogante es sí, son correctas. También lo serán todas las integrales definidas que se calculen aplicando (correctamente) esos procedimientos.

Un experto, como un matemático o un profesor de matemáticas, seguro coincidirá en que es conveniente apelar, cada vez que ello sea posible y necesario, a un enfoque geométrico del contenido, como medio que favorece su comprensión. Al propio tiempo, posiblemente se resista a aceptar como válidos resultados que se hayan obtenido en virtud de consideraciones geométricas (es lo que ha prevalecido hasta aquí), o rechace utilizar conocimientos que no se hayan establecido con todo rigor. Este problema no es nuevo y sobran ejemplos para demostrarlo.

Por ejemplo, el hecho de que la integral definida de una función continua e impar en [$-b$, b] es igual a cero, no se demuestra con una figura. Una prueba rigurosa se tiene que basar en el empleo de la definición de la integral definida como un límite, aunque a la luz de la interpretación geométrica sea difícil aceptar otro resultado.

Una objeción similar se puede hacer con la fórmula que permite calcular el volumen de un cuerpo esférico. Los estudiantes pueden recordar (algunos lo hacen) la fórmula $V = 4\pi R^3/3$, aunque es posible que no reconozcan o hayan olvidado, si es que alguna vez se les dijo o leyeron, que no hay una manera rigurosa de establecerla en el nivel de enseñanza donde se introduce.

La propia función exponencial $f(x) = e^x$ no es posible definirla de manera satisfactoria a nivel elemental. Incluso, algo que posiblemente resulte paradójico en el contexto de este trabajo, en algunos textos (Spivak, 1974; Swokowski, 1989) se introduce la función logaritmo natural como la integral definida de $f(t) = 1/t$ en $[1, x]$, donde $x > 0$, para luego definir $f(x) = e^x$ como su inversa.

La posición que se asume toma en cuenta que el conflicto al que se enfrenta el experto con la necesidad de rigor, el estudiante ni siquiera se lo llega a plantear. Para él es un hecho que el volumen de la «esfera» se calcula con la fórmula $V = 4\pi R^3/3$ y el área del círculo con $A = \pi R^2$. Y la función exponencial está disponible, junto con muchas otras.

Si se acepta que el papel de los conocimientos previos de los estudiantes es crucial para poder enfrentar nuevos aprendizajes con posibilidades reales de éxito, entonces no se debería poner reparo alguno en activarlos para utilizarlos, incluso en los casos en que carezcan del rigor y el fundamento matemático necesarios; a fin de cuentas, desarrollar la capacidad de reconocer esas eventuales carencias, a la luz de nuevos marcos conceptuales, es un componente importante del quehacer matemático.

En consecuencia, se considera lícito el empleo de todos los conocimientos previos de que dispongan los estudiantes, no importa el grado de formalización que tengan. Y el enfoque geométrico, que permite visualizar y hacer un poco más comprensibles tantos conceptos y resultados matemáticos (Souto, 2009), se tiene que utilizar sistemáticamente para que sea fuente de nuevos conocimientos. Esta posición también implica riesgos, que se enfrentan haciendo las precisiones necesarias, para que cada contenido matemático lleve la cuota de rigor y formalización que le corresponda. Un equilibrio adecuado es una meta compleja de alcanzar, pero se puede trabajar para lograrlo.

Implicaciones didácticas: roles de profesores y estudiantes

La posibilidad de evaluar integrales definidas no triviales por medios geométricos, con un gasto aceptable de tiempo y las ganancias que en cuanto a comprensión conceptual ello puede significar, se concretan con la concepción y desarrollo de actividades que favorezcan la participación consciente y activa de los estudiantes. Se proponen actividades a desarrollar, correspondientes a tres momentos importantes, no los únicos.

1. El problema del área. Trapecio curvilíneo.

2. Procedimientos geométricos para evaluar integrales definidas.
3. Necesidad de una fórmula general para evaluar integrales definidas.

Las tres actividades propuestas se conciben para ser desarrolladas por equipos, tanto en formatos presenciales como no presenciales. Para asegurar que se cumplan los objetivos previstos, pueden ser útiles las indicaciones siguientes:

- Formar equipos no homogéneos en cuanto a competencias matemáticas y que estén acordes con las características del grupo de estudiantes. Asignar roles.
- Presentar la actividad, precisando el trabajo a realizar y sus objetivos.
- Monitorear el trabajo de los equipos. Garantizar niveles adecuados en las ayudas adicionales que sean necesarias. Fomentar la cooperación entre los equipos.
- Discutir los resultados en sesión plenaria, promoviendo el intercambio.
- Precisar los hallazgos y registrar las conclusiones. Realizar las generalizaciones y correcciones que sean pertinentes.

Conclusiones

La integral definida se introduce usualmente en relación con el problema del área de un trapecio curvilíneo. Las propiedades, interpretaciones y aplicaciones de este concepto se establecen como consecuencia de su definición como un límite, sin que se tenga que tomar en cuenta la fórmula de Newton−Leibniz.

La fórmula de Newton−Leibniz se introduce en los textos y en el aula muy rápido. Asumir esta tendencia puede implicar un costo en cuanto a la comprensión conceptual.

De la utilización del concepto y sus interpretaciones se obtuvieron procedimientos geométricos que permitieron evaluar varias integrales definidas con un gasto aceptable de tiempo. Los procedimientos descritos se basan en movilizar, junto con las interpretaciones de la integral definida, una serie de conceptos y resultados previos sobre funciones, áreas y volúmenes, traslaciones y otros medios geométricos. Estos recursos son asequibles a los estudiantes en virtud de que se apela en ellos a la intuición y porque pueden ser recuperados y activados como parte del proceso de su utilización. Lo señalado apunta a la importante cuestión de promover la comprensión conceptual, aspecto clave en la formación matemática de los estudiantes.

Finalmente, se conciben actividades con el propósito de propiciar que los estudiantes se involucren de forma consciente y sistemática como sujetos activos de su propio aprendizaje sobre contenidos importantes del cálculo integral de funciones reales de una variable real.

Referencias bibliográficas

Acosta, R. (2010). *Fundamentos para la organización del cálculo integral en un tema único, focalizado en la integral definida*. Recuperado el 12 de septiembre de 2010 de http://www.congreso.rimed.cu/.

Piskunov, N. (1983). *Cálculo diferencial e integral*. Moscú: MIR.

Souto, B. (2009). *Visualización en matemáticas. Un estudio exploratorio con estudiantes de primer curso de matemáticas*. Tesis de Maestría no publicada, Universidad Complutense de Madrid. España.

Spivak, M. (1974). *Calculus*. La Habana: Pueblo y Educación.

Stewart, J. (2002). *Cálculo con trascendentes tempranas*. La Habana: Félix Varela.

Swokowski, E. (1989). *Cálculo con geometría analítica*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Vygotsky, L. S. (1973) Aprendizaje y desarrollo intelectual en la edad escolar. En Luria, Leontiev, Vygotsky y otros. *Psicología y Pedagogía*. Madrid. Akal.

EL USO DEL LENGUAJE EN LA CONSTRUCCIÓN DEL NÚMERO NATURAL: UNA SITUACION DIDÁCTICA DE JUEGO CON CALCULADORA

Lorena Trejo Guerrero, Marta Elena Valdemoros Álvarez
Cinvestav-IPN México
loreloren@hotmail.com, mvaldemo@cinvestav.mx

Resumen. El presente trabajo está inmerso en una investigación acerca del uso del lenguaje dentro del salón de clases, mostramos el resultado obtenido al utilizar situaciones de enseñanza de juegos con calculadora, con la finalidad de propiciar que nuestros alumnos lleguen a generar experiencias reflexivas, que les permitan construir a partir de las propiedades de los múltiplos de tres, así como utilizar eficazmente las características de las operaciones aritméticas básicas: suma, resta, multiplicación y división en la construcción del concepto de número natural. Para lograr lo anterior realizamos un taller con maestros de educación primaria de la escuela pública en el Estado de Hidalgo, México

Palabras clave: calculadora, lenguaje, argumentos, alumnos, grupo de profesores

Abstract. This work shows the results obtained by using teaching situations calculator games, in order to lead our students to reflective experiences that enable them to build on the properties of the multiples of three, and use effectively the characteristics of basic arithmetic operations: addition, subtraction, multiplication and division in the construction of the concept of natural numbers. To achieve this we held a workshop with primary school teachers of public schools in the State of Hidalgo, Mexico.

Key words: calculator, language, arguments, student, teachers group

Introducción

Dentro de la Reforma Integral de Educación Básica que se realiza actualmente en México desde el 2009 y sigue en desarrollo a la fecha y de acuerdo con los Planes y Programas, se espera que los alumnos adquieran conocimientos y habilidades en la resolución de problemas comunicando información matemática. Nuestra propuesta deriva del Eje Temático Sentido Numérico y Pensamiento Algebraico, el cual pretende encontrar el sentido del lenguaje matemático oral o escrito.

Para fortalecer la enseñanza de las matemáticas es necesario recurrir al uso de la tecnología, a través de la cual se ejerce la acción educativa y la conducción de nuestros estudiantes hacia experiencias reflexivas que respalden la construcción de su aprendizaje, de manera autónoma. Mostramos entonces el resultado obtenido al utilizar situaciones de enseñanza de juegos con calculadora. Para lo anterior es importante observar detenidamente la participación del profesor para lograr los objetivos que se plantean a través de la planeación de las clases, lo que nos permitirá acercarnos a sus necesidades docentes.

Problema

El objeto de nuestra investigación es el estudio de la construcción del lenguaje en los números naturales, en el marco de la enseñanza de juegos con calculadora. Al aprovechar los recursos tecnológicos a través de los cuales se ejerce la acción educativa, pretendemos someter a análisis el lenguaje del aula, para lo cual se impartió un taller con maestros de educación primaria del sistema público en el Estado de Hidalgo, dos maestros impartieron las clases de los juegos con calculadora a dos grupos de 4° y 5° grados, con lo anterior pudimos observar que es necesario adaptar nuestra propuesta a las necesidades de los maestros y alumnos mencionados mediante el estudio de la clase, dando como resultado un trabajo muy original e interesante que nos permitió analizar la importancia de la enseñanza y la dificultad de los juegos para algunos alumnos que participaron, todo lo anterior para mejorar nuestro estilo de enseñanza y optimizar el aprendizaje de nuestros alumnos. Nuestras preguntas de investigación quedan planteadas de la siguiente manera: Los niños, al interactuar con sus compañeros en los juegos con calculadora ¿cómo construyen sus argumentos lógico-matemáticos, cómo los interpretan y cómo los expresan bajo la supervisión del profesor? y ¿cómo orientar al profesor para utilizar los recursos tecnológicos en función del enriquecimiento del lenguaje aritmético de los estudiantes?

Marco Teórico

Slobin (1974) ha destacado una de las aportaciones de Bruner en estudios sobre el desarrollo cognitivo, quien menciona 5 formas principales en que el desarrollo intelectual es influido por el lenguaje: 1) Las palabras pueden servir de "invitaciones para formar conceptos", 2) el diálogo entre el adulto y el niño puede servir para orientar y educar al niño, proporcionando experiencia y conocimiento, 3) la escuela crea la necesidad de usos nuevos del lenguaje independientes a los usos del contexto. 4) los conceptos científicos se desarrollan en una cultura y se transmiten culturalmente y 5) la producción de conflicto entre modos de representación puede dar lugar al desarrollo intelectual.

Las aportaciones de Chomsky (2009) nos permiten observar en las interacciones lingüísticas que hablar y comprender son manifestaciones diferentes de la misma capacidad subyacente, el mismo principio generativo, cuyo dominio provee al hablante-oyente de la capacidad de usar y comprender toda la gama infinita de items lingüísticos. La estructura profunda y la competencia lingüística según Chomsky: a) Las estructuras profundas subyacen a la competencia lingüística del hablante para comprender y producir oraciones en un número prácticamente infinito b) las estructuras profundas explican las relaciones internas de una oración, esto es, entre sus elementos, y las externas y que con otras oraciones no pueden ser explicadas por las oraciones superficiales, c) también pueden explicar las ambigüedades que se deben a la disposición semántica, porque están relacionadas con los significados (semántica) y con los usos de los hablantes (pragmática), d) el giro de la lingüística hacia el habla consiste en la apropiación y enriquecimiento que de ellas hace el hablante. Por lo anterior, lo interesante será entonces analizar cómo se generan y cómo se transforman las oraciones en el aula de educación primaria.

Para el análisis del lenguaje en el aula tomamos las aportaciones de Cazden (1991) en la conversación entre iguales menciona que los niños, a diferencia de las conversaciones con el maestro, es con sus compañeros con quienes pueden aportar, en la interacción, elementos intelectuales, dando directrices o cumpliéndolas, haciendo preguntas y contestándolas, por lo tanto, es necesario indagar cómo se da la interacción lingüística en el salón de clases. El análisis de la interacción verbal permite estudiar ejemplos de intercambio lingüístico en el ámbito real en el que éste ocurre, dado que se puede reconocer que el orden de la interacción lingüística es en sí mismo el resultado de un proceso progresivo donde los participantes producen un orden por medio de la aplicación recurrente de las reglas y los dispositivos del diálogo.

Todo esto bajo el modelo de estudio de clase donde pudimos observar cómo mejorar las clases con los maestros participantes. El Estudio de Clases se compone de tres momentos muy importantes: Planificación de clases, Presentación y Discusión. La planificación de la clase, requiere tener en cuenta el objetivo centrado en desarrollar habilidades útiles y formas de pensamiento creativo, su interés en que las clases sean agradables y que los alumnos las perciban como accesibles y el propósito de que los alumnos tomen la iniciativa de su propio aprendizaje. A la presentación de la clase asistieron algunos profesores que participaron en el taller –basado en el Sistema de Entrenamiento de Profesores Japoneses y Estudio de Clase, (JICA, 2006)– y nosotros los investigadores, quienes observamos y tomamos nota bajo un guión de observación previamente elaborado, en donde se puso especial interés en las habilidades didácticas que le permitan al maestro atender las necesidades reales de aprendizaje de los alumnos, esas habilidades son la metodología utilizada, el uso efectivo del pizarrón durante la clase, los recursos didácticos, la organización visual de la información, los tiempos y las participaciones de los alumnos, entre otros; los observadores no interferimos en la clase, los maestros de grupo son quienes condujeron la clase (se grabaron las clases). La discusión o evaluación de la clase se realizó al terminar la presentación de la misma, apoyándonos en el video, en la reunión los asistentes aportamos elementos interesantes para analizar la clase presenciada y proponer cómo mejorar nuestro modelo de enseñanza y ayudar a los estudiantes a desarrollar una comprensión profunda de conceptos matemáticos al socializar los métodos de solución, con las aportaciones de todos, los investigadores pudimos sistematizar la información obtenida lo que dio como resultado el presente trabajo.

Método

El estudio se realizó en una escuela primaria del sistema público en el Estado de Hidalgo, con alumnos de 4° (34 estudiantes) y 5° (32 estudiantes), sus edades oscilan entre 9 y 11 años. El tipo de investigación que realizamos es de carácter cualitativo e interpretativo.

Los instrumentos metodológicos considerados fueron, la impartición de un taller (JICA, 2006) y la participación de los maestros de 4° y 5° grados impartiendo la clase, para indagar sobre las dificultades que enfrentan en la enseñanza de múltiplos y las propiedades de las operaciones aritméticas básicas. Realizamos observación de clases en donde se llevaron a cabo dos juegos con calculadora presentadas en secuencias de aprendizaje (Coll, 1993). Posteriormente recopilamos las opiniones escritas de maestros y alumnos en cuanto sus impresiones al participar en los juegos con calculadora. Lo anterior nos permitió verificar la pertinencia de la secuencia de aprendizaje y superar las dificultades reconocidas por maestros y alumnos.

Validación de resultados

Para validar la investigación se realizaron los primeros "ensayos preliminares" de los instrumentos metodológicos, a fin de ratificar su funcionalidad. Después nos remitimos a los fundamentos epistemológicos, dado que la teoría nos proporciona los elementos para indagar sobre las dificultades que enfrentan en la enseñanza-aprendizaje de los múltiplos y las propiedades de las operaciones aritméticas básicas.

Juegos con calculadora

Seguimos a Valdemoros (1996) quien menciona que en algunos estudios recientes se han realizado labores en las que los instrumentos materiales han sido las computadoras y las calculadoras, usadas en el marco de reconstrucción de algunos planteamientos de Vigotsky (John-Steiner, 1995, documenta esto brevemente).

Presentamos los juegos con calculadora utilizados:

¿Qué número es?

> ¿Quieres saber qué personaje importante del mundo es tu modelo a seguir? Con la ayuda de la calculadora realiza las siguientes operaciones, no hagas trampa y no veas las respuestas hasta el final.

- Piensa un número del 1 al 9,
- multiplícalo por 3,

- súmale 3,
- vuélvelo a multiplicar por 3,
- obtendrás un resultado de 2 o 3 dígitos, súmalos entre sí para que obtengas un solo dígito.

¿LISTO/A?

Ahora revisa en la siguiente lista de personalidades de acuerdo al número que te resultó al realizar estas operaciones y descubre quién es tu modelo a seguir:

1. Leonardo D' Vinci.
2. Arquímedes.
3. John Lennon.
4. Miguel de Cervantes Saavedra.
5. Sor Juana Inés de la Cruz.
6. Gandhi.
7. Che Guevara.
8. Netzahualcóyotl.
9. Yo.
10. Teresa de Calcuta.

NOTA: Cambia tu nombre en el número 9 y haz reír a alguien más.

Como podemos ver, la respuesta será siempre 9 pues se trabajará con múltiplos de 3, al multiplicar cualquier dígito por 3, sumarle 3 y volverlo a multiplicar por 3, lo interesante es que el alumno descubra el patrón y reflexione acerca de las características de los múltiplos.

Adivina el número

Pídele a un amigo que te ayude con este truco. Dile a tu amigo que piense en un número y lo escriba sin decirte cuál es. Dale la calculadora y dile que haga las siguientes operaciones:

- Teclear el número,
- multiplicarlo por 2,
- sumarle 4,
- dividirlo por 2,
- sumarle 7,
- multiplicarlo por 8,
- restarle 12,
- dividirlo por 4,
- restarle 11.

Ahora toma tú la calculadora, resta 4 del número que hay en la pantalla y divídelo entre 2, la respuesta será el número que pensó tu amigo (Matemágicas, 1998).

Resultados

Reportamos los resultados de una etapa de la investigación concluida, en donde durante la realización de los ejercicios confirmamos que maestros y alumnos construyen un código que responde a las necesidades comunicativas del momento, elaboran un código que soporta el lenguaje usado en el aula, podemos decir que la escuela crea la necesidad de usos nuevos del lenguaje independientes a los usos del contexto. Se identificaron cuatro estrategias de solución diferentes utilizadas por los alumnos en las cuales varió la necesidad de ayuda del maestro en la explicación de las instrucciones al momento de realizar los juegos entre parejas. Los estudiantes mostraron gran entusiasmo al realizar los juegos y aunque no todos terminaron al mismo tiempo y algunos presentaron mayores dificultades que otros para comprender las instrucciones, consideramos que fue una grata experiencia para ellos; mostramos los resultados de la siguiente manera:

- Sólo un niño de 4° grado leyó la hoja completa y supo que salía siempre 9, porque 9 es múltiplo de 3.
- Tres parejas de 5° grado identificaron las operaciones aritméticas, otras tres parejas identificaron que se trataba de múltiplos de 3 y seis parejas descubrieron el juego completo y escribieron su nombre en el No. 9. Estas parejas pudieron jugar tecleando después de cada instrucción la tecla =.
- Cinco parejas de 4° y cuatro parejas de 5° no pudieron jugar hasta que los respectivos maestros les ayudaron.
- 23 alumnos de 4° grado no lograron descubrir las propiedades de los múltiplos de tres ni las relaciones entre las operaciones aritméticas, mostraron dificultades para jugar.

Lo anterior nos acercó a un análisis minucioso en cuanto a los siguientes puntos:

- Los aprendizajes esperados en la Reforma Integral de Educación Básica (2009) en cuanto a matemáticas y de acuerdo con los Planes y Programas se espera en el Eje Temático Sentido Numérico y Pensamiento Algebraico que los alumnos adquieran conocimientos y habilidades en: a) La resolución de problemas de manera autónoma, b) al comunicar información matemática, c) al validar procedimientos y resultados, lo anterior al manejar técnicas y recursos tecnológicos eficientemente para encontrar el sentido del lenguaje matemático, ya sea oral o escrito.
- En cuanto a la participación del profesor, necesitamos saber qué hacen para lograr los objetivos que se plantean a través de la planeación de las clases y el uso de los recursos didácticos, lo que nos permitirá acercarnos a sus necesidades docentes.

- Con el "estudio de la clase" que realizamos en una escuela pública del Estado de Hidalgo, pudimos observar cómo se genera la interacción verbal, en qué medida el lenguaje puede configurar activamente el pensamiento y la importancia de la "mediación verbal" del profesor en el contexto de las clases de matemáticas en la escuela primaria, también pudimos observar cómo construye sus argumentos el alumno, en ayuda mutua con sus compañeros de grupo y cómo los expresa.
- Finalmente, pudimos revalorar la importancia del uso de la tecnología, considerando necesario aprovechar los recursos tecnológicos a través de los cuales se ejerce la acción educativa y la conducción de nuestros estudiantes hacia experiencias reflexivas al manejar recursos tecnológicos eficientemente y constatar cómo se construye el conocimiento en función de un pensamiento estratégico a partir de los juegos con calculadora.
- Con la realización del taller, la planificación de clases, el guión de observación y el análisis de la clase pudimos comprobar la eficiencia de nuestros instrumentos metodológicos lo que nos permitirá afinarlos y adaptarlos a los estilos de enseñanza de los maestros que colaboraron con nosotros, lo cual nos da luz para reorientar nuestra investigación.

Conclusiones

Con el estudio de clase durante los juegos con calculadora aplicados en este caso, pudimos revisar las características del lenguaje utilizado entre maestros y alumnos, al momento de realizar los juegos y la interacción lingüística entre los alumnos al seguir cada una de las instrucciones de los juegos para llegar, finalmente, a descubrir las propiedades de los múltiplos de tres y las características aritméticas de las operaciones básicas, suma, resta, multiplicación y división con números naturales. Con todo ello, confirmamos que es importante analizar el uso del lenguaje en el salón de clase y orientar la acción educativa y la conducción de nuestros estudiantes hacia experiencias reflexivas, en la medida que descubran las reglas aritméticas implícitas al manejar recursos tecnológicos eficientemente, pues para dar sentido y llevar adelante la tarea de las matemáticas, es necesario que el maestro cuente con ciertas habilidades didácticas que le permitan dar oportunidades a sus alumnos de expresar sus opiniones en cuanto al proceso de solución que utilizó al resolver determinado problema y si el maestro supo rescatar ese procedimiento, proponerlo al resto del grupo, rescatar otros procedimientos diferentes y resumir los diversos procesos de solución, el maestro puede conducir a sus alumnos a descubrir diversos caminos para resolver un problema usando los números y signos formales de la matemática, planteando el "estudio de clase" (Isoda, Arcavi & Mena, 2007).

Finalmente, de acuerdo a nuestros resultados obtenidos en cuanto al lenguaje en el aula, al respecto Piaget y Vigotsky se ocupan del habla en la medida en que está involucrada en la comunicación de conocimientos entre las personas (Slobin, 1974). Los estudios de Vigotsky, se centran en la búsqueda de aquellas unidades últimas, específicamente a los significados (Valdemoros, 1996) de ahí, la importancia del análisis semántico. En este sentido, notamos que las palabras que tienen una función designadora la muestran en su uso, es al utilizar las palabras en contextos específicos cuando significan algo diferente a otro contexto, funcionan como instrumentos y un mismo signo puede significar cosas distintas si se utiliza en el lenguaje de modos distintos (Trejo, 2007).

Referencias bibliográficas

Cazden, C. B. (1991). *El discurso en el aula: El lenguaje de la Enseñanza y el Aprendizaje.* México: Paidós.

Chomsky, N. (2009). *Problemas actuales en teoría lingüística. Temas teóricos de gramática generativa.* México: Siglo XXI Editores.

Coll, C. (1993). *El constructivismo en el aula*. España: Graó.

Isoda, M., Arcavi, A. & Mena, A. (2007). *El Estudio de Clase Japonés en Matemáticas*. Valparaiso, Chile: ediciones universitarias.

JICA "Japan International Cooperation Agency" (2006). *Japanese Teacher Training System and Lesson Studies.* CD ROM. JICA-NET.

John-Steiner, V., (1995). Spontaneous and Scientific Concepts in Mathematics: A Vygotskian Approach. *Proceedings of the nineteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education. 1*, 30-44.

Matemágicas (1998). *El mundo de los niños*. World Book. Chicago, IL, Estados Unidos de América. The learning Journey. Impreso por Cargraphics S. A. – Imprelibros. Colombia.

Secretaría de Educación Pública (2009). *Reforma Integral de Educación Básica.* Planes y Programas de estudio. México.

Slobin, D. I. (1974). *Introducción a la Psicolingüística.* México: Paidós.

Trejo, L. (2007). *La enseñanza de la noción de número en el primer grado de Primaria.* Tesis no publicada por casa editorial. Universidad Pedagógica Nacional – Hidalgo. Pachuca, Hidalgo.

Valdemoros, M. (1996, Dic). Vigotsky y su incidencia actual en la educación. *Educación Matemática,* 8(3) 63–71. México: México.

CATEGORÍA 2

PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Introducción al Capítulo de Propuestas para la Enseñanza de las Matemáticas

Daniela Cecilia Veiga

Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González". (Argentina)
veigadaniela@yahoo.com.ar

Actualmente, un gran número de investigadores y docentes se encuentran abocados a la búsqueda de estrategias que les permitan abordar los fenómenos didácticos que surgen en la enseñanza de las matemáticas en los diversos niveles escolares.

Numerosas investigaciones dan cuenta de esta realidad e intentan explicar el origen de los obstáculos a los que se enfrentan los alumnos en las clases de matemática. Asimismo, es posible encontrar una gran cantidad de propuestas que permiten detectar, prevenir y afrontar esos obstáculos.

Por otro lado, la falta de motivación de los alumnos representa hoy en día, una de las mayores dificultades que debemos enfrentar los docentes en nuestras aulas. De esta manera, debemos diseñar secuencias didácticas que capten la atención y motiven a los alumnos.

> Los estudiantes aprenden matemáticas por medio de las experiencias que les proporcionan los profesores. Por tanto, la comprensión de las matemáticas por parte de los estudiantes, su capacidad para usarlas en la resolución de problemas, y su confianza y buena disposición hacia las matemáticas están condicionadas por la enseñanza que encuentran en la escuela. (Godino, Batanero y Font, 2003, p.64)

De esta manera, el Acta Latinoamericana de Matemática Educativa se convierte, año tras año, en un espacio de intercambio de ideas y experiencias entre docentes e investigadores de toda Latinoamérica. El objetivo es compartir los resultados alcanzados y proponer nuevas alternativas en la enseñanza de las matemáticas en diversos contextos escolares; asimismo, revisar nuestras prácticas docentes y el discurso matemático escolar a fin de detectar inconsistencias y comprender su influencia en el aprendizaje de los alumnos.

> Las investigaciones en Matemática Educativa, pueden influir en lo que es el aprendizaje de la Matemática hoy día, replanteándose cómo debería construirse el conocimiento si el fin es el aprendizaje, entendiendo las dificultades de sus procesos y sus fenómenos, donde su base fundamental es analizar la confrontación existente entre la Obra Matemática y el Discurso Matemático Escolar y rediseñar

> este último, lo cual provocará un aprendizaje que resignifique al estudiante. (Reyes, 2010, p.49)

En este capítulo se invita a leer y analizar las propuestas metodológicas, reportes de experiencias, resultados de investigaciones, reflexiones y secuencias didácticas correspondientes a diversos conceptos matemáticos, con la finalidad de reflexionar acerca de nuestras prácticas docentes, revisarlas y reformularlas, esperando compartir sus experiencias en futuras reuniones.

Referencias bibliográficas

Godino, J.; Batanero, C y Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática. Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Granada.

Reyes Gasperini, D. (2010). Reflexiones acerca del aula actual, como desafío para el profesor de matemática. *Premisa, 12 (44)*, 44-50.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN SIN EL USO DE LÍMITES Y DERIVADAS. INTERPRETACIONES MÉDICAS

Luis Alberto Escalona Fernández, José Ramón Velázquez Codina
Universidad de Ciencias Médicas Holguín Cuba
albert@ucm.hlg.sld.cu

Resumen. Se desarrollaron algoritmos matemáticos para determinar la monotonía, extremos locales, intervalos de convexidad y puntos de inflexión de funciones, las posibilidades reales de trabajo en la interpretación del modelo matemático relaciona los diagnósticos y terapéuticas en la resolución de problemas de salud a enfrentar por el Médico General. La novedad científica desde el punto de vista didáctico, consiste en la resolución de problemas de optimización sin el uso de límites y derivadas. La utilización de las Tecnologías Informáticas permite a estudiantes y profesores incontables posibilidades.

Palabras clave: algoritmos, didáctico, extremos, funciones

Abstract. In this paper; mathematical algorithms have been developed to determine the monotony, local extremes, intervals of convexity and points of inflection of the real job opportunities in the interpretation of the mathematical model relates the diagnostic and therapeutic in solving health problems to be faced by the General Medical. The new scientific evidence from the educational point of view consists in solving optimization problems without the use of limits and derivatives. The use of Information Technology allows students and teachers of uncountable possibilities.

Key words: algorithms, didactic, extreme functions

Introducción

Algunos publicaciones sobre esta temática corresponden a los siguientes autores (Stewart, 1999), (Karelin, Rondero y Tarasenko, 2007), (Font, 2009). En esta investigación se presentan aspectos didácticos metodológicos más relevantes para el logro de la comprensión, explicación e interpretación de fenómenos de la realidad médica, los cuales están relacionados con la educación profesional de estudiantes de la carrera de Medicina, estos se declaran en el Plan de Estudio actual, expresados en 220 problemas de salud a enfrentar por el Médico General; en estrecho vinculo se identifican los ejes interdisciplinarios para la realización de un correcto análisis de estos problemas, en los cuales es posible formular el diagnóstico y la terapéutica exigida dadas las circunstancias particulares de cada paciente.

El método constituye una herramienta matemática sencilla para la construcción de la curva de la función, según sus aspectos topológicos más relevantes.

Desarrollo

Se proponen los siguientes algoritmos matemáticos.

Algoritmo (I) para la determinación de extremos de funciones. Dada la función $y = f(x)$.

1. Se plantean las desigualdades (1) y (2) para analizar respectivamente la existencia de máximo y mínimo en sentido estricto.

$(1)\ f(x_0+(\pm\delta)-f(x_0)\leq 0,\ (2)\ f(x_0+(\pm\delta)-f(x_0)\geq 0$ (Escalona y Velázquez, 2007).

2. Se realizan operaciones aritméticas y operaciones de comparación, respectivamente en la expresión (1) o (2) hasta agrupar los sumandos convenientemente en función de δ y sus potencias (la utilización de un programa informático profesional ofrece ayuda en los cálculos).
3. Se anula (se iguala a cero) el coeficiente de δ, se determinan los valores de x_0 (se recomienda el uso de un programa informático profesional para la realización de estos los cálculos).
4. Se concluye según (1) o (2), si es máximo o mínimo respectivamente. En caso de que no se verifiquen (1) o (2), entonces no posee extremos.
5. Los valores x_0 se evalúan en la función. Se indican las coordenadas del extremo.

Primero: este Algoritmo I se emplea en la resolución de problemas de optimización.

Segundo: la visualización y el pensamiento matemático y científico juegan un papel protagónico en la verificación de los pasos del algoritmo. Contraejemplo. Determinar si la siguiente función tiene extremos locales $f(x)=x^3-6x^2+12x-8$. Se aplica el algoritmo.

Se plantea la diferencia se realiza la reducción:

$$f(x_0+(\pm\delta)-f(x_0)=(x_0\pm\delta)^3-6(x_0\pm\delta)^2+12(x_0\pm\delta)-x_0{}^3+6x_0{}^2-12x_0$$
$$(3x_0{}^2-12x_0+12)(\pm\delta)+(3x_0-6)(\pm\delta)^2-(\pm\delta)^3$$

Se anula el coeficiente $3(x_0{}^2-4x_0+4)=0,\ 3(x_0-2)^2=0,\ es\quad decir: x_0=2$

Se verifica (1) o (2); es decir: $f(x_0+(\pm\delta))-f(x_0)=f(2+(\pm\delta))-f(2)=-(\pm\delta)^3$ En la vecindad del punto $x_0=2$. No es negativa, ni es positiva, como no se verifica (1) o (2). Entonces no posee extremos locales.

Algoritmo (II) para determinar la pendiente m de la recta tangente en el punto x_0. Intervalos de concavidad y convexidad. Puntos de inflexión. Dada la función $y=f(x)$.

1. Se plantean las desigualdades (1) cóncava y (2) convexa.

$$(1)\ f(x_0 + (\pm\delta) - f(x_0) - m(\pm\delta) \leq 0,\ (2)\ f(x_0 \pm \delta) - f(x_0) - m(\pm\delta) \geq 0$$

2. Se realizan operaciones aritméticas y por comparación, respectivamente en las expresiones (1) o (2) hasta agrupar los sumandos convenientemente en función de δ y sus potencias (es posible utilizar un programa informático profesional para realizar las simplificaciones).
3. Se anula (se iguala a cero) el coeficiente de δ, se determina el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva de la función en el valor de x_0; es decir la primera derivada de la función en x_0 mediante la utilización de un programa informático profesional se comprueban los cálculos de la primera derivada y sus ceros.
4. Se analiza a partir de valor $\delta > 0$, si se verifican las desigualdades (1) y (2) en cada punto x_0 del dominio de la función.
5. Se concluye con la determinación de los intervalos de concavidad y convexidad, según se verifican (1) o (2) respectivamente.
6. Según los intervalos de concavidad y convexidad y el valor de la pendiente “m” de la recta tangente a la curva de la función en el punto analizado, se determinan los puntos de inflexión. Se indican sus coordenadas.

Observación: 1.- se emplea en la resolución de problemas de optimización (determinación de intervalos de monotonía); 2.- la visualización y el pensamiento matemático y científico juegan un papel protagónico en la verificación de los pasos del algoritmo.

Algoritmo (III) para la construcción de la curva de la función. Dada la función $y = f(x)$.

1. Se determina el dominio, los ceros de la función, se evalúa la función en $x_0 = 0$.
2. Se desarrolla el algoritmo (I).
3. Se desarrolla el algoritmo (II).
4. Se analizan los resultados obtenidos en los pasos 1, 2 y 3 se traza el bosquejo del gráfico de la función (la utilización de un programa informático profesional constituye un importante auxilio en la graficación de la función).
5. Se verifican y reanalizan a través de la comparación del bosquejo de la curva con el gráfico (curva) obtenido por el programa informático profesional utilizado.

Observación: la visualización y el pensamiento matemático y científico juegan un papel protagónico en la verificación de los pasos del algoritmo.

Algoritmo (IV) sobre resolución de problemas de salud.

1. Se selecciona el problema de salud, según sus características: 1. Trata, y si no mejora, orienta y remite; 2. Trata de urgencia, orienta y remite; 3. Orienta y remite; 4. Colabora (1, 2, 3, y 4).
2. Se realiza la terapéutica (se trata al paciente) según el diagnóstico;
3. Según las exigencias del tipo de problema de salud a resolver (1, 2, 3, y 4) se desarrollan los algoritmos I, II, III.
4. Se verifica el diagnóstico y el tratamiento aplicado, según el desarrollo de los algoritmos I, II, III.
5. No siempre en los problemas de salud es aplicable este Algoritmo IV. Depende de las exigencias del tipo de problema de salud (paso 3).

Observación: cuando se analiza un problema de salud a enfrentar por el Médico General, el cual exige de la aplicación al menos de un Algoritmo del tipo I, II o III, se identifican ejes interdisciplinarios en los cuales diferentes disciplinas del ciclo básico y clínico pueden trabajar coordinadamente.

A continuación se proponen problemas, los cuales constituye ejemplos, en cuanto a la utilización de ejes interdisciplinarios.

Problema 1: Después de una hora de suministrado x miligramos de un medicamento en particular a una persona, el cambio de la temperatura T(x) en grados Fahrenheit es modelado por la ecuación $T(x) = x^2 - \frac{x^3}{9}, \quad 0 \le x \le 7$.

La razón de cambio de la temperatura con respecto a la medida de la dosis x, T´(x), es denominado la sensibilidad del cuerpo para la dosis. Hallar T´(x). Determinar T´(1), T´(3) y T´(6).

Se aplican los algoritmos. Algoritmo I

Paso 1. $T(x_0 + (\pm\delta)) - T(x_0) = ((2x_0 - \frac{x_0{}^2}{3}) - \frac{x_0}{3}(\pm\delta) - \frac{(\pm\delta)^2}{9})(\pm\delta) \le 0$. Se obtiene que $2x_0 - \frac{x_0{}^2}{3} = 0$; es decir $x_0 = 6$, la función del cambio de temperatura T(x) alcanza su valor máximo $T(6)=12$. Para el valor $x_0 = 0$ y el dominio de la función, así como la naturaleza de la función T (0) = 0, es un valor mínimo.

Algoritmo II. Se obtiene de los pasos 1 al 3.

$$T(x_0+(\pm\delta))-T(x_0)-m(\pm\delta)=((2x_0-\frac{x_0{}^2}{3}-m)+(1-\frac{x_0}{3})(\pm\delta)-\frac{(\pm\delta)^2}{9})(\pm\delta)$$

$m=2x_0-\frac{x_0{}^2}{3}$. Paso 4. Primero se simplifica y se obtienen las desigualdades: $((1-\frac{x_0}{3})(\pm\delta)-\frac{(\pm\delta)^2}{9})(\pm\delta)=(1-\frac{x_0}{3})-\frac{(\pm\delta)}{9})(\pm\delta)^2$ se obtiene, $(1-\frac{x_0}{3})-\frac{(\pm\delta)}{9})>0$ es decir; es cóncava en el intervalo $3<x_0<7$; es convexa cuando $(1-\frac{x_0}{3})-\frac{(\pm\delta)}{9})<0$, en el intervalo $0<x_0<3$.

Observación: Se ha determinado que la pendiente de la recta tangente en cada punto de la función $T(x)=x^2-\frac{x^3}{9}, 0\le x\le 7$; es $m=2x_0-\frac{x_0{}^2}{3}=T'(x_0)$; en este problema se interpreta como la razón de cambio de la temperatura con respecto a la medida de la dosis x_0, es decir $T'(x_0)$, es denominada la sensibilidad del cuerpo para la dosis x_0.

Se determina el extremo si se aplica el Algoritmo I, aunque no es necesario, pues el estudiante conoce el método de trabajo de la enseñanza general media.

Algoritmo III.

Paso 1. El dominio está dado, ceros: 0 y 9, al resolver la ecuación y T(0) = 0. Los pasos 2 (Algoritmo I) y 3 (Algoritmo II) se realizaron.

Paso 4. Se utiliza un programa informático y se presenta el gráfico de la función en su dominio.

Algoritmo (IV) sobre resolución de problemas de salud.

1. Se selecciona el problema de salud, según sus características (nivel de actuación del Médico General (1, 2, 3, y 4). Se seleccionan problemas de salud a enfrentar por el Médico General. Con síndromes infecciosos como problema de salud, síndrome febril con signos de localización con un nivel de actuación 2.

2. Se realiza la terapéutica (se trata al paciente) según el diagnóstico. Se realiza un estudio para medir la temperatura y la sensibilidad del cuerpo para la dosis en el momento indicados (después de una hora).
3. Según las exigencias del tipo de problema de salud a resolver y su nivel de actuación (1, 2, 3, y 4) se desarrollan los algoritmos I, II, III.
4. Se verifica el diagnóstico y el tratamiento aplicado, según el desarrollo de los algoritmos I, II, III (este se prueba en la práctica para comparar).
5. No siempre en los problemas de salud es aplicable este Algoritmo IV. Depende de las exigencias del tipo de problema de salud (paso 3).

Se proponen tres problemas adicionales, estos están relacionados con la propuesta didáctica y problemas de salud a enfrentar por el Médico General y los objetivos de Asignaturas del ciclo básico y clínico.

Problema 2: Se asume que el decrecimiento de la presión sanguínea en una persona depende en particular de la cantidad de medicamento suministrado. Por lo tanto si x miligramos de un medicamento han sido suministrado, el decrecimiento de la presión sanguínea está en función de x. Se define la función tal que $f(x)=\frac{1}{2}x^2(k-x)$ y x está en $[0,k]$, donde k es una constante. Determine el valor en miligramos de forma que cause el mayor decrecimiento en la presión sanguínea.

Problema 3: Si el radio normal de la traquea es R expresado en centímetros y el radio de la traquea durante una tos es r expresado en centímetros, donde R es una constante y r es una variable. La velocidad del aire a través de la traquea puede darse en función de r y si $v(r)$ en centímetros por segundos es la velocidad, entonces $v(r)=kr^2(R-r)$ donde k es una constante positiva y r esta en el intervalo $\left[\frac{1}{2}R,R\right]$. Determine el valor del radio r, cuando la velocidad es máxima.

Problema 4: La función siguiente $P(x)=\dfrac{30x^2}{(1+x^2)^2}$ modela el comportamiento de una epidemia en una comunidad en particular, x es el tiempo expresado en meses (eje horizontal) y P se expresa en porcentaje (eje vertical). Comparar los gráficos de la función y su primera derivada para indicar en los cuatro primeros meses con el trazo de rectas verticales el valor del máximo porcentaje, los intervalos de monotonía de la función P, así como los intervalos de convexidad de la función $P = P(x)$.

Problema 5: Se ha suministrado al paciente una píldora, cuyo medicamento en el torrente sanguíneo posee una razón cambio con respecto al tiempo t (en minutos), según su asimilación, es modelado por la función $R(t) = t\exp(-0.2t) = te^{-0.2t}$. ¿En qué momento la razón de cambio es máxima?

Por la naturaleza del problema solo se consideran valores no negativos en el dominio de la función.

$R(t_0 + (\pm\delta)) - R(t_0) = \dfrac{t_0 + (\pm\delta) - t_0\exp(0.2(\pm\delta))}{\exp(0.2(t_0 + (\pm\delta))}$, la expresión del denominador es positiva por ello se trabaja con la expresión, es decir, $t_0 + (\pm\delta) - t_0\exp(0.2(\pm\delta)) \leq t_0 + (\pm\delta) - t_0(0.2(\pm\delta) + 1)$, si comparamos las funciones cuyas expresiones corresponden a la recta y la función exponencial se cumple la desigualdad $0.2(\pm\delta) + 1 \leq \exp(0.2(\pm\delta))$ en la vecindad del cero (0).

Se obtiene entonces la igualdad $t_0 + (\pm\delta) - t_0(0.2(\pm\delta) + 1) = (\pm\delta)(1 - \frac{t_0}{5})$.

Por diferenciación de casos:

1. si la expresión $(1 - \frac{t_0}{5}) < 0$, entonces $(\pm\delta)(1 - \frac{t_0}{5})$, es positivo y negativo para cualquier valor real, lo que significa que en ese caso no existe ni máximo, ni mínimo;

2. si la expresión $(1 - \frac{t_0}{5}) > 0$, entonces $(\pm\delta)(1 - \frac{t_0}{5})$, es positivo y negativo para cualquier valor real, lo que significa que no existen máximos, ni mínimos.

3. si la expresión $(1 - \frac{t_0}{5}) = 0$, entonces $t_0 = 5$, de la expresión, se obtiene la igualdad $t_0 + (\pm\delta) - t_0(0.2(\pm\delta) + 1) = (\pm\delta)(1 - \frac{t_0}{5}) = 0$, por lo tanto, cuando $t_0 = 5$ la diferencia $R(t_0 + (\pm\delta)) - R(t_0) \leq 0$, lo que significa que la función alcanza su valor máximo, cuando $t_0 = 5$, es decir, 5 minutos después de ingerir la píldora.

Para la determinación de la pendiente "m" de la recta tangente, se plantea la desigualdad:

$R(t_0 + (\pm\delta)) - R(t_0) \leq m(\pm\delta)$ Se realizan transformaciones, la expresión se reduce $t_0 + (\pm\delta) - t_0 \exp((0.2)(\pm\delta)) \leq m(\pm\delta)\exp((0.2)(t_0 + (\pm\delta))$. Se continúa el trabajo conveniente de reducción $(t_0 + (\pm\delta))\exp((-0.2)(\pm\delta)) \leq t_0 + m\exp(0.2t_0)(\pm\delta)$. Como $0 < ((-0.2)(\pm\delta) + 1) < \exp((-0.2(\pm\delta))$. Se obtiene $(t_0 + (\pm\delta))((-0.2)(\pm\delta) + 1) \leq t_0 + m\exp(0.2t_0)(\pm\delta)$ Se reduce a la expresión $(\pm\delta)\left[(-0.2)(\pm\delta) - (0.2)t_0 - m\exp(0.2t_0) + 1\right] \leq 0$ Por diferenciación de casos:

1. si la expresión es negativa $-(0.2)t_0 - m\exp((0.2)t_0) + 1 < 0$; pero entonces la desigualdad es positiva o negativa. Lo cual conduce a una contradicción; pues no se cumple la desigualdad planteada; es decir la recta no es tangente a la curva de la función en el punto t_0.

2. Si la expresión es positiva $-(0.2)t_0 - m\exp((0.2)t_0) + 1 > 0$, conduce de manera análoga a una contradicción; pues no se cumple la desigualdad planteada; es decir la recta no es tangente a la curva de la función en el punto t_0.

3. Si la expresión se anula; es decir $-(0.2)t_0 - m\exp((0.2)t_0) + 1 = 0$. Se obtiene la pendiente, $m = 1.e^{(-0.2)t_0} + t_0(-0.2)e^{(-0.2)t_0} = (1 - 0.2t_0)e^{(-0.2)t_0} = (1 - \frac{t_0}{5})e^{(-0.2)t_0}$, así se obtiene la derivada en el punto t_0, si observamos se visualiza la tradicional regla de derivación del producto de dos funciones, cuando $m = (1 - \frac{t_0}{5})e^{(-0.2)t_0} = 1.e^{(-0.2)t_0} + t_0(-0.2)e^{(-0.2)t_0}$; la función exponencial es la composición de dos funciones además; es decir la derivada de la compuesta es $(-0.2)e^{(-0.2)t_0}$, en particular la derivación de funciones compuestas (se aplica la regla de la cadena), brinda posibilidades reales de generar conocimientos de considerable importancia en el orden didáctico y metodológico para cursos introductorios para los que comiencen el estudio del Cálculo Diferencial o en estudios de precálculos (Valdés y Sánchez, 2008). Para la determinación de la derivada del cociente de funciones es posible inferir su correspondiente regla de derivación, en el caso $f(t) = te^{-0.2t} = \dfrac{t}{e^{0.2t}}$.

Si se utilizan los resultados descritos, se obtiene nuevamente la pendiente de la función primera derivada como sigue: $m_m = (-\frac{1}{5})e^{(-0.2)t_0} + (1-\frac{t_0}{5})(-0.2)e^{(-0.2)t_0} = (\frac{2}{5}-\frac{t_0}{25})e^{(-0.2)t_0}$, se obtiene su extremo, cuando $t_0 = 10$.

Conclusiones

Se determinaron los intervalos de monotonía y extremos locales de funciones, los intervalos de convexidad y concavidad, aspectos esenciales en la construcción de curvas de funciones, así como en la resolución de problemas de optimización sin el uso de límites y derivadas, como se indica en el punto 3 del algoritmo II. Se profundizan las aplicaciones del método como modelo para estudiar propiedades topológicas de las funciones elementales; el uso de las Tecnologías Informáticas permite visualizar los resultados. Esta herramienta matemática constituye una alternativa didáctica y metodológica para experimentar en las aulas y enfrentar diversas tareas con relación al contexto social, con variadas posibilidades no explotadas al respecto. Además es de incalculable valor las posibilidades creativas para generan conocimientos con relación al Cálculo Diferencial, en función de la motivación, profundización, comprensión e interpretación en su proceso de enseñanza y aprendizaje y la formación matemática de estudiantes en cuyas carreras, no se imparte las Matemáticas Superiores.

Referencias bibliográficas

Font Moll, V. (2009). *Formas de argumentación en el cálculo de la función derivada de la función $F(x) = x^2$ sin usar la definición por límites.* Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 18, 15 – 28. Recuperado el 18 de enero de 2011 de http://www.fisem.org/paginas/union/revista.php

Escalona, L. y Velázquez, J. (2007). *Método alternativo para el análisis de algunas propiedades de las funciones elementales sin el uso de las derivadas.* Memorias del X Congreso Nacional de Matemática y Computación como número especial del Boletín de la Sociedad de Matemática y Computación. La Habana. Cuba (en soporte digital).

Karelin, O., Rondero, C. y Tarasenko, A. (2007). Propuesta didáctica sobre la construcción de la recta tangente sin el uso de la derivada. En: G. Martínez Sierra (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19,* 386-391.México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Stewart, J. (1999) *Calculus*: EarlyTtranscedentes, International Thomson Publ. Inc.

Valdés, C. y Sánchez, C. (2008). *Introducción al Análisis Matemático*. Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, Cuba (en soporte digital).

PROPUESTA DE ASIGNATURAS EN LA DISCIPLINA MATEMÁTICA PARA INGENIERÍA QUÍMICA EN LA UNIVERSIDAD CAMAGÜEY CUBA

María Lourdes Rodríguez González, José Manuel Ruiz Socarrás, Seydel Bueno García, Cila Mola Reyes, Reinado Sampedro Ruiz
Universidad de Camaguey "Ignacio Agramonte y Loynaz" Cuba
maria.rodriguez@reduc.edu.cu

Resumen. La reubicación de los contenidos en las asignaturas de la Disciplina Matemática para la carrera de Ingeniería Química de la Universidad de Camagüey persigue mejorar la situación docente de los estudiantes del primer año de dicha carrera. Los autores encontraron la necesidad de esta innovación didáctica en el nivel de entrada de los estudiantes a las carreras de ingeniería en temas relacionados con la matemática y el cambio de tipo de enseñanza entre otras. Entre los aspectos didácticos que aporta la nueva estructura de las asignaturas es a destacar que es más equitativa en horas y temas de las asignaturas de la Disciplina y el nivel de complejidad es mayor en el segundo año donde el alumno ya ha transitado por su primer año de adaptación a su carrera.

Palabras clave: organización, contenido, matemática, álgebra, cálculo

Abstract. The relocation of the contents of the subjects of Mathematics for Chemical Engineering at the University of Camagüey pursues the improved teaching of students in the first year of college. The authors found the need for this innovation because of the level of knowledge the students come with to careers in engineering issues with mathematics and the change of type of education among others. Among the educational aspects provided by the new structure of subjects, it is emphasize that it is equitable in hours and topics of the subjects of the Discipline and level of complexity is greater in the second year when the student has already covered its first year to adapt to his career.

Key words: organization, content, mathematic, algebra, calculus

Antecedentes que originaron la propuesta

El Departamento de Matemática de la Universidad de Camagüey exhibe dentro de sus resultados varios trabajos para organizar el contenido de las asignaturas, producto de años de investigación en Didáctica de la Matemática. Uno de esos resultados se encuentra en la organización del contenido correspondiente al Cálculo Diferencial e Integral, que rompe con la organización tradicional de este contenido, al formar dos asignaturas, en una todo el Cálculo Diferencial de funciones de una y varias variables reales y en otra todo el Cálculo Integral de funciones de una y varias variables reales.

Otro resultado que exhibe es la organización de forma holística de la geometría para arquitectos, en ella se tiene en cuenta los puntos de contactos de la geometría descriptiva y la analítica, con el propósito entre otros, de no repetir contenidos innecesarios. Otro aspecto que se muestra en esta propuesta es la flexibilidad en el aprendizaje, pues permite que los estudiantes se apoyen indistintamente en cada rama objeto de estudio permitiendo la comprensión de la geometría en general. Esta organización holística del contenido donde se muestra la geometría como un todo muestra al alumno que las ramas de la matemática todas entre sí poseen su punto de contacto (Rodríguez y Ricardo, 2007).

Así pues, esta diversidad de formas de organizar un mismo contenido, permite pensar en la posibilidad de escoger aquellas que mejor contribuyan al desarrollo del proceso enseñanza aprendizaje, en condiciones que varían en distintos contextos.

Pero esta diversidad, no es exclusiva de los planes de estudios universitarios cubanos. La revisión del plan de estudio de la carrera de Ingeniería Civil en distintas universidades (públicas y privadas) tanto de España, como de América Latina y del Caribe, muestra diferentes formas de organizar el curso académico (cuatrimestres, semestres, etc.) y de ordenar las asignaturas por años, así como diferencias en cuanto a la participación del estudiante en la elaboración de su currículo, dando lugar a diferentes tipos de asignaturas (troncales, obligatorias, optativas y de libre elección). También se aprecia que el contenido de un área o disciplina, es organizado de diferentes formas, dando lugar a distintas asignaturas, no solo en cuanto a su contenido, sino en cuanto a su extensión (cuatrimestrales, semestrales, anuales, etc.) y cantidad de horas (créditos).

Por tanto, la organización del contenido de un plan de estudio dado, es tarea compleja que tiene muchas posibles soluciones, incluso una elevada proporción de asignaturas aparecen afectada por problemas de organización, lo que se traduce en trastornos de la enseñanza y del aprendizaje, y a su vez causa daños en los niveles de asimilación, y por tanto, en la formación de los profesionales.

Por otro lado, Horruitiner plantea como una de las prioridades de la educación superior en Cuba está dada en:

> […] lograr niveles superiores de permanencia, con la calidad requerida. Es necesario trabajar en los siguientes cuatro aspectos fundamentales:

- El perfeccionamiento de la labor educativa, enfatizando en la atención personalizada.
- El perfeccionamiento de los planes de estudios.
- Adecuar las actuales reglamentaciones para los cursos regulares a las concepciones de la nueva universidad cubana.
- La determinación precisa del nivel de preparación de los estudiantes que acceden a la educación superior y, como consecuencia de ello, la solución temprana de las posibles insuficiencias. (Horruitiner, 2006, p. 45)

Situación problémica presentada

Históricamente, los resultados que se alcanzan en los primeros años de las carreras universitarias en Cuba, en cuanto a la permanencia de los estudiantes, muestran que una cantidad significativa de estos no continúan sus estudios, o sea, causan baja de la institución. Las mismas están provocadas por causas variadas, pero inciden en mayor medida las académicas.

Para mostrar lo antes referido se tomó como muestra el estudio realizado por la secretaria docente de la facultad de Química-Alimento de la Universidad de Camagüey en los cursos académicos 2008-2009 y 2009-2010. Muestra dicho informe que las bajas de los estudiantes fueron:

- De carácter académico. Incidió en el (94 %) de las bajas.
- Problemas personales, incluidos de salud. Incidió en el (3 %) de las bajas.
- De carácter motivacional por la carrera. Incidió en el (2 %) de las bajas.
- Condiciones de vida en la institución (para estudiantes becados). Incidió en menos del (1 %) de las bajas. (Álvarez, 2011)

Como se aprecia las causas de índole académico han sido las que más influyen negativamente en la permanencia de los estudiantes de primer año en la carrera.

En el análisis realizado en tal sentido, a partir de los resultados recogidos en la encuesta sobre el tema a los estudiantes que cursan el primer semestre del primer año de la carrera de ingeniería Química, se constata que el 88.8 % de los estudiantes consideran que existen tres asignaturas, con alto grado de dificultad, y la Matemática I, se encuentra entre ellos. Señalaron entre las dificultades más significativas las siguientes:

- el alto número de frecuencias que tiene la asignatura en la semana para cubrir las 88 horas de clases del programa de la asignatura.
- la densidad del contenido respecto al tiempo previsto para las clases prácticas.
- y fundamentalmente las insuficiencias en las bases de contenidos matemáticas, con que ingresan a la Educación Superior en la asignatura. Causa esta, que en muchos de los estudiantes se traduce en una pérdida paulatina de su interés por la asignatura, pues no se consideran preparados para vencerla, y más tarde en una baja académica (Álvarez, 2011)

Si a lo antes mencionado se agrega los indicadores tan importantes de eficiencia en la carrera, como son: la retención, la promoción y la calidad que aparecen considerablemente afectadas, pues la calidad de la promoción se comporta por debajo del 50 % no solo en los cursos antes mencionados sino en general y la promoción no rebasa el 80%.

Por todo lo anterior, existe una real situación problémica definida como: El índice de fracaso académico de los estudiantes en del primer año de la carrera de Ingeniería Química de la Universidad de Camagüey.

En consecuencia a lo anterior explicado, al proceso de formación del estudiante en las universidades cubanas, recientemente se ha incluido la necesidad de estructurar el accionar de las diferentes asignaturas, para propiciar niveles superiores de permanencia de los estudiantes en las aulas universitarias. La atención a la situación de tránsito del nivel preuniversitario al universitario, y posteriormente la permanencia de los estudiantes en la carrera, no es exclusiva de las universidades cubanas. Esa problemática es considerada por muchos estudiosos a escala internacional.

Sin embargo, existe una tendencia muy generalizada a tomar medidas dentro de las que aparece con mayor frecuencia, la de instituir cursos preparatorios para estas asignaturas, que tienen como objetivo fundamental minimizar el déficit de conocimientos y habilidades mostradas por los estudiantes en las asignaturas básicas para la carrera.

En la Universidad de Camagüey, para las carreras de Ingeniería, también han sido instituidos estos tipos de cursos preparatorios, desde el 2007-2008 en la asignatura de Matemática, los cuales, cumplen su objetivo. Sin embargo, no han sido suficientes para resolver el problema planteado anteriormente, por lo que se hace necesario pensar en otras alternativas, que faciliten el cumplimiento de los objetivos instructivos fundamentales establecidos en el plan de estudio para la disciplina de Matemática en la carrera de Ingeniería Química.

En el caso del contenido de la disciplina matemática de la carrera de Ing. Química de la Universidad de Camagüey en su plan de estudio tiene la siguiente organización:

Asignatura	Contenido	Año académico	Sem	Horas clases
Matemática I	Sistemas de ecuaciones lineales. Matrices. Cálculo Diferencial e Integral de funciones reales de una variable real.	1	1	88
Matemática II	Cálculo Diferencial e Integral de funciones de varias variables reales.	1	2	90
Matemática III	Espacio Vectorial. Aplicación Lineal. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (E.D.O.) y Sistemas de E.D.O.	2	1	50

Matemática IV	Series. Ecuaciones Diferenciales en Derivadas parciales. Transformada de Laplace.	I	2	48

Tabla1.: Organización del contenido de la disciplina matemática en la carrera de Ing. Química de la Universidad de Camagüey.

Esta variante de organización presenta las siguientes desventajas:

- sobrecarga del contenido de la disciplina y cantidad de horas clases, en el primer año académico, en contraposición con el nivel de madurez alcanzado por los estudiantes, para quienes el primer año representa el brusco cambio al dejar el nivel del bachillerato y enfrentarse por vez primera al nivel universitario.
- fragmentación del Álgebra Lineal como rama de la matemática que posee sus características distintivas, que se pierden como un todo, cuando esta se fragmenta.
- imposibilidad de tratar las ecuaciones diferenciales de manera integrada, al estudiar en distintos semestres las ordinarias y las en derivadas parciales.
- enfrentar al estudiante a su entrada a la Universidad, simultáneamente a dos ramas de la matemática: Álgebra Lineal y Cálculo, lo que hace más complejo el contenido a aprender, a lo que contribuye además el carácter abstracto del Álgebra, lo que exige una nueva forma de pensar del estudiante.

La fragmentación a que se hace referencia en el caso del Álgebra Lineal se debió a una tendencia por ubicar temas del Álgebra dentro del Cálculo, en el momento que fuesen necesarios, como expresión de integración del contenido.

Es por eso que el tema de Espacios Vectoriales se incluyó en el tema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, toda vez que para la solución de ecuaciones diferenciales de orden superior se usan los conceptos de combinación lineal de soluciones linealmente independientes, pero ello trajo aparejado la imposibilidad de abordar en un mismo semestre y asignatura todo el tema de Ecuaciones Diferenciales, tanto ordinarias como en derivadas parciales, es decir produjo fragmentación en este tema más la perdida de la esencialidad del Álgebra como un todo y la especificidad del pensamiento algebraico, ocurriendo otro tanto con la Geometría Analítica.

Por tanto, en la presente investigación, los autores consideran como Problema: la organización del contenido de la disciplina matemática del primer año de la carrera de Ing. Química, como una causa del índice de fracaso académico de los estudiantes.

El marco conceptual de la propuesta se encuentra en:

1. En la contextualización de la organización del contenido que emerge como elemento sintetizador de la contradicción fundamental del proceso de organización y constituye la cualidad que lo distingue como sistema. La misma se logra en la búsqueda de determinados grados de satisfacción de los diferentes factores que los autores consideran deben ser tenidos en cuenta en el proceso de organización. Ellos son: las lógicas de la profesión, de la ciencia, pedagógica, las características de la Institución y la participación activa del estudiante: su unidad se expresa como sinergia (Ruiz, 2006).

2. En la lógica de la profesión. No se puede perder de vista que, ante todo, que el contenido como categoría didáctica no es un fin en sí. Lejos está la visión enciclopedista o academicista de abordar un contenido con el único fin de demostrar erudición. El contenido forma parte de un sistema de categorías didácticas y como tal se relaciona con otras, dentro de las cuales, es el Objetivo la categoría rectora y por tanto es quien determina al contenido y a su vez éste último condiciona en cierta medida que se alcance dicho objetivo. Por consiguiente, la selección del contenido de un plan de estudio está en función, en primer lugar de los objetivos que se persigan alcanzar en un determinado momento del proceso de enseñanza aprendizaje.

3. En la lógica de las ciencias. Se debe seguir la secuencia u ordenamiento producto de las relaciones de necesidad que se establecen entre las diferentes partes del contenido. La cual no debe ser violentada, por cuanto produciría inevitables afectaciones al proceso de enseñanza aprendizaje, ya que los estudiantes no poseerían los conocimientos y habilidades necesarias para abordar determinados contenidos, produciéndose un aprendizaje incompleto y sin solidez. De ahí que, no solo de exigencias profesionales se puede perfilar la organización del contenido, sino que también hay que tener en cuenta los requerimientos de los restantes contenidos correspondientes a otras ciencias que son objeto de enseñanza aprendizaje como parte del sistema que conforman cada uno de los contenidos de diferentes ramas de la ciencia que en su totalidad constituyen el contenido del plan de estudio.

4. En la lógica pedagógica. El contenido que se selecciona y organiza en un plan de estudio debe resultar, ante todo, asequible al estudiante; debe potencialmente poder ser asimilado por los estudiantes en el plazo de tiempo que se prevé y por tanto es este un factor más a tener en cuenta en la organización, es decir, lograr una organización que desde el punto de vista didáctico resulte lo más asequible posible.

Dentro de los aspectos pedagógicos a tener en cuenta, existe una fuerte tendencia bien generalizada de abordar el contenido de lo simple a lo complejo, que aunque no siempre es posible de alcanzar, está presente en la forma general de abordar el contenido. Aunque no siempre es posible de alcanzar porque evidentemente se impone como ya se ha dicho anteriormente, la lógica de la ciencia, como uno de los factores que determinan la organización del contenido y esta propia lógica puede que condicione la obligatoriedad de abordar primero un contenido dado el orden de precedencia que se requiere. Sin embargo puede que su nivel de complejidad sea muy elevado a pesar de ser el primero que deba ser objeto de enseñanza aprendizaje.

Un ejemplo lo constituye el proceso de enseñanza aprendizaje del Cálculo Diferencial e Integral, en donde existe una relación de precedencia lógica: Limite, Continuidad, Derivada e Integral, sin embargo, ¿existe un concepto más complejo en su nivel de abstracción que el de Límite?, ¿resulta simple a los estudiantes comprender la esencia del concepto de Límite? Se sabe que la respuesta a ambas preguntas es negativa, pero que no obstante la lógica matemática impone un primer lugar al concepto de Límite en el proceso de enseñanza aprendizaje de tales conceptos.

5. En la organización del contenido en general, no solo es preciso tener en cuenta las lógicas de la profesión, de las ciencias y pedagógica; sino permitir la participación activa del estudiante, quien en atención a sus diferencias individuales y particularidades, disponga de cierta autonomía para elegir la organización del contenido que prefiere, toda vez que los expertos teniendo en cuenta los diferentes tipos de lógicas antes mencionadas, pueden ofertar al estudiante variantes de organización para que ellos seleccionen la que prefieren, pero sin violar o violentar las relaciones de necesidad que existen entre las diferentes partes de contenido, o sea respetando la organización que se obtiene en atención a la lógica de las ciencias. Precisamente Briggs citado por Gimeno señala que:

> […] la estructura del conocimiento a tener en cuenta cuando pretendemos que se aprenda supone establecer relaciones de dependencia y de independencia de las partes integrantes, dispuestas de forma que indiquen cuándo el orden de la secuencia puede ser optativo o aleatorio, y cuándo ha de hacerse cuidadosamente para lograr una trayectoria óptima para alcanzar destrezas u objetivos complejos (Gimeno 1996, p. 361).

Pero a su vez, tal autonomía, en atención a las diferencias individuales de los estudiantes, puede conducir al desarrollo de un notable individualismo profesional en detrimento de una formación en valores como el respeto a las diferencias individuales, la tolerancia y la convivencia social, la capacidad de trabajo en grupo, así como al desarrollo de cualidades personales como la sociabilidad o del proceso de socialización, considerado este último por algunos autores, como uno de los elementos que actúa como determinante del desarrollo de habilidades sociales.

Es por eso que se propone abordar esta contradicción que se da entre la atención a las diferencias individuales y la necesidad del trabajo en grupo, a la luz de la teoría del conflicto y la teoría de la negociación, identificando las diferencias que pueden existir entre estudiantes, como un conflicto, cuya gestión debe lograrse a través de conciliar los intereses de las partes por medio de la negociación que permita la toma de decisiones.

Esta negociación permitió llegar a una toma de decisiones colectiva, por consenso, en la que también está representada la Institución con sus características, fortalezas y debilidades, en la persona del profesor, acerca del número de subgrupos en que podrá dividirse el grupo de estudiantes, cada uno con una secuencia o trayectoria diferente al cursar el contenido del plan de estudio, expresión de diferentes formas de organización del mismo.

Solución del problema

Organización que se propone.

Asignatura	Contenido	Año académico	Sem	Horas clases
Algebra Lineal y Geometría del espacio	Sistemas de ecuaciones lineales. Matrices. Espacio Vectorial. Aplicación Lineal. Geometría del espacio.	I	I	54
Matemática I	Cálculo Diferencial e Integral de funciones reales de una variable real	I	2	70
Matemática II	Cálculo Diferencial e Integral de funciones de varias variables reales.	2	I	74
Matemática III	Series. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y en Derivadas parciales. Transformada de Laplace.	2	2	78

Tabla 2: Organización que se propone para el contenido de la disciplina matemática en la carrera de Ing. Química de la Universidad de Camagüey.

Ventajas de este tipo de organización.

- se simplifica el contenido matemático a aprender por el estudiante en el primer año académico, a pasar parte del Cálculo al segundo año y no simultanear el Álgebra con el Cálculo en un mismo semestre, además de la consecuente reducción del número de horas clases.

- no se fragmenta el Algebra ni los elementos de la Geometría del Espacio como ramas de la Matemática para su aprendizaje ni el estudio de las ecuaciones diferenciales.
- no aumenta el número de asignaturas de la disciplina ni se requiere de mayor cantidad de profesores para impartirlas.

En resumen, los autores consideran que la organización del contenido matemático de la carrera de Ing. Química de la Universidad de Camagüey, está fragmentado y sobrecargado en el primer año académico, todo lo cual puede atentar contra los resultados académicos de los estudiantes. En su lugar se propone una organización que en atención a los diferentes aspectos que según Ruiz conducen a una organización contextualizada, se caracteriza por su nivel de integración y simplicidad en el primer año académico respecto al segundo, lo cual debe contribuir a mejorar tales resultados académicos (Ruiz, 2006).

Conclusiones

El índice de fracaso académico de los estudiantes en los primeros años de la carrera de Ingeniería Química de la Universidad de Camagüey, es un fenómeno multicausal, abordado por otros autores desde distintas aristas, pero enfocado en nuestro caso desde la organización del contenido.

La organización que se propone contribuye a disminuir tal índice.

Referencias bibliográficas

Álvarez, A. (2011). *Didáctica para la sistematización del concepto función real de una variable real en el primer año de la carrera Ingeniería Eléctrica*. Tesis de maestría no publicada, Universidad de Camagüey. Cuba.

Gimeno, J. (1996). *El currículum: una reflexión sobre la práctica*. Madrid: Morata, S.L.

Horruitiner, P. (2006). *La Universidad Cubana: el modelo de formación*. La Habana: Félix Varela.

Rodríguez, M. L. y Ricardo, L. (2007). El modelo holístico para el proceso de enseñanza aprendizaje de Geometría en Arquitectos de la escuela cubana. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa* 10 (3), 421–461.

Ruiz, J. M. (2006). *Metodología para una organización contextualizada del contenido de planes de estudio universitarios*. Málaga: eumed.net.

UNA PROPUESTA PARA CONTRIBUIR A LA COMPRENSIÓN DE LA DERIVADA

María del Socorro García González, Crisólogo Dolores Flores
Universidad Autónoma de Guerrero México
mgargonza@gmail.com, cdolores2@gmail.com

Resumen. Esta investigación es motivada por la detección de un problema concreto en un curso de Cálculo Diferencial en estudiantes principiantes universitarios de la Universidad Autónoma de Guerrero, México. Una cantidad significativa de ellos escasamente comprende el concepto derivada. Por tal razón, se propone el objetivo de elaborar una propuesta que ayude a los estudiantes a mejorar la comprensión del concepto en cuestión. El sustento teórico que fundamenta este trabajo es la Teoría de la Actividad. Y el marco metodológico al que se rige es la Metodología de la Enseñanza de la Matemática.

Una vez analizado los resultados arrojados de la puesta en escena de la propuesta se observa una comprensión aceptable en una estudiante de la población con la que se trabajó. Poco más de la mitad de los estudiantes aún presentan una comprensión débil del concepto en cuestión, y el resto posee una comprensión aún deficiente del concepto.

Palabras clave: comprensión, derivada, variación, conversión entre registros

Abstract. This research is motivated by the detection of a particular problem in a Differential Calculus course at first year university undergraduate students, in the Autonomous University of Guerrero, Mexico. A significant number of students barely understand the concept of derivative. For this reason, the proposed objective contributes to improve the understanding of the concept of derivative.

The theoretical foundation of this work is the Activity Theory. And the methodological framework is based in the Methodology the Teaching of Mathematics. After analyzing the results obtained in the staging of the proposal, we observed an acceptable understanding in a student of the population. Just over half the students still have a weak understanding of the derivative, and the rest still have a poor understanding of the concept.

Key words: understanding, derivative, variation, conversion between records

Introducción

Con base en la revisión de algunas investigaciones realizadas en Matemática Educativa, a nivel bachillerato tocante los conceptos límite y derivada, se concluye que la mayoría de los estudiantes sólo logran un dominio razonable de los algoritmos algebraicos para calcular límites y derivadas; sin embargo escasamente comprenden el significado de esos algoritmos que realizan (García y Navarro, 2010; Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2008; Dolores, 2007). A diferencia de estas investigaciones, nuestro propósito es dirigido al trabajo con estudiantes de Nivel Superior, en específico, estudiantes de primer año de Licenciatura en Matemáticas. Centramos la atención en el concepto derivada.

Para obtener evidencia de lo que los alumnos conocen sobre la derivada, se realizó una encuesta a los grupos que cursaban el primer año de dicha licenciatura en la Universidad Autónoma de Guerrero (45 alumnos en total),en ella se les pedía contestar la pregunta ¿qué es la derivada de una función? Los resultados indican que gran parte de los estudiantes tienen ideas alejadas de lo que es la derivada de una función (la identifican con una fórmula), y sólo el 15% da evidencia de tener una idea más cercana de la definición (la identifican con pendiente de la recta tangente, límite, razón de cambio).

Esta situación nos permitió identificar un problema concreto de aprendizaje vinculado a la práctica escolar en un escenario concreto, por tanto motiva nuestra investigación, a saber: la escasa comprensión del concepto derivada en estudiantes de primer año de licenciatura en matemáticas. Debemos aclarar que si bien emitimos este juicio a partir de la sola definición del concepto, la justificación se basa en que desde nuestro punto de vista, conocer la definición de un concepto es una de las actividades fundamentales para comprenderlo.

La razón por la que abogamos a la comprensión del concepto es que creemos de acuerdo con Jungk (1986), que ésta es fundamental para poder aplicar lo aprendido de forma segura, al mismo tiempo que es esencial para comunicarlo.

El sustento teórico que fundamenta este trabajo, es la Teoría de la Actividad (TA). Y el marco metodológico al que se rige es la Metodología de la Enseñanza de la Matemática (MEM).La población con la que se trabajó fueron estudiantes de primer año de licenciatura que han decido estudiar la carrera de Matemáticas. Al detectar el problema de la escasa comprensión del concepto derivada, convenimos en que la propuesta se introdujera sin un carácter riguroso de la Matemática, más bien se busca la manera de acercar a los alumnos al concepto de forma sencilla pero significativa, misma que puede ser la base para el formalismo matemático que sin duda tendrán que desarrollar los participantes en sus cursos posteriores para enunciar proposiciones o construir demostraciones.

Por lo dicho anteriormente, la propuesta se apoya en el enfoque variacional y se ha centrado en Dolores (1999). De él se adoptan las ideas de elaborar una introducción intuitiva e informal que permita desarrollar ideas variacionales en los estudiantes, mismas que les posibiliten la comprensión del concepto derivada; de tal forma que la derivada sea un concepto desarrollado para cuantificar, describir y pronosticar la rapidez de la variación en fenómenos de la naturaleza o de la práctica. Debido a ello, se decidió usar como base para el diseño de las actividades, el libro: *Una introducción a la derivada a través de la variación*. En esta obra, se aportan elementos didácticos cuyo fin es propiciar una mejor comprensión de las ideas y conceptos básicos del Cálculo, en especial aquellos que tienen una relación estrecha con la derivada.

Elementos teóricos y metodología

Debido a que nuestra intención es proponer actividades que ayuden a los alumnos a comprender el concepto derivada, es necesario aclarar a qué nos referimos cuando hablamos de la palabra comprender, a continuación lo hacemos.

En este trabajo asumimos que *se comprende algo de un concepto* cuando el estudiante: puede indicar ejemplos (1), conoce y utiliza correctamente su denominación (2), nombra propiedades (3), indica contraejemplos (4), da varias definiciones (5), identifica casos especiales (6) y casos límite (7), conoce relaciones de este con otros conceptos (8), conoce una sucesión de indicaciones para reconocer un representante del concepto dado (9) y cuando pueda usarlo o aplicarlo en la resolución de problemas o situaciones (10). A estas 10 actividades las hemos caracterizado como *fundamentales para comprender un concepto*, particularmente nos interesa el concepto derivada.

Para llevar a cabo la investigación se siguieron 4 puntos específicos:

- Diseño de la propuesta,
- Prueba de diagnóstico a los estudiantes participantes
- Puesta en práctica de la propuesta
- Prueba de valoración de la propuesta

Para el diseño de la propuesta se adoptó como marco metodológico a la MEM específicamente lo referente a los fundamentos lógicos de la elaboración y formación de conceptos. Se tomaron como ejes directrices a la variación y la conversión entre registros.

Los problemas de los que se formó la propuesta estuvieron basados en el libro *Una introducción a la derivada a través de la variación*, escrito por Dolores (1999).

Una vez diseñada la propuesta se pone en escena con un grupo de 23 estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas en la UAM de la UAGro, durante un periodo de 3 semanas. Antes y después de esta puesta se aplica a los estudiantes una prueba (conformada por un cuestionario) donde son contempladas las 10 actividades que se han caracterizado como fundamentales para comprender un concepto y que han sido mencionadas al inicio de este apartado.

La finalidad de las pruebas de diagnóstico y evaluación es poder comparar lo que los estudiantes son capaces de hacer antes y después de la puesta en práctica de la propuesta diseñada y con ello poder percatarnos de la mejora o no, en la comprensión del concepto de interés en los estudiantes participantes.

La teoría de la actividad: Base para la orientación de la propuesta

La Teoría de la Actividad, aporta elementos para orientar la actividad cognoscitiva, es el lugar de encuentro interdisciplinar donde se estudian las diferentes formas de las prácticas humanas, tanto en el ámbito individual como social, al mismo tiempo.

Leontiev (1981) describe que una actividad está compuesta por sujeto, objeto, acciones y operaciones.El *sujeto* es la persona (o grupo) comprometida con la actividad. El *objeto* (como objetivo), es mantenido por el sujeto y motiva la actividad, generando una determinada dirección de acción. Esta dirección puede cambiar a lo largo de la actividad. Las *acciones* son lo que se entiende normalmente por tareas. Las *operaciones* son acciones llevadas a cabo de forma automática, esta rutina se adquiere con la práctica y repetición de la misma acción en el tiempo. Las operaciones dependen de las condiciones bajo las que la acción se está llevando a cabo. A su vez, la actividad tiene 4 momentos principales en que transcurre: *orientación*, *ejecución*, *control* y *corrección*.

La metodología de la enseñanza de la matemática

Bajo la perspectiva de la MEM se distinguen dos vías principales para formar un concepto, la vía inductiva y la vía deductiva. En la primera el concepto se desarrolla por medio de descripciones y explicaciones, hasta llegar a la definición. En la segunda, se parte de la definición del concepto y mediante el análisis de ejemplos se descubre el contenido y extensión del concepto. Para nuestros fines y de acuerdo a nuestro objetivo de investigación, seguiremos la vía inductiva. De esta forma el proceso total de elaboración de conceptos por la vía inductiva se conforma de tres fases: *Consideraciones y ejercicios preparatorios, formación del concepto* y *asimilación del concepto*. Estas son explicadas en la sección siguiente.

Estructura de la propuesta

En el plano del contenido matemático la propuesta se organiza en torno de la variación, misma que se constituye como un eje directriz. En el plano cognitivo se organiza en torno del eje directriz tendiente a la conversión entre registros (geométrico, numérico, algebraico y verbal). Respecto del primer eje, se trata de acercar a los estudiantes a tres nociones físicas fundamentales: la variación, la rapidez promedio de la variación y la rapidez instantánea de la variación.

Desde la TA, el conocimiento se ubica en la práctica, es decir cuando el sujeto realiza una actividad, desde esta perspectiva teórica, se considera que la actividad está compuesta por cuatro momentos. La *orientación* del sujeto, la *ejecución,* el *control* y la *corrección*, de acuerdo a los intereses perseguidos por este trabajo, sólo serán tomados en cuenta los tres primeros momentos. Estos momentos junto con las fases propuestas por la MEM, son la clave para delimitar las tres fases de las que se compone la propuesta que tiene el objetivo de contribuir en la mejora de la comprensión del concepto derivada. A continuación explicamos a detalle cada una de las fases de que consta la propuesta diseñada.

Fase 1. Orientación: Consideraciones y ejercicios preparatorios

La *orientación* del sujeto desde la TA está basada en los esquemas referenciales de que dispone e incluye la planificación de las futuras acciones. Lo que requiere que el trabajo se inicie a partir de lo que el estudiante ya conoce, esto se corresponde con la fase de consideraciones y ejercicios preparatorios propuesta por la MEM.

Esta fase tiene el objetivo de preparar a los estudiantes en el trabajo con el fenómeno del cambio para más tarde poder relacionar estas ideas con las propias de la derivada. Aquí se desarrollan temas a través de una secuencia de actividades, con la que se espera que los estudiantes se percaten que cuando ocurren cambios, estos se comportan de manera distinta dependiendo principalmente de la fórmula de la función que los describe.

Fase 2. Ejecución: Formación del concepto

Delimitada desde la MEM por la fase de *formación del concepto*; constituye el centro de la propuesta, ya que en ésta se pretende arribar a la definición del concepto derivada con todo y sus características esenciales. Desde la TA, el momento de *ejecución* consiste en la realización práctica de las acciones encaminadas a que el estudiante llegue a la definición del concepto derivada en el contexto físico primeramente, acción que se acentúa en lastres secuencias de actividades que se han propuesto para desarrollar esta fase.

Aquí se trabaja con la motivación para formar el concepto derivada como velocidad instantánea (contexto físico), dicha motivación la constituye un problema en el que se tiene que calcular la velocidad de un cuerpo en un instante determinado, en este momento y resultado de la fase 1, los alumnos sólo conocen la fórmula para calcular velocidad media, precisamente esta limitante es la que los conducirá a buscar una forma factible que les permita dar solución al problema planteado.

Problema: Motivación

Un cuerpo se mueve de tal forma que la relación entre las distancias que recorre respecto del tiempo está dada por la fórmula $s(t)=20t-5t^2$, ¿cuál es la velocidad de este cuerpo exactamente en $t=1$ segundo?

Para la solución de este problema, el alumno recurre a la fórmula para el cálculo de la velocidad media como un recurso para dar solución al problema, ante la imposibilidad del uso de tal recurso, se propone como una vía factible el uso de las aproximaciones numéricas, esto es, se proponen acercamientos muy pequeños hacia el tiempo en cuestión (t=1s) para analizar el comportamiento de las velocidades medias y poder emitir un resultado de la velocidad buscada, misma que se encuentra gracias al recurso del concepto *límite*. Llegando con ello a la noción de velocidad instantánea, como límite de las velocidades medias, cuando el tiempo es infinitamente pequeño ($\Delta t \to 0$).

En la estructura de la propuesta, se pretende generalizar el concepto derivada aparecido en el contexto físico, con el uso de otros registros, tales como el numérico, el geométrico, el algebraico y el verbal.Siguiendo a Duval, por registro de representación se entiende un sistema de signos utilizados para representar una idea u objeto matemático (en este caso la derivada) y que además cumple con las siguientes características: es identificable, permite el tratamiento, esto es, la manipulación y transformación dentro del mismo registro y, por último, permite la conversión, consistente en la transformación total o parcial en otro registro.

Los registros trabajados son, el *registro verbal*, que está delimitado por el lenguaje, el *registro algebraico*, donde se prioriza el uso de la escritura mediante expresiones algebraicas, el *registro numérico*, en él se hace énfasis en el uso de sucesiones numéricas y el *registro gráfico*, donde prevalece el uso de imágenes o figuras.

La conversión entre registros de la que se habla, se fundamenta en la idea de Duval (1998) de que para la comprensión de un concepto es necesaria la coordinación de los diferentes registros de representación del concepto, siendo suficiente con la coordinación de al menos dos registros de representación. Bajo esta idea creemos que la conversión entre registros de representación es una parte fundamental para comprender un concepto.

Fase 3. Asimilación del concepto

Delimitada desde la MEM por la fase de asimilación del concepto y desde la TA por el momento de *ejecución* que consiste en la realización práctica de las acciones encaminadas a que el estudiante logre la asimilación del concepto derivada y el momento de *control*, entendido como la regulación sistemática de las acciones que se pretenden sean realizadas por el estudiante y que se acentúan en las 10 actividades consideradas como fundamentales para comprender un concepto. El objetivo que se persigue es que el estudiante desarrolle las ejercitaciones, profundizaciones, sistematizaciones y aplicaciones, y los repasos del concepto. Para ello, se elabora una secuencia de actividades en la que son contempladas las actividades que hemos considerado como fundamentales para comprender un concepto. Por cuestiones de espacio, no son mostradas en este escrito.

La puesta en práctica de la propuesta

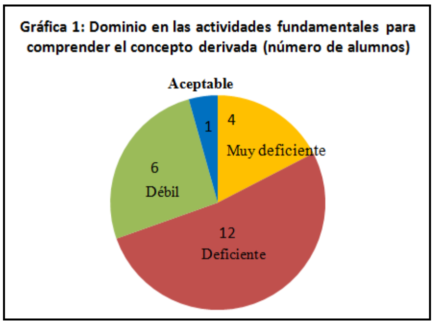
La población con la que se trabajó estuvo formada por uno de los dos grupos de primer año de la Licenciatura en Matemáticas, de la Unidad Académica de Matemáticas, de la Universidad Autónoma de Guerrero. Los estudiantes de este grupo se encontraban cursando la asignatura de Cálculo I, y no habían abordado en clase el tema de derivada, sólo sabían de este, lo que en sus cursos de bachillerato abordaron. Se trabajó con ellos por un período de 3 semanas, con 6 sesiones de 50 minutos cada una. Este grupo estaba formado por 23 alumnos. Las sesiones trabajadas fueron desarrolladas de manera diferente a las clases del curso de Cálculo I, y es que de acuerdo a los argumentos de los estudiantes, las clases de cálculo normalmente consistían en exposiciones del profesor y de poca participación por parte ellos, quienes sólo se dedicaban a copiar lo que estaba escrito en la pizarra.

Por el contrario, ahora se les proporcionaron a todos los alumnos participantes secuencias de actividades, mismas que fueron resueltas mediante el trabajo en equipo. Los equipos fueron formados en un principio por afinidad, posteriormente conforme se resolvían las diferentes secuencias, se volvían a integrar equipos, de tal forma que un alumno trabajara con todos sus compañeros. En todo momento el papel de los investigadores fue una especie de guía para los alumnos, quienes discutían los temas tratados en las secuencias y resolvían los problemas planteados, posteriormente los resultados obtenidos por cada equipo eran sometidos a revisión por todo el grupo, llegando de esta forma a un consenso que daba solución a dichos problemas.

La primera clase en la que se trabajó con los alumnos, se les pidió contestar el cuestionario de diagnóstico (donde fueron contempladas las 10 actividades que hemos caracterizado como fundamentales para comprender el concepto derivada), se les dijo que la intención de este era percatarnos de los conocimientos que sobre derivada tenían como consecuencia de sus cursos de Cálculo del Bachillerato. Todos excepto un alumno integrante del grupo contestaron la prueba, esto debido a que faltó el día en que este se aplicó. Después de la puesta en escena de la propuesta, ésta se valoró con un cuestionario de evaluación igual al aplicado en el diagnóstico, la finalidad de esto fue constatar la mejora o no, de la comprensión de la derivada en los estudiantes participantes.

Resultados

El análisis que se hizo de las producciones de los estudiantes fue de carácter cuantitativo-cualitativo; para medir la mejora de la comprensión del concepto se usó una escala de medición basada en el incremento de la cantidad de respuestas correctas del cuestionario de evaluación, respecto de la prueba de diagnóstico, la graduación fue la siguiente: De0% a 20%, mejora *Muy deficiente*, de 21% a 40%, mejora *Deficiente*, de 41% a 60, mejora *Débil*, de 61% a 80%, mejora *Aceptable* y de 81% a 100% mejora *Significativa*. Aunado a lo anterior, se tomaron en cuenta la cantidad de respuestas incorrectas obtenidas, así como la solución de los diferentes grupos de actividades. De la misma forma que han sido considerado para emitir juicios de mejora o no en la comprensión, el desempeño del alumno en los cursos y su disposición al trabajo. La gráfica siguiente exhibe los resultados obtenidos por el grupo de alumnos participantes.



Gráfica 1: Resultado de los alumnos participantes

Una vez analizados los resultados arrojados y con base en las pruebas de diagnóstico y evaluación, observamos que no hubo mejoría significativa en los estudiantes que participaron en la prueba, pero si una comprensión aceptable en una estudiante de la población con la que se trabajó. Ella realizó aceptablemente todas las actividades propuestas, actividades que hemos caracterizado como fundamentales para la compresión del concepto derivada, además durante la puesta en práctica de la propuesta, destacó entre sus compañeros por ser quien logró involucrarse más en las sesiones de trabajo, al participar en ellas, exponer sus puntos de vista sobre los temas tratados, así como sus dudas, y apoyar a sus compañeros cuando lo necesitaban.

Sólo 6 estudiantes presentan una comprensión *débil* del concepto en cuestión, un estudiante no logró mejorar su comprensión, pues los resultados obtenidos en el cuestionario de evaluación fueron menos favorables que los del cuestionario de diagnóstico. Y el resto de los estudiantes poseen una comprensión ubicada en las escalas *deficiente* y *muy deficiente*.

Aunado a lo anterior, una vez aplicada la prueba de evaluación, logró notarse una mejora en el dominio de las actividades fundamentales para comprender el concepto derivada; sin embargo aún se percibe un escaso dominio en cuatro de ellas, dichas actividades coinciden con las que se presentaron en la prueba de diagnóstico, éstas fueron las relacionadas a: poder indicar ejemplos para el concepto tratado; estar en condiciones de indicar contraejemplos del concepto y de fundamentar por qué estos no pertenecen a la extensión del concepto; poder señalar casos especiales y conocer las relaciones con los demás conceptos.

Conclusiones

La puesta en escena de la propuesta diseñada ha permitido confirmar en esta investigación que ante una de las tantas dificultades que puede haber en el aula de clases, en este caso en particular la escasa comprensión de un concepto, el trabajo del profesor como principal actor que busca en su labor aminorar estos inconvenientes en sus estudiantes va más allá de diseñar y proporcionar herramientas con las que los estudiantes puedan trabajar y como lo propugna el constructivismo, vayan construyendo su "propio conocimiento", sino junto con las herramientas debe involucrárseles a los estudiantes para que sean ellos quienes en interacción con sus pares y el propio profesor se responsabilicen y apropien de su "propio conocimiento".

Referencias bibliográficas

Dolores, C. (1999). *Una introducción a la derivada a través de la variación. Serie cuadernos Didácticos*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Dolores, C. (2007). *Elementos para una aproximación variacional a la derivada*. México: Díaz de Santos.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F.Hitt (Ed), *Investigaciones en matemática educativaII* (pp. 173-201), México:Grupo editorial Iberoamérica.

García, M. y Navarro, C. (2010). Una alternativa para trabajar con límites especiales. *Números 75(1)*, 105-120.

Jungk, W. (1986). *Conferencias sobre la metodología de la enseñanza de la matemática 2*. Cuba: Editorial Pueblo y Educación.

Leontiev, A. (1981). *Actividad, Conciencia, personalidad*. Cuba: Editorial Pueblo y Educación.

Sánchez-Matamoros, G., García, M. yLlinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en Didáctica de la Matemática. *Revista Latinoamérica de Investigación en Didáctica de la Matemática 11(2)*, 267-296.

LA PROBABILIDAD EN EDUCACIÓN ESPECIAL: EXPERIENCIA EN EL SEXTO GRADO

José Marcos López-Mojica, Ana María Ojeda Salazar
CAM 18; DME, Cinvestav-IPN México
jmlopez@cinvestav.mx, amojeda@cinvestav.mx

Resumen. Los aspectos epistemológico, cognitivo y social se consideran para investigar, en curso y de forma cualitativa en la educación especial básica, el uso de esquemas compensatorios y su promoción ante situaciones aleatorias. La investigación sigue los lineamientos del órgano operativo y aplica la célula de análisis de la enseñanza. De sus tres fases, en parte de la segunda se aplicaron estrategias de enseñanza en el aula y se plantearon preguntas relativas al enfoque frecuencial de la probabilidad a seis niños (13 a 15 años) de sexto grado con diversas afecciones. Se utilizaron los métodos de la experienciación y de la bitácora. Las técnicas de registro de datos fueron la videograbación y la escritura en hojas de control impresas en papel. Los casos con síndrome Down enfatizaron lo visual para identificar frecuencias y registrarlas. El caso de retraso mental recurrió a la memoria de trabajo para recuperar las frecuencias y las frecuencias relativas. El caso de autismo estableció una relación de "más o menos el número de veces".

Palabras clave: educación especial, esquemas compensatorios, desempeños

Abstract. Epistemological, cognitive and social aspects are considered to investigate, qualitatively and in an ongoing way, on the use of compensation schemes and how to promote their use when facing random situations in the special basic education. The research followed the guidelines of the operative organ and applied the analysis cell to the teaching. Here we consider a piece of the second out of the three phases of that research, concerned to the teaching of the frequential approach of probability in the sixth grade classroom, with six children aged 13 to 15 years with different affections. The experiencing and the log were the methods employed. The videotaping and the writing on audit sheets were the techniques to register data. The Down syndrome cases emphasized the visual perception to identify and to record the frequencies. The case of mental retardation appealed for working memory to retrieve the frequencies and relative frequencies. The case of autism established a relationship of "more or less the number of times".

Key words: special education, compensation schemes, performance

Planteamiento del problema

La propuesta institucional para la educación especial no incluye a la probabilidad. La formación en matemáticas del docente de ese nivel educativo es general: obedece a los planes y programas de estudio y a los libros de texto de matemáticas de la educación primaria regular, no a las necesidades de la población de educación especial para niños con ausencias o limitaciones, la cual está desprovista de medios apropiados para su formación en el pensamiento matemático, incluido el probabilístico. En intervenciones recientes en segundo y sexto grados de educación primaria especial (López-Mojica y Ojeda, 2010) se ha corroborado en los hechos esa carencia. Tal insuficiencia limita el desarrollo *integral* del alumno, pues no se le prepara para enfrentar situaciones bajo incertidumbre y se desaprovechan sus desempeños frente a situaciones probabilísticas.

Este es un informe de parte de un proyecto de investigación más amplio relativo a los esquemas compensatorios de los niños de educación especial básica ante situaciones aleatorias. En particular, se plantea qué caracteriza al pensamiento probabilístico de niños de educación especial. Pretendemos ponderar la introducción de los temas de probabilidad y de estadística en la modalidad y nivel educativo en cuestión.

Perspectiva teórica

La investigación, cualitativa y *en curso*, parte del supuesto de que existen esquemas que compensan las ausencias o limitaciones para el desarrollo del pensamiento en el niño con alguna deficiencia (Vygotski, 1997). Por tanto, no se da énfasis a la ausencia o deficiencia, sino al desempeño que es producto de la personalidad del niño. Para la investigación, la "discapacidad" es un producto social, pues está presente en las inadecuadas relaciones que se establecen con el medio social en el que se encuentra el individuo con esas características; es decir, el medio en el que se desarrolla un niño con esas características corresponde al de un individuo normal.

Tres ejes orientan la investigación. En el cognitivo, además de los esquemas compensatorios y de la zona de desarrollo próximo (Vygotski, 1997), se considera a la intuición como base del pensamiento probabilístico (Fischbein, 1975). En el eje social interesan las interacciones en el aula (Steinbring, 1991) durante el proceso educativo, con la propuesta del triángulo relacional para la constitución del concepto matemático, en el marco de la propuesta institucional de la educación especial (SEP, 2009). El eje epistemológico considera dos cuestiones: 1) el planteamiento de Heitele (1975) sobre lo fundamental de estocásticos para la enseñanza, con diez ideas como guía para un curriculum en espiral, las cuales proporcionan al sujeto modelos explicativos eficientes; y 2) las etapas de la constitución de la idea de azar en el niño (Piaget e Inhelder, 1951), a saber, preconcreta, concreta y formal.

Métodos

La investigación se organiza en tres fases. Parte de la segunda se interesa en la enseñanza de estocásticos en el aula de sexto grado de primaria pública especial, con actividades propuestas y conducidas por el investigador, en presencia de la docente titular. Para esta fase se utilizó el método de la experienciación (Maturana, 2003), que consistió en someter al análisis la experiencia del investigador del proceso de enseñanza efectuada y del desempeño de los niños frente a situaciones aleatorias. Para recuperar o complementar las condiciones en que se desarrolló la experienciación se utilizó la bitácora.

La *célula de análisis* de la enseñanza (Ojeda, 2006) se aplicó a los datos recopilados para identificar: ideas fundamentales de estocásticos, otros conceptos matemáticos, recursos semióticos, términos (palabras o frases) que aluden a estocásticos y la situación de referencia. Los instrumentos fueron el guión de clase y hojas de control para el seguimiento de la actividad propuesta con una serie de preguntas relativas al enfoque frecuencial de la probabilidad. Las técnicas para registrar los datos fueron la videograbación y la escritura en papel y en el pizarrón.

En el aula participaron seis niños de 13 a 15 años de edad *[M* y *W* con síndrome Down y problemas de lenguaje; *A* y *An* con retraso mental; *Mi* con problemas motrices y de lenguaje; y *T*, autista], su docente y el investigador.

Situación de referencia. La actividad de enseñanza "La carrera" consta de cuatro partes y tiene por objetivo introducir el enfoque frecuencial de la probabilidad. Consiste en realizar giros de una ruleta con seis sectores iguales, que se distinguen por figuras de círculos, triángulos y cuadrados, en distinta proporción. El resultado de cada giro de la ruleta, señalado por una flecha (véase la Figura 1), se registra en una tabla impresa en las hojas de control, marcando una celda de la fila correspondiente a la figura indicada por la flecha en la ruleta al cabo de cada giro.

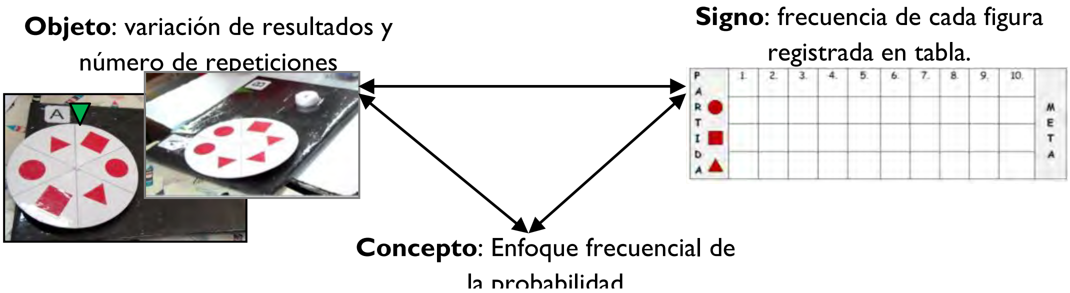


Figura 1. Triángulo epistemológico para "la carrera"

A continuación de la tabla se plantean cuatro preguntas abiertas sobre la figura "ganadora", para contestarse de manera oral y después escrita en las hojas de control. Las preguntas son: de cuál figura sus registros alcanzan la meta; por qué resultó ganadora esa figura; cuál fue el número total de giros realizados y cuál fue la frecuencia resultante de la figura seleccionada al inicio de la actividad por cada alumno.

La Tabla 1 presenta las características de la actividad según las partes de las que consta; hemos indicado la composición de las ruletas con la cantidad de cada una de las figuras utilizadas.

La lógica en la actividad, ilustrada en la Figura 1, es la siguiente: a nivel de *objeto* interesan los resultados de cada giro de las ruletas y sus frecuencias; a nivel de *signo* importan las frecuencias de cada figura registradas en la tabla, para prefigurar el *enfoque frecuencial* de la probabilidad (Fischbein, 1975; Steinbring, 1991). Para advertir la cardinalidad de cada *evento posible* como referencia para considerar la frecuencia obtenida, se pidió variar la composición de las figuras en el dibujo dado de unas ruletas.

Tabla 1. Características de la actividad “La carrera”

Criterios	Descripción			
Situación general	Giros de una ruleta con sectores iguales y diferentes cantidades de figuras: círculos, triángulos y cuadrados.			
Situación específica	*Parte I* R [2Δ, 2○, 2□]	*Parte II* R [3Δ, 2○, 1□]	*Parte III* Decidir entre: R_1 [1Δ, 2○, 3□]; R_2 [1Δ, 3○, 2□]	*Parte IV* Determinar R [?Δ, ?○, ?□] para distintos eventos
Ideas fundamentales de estocásticos	Espacio muestra, medida de probabilidad, variable aleatoria, equiprobabilidad.			
Otros conceptos matemáticos	Números naturales, adición, razones.			
Recursos Semióticos	Tablas, lengua natural escrita, figuras geométricas, signos numéricos.			
Términos empleados	“del total de giros, cuántas veces”, “marca con”, “elegir”, “lo que indique la flecha”, “gira la ruleta”, “llena una casilla”, “más o menos igual”, “muchas, muchas veces”.			
Posibles esquemas compensatorios	Visual y motriz.			

Ideas fundamentales y esquemas compensatorios en el aula alterna del sexto año

Se identificaron *esquemas compensatorios* para los casos síndrome Down, retraso mental y problema motriz en el sexto año de educación especial (véase la Tabla 2).

Tabla 2. Características individuales en el aula alterna del sexto grado

	Síndrome Down		**Discapacidad Mental**			**Problema motriz**	**Autismo**
	M	**W**	**A**	**An**	**Y**	**Mi**	**T**
Ideas funda-mentales	Espacio muestra Frecuencia absoluta	Espacio muestra	Espacio muestra Frecuencia relativa	Espacio muestra Frecuen-cia relativa	Espacio muestra Frecuencia Absoluta	Espacio muestra Frecuencia relativa	Frecuencia absoluta
Esquema compen-satorio	Visual	Visual Motriz	Visual	Motriz Memoria de trabajo	Visual	Visual Motricidad gruesa	Visual Memoriza-ción

Lenguaje	Poca oralización	Palabras monosilábicas. Dificultad con "llena una casilla".	Oraciones incompletas	Fluido	Fluido	No profiere palabras, sólo sonidos guturales	Fluido: ecolalia

Los datos obtenidos indican que los niños tienen nociones de: frecuencia absoluta; frecuencia relativa [*An* y *Mi*]; espacio muestra como conjunto de todos los resultados, aunque no calificados como "posibles", por tanto, no de azar ni de probabilidad. Si bien la actividad no propuso más composiciones donde se variaran tanto los casos favorables como todos los posibles, las respuestas proporcionadas con las composiciones consideradas no dieron evidencia de la advertencia de la intervención del azar.

En un principio las contestaciones de los niños revelaron un pensamiento causal, es decir, atribuían una causa al fenómeno ocurrido, como las de: "giré muchas veces", "le ayudé a ganar [a la figura]", "porque quiso [ganar la figura]", "porque le ayudamos los niños". *An* utilizó expresiones mímicas como de "magia" y con el nombre de la figura que eligió (véase la Figura 2). Cuando respondió de manera escrita, su respuesta fue "porque salió muchas veces" [la figura con mayor frecuencia absoluta].

Figura 2. Expresiones mímicas de *An* tratando de controlar el resultado del giro.

En las transcripciones de los pasajes seleccionados para lo que sigue se utiliza la inicial del nombre de los niños e *I* para el investigador.

Síndrome Down. En la enseñanza realizada, *M* y *W* utilizaron el esquema visual *compensando*, hasta cierto punto, el desarrollo cognitivo lento: corroboraban en la ruleta la figura resultante de cada giro, identificaban esa figura en la tabla impresa en papel y seguían con el dedo índice su fila para añadir una unidad en el registro correspondiente. Así identificaron las frecuencias absolutas (véase la Figura 3). Cuando se pidió el valor de las frecuencias, *M* y *W* contaban *uno a uno* los registros para cada figura y señalando con el dedo índice realizaban la correspondencia con el numeral. Es decir, el esquema visual es un factor importante en el desarrollo cognitivo lento, pues éste [el visual] orienta las acciones a realizar por parte de las niñas. Las acciones (esquema motriz) como "girar la ruleta" les permitieron otorgarle sentido a la situación de enseñanza propuesta, pues al realizarlas sabían que la ruleta se iba a detener y tenían que registrar el resultado en la tabla. Pero en sus argumentos de porqué salió tal figura, no hubo indicios de la idea de azar.

Figura 3. El esquema visual articulando paso a paso el registro de frecuencias absolutas

Retraso mental. An manifestó el uso de la memoria de trabajo en todo el desarrollo de la actividad, pues recuperaba las frecuencias de cada figura al cabo de cierto número de giros.

> ... Ahora díganme, ¿cuántos giros realizamos en total? Para el triángulo, ¿cuántos [giros] tenemos?
>
> **A:** Ocho, diez…
>
> **An:** ¡Ocho!
>
> **I:** ¿Cuántos tiene el triángulo? ¡No adivinen…!
>
> **An y Mi:** ¡Tres!
>
> **I:** Tres. ¿Y el cuadrado?
>
> **Mi:** Oco [Ocho, problemas de lenguaje].
>
> **I:** Ocho. ¿Y el círculo?
>
> **A:** Diez…
>
> **I:** En total, ¿cuántos tenemos? ¿Cuántos giros hicimos? Sumemos…
>
> **A y Mi:** Uno, dos, tres,… [murmurando].
>
> **Mi y An:** ¡Veintiuno!
>
> **I:** **Mi**, del total de giros, de veintiuno, ¿cuántos son para tu figura?
>
> **Mi:** Die [problemas de lenguaje].
>
> **I:** **An**, para tu caso, del total de giros, ¿cuántos le corresponden a tu figura?
>
> **An:** Tres [sonriendo].

La memoria de trabajo permitió, para el caso de retraso mental, recuperar aspectos de la situación de enseñanza, como el conteo de las frecuencias, pues a falta del algoritmo de la suma, *An* prestó atención a todo lo que sucedió en la actividad. El esquema visual fue un apoyo para aquella recuperación; en esta afección el esquema visual no orientó las acciones, sino que al parecer estuvo relacionado con la memoria. *An* estableció la relación entre el número de giros de su figura [triángulo] con el total de giros realizados (véase la Figura 4).

A mostró nociones de espacio muestra y de evento imposible; respondió a la indicación "¿cómo cambiarías las ruletas de modo que tu figura [triángulo] saliera muchas, muchas veces?" sólo con dibujos de círculos y triángulos (véase la Figura 5). Sobre la composición de las ruletas, se le preguntó si en la Ruleta 1 era posible obtener un cuadrado y en la Ruleta 2 un círculo, a lo que **A** respondió "no se puede".

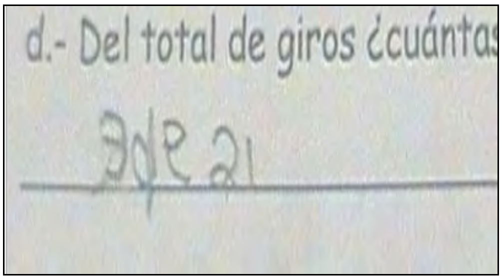
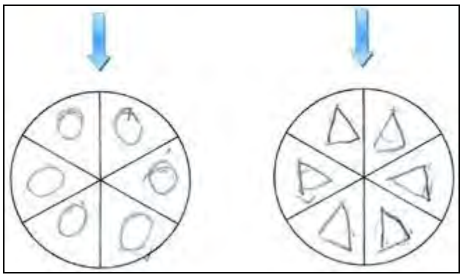


Figura 4. Respuesta escrita de la frecuencia relativa de **An**.



Ruleta 1 Ruleta 2

Figura 5. Composición de las ruletas de **A**.

Se obtuvo evidencia de nociones de variable aleatoria (frecuencia). En la actividad, An y *Mi* asignaron el numeral a la frecuencia con que se obtuvo cada figura.

I: ¿Cuántos giros llevamos, **An**? [Seis para el círculo, dos para el cuadrado, uno para el triángulo].

A: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, ¡nueve!

I: ¿Cómo sabemos que el círculo lleva seis?

An: Seis [contando uno a uno y señala los numerales en la tabla de la hoja de control]. Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis.

I: ¿Dónde está el seis? [El numeral seis].

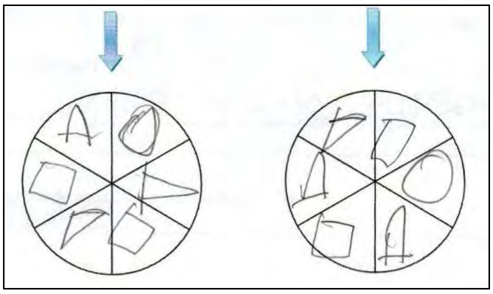
An: Aquí [señala en la tabla el numeral seis].

Mi: ¡Qui! [Señala el numeral, no observa lo que An hizo].

Para *Y* y *A* parece que el "conteo" *uno a uno* compensa la ausencia de la memoria de trabajo. Es repetitivo su uso ante solicitudes de la cantidad de giros.

Tabla 3. Relaciones entre casos favorables y total de casos según **T**.

Figuras	Ruleta 1	Ruleta 2
Cuadrado	2/6	2/6
Triángulo	3/6	3/6
Círculo	1/6	1/6



Ruleta 1 Ruleta 2

Figura 6. Composición de las ruletas de **T**.

Trastorno autista. *T* respondió a las preguntas con la intervención de la docente, quien le leía la pregunta del cuestionario y *T* respondía. También, en momentos de ausencia, *T* no advirtió todo el espacio muestra. Con la petición de "cómo cambiarías las ruletas para que cuadrado y triángulo salgan más o menos igual número de veces", estableció las relaciones como muestra la Tabla 3 y variando la posición de las figuras (véase la Figura 6).

Para esta afección, el esquema visual funciona a manera de memoria fotográfica, de la que *T* recupera información aún después de cierto número de días. Como ejemplo, la Figura 7 ilustra una serie de dígitos alfanuméricos provenientes de la carátula de un disco compacto que *T* vio en casa y que escribió, completamente, en el pizarrón durante tres días consecutivos.

Figura 7. Cadena de letras y números reproducida por **T.**

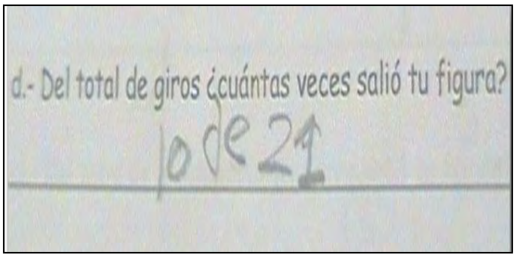


Figura 8. Respuesta escrita de la frecuencia relativa según **Mi.**

Problema de motricidad fina y del lenguaje. El caso *Mi* estableció la relación entre el número de giros correspondientes a su figura [círculo] con el total de giros realizados (véase la Figura 8); identificó los posibles resultados después de girar la ruleta y asignó el numeral a las frecuencias absolutas de cada figura. Debido a su problema de lenguaje, en sus respuestas *Mi* utilizaba expresiones mímicas. Durante la actividad se incorporaron tarjetas con palabras que él utilizaba para formar oraciones y proporcionar sus argumentos a la pregunta planteada. Según los datos obtenidos, al parecer *Mi* no tuvo dificultades con el algoritmo de la suma y tenía nociones de cantidad. Una limitante para él fue la motricidad fina, pues se le complicó asir el lápiz para la escritura de sus respuestas.

Comentarios

En este primer acercamiento identificamos que las niñas con síndrome Down otorgan mayor carga al esquema visual y a la manipulación del material concreto, de donde podrían dotar de sentido a las nociones matemáticas implicadas en las actividades. Para el caso de retraso mental, al parecer la memoria de trabajo y el *conteo* compensan el desarrollo cognitivo lento. En el caso de autismo, el esquema perceptual visual y la memoria están relacionados.

De esta forma, se obtuvo evidencia del grupo de niños de sus nociones de frecuencia, espacio muestra –como conjunto de resultados pero no como posibilidades– y variable aleatoria. Sin embargo, no se obtuvieron datos respecto a su idea de probabilidad, por lo que es necesario aplicar actividades donde se varíen los casos favorables y todos los casos posibles, además de plantear otro tipo de situaciones aleatorias con urnas y tómbolas, por ejemplo.

Por sus respuestas, los niños aún no superan la etapa del animismo, lo que dificulta su pensamiento de lo posible; es decir, tanto en sus acciones como en sus respuestas atribuyen a "algo" el resultado del giro de la ruleta.

La interacción entre pares favoreció la comprensión de las instrucciones de la actividad y promovió la puesta en juego de la zona de desarrollo próximo (Vygotski, 1997).

También al parecer, los esquemas compensatorios en el sexto grado se han vuelto automáticos, por lo que se dificulta su discriminación. Aunque con este grado se obtuvieron algunos indicios, consideramos necesaria la inclusión de temas de probabilidad en grados anteriores para investigar su tratamiento durante el proceso de constitución de esos esquemas.

Por el momento, bajo las condiciones reales de la educación especial, conjeturamos que es viable la introducción de la probabilidad, aunque en el episodio tratado aquí la docente intervino sólo para el caso del trastorno autista, pues *T* no permitía la comunicación con el investigador debido al poco tiempo de interacción. Para futuras intervenciones se considerará el tratamiento de estocásticos con las docentes titulares para fundamentar la posible inserción de la probabilidad en educación especial.

Referencias bibliográficas

Fischbein, E. (1975). *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children*. Holanda: Reidel.

Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics 6*(2), 187-205.

López-Mojica, J. M. & Ojeda, A. M. (2010). Introducción a la variable aleatoria en Educación Especial. En R. Rodríguez y E. Aparicio (Eds.), *Memorias de la XIII Escuela de Invierno en Matemática Educativa* (pp. 70-76). México: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa.

Maturana, H. (2003). *Desde la Biología a la Psicología*. Buenos Aires: Lumen.

Ojeda, A.M. (2006). Estrategia para un perfil nuevo de docencia: un ensayo en la enseñanza de estocásticos. En E. Filloy (Ed), *Matemática Educativa, treinta años: una mirada fugaz, una mirada externa y comprensiva, una mirada actual* (pp. 195-214), México: Santillana-Cinvestav.

Piaget, J. y Inhelder, B. (1951). *La Génèse de l´idée de Hasard Chez l´enfant*. París: PUF.

Secretaría de Educación Pública (2009). *Plan de Estudios del Sexto Grado de Primaria*. México.

Steinbring, H. (1991). The concept of chance in everyday teaching: aspects of a social epistemology of mathematical knowledge. *Educational Studies in Mathematics* 22(6), 503-522.

Vygotski, L. S. (1997). *Fundamentos de la Defectología. Obra Escogidas V*. España: Visor Dis.

PROPUESTA DE UN SISTEMA DE TAREAS PARA GESTIONAR EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO EN LAS CARRERAS DE INGENIERÍA

Reinaldo Sampedro Ruiz, Nancy Montes de Oca, Maria Lourdes Rodríguez, Cila Mola Reyes, Ognara Garcia
Facultad de Informática. Universidad de Camagüey Cuba
reinaldo.sampedro@redu.edu.cu;maria.rodriguez@reduc.edu.cu

Resumen. La Educación Superior enfrenta en este siglo XXI, el reto de preparar profesionales cada vez más competentes, capaces de dar solución de forma creativa a los nuevos problemas que se presenten en su esfera de actuación. El propósito de este trabajo, es presentar un sistema de tareas que por medio de las cuales el estudiante de ingeniería tenga una participación más activa en el proceso de gestión del conocimiento matemático, donde bajo la dirección y orientación del profesor, el estudiante gestione el conocimiento de una manera responsable, crítica y reflexiva para la solución de diversos problemas. Estas tareas están diseñadas para potenciar en el estudiante, el desarrollo de las habilidades relacionadas con la gestión del conocimiento matemático. Se realiza la ejemplificación en la asignatura Matemática para las carreras de ingeniería.

Palabras clave: sistema de tareas, gestionar conocimiento matemático

Abstract. Higher education faces in this century, the challenge to prepare increasingly competent professionals, able to solve creative, new problems that arise in its sphere of action. The purpose of this work is to present a set of tasks, introducing the engineering student to participate more actively in the management process to negotiate mathematical knowledge, where, under the direction and teacher's guidance, the student manages the knowledge in a responsible, critical and reflective for the solution of various problems. These systems of tasks are designed to enhance the student development management skills related to mathematical knowledge. We performed Mathematical modelling in the subject for engineering careers.

Key words: System of tasks, negotiation of mathematical knowledge

Introducción

La Educación Superior enfrenta en este siglo XXI, el reto de preparar profesionales cada vez más competentes, capaces de dar solución de forma creativa a los nuevos problemas que se presenten en su esfera de actuación. Los cambios profundos e irreversibles que están modificando cada vez más la vida social y laboral causados fundamentalmente por los avances científicos y tecnológicos, la rapidez en la generación de la información, productos y servicios, hacen imprescindible nuevas relaciones universidad-sociedad y en especial universidad-sector productivo. Es preciso dejar de considerar la Universidad como un espacio cerrado y estable y convertir la generación de profesionales en un proceso dinámico, en franca interrelación con el entorno de cada sociedad y comprometido con la solución de los diferentes problemas que entraña el desarrollo actual.

La gestión del conocimiento se ha convertido en una disciplina que se ocupa de la identificación, captura, recuperación, compartimiento y evaluación del conocimiento organizacional. Ha sido identificada como un nuevo enfoque gerencial que reconoce y utiliza el valor más importante de las organizaciones: el hombre y el conocimiento que este posee, a lo que no escapa la Universidad del siglo XXI. Para varios autores la llamada sociedad del conocimiento significa una precisión cualitativa a la sociedad de la información; es decir, no sólo es importante tener acceso o poseer información, también es necesario hacer un uso adecuado de la misma, para poder desarrollar con calidad cualquier tarea ya sea del quehacer profesional o de la vida cotidiana.

El objetivo supremo de la Educación Superior cubana según Horrutinier (2006), es que los egresados asuman cabalmente los retos de la época actual y participen activamente en el desarrollo económico y social del país. Para lograr dicho objetivo es imprescindible que en las Universidades se intensifique el trabajo investigativo y mediante su principal vía de perfeccionamiento que es el trabajo metodológico, se busquen alternativas que respondan a las exigencias fundamentales que demanda el modelo de formación cubano. Una vía que posibilita la formación en cualquiera de sus dimensiones es el Sistema de Tareas Docentes, las tareas docentes deben tener su estructura y la primera condición para la activación del pensamiento es el contacto del sujeto (estudiante) con el objeto (condiciones), donde se manifiesta la relación de la formación del profesional con su vínculo con la profesión.

Álvarez de Zayas (1999) declara que la tarea docente constituye la célula de la actividad conjunta profesor-estudiante y es la acción del profesor y los estudiantes dentro del proceso, que se realiza en ciertas circunstancias pedagógicas, con el fin de alcanzar un objetivo de carácter elemental de resolver el problema planteado a estudiar por el profesor, en los diferentes componentes en que se desarrolla el proceso de formación.

En esta definición queda explícita la idea de que la tarea docente es el eslabón más elemental del proceso docente educativo, que con la realización de la misma, se resuelve la contradicción entre lo conocido y lo desconocido por el estudiante, estando en posibilidad de desarrollar otras tareas del mismo orden, así como reflejar que en las de tipo docente se manifiestan todos los componentes y regularidades esenciales del proceso docente educativo, a partir de que constituye la célula de éste. Podemos plantear que dicho proceso se desarrolla de tarea docente en tarea docente, hasta que se alcance el objetivo, hasta que el estudiante se comporte del modo esperado. De esta forma el proceso referido en la Educación Superior se manifiesta por un sistema sucesivo de tareas docentes, que se desarrollan desde la primera actividad docente hasta el trabajo de diploma, a fin de alcanzar el objetivo propuesto.

Cualquier profesional debe ser gestor del conocimiento que precisa para su trabajo; sin embargo, entre las cuestiones menos atendidas en el proceso de formación de un profesional desde su proceso docente educativo y en específico el de la matemática para las carreras de ingeniería se encuentra la de su preparación con ese fin. Estudios realizados revelan que entre los retos que se le plantea a la Educación Superior en siglo XXI, está el rediseño de modelos pedagógicos y propuestas metodológicas que preparen a los alumnos en la gestión de los conocimientos de forma creativa, independiente y reflexiva.

Desarrollo

La dinámica del proceso docente educativo (Álvarez 1998, Fuentes, 1998 y Álvarez, 1999) se expresa en la lógica de su ejecución, a partir del objetivo como categoría rectora, el método como categoría que refleja el modo de desarrollar el proceso en su estructura interna y los contenidos. El cumplimiento de los objetivos se logra a partir de los métodos seleccionados para lograr lo instructivo, educativo y desarrollador (la formación del estudiante).

Para que el proceso docente educativo de la Matemática se represente como un proceso de gestión del conocimiento es preciso, desde la posición del autor, concebir la actividad matemática que desarrolla el estudiante en un contexto socio-cultural donde se gestionan fundamentalmente conocimientos entre los actores fundamentales y se incorpore como función esencial la obtención, generación, utilización y comunicación de dichos conocimientos, de manera que se integre a las funciones del proceso docente educativo de la Matemática.

La integración de conocimientos, habilidades y valores es importante y puede lograrse si se trabaja desde el proceso docente educativo de la Matemática por la formación y desarrollo de la *competencia gestionar el conocimiento matemático,* la cual a su vez favorecería el aprendizaje matemático, la educación en valores y el desarrollo integral del estudiante. Para ello se hace necesario declarar cómo se caracterizará en el presente trabajo la competencia gestionar el conocimiento para su formación y desarrollo.

Sampedro (2011) define la *competencia gestionar el conocimiento matemático* como: "el proceso, que permite obtener, procesar, operar y comunicar el conocimiento matemático de forma planificada, independiente, flexible, reflexiva y responsable, que se configura como síntesis dialéctica en la integración del saber, el saber hacer y el saber ser a partir de los recursos personológicos del sujeto".

También es necesario por sus particularidades, tener presente que el *conocimiento matemático* está formado por *los conceptos matemáticos, teoremas, axiomas, proposiciones y procedimientos, así como las relaciones entre ellos.* Este se caracteriza su carácter abstracto, se materializa en un lenguaje especifico, compuesto por elementos del lenguaje común y una terminología especial, que incluye los términos (objetos o conceptos) y proposiciones matemáticas (teoremas). Sus objetos son ideales y el estudiante opera con ellos a través de los diferentes registros de representación semiótica: el registro de la lengua común, el registro gráfico y el registro algebraico.

Es innegable que para gestionar el conocimiento matemático el estudiante necesita de conocimientos y habilidades generales relacionados con el proceso de gestión de conocimientos y un accionar independiente, flexible, reflexivo, autorregulado y responsable, sin lo cual no sería posible llevar a cabo el proceso, si se trabaja por la formación y desarrollo de habilidades desde lo general, el estudiante puede obtener información, localizarla, pero no llegar a operar con los conocimientos y desarrollar habilidades matemáticas.

En otras palabras, los conocimientos y habilidades para la gestión del conocimiento, se particularizan teniendo en cuenta las características que distinguen el conocimiento matemático, su carácter abstracto, su materialización a través de registros de representación, lo cual presupone desestimar la idea de que procesar el conocimiento matemático, como una actividad basada en la repetición de acciones o estrategias generales.

El propósito de este trabajo es proponer un *Sistema de Tareas Docentes* para "gestionar el conocimiento matemático" para estudiantes de las carreras de ingeniería, a través de las cuales los docentes pueden incorporar a su actuación pedagógica lo referido a la gestión del conocimiento matemático en el proceso docente educativo de la matemática, de manera que permita al estudiante enfrentar la resolución de problemas.

En el proceso docente educativo de la Matemática, la actividad matemática del alumno se orienta fundamentalmente a comprensión de conceptos, la resolución de ejercicios y problemas donde ponen de manifiesto acciones para analizar, generalizar, interpretar, argumentar, entre otras.

Lo esencial para comprender la particularidad de esta actividad desde la perspectiva del autor, está en la idea siguiente: para resolver un problema matemático, se necesita obtener la información que se relaciona con el problema, procesar la información, reflexionar, operar con el conocimiento, compartir opiniones, es decir, romper con la idea de que sea una actividad basada en la repetición de acciones o estrategias ya asimiladas, ello constituye un reto, pues el alumno se enfrenta a situaciones que lo deben llevar a gestionar conocimientos, construir estrategias, tomar decisiones, etc.

No obstante en la mayoría de las ocasiones los contenidos son presentados por el profesor sin exigirles a los alumnos aquellos procesos esenciales a la obtención del conocimiento donde se parta de una búsqueda desde diversas fuentes y conlleve a la interpretación, reflexión y evaluación de dicha información. Generalmente cuando el docente orienta al estudiante tareas de búsqueda y procesamiento de información lo hace a partir de la utilización de libros de textos, materiales en soporte digital o el uso de páginas Web; sin embargo no es usual la obtención de conocimientos proveniente de fuentes humanas (conocimiento tácito).

Según Sampedro, Rodríguez y Montes de Oca (2010), "para lograr que el estudiante gestione su propio conocimiento, se debe utilizar la tarea como la célula del proceso docente educativo, donde, bajo la dirección y orientación del profesor, el estudiante gestiona su propio conocimiento de una manera responsable, crítica y reflexiva para la solución de problemas".

En el Sistema de Tareas Docentes, cada tipo de tarea está diseñada para potenciar en el estudiante, en un mayor grado, la o las cualidades que por su función las identifican; sin negar su contribución al desarrollo de aquellas cualidades no menos importantes para el desarrollo de la "gestión del conocimiento matemático".

Para la tipificación de las tareas se tomó como referente la clasificación genérica que proponen los autores Sampedro, Rodríguez y Montes de Oca (2010) y en correspondencia con el propósito de la gestión del conocimiento se proponen los siguientes tipos:

- *Tareas para orientar, motivar y/o asegurar condiciones:* Su objetivo esencial es lograr la disposición positiva necesaria para gestionar el conocimiento matemático y contribuir al logro de la orientación valorativa hacia situaciones relacionadas con la carrera, con la vida, entre otras, donde se pongan de manifiesto determinados valores esenciales en la gestión del conocimiento matemático. Permiten localizar las fuentes de información, utilizar diversas estrategias e instrumentos de indagación, la recopilación de información, experiencias, vivencias, etc., para recuperar el conocimiento matemático.

- *Tareas para procesar el conocimiento matemático:* Permiten analizar, organizar y comparar los resultados del conocimiento matemático obtenido, en correspondencia con las necesidades de aprendizaje de los estudiantes, para lograr la comprensión de la información y de los conocimientos y dar respuesta a los retos del saber.

- *Tareas para operar con el conocimiento matemático:* Con ellas se pretende que los estudiantes desarrollen habilidades matemáticas y utilicen los conocimientos matemáticos obtenidos y procesados en la solución de problemas.

- *Tareas para comunicar el conocimiento matemático:* Su objetivo es lograr que los estudiantes realicen intercambios de ideas, pensamientos, opiniones y en general del conocimiento obtenido, de la información procesada y del proceso de operar con los conocimientos matemáticos obtenidos y procesados.

Las tareas deben cumplir los siguientes requisitos:

- ❖ Favorecer la indagación, la crítica, la reflexión, que propicien un aprendizaje integral. En estas se incluyen situaciones donde los estudiantes puedan hacer explícito los significados de términos y símbolos matemáticos, según el tratamiento desde diversas bibliografías y la variedad de registros semióticos utilizados en la actividad matemática.
- ❖ Propiciar el desarrollo de las habilidades relacionadas con la gestión del conocimiento matemático, pues el no desarrollo de alguna de estas (obtener, procesar, operar, comunicar) afecta la consistencia del sistema, pero permite al docente emitir criterios evaluativos e ir potenciando aquellas que tengan menor grado de desarrollo.
- ❖ Ser individuales o colectivas**,** promoviendo la reflexión y esfuerzo intelectual de cada alumno, a través de la interacción alumno-alumno, alumno-profesor, alumno-grupo en un ambiente comunicativo.

Ser evaluativas dada la concepción de la evaluación asumida por el autor como función del proceso, permitir al docente dar seguimiento a la formación y desarrollo de la competencia, teniendo en cuenta que las mismas no se reducen a pruebas de conocimiento. Pueden ser discusiones de diversas vías de soluciones de problemas, argumentación de posiciones acerca de una generalización realizada a partir de la obtención y procesamiento de información proveniente de diversas fuentes, etc, que permitan de manera integrada valorar el avance o no de los alumnos en el proceso.

El éxito de lo anteriormente expresado, estará muy vinculado al hecho de que exista la motivación constante del estudiantado hacia el objetivo de la actividad, lo cual deberá lograrse en los diferentes momentos de misma, la orientación, la ejecución y el control. El estudiante motivado, interesado, tendrá una disposición positiva por su realización, por alcanzar resultados y por tener éxito.

Ejemplificación de tareas en la asignatura Matemática I para las carreras de ingeniería.

- ❖ Utilizando la definición de continuidad y los teoremas relativos a las propiedades de las funciones continuas, calcule.

a) $\lim\limits_{x \to 1} (3x^2 - 2x + 3)$ b) $\lim\limits_{x \to \Pi} sen2x$

c) $\lim\limits_{x \to 0} (\frac{x^2 + 3x}{x^2 + 4} + 2\cos x)$

- Forma equipos de seis estudiantes y construye el grafico de una función $f(x)$, que satisfaga las siguientes condiciones.

a) $f(-1)=4, f(1)=1, f(5)=0$ b) $f(3)$ no está definida.

c) $f(x)$ es continua en los intervalos $[-1,1],[4,5]$

d) $\lim_{x\to 3^-} f(x)=+\infty, \lim_{x\to 3^+} f(x)=-\infty$

- Selecciona un estudiante de tu grupo, con buenos resultados alcanzados en matemática y teniendo en cuenta la definición y los teoremas relativos a la continuidad de funciones, resuelve el siguiente problema. Determina el valor de c, para que la función dada sea continua en $x_0=4$.

$$f(x)=\begin{cases} x^2-c^2\, para....x\langle 4 \\ cx+20\, para....x\geq 4 \end{cases}$$

- ¿Qué conocimientos matemáticos te permitieron resolver estros ejercicios?

Un estudiante en cada inciso expondrá sus resultados, mientras los demás y en ultima instancia el profesor, serán los encargados de valorar críticamente las respuestas dadas por sus compañeros. Se evaluará la participación individual de los estudiantes durante cada clase y el desarrollo del tema, haciendo una valoración crítica de las diferentes variantes de respuestas ofrecidas por los mismos.

Teniendo en cuenta lo estudiado en desarrollo del tema funciones continuas, los planteamientos de tu profesor y tus compañeros de clase.

- Redacta una versión final de los conocimientos matemáticos adquiridos por ti en el tema de funciones continuas.
- Escoge para la presentación ante tus compañeros una de las siguientes formas, oral, escrita, oral-escrita, grafica, etc.
- Expón en un tiempo no superior a los 10min los resultados por ti logrados, teniendo en cuenta los siguientes parámetros: lógica, coherencia, comprensibilidad y medios necesarios a emplear (ponencia, esquema, powertpoint) en dependencia al tipo de actividad y el local.

Para esa clase el profesor indicará a los estudiantes que trabajen colectivamente teniendo en cuenta la afinidad y los equipos designados realizarán su presentación. Al finalizar las presentaciones, los estudiantes de los equipos designados formularán preguntas al resto de los equipos. El profesor podrá intervenir ante las situaciones que considere necesarias.

El profesor evaluará la actividad de dos maneras. En primer lugar, ofrecerá una valoración cuantitativa a cada equipo, al finalizar la clase, según la calidad de la actividad asignada (exposición, claridad de ideas, vocabulario técnico y modo de presentación) así como también a las respuestas de los estudiantes.

Las tareas presentadas serán ejecutadas por los estudiantes tanto fuera como dentro del aula, de manera individual o por equipos y el objetivo es que a través de ellas se contribuya a la formación y desarrollo de la competencia gestionar el conocimiento matemático.

En todas las tareas, independientemente de la función específica que tienen en la clase, su realización exige la movilización por parte del alumno de los componentes cognitivos y recursos personales, integrando además el componente afectivo como condición necesaria para la ejecución. Con ellas se persigue como propósito que los modos de actuación lleguen a ser incorporados como estrategias personales que le permitan la gestión del conocimiento ante situaciones similares de la vida o profesionales.

Esta presentación de las tareas, rompe los esquemas de las clases anteriormente concebidas pasando a una concepción desarrolladora de la clase, donde el estudiante es el protagonista principal del proceso bajo la orientación del docente, además se rompe con la concepción de que sólo se aprende en el espacio concebido como salón de clases y con la presentación de los contenidos de forma acabada por parte de los docentes.

Esta propuesta de Sistema de Tareas Docentes para gestionar el conocimiento matemático desde la dinámica del proceso docente educativo de la Matemática para las carreras de ingeniería, propone como esencia el cambio, dar el necesario valor al conocimiento en la época actual, con un valor agregado dado por la educación en valores, esenciales para la gestión del conocimiento matemático.

Conclusiones

La gestión del conocimiento matemático es un proceso que tiene como función: obtener, procesar, evaluar, generar, utilizar y comunicar conocimientos de forma consciente y planificada. Su valor está en los modos en que se asimila y en última instancia, para resolver problemas y generar a partir de allí nuevo conocimiento. Se reconoce la necesidad de realizar propuestas fundamentadas que tengan en cuenta, desde el proceso docente educativo de la matemática la necesidad de obtener información, procesarla, comunicarla y utilizarla con efectividad desde la actividad de resolver problemas. A través del sistema de tareas el estudiante se prepara de una forma mas independientemente, gestionando su propio conocimiento de una manera responsable, crítica y reflexiva para la solución de problemas. Además la gestión de los conocimientos le permite el desarrollo de habilidades y la formación de valores, imprescindibles para cumplir con los objetivos del proceso docente educativo. El sistema de tareas propuesto constituye una valiosa herramienta de trabajo para profesores y estudiante.

Referencias bibliográficas

Álvarez de Zayas C. (1998). *La escuela en la vida*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Álvarez de Zayas, C. (1999). *Fundamentos teóricos de la dirección del proceso de formación del Profesional del perfil amplio*. Tesis de Doctorado no publicada. Universidad de la Habana. Ciudad Habana

Álvarez, I. (1999). *Modelo de la dinámica del proceso docente educativo de la educación superior*. Tesis de Doctorado no publicada. Universidad de Oriente. Santiago de Cuba.

Fuentes, H. (1998). Dinámica del proceso docente educativo en la educación superior. *Revista Pedagogía Universitaria 13*(2), 32-40.

Horrutinier, P. (2006). La Universidad Cubana: El Modelo De Formación. *Revista Pedagogía Universitaria* Vol. XII No. 4; 34-39.

Sampedro, R (2011). *Estrategia didáctica para favorecer la formación y desarrollo de la competencia gestionar el conocimiento matemático desde la dinámica del proceso docente educativo de la matemática para los alumnos de las carreras de ingeniería.* Tesis de Doctorado no publicada. Centro de Estudios para la Educación Superior de la Universidad de Camagüey. Camagüey.

Sampedro, R; Rodríguez, M y Montes de Oca, N. (2010). *Sistema de tareas para favorecer la formación y desarrollo de la competencia gestionar el conocimiento matemático en los estudiantes de Ingeniería*. Recuperado el 2 abril de 2010 de http://www.sociedadelainformacion.com.

Sampedro, R.; Rodríguez, M. y Montes de Oca, N. (2010). La formación y desarrollo de la competencia gestionar el conocimiento matemático en los estudiantes de ingeniería a través de un sistema de tareas docentes. *Revista Pedagogía Universitaria 16* (1), 25-30.

NÚMERO EMBERA-NÚMERÓ MAYA, UNA EXPERIENCIA DE AULA

Oscar Fernández Sánchez
Universidad Tecnológica de Pereira Colombia
oscarf@utp.edu.co

Resumen. En este trabajo se muestra el desarrollo de una propuesta de enseñanza sobre pensamiento numérico con estudiantes indígenas Embera-Chamí de Risaralda, Colombia. Esta cultura es ancestralmente oral, por lo que se dificulta trabajar con la grafía del sistema decimal usado por la cultura de Occidente, que es una cultura con escritura. Se hizo un acercamiento a través de elementos del sistema numérico de la cultura Maya-K'iché de Guatemala, el cual tiene una base metafórica sobre su mitología sagrada, y se identifica con la cosmovisión de la cultura Embera en varios aspectos.

Palabras clave: pensamiento numérico, numerales maya, cosmovisión

Abstract. This paper shows the development of a proposal for teaching numerical thinking with Embera-Chami indigenous students of Risaralda, Colombia. This culture is ancestrally oral, so it is difficult to work with the spelling of the decimal system used by Western culture that is a writing culture. It was an approach through numerical elements of the Maya-K'iche culture of Guatemala, which has a metaphorical basis over their sacred mythology, and is identified with the Cosmovision of the Embera culture in several aspects.

Key words: numerical thinking, mayan numerals, cosmovision

Introducción

Se muestra el resultado de una experiencia de aula con estudiantes (docentes) indígenas de la cultura Embera-Chamí ubicados en un resguardo cerca del municipio de Mistrató, en el departamento de Risaralda. Son estudiantes de la Licenciatura en Etnoeducación, de la Universidad Tecnológica de Pereira, con sede en el CERES (Centro Regional de Educación Superior) de ese municipio, que por su rendimiento académico como estudiantes de secundaria el Ministerio de Educación Nacional los contrata como docentes en escuelas ubicadas al interior del resguardo indígena al cual pertenecen. La experiencia se desarrolló en 40 horas distribuidas en sesiones de 10 horas durante cuatro fines de semana, cuatro horas los viernes y seis los sábados.

Estos estudiantes pertenecen a una cultura tradicionalmente oral, y con un pensamiento numérico, ligado a una cosmovisión de una cultura con unas características ancestrales muy distintas a la cultura escrita de "Occidente", es decir, la cultura impuesta por los pueblos Indoeuropeos. Ese producto del cual hacen parte las personas que viven en las ciudades y usamos el sistema numérico decimal.

La cosmovisión del pueblo Embera presenta muchas similitudes con la cosmovisión de la cultura Maya-Quiché de Guatemala. Por ejemplo, la cultura Embera concibe el universo compuesto por tres mundos: el mundo de arriba habitado por las divinidades y por espíritus buenos, es adonde se van las almas que han logrado una buena muerte, el mundo de en medio, donde viven los Embera y el mundo de abajo habitado por los espíritus de las enfermedades y de la mala muerte. Estos tres mundos están comunicados por el árbol de la macana, árbol sagrado cuya madera es usada para construir el bastón sagrado de los *jaibanás*. En este bastón el jaibaná tiene prisioneros a diversos espíritus, a los cuales después de muchos años de entrenamiento iniciático logra dominar para curar enfermedades o para hacer maleficio a distancia a posibles enemigos (Losonczy, 2006). Por otro lado la cultura Maya-Quiché también concibe el universo compuesto por tres mundos, el mundo de arriba, habitado por *Huracán del Cielo*, el creador del universo y del hombre maya, por los diversos dioses que rigen la vida del pueblo maya, el mundo de en medio donde habitan los mayas y el inframundo o *Xibalba* donde habitan los espíritus de las enfermedades y de las almas de aquellos que murieron y no merecen pasar al mundo superior (Matul y Cabrera, 2007).

Con la población de estudiantes indígenas en cuestión, existía un antecedente en su relación con profesores que habían intentado desarrollar un proceso de enseñanza de contenidos matemáticos de la cultura de Occidente. Esos procesos no habían sido exitosos. En el primer dialogo con los estudiantes, manifiestan el deseo de saber de qué manera pueden ellos como docentes, en las escuelas de su comunidad, con sus niños estudiantes Embera, desarrollar pensamiento numérico de una manera cercana a su cotidianidad y con elementos que se identifiquen de alguna manera con sus creencias y su entorno.

El pensamiento numérico de los Mayas se caracteriza por ser holístico, cíclico, referencial y espiritual; características que se vislumbran de su estrecha relación con sus creencias sagradas, con la forma de concebir y medir el tiempo, con su concepción del mundo como espacio habitado por sus gentes, sus divinidades, los animales y las plantas (Matul y Cabrera, 2007).

Para el desarrollo de la propuesta se tuvo en cuenta los aportes de la concepción constructivista que aparece en (Cubero, 2005), como el hecho que los estudiantes Embera son agentes activos en la construcción de su conocimiento y que la construcción del conocimiento didáctico para la enseñanza de un sistema numérico se hace mediante el trabajo colaborativo de grupo (grupos de cuatro estudiantes) y luego con la socialización frente a toda la clase, situados en el contexto maya primero (para ilustrar el origen de dicho sistema numérico) y luego con una contextualización cultural de dicho sistema numérico en la cosmovisión Embera. Se hizo de esta manera en vista del hecho que tienen expresiones orales solo para los números enteros de uno a cuarenta y nueve.

Contenido

Elementos básicos del sistema numérico maya.

En América Central, más exactamente en la región de Mesoamérica, mil años antes de Cristo, en el seno de la cultura Maya nace el cero tanto conceptualmente, como simbólicamente (Matul y Cabrera, 2007). La matemática maya es altamente expresiva, pues para hacer las representaciones numéricas se usaron, conchas de caracol, puntos, rayas, que constituyen las formas básicas de representación. También se utilizaron figuras en forma de cabezas humanas, o cuerpos humanos completos (Matul y Cabrera, 2007).

> El punto se utilizó para representar simbólicamente de una a cuatro unidades, se escriben de manera horizontal o vertical. Cada punto en línea representa una unidad adicional. Por ejemplo dos puntos colineales, vertical u horizontalmente, simbolizan dos unidades. Los puntos se utilizan hasta el cuatro, pues para representar cinco unidades, se usa una raya horizontal o vertical. Tres rayas una encima de otra dos a dos, en forma paralela y un punto encima de ellas simboliza dieciséis unidades. El más significativo de los tres, el óvalo para representar el cero, se puede decir que es uno de los descubrimientos más significativos en el campo de la matemática maya, y cabe decir que una de las mayores abstracciones que aporta el intelecto maya a la humanidad (Matul y Cabrera, 2007, p. 205).

Estos símbolos, el punto, la raya y el óvalo son los más simples. Ellos fueron usados para construir otros símbolos numéricos más complejos llamados *glifos* que constituyen la escritura maya consignada en los llamados códices (ver Figura 1). Estos códices estaban hechos de papel amate el cual era tratado con una mezcla de cal, y tenían forma alargada para ser doblado en forma de acordeón, luego se cubría con piel de jaguar.

Se considera que lo que se desea representar con la figura de semilla para el concepto de cero, es el sentido del nacimiento de la vida. Se puede leer en el *Pop Wuj*:

Figura 1. Página 44 del Códice de Dresde

> Y dijeron Huracán, *Tepeu* y *Gucumatz* cuando le hablaron al agorero, al formador, que son los adivinos: -Hay que reunirse y encontrar los medios para que el hombre que formemos, el hombre que vamos a crear nos sostenga y alimente, nos invoque y se acuerde de nosotros. […] Y al instante fueron hechos los muñecos labrados en madera. Se parecían al hombre, hablaban como el hombre y poblaron la superficie de la tierra". Anónimo, 1997, p. 20).

(Fahsen y Matul, 2007, p. 94)

"Debe quedar claro que el cero enseña que hay una categoría que está llena (no vacía como en la cultura occidental) y sobre esta categoría como base se construye una nueva entidad, pero sin destruir lo anterior" (Matul y Cabrera, 2007, p. 229). Para el maya, una pareja de una mujer y un hombre, unidos como pareja, son un cero básico sobre el cual se construye una familia, son un cero que expresa: "*todo está completo, todo está en equilibrio*" (Matul y Cabrera, 2007, p. 255).

En cuanto al punto con el cual se representa una unidad, este representa una semilla de maíz o de fríjol. El punto como representación de una semilla de maíz, representaba el mundo subterráneo, el inframundo o *Xibalba*. Se tarda cinco días para que brote de la semilla sembrada una nueva planta que saldrá a la superficie de la tierra, por lo que la barra que representa al cinco es la representación de la Tierra como planeta. El cero representa a los cielos. Tres símbolos matemáticos para los tres niveles ceremoniales: Xibalba o el inframundo, la Tierra y el Cielo, tres mundos que se comunicaban a través del árbol Ceiba, su árbol sagrado; tres categorías que iban en orden ascendente, de abajo hacia arriba, y esta conceptualización es atendida por la matemática maya para su escritura en los códices y estelas (Matul y Cabrera, 2007).

Los mayas desarrollaron el sistema vigesimal de numeración, el cual surgió como una necesidad, y para entender su origen dentro de la matemática de esta cultura, es necesario acudir a la lingüística. "En lengua *Maya-K'iché*, para referirse a veinte unidades, se escribe *Hun Uinic*, en *maya-yucateco*, se escribe *Hun Winic*, y en las dos lenguas se usa además esta expresión para referirse a "un ser humano"" (Matul y Cabrera, 2007, p. 254).

> Las direcciones básicas del cosmos son cuatro, al igual que el número de extremidades del ser humano; el centro más las cuatro direcciones da el cinco, y cinco son los dedos en la mano del ser humano, por cuatro extremidades, resulta el veinte, como el número cabalístico que constituye una unidad humana. La pareja, mujer y hombre se unen en un veinte entrelazado y amoroso del cual surge un nuevo ser humano, que representa un nuevo veinte, una nueva categoría matemática, llena de esperanza que le aportará bien a la humanidad y para la gloria de las energías cósmicas (Matul y Cabrera, 2007, p. 255).

Importancia del lenguaje en la construcción de significados

En muchos autores es reiterativa la mención al protagonismo del lenguaje dentro del socioconstructivismo, un hecho fundamental en el periodo llamado ZDP, una construcción fruto del uso del lenguaje, o tal vez, que se produce a través del lenguaje. Por ejemplo, en

(Serna, 2007) se afirma que para Vygotsky, *"el pensamiento no se expresa simplemente en palabras, sino que existe a través de ellas"* (Vygotski, 1995, p.166, cita del profesor Julián, en Serna, 2007) o esta otra: "la teoría de Vygotsky considera que el uso creativo del lenguaje es una realización humana que se basa en la actividad mental de carácter intencional" (UIS, 2010, p. 2). El lenguaje oral y escrito determina el pensamiento según afirma Vygotski, "la utilización de instrumentos lingüísticos como el lenguaje y la escritura determinan la reconfiguración del pensamiento hasta llegar a niveles de abstracción" (UIS, 2010, p. 6).

Desarrollo de la experiencia de aula

Materiales: Para el desarrollo de la experiencia se utilizaron: Una libra de fríjol "bola negra". Se escogió este tipo de fríjol por su tamaño y color, palillos de madera de 5 cm., conchas de molusco, papel periódico, marcadores de colores, borrables y no borrables.

Temática desarrollada: Se seleccionaron temas de la bibliografía relacionados con la matemática Maya y con la geometría Guahibo-Sikuani, con el objetivo de hacer un acercamiento a la etnomatemática de la cultura Embera-Chamí desde el marco teórico de la etnomatemática (D'Ambrosio, 1987).

Metodología

- Presentación de los temas a la población de estudiantes.
- Lectura y análisis en clase de algunos temas que aparecen en textos de la bibliografía.
- Presentación de la película "Apocalipto", del director Mel Gibson, la cual trata sobre los conflictos constantes entre comunidades mayas y como las tribus fuertes que vivían en grandes metrópolis, tomaban cautivos a miembros hombres de tribus débiles que vivían en caseríos en medio de la selva. Estos prisioneros eran utilizados para hacer sacrificios que calmaran el enojo de su deidad, quien había enviado enfermedad a la población y sequía a sus cultivos de maíz. En la película se pueden ver las expresiones artísticas en las joyas que usaban, la combinación y formas de sus atuendos, de los sacerdotes, de los reyes y de los guerreros, así mismo en la arquitectura de sus templos.
- Presentación del video: "La historia del Uno" donde se puede apreciar cómo las diferentes culturas se han visto en la necesidad de crear formas de relacionarse y de crear su cosmovisión, a través de la creación de un sistema numérico con el cual dar explicación al Cosmos.

- Presentación del documental: "Aborigen. Todas las voces" (CIU-UTP, 2011), el cual es una breve narración sobre aspectos más sobresalientes de la comunidad indígena Embera–Chamí de Risaralda.
- Desarrollo de temáticas del pensamiento numérico de la comunidad Maya-Quiché de Guatemala y del pensamiento geométrico de la comunidad Guahibo-Sikuani del Vaupés.
- Elaboración de materiales culturales propios de la cultura Embera-Chamí, como manillas, ventiadoras y borosukas, donde se evidencie el pensamiento geométrico de esta cultura con una socialización del mismo.
- El trabajo en pensamiento métrico se desarrolla con actividades en la huerta de la "casa indígena", para ser socializadas, usando la metodología de *resolución de problemas*, muy utilizada en Educación Matemática.

Numeración Embera a través de numeración Maya

En la experiencia con los estudiantes Embera, se evidenció como ellos logran construir conjuntamente con el profesor o con los compañeros indígenas en la clase, el conocimiento sobre los símbolos básicos que inventaron los mayas para los números enteros, la forma como ellos crearon cada uno de dichos símbolos y las maneras de operar con éstos; lograron al final de la experiencia apropiar la representación y su significado en la mitología maya, al punto que se motivaron a confrontarla con sus propias formas de representación numérica (ver figura 2). De igual manera lograron apropiar las operaciones básicas con números mayas.

Se evidenció también las relaciones que conforman el triángulo didáctico, como un camino de relaciones sociales entre los principales integrantes del proceso educativo, los estudiantes se relacionan entre ellos en lenguaje Embera y en ocasiones en español, los estudiantes con el profesor, cuando este último narra aspectos de la mitología religiosa desde donde los mayas constituyeron la simbología con la cual representaban las cantidades; el profesor con otros profesores, representado por el diálogo del docente con las profesoras Martha Izquierdo, Olga Lucia Bedoya y Cecilia Luca, de manera directa y el profesor Hilbert Blanco a través de Internet, quienes brindaron su visión desde la lingüística y la antropología, con documentos que son resultado de investigaciones sobre el simbolismo de grupos indígenas, como los Guahibos-Sikuani del Vaupés (Ortiz, 1988).

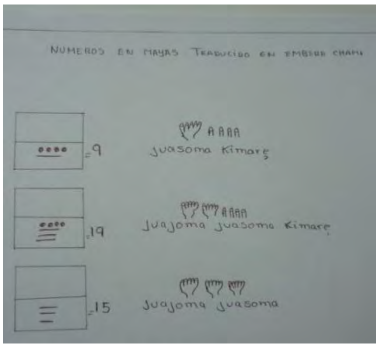


Figura 2. Trabajo de un indígena Embera representando varias cantidades en numeración maya y en numeración Embera

Para las actividades, se hace una simulación de la situación "real" del indígena maya en plena acción representando cantidades mediante los símbolos creados por su cultura. Para esta simulación se usan marcadores, granos de frijoles, papel y pequeños palos. El dialogo constante entre los estudiantes durante el periodo de ZDP, permite una construcción de significados, que en realidad es una reconstrucción a través de la atribución de sentidos por parte de los estudiantes Embera a toda la simbología del sistema numérico maya.

Conclusión

En esta experiencia de aula se evidenciaron factores característicos de las teoría socioconstructivista como son las zonas de desarrollo, sobre todo la ZDP, clave en la construcción del conocimiento de los numerales y las operaciones numéricas básicas, propias de una cultura indígena como la Maya, con un conocimiento matemático tan rico en matices mitológicos, estrechamente relacionado con la cosmovisión del pueblo Maya. Así mismo, se acompañó a los estudiantes en un recorrido por el conocimiento geométrico del pueblo indígena Guahibo-Sikuani, representado en el arte que se dibuja en sus obras de cestería. Se logró llevar al grupo de estudiantes indígenas Embera, de un rechazo inicial hacia las enseñanzas del conocimiento de la cultura occidental, a un estado de aceptación y de motivación para conocer y asimilar la matemática y la geometría de culturas indígenas hermanas, dada la similitud que existe en muchos aspectos de su cosmovisión. Esta situación se presentó a través de una metodología que lleva al estudiante a vivenciar en todo momento situaciones problémicas de su cotidianidad que se pueden resolver con el conocimiento matemático de una cultura indígena hermana que se les ofrece y que se reivindica al ser estudiado por las gentes del pueblo Embera, se vive el conocimiento como un "trueque", reivindicación y reconocimiento histórico, por posibilidad de resolver problemas de la casa, de negociación con el occidental en el mercado del pueblo, en la huerta.

En segunda instancia, se logró que los estudiantes integraran a su conocimiento numérico tradicional, el conocimiento del sistema numérico de la cultura Maya (ver figura 2), aunque a ellos todavía se les dificulta el manejo de números negativos y de números mayores que cuarenta y nueve, pues la cultura Embera es oral, a diferencia de la cultura Maya que es escrita. La integración con el conocimiento geométrico del pueblo Guahibo-Sikuani fue más estrecha, dado que la mitología que envuelve las expresiones artísticas de la cestería de este pueblo es equiparable a la expresividad geométrica artesanal del pueblo Embera, lo cual se pudo evidenciar con los trabajos que los estudiantes expusieron al final de la experiencia de aula.

Referencias bibliográficas

Anónimo. (1997). *Popol Vuh, Antiguas historias del Quiché de Guatemala.* Bogotá: Panamericana Editorial.

CIU-UTP. (2011). *Memorias del acto de Posición del Cabildo Indígena Universitario de la Universidad Tecnológica de Pereira*. *CIU-UTP*. Pereira: Universidad Tecnológica de Pereira.

Cubero, R. (2005). Elementos básicos para un constructivismo social. *Avances en Psicología Latinoamericana 23,* 43 – 61

D'Ambrosio, U. (1987). Etnomatemáticas: ¿Qué podrán ser? Una recapitulación y reconsideración. En *Boletín del Grupo Internacional de Estudios sobre Etnomatemática (ISGEm)*. 3 (1). Recuperado el 25 de febrero de 2011 de http://vello.sites.uol.com.br/ubi.htm

Fahsen, F. y Matul, D. (2007). *Los Códices de Dresde, París y Grolier.* Guatemala: Liga Maya de Guatemala y Amanuense Editorial.

Losonczy, A. (2006). *Viaje y violencia. La paradoja chamánica embera.* Bogotá: Editorial Universidad Externado de Colombia.

Matul, D. y Cabrera, E. (2007). *La Cosmovisión Maya. (I y II).* Ciudad de Guatemala: Liga Maya de Guatemala.

Ortiz, F. (1988). El simbolismo de la cestería sikuani. En *Boletín del Museo del Oro. Biblioteca virtual Luis Ángel Arango del Banco de la República,* 21. Recuperado el 20 de febrero de 2011 de: http://www.lablaa.org/ blaavirtual/credencial/enero1990/enero1.htm

UIS, Revista Docencia Universitaria. (2010). *Conceptualización del desarrollo según Piaget y Vygotski.* 7 (1), 1-8.

Serna A., J. (2007). *Ontologías alternativas. Aperturas de mundo desde el giro lingüístico*. Barcelona: Anthropos y Universidad Tecnológica de Pereira.

Vygotsky, L. (1995). *Pensamiento y lenguaje.* Trad. de Pedro Tosaus Abadía. Barcelona: Paidós.

COOPERATIVISMO ESCOLAR. PROPUESTAS DIDÁCTICAS EN EL CONTEXTO DE LA EDUCACIÓN COOPERATIVA

Patricia Eva Bozzano
Universidad Nacional de La Plata, Liceo Víctor Mercante Argentina
pateboz@yahoo.com.ar

Resumen. El Modelo Curricular de la República Argentina incluye como uno de sus objetivos prácticas cooperativas en la Educación Secundaria. El presente trabajo desarrolla un proyecto para dar lugar a la estimulación de las habilidades interpersonales a través de actividades para la clase de Matemática correspondiente a la etapa de formalización de estructuras conceptuales-procedimentales, apoyadas en los Pilares del Cooperativismo, con una concepción de Educación para la Libertad, la Justicia y la Solidaridad.

Palabras clave: prácticas cooperativas en la clase de matemáticas

Abstract. The curricular Model for Argentina includes cooperative practices as one of the most important objectives within high school programs. This contribution shows a project to give space for the interpersonal stimulation skills through Mathematics classes within the span of the development of conceptual structures. They are explained by the pillars of cooperativism within a label of Freedom, Justice and Solidarity.

Key words: cooperative practices into mathematics lessons

Introducción

En la formulación de propuestas hacia un cambio en los métodos tradicionales para las clases de matemáticas, en los cuales históricamente prevalece el individualismo y las actividades competitivas (Johnson y Johnson, 1985), se da lugar a un método de trabajo habitual en algunos grupos sociales, escogido para llevar a cabo sus actividades tanto de producción como de comercialización: el cooperativismo.

La lógica del cooperativismo se funda en la reciprocidad, la solidaridad, la autonomía, la participación democrática, la preocupación por la comunidad, etc. (Idelcoop, 2009). Una clase de Matemática en un contexto de cooperación, bien puede ser el camino hacia la formación de personas con pensar crítico, de actuar responsable y capaces de emitir juicios reflexivos (Moreira, 2009).

Bajo el enfoque de la Pedagogía de la Cooperación, los distintos procesos de Enseñanza-Aprendizaje responden al Constructivismo, donde a partir de representaciones previas, el aprendizaje es el resultado de procesos de construcción y reconstrucción dando lugar a los cambios que sufren las estructuras cognitivas (Gagné, 1985).

Valores de la cooperación: (Johnson, Johnson, Johnson Holubec, 1999)

Compañerismo	Solidaridad	Respeto	Generosidad	Igualdad	Preocupación por los demás

En el caso de prácticas cooperativas como estrategias planificadas para los procesos de Enseñanza- Aprendizaje, es fundamental pensar las mismas en torno a los valores propuestos para la cooperación, en un clima de respeto, valorando los esfuerzos y la participación, aunque surjan dificultades y en ocasiones los resultados no sean los esperados (García Pastor, 2003).

Tales prácticas tienen como eje el logro de los niveles esperados en el desarrollo cognitivo de todos y cada uno de los integrantes del grupo de trabajo.

A partir de estos valores y principios, surge un proyecto de investigación como respuesta a ciertas problemáticas planteadas en torno al pobre desempeño y al bajo nivel de logros esperados en las competencias lógico-matemáticas, en busca de posibles soluciones.

Metodología

La metodología del proyecto de investigación, responde al enfoque cualitativo, a partir de un Plan de Exploración mediante la observación de la "realidad del mundo" que es la clase de Matemática. Mediante trabajo de campo, recolectando y analizando simultáneamente los datos generados en la observación con participación activa, surge el marco muestral. Así el diseño longitudinal tiene como unidad de análisis a los alumnos del nivel medio, tanto de Escuelas públicas y de gestión privada de la provincia de Buenos Aires, como un colegio pre-universitario. Por responder al enfoque cualitativo de investigación, el plan de exploración genera hipótesis y el correspondiente marco para la puesta en práctica de actividades bajo el enfoque de la Educación Cooperativa.

Hipótesis

La realización de actividades bajo el encuadre de la educación cooperativa, resulta positiva para alcanzar el nivel de aprendizaje esperado en Matemática.

Objetivo

Que los estudiantes logren alcanzar el nivel de aprendizaje esperado en algún contenido de la asignatura Matemática, mediante la realización de actividades con tinte de Educación

Cooperativa, en la etapa correspondiente a la formalización de estructuras conceptuales-

Procedimentales.

Marco teórico

El Modelo Curricular de la República Argentina incluye como uno de sus objetivos prácticas cooperativas en la Educación Secundaria (11-18 años).

> ARTÍCULO 30.- La Educación Secundaria en todas sus modalidades y orientaciones tiene la finalidad de habilitar a los/las adolescentes y jóvenes para el ejercicio pleno de la ciudadanía, para el trabajo y para la continuación de estudios.
>
> Son sus objetivos:
>
> a) Brindar una formación ética que permita a los/as estudiantes desempeñarse como sujetos conscientes de sus derechos y obligaciones, que practican el pluralismo, la cooperación y la solidaridad, que respetan los derechos humanos, rechazan todo tipo de discriminación, se preparan para el ejercicio de la ciudadanía democrática y preservan el patrimonio natural y cultural.
>
> c) Desarrollar y consolidar en cada estudiante las capacidades de estudio, aprendizaje e investigación, de trabajo individual y en equipo, de esfuerzo, iniciativa y responsabilidad, como condiciones necesarias para el acceso al mundo laboral, los estudios superiores y la educación a lo largo de toda la vida.(Ley de Educación Nacional Nº 26206, 2006, Capítulo IV)

Tanto docentes como estudiantes necesitan aceptar nuevas ideas, nuevos hábitos de pensamiento, nuevos escenarios en las prácticas educativas; por tal motivo se plantea el objetivo.

Así, la práctica docente debe alentar al aprendizaje cooperativo, en una atmósfera de respeto, solidaridad, democracia, donde se valoren los esfuerzos y la participación (Gallo, 2008).

Justificación

Considerando de vital importancia generar aprendizajes significativos (Ballester Vallori, 2002), en donde el estudiante emplea recursos cognitivos para la construcción de significados, su retención y su transferencia, el docente debe cumplir el rol de creador de situaciones didácticas en las que favorezca tal construcción y el uso de tales recursos.

Respondiendo a la programación del proceso de Enseñanza-aprendizaje, haciendo referencia a la naturaleza compleja del proceso, expresando el propósito y caracterizando, cada una de las etapas, se pretende aplicar principios de aprendizaje y prescripciones de enseñanza, a la formulación de actividades de E-A para la formalización de estructuras conceptuales o procedimentales, completando estructuras en todas ellas (Bruner, 1965).

Como orientación para el desarrollo de distintas actividades en el marco del cooperativismo escolar, es menester organizar y esquematizar sus prescripciones, identificando los procesos de aprendizaje, la correspondiente función de la enseñanza y la orientación para el docente:

Proceso	Función de la enseñanza	Orientación para el docente
Interesar	Interesar por organizar y esquematizar la información.	Volver sobre la situación desequilibrante inicial, y enfrentar al alumno con el bloqueo, ante la imposibilidad de dar una respuesta o solución directa, y fácilmente comprensible
Recuperar	Guiar la recuperación de las capacidades adquiridas en la etapa anterior (aprendizajes pre-requeridos)	Dar ocasión para repasar los materiales. Provocar un diálogo abierto (debate), que posibilite superar el bloqueo y deje fluir el conocimiento previo.
Dirigir Atención	Dirigir atención a: a) Los conceptos estructurales y sus vínculos (estructura conceptual). b) Los procedimientos estructurales y su secuencia (estructura procedimental).	Dar ocasión para el análisis de los esquemas, elaborados para retener la información, durante las codificaciones de los aprendizajes pre-requeridos. Guiar la identificación de los elementos estructurales, reiterados y registrados, durante el debate
Codificación y retención	Guiar la elaboración de la estructura conceptual o procedimental correspondiente al objetivo de la unidad, y fijarla en un esquema (Uso de metacognición y de redes conceptuales o diagramas de flujo).	1. Guiar la metacognición de la estructura inicial del alumno, y su expresión en una red o diagrama. 2. Guiar la aproximación a la estructura de experto, por reelaboración de la propia, expresándolo en sucesivas redes o diagramas. 3. Presentar la estructura de experto al final, y como superadora de las limitaciones previas, promoviendo en todo momento su aceptación intelectual y volitiva.
Transferencia	Dar ocasión para: a) Aplicar la estructura conceptual a diferentes desarrollos b) Aplicar la estructura procedimental a diferentes contextos	a) Dar ocasión para elaborar respuestas a preguntas integradoras, a partir de la estructura conceptual. b) Dar ocasión para el planteo y la solución de problemas, usando la estructura procedimental
Desempeño	Verificar si el alumno, logró o no el objetivo final esperado.	Presentar al alumno un nuevo problema. (Podría reservarse para esta ocasión la situación conflictiva inicial. Otra posibilidad podría haber sido presentarla como una actividad de transferencia).
Realimenta-ción y fortaleci-miento	Brindar realimentación, fortaleciendo el interés, por la continuidad del proceso.	Validar el resultado y el proceso por el cual se llegó al mismo. (Se supone que en el proceso por meta-cognición el alumno pone de manifiesto la estructura conceptual o procedimental). (Rampazzi, 2009)

Plan de trabajo

1) Estudio de campo de los problemas planteados en vista del bajo nivel de rendimiento en Matemática durante los últimos períodos, estadísticas provistas por Dirección y Secretaría Académica de la Escuela.

Exploración mediante entrevistas informal a alumnos y reuniones con los docentes, observaciones en los procesos y resultados obtenidos en las clases de Matemática.

2) Plan de exploración con la correspondiente propuesta y acción, llevando a cabo un cambio en los métodos habituales de llevar adelante las clases. En lo referente, tanto en la disposición de los bancos; en la legitimización de la participación de todos los actores en los procesos de enseñanza-aprendizaje (Cadoche, 2006); y en las herramientas utilizadas para dar ocasión al gusto por hacer matemática.

Promover el trabajo en grupo con distribución de tareas y recompensas en forma equitativa e igualitaria; fomentar el respeto, la cordialidad, la solidaridad, colaboración, responsabilidad conjunta y la cooperación (Johnson, et al, 1999); como formas indispensables en el quehacer escolar que conduce al objetivo único que reúne el grupo de trabajo en su totalidad: *alcanzar el nivel esperado de logros en la asignatura* (Chadwick, 1987).

3) Explicitación y comunicación de las exigencias para docentes y alumnos.

→ Docentes:

El docente deber tener en cuenta el funcionamiento del cerebro del adolescente y mediante actividades motivadoras para captar su atención, lograr un proceso de abstracción en el alumno que le permitir la autonomía en la comprensión y manejo de conceptos y procedimientos matemáticos, para adaptarse a un mundo de constante cambio (Kaufman, 1973). La tarea consiste en encontrar las capacidades intermedias e identificar las capacidades cerebrales innatas lo cual se reduce a descomponer o segmentar los conocimientos más complejos durante la planificación docente. Esto sólo se logra mediante la jerarquía de aprendizajes o de conocimientos ordenadores de conocimiento (Bosch, 1991).

→ Alumnos:

Organización democrática del trabajo, trabajando cooperativamente, en una atmósfera de respeto, solidaridad, democracia, valorando los esfuerzos y la participación, comunicación de ideas a través del reconocimiento de la propia metacognición, con el uso de *"fábulas metafóricas"* (denominación de la forma observada en que se comunican los estudiantes procedimientos y conceptos), como herramientas del lenguaje usado en la comunicación.

Modalidad y secuencia de actividades

1. Organización y esquematización de la información: Se dispone el armado de grupos. Se destaca que todos son parte importante (integración y pertenencia) y poseen las mismas

posibilidades y capacidades. Se propone una consigna que funciona como disparador y se da un tiempo para resolverla.

2. Recuperación de los aprendizajes pre requeridos. Transferencia: Se consensuan resultados (en forma democrática). Se invita a todos aquellos que creen haber logrado el objetivo a compartirlo con los que aún no lo han hecho, como una forma para el desarrollo de habilidades interpersonales. (Amstrong, 1999)
3. Codificación y retención: Se abre la puerta a dos aspectos importantes del aprendizaje de las matemáticas:
   a. La necesidad de manejar el lenguaje matemático como medio para acceder al conocimiento matemático;
   b. El alumno percibe que puede aprender de sus compañeros y valora su propio aprendizaje, en la medida que es facilitador del de otros.

Ventajas

Los alumnos se acercan a la forma de trabajar de los científicos.

El trabajo en grupo con prácticas cooperativas puede resultar una referencia para su vida futura, permite escapar a la rutina y hace el aprendizaje más ameno.

Dificultades

Diferencias internas por la diversidad de capacidades y habilidades, y su nivel de desarrollo.

Factor ruido. Se producen diálogos y hasta discusiones que aumentan notablemente el nivel de ruido del aula.

Resultados observados

Se destaca el uso de un lenguaje común entre pares para comunicar eficientemente conceptos y procesos. Asimismo se observaron interacciones con respeto, generosidad y compañerismo. La metodología resultó conducente a la autonomía en la comprensión y manejo de conceptos y procedimientos matemáticos. En particular, fue sorpresiva la iniciativa tomada por dos estudiantes, los cuales organizaron el trabajo de todos los integrantes del grupo, decidieron efectuar el desarrollo reversible. Mientras que sus compañeros desarrollaban la expresión seleccionada al azar, ellos factorizaban cada expresión “sospechosa” de ser la correcta de las que se encontraban en su tarjeta. Y viceversa, de acuerdo al requerimiento que presentaba la expresión sorteada.

Actividad propuesta: Bingo algebraico

Objetivos: reconocer una expresión algebraica entera. Factorizar una expresión algebraica entera. Reconocer la forma factorizada correspondiente a una expresión algebraica entera. Identificar la correspondencia entre la forma polinómica y la forma factorizada de una expresión algebraica entera.

Desarrollo: a cada grupo se le entrega una serie de tarjetas/cartones (Figura1). Cada vez que alguna de las casillas de la tarjeta coincida, por equivalencia de expresiones, con la ficha (Figura 2) que ha sido extraída al azar de una urna, deberán señalarla. Serán premiados aquellos grupos que logren en primer lugar, completar una fila de casillas de su tarjeta (LÍNEA), o completar la totalidad de las casillas de la tarjeta (BINGO). Antes de informar sobre los resultados obtenidos en cada caso, se aconseja consensuar todos los resultados entre cada uno de los participantes del mismo grupo.

Diseño del material: todas las tarjetas tendrán las mismas expresiones en sus casillas, pero en forma permutada en sus casillas, esto es para anular el azar y lograr igualdad de posibilidades entre los grupos.

Premios: antes del inicio del Bingo, los integrantes de cada grupo decidirán democráticamente por dos opciones: calificar en forma igualitaria, o calificar por desempeño individual.

$2\pi r$		$x(y+1)$	x^3+3x^2+3x+1	
x^2+y^2-2xy	$(x+1)(x-1)$	πr^2		
	x^2+x		$4x+4$	$x^2+2xy+y^2$

Figura 1

AREA DEL CÍRCULO

x^2-1

$(x+y)^2$

$(x+1)^3$

$xy+x$

LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA

$(x-y)^2$

$x(x+1)$

$4(x+1)$

Figura 2

Otros contenidos para los cuales fue llevada a cabo la actividad en distintos niveles de escolaridad.

- Tarjetas con las respuestas de ecuaciones lineales correspondientes a las fichas.
- Tarjetas con intervalos correspondientes a las respuestas de inecuaciones lineales correspondientes a las distintas fichas.

- Tarjetas con las respuestas de operaciones combinadas en $\mathbb{Q}$ correspondientes a las distintas fichas (Bozzano, 2010).

Primeras conclusiones

El cambio en el método usado para la clase de matemática, como el uso de las estrategias propuestas, provoca en los alumnos sorpresa y expectativas hacia los procesos y resultados esperados. Reconocen satisfacción por hacer matemática a partir de las propuestas planteadas, con ansias de repetición y a la espera de un cambio definitivo en el modo de aprender matemática. Claramente expresan descontento ante los métodos tradicionalmente aceptados y llevado a cabo en las aulas.

Una vez superado el obstáculo promovido por el rechazo histórico hacia la matemática como asignatura escolar, se sigue con el análisis del nivel de logros esperados como consecuencia de la implementación de las actividades aquí propuestas. En este caso, acompañado con el aumento de la autoestima, la valoración del otro y la adopción del trabajo en colaboración, cooperativo; ante las muestras de cordialidad, solidaridad de todos los actores, los estudiantes lograron atravesar exitosamente los procesos de recuperar, dirigir atención, codificación, retención y transferencia.

Es importante el nivel de compromiso de los estudiantes con el grupo al que pertenecen, por lo que las discusiones o debates internos suelen tener un elevado volumen, como consecuencia de la pobre claridad en la adopción de roles (moderador) dentro del grupo de trabajo, propia de las actividades cooperativas (García Pastor, 2003).

Fomentar el hábito del trabajo en el aula, en los procesos de enseñanza-aprendizaje, bajo el marco de la pedagogía de la cooperación, contribuye al protagonismo de los estudiantes en los procesos de aprendizaje, propicia la hiperlectura en respuesta a sus propios intereses, da lugar a la motivación y satisfacción por hacer matemática, allana el camino hacia el nivel de logros esperado, y a corto plazo se puede concluir que favorece en gran medida al alcance de dichos logros.

Se observa una mejora en la capacidad de análisis deductivo y habilidades para formular y resolver problema; como en la labor de descubrir procedimientos y estrategias utilizadas en la resolución de problemas matemáticos (Ferreyra, Gallo y Zecchini, 2007).

Tal y como se concluye, lo observado es a corto plazo. Por lo que se propone continuar con el proyecto, a través de un seguimiento continuo del desempeño de los estudiantes. En caso de presentarse dificultades inesperadas y/o nuevos aportes que amplíen la investigación, la propuesta deberá dirigirse hacia tales planteos y generar así nuevas hipótesis.

Referencias bibliográficas

Amstrong, T. (1999). *Las inteligencias múltiples en la escuela*. Buenos Aires: Manantial.

Ballester Vallori, A. (2002). *El aprendizaje significativo en la práctica. Cómo hacer el aprendizaje significativo en el aula.* Seminario de aprendizaje significativo. España: Prácticas: Profesorado del Seminario de Aprendizaje Significativo.

Bosch, J. E. (1991). *Contrapedagogía y Conocimiento*. Buenos Aires: Ediciones

Universidad CAECE

Bozzano, P. E. (2010). Cooperativismo escolar. Propuestas didácticas en el contexto de la educación cooperativa. *Revista Premisa* 12(47), 23-31.

Bruner, J. (1965). *El desarrollo de la mente. Desarrollo cognitivo y Educación* (pp. 160-172). Madrid: Morata.

Cadoche, L. (2006). Socioconstrucción del conocimiento: una propuesta de aprendizaje cooperativo. *Premisa* 8 (31), 11-20.

Chadwick, C. (1987).*Tecnología educativa para docentes*. Madrid: Paidós.

Edunet.coop, para otra Educación. (2009). *Capacitación Docente en Cooperativismo Escolar: Módulos 1, 2, 3 y 4*. Buenos Aires: Idelcoop.

Ferreyra, H., Gallo, G., Zecchini, A. (2007). La Formación cooperativa en el sistema educativo. *Educar en la acción para aprender a emprender. Organización y gestión de proyectos socio-productivos y cooperativos*. (pp. 55-69). Buenos Aires: Noveduc

Gagné, E. (1985). La adquisición del conocimiento y la resolución de problemas. *La psicología cognitiva del aprendizaje escolar*. (pp. 123-163), Madrid: Visor.

Galagovsky de Kurman, L. (1996). *Redes Conceptuales: Aprendizaje, Comunicación y Memoria*. Buenos Aires: Lugar

Gallo, G., M. (2008). Taller de Sensibilización*: La cooperación: Práctica social que favorece el aprendizaje autónomo*. Ponencia, Liceo Víctor Mercante, UNLP.

García Pastor, F. (2003). *Trabajo cooperativo en la clase de matemática (I). Un intento de fundamentación*. Recuperado el 20 de Octubre de 2009 de http://www.matematicas.profes.net/apieaula2.asp?id_contenido=40883

Honorable Congreso de La Nación Argentina. (2006). Ley de Educación Nacional Nº 26206. Capítulo IV. Educación Secundaria. *Boletín Oficial de la República Argentina 94(31062),* 1-10.

Johnson D. Johnson, R. (1985). La dinámica interna de los grupos de aprendizaje cooperativo. En D. Mazza (Trad.) *Aportes teóricos. Ficha de cátedra II* (pp. 66-73), Buenos Aires: Universidad de Buenos Aires, Facultad de Filosofía y Letras.

Johnson D., Johnson, R. y Johnson Holubec E. (1999) *Los nuevos círculos del aprendizaje. La cooperación en el aula y la escuela*. Buenos Aires: Red Federal de formación Docente Continua.

Kaufman, R. (1973).*Planificación de sistemas educativos*. México: Trillas.

Moreira, M. A. (2009, Octubre). *El aprendizaje significativo de las ciencias: condiciones de ocurrencia, progresividad y criticidad*. Conferencia inaugural no publicada de la II Jornadas de Enseñanza e Investigación Educativa en el Campo de las Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de La Plata. Argentina.

Rampazzi, M., C. (2009). Programación del proceso de Enseñanza-Aprendizaje. Diseño de Sistemas de Enseñanza-Aprendizaje. Unidad 3. Buenos Aires: Universidad Caece.

SECUENCIA DE ACTIVIDADES DIDÁCTICAS PARA EL DESARROLLO DEL TEMA DE MUESTREO PARA UN CURSO DE ESTADÍSTICA, DEL ÁREA DE ECONÓMICO ADMINISTRATIVO DE LA UNIVERSIDAD DE SONORA

Eleazar Silvestre Castro, Irma Nancy Larios Rodríguez, Manuel Alfredo Urrea Bernal
Universidad de Sonora México
eleazar.silvestre@gmail.com, nancy@gauss.mat.uson.mx, maurr@gauss.mat.uson.mx

Resumen. En el trabajo se presenta una secuencia de actividades didácticas para el desarrollo del tema de muestreo del programa del curso de Estadística II (Estadística Inferencial) del Área Económico Administrativo de la Universidad de Sonora. Así como los resultados obtenidos al aplicarlos a un grupo de estudiantes durante el semestre 2010-2. El trabajo se enmarca, en los Lineamientos Generales para el Nuevo Modelo Curricular de la Universidad de Sonora (2003), el cual promueve entre otros aspectos el centrar la actividad educativa en el estudiante por ser el eje del proceso de aprendizaje e incorporar el uso de la tecnología en la enseñanza, dos aspectos que se retoman en esta propuesta.

Palabras clave: muestreo, actividades didácticas, estadística inferencial

Abstract. In this paper we present an arrangement of activities to develop the concept of sampling for the course of Statistics II (Inference Statistics) of the Economic and Administrative areas of the University of Sonora; we also present the results of the application of these activities with some students university students during the semester 2010-2. These activities follow the guidelines of the General Guidelines for the New Curricular Model of the University of Sonora (2003), which encourages, among other aspects, to focus the educational activity in the student for being the center of this learning process and to incorporate the use of technology into the teaching activities, two aspects that are included in this paper,

Key words: sampling, learning activities, inference statistics

Introducción

En la enseñanza de la estadística es importante tener en claro las respuestas de las siguientes interrogantes ¿Cuál es objetivo pretendido en la enseñanza de la estadística? ¿Qué habilidades se espera que desarrollen los estudiantes? ¿Cómo se pueden desarrollar dichas habilidades? Las instituciones educativas, por lo general, no pretenden formar estudiantes que sean expertos en estadística, pero tampoco se desea capacitarlos para realizar cálculos y procedimientos sin ningún significado en los contextos que se realizan. Se desea incidir en aquellos elementos que serán realmente útiles, dentro de las posibilidades, en la vida profesional de cualquier individuo, como para su entorno social. Estos elementos conforman la base de conocimientos y capacidades estadísticas necesarias para desarrollar lo que se considera una cultura estadística, esto es:

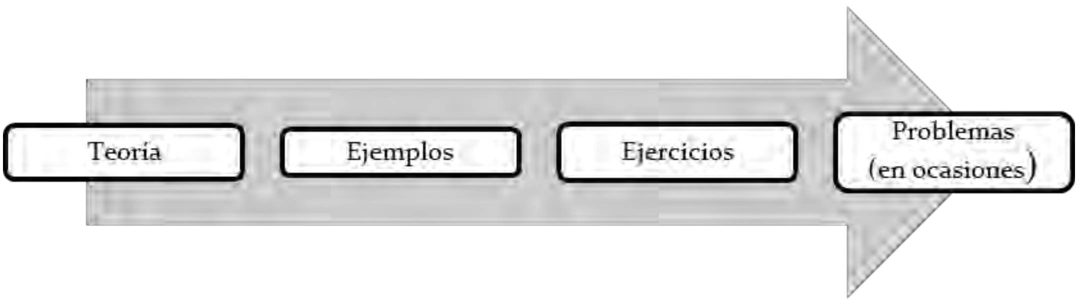
a) capacidad para interpretar y evaluar críticamente la información estadística, los argumentos apoyados en datos o los fenómenos estocásticos que las personas pueden encontrar en diversos contextos, incluyendo los medios de comunicación, pero no limitándose a ellos, y b) capacidad para discutir o comunicar sus opiniones respecto a tales informaciones estadísticas cuando sea relevante (Gal, 2002, p.2).

Uno de los conceptos fundamentales de la estadística inferencial, es el de muestreo. Es el muestreo quien proporciona la representatividad necesaria para inferir sobre toda una población, la correcta selección de muestras nos brinda la posibilidad de trabajar con conjuntos de datos no grandes que pueden representar otros conjuntos de mayor tamaño o inclusive de poblaciones "infinitas". Los elementos que giran alrededor del muestreo son considerables, como pueden ser: procesos aleatorios y probabilísticos, de proporción, niveles de confianza, estadísticos, etc. La conjugación de dichos elementos deriva en las diferentes técnicas de muestreo, divididos en muestreo aleatorio y no aleatorio, que a su vez se dividen en el muestreo estratificado, sistemático, por conglomerados, a conveniencia, etc. Escoger el método apropiado para realizar muestras implica una comprensión de los elementos mencionados, así como conceptos básicos de estadística, como son el espacio muestral, población objetivo, variable estadística, etc. Alrededor de ellos se desarrollaron una serie de actividades didácticas enfocadas en la resolución de problemas con el propósito de que el estudiante desarrolle el significado del objeto matemático muestreo, dirigida a estudiantes de nivel superior del área Económico Administrativo de la Universidad de Sonora.

Consideraciones teóricas para el diseño de las actividades didácticas

Para el desarrollo de las actividades didácticas se consideraron los siguientes elementos teóricos.

a) *Enfoque basado en resolución de problemas*. Una revisión de libros de texto recomendados en el programa del curso de Estadística II, del Área Económico Administrativo, en la cual se observa la siguiente secuencia en la enseñanza de la estadística.



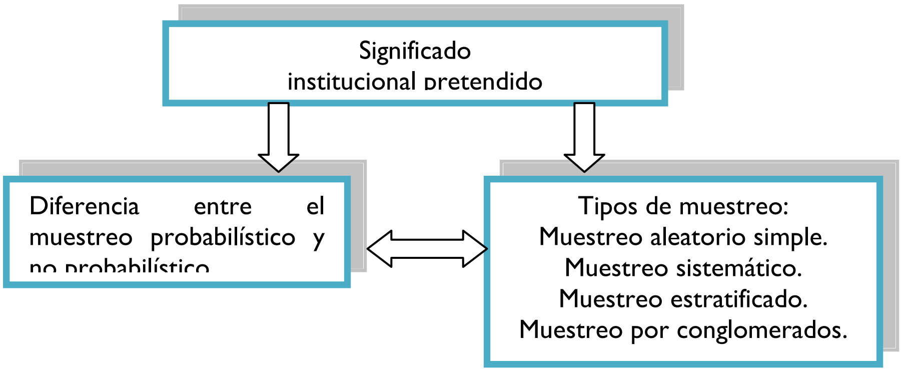
El esquema anterior sugiere la creación de la teoría en un primer momento, ignorando el papel que los problemas han tenido para llegar a ésta, no acorde al papel que históricamente han desarrollado los problemas en las matemáticas, Creemos que esto provoca un deficiente grado de habilidades y capacidades puestas en juego al momento de resolver problemas.

En nuestra propuesta, se parte de la utilización de problemas como la base para que a través de su resolución se construya el conocimiento matemático, retomando lo planteado por Mancera (2000), que la resolución de problemas en momentos donde no se conocen previamente los contenidos a aplicar, como puede ser al comienzo de nuevas lecciones, brinda al estudiante ventajas como las siguientes: requiere poner en juego todas sus habilidades y conocimientos, adquiere confianza en sí mismo, reconoce los alcances o limitaciones de sus estrategias, aprecia la necesidad de trabajar otros contenidos nuevos, conoce de antemano la utilidad de los temas escolares, produce un espacio propicio para desarrollar sus habilidades intelectuales.

b) *El Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática (EOS).* Para el diseño de las actividades didácticas también se consideraron algunos elementos del Enfoque Ontosemiótico (EOS), desarrollado por J.D. Godino (2002, 2006).

En este enfoque, el *significado personal* se considera como un ente que emerge de manera progresiva a través del tiempo, debido a que un sistema de prácticas y el significado institucional están socialmente compartidos por la institución. En relación con la resolución de un campo de problemas matemáticos, el *significado institucional* está referido a un sistema de prácticas sociales asociadas a un campo de problemas del cual emerge el objeto institucional. En el enfoque se distinguen cuatro significados institucionales: el significado institucional de referencia, el pretendido, el implementado y el evaluado. En este momento sólo haremos referencia al significado institucional de referencia y pretendido. El significado institucional pretendido es aquel que el profesor, a partir del significado institucional de referencia, selecciona, ordena y delimita la parte especifica que va a proponer a sus estudiantes durante el proceso de enseñanza, teniendo en cuenta los recursos disponibles como son el tiempo, conocimientos previos de los estudiantes, recursos tecnológicos, etc.

Para el diseño se realizó un análisis de significado institucional de referencia, tomando como referencia el programa de materia del curso de Estadística II, textos y resultados de investigaciones relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de la estadística, encontrándose los siguientes significados institucional pretendido en relación al objeto matemático muestreo.



Además de considerar los significados institucionales de referencia y pretendido, en el diseño de la propuesta, se contempla también el último nivel de análisis didáctico, esto es, los criterios de idoneidad. Esta herramienta permite valorar un proceso de instrucción (textos, secuencias didácticas, episodio de clase, etc.) diseñado o implementado y se define como la articulación coherente y sistémica de las seis componentes siguientes:

1) *Idoneidad epistémica:* se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia;

2) *Idoneidad cognitiva:* expresa el grado en que los significados pretendidos/implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/implementados;

3) *Idoneidad interaccional:* un proceso de enseñanza-aprendizaje tendrá mayor idoneidad desde el punto de vista interaccional si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales (que se puedan detectar a priori), y por otra parte permitan resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción;

4) *Idoneidad mediacional:* grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje;

5) *Idoneidad afectiva:* grado de implicación (interés, motivación, etc) del alumnado en el proceso de estudio. La idoneidad afectiva está relacionada tanto con factores que dependen de la institución como con factores que dependen básicamente del alumno y de su historia escolar previa;

6) *Idoneidad ecológica:* grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla.

La aplicación de los criterios de idoneidad permite valorar la secuencia antes y después de ser aplicada para así mejorarla como proceso de instrucción matemático.

c) *Incorporación y uso de tecnología:(MS-Excel®).* La incorporación de dicho software a la propuesta didáctica permite la visualización de diferentes registros de representación, contiene características de software dinámico al poder realizar construcciones que involucran diferentes registros de representación, así mismo evitar la inversión de tiempo no deseada en procesos de cálculo.

La propuesta

El Objetivo central de la propuesta didáctica es que el estudiante construya su significado del muestreo a partir de un sistema de prácticas que le permitan identificar cuándo un muestreo es aleatorio y cuándo no lo es, además que identifique las diferencias entre los principales tipos de muestreo aleatorio, así como valorar la pertinencia de aplicar cierto tipo de muestreo en una situación específica. Con los siguientes objetivos específicos:

a) Identifique si una propuesta de muestreo es aleatoria o no.

b) Realice muestreos aleatorios y no aleatorios para estimar la media poblacional.

c) Valorare la pertinencia de utilizar muestreos aleatorios cuando la situación plantea la estimación de la media poblacional o de cualquier parámetro poblacional.

d) Determine la pertinencia de utilizar cierto tipo de muestreo aleatorio en una situación específica.

Características de las actividades. En nuestra propuesta didáctica organizamos las situaciones problema en tres bloques de actividades: de introducción, de desarrollo y de cierre. En el primer bloque se pretende que el estudiante tenga un primer acercamiento con el objeto muestreo de forma intuitiva, en el bloque de desarrollo que se exploren las técnicas de muestreo e implicaciones de su uso y, en el bloque de cierre, se identifiquen los tipos de muestreo así como valoraren su pertinencia.

Se presentan situaciones extra matemática antes de definir los objetos que interesa emerjan mediante el sistema de prácticas que el estudiante utilice para resolver las situaciones; están organizadas en hojas de trabajo para los estudiantes; se utiliza el software Excel en la actividad de desarrollo; además de poner atención especial a los objetos declarados en el significado pretendido, se promueven otros objetos que están relacionados como algunos estadísticos y sus propiedades.

Estrategias didácticas de trabajo en equipo y discusión grupal. Se realiza trabajo en equipo para las actividades de introducción y desarrollo mientras que en las de cierre se trabaja de forma individual. En diferentes momentos se realizan discusiones grupales para consensar lo realizado e institucionalizar los objetos de interés.

Por cuestiones de espacio, sólo se presenta la hoja de trabajo de la actividad didáctica de desarrollo. Esta actividad incluye un archivo de Excel.

Situación-problema. Tiempos de visita. Un pequeño banco local realiza una campaña publicitaria para atraer clientes potenciales y brindar un mejor servicio a los que ya tiene. El equipo de mercadotecnia de dicho banco desea incluir en uno de sus pósters publicitarios la frase *"¡Te garantizamos realizar todas tus operaciones y movimientos en menos de 15 minutos!"*. Se realiza un levantamiento de información en las sucursales de la localidad para conocer lo verídico de esta afirmación antes de realizar la campaña publicitaria.

a) Abre el archivo *Banchilo.xlsx* y posiciónate en la *Tabla 1*.

b) Elige los tiempos con etiqueta del 10 al 20. Colócalos en el área de Muestra B.

c) Selecciona una muestra de 10 tiempos de la tabla de la forma que creas conveniente, colócala en el área de Muestra C. Describe el procedimiento que utilizó.

d) Selecciona otra muestra de 10 tiempos, de la misma tabla, utilizando la función *=ALEATORIO.ENTRE (número inferior, número superior)* en el área indicada, al hacer esto se generará automáticamente la muestra.

   NOTA: Para mantener fija la muestra (Copia los tiempos de la Muestra D y pégalos sobre sí mismos usando la función *Copiar, Pegado Especial,* selecciona la opción *Valores*, finalmente en *Aceptar* (esto para que la muestra no cambie).

e) ¿Qué diferencia encuentras entre los procesos utilizados en los incisos b, c y d?

f) ¿Identifica alguna ventaja entre hacerlo de una manera u otra? Explica tu respuesta.

g) Escoge aleatoriamente la etiqueta de un tiempo entre los primeros once de la *Tabla 1* utilizando la misma función de aleatoriedad. Colócala en la Muestra E y realiza el *copiado* y *pegado especial* para la etiqueta inicial para que ésta se mantenga fija. A partir de la primer etiqueta y a intervalos de once en once completa una muestra de 10 tiempos, seleccionando cada nuevo dato de la columna tiempos copiando el dato y pegándolo en la muestra E (por ejemplo: si el primer valor seleccionado corresponde al que está en la posición 6 el siguiente es el 17, el siguiente 28, y así sucesivamente).

h) Posiciónate ahora en la *Tabla 2*. Forma grupos de tiempos basados en el tipo de servicio: Nómina, Créditos, Cuenta de débito/ahorro, Manejo empresarial y Servicio al cliente. Selecciona una muestra aleatoria de 10 tiempos en la que los diferentes grupos queden representados de manera proporcional (por ejemplo: si los de nómina representan en el grupo el 10%, de ese subgrupo seleccionar aleatoriamente tantos tiempos hasta que se complete dicho porcentaje de la muestra). Colócala en la Muestra G.

i) Posiciónate finalmente en la *Tabla 3*. Cada tiempo pertenece a una sucursal de la ciudad: Norte, Sur, Este, Oeste y Centro. Selecciona aleatoriamente dos sucursales y escoge una muestra aleatoria de 10 tiempos en forma proporcional al número de tiempos de cada sucursal seleccionada previamente.

j) Ubícate en la pestaña de *Muestras* ¿En cuáles de los procedimientos utilizados para obtener las muestras intervino el azar? Para aquellos en que así haya sido, ¿En qué parte(s) del proceso(s)? Representa esta información en la siguiente tabla:

Muestra	¿Intervino el azar en el proceso?	¿En qué parte del proceso?
Muestra F		
Muestra E		
Muestra B		
Muestra D		
Muestra G		
Muestra C		

k) Calcula el tiempo promedio (media aritmética) de la población total.

l) De todas las muestras obtenidas, ¿Cuál es la que presenta la media más similar (o igual) a la media de la población?

m) ¿Cuál muestra presenta más diferencia respecto a la media de la población?

Conclusiones

A partir de la información recabada en las hojas de trabajo, archivos de MS-Excel®, videograbaciones y la observación directa del profesor, se realizó un análisis global de los significados personales de los estudiantes centrándose en las hojas de trabajo y auxiliándose, para aquellos momentos en que se requiriera, en las videograbaciones y archivos de Excel, y en base al análisis de idoneidades a priori y a posteriori se establecieron las siguientes conclusiones:

a) En relación a identificar si una propuesta de muestreo es aleatoria o no. Con base en el análisis de la implementación de la propuesta de actividades, se puede constatar que la mayoría de los estudiantes identificaron apropiadamente los muestreos realizados al clasificarlos como aleatorios o no aleatorios, a desarrollar las actividades de desarrollo y de cierre. En la actividad de cierre, que estaba más orientada a la evaluación, los estudiantes identificaron adecuadamente el tipo de muestreo aleatorio que se realizó en los casos correspondientes. Sólo se detectaron dificultades en pocos estudiantes que confundieron al muestreo aleatorio estratificado con el muestreo por conglomerados; a pesar de esto, se considera que la mayoría de los estudiantes fueron capaces de identificar los procedimientos correspondientes al momento de clasificar las propuestas de muestreo.

b) En relación a la realizar muestreos aleatorios y no aleatorios para estimar la media poblacional. A través de los análisis realizados, pudimos constatar que este objetivo se alcanzó de forma satisfactoria. A pesar de que se presentaron algunas dificultades técnicas con el manejo de Excel durante la realización del muestreo aleatorio estratificado y por conglomerados, así como la confusión generada por la redacción de algunas preguntas, los estudiantes lograron realizar los principales tipos de muestreo propuestos con la ayuda de Excel.

c) En relación a valorar la pertinencia de utilizar muestreos aleatorios cuando la situación plantea la estimación de la media poblacional o de cualquier parámetro poblacional. Apoyándose en los análisis realizados, se pudo constatar que la mayoría de los estudiantes identificaron correctamente el sesgo que producen muestreos no aleatorios auxiliándose en las distintas tablas donde se colorean los tipos de muestreos realizados; esta herramienta visual constituyó un poderoso recurso didáctico para lograr que los estudiantes identificaran dicho sesgo. Además de contar con este recurso, el cálculo automatizado de la media muestral permitió hacer comparaciones rápidas entre éstas y la media poblacional, lo que facilitó a los estudiantes conjeturar que los muestreos aleatorios producían, en su mayoría, medias muestrales más cercanas a la media poblacional, lo que permitió valorarlos como más pertinentes para estimar este parámetro.

d) Determinar la pertinencia de utilizar cierto tipo de muestreo aleatorio en una situación específica. Se considera que las dificultades que se presentaron respecto al manejo de Excel para la realización del muestreo aleatorio estratificado y por conglomerados, así como la redacción de algunas preguntas, influyeron de tal forma que la mayoría de los estudiantes no fueron capaces de proponer muestreos de este tipo para enfrentar situaciones que así lo requerían. Una prueba de esto es que la mayoría de los estudiantes no propuso muestreos aleatorios estratificados o por conglomerados para estimar el consumo de agua en la actividad de cierre, en cambio, propusieron un muestreo aleatorio simple o sistemático y no consideraron que los otros muestreos aleatorios podrían brindar muestras más representativas al momento de estimar.

A pesar de las dificultades mencionadas, consideramos que la propuesta incide en buena medida en la construcción de un significado personal del muestreo, donde tras la realización del sistema de prácticas que promueve dicha propuesta, el estudiante puede identificar, proponer y valorar la pertinencia de los muestreos aleatorios y no aleatorios al momento de estimar algún parámetro poblacional.

Siendo la presente propuesta un primer acercamiento para el logro de los objetivos planteados, se considera pertinente proponer las siguientes modificaciones para enriquecer las prácticas que deberán realizar los estudiantes con el propósito de incidir en dichos objetivos: Reducción del número de situaciones problema para la actividad de introducción; Cambios en la redacción de algunos cuestionamientos; Mayor automatización de Excel al momento de realizar el muestreo aleatorio estratificado y por conglomerados; Como idea de una nueva propuesta de actividad de desarrollo, se propone la completa automatización de la realización de todos los muestreos aleatorios, así como la generación de tablas para visualizar posibles sesgos, de tal forma que el estudiante no invierta tiempo en el manejo de Excel y esto permita centrarse en los aspectos de interés como son la identificación de sesgo, variación de la media muestral e identificación de la aleatoriedad en los muestreos.

Referencias bibliográficas

Colegio Académico de la Universidad de Sonora. (2003). *Lineamientos Generales para un Modelo Curricular en la Universidad de Sonora*. Gaceta Unison (Edición Especial).

Gal, I. (2002). Adult's statistical literacy. Meaning, components, responsabilities. En *International Statistical Review,* (p. 2).

Godino, J. (2002). Un Enfoque Ontólogico y Semiótico de la cognición matemática. En *Recherches en Didactique des Mathématiques 22 (*2-3), 237-289.

Godino, J. (2006). Análisis de procesos de instrucción basados en el enfoque Ontólogico Semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques 26 (*1), 39-88.

Mancera, E. (2000). *Saber matemáticas es saber resolver problemas.* México: Grupo Editorial Iberoamericana.

COMPENDIO ALTERNATIVO PARA EL ESTUDIO INDEPENDIENTE. MATEMATICA SUPERIOR I Y MATEMATICA SUPERIOR II. CARRERA DE CONTABILIDAD Y FINANZAS

Celestino González Rodríguez
Universidad de Camaguey. Sede Universitaria Municipal Sibanicú Cuba
celestino.gonzalez@reduc.edu.cu

Resumen. La matemática como idioma universal de la ciencia contemporánea, ha penetrado sin limitaciones de principio, las ciencias económicas y financieras, que unida a la universalización de la enseñanza superior, ha tomado un rasgo de modernidad. A partir de esta concepción, se pretende dotar a los estudiantes de la carrera Licenciatura en Contabilidad y Finanzas, principalmente en la modalidad de Educación Asistida a Distancia, de un Compendio Alternativo para el estudio independiente de Matemática Superior I y II, ajustado a las necesidades de su carrera, con facilidades de manejo y aprendizaje..

Palabras clave: compendio alternativo, estudio independiente

Abstract. Mathematics, as a universal language of contemporary science has penetrated, without limitation, the sciences of economy and finance, and together with the globalization of higher education has been a feature of modernity. From this point of view, it has given students of the Accounting and Finance Bachelor, especially in distance education assisted an alternative compendium for independent study of Superior Mathematic I and II, which conforms to the needs of his career, easy to use and learning.

Key words: alternative compendium, independent study

Introducción

Gran parte de la comunidad universitaria se muestra muy preocupada cuando ingresa a la educación superior, sobre todo, cuando la modalidad de estudio se desarrolla en un modelo semipresencial. La tutela de los sistemas precedentes, desaparece de forma brusca; los niveles de aprendizajes y requisitos para emprender el trayecto parecen estar en el horizonte.

En la educación superior cubana se vislumbran las necesarias transformaciones para asumir la misión de la Universidad ante las exigencias del nuevo siglo. Cambios (universidades hasta en bateyes rurales) que redundan en la búsqueda de soluciones a problemas tales como:

- La distancia entre lo que se enseña y lo que se aprende.
- Las necesidades reales del desarrollo social y local.
- Aumento y complejidad cada vez mayor de la información contemporánea.
- Carácter interdisciplinario y trasdisciplinario de los planes de estudio.
- Surgimiento de nuevos escenarios y modalidades de estudio con atención centrada en el estudiante y el profesor como facilitador del aprendizaje.
- Formación de un profesional de perfil amplio (M.E.S., 2007).

Asumir una posición digna (Martí, 1891, p.127) en el contexto social contradictorio y complejo que existe, es lo que corresponde a los profesionales del siglo XXI. Orientarse con pensamiento propio y capacidad de asimilación e innovación, para garantizar la cultura del aprendizaje. En esencia se trata de proveer a los estudiantes del universo de conocimientos que requieren, para enfrentar los problemas de la producción y los servicios. Cada modelo de producción y distribución requiere personas con determinadas capacidades, conocimientos, habilidades y valores: algo de lo que, los sistemas educativos tienen mucho que decir (Torres, 1995, p.19).

Un diagnóstico preliminar con ejercicios exploratorios, evaluaciones continuas, comprobaciones sorpresivas y razonamientos de situaciones problémicas planteadas en el aula, ponían al descubierto la realidad de resultados académicos, bajos y desastrosos y en el peor de los casos desalientos masivos, palpado en un grupo de estudiantes en la asignatura Matemática Superior I, de la carrera Licenciatura en Contabilidad y Finanzas en la Filial Universitaria Municipal de Sibanicú.

En investigaciones realizadas sobre los estudiantes se pusieron de manifiesto los obstáculos a enfrentar. Variados y complejos fenómenos afloraron:

- Las características psicológicas de los estudiantes solo la Andragogía las podía enfrentar (rango de edades muy amplios entre 20 y 45 años).
- No todos habían seleccionado la especialidad deseada.
- El excesivo tutelaje en la impartición del conocimiento mataba las iniciativas propias convirtiendo el aula en teatro y no en taller.
- La esencia del estudio como trabajo específico no se aprovechó.
- La actividad del trabajo en equipo era nula, y
- La evaluación continua o sistemática se había convertido en una acción controladora carente de motivación.

Se comienza un proceso de consulta con maestros de experiencias, profesores jubilados y en ejercicio, directivos, pedagogos con trayectoria investigativa y alumnos para corroborar lo planteado en el párrafo anterior, obteniendo más criterios convergentes que divergentes, por lo que se impuso la necesidad de consultar bibliografías especializadas donde se expusieran métodos o vías para lograr efectividad en el aprendizaje a partir de que el estudiante se sintiera sujeto activo del mismo (Zilberstein, 2007, p.7), descubriendo verdades acumuladas por la humanidad desconocidas para él.

Las acciones a seguir exigían lograr el dominio de los hábitos y habilidades más importantes para que el estudiante organice por si mismo el estudio real y efectivo. Necesario es señalar, que a pesar de realizar esfuerzos y uso del tiempo, no hallan la forma de solucionar correctamente dentro del tiempo destinado la tarea encomendada, engendrando el rechazo al estudio.

La enseñanza de la matemática de forma rutinaria y expositiva debía cambiarse por una vía desarrolladora y creativa, ¿por qué vía?, ¿qué camino de los trillados se debía escoger o despreciar?, lo ideal era pensar, razonar y consultar, ¡al fin la propuesta llego!, –Profesor, ¿por qué no entrega algunos ejercicios resueltos?–, así nació el Compendio Alternativo, cuyo final fue: ser protagonista del aprendizaje, la herramienta motivadora que logro borrar desalientos y fracasos, estimulando el deseo de avanzar. El efecto del proverbio chino "Si das un pescado a un hombre, se alimentará una vez; si le enseñas a pescar, se alimentará toda su vida", se cumplía.

Caracterización de la población y la muestra

La investigación se desarrolló utilizando como población un grupo de primer año de la carrera Licenciatura en Contabilidad y Finanzas de la Filial Universitaria Municipal de Sibanicú con una matrícula de 27 estudiantes. Debe significarse que la intencionalidad de la muestra se justifica, a partir de que es un grupo muy heterogéneo, con marcadas diferencias de edades y en tiempo desvinculados del estudio. La vía de comprobación para determinar los niveles de conocimientos que poseen los estudiantes en una aritmética sencilla, fue la aplicación de un diagnóstico inicial, donde se estableció de forma variada un conjunto de ejercicios, (10 en total, nueve para matemática y una pregunta para la redacción), ¿por qué de forma variada? Se seleccionaron ejercicios de nivel primario, secundario y preuniversitario, donde fue más profundo medida la potencialidad de razonar que el conocimiento matemático en sí.

La elección de una frase de nuestro héroe nacional José Martí para desarrollar dos párrafos indicaría los rasgos de escritura y las potencialidades personales de ortografía de los estudiantes. A criterio del autor, por el desempeño observado en un numeroso grupo de alumnos sus conocimientos no rebasan la enseñanza preuniversitaria, ni la politécnica general, diseñada en el país y cursada en las aulas cubanas. Con papel protagónico para obtener los resultados deseados se imponía asumir como compromiso el aprendizaje y la motivación.

El rendimiento alcanzado por el grupo en el diagnóstico de inicio de curso fue caracterizado de la siguiente forma:

Ejercicio de Matemática.

Grupo	Matrícula	Nivel primario	Nivel Medio	Nivel Medio-Superior
Nº 1	27	11	10	6
Por ciento	100	40,74	37,03	22,22

Los resultados de la lengua materna fueron muy discretos, marcados trastornos de ortografía, ajuste al tema y desarrollo de la idea central asumida en cada párrafo, todo asociado en una caligrafía en algunos casos ilegible, indicaban cuan duro era el camino a seguir, pero no imposible.

Ejercicio de la Lengua Materna. (Cantidad de estudiantes con dificultad)

Grupo	Matrícula	Más de 6 faltas ortográficas	Ajuste al tema	Caligrafía	Coherencia de ideas
Nº 1	27	19	14	12	15
Por ciento	100	70,37	51,85	44,44	55,55

Índices inapropiados heredados de la enseñanza precedente, quizás causa también del tiempo desvinculado de las tareas docentes, aunque en número superior a veinte (22 en total) proceden de la fuente de ingreso Curso de Superación Integral para Jóvenes (Modalidad de estudio creada por el estado para jóvenes desvinculados del estudio y el trabajo), con preparación en la enseñanza general meses antes.

Análisis y razonamientos se obtuvieron en el muestreo aplicado a partir de los resultados obtenidos, ideas y reflexiones como las expuestas a continuación indujeron al autor a buscar alternativas para un aprendizaje activo y creador. Es necesario lograr:

- Mayor y mejor preparación del profesor que imparte la docencia.
- Lograr motivación por la asignatura de Matemática para aumentar el interés y su preparación.
- Orientación adecuada para la construcción de conocimientos y desarrollo del pensamiento creador.
- Mantener el diagnóstico parcial de forma constante para chequear el avance obtenido y trazar estrategias.
- Formar hábitos de estudios y estudios grupales para fortalecer y desarrollar las habilidades.

- Vincular los ejemplos y ejercicios a situaciones laborales y de la vida cotidiana diversificándolos.
- Aumentar la labor educativa para fortalecer los valores.
- Uso de tecnologías informáticas.

El compendio alternativo

No constituye un libro de texto. El autor se ha propuesto principalmente satisfacer las necesidades de alumnos y profesores que bajo el principio de *Universidad para Todos* y la universalización de la enseñanza de la Educación Superior cubana, materializada en las filiales universitarias municipales, ha provocado en el país un incremento de matricula jamás pensada.

La profesionalización del docente o el docente profesional se convirtió en una necesidad imperiosa, enlazar conocimientos sin una preparación pedagógica o escasas herramientas didácticas a emplear, constituía más que una oportunidad la obligación de elaborar un material que motivara, orientara y bajo la intencionada idea de la discusión y los ejemplos propuestos, sea utilizado a manera de una lección, quizás oral.

El profesor desconocedor del mapa curricular de la carrera, encontrará en el índice propuesto, temas considerados o incluidos en los libros de textos, pero la esencia del mismo se constituye en complementar la didáctica necesaria que pueda deslindar los límites existentes entre la enseñanza y el aprendizaje, enlazando conocimientos anteriores con los nuevos conceptos, de considerable importancia, haciendo todo lo necesario para encauzar el proceso de razonamiento de tal manera que aparte al estudiante de la memorización mecánica y lo motive a estudiar. En fin dotar al profesor de los elementos iniciales para el desarrollo de su maestría pedagógica.

Al estudiante cuyas características psicológicas le exigen esfuerzos totalmente desfasados se le presenta una herramienta flexible que le permite interactuar de manera directa centrando su atención sobre un mínimo de conceptos, agrupando por temas todos los elementos de la unidad de estudio donde puede encontrar ejercicios resueltos, propuestos y evaluativos.

Es intención disminuir el tutelaje en la impartición de conocimientos, colocando al alumno en una situación participativa, sin aniquilar el placer de ir descubriendo por si mismo, conceptos, algoritmos, propiedades y ardides que desarrollen y fortalezcan sus habilidades de forma independiente.

Se puede propiciar también la manipulación de ejercicios que activen la capacidad del docente, la ejercitación de la creatividad, reflexionar sobre su propio proceso de pensamiento con el fin de mejorarlo conscientemente. La posibilidad de que el estudiante adquiera confianza en si mismo mediante su actividad mental. Las discusiones y análisis en el trabajo grupal lo preparan para resolver otros problemas de la ciencia, la profesión, la tecnología y posiblemente de su vida cotidiana. En esencia *minimizar los efectos de la semipresencialidad*, hacer lo menos poroso el aprendizaje y preparar a las personas para los nuevos retos de la humanidad, es el objetivo de este trabajo.

¿En qué consiste el compendio? Es la desagregación del contenido, clase a clase, del programa de Matemática Superior I y II teniendo su materialización en ejemplos explicados y convenidos con los estudiantes para cubrir lagunas o puntos críticos detectados. El material incluye ejercicios resueltos (140), propuestos (95), evaluativos (27) y ejemplificados mediante gráficos (56), para todas la unidades del programa, en más de 100 páginas. Se muestra, además, una recopilación de fórmulas, propiedades y reglas necesarias para aplicar ajustadas a cada unidad del plan de estudio, así como la recomendación de consultas bibliográficas y breves comentarios teóricos.

Hoy el compendio tiene aplicación en la mayoría de las filiales universitarias municipales de la provincia, en las carreras de Licenciatura en Contabilidad y Finanzas, constituyendo una herramienta considerable para el fortalecimiento, desarrollo de habilidades y el aprendizaje. Es utilizado en las ingenierías (Mecánica y Eléctrica), sobre todo la parte de las derivadas e integrales.

La intención del trabajo no es sustituir ningún libro de texto o básico, diseñado por los especialistas para los planes de estudio vigente en la universidad cubana de hoy o cualquier otra institución en la que puede ser utilizado, solo se pretende dotar al estudiante de una herramienta complementaria que facilite su aprendizaje (Zilberstein, 2007, p.2), que es al final lo que necesita la educación con sus instituciones y sistemas educacionales. Además de ser utilizado por cualquier persona que lo considere útil para la docencia o su autopreparación personal.

Conclusiones

Motivo de análisis e investigación debe constituir siempre la enseñanza y, en especial, la matemática como reina de las ciencias exactas. Profesores y directivos coinciden en esta necesidad. La experiencia descrita nos permitió reconocer que, no solo es contenido matemático lo que se necesita para aprender matemática, compartir y socializar ideas entre iguales (de estudiante a estudiante y de profesor a profesor), debates abiertos y sin reservas grupalmente es una sólida base para un aprendizaje creativo. La motivación como base de toda actividad constituye la vía más efectiva para que estudiantes y profesores (o personas en general) se interrelacionen en unidad indisoluble.

La autoevaluación constituyo una herramienta importante en la motivación para el aprendizaje. El estudiante que logra autoevaluarse es más efectivo, adquiere conciencia de sus deficiencias y logros, advierte la causa u origen de sus errores y el mismo está en capacidad de reflexionar y mejorar su desempeño por si solo.

Referencias bibliográficas

Álvarez de Zayas, C. (2002). *La Escuela en la Vida* [Programa de Computadora]. La Habana.

Llano Meléndez, M. (1984). Consideraciones acerca del trabajo independiente de los alumnos. En *Varona* 9. La Habana: Ed. Pueblo y Educación.

Martí, J. (1891). *Con todos y para el bien de todos, 21*, 127. Discurso en el Liceo Cubano. Tampa.

Martínez, O. (2006). *Globalización de la Economía Mundial: la realidad y el mito.* (p. 13-16). La Habana: Ed. Félix Varela.

M.E.S. (2007). Capítulo I. Artículo 4. Resolución 210/07. En *Reglamento Docente y Metodológico*. La Habana: Ed. Félix Varela.

Ministerio de Educación (2002). *Metodología de la enseñanza de la Matemática*. (p. 88-92). La Habana: Ed. Pueblo y Educación.

Pérez Silva S. (2004). Aplicación del trabajo independiente en el proceso docente educativo. (pág. 87). Educativas-ILCE Coordinadora Nacional PROMESUP/México.

Pidkasisti, P. (1986). *La actividad cognoscitiva independiente de los alumnos en la enseñanza*. (p.35-80). La Habana: Ed. Pueblo y Educación.

Torres, J. (1995). *Globalización e Interdisciplinariedad: el Currículum integrado.* (p. 19). La Habana: Ed. Félix Varela.

Zilberstein, J. (2006). *El desarrollo de habilidades en los estudiantes, en una didáctica integradora*. (pp. 7-9). La Habana: ICCP.

VALORACIÓN DE LAS PRÁCTICAS DE AULA VIRTUAL EN EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA

Sara Inés Ottonello, Dora Margarita Fernández, Margarita del Valle Veliz
Facultad de Ciencias Económicas Universidad Nacional de Tucumán Argentina
dfernandez50@hotmail.com, mveliz@face.unt.edu.ar

Resumen. Matemática I es una asignatura que se dicta en primer año de la Facultad durante el primer cuatrimestre. El trabajo muestra los resultados logrados con la aplicación de una nueva metodología empleada a partir de 2010 en los Talleres que se ofrece a los alumnos reprobados.

Se describe la estructura de las prácticas de enseñanza aprendizaje que se implementaron a través del aula virtual y se presenta el grado de valoración positivo de esta experiencia, por parte de los alumnos. La práctica mencionada complementa los métodos tradicionales de enseñanza y aprendizaje, aprovechando los recursos multimedia y extendiendo los horarios habituales de clase.

Palabras clave: talleres, motivación, aula virtual

Abstract. In our Faculty, Mathematic I is a first year, and first term subject. This paper shows the results of the application of a new methodology, implemented since 2010, in the workshops offered to the students who failed their exams.

We describe the structure of the practice of teaching and learning activities developed though a virtual classroom, and the amount of positive evaluation given to them by the students. The mentioned practice complements the traditional methodology of teaching and learning, and takes advantage of the multimedia resources and the extension of the regular schedule of classes.

Key words: workshops, motivation, virtual classroom

Introducción

El presente trabajo forma parte de las actividades de investigación del proyecto "Propuesta de Innovación metodológica para la enseñanza de la Matemática con modalidad no presencial en Carreras de Ciencias Económicas" de la Universidad Nacional de Tucumán.

Matemática I es una asignatura que se dicta en primer año de la Facultad, durante el primer cuatrimestre, es de carácter promocional, y anualmente tiene una inscripción masiva (alrededor de 1800 alumnos). Esta situación, sumada a los conocimientos previos insuficientes y a la carencia de competencias necesarias para los requerimientos académicos propios del tramo inicial en el área Matemática en una Facultad de Economía, son algunos de los motivos por los cuales el porcentaje de alumnos que promocionan la asignatura es bajo. Este porcentaje fue disminuyendo en los últimos años.

Para paliar esta situación, la Cátedra decidió ofrecer a los alumnos reprobados la posibilidad de cursar nuevamente la asignatura durante el segundo cuatrimestre, en los llamados Talleres Participativos, siendo el Aprender a Aprender una de las metas deseables que se tuvieron presentes en el diseño y desarrollo de los mismos mediante la utilización de las TIC´s (Tecnologías de la Información y la Comunicación).

En declaraciones de la UNESCO (1996) se lee:

> Una de las funciones de la educación futura debe ser promover la capacidad de los alumnos de gestionar sus propios aprendizajes, adoptar una autonomía creciente en su carrera académica, disponer de herramientas intelectuales y sociales que les permitan un aprendizaje continuo a lo largo de toda su vida (Pozo y Monereo, 1999, p. 11).

En el trabajo se describe la metodología empleada en los Talleres (aprendizaje colaborativo) y se muestran los resultados logrados en los mismos. Además se detalla la estructura de las prácticas de enseñanza aprendizaje a través del aula virtual que se implementaron para la asignatura en el año 2010 y se presenta el grado de valoración de esta experiencia por parte de los alumnos. La práctica mencionada complementa los métodos tradicionales de enseñanza aprendizaje, aprovechando los recursos multimedia y extendiendo los horarios habituales de clase.

Los Talleres fueron estructurados en base a principios de la llamada "regulación continua de los aprendizajes" (Jorba y Casellas, 1997) y en el aprendizaje colaborativo. El objetivo de los mismos es mejorar el aprendizaje mediante la interacción social en el aula, el traspaso de la responsabilidad del aprendizaje al propio alumno a través de prácticas de evaluación mutua y autoevaluaciones.

A las tareas llevadas a cabo en las clases presenciales se agregan al finalizar cada unidad académica, prácticas de aula virtual como propiciante de la autorregulación del aprendizaje.

Marco teórico

Entornos virtuales de aprendizaje

La utilización de entornos virtuales de aprendizaje puede suponer el inicio de un cambio relevante en la forma de aprender.

> La progresiva implantación de las nuevas tecnologías de la comunicación, en el campo de la enseñanza, está modificando muchos de los planteamientos educativos tradicionales, hasta el punto de obligar al profesorado, como motor esencial del proceso pedagógico, a tener presente como afectan a la estrategia del aprendizaje las nuevas formas de comunicación y de elaboración de los materiales y recursos docentes. El modelo característico de la enseñanza presencial, basado en el contacto directo profesor-alumno, lleva camino de transformase en un

nuevo modelo, apoyado por el entorno virtual formativo, aunque distante, más flexible y eficaz en algunos de sus presupuestos. (Santos Preciado, 2006, p. 114).

Autorregulación y Motivación

La autorregulación del aprendizaje tiene relaciones notables con otros procesos de logros, como ser la motivación. Según Schunk (1997), la misma es una fuerza energizante que impele a los estudiantes a realizar y sostener acciones dirigidas a las metas.

Mateos, M. (2001, p. 44), sostiene que, "durante muchos años, los estudios sobre el aprendizaje y la cognición se llevaron a cabo en forma separada de las investigaciones sobre la motivación". En los últimos años las investigaciones experimentaron importantes cambios al reconocer el papel que juegan las variables motivacionales y afectivas en el desempeño de tareas cognitivas. Este cambio ha llevado a incorporar e integrar en el estudio de los procesos de aprendizaje un conjunto de constructos generados desde diferentes modelos teóricos sobre motivación. Entre ellos se incluyen la percepción de la propia competencia, la autovalía, las expectativas de auto-eficacia y control, las atribuciones de los éxitos y fracasos y los pensamientos acerca de las metas de las tareas.

En esta línea, la mayoría de las propuestas recientes sobre el aprendizaje autorregulado consideran que éste depende, no sólo del conocimiento de las estrategias específicas de la tarea y del control que se lleva a cabo sobre ellas, sino también de la motivación que tenga el sujeto por el aprendizaje.

El modelo de aprendizaje estratégico elaborado por Pressley, Borkowski y sus colegas (citado en Mateos, M., 2001, p. 46) postula que la autorregulación que llevan a cabo los aprendices competentes resulta de la coordinación de las siguientes componentes:

> "1) Empleo de las estrategias específicas de la tarea y estrategias de supervisión y control de las mismas.
>
> 2) Conocimiento sobre cómo, cuándo y donde aplicar cada una de las estrategias específicas (conocimiento metacognitivo).
>
> 3) Conocimientos generales sobre la eficacia de las estrategias (creencias motivacionales tales como la posibilidad general de modificar las propias capacidades mediante el esfuerzo o la creencia en la propia eficacia)
>
> 4) Activación de los conocimientos, tanto generales como específicos de dominio, que son relevantes para usar las estrategias de forma efectiva".

Según este modelo, la autorregulación eficaz depende de la interacción entre la cognición o conocimiento específico del dominio de la tarea, tanto conceptual como procedimental, la metacognición en sus dos aspectos declarativo y procedimental y la motivación por el aprendizaje.

Componentes motivacionales vinculadas al aprendizaje autorregulado

Así como los componentes cognitivos y metacognitivos se relacionan con la competencia para llevar a cabo una tarea, los componentes motivacionales se asocian con la actuación o el rendimiento de la tarea.

Tres son los componentes motivacionales relacionados con el aprendizaje autorregulado, según Mateos (2001):

- de expectativa
- de valor
- el componente afectivo

El componente de expectativa es el que integra las creencias de los estudiantes sobre su capacidad para enfrentar con éxito una tarea.

El componente del valor incluye las creencias sobre las metas para llevar a cabo una tarea (metas de aprendizaje versus metas de rendimiento) y sobre la importancia, utilidad e interés de la tarea.

El componente afectivo incluye las reacciones emocionales (por ejemplo la autoestima) derivadas de la realización de las tareas y de las atribuciones causales que los estudiantes realizan ante los resultados obtenidos.

Metodología

Estructura de los Talleres

El curso de Matemática I tuvo una duración de diez semanas; se desarrolló en dos clases semanales de dos horas cada una. Los alumnos se distribuyeron en grupos de cinco a seis integrantes entre los cuales se eligió un moderador. En la primera clase el docente explicó los objetivos del curso y la metodología a emplear a los efectos de motivar a los alumnos, destacando la importancia de la regulación continua de los aprendizajes y de las prácticas de autoevaluación como herramienta didáctica. El curso constó de tres etapas:

Primera Etapa: De reflexión. El objetivo fue lograr que los alumnos reflexionen sobre los motivos o causas que determinaron su bajo rendimiento académico en la asignatura en el periodo anterior. También se solicitó al alumno que explicite sus metas, propósitos y compromisos que asume en este nuevo cursado. Posteriormente, el moderador de cada grupo leyó las conclusiones obtenidas y finalmente el docente cerró la clase orientando al alumno.

Segunda Etapa: En esta etapa se realizó una revisión de los conocimientos previos necesarios para el cursado de la asignatura. La misma estuvo basada en el aprendizaje colaborativo; Mestre Gómez et. al. (2007), se refiere al mismo como el conjunto de métodos de instrucción y entrenamiento apoyados o no con tecnología, así como de estrategias para propiciar el desarrollo de habilidades mixtas, aprendizaje y desarrollo personal y social, donde cada miembro del grupo es responsable tanto de su aprendizaje como del de los restantes miembros del grupo.

Los alumnos trabajaron en grupos en la resolución de ejercicios propuestos por el docente; al finalizar la clase un integrante de cada grupo los resolvió en el pizarrón para controlar los resultados.

Tercera Etapa: Se desarrollaron las unidades que componen la asignatura, dividiéndolas en dos módulos. Al finalizar cada uno de ellos el alumno rindió un examen parcial. Para promocionar la asignatura, se exigió una nota promedio (N) de seis puntos como mínimo entre los dos exámenes parciales, no pudiendo tener aplazo en ninguno de ellos, dado que esta situación los dejaba en condición de alumnos libres. Si el promedio obtenido es mayor o igual que cuatro puntos y menor que seis, el alumno quedaba en condición de alumno regular.

Al final de cada unidad temática, se realizó en clase una actividad de autoevaluación y otra mediante el aula virtual como complemento a las tareas habituales. Las mismas contribuyeron al desarrollo de habilidades de aprendizaje y personal del estudiante, permitiéndole controlar su nivel de aprendizaje, detectar las dificultades en su adquisición y reconocer los conocimientos que debía reforzar.

El propósito fue el de utilizar el aula virtual que provee la institución en la plataforma Claroline como medio enriquecedor del proceso de enseñanza aprendizaje y permitió que los estudiantes pudieran administrar el tiempo de estudio según sus horarios disponibles.

Las actividades se realizaron como complemento de las llevadas a cabo en las clases presenciales y como propiciante de la autorregulación del aprendizaje. Las mismas, a su vez, permitieron al docente supervisar el trabajo de los alumnos, detectar áreas débiles y medir el nivel de aprovechamiento.

Las prácticas de aula virtual consistieron en pruebas objetivas con ejercicios del tipo verdadero o falso, opción múltiple, completamiento, lectura de gráficas, resolución de problemas, etc.

Población y estudios realizados

La población bajo estudio estuvo compuesta por los ciento setenta alumnos que participaron de los Talleres y que cumplían los requisitos exigidos por la Cátedra (tener aprobado al menos uno de los tres exámenes parciales rendidos en el primer cuatrimestre).

Los Talleres se diseñaron considerando que es muy importante la adquisición inicial de un sistema motivacional positivo caracterizado por el sentido de auto-eficacia, autoestima positiva y atribuciones de éxitos a factores controlables como el propio esfuerzo.

Mediante la aplicación de una encuesta Likert se midieron algunos factores motivacionales que aportan al aprendizaje autorregulado y su influencia en el rendimiento académico.

Teniendo en cuenta los componentes motivacionales que propone Mateos (2001), de expectativa, de valor y afectivo, se elaboró la encuesta que fue validada según el método de expertos. La misma estuvo formada por veinticuatro ítems, contemplando aspectos relacionados a creencias de los estudiantes y actitudes para enfrentar con éxito el estudio de la Matemática. Algunos de ellos fueron: motivo de elección de la carrera, capacidad para enfrentar una tarea, creencias sobre las metas, importancia y utilidad de la tarea y material de estudio propuesto, reacciones emocionales, esfuerzo, dedicación, perseverancia y responsabilidad.

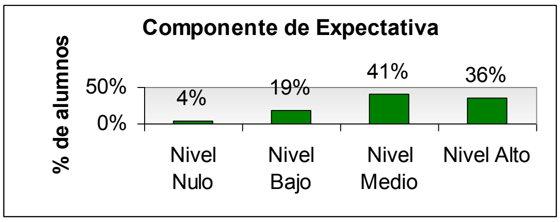
En cada ítem se establecieron cuatro niveles de valoración (nulo, bajo, medio y alto); los dos primeros, se considera que manifiestan un grado insuficiente de motivación y los dos restantes un grado positivo.

Resultados de la investigación

Aspecto motivacional

La proporción de alumnos según los distintos niveles alcanzados en los componentes de motivación estudiados, respecto a la metodología implementada en los talleres, complementando las clases presenciales con las actividades en el aula virtual, se muestra en los siguientes gráficos.

Gráfico N° 1: Distribución porcentual de alumnos de la muestra según el componente de "expectativa", ante la metodología implementada en los talleres, utilizando el aula virtual.

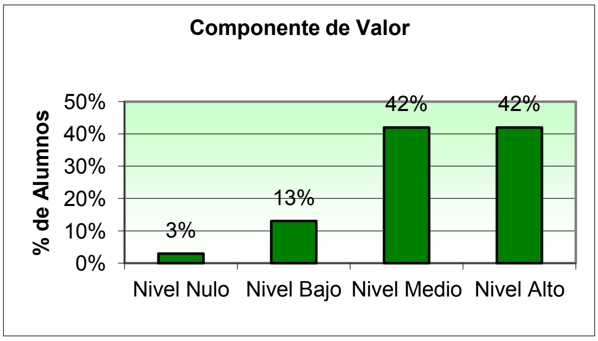


Fuente: Cátedra de Matemática I. Facultad de Ciencias Económicas. U.N.T. Año 2.010

Los resultados indican que el 23% de los alumnos manifiestan un grado insuficiente de motivación en el componente estudiado, mientras que el 77%, manifiestan un grado positivo de motivación.

En el estudio de este componente, conviene destacar por un lado que un porcentaje elevado de alumnos expresan haber elegido la carrera por vocación y para su realización personal y en menor medida hay un predominio del factor económico al considerar que el trabajo en esta profesión es bien remunerado. Por otro lado, más del 70% de los alumnos afirman sentirse capaces y seguros para enfrentar con éxito el estudio de la Matemática.

Gráfico N° 2: Distribución porcentual de alumnos de la muestra según el componente de "valor".

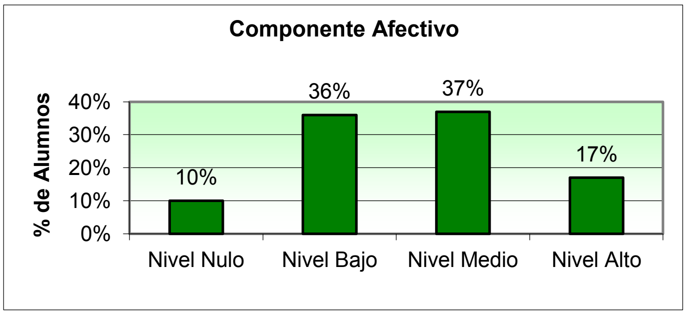


Fuente: Cátedra de Matemática I. Facultad de Ciencias Económicas. U.N.T. Año 2.010

Observamos que el 84% de los alumnos manifestaron un grado positivo de motivación en el componente de valor. Mientras que un 16% lo hicieron en grado insuficiente.

Destacamos en el estudio de este componente, que un elevado número de alumnos reconoció la utilidad e importancia de las actividades propuestas y el material de estudio en especial las autoevaluaciones en aula virtual, lo que contribuyó al logro de sus metas con un rendimiento óptimo.

Gráfico N° 3: Distribución porcentual de alumnos de la muestra según el componente "afectivo"

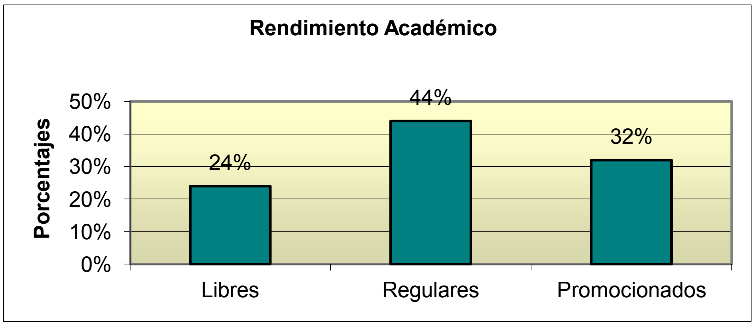


Fuente: Cátedra de Matemática I. Facultad de Ciencias Económicas. U.N.T. Año 2.010

Observamos en el estudio de este componente que un 54% de los alumnos manifiesta un grado positivo de motivación, mientras que un 46% lo hacen en grado insuficiente. Conviene destacar que este último porcentaje es más elevado que el obtenido en los componentes anteriores.

Se considera que el nivel de esfuerzo para lograr metas de aprendizaje se manifiesta por las acciones realizadas para superar dificultades o errores; en este caso sólo la mitad de los estudiantes realizó consultas en la cátedra o bien optó por el control con sus compañeros. Además expresaron sentirse conformes y satisfechos con los resultados obtenidos en las autoevaluaciones en el aula virtual, razón por la cual se sugirió incentivar las consultas con los docentes de la cátedra para mejorar el rendimiento académico logrado.

Gráfico N° 4: Distribución porcentual de alumnos de la muestra según el rendimiento académico en los Talleres



Fuente: Cátedra de Matemática I. Facultad de Ciencias Económicas. U.N.T. Año 2.010

Referencias:

Alumnos libres: $N < 4$ puntos

Alumnos regulares: $4 \leq N < 6$

Alumnos promocionados: $6 \leq N \leq 10$

Los porcentajes de alumnos promocionados y regulares fueron significativamente superiores a los logrados en el dictado tradicional de la asignatura, lo que muestra que la metodología de trabajo en los talleres, con clases presenciales complementadas con las actividades en el aula virtual dieron resultados positivos.

Conclusiones

Los resultados muestran que un elevado porcentaje de estudiantes se perciben a sí mismos como aprendices eficaces, capaces de controlar su propio aprendizaje.

Muchos de ellos poseen un interés intrínseco por la tarea, que perciben como útil y significativa y atribuyen sus éxitos y fracasos a factores controlables, como el nivel de esfuerzo puesto en la tarea.

El análisis e interpretación de estos resultados muestra que los componentes motivacionales estudiados se manifestaron de manera positiva en más de la mitad de los alumnos, lo que incentiva a seguir trabajando en esta dirección.

Referencias bibliográficas

Jorba, J., Casellas, E. (1997). *La regulación y la autorregulación de los Aprendizajes*. Madrid, España: Editorial Síntesis S.A.

Mateos, M. (2001). *Metacognición y Educación.* Buenos Aires, Argentina: Aique Grupo Editor S.A.

Mestre Gómez, V., Fonseca Pérez, J. y Valdez Tamayo, P. (2007). *Entornos virtuales de enseñanza aprendizaje*. Cuidad de las Tunas: Editorial Universitaria.

Pozo, J. y Monereo, C. (1999). *El Aprendizaje Estratégico.* Madrid: Editorial Santillana.

Santos Preciado, J. M. (2006): Las tecnologías de la información y de la comunicación y el modelo virtual formativo: nuevas posibilidades y retos en la enseñanza de los SIG. *Geo Focus (Artículos),* N° 6, p.113-137.

Schunk, D. (1997). *Teorías del aprendizaje*, México: Prentice – Hall. Hispanoamericana S.A.

LA METODOLOGÍA B-LEARNING Y EL APRENDIZAJE DEL CÁLCULO

Margarita del Valle Veliz; María Angélica Pérez y Raúl P. Mentz
Facultad de Cs. Económicas. Universidad Nacional. de Tucumán Argentina
margaveliz@yahoo.com.ar, mperez200@hotmail.com, ramentz@yahoo.com.ar

Resumen. El presente trabajo muestra los resultados logrados mediante la utilización del Aula Virtual que ofrece la institución en plataforma Claroline, en el proceso de enseñanza aprendizaje del Cálculo durante 2009 y 2010 en primer año universitario. Se ofreció a los alumnos una metodología de enseñanza con modalidad "blended learning", que combina clases presenciales con actividades on-line. Se planificaron dichas actividades contando con herramientas de contenido (material de estudio y trabajo), de comunicación (correo electrónico, foro, chat, anuncios y consejos) y de evaluación (cuestionarios, autoevaluativos, actividades) que permitieron un seguimiento del proceso.

Palabras clave: aula virtual, b-learning, semipresencialidad

Abstract. This paper shows the results obtained through the utilization of a virtual classroom offered by the institution in a Claroline platform, during the teaching and learning processes of Calculus, in 2009 and 2010, in a university first year. A teaching methodology of "blended learning" was offered to the students. It combines class and on-line activities. Those activities were designed counting with content tools –study and practice elements-, communicative tools –e-mail, forum, chat, announcements and advice-, and evaluation tools –questionnaires, auto-evaluations, activities- that allowed the control of the process.

Key words: virtual classroom, b-learning, blended learning

Introducción

Debido a las continuas transformaciones en la tecnología y por ende en el proceso educativo, se hace necesario formar profesionales que puedan enfrentar nuevos desafíos, mejorando sus conocimientos, habilidades y actitudes, de modo que les permita su adaptación a la sociedad actual.

La implementación de la modalidad de educación virtual genera cambios significativos en el modo como se articulan y se desarrollan las distintas actividades de enseñanza y aprendizaje. La mediación pedagógica de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación (TIC's), implica una organización menos definida del espacio y el tiempo educativos, contenidos de aprendizaje apoyados con mayor base tecnológica, una forma telemática de llevar a cabo la interacción docente – alumno y alumno-alumno, y un desarrollo de las actividades de aprendizaje más centrado en el alumnado.

En esta investigación, se analizó el uso de dichas tecnologías como metodología de enseñanza y aprendizaje y se observó los efectos de su utilización en el área Matemática de la Facultad de Ciencias Económicas de la UNT.

> La progresiva implantación de las nuevas tecnologías de la comunicación, en el campo de la enseñanza, está modificando muchos de los planteamientos

> educativos tradicionales, hasta el punto de obligar al profesorado, como motor esencial del proceso pedagógico, a tener presente como afectan a la estrategia del aprendizaje las nuevas formas de comunicación y de elaboración de los materiales y recursos docentes. (Santos Preciado, 2006, p. 116).

La plataforma institucional utilizada (Claroline) integra las herramientas necesarias para desarrollar el proceso de aprendizaje del alumno, tanto de manera virtual, como de apoyo a la docencia presencial. Así, se pudo contar con herramientas de contenido (material de estudio y trabajo), de comunicación (correo electrónico, foro, chat, anuncios y consejos) y de evaluación (cuestionarios, autoevaluativos, actividades).

Los resultados derivados de la utilización del Aula Virtual en el proceso de enseñanza aprendizaje del Cálculo con una modalidad semipresencial ("blended learning"o b-learning) en primer año universitario durante el cursado de la asignatura en los años 2009 y 2010, muestran que la experiencia emprendida aporta en forma positiva a dicho proceso, y que por el uso de nuevas tecnologías, necesita de una didáctica específica para que su entrega sea óptima. Es necesario por tanto, aprovechar las oportunidades de mejora para el aprendizaje de los alumnos de modo que estimulen sus habilidades, en beneficio de la construcción de los conocimientos.

Marco teórico

El "blended learning" es una metodología de enseñanza mixta, que combina clases presenciales con actividades on-line. En esta modalidad, los alumnos tienen como apoyo constante al docente de las clases presenciales y además al tutor virtual durante el periodo on-line.

> Se podría dar un paso más allá y exponer que no se trata de buscar puntos intermedios, ni intersecciones entre los modelos presenciales y a distancia, sino de integrar, armonizar, complementar y conjugar los medios, recursos, tecnologías, metodologías, actividades, estrategias y técnicas..., más apropiadas para satisfacer cada necesidad concreta de aprendizaje, tratando de encontrar el mejor equilibrio posible. (García Aretio, 2004, p. 3).

La definición más sencilla y también la más precisa describe al *blended learning* como aquel modo de aprender que combina la enseñanza presencial con la tecnología no presencial, o enseñanza mixta. La literatura anglosajona destaca el término *híbrido* (*Hybrid model*).

> El blended learning se aproxima más a un modelo de formación híbrido que tiene la posibilidad de recoger lo mejor de la enseñanza a distancia y lo mejor de la enseñanza presencial. Un blended learning bien entendido dosifica y utiliza

> correctamente los recursos electrónicos e infraestructura digitales disponibles actualmente y emplea los métodos adecuados de la participación activa en clase. (Prats Fernández, 2003, p. 113).

El propósito de este tipo de propuesta educativa es "servir como puente en un entorno virtual diverso, donde se enlazan currículum, propósitos, objetivos, materiales didácticos, actividades, herramientas de comunicación sincrónica y asincrónica mediados en una atmósfera artificial situada en la red" (Navarro del Ángel, 2009, p. 179). En otras palabras, se propicia el intercambio de información entre docentes y alumnos a través de la Red, originándose así nuevos ambientes de aprendizaje donde el conocimiento se difunde a través de Internet.

En este modelo se definen nuevos roles para los actores del proceso educativo. La educación virtual centra su atención en el aprendizaje de los alumnos y en su participación activa en la construcción de conocimientos. El docente define contenidos y actividades en base a la estrategia didáctica que adopta, y el estudiante realiza su aprendizaje a partir de esos contenidos y actividades, pero sobre todo a través de su interés y motivación por aprender, de la interacción con otros alumnos y la guía del profesor. En este contexto, la interacción del docente-tutor-facilitador con los alumnos a fin de realizar el seguimiento personalizado de las actividades de aprendizaje planteadas en el programa académico, es una actividad fundamental, ya que influye directamente en el proceso de formación.

> Habitualmente, para el profesor, esta actividad de aprendizaje se desarrolla siguiendo las tres fases típicas, que consisten en presentar la actividad y asegurarse que se comparten sus objetivos y se ha comprendido las condiciones de desarrollo, proporcionar ayudas formativas a los estudiantes cuando están llevándola a cabo y valorar hasta qué punto se han conseguido los objetivos de aprendizaje fijados. (Barbera y Badia, 2005, p. 7).

Al igual que en el aula presencial, donde profesor y alumnos coinciden en el mismo espacio temporal, en el aula virtual existe la posibilidad de comunicación instantánea, proceso que recibe el nombre de aprendizaje sincrónico o relación educativa sincrónica. Este proceso se produce a través de clases electrónicas, seminarios, debates, que requieren la interacción coincidente en el tiempo de profesor y alumnos.

Pero la comunicación también puede ser retardada, es decir, profesor y alumnos no coinciden en el tiempo (relación asincrónica) o dual (combinación de los dos procesos).

El modelo pedagógico para aula virtual

La integración de la tecnología a los procesos de enseñanza y aprendizaje requiere que en la propuesta pedagógica se tengan en cuenta, entre otros, los siguientes aspectos:

- Actividades que promuevan y favorezcan el estudio independiente.
- El acompañamiento y seguimiento por parte de los docentes, a través de las tutorías, con el propósito de apoyar y promover el aprendizaje de los alumnos
- Actividades grupales
- Actividades de autoevaluación que permitan al estudiante conocer el nivel de aprendizaje logrado.
- Sistema de evaluación.
- Estrategias para promover la reflexión por parte de los alumnos y el desarrollo de sus procesos metacognitivos.

Es importante que el estudiante conozca desde el comienzo de la actividad virtual, los aspectos de la planificación de la actividad formativa que van a incidir en su desarrollo, como los objetivos de aprendizaje, las tareas por realizar, los contenidos por tratar, los materiales a consultar, la interacción esperada con el profesor y los otros estudiantes, y también los criterios de evaluación que van a utilizarse para valorar su aprendizaje.

Metodología

La metodología utilizada en el curso tanto el año 2009 como el 2010 se basó en estrategias propias de una enseñanza mixta, complementando clases presenciales con el trabajo permanente en el aula virtual. En este contexto y teniendo en cuenta que la Matemática es una disciplina herramental en Ciencias Económicas, se procuró estimular el aprendizaje de cada tema específico a través del planteamiento de situaciones relacionadas con la profesión. La variedad y características de estas situaciones son motivadoras del aprendizaje e influyen directamente en la calidad de las actividades de los alumnos.

En primer lugar, se pudo acceder a las percepciones de los alumnos frente al uso de las tecnologías bajo esta modalidad, y luego se indagó hasta encontrar evidencias tangibles de la evolución de sus aprendizajes durante el cursado de la asignatura.

Las actividades desarrolladas en 2009 tanto en el aula virtual como en forma presencial fueron:

- *Realización de autoevaluativos:* Para cada una de las temáticas estudiadas, que posibilita un *feed back* permanente y rápido, tanto en el aula virtual como en la guía impresa, con diferente ejercitación en cada caso. Esto incrementó la tarea del alumno que pudo realizar un seguimiento continuo de la asignatura aprovechando el material que se puso a su disposición.

Los autoevaluativos en el aula virtual fueron de respuesta múltiple e incluyeron también preguntas sobre los materiales que el alumno debía estudiar.

- *Las evaluaciones* se habilitaron para ser realizadas on-line durante un periodo de tiempo. Mediante este procedimiento se trató tanto de comprobar la adquisición de determinados conocimientos específicos, como de conseguir ciertas capacidades para la búsqueda y selección de información, en este caso dentro de los materiales de la propia plataforma.

Se construyó una tabla de valoración, con criterios a tener en cuenta para las evaluaciones, que incluyó indicadores en cuanto a la claridad en la argumentación, la utilización de esquemas y/o gráficos en las respuestas, además de la presentación de los contenidos conceptuales y procedimentales.

- *Participación en foros de discusión* sobre algunos temas de la asignatura: Esta participación incluyó también la búsqueda y selección de información. La evaluación de esta actividad se realizó mediante criterios de calidad tanto en los aspectos formales como en la capacidad de argumentación de las intervenciones.

En el curso 2010 se incrementaron las actividades en el aula virtual, donde se presentaron varios tipos de actividades:

- Ejercicios específicos de los diferentes bloques que se remitían al tutor para su posterior evaluación.
- Propuestas para ampliar y profundizar en los contenidos con lecturas de documentos.
- Ejemplos sobre contenidos concretos para analizar de forma individualizada.
- Foros y chats: los fue planteando cada tutor a medida que avanzaba el curso, según las características e intereses de cada grupo.
- Wiki: de modo asincrónico los estudiantes armaron conjuntamente un documento virtual desarrollando un concepto específico propuesto por los docentes.
- Glosario: se construyó un glosario virtual a partir de definiciones propuestas por los estudiantes.
- Mapa conceptual: se propuso confeccionar un mapa conceptual utilizando la computadora, obteniendo una muy buena respuesta del alumnado al manejar nuevas herramientas multimedia.

Resultados

Cabe destacar que en el 1° cuatrimestre de cada año, cursan la asignatura aquellos estudiantes que no lograron aprobarla en el dictado regular del 2° cuatrimeste del año anterior. De modo que son estudiantes que ya poseen conocimientos respecto a la asignatura. El número de estos alumnos recursantes es significativamente menor al del cursado regular.

Por razones de espacio, se muestran solamente algunos de los resultados obtenidos en los años 2009 y 2010, aquellos más significativos como la opinión de los alumnos sobre los aspectos tenidos en cuenta en el aula virtual, la aceptación de la autoevaluación con su incidencia en el rendimiento académico y la movilidad de la condición académica en la asignatura después de la utilización del aula virtual.

Cuadro Nº 1: Ítems y resultados de la encuesta de opinión *on-line* realizada a los alumnos, construida en escala Likert de 5 puntos. Junio de 2010.

Categoría y preguntas	**Puntuación media sobre 5 puntos**
Aspectos docentes y metodológicos	
El programa y la organización de la asignatura son los adecuados.	4,3
Los contenidos y el formato de los temas son adecuados a los objetivos.	4
El tiempo de dedicación necesario es adecuado.	3,8
Los videos fueron de utilidad en el estudio de la asignatura	4,8
Grado de conocimientos que cree que ha adquirido sobre la materia en la modalidad semipresencial.	4
Los siguientes elementos del procedimiento de evaluación de la asignatura:	
Los evaluativos y autoevaluativos tuvieron el nivel adecuado.	4
Los evaluativos fueron útiles para el aprendizaje	4
Los foros de discusión fueron útiles.	3,6
Aspectos técnicos de la plataforma Claroline y la enseñanza *on-line*	
La plataforma usada es amigable y fácil de usar.	4,3
No ha tenido problemas técnicos de acceso o utilización.	4
Facilidad de seguimiento de la asignatura por Internet.	3,5
La comunicación a través del Aula Virtual es la adecuada.	3,4
Las consultas *on line* fueron útiles y clarificadoras	4,2
Valoración general de curso con modalidad semipresencial	
La actividades en el aula virtual son útiles para el aprendizaje de la asignatura	4
Hubo coordinación entre clases presenciales y virtuales	3,8
Las actividades propuestas en el aula virtual complementaron las actividades de aprendizaje presentadas en las clases presenciales	4

En estos resultados se puede observar que hubo en general una buena calificación para los diferentes aspectos considerados. Es de destacar la muy buena puntuación obtenida en la organización de la asignatura, la utilidad de los videos y en los aspectos técnicos como la facilidad de uso de la plataforma utilizada y la importancia de las consultas *on line* que se ofrecieron con la utilización de la pizarra electrónica.

Analizando los cambios de conducta de los alumnos respecto de la autoevaluación, iniciada con las guías de estudio y luego con la presentada en el aula virtual, se aplicó la Prueba Estadística del Cambio de Mc Nemar, donde cada sujeto se utiliza como su propio control y las mediciones se realizan en escala nominal, la que mostró que estadísticamente no se registran cambios significativos en las conductas de los alumnos. Es decir que el proceso de autoevaluación iniciado con las guías de estudio tuvo su continuidad en el presentado en el aula virtual. (Veliz, Pérez y Ramos, 2011).

Cuadro Nº 2: Distribución de frecuencias de las calificaciones del 1º examen parcial y el haber utilizado los autoevaluativos del aula virtual. 1º cuatrimestre de 2009.

Se autoevaluó en el aula virtual	Resultados 1º Parcial			Total %	Test de Independencia
	Aplazados	Regulares	Aprobados		
No	5,0%	14,5%	2,3%	21,8%	Estadístico exacto de Fisher 43,761 Valor de P<0.05
Si	1,8%	**33,2%**	**43,2%**	**78,2%**	
Total%	6,8%	47,7%	45,5%	$100,0_{(220)}$%	

En este cuadro se destacan los alumnos aprobados y que se autoevaluaron mediante el aula virtual, con marcadas diferencias en un mejor rendimiento académico de los que utilizaron los autoevaluativos propuestos. Resultados similares se lograron en el 2º cuatrimestre del mismo año. Al aplicar el test estadístico exacto de Fisher se muestra que los buenos resultados de ambos parciales se encuentran asociados con haberse autoevaluado mediante el aula virtual.

Cuadro Nº 3: Movilidad de la situación académica de los alumnos del cursado especial que trabajaron con aula virtual, 1º cuatrimestre 2010.

Condición **Después** del dictado 1º Cuatrimestre 2010 con modalidad semipresencial	Condición **Antes** del dictado 1º Cuatrimestre 2010		Total
	Libre	Regular	
Libre	16%	8%	13%
Regular	**19%**	43%	29%
Promocionado	**65%**	**49%**	58%
Total	$100_{(77)}$%	$100_{(64)}$%	$100_{(141)}$%

En este cuadro se ponen de manifiesto los alumnos que al inicio del dictado eran libres y cambiaron su situación a regulares (19%) o promocionales (65%) y los que se inscribieron en el dictado teniendo la condición de regular que promocionaron la asignatura (49 %).

Conclusiones

Los alumnos que trabajaron con metodología de característica "blended learning" en su mayoría obtuvieron mejoras en su rendimiento, siendo favorable su opinión respecto de su utilización.

La implementación de la enseñanza virtual en el aula no es un proceso de ejecución mecánica que produce resultados inmediatos sino que requiere, para ser eficaz, un mayor compromiso por parte del docente, a través de un quehacer reflexivo, planificado y de perfeccionamiento continuado. Implica nuevos roles para los alumnos y, nuevas actitudes y enfoques metodológicos para los profesores.

Es importante la actualización de los docentes en lo que a las nuevas tecnologías se refiere y comprender que la modalidad de enseñanza b-learning demanda la necesidad de crear equipos multidisciplinarios, equipos docentes actuando en forma coordinada para realizar la actividad educativa.

Las experiencias de innovación, llevadas a cabo durante los últimos años en asignaturas del área matemática mediante la modalidad b-learning han mostrado resultados altamente positivos y una excelente aceptación por parte de los alumnos.

A pesar de que algunos de los objetivos fijados, como la obtención de un cierto nivel de capacidad para trabajo en grupo a través de Internet, no se han conseguido, es preciso buscar nuevos procedimientos para su desarrollo. Así, se están llevando a cabo diferentes iniciativas para elaborar y utilizar herramientas de trabajo en grupo on-line.

Referencias bibliográficas

Barbera, E. y Badia, A. (2005). Hacia el Aula Virtual: actividades de enseñanza y aprendizaje en la red. *Revista Iberoamericana de Educación*, 36(9), 1 – 21.

García Aretio, L. (2004). Viejos y nuevos modelos de educación a distancia. *Revista Bordón, Educación en Tecnologías* 56, 3 - 4.

Navarro del Ángel, D. (2009). Modelos Educativos y Entornos Virtuales de Enseñanza. *Revista Interdisciplinar – Entelequia - Especial Educación Superior*, (10), 177 – 187.

Prats Fernández, M. (2003). *El blended learning*. Recuperado el 2 de noviembre de 2009 de http://www.educaweb.com/esp/servicios/monografico/formacionvirtual/118108 3.asp

Santos Preciado, J. M. (2006): Las tecnologías de la información y de la comunicación y el modelo virtual formativo: nuevas posibilidades y retos en la enseñanza de los SIG. *GeoFocus (Artículos)* 6, 113-137.

Veliz, M., Pérez, M. A. y Ramos, C. (2011). *La autoevaluación como herramienta para el aprendizaje.* En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 24*, 273-282. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

PROPUESTA DE ACTIVIDADES SOBRE FUNCIONES EN UN ENTORNO VIRTUAL DE APRENDIZAJE. ANÁLISIS DE SU IMPLEMENTACIÓN

Daniela Müller, Adriana Engler, Silvia Vrancken
Facultad de Ciencias Agrarias. Universidad Nacional del Litoral Argentina
dmuller@fca.unl.edu.ar, aengler@fca.unl.edu.ar, svrancke@fca.unl.edu.ar

Resumen. La introducción de recursos tecnológicos en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la Matemática, han generado nuevas posibilidades para mejorarlos y enriquecerlos.

Funciones es uno de los temas que componen la asignatura Matemática I en primer año de Ingeniería Agronómica. Para este tema, considerando los conceptos básicos, clasificaciones y las funciones escalares algebraicas y trascendentes, se diseñó una experiencia que combinó actividades presenciales con otras virtuales. La misma se implementó con 26 alumnos.

En este trabajo se presentan, las distintas actividades virtuales propuestas, junto a los resultados generados en la implementación de algunas de ellas. Se analizan las respuestas emitidas por los alumnos y las principales características de sus producciones, que contribuyen a la reflexión sobre lo actuado.

Palabras clave: entorno virtual, actividades, funciones

Abstract. The introduction of technological resources in the teaching and learning of mathematics, have opened new possibilities to improve and enrich them. Functions are one of the issues that make up the course Mathematics I in first year of Agricultural Engineering. For this topic, considering the basic concepts, classifications and algebraic and transcendental scalar functions, we designed an experience that combined classroom activities with other virtual activities. It was implemented with 26 students.

In this paper we present, different proposals virtual activities and the results generated in the implementation of some of them. We analyze the answers of the students and the main features of their productions, which contribute to reflection on our actions.

Key words: virtual environment, activities, functions

Introducción

La Matemática resulta una barrera difícil de superar para los alumnos que deben enfrentarla en el primer año de su carrera universitaria. En general, representa una "asignatura-problema" dado que alrededor de ella se genera mucho temor, producto de numerosos fracasos, de incomprensión de lo estudiado, de no hallar el sentido de su aplicación, de los rendimientos relativamente bajos.

Muchos de los alumnos ingresantes a Ingeniería Agronómica de la Universidad Nacional del Litoral de Argentina, presentan dificultades para abordar distintos tipos de textos, evidencian carencia de estrategias de aprendizaje que los conduzcan a consolidar contenidos procedimentales, es decir procesos que les permitan realizar análisis, establecer relaciones, comparaciones, interpretaciones, fundamentaciones, argumentaciones y ejemplificaciones, entre otras. También se observa en ellos, una escasa transferencia de conocimientos a nuevas situaciones y una marcada disociación entre los conceptos teóricos y las aplicaciones prácticas. Todo esto se refleja en resultados poco satisfactorios en evaluaciones parciales y finales que constituyen un aspecto negativo que, en muchos casos, los conduce a abandonar o a adoptar una actitud de mínimo esfuerzo o de rechazo hacia la matemática.

Marco de referencia

La creciente introducción de recursos tecnológicos en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la Matemática, han generado nuevas posibilidades para mejorarlos y enriquecerlos. Integrar recursos virtuales a los procesos en los que las actividades presenciales se mantienen de manera significativa, permite, entre otros aspectos, mejorar el acceso a los contenidos y a sus distintas representaciones. Esto puede complementarse con guías de estudio y diversas propuestas de actividades (Sigalés, 2004). En aquellas asignaturas donde el libro de texto sigue siendo la herramienta básica de aprendizaje, como ocurre en nuestro caso, debemos tener presente que las actividades que planteemos utilizando cualquier recurso virtual, debe constituir un complemento didáctico al estudio y un apoyo a los procesos de enseñanza y de aprendizaje a través de las distintas herramientas y materiales disponibles.

Moreno (2002), establece que cuando se utiliza la tecnología en el ámbito educativo, no es la tecnología en sí misma el objeto central de interés, sino el pensamiento matemático que pueden desarrollar los alumnos bajo la mediación de dicha tecnología. En este sentido, Coll (2004), expresa que la "novedad" educativa que ofrecen las nuevas tecnologías a los docentes y alumnos no son los recursos aislados que incluyen. A partir de la integración de los mismos resulta que puede crearse un nuevo entorno de aprendizaje, con condiciones inéditas para operar la información y transformarla.

A partir de esto, consideramos necesaria la creación de un escenario para el aprendizaje donde la interacción con el alumno se encontrara mediada por propuestas de enseñanza que, con diferentes materiales educativos y utilizando las nuevas tecnologías, propicie la adquisición y construcción del conocimiento de manera flexible y autónoma. Es decir, brindando la posibilidad de que para algunas actividades, el alumno seleccione la forma, el tiempo y lugar de su aprendizaje, teniendo la posibilidad de tomar decisiones sobre el mismo. Para esto fue preciso reflexionar acerca del uso adecuado de estos espacios en contextos concretos y procesos específicos de enseñanza y de aprendizaje, de manera adecuada a las necesidades de aprendizaje de los alumnos hacia quienes estaba dirigido, para dar soporte a los procesos cognitivos de ellos, a la interacción social entre los participantes o a la interrelación entre ambos procesos.

Métodos e instrumentos

Para los alumnos que presentaron las dificultades mencionadas y que no lograron aprobar Matemática I en el primer semestre del primer año de la carrera Ingeniería Agronómica de la Facultad de Ciencias Agrarias de la Universidad Nacional del Litoral, se diseñó e implementó otro escenario educativo. De los dos bloques temáticos que conforman el contenido de Matemática I, Funciones y Álgebra, sólo para el de Funciones, se planificó una experiencia que combinó actividades presenciales con otras virtuales. En el desarrollo de las mismas se trató que resultaran variadas, de diferente complejidad y que abundaran en contenido, con el fin de enriquecer sus posibilidades y de promover la reflexión sobre lo aprendido.

Las actividades virtuales elegidas fueron *guías de resolución de actividades*, *foros de reflexión*, como un espacio de comunicación asincrónica, y *cuestionarios* de autoevaluación. Estos últimos se diseñaron con preguntas de opción múltiple a las que se les agregó un mensaje de estímulo en el caso de que la respuesta seleccionada hubiera sido correcta, o el concepto o procedimiento que deberían revisar, en caso de que fuera incorrecta.

La experiencia se realizó en el segundo semestre de 2009, durante ocho semanas con 26 alumnos utilizando la plataforma de la universidad (http://entornovirtual.unl.edu.ar).

En este trabajo se presentan las distintas actividades virtuales propuestas a los alumnos de nivel universitario, un breve análisis de las mismas y los resultados generados de su implementación. Se analizan las respuestas emitidas por ellos y las principales características de sus producciones, que contribuyen a la reflexión sobre lo actuado.

Resultados

Por razones de extensión se presentan sólo algunas de las actividades, un breve análisis de las mismas y de las respuestas dadas por los alumnos.

Guías de actividades

Las guías de actividades se redactaron con el propósito de que, a partir de todo lo revisado y trabajado en las clases presenciales, los alumnos se enfrentaran a la resolución de distintos ejercicios y problemas que integraran los contenidos de la semana. También, se esperaba que adquirieran destrezas en la presentación de documentos con contenido matemático. En la presentación de las mismas se les sugería que las resolvieran utilizando cualquier editor de textos, cuidando el uso de la notación matemática, realizando las gráficas correspondientes y finalmente, dentro del plazo estipulado, subir el archivo a la plataforma. También podían responderlas de manera manuscrita y entregarlas personalmente.

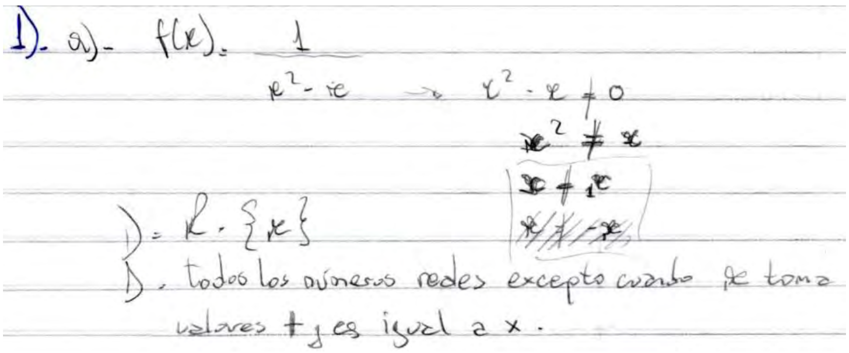
A continuación se presentan las respuestas más significativas a una de las actividades propuestas:

1) Determine el dominio de $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$

Respuesta esperada: **a)** D □ R – {0, 1}

- Respuestas obtenidas al ítem **a)**:
  - *El dominio son todos los R.*
  - *Dominio: R - [± 1]*
  - *R - {1}*
  - $Df: \{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \neq 1 \wedge x \neq 0\}$
  - *El dominio de esta función son, el conjunto de todos los reales menos el 1 y el 0 ya que cualquiera de ellos anularía el denominador.*
  - *el dominio es* $\{R - \{\pm 1\}$

Uno de los trabajos presentados de manera escrita muestra el siguiente procedimiento:


1). a)- $f(x) = \frac{1}{x^2 - x}$ → $x^2 - x \neq 0$

$x^2 \neq x$

$x \neq x$

D = R - {x}

D. todos los números reales excepto cuando se toma valores +, y es igual a x.

Imagen 1

Las producciones de los alumnos posibilitan observar, básicamente, sus procedimientos y detectar errores y dificultades en la comprensión de consignas o del tema en cuestión.

En el ejemplo presentado, se observaron no solo errores conceptuales, sino que también dificultades en la notación y utilización de la simbología matemática. Frente a ellos, fue importante realizar intervenciones oportunas que contribuyeran a corregir concepciones erróneas.

Cada semana se habilitó en la plataforma, un archivo en el que figuraba la resolución completa de la guía de actividades resuelta la semana anterior. El propósito fue que los alumnos, al consultarlo, realizaran una autoevaluación de sus producciones. Cualquier duda que surgiera de la confrontación entre ambas resoluciones, podían manifestarla en la sesión presencial o en el foro de consultas habilitado para tal fin. De la información estadística que se obtiene en la plataforma, las actividades resueltas la primera semana fueron consultadas por veintiún alumnos (80,77%). En las semanas siguientes, esta cantidad fue disminuyendo, determinándose la última semana sólo 7 consultas (27%).

Foros de reflexión

Cada semana se propuso un foro que contemplara alguna situación diferente a las trabajadas en otros contextos, que permitiera abordar algunas cuestiones específicas del contenido matemático y que contribuyeran al intercambio de ideas y de opiniones. El objetivo fue encontrar un espacio de reflexión compartida que, promoviera el encuentro y la comunicación alrededor de un mismo tema.

De los textos correspondientes a las intervenciones de los participantes se analizó a quién se dirigían y cómo éstas se construyen. Lo primero tiene relación con determinar si la intervención responde a algún tipo de interacción para lo cual se consideró apropiado determinar el destinatario de la intervención: el docente, los compañeros del grupo u otro participante en general cuya identidad no quedaba explícita. Las dos primeras responden a un contexto de interacción mientras que la tercera no. El segundo aspecto se relaciona con los elementos sobre los cuales se construye el contenido de la intervención, es decir si la misma se realiza sobre la base de de argumentos personales o a partir de las participaciones anteriores de otros participantes.

La participación en los foros de las tres primeras semanas fue del 100%. Luego fue disminuyendo paulatinamente, hasta llegar a un 50% de participación en el último.

La mayoría de las intervenciones en las distintas semanas, fueron de carácter personal, es decir construidas sobre la base de argumentos propios. Solo en el foro de la segunda semana se observó el mayor número de intervenciones relacionadas con otras participaciones anteriores. Las mismas no se limitaron simplemente a presentar una respuesta, sino que retoman o corrigen lo escrito por otros. Algunos pasajes sobre la primera de las preguntas de ese foro, fueron los siguientes:

Foro: Para pensar … 2

1) Si una función cualquiera f(x): [a, b] → R es creciente, ¿cuántas intersecciones *con el eje x* puede tener en ese intervalo?

- *Si se trata de una función lineal va a tener una sola intersección con el eje x, y si se trata de una función cuadrática, tendrá dos intersecciones. (Ayelén)*
- *Si la gráfica de una función es creciente corta una sola vez al eje x. (Mauro)*
- *Una función creciente puede tener una, o ninguna intersección con el eje x. En el caso que la función sea cuadrática un tramo de la función es creciente y otro decreciente, por eso puede tener 2 intersecciones con el eje x, y como solo hablamos del intervalo creciente, solo puede tener una o ninguna intersección con en eje x. (Ricardo)*
- *No coincido con la opinión, de que en una función cuadrática, intercepte al eje de las x en dos puntos. En una función creciente lineal, interceptará al eje de las x en un solo punto. En una función cuadrática, el intervalo que sea creciente de la grafica interceptara al eje de las x en un solo punto. También puede ocurrir que siendo las graficas crecientes pueden no interceptar al eje de las x en ningún punto. (Federico)*
- *Mi opinión sobre la respuesta de Ricardo es correcta porque una función creciente puede tener una o ninguna intersección con el eje de las x, ya que si es una función cuadrática tendrá un tramo de grafica creciente y el otro decreciente. (Juan)*
- *Estoy de acuerdo con lo que opinó Ricardo cuando dice que una función creciente puede tener una o ninguna intersección con el eje x, pero no coincido cuando se dice que en una función cuadrática puede haber también dos o más intersecciones, ya que en este caso se habla de un intervalo y una función cuadrática tendrá también una o ninguna intersección con el eje x. (David)*
- *Corrijo a algunos de mis compañeros que respondieron que puede no tener ninguna intersección con el eje x al ser creciente o decreciente diciendo q nunca puede tener ninguna intersección ya que la función está definida en todos los reales. no estoy seguro pero yo lo razoné así. (José)*
- *Quiero corregir las dos primeras preguntas ya que al hablar de una función de segundo grado me compliqué y aparte porque en el enunciado del ejercicio decía que "teniendo una función cualquiera" si la grafica es creciente tocara al eje x una o ninguna vez, y si es decreciente, pasará lo mismo. (Ayelén)*

Del total de respuestas emitidas, el 73% fueron hacia el grupo en general, no siendo posible determinar un destinatario en particular. Ejemplo de esto son las tres primeras intervenciones indicadas anteriormente. El 27% restante fueron dirigidas hacia un compañero acordando con la respuesta dada por éste y complementándola en algunas oportunidades con otro procedimiento. También puede observarse que, a partir de la lectura de las intervenciones de los compañeros, una alumna (Ayelén) reformula su respuesta. Dado que esto lo reiteró en otros foros, se presumía que ella sí leía las intervenciones de sus compañeros y las confrontaba con la propia. Esto pudo confirmarse al analizar sus respuestas a la encuesta.

Todos los errores conceptuales detectados en este foro, fueron discutidos durante la siguiente sesión presencial, analizando junto con los alumnos, cada una de las intervenciones realizadas.

Cuestionarios

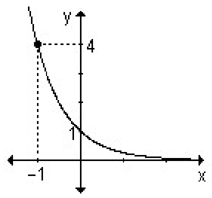
Cada semana se propuso también un cuestionario con preguntas de opción múltiple sobre los contenidos involucrados. El objetivo principal de los cuestionarios fue fomentar en los alumnos la autoevaluación de su aprendizaje, realizando actividades que le permitieran valorar el trabajo realizado y recibir las indicaciones necesarias para identificar procedimientos o determinados conceptos que deberían reforzar o corregir. Al respecto, Barberà y Badía (2004), consideran que las actividades de autoevaluación les deben proporcionar a los alumnos información tanto del proceso de aprendizaje que están siguiendo como de la calidad del conocimiento que están construyendo. Agregan que esta información debe serles útil para tomar decisiones, en caso de que resulte conveniente, para reorientar su proceso de aprendizaje en el sentido que sea necesario, tanto para aspectos conceptuales, procedimentales, estratégicos o metacognitivos.

Con ese propósito, en la elaboración de las preguntas y de las correspondientes opciones, se tuvieron en cuenta las distintas representaciones y la conversión de unas en otras. Para cada pregunta, se presentaron tres opciones de las cuales solo una era verdadera. Las otras, correspondían a concepciones erróneas o procedimientos incorrectos que se fueron detectando en distintas instancias del dictado de Matemática I en años anteriores.

Esperando que el alumno realice un seguimiento continuo de su proceso de aprendizaje, es importante que estos cuestionarios sean de tipo formativo. En virtud de ello, se diseñó para cada opción que el alumno seleccione, un mensaje de estímulo en el caso de que haya sido correcta, o que contenía el concepto o procedimiento que debería revisar, en el caso de que la selección haya sido incorrecta. La configuración de estos cuestionarios contempló que todos los mensajes se presentaran al finalizar la resolución completa del mismo.

Las siguientes imágenes muestran la devolución que recibió un alumno en distintos cuestionarios al seleccionar una opción incorrecta.

Dada la gráfica de la función exponencial, la expresión algebraica de la misma es:



Seleccione una respuesta.

a. (1/4)^x

b. (1/4)^(-x) ✗ Esto equivaldría a 4^x. Por lo tanto si la gráfica es decreciente, la base de la misma debe ser...

c. 4^x

Incorrecto

Puntos para este envío: 0/10.

El polinomio $p(x) = (2\mathbf{m}+3)x^3 + x^2 - x + 5$, es divisible por $(x + 1)$ si el valor de **m** es:

Seleccione una respuesta.

a. m = 0

b. m = -4 ✗ Revisa las operaciones.

c. m = 2

Recuerda: p(x) es divisible por (x + 1) si p(-1) = 0, es decir si -1 es raíz de la ecuación p(x) = 0

Incorrecto

Puntos para este envío: 0/10.

Imágenes 2 y 3

En las tres primeras semanas, los cuestionarios fueron resueltos por la totalidad de los alumnos. El porcentaje fue disminuyendo levemente hacia las últimas semanas, donde se registraron diecisiete respuestas (65,38%) en el último. En todas las semanas se observaron alumnos que rehicieron los cuestionarios.

Comentarios

Con respecto a las guías de actividades, se considera que cumplieron con los objetivos propuestos. Los alumnos mostraron responsabilidad en la resolución de las mismas y en el cumplimiento de los plazos estipulados para hacerlo. Se esperaba que el número de alumnos que presentara las guías en la plataforma utilizando un editor de textos, aumentara al transcurrir las semanas, pero esto no fue así. De todos modos, debe destacarse el esfuerzo observado en mejorar la presentación de gráficas y de ecuaciones matemáticas a lo largo de las distintas semanas de la experiencia.

En el desarrollo de los distintos foros propuestos, el docente realizó el seguimiento continuo y la moderación de los mismos, interviniendo en diversas oportunidades para reorientar la dirección de las intervenciones de los alumnos, para hacer notar, sin corregir, concepciones erróneas o alguna respuesta incompleta. Con respecto a la falta de interacción, se supone que podría deberse a que los alumnos no están acostumbrados a utilizar estos foros de reflexión. Puede presumirse que si estos espacios virtuales de comunicación se utilizaran de manera más sistemática, las intervenciones mejorarían en cantidad y en calidad, y se producirían interacciones entre los alumnos.

De acuerdo a los resultados obtenidos, se considera que las actividades desarrolladas a través de la plataforma virtual enriquecieron las sesiones presenciales y generaron nuevos escenarios de intervención didáctica en el aula, logrando un conjunto de acciones y estrategias propias de las clases presenciales y también de otro espacio que permitió extender las actividades más allá de las paredes del aula.

Por otro lado, integrar las nuevas tecnologías a los procesos curriculares más tradicionales, es uno de los objetivos que como docentes debemos conseguir. No hacerlo supone una ruptura o desconocimiento de la realidad que existe fuera de las aulas.

El uso de las nuevas tecnologías debe considerarse como un complemento que incrementará y completará la actividad del docente, pero no como un recurso alternativo o sustituto de la enseñanza presencial.

Referencias bibliográficas

Barberà, E. y Badia, A. (2004). *Educar con aulas virtuales: Orientaciones para la innovación en el proceso de enseñanza y aprendizaje*. Madrid: A. Machado.

Coll, C. (2004). Psicología de la Educación y prácticas educativas mediadas por las tecnologías de la información y la comunicación: Una mirada constructivista. *Sinéctica, (25)*. Sección: Separata 1-24. Recuperado el 12 de febrero de 2011 de http://portal.iteso.mx/portal/page/portal/Sinectica/Revista

Moreno, L. (2002). Fundamentación cognitiva del currículo de matemáticas. *Memorias del Seminario Nacional: Formación de docentes sobre el uso de nuevas tecnologías en el aula de Matemáticas* (pp. 40-66). Bogotá, Ministerio de Educación Nacional, Cinvestav – IPN.

Sigalés, C. (2004). *Formación universitaria y TIC: nuevos usos y nuevos roles*. Recuperado el 20 de febrero de 2005 de http://rusc.uoc.edu/ojs/index.php/rusc/article/view/v1n1-sigales/v1n1-sigales

LA SISTEMATIZACIÓN DE FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL SOBRE LA BASE DEL TRABAJO INDEPENDIENTE Y EL USO DE LAS NUEVAS TECNOLOGÍAS

Adolfo Álvarez Martínez, José Manuel Ruiz Socarrás, Seydel Bueno García, Alexia Nardín Anarela
Universidad de Camagüey Ignacio Agramonte Cuba
adolfo.alvarez@reduc.edu.cu,jose.ruiz@reduc.edu.cu, seydel.bueno@reduc.edu.cu alexia.nardin@reduc.edu.cu

Resumen. En este trabajo se presenta una estrategia encaminada a sistematizar las funciones reales de una variable real (funciones de R en R), en el primer año de las carreras de Ingenierías, la cual se implementa desde los Cursos Preparatorios de Matemática, y abarca la asignatura Matemática I. La misma se basa en el trabajo independiente de los estudiantes y el uso de las nuevas tecnologías de la información y las comunicaciones (TICs). Se toma como referente teórico, presupuestos de la Psicología Educativa, la Didáctica de la Matemática, y diversos resultados, que en cuanto al uso de las nuevas tecnologías tienen lugar en la enseñanza de la Matemática en el nivel superior, tanto en el ámbito nacional como internacional.

Palabras clave: estrategia, funciones, trabajo independiente, tecnologías

Abstract. This paper proposes a strategy which aims at systematizing the real functions of a real variable (functions of R in R). These functions are taught and practised in the first year of Engineering Majors. They are part of the preparatory courses and also taught as part of the subject Mathematics I. This subject mainly focuses on developing abilities which enable students to work on their own. They also become familiar with the new Technologies of Information and Communication. The theoretical of this paper are derived foundations from Educational Psychology, the Didactics of Mathematics, and from data collected in different studies on these new technologies. These studies have centered on the teaching of Mathematics in higher education and include both national and international papers.

Key words: strategy, functions, students working on their own, technologies

Introducción

Cuando se investiga dentro del proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática el tratamiento que reciben desde el punto de vista técnico metodológico los complejos de contenidos que abarca el programa de Matemática I en las carreras de Ingenierías, se manifiesta de inmediato que todos están de una forma u otra relacionados con el concepto de función, considerados por muchos esencial en la disciplina de Matemática en cualquier carrera que la incluya dentro de su currículo, "el concepto más importante de todas las Matemáticas es, sin dudarlo, el de función: en casi toda la matemática moderna, la investigación se centra en el estudio de las funciones" (Spivak, 1970, p. 47).

Sin embargo en los diagnósticos realizados a los estudiantes que egresan de la enseñanza media superior en las bases de contenidos que comprenden el concepto función real de una variable real, se contactan serias deficiencias, que limitan posteriormente el aprendizaje del Cálculo Diferencial e Integral en una variable. Lo cual se traduce en deficiencias docentes, que en muchos de los casos provocan la deserción de estudiantes en el primer año de la carrera, lo que afecta a uno de los indicadores fundamentales de la eficiencia en la enseñanza superior, la permanencia en las carreras de Ingenierías, por citar un ejemplo en el caso de la carrera de Ingeniería Eléctrica en la universidad de Camagüey en los cursos (2009-2010), (2010-2011) el 96% de las bajas fueron de carácter académico provocado fundamentalmente por la asignatura Matemática.

Dentro de los aspectos que propone el ministerio de educación superior en Cuba para trabajar en pos de la solución de este problema se encuentra:

La determinación precisa del nivel de preparación de los estudiantes que acceden a la educación superior y, como consecuencia de ello, la solución temprana de las posibles insuficiencias. Sobre esta base es que se presenta el siguiente trabajo.

Desarrollo

La enseñanza - aprendizaje de la Matemática tiene como objetivo fundamental el empleo, por parte de los estudiantes, de los conocimientos adquiridos, en la resolución de ejercicios de naturaleza diversa, alcanzando una dimensión objetivamente superior cuando se utilizan en la resolución de problemas concretos tanto a nivel curricular como en la esfera de actuación del futuro profesional.

Para la Matemática, que dentro de su objeto de estudio tiene la búsqueda de relaciones y dependencias entre variables, las funciones ocupan un lugar de importancia suprema, partiendo del hecho de que el hombre en su constante interacción dentro de la sociedad y con la naturaleza logra solucionar diversos problemas con la ayuda de las mismas. Estas, sin duda alguna, posibilitan demostrar la relación Matemática - realidad objetiva y contribuyen a entender a esta ciencia como un medio eficaz para transformar dicha realidad.

Sin embargo los estudiantes ingresan con insuficiencias significativas en las bases de contenidos del concepto función, que en muchos de los casos persisten e incluso trascienden el primer año de la carrera. En el caso de los estudiantes que conforman la población investigada; los estudiantes de la carrera Ingeniería Eléctrica del curso regular diurno en el periodo (2010-2011), los resultados alcanzados en los diagnósticos realizados en el transcurso del primer mes de clases fueron los siguientes:

- ❖ El 20% de los estudiantes, reconoce el concepto de función representado de una forma diferente a la analítica, y sus propiedades fundamentales, específicamente el dominio e imagen, la inyectividad, la simetría, la monotonía y periodicidad.

- Al presentarse las funciones mediante esbozos de sus gráficos se contacta que la mayoría de los estudiantes, en el orden del 60% reconoce propiedades fundamentales de las mismas.
- El 19% de los estudiantes fue capaz de relacionar el gráfico correspondiente a funciones obtenidas mediante transformaciones, composiciones, combinaciones y operaciones entre funciones elementales básicas, con su representación analítica, lo cual demuestra su desconocimiento acerca de la influencia que estos procesos tienen sobre su representación gráfica.
- En cuanto al trabajo con ecuaciones e inecuaciones funcionales se pudo constatar que: el 27% domina los procedimientos para su resolución, el 19% interpreta el significado geométrico de las mismas, así como de su solución, y que tan solo un 14% tiene en cuenta el dominio de las funciones, para dar su solución.
- Los resultados de modelar un fenómeno funcional fueron aún más discretos pues solo el 17 % encontró un modelo correcto para el problema planteado, el cual describía una situación práctica concreta.

Los resultados anteriores, alarmantes, desde el punto de vista de los autores exigen que se revise en las carreras de Ingeniería el proceso de enseñanza – aprendizaje de este concepto.

El concepto función comienza su tratamiento en la escuela desde las edades tempranas, y se mantiene a lo largo de toda la enseñanza de la Matemática, en cada nivel se va enriqueciendo y profundizando, hasta llegar a la enseñanza superior, donde para el caso de las Ingenierías se tratan a través de todo el programa de la Matemática I. También estas aparecen con fuerza en variados temas de las asignaturas Álgebra y Física, lo cual permite continuar desarrollando el pensamiento funcional matemático en los estudiantes, habilidad esta, fundamental para un ingeniero.

En esta enseñanza (la superior), se le concede un papel predominante al estudio de los procesos infinitos y sus situaciones límites, que comienzan su tratamiento en la asignatura Matemática I, con el tema Límite y Continuidad, pasando a través de todo el Cálculo Diferencial, hasta llegar al Integral. En todos estos temas las funciones de R en R constituyen un núcleo básico, sobre el cual se estructura toda la teoría del Cálculo Superior.

También en la enseñanza superior se profundiza en el uso de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones, fundamentalmente aquellas que necesitan de las computadoras, como es el caso de: los asistentes matemáticos, los ficheros de texto, el correo electrónico, la intranet etc. Además en esta enseñanza se incluyen por primera vez los laboratorios de Matemática, como un tipo de forma organizativa de la clase, en la cual los estudiantes utilizan asistentes, tales como el Derive, (es el recomendado para las carreras de Ingeniería en el primer año), para resolver tareas de la asignatura, lo cual permite integrar, y sistematizar la teoría estudiada, si es utilizado eficientemente.

Estas clases de laboratorios de Matemática brindan un marco propicio para tratar las funciones matemáticas en una dimensión superior, pues es posible realizar un análisis más general e integrador de las mismas, en la que se interactúa con las diferentes representaciones del concepto función, fundamentalmente las gráficas y analíticas, lo cual facilita contrastar los resultados que se alcanzan en el trabajo con las mismas, por la vía analítica con sus gráficos correspondientes, los que serán visualizados en diferentes pantallas, hasta encontrar la más conveniente para develar las propiedades de las funciones que más interesan en cada caso estudiar.

Lo anteriormente planteado justifica la necesidad de que se analice bajo una perspectiva diferente el proceso de fijación del concepto función real de una variable real y en especial su sistematización, ya que este concepto ha sido elaborado con anterioridad en las enseñanzas precedentes a partir de las etapas de elaboración de conceptos matemáticos planteadas por Ballester (1994).

En este trabajo, se acepta como sistematización de conceptos matemáticos, a la forma de fijación cuyo objetivo fundamental es estructurar un sistema de conocimientos (mediante comparaciones de características que destacan lo esencial del saber y el poder adquirido por los estudiantes), estrechamente vinculado al análisis de propiedades comunes y diferentes, al establecimiento de nexos entre los conocimientos que eventualmente pudieran parecer aislados, hasta organizarlos en un sistema (Ballester, 1994).

La enseñanza de la Matemática en las carreras de Ingeniería tiene rasgos particulares, de los que no esta exento el proceso de sistematización del concepto función real de una variable real, debido en gran medida al hecho planteado anteriormente de que en la universidad existen potencialidades superiores de acceso a una infraestructura tecnológica que incide favorablemente en el proceso de enseñanza-aprendizaje de cualquier disciplina y especialmente en la Matemática.

También hay que tener en cuenta que en este nivel, los estudiantes están más preparados para ejecutar con más eficiencia y responsabilidad el trabajo independiente, pues el colectivo ejerce mayor influencia sobre el individuo, los cuales a su vez son más maduros que en las enseñanzas precedentes, y mas definidos en cuanto a sus intereses personales, y profesionales.

Por las razones antes expuestas los autores consideran conveniente elaborar una estrategia didáctica para enfrentar esta problemática, desde un enfoque diferente a los que hasta este momento han sido utilizados, en la cual el trabajo independiente de los estudiantes y el uso de las nuevas tecnologías constituyan el núcleo en su implementación.Dicha estrategia se sustenta en los presupuestos de la enseñanza desarrolladora en materia de la psicología educativa y la didáctica de la Matemática, presentados por Labarrere (1996), Ballester (1994, 2003), entre otros, así como en las experiencias de Chávez y García (1995), Cabo, Llamazares y Peña (2001), Cantoral y Montiel (2001), respecto al uso de las nuevas tecnologías en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las funciones reales de variable real.

La propuesta de estrategia didáctica, que se presenta transcurre por tres etapas: etapa de diagnóstico, etapa de ejecución y etapa de control y evaluación.

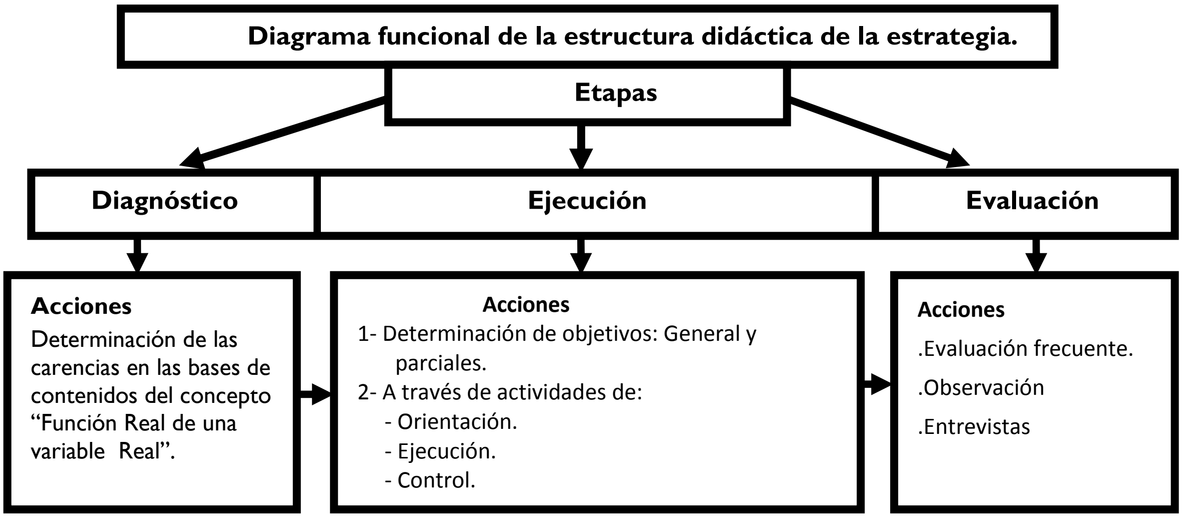
- *La etapa de diagnóstico*, en la cual fueron precisadas las insuficiencias de los estudiantes en las bases de contenidos del concepto función de R en R, mediante pruebas diagnósticas sistemáticas, parciales y finales, (también se incluyeron los resultados de la prueba de ingreso a la enseñanza superior en las preguntas relacionadas con las funciones). Dentro de estas se encontraron.
  - Identificar funciones como un caso especial de correspondencias.
  - Reconocer las funciones reales de una variable real, en las diferentes formas que se puede representar el concepto.
  - Determinar propiedades tales como el dominio, imagen, interceptos con los ejes de coordenadas, signos de la función, monotonía, inyectividad y sobreyectividad, simetría y periodicidad, tanto desde el punto de vista analítico como gráfico; así como el comportamiento de dichas propiedades, en las diferentes funciones elementales conocidas por ellos.
  - Realizar transformaciones, operaciones algebraicas y de composición, con funciones, así como, fundamentar bajo que condiciones, son realizables dichas operaciones.
  - Modelar fenómenos, sucesos, situaciones mediante funciones de R en R.
- *La etapa de ejecución* que tiene como elementos estructurales los siguientes:

  Un objetivo general como categoría rectora, el cual ha sido definido como: Sistematizar el concepto de función real de una variable real a través de un sistema de actividades basadas en el trabajo independiente de los estudiantes, al cual se le da cumplimiento a través de un sistema de hojas de trabajos disponible en la intranet de la universidad. Estas siguen un orden determinado por el nivel de subordinación que tienen los conceptos del tema funciones de R en R respecto al concepto principal, el de "función de R en R".

Estas hojas constan en su estructura de la temática a tratar, objetivos, acciones y el sistema de actividades dentro de las que se encuentran las de *orientación* (remiten a los estudiantes al sistema de materiales digitales elaborados por el autor, así como al libro de texto), de *ejecución* en la cual los estudiantes resuelven las tareas orientadas en la hoja de trabajo de forma independiente y las actividades de *control*.

- *La etapa de control y evaluación* ha sido organizada a lo largo de toda la estrategia, mediante acciones de control que permiten evaluar el cumplimiento de los objetivos parciales, en aquellos estudiantes de mayor dificultad, así como en el resto del grupo.

Entre las etapas que conforman la estrategia que se presenta, se establece, en su funcionamiento una relación dialéctica, pues cada una de ellas tributa a las otras, conformando un sistema en su dinámica, lo cual se muestra a través del siguiente diagrama.



La funcionalidad de esta estrategia, se concreta mediante las operaciones siguientes:

- Se realiza un diagnóstico inicial al comenzar el curso introductorio de Matemática el cual permite caracterizar a cada estudiante según el nivel de desempeño mostrado en el trabajo con las bases de contenidos del concepto función real de una variable real.
- Se orienta a los estudiantes en las clases, que realicen como trabajo independiente las actividades que aparecen en las hojas de trabajos elaboradas para sistematizar el concepto de función real de una variable real, las mismas forman parte de un sitio web, que consta de archivos de texto en Word, presentaciones en Power Point, el asistente matemático Derive 6, además este permite acceder al Word y al correo electrónico, y de esta forma

posibilita que los estudiantes intercambien los resultados y valoraciones acerca de las actividades realizadas. Este sitio está disponible en la intranet de la universidad.

❖ Se controlan y evalúan las actividades contempladas en las hojas de trabajo, por los estudiantes padrinos, alumnos ayudantes y el profesor en las clases prácticas, consultas, laboratorios, seminarios de la asignatura y en el sistema de evaluación parcial y final.

Como resultados de la puesta en práctica de la investigación realizada en los cursos (2009 – 2010) y (2010 – 2011), con los estudiantes de ingeniería eléctrica del curso regular diurno, se han obtenido los siguientes:

❖ Una estrategia didáctica para la sistematización del concepto función real en una variable real, la cual incluye el uso de las nuevas tecnologías y está basada en el trabajo independiente de los estudiantes. Caracterizada por el sistema de acciones propuestas a los estudiantes para el tratamiento de la sistematización del concepto de función real de una variable real. En la cual se retoman las ideas básicas de las funciones, sus gráficas y las maneras para transformarlas y combinarlas. Se contrasta el concepto de función desde diferentes representaciones en los diferentes tipos de funciones estudiadas.

  Esta estrategia presenta un enfoque que difiere significativamente del utilizado en la enseñanza precedente para sistematizar las funciones de R en R, lo cual se debe, en gran medida, al hecho de que, el trabajo independiente y el uso de las TICs constituyen sus elementos esenciales.

❖ Se ha alcanzado en los estudiantes un nivel superior en las habilidades de trabajo independiente, y manejo de las TICs, en función de obtener conocimientos, en este caso matemáticos, al exigírsele interactuar con estas tecnologías, para darle cumplimiento al sistema de tareas orientadas por el profesor.

❖ Se logró desarrollar habilidades en el trabajo con las funciones reales de una variable real, lo cual permitió tratar los temas de la asignatura Matemática I con mayor profundidad y rigor así como elevar el nivel de complejidad de las evaluaciones.

Conclusiones

En el trabajo presentado se demuestra la necesidad de ejecutar por parte de los docentes que imparten la Matemática, acciones en el orden del trabajo técnico - metodológico, para incidir favorablemente en el nivel de preparación de los estudiantes que acceden a la educación superior y como consecuencia de ello, alcanzar resultados académicos superiores en la asignatura.

Un resultado de estas acciones ha sido la estrategia que se presenta, la cual opera sobre el concepto de función real de una variable real, concentrándose dicha estrategia en la sistematización, la cual difiere significativamente de las realizadas en las enseñanzas precedentes. Fundamentado por el hecho que el trabajo independiente de los estudiantes y el uso de las nuevas tecnologías de la información y las comunicaciones constituyen aspectos esenciales.

La estrategia presentada es factible de implementar por las características psicológicas que tienen los estudiantes en este nivel de enseñanza, así como por las posibilidades tecnológicas que brinda la universidad como institución a las carreras de ciencias técnicas, para el estudio de la disciplina de Matemática.

Referencias bibliográficas

Álvarez de Zayas, C. (1996). *Hacia una escuela de excelencia*. Ciudad de La Habana: Academia.

Ballester, S. (1994). *Metodología de la enseñanza aprendizaje de la matemática tomo I.* Ciudad de La Habana: Pueblo y Educación.

Ballester, S. (2003). *La flexibilidad del pensamiento y la sistematización de los conocimientos matemáticos*. Ciudad de la Habana: Pueblo y Educación.

Cabo, F; Llamazares, B y Peña, M. T. (2001). *Derive: Una herramienta para el aprendizaje de las matemáticas*. Valladolid, España: Universidad de Valladolid.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001), *Funciones: visualización y pensamiento matemático*. México: Pearson Educación.

Chávez, R. H y García, F. R. (1995). *El concepto de función y el uso de la microcomputadora para el reforzamiento y/o modificación de la imagen conceptual.* Mérida: Yucatán México.

Labarrere, S. A. (1996). *Pensamiento. Análisis y autorregulación de la actividad cognoscitiva de los alumnos.* Ciudad de La Habana: Pueblo y Educación.

Spivak, M. (1970). *Calculus.* Ciudad de La Habana: Pueblo y Educación.

METODOLOGÍA PARA LA FORMACIÓN Y DESARROLLO DE LA HABILIDAD DE RESOLVER PROBLEMAS DE DERIVADAS EN LA ASIGNATURA MATEMÁTICA SUPERIOR I DE LA CARRERA CONTABILIDAD Y FINANZAS EN LA FUM SIBANICÚ

Lidia María Recio Socarrás
Universidad de Camaguey. Sede Universitaria Municipal Sibanicú Cuba
maria.palma@reduc.edu.cu

Resumen. En este trabajo se ofrece una metodología para favorecer el desarrollo de la habilidad de resolver problemas de derivadas considerando la resolución de problemas una actividad de especial importancia en el proceso de enseñanza - aprendizaje por su valor instructivo y formativo. La metodología propuesta se aplicó en la asignatura Matemática Superior I de la carrera Licenciatura en Contabilidad y Finanzas, modalidad semipresencial, de la Filial Municipal Sibanicú, Camagüey, Cuba, habiéndose detectado insuficiencias relacionadas con la motivación de los estudiantes para la resolución de problemas, la vinculación de los problemas con la práctica del estudiante y los métodos y procedimientos empleados. Se realizó una validación de los resultados mediante el criterio de expertos. Y finalmente se realizó una experimentación en dos cursos escolares sucesivos y se probó que con dicha metodología se eliminan las insuficiencias planteadas.

Palabras clave: resolver problemas, habilidad, proceso de aprendizaje

Abstract. In this work a methodology for the development of the ability of resolving problems is offered, considering that the resolution of problems is an activity of special importance in the teaching – learning process as a result of its instructive and formative value. The proposed methodology was applied to the subject called Superior Mathematics I from the Economical and Financial Sciences, in Sibanicu University, Camaguey, Cuba having proved the existence of different troubles related to the motivation of students for resolving problems, the relationships between the problems and the students practice and the methods and procedures used. It was performed a validation of the results by means of the criterion of experts. And finally experimentation was also carried out although two school courses. It was shown that with methodology it is possible to eliminate the mentioned troubles,

Key words: to resolve problems, ability, learning process

Introducción

Las matemáticas ocupan un lugar privilegiado en los planes y programas de estudios de los distintos niveles de enseñanza en Cuba. Ella influye en el desarrollo integral de los jóvenes pues constituye un medio de comprensión y mejoramiento del mundo científico, industrial y tecnológico de la actualidad, en otras áreas o esferas del conocimiento.

En la licenciatura de Contabilidad y Finanzas el estudio de la misma como asignatura general básica contribuye a desarrollar habilidades en los futuros egresados en el análisis de los procesos contables y económicos. Elevar la calidad de la educación conlleva el empleo de métodos y técnicas que promuevan el desarrollo del pensamiento matemático; el que ha acompañado al hombre desde la antigüedad y en ese proceso ha evolucionado.

Tal y como afirma Luciente "las matemáticas han sido consideradas por mucho tiempo como una ciencia exacta; su método estaba estrictamente impuesto por su propósito: el estudio de los números y las medidas en el espacio (longitud, superficie, volumen), por consiguiente, se presentaba con un carácter de certeza absoluta, indiscutible, universal". (Luciente,1972).

En un intento por definir habilidades matemáticas es significativo retomar a al colectivo de autores formado por los investigadores Geissler, Sieber, Starke y otros (1979) al plantear:

> Como habilidades matemáticas debemos comprender, solamente, aquellos componentes automatizados que surgen en el desarrollo de acciones con contenido preferentemente matemático y finalmente contribuyen decisivamente, mediante su aplicación, al nivel del poder en matemática.

La importancia que se le otorga al desarrollo de habilidades matemáticas en la realización de las distintas actividades del hombre avala la necesidad de que la educación matemática considere la formación de capacidades y habilidades junto a la adquisición de conocimientos matemáticos.

Para fundamentar la existencia del problema en la FUM Sibanicú se emplearon un grupo de métodos empíricos que permitieron diagnosticar que en la asignatura matemática Superior I de la carrera Contabilidad y Finanzas los estudiantes no se encontraban motivados para la resolución de problemas, que los problemas que se presentaban a los alumnos para su solución no estaban vinculados con la vida ni se redactaban en función de la contabilidad, no se utilizaban pasos para resolver los problemas y no se incluían aspectos que tenían que ver con la formación en valores.

Reconociéndose como problema científico:

Insuficiencias en la formación y desarrollo de la habilidad de resolver problemas de derivadas en la asignatura Matemática Superior I de la carrera Contabilidad y Finanzas en la FUM Sibanicú.

En correspondencia se formula como *objetivo* la elaboración de una metodología para la formación y desarrollo de la habilidad de resolver problemas de derivadas en la asignatura Matemática Superior I de la carrera de Contabilidad y Finanzas en la FUM Sibanicú.

Desarrollo

La metodología que se propone constituye una opción más en función de la solución al problema identificado.

En su concepción general la metodología está basada en el enfoque del paradigma socio histórico cultural. Según Vigotsky (1987):

> la psiquis es el resultado del desarrollo histórico social… existe una Zona de Desarrollo Próximo (ZDP) en el estudiante… y el proceso de enseñanza aprendizaje es desarrollador si el estudiante participa en actividades conjuntas con los demás estudiantes y con el profesor, desarrollando el trabajo grupal.

Tomando estas concepciones como referencia el profesor motivará a los estudiantes tratando de responsabilizarlos con su propio aprendizaje, presentará problemas de menor a mayor complejidad y aplicará métodos productivos.

En el orden didáctico la metodología considera la necesidad de seleccionar problemas del contexto del estudiante y que además propicien que el estudiante adquiera el conocimiento mediante su propia construcción; cumpliéndose así la relación entre las funciones instructiva, educativa y desarrolladora.

La metodología se basa en el principio de la relación de la teoría y la práctica por lo que la actividad matemática debe estar relacionada con situaciones que enfrenta el estudiante en su vida diaria, esta actividad debe estar basada en la solución de problemas mediante situaciones reales. Ella contempla la utilización del método productivo Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) donde los estudiantes trabajan de forma colaborativa en grupos, lo que les permite desarrollar habilidades y valores tomando responsabilidad en su formación, empleando estrategias de apendizaje para resolver problemas y construir los nuevos conocimientos.

La metodología ha sido diseñada teniendo en cuenta la inclusión de los aspectos instructivos y las cuestiones educativas, es decir los problemas incluyen también aspectos relacionados con la formación de valores.

En la metodología diseñada se ha tenido en cuenta la inclusión del método para el desarrollo de la habilidad de resolver problemas de derivadas teniendo en cuenta la dificultad del carácter abstracto de las matemáticas y el proceso de enseñanza aprendizaje a través de una apropiada contextualización de los problemas que sean de interés y que estén vinculados con la contabilidad, donde se establezca una vía adecuada para la solución de los mismos.

La metodología resuelve la contradicción entre el carácter fraccionado de los contenidos de las matemáticas y el carácter integrador para la polución de problemas de matemática en contabilidad, al impartir los contenidos de manera contextualizada y aplicados a la contabilidad, al vincular los problemas con la vida al utilizar el método ABP.

Premisas de la metodología

En la metodología se deben considerar las siguientes premisas:

Por parte de los profesores

1. Dominio del contenido a impartir.
2. Creatividad para proponer problemas cortos e interesantes vinculados con el entorno y con la contabilidad.
3. Establecer una buena comunicación con los estudiantes.
4. Estar dispuesto a implementar métodos productivos.
5. Utilizar la organización de proceso de enseñanza aprendizaje en grupos.

Por parte de los estudiantes

1. Estar dispuestos a trabajar en equipo.
2. Aceptar las opiniones de los demás y del profesor.
3. Responsabilidad ante el implemento de nuevos métodos.

Conformación de la metodología

Etapa I. Motivación

Paso 1. Presentación de situaciones problémicas contables.

Paso 2. Discusión de aspectos de interés o sorprendentes de la situación problémica.

Etapa II. Relación de los conocimientos previos con los nuevos conocimientos

Paso 1. Lluvia de ideas para la presentación del contenido.

Paso 2. Relación de esos conocimientos con los ya adquiridos.

Etapa III. Comprensión del contenido

Paso 1. Identificar el tipo de problema y el campo al que pertenece.

Paso 2. Analizar los datos que ofrece el problema.

Paso 3. Interpretar la interrogante del problema.

Paso 4. Relacionar los datos con los fundamentos teóricos, entre sí y sus efectos con la interrogante.

Paso 5. Aplicar los fundamentos teóricos a la relación entre los efectos y la interrogante.

Paso 6. Buscar alternativas para encontrar la solución.

Paso 7. Seleccionar las soluciones adecuadas.

Paso 8. Solucionar el problema.

Etapa IV. Sistematización del contenido

Paso 1. Interpretar el resultado con el fundamento teórico.

Paso 2. Generalizar la solución a problemas similares.

Etapa V. Evaluación del aprendizaje

Tema: Derivadas

Objetivo: Resolver problemas de derivadas a través de problemas reales relacionados con la contabilidad d a un nivel productivo.

Etapa I

El profesor presenta a los estudiantes la función de ingreso de una empresa:

$I=180q+42q^2-q^3$, para conocer la producción que proporciona el ingreso máximo.

Mediante una conversación heurística se discute con los estudiantes acerca de esta situación problémica.

El estudiante:

Intercambia con el profesor, aportando ideas.

Muestra interés y participa en una discusión con el profesor y con los demás estudiantes.

Etapa II

El profesor mediante una lluvia de ideas expone que una de las aplicaciones más antiguas del cálculo es encontrar en una función los puntos donde se alcanzan sus valores máximos y mínimos.

Se presenta la fórmula de derivación:

$(x^n)' = nx^{n-1}x'$

El profesor escribe el criterio de la primera derivada para máximos y mínimos:

Resolver la ecuación $f^{I}(X_0)=0$ para calcular los valores críticos.

Representar estos valores críticos sobre el eje de abscisas de un sistema coordenado.

Determinar el signo de $f^{I}(X)$ de cada uno de los intervalos.

Los estudiantes recuerdan cuando existe un máximo y un mínimo: si D es el dominio de la función f(x),

$c \in D$ es un máx. de f si

$f(x) \leq f(c)$, para todo $x \in D$.

$d \in D$ es un mín. de f si

f(x) ≥ f (d), para todo $x \in D$.

Los estudiantes relacionan estos conocimientos con los conocimientos anteriores.

Etapa III

Se identifica el tipo de problema con los estudiantes, determinando que el mismo corresponde a un problema de optimización. Se realiza una coevaluación.

Se analiza la función de ingreso de la empresa.

El profesor realiza preguntas a los estudiantes para interpretar como obtener la producción que proporciona el ingreso máximo a la empresa. Se realiza una coevaluación.

En un diálogo del profesor con los estudiantes se elabora un esquema donde se relaciona la función de ingreso de la empresa con la optimización aplicando la derivada y sus efectos con la producción que proporciona el ingreso máximo. Se realiza una hetereoevaluación.

El profesor mediante un diálogo heurístico y preguntas insertadas propone aplicar la fórmula de derivación a la función de ingreso:

$I=180q+42q^2-q^3$.

Mediante la aplicación del criterio de la primera derivada para calcular los valores críticos se buscan las posibles soluciones.

Se realiza una autoevaluación.

Selecciona en conjunto con los estudiantes la solución adecuada.

Se orienta la solución del problema y si ha existido alguna dificultad se recomienda volver al principio y probar nuevamente hasta encontrar la solución adecuada.

Los estudiantes en equipo realizan un análisis detallado de la función de ingreso.

Los estudiantes en equipo para interpretar la producción que proporciona el ingreso máximo, analiza la función de ingreso dada.

Los estudiantes en equipo establecen esta relación.

Mediante la aplicación de la primera derivada obtienen:

$$I = 180 + 84q - 3q^2$$

Resuelven la ecuación:

$$180 + 84q - 3q^2 = 0 \quad /:3$$

$$60 + 28q - q^2 = 0$$

-$\left(q^{2}-28q-60\right)$=0

-$\left(q-30\right)\left(q+2\right)$=0

-$\left(q-30\right)$=0 $\quad$ $q+2$ =0

- q =30 $\quad$ q =-2

q =-30

Se representan estos valores en un sistema de coordenadas:

__+_______________+_

-40 $\quad$ -2

Para q =-30 tiene un máx.

Para q =-2 tiene un mín.

Se selecciona q =-3 como el valor mediante el cual la empresa obtiene el ingreso máximo.

Los estudiantes solucionan el ingreso para el valor seleccionado:

I (-30)=180(-30)+42(-30)^{2}-(30)^{3}

I=10260

Etapa IV

Se interpreta este resultado relacionándolo con el enunciado del problema y si este tiene lógica.

Se generaliza esta solución para resolver problemas similares. Esta es la producción que proporciona el ingreso máximo.

Se determina lo más importante para resolver el problema y poder integrarlo a los conocimientos teóricos.

Pueden solucionar otros problemas con esta metodología.

Etapa V

La evaluación general se llevará a cabo teniendo en cuenta la participación y las habilidades en la solución del problema.

Realiza una evaluación final.

Validación experimental de los resultados

Se partió de la siguiente hipótesis: Si se aplica una metodología para la formación y desarrollo de la habilidad de resolver problemas de derivadas en la asignatura Matemática Superior I de la carrera de Contabilidad y Finanzas que contempla un sistema de pasos en función de las etapas de la solución de problemas de derivadas entonces se puede contribuir a atenuar las insuficiencias que en la actualidad se presentan en el desarrollo de esta habilidad en el proceso de enseñanza – aprendizaje en la FUM Sibanicú.

Se realizó una validación de los resultados mediante el criterio de expertos donde la categoría o grado de adecuación más frecuente fue el de adecuado por lo cual consideramos que los pasos y componentes de la metodología resultaron pertinentes para evaluar la metodología que se propone.

Finalmente se realizó una experimentación en dos cursos escolares sucesivos, utilizando un grupo experimental y otro de control. En el grupo experimental se manipuló por el investigador la variable independiente. Los resultados comparativos probaron que con dicha metodología se eliminan las insuficiencias planteadas.

Conclusiones

Con la aplicación de la metodología se comprobó que:

Los resultados en el examen final de Matemática Superior I siempre fueron mejores en los grupos donde se aplicó la metodología, apreciándose el desarrollo de las habilidades que son objeto de estudio en el trabajo.

Las motivaciones de los estudiantes hacia la resolución de problemas matemáticos fueron más evidentes, lo que se puso de manifiesto en la disposición de los mismos para enfrentar y resolver los problemas tanto en las clases como en las evaluaciones.

La conformación de problemas por parte de los profesores para ser resueltos por los estudiantes cumplió con los requisitos establecidos, obteniéndose mejor aceptación por los estudiantes.

Referencias bibliográficas

Geissler, E. Seiber, J. Starke, H. y otros. (1979). *Metodología de la enseñanza de la Matemática de 1ro a 4to grados.* Tercera parte. Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 1979.

Luciente, F. (1972). *El aspecto moderno de las matemáticas*. La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación.

Vigotsky, L. (1987). *Historia del desarrollo de las funciones psíquicas superiores*. La Habana, Cuba: Editorial Científico Técnica.

MODELACIÓN DE PARÁMETROS ESTÁTICOS DE VIGAS

Mariem Mederos Madrazo, Otilio B. Mederos Anoceto
Universidad Autónoma de Coahuila México
mariem.mederos@gmail.com, omederosa@gmail.com

Resumen. Se presenta una organización del conocimiento escolar para la modelación de cinco conceptos relativos a vigas y sus relaciones: intensidad de carga, elástica, ángulo de giro, momento flector y fuerza cortante. Se construyó un modelo mediante funciones para cada uno de los cinco conceptos y por medio de operadores diferenciales o integrales para cada una de las relaciones entre ellos, de tal forma que dado un modelo de uno de los conceptos se puede determinar el modelo de otro cualquiera de los cuatro conceptos restantes. En el trabajo se muestra la modelación de las relaciones entre la intensidad de carga y la fuerza cortante y se comentan algunos de los resultados de la aplicación de 10 hojas de trabajo, con el objetivo que los estudiantes de un grupo de una carrera de matemáticas aplicadas participen en los distintos procesos de modelación antes descritos.

Palabras clave: modelación matemática, relaciones entre conceptos

Abstract. It presents an organization of school knowledge for the modeling of five concepts of beams and their relationships: intensity of load, elastic, steering angle, bending moment and shears. Model was constructed using functions for each of the five concepts and through differential or integral operators for each of the relationships between them, so that given a model of one of the concepts can determine the pattern of any other of the remaining four concepts. The paper shows the modeling of the relationship between the intensity of load and shear, and discusses some of the results of the application of 10 worksheets with the aim that students in a group of an applied mathematics career involving in modeling the various processes described above.

Key words: mathematical modeling, relationships between concepts

Introducción

Un modelo matemático es un sistema, (colección de objetos y relaciones matemáticas), que se ha logrado mediante, entre otras, una de las variantes siguientes: 1. Se ha obtenido mentalmente, 2. Se ha realizado en forma material. 3. Se ha expresado verbalmente, visualmente o simbólicamente. 4. Se ha descrito mediante las leyes y principios de una ciencia. El objetivo del modelo es describir objetos, (fenómenos, medios o sistemas), con el fin de ayudar a entender mejor dichos objetos. La modelación es el proceso de construcción de modelos de objetos, Mederos y González (2005).

Tanto en la matemática escolar como en la disciplinar, el conocimiento asume el estatus de herramienta (implícita o explícita) y de objeto Douady (1995). El marco teórico en que se fundamenta el estudio es la dialéctica herramienta-objeto Douady y Parzysz (1998), que se refiere al proceso mediante el cual un conocimiento se utiliza al principio como una herramienta implícita para resolver un problema, y después, como un objeto de estudio. Más tarde, este objeto se aplica como una herramienta explicita para la resolución de otros problemas.

En esta investigación se presentan algunos de los resultados de un grupo de estudiantes de una asignatura optativa del sexto semestre de una Licenciatura en Matemáticas Aplicadas, al participar en la solución de problemas relativos al doble carácter de la resolución de problemas y la modelación:

1. *Los modelos como herramientas para resolver problemas.* Esta relación entre los modelos y los problemas se presenta cuando para resolver un problema se utilizan los tres procesos siguientes: modelación matemática, resolución del modelo y transferencia de resultados matemáticos obtenidos del modelo en información que da solución al problema. En este caso se dice que el modelo es una herramienta para resolver el problema.

2. *Los problemas como herramientas para formar modelos.* Las ecuaciones algebraicas y las diferenciales pueden utilizarse para modelar una clase amplia de problemas de diferentes contextos. Sin embargo, cuando estos objetos se introducen a partir de una definición matemática abstracta, resulta muy difícil para los estudiantes utilizarlas en la modelación de problemas de diferentes áreas.

La utilización de problemas de diferentes áreas del conocimiento humano cuya resolución necesite de modelos matemáticos particulares de un mismo tipo, según nuestra experiencia docente, facilita la participación de los estudiantes en el proceso de formación de un modelo matemático general que incluya en su extensión a esos modelos matemáticos particulares. En este caso los problemas son las herramientas que permiten la construcción del modelo matemático general.

Se restringe este problema a cinco conceptos, que en ingeniería se denominan parámetros estáticos, relativos a vigas de una luz: intensidad de carga, fuerza cortante, momento flector, ángulo de giro y la elástica de la viga.

En las tesis de maestrías escritas por Hernández (2009) y Aradillas (2009), se utilizan problemas para formar modelos mediante ecuaciones cuadráticas, y modelos mediante sistemas de ecuaciones lineales para resolver problemas, respectivamente.

Para ello lo primero que tuvimos que hacer fue crear una organización del conocimiento escolar relativo a los conocimientos del cálculo y de vigas de una luz, que permitiera utilizar la modelación y la resolución de problemas en su doble carácter, pues no existía tal organización. A partir de esta organización del conocimiento se diseñaron y aplicaron 10 hojas de trabajo para el aprendizaje activo, y las orientaciones correspondientes para la mediación de cada estudiante y del profesor en el aprendizaje de otros. Antes de aplicar las hojas de trabajo, se dedicó una sesión de 55 minutos con los estudiantes para que comprendieran los parámetros estáticos y otros conceptos de ingeniería necesarios. En la sección 3 se presenta un resumen, en forma de conclusiones de los resultados de la participación de los estudiantes en las hojas de trabajo.

Organización del conocimiento

En esta sección, por un problema de espacio, sólo se definen dos de los cinco conceptos estáticos que se estudiaron: la intensidad de carga y la fuerza cortante; y se muestra la solución de uno de los 20 problemas consistentes en la determinación de relaciones entre esos cinco conceptos. Se presentan modelos geométricos y analíticos de estos dos conceptos, y modelos analíticos de sus relaciones.

Definiciones y modelos de dos parámetros estáticos

Definición y modelos de la intensidad de carga. Se llama viga a todo elemento constructivo horizontal cuya longitud es "mucho mayor" que su ancho y su altura, independiente de la forma de su sección transversal recta. En el trabajo se consideran vigas que: 1. Tienen una sección transversal uniforme. 2. El material con que se han construido es homogéneo. 3. El sistema de cargas a las que están sometidas las vigas produce deformaciones pequeñas que una vez que dejan de actuar, las vigas vuelven a su estado inicial sin que existan deformaciones permanentes.

En la figura 1 se muestra un modelo geométrico de una viga horizontal de sección transversal recta y rectangular. *El centroide de una sección transversal de una viga es un punto que define el centro geométrico de la sección.* La línea de puntos que une los centroides de todas las secciones transversales de una viga, en azul en la figura 1, recibe el nombre de eje de simetría.

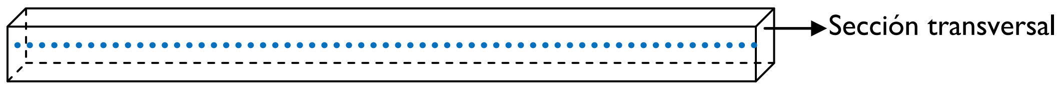


Fig. 1. Modelo geométrico de una viga horizontal

Si sobre la viga actúan fuerzas en un plano vertical que contiene al eje de simetría, la viga se deforma como se muestra en la figura 2. El eje de simetría deformado se llama curva elástica o simplemente elástica.

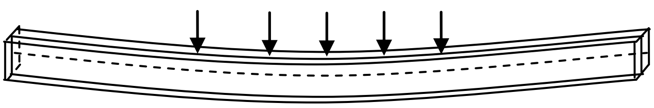


Fig. 2. Modelo geométrico tridimensional de la elástica

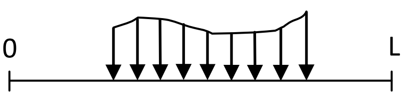


Fig. 3 Modelo bidimensional de una intensidad de carga variable

Hay diferentes formas en las cuales las fuerzas externas pueden ser aplicadas. En este trabajo se consideran sólo las uniformemente distribuidas o las variables sobre toda la viga, o una parte de ella. En todos los casos se expresan mediante su intensidad, (fuerza/longitud). En la figura 3, se modela geométricamente en dos dimensiones una intensidad de carga y en las figuras 4 y 5 se presentan los modelos en un sistema cartesiano y analítico, respectivamente; considerando que $\ell = |OL|$, $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ell$, q_1 es una función real definida sobre $[0, \ell]$ y $\chi_{[a_1,a_2]}$ es una función característica.

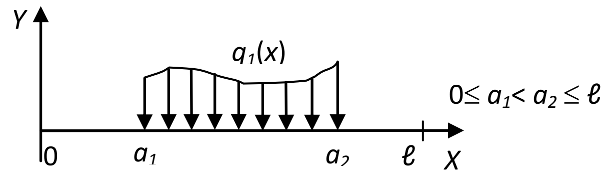


Fig. 4. Modelo de la intensidad de carga en un sistema cartesiano.

$$q:[0, \ell] \longrightarrow R$$
$$x \longrightarrow q(x) = q_1(x)\chi_{[a_1,a_2]}(x)$$

Fig. 5. Modelo analítico de una intensidad de carga.

Definición y modelos de la fuerza cortante. Tomemos dos pedazos de la viga de la figura 1, determinados por las secciones rectas *mn*, m_1n_1 y m_2n_2 Si la viga está en equilibrio, entonces las fuerzas internas en la sección mn deben ser tales que equilibren a las fuerzas externas en el pedazo mnn_2m_2. La resultante *V* de todas las fuerzas internas que actúan en la sección *mn*, se denomina *fuerza cortante en la sección mn*. Esta fuerza es numéricamente igual y con sentido contrario a la resultante de las fuerzas exteriores que obran en el pedazo mnn_2m_2. En la figuras 6 se muestran los modelos geométricos de los dos pedazos, y en las figuras 7 y 8 se presentan los modelos cartesiano y analítico de la fuerza cortante en el pedazo mnn_2m_2, respectivamente.

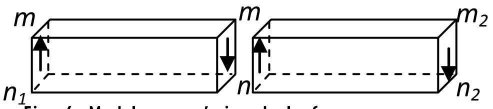


Fig. 6. Modelo geométrico de la fuerza cortante

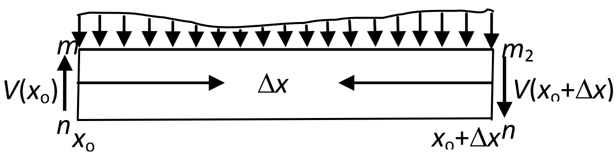


Fig. 7. Modelo cartesiano del pedazo mnn_2m_2 de una viga

$$V: [0, \ell] \longrightarrow R, \quad x \longrightarrow V(x)$$

Fig. 8. Modelo analítico de la fuerza cortante

Modelo de dos relaciones entre la intensidad de carga y la fuerza cortante. En este epígrafe se determinan dos relaciones, cada una de las cuales permite, conocido el modelo analítico de uno de estos conceptos, encontrar el modelo analítico del otro imponiendo ciertas restricciones al modelo del que se parte. En las figuras 5 y 8 se presentan estos modelos. Se demuestra la relación puntual entre estos modelos siguientes

Proposición 1. Si la intensidad de carga se modela por una función real q definida sobre $[x_o, x_o+\Delta x]$, continua sobre $(x_o, x_o+\Delta x]$ y tal que $lim_{x\to x_o^+} q(x) = \ell_2$; entonces el modelo V de la fuerza cortante es continua a la derecha de x_o, y la derivada lateral derecha de V en el punto x_o es numéricamente igual al límite lateral derecho de q en el punto x_o; o sea, se cumple que $lim_{x\to x_o^+} V(x) = V(x_o)$ y $V_+^{'}(x_o) = lim_{x\to x_o^+} q(x) = \ell_2$. Si q es continua por la izquierda en x_o, entonces $V_+^{'}(x_o) = q(x_o)$.

Demostración. Supongamos que se tiene una viga en equilibrio cuyo modelo en la recta numérica es $[0, \ell]$. Consideramos un elemento de la viga de longitud Δx, figura 7, determinado por dos secciones adyacentes mn y m_2n_2. Modelamos las secciones mn y m_2n_2 por x_o y $x_o+\Delta x$, donde $x_o \in [0, \ell]$, $\Delta x > 0$ y $x_o + \Delta x < \ell$, respectivamente. Consideremos que la intensidad de carga en el intervalo $[x_o, x_o+\Delta x]$ está modelada por una función real q continua sobre $(x_o, x_o+\Delta x]$.

Como la viga está en equilibrio, la suma de las fuerzas verticales, (no obran fuerzas horizontales), que actúan sobre el pedazo mnm_2n_2 de la viga es cero, $\Sigma_y = 0$. Por lo tanto, $V(x_o) + \int_{x_o}^{x_o+\Delta x} q(t)\, dt - V(x_o + \Delta x) = 0.$ De donde resulta que $V(x_o + \Delta x) - V(x) = \int_{x_o}^{x_o+\Delta x} q(t)\, dt.$ Aplicando el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral, al lado derecho de la igualdad anterior y evitando la discontinuidad de q se puede asegurar que existe un θ_2, $x_o<\theta_2<x_o+\Delta x$, tal que

$$V(x_o+\Delta x) - V(x_o) = q(\theta_2)[(x_o+\Delta x) - x_o] = q(\theta_2).\Delta x. \quad (1)$$

De la cadena de igualdades (1) se tiene que

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}[V(x_o+\Delta x) - V(x_o)] = \lim_{\Delta x\to 0^+}[q(\theta_2).\Delta x] = 0. \quad (2)$$

Indicando la suma $x_o+\Delta x$ por x, de la cadena de igualdades (2) resulta que

$$\lim_{x\to x_o^+} V(x) = V(x_o). \quad (3)$$

Con la igualdad (3) se prueba que V es continua a la derecha de x_o. Dividiendo por Δx cada lado de las igualdades de la cadena (1) se obtiene

$$(1/\Delta x)\,[V(x_o+\Delta x) - V(x_o)]=q(\theta_2). \quad (4)$$

Aplicando límite a ambos lados de la ecuación (4) cuando Δx tiende a cero por valores positivos, se concluye que

$$V'_{+}(x_o) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{V(x_o+\Delta x)-V(x_o)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} q(\theta_2) = l_2. \qquad (5)$$

Queda así probada la proposición 1. Si q es continua a la derecha de x_o, entonces $l_2=q(x_o)$.

Si se considera un elemento de la viga de longitud Δx determinado por dos secciones adyacentes m_1n_1 y mn, que se modelan por $x_o-\Delta x$ y x_o, $x_o\in[0, \ell]$, $\Delta x > 0$ y $x_o-\Delta x >0$, respectivamente, y se supone que la intensidad de carga en el intervalo $[x_o-\Delta x, x_o]$ está modelada por una función real q continua sobre $[x_o-\Delta x, x_o)$; entonces procediendo como en la proposición 1 se demuestra la proposición que a continuación se enuncia.

Proposición 2. Si la intensidad de carga en el intervalo $[x_o-\Delta x, x_o]$ está modelada por una función real q continua sobre $[x_o-\Delta x, x_o)$ tal que $lim_{x\to x_o^-} q(x) = \ell_1$; entonces el modelo V de la fuerza cortante es una función continua a la izquierda de x_o y la derivada lateral izquierda de V en el punto x_o cumple las igualdades $lim_{x\to x_o^-} V(x) = V(x_o)$ y $V'_{-}(x_o) = lim_{x\to x_o^-} q(x) = \ell_1$. Si q es continua por la izquierda en x_o, entonces $V'_{-}(x_o) = q(x_o)$.

De las proposiciones 1 y 2 resultan la proposición 3 y relaciones cualitativas y cuantitativas entre los modelos de la carga y la fuerza cortante. Sean $I = [0, \ell]$ y S, $S = \{x_1,\cdots, x_n\}$, un subconjunto de I.

Proposición 3. Si q es continua sobre I/S y en cada elemento x_i, i=1:n, de S se tiene una discontinuidad evitable o de salto finito tal que $lim_{x\to x_i^-} q(x) = l_{i1}$ y $lim_{x\to x_i^+} q(x) = l_{i2}$; entonces la función V: $[0, \ell] \to R$, definida por $x \to V(x) = \int_0^x q(t)dt$, es continua sobre $[0, \ell]$ y satisface las condiciones $V'(x) = q(x)$ si x es un punto de continuidad o de discontinuidad evitable de q, o las condiciones $V'_{-}(x) = l_{i1}$ y $V'_{+}(x) = l_{i2}$ si q tiene en x una discontinuidad de salto finito.

En los materiales escritos con la nueva organización del conocimiento escolar, se denotan por $C(A)$, $D(A)$, $D^{(j)}(A)$ y $C^{(j)}(A)$ las colecciones de las funciones reales continuas, derivables, con derivada de orden j y con derivada de orden j continua, j = 1:4, respectivamente, donde A indica un subconjunto de R. Utilizando la proposición 3 para el caso en que $A = I$ se tienen los resultados siguientes: 1. Si $V\in C^{(1)}(I)$, entonces $q\in C(I)$ y q se obtiene a partir de V por la igualdad $q(x)=V'(x)$. 2. Si $q\in C(I)$, entonces $V\in C^{(1)}(I)$ y conocida q se obtiene V mediante la relación $V(x) = \int_0^x q(t)dt$. De esta forma quedan modeladas por los operadores de diferenciación D y de integración $\int_0^x dt$, dos relaciones entre las extensiones de los modelos conceptuales de la intensidad de carga y de la fuerza cortante, como se muestran en la figura 9.

$$\begin{array}{ccc} C^{(1)}(I) & \xrightarrow{D} & C(I) \\ V & \longrightarrow & q = V' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} C(I) & \xrightarrow{\int_0^x dt} & C^{(1)}(I) \\ q & \longrightarrow & V = \int_0^x q(t)dt. \end{array}$$

Fig. 9. Modelación de relaciones entre conceptos mediante operadores $\int_0^x f(t)dt$ Escriba aquí la ecuación.

Dada la fuerza cortante, mediante el operador D queda determinada unívocamente la intensidad de carga por ser D un operador funcional. Sin embargo, dada una intensidad de carga, la fuerza cortante no se determinada unívocamente por el operador $\int_0^x dt;$ ya que D no es una función inyectiva. La función q se determina unívocamente si se conoce, además, su valor en un elemento de I.

Sobre los modelos de otras relaciones entre los parámetros estáticos En las hojas de trabajo los estudiantes participaron en la modelación de los 5 parámetros estáticos y en la modelación de las 20 relaciones entre los cinco modelos, (cada modelo conceptual tiene una relación con cada uno de los cuatro modelos restantes). Considerando en el modelo de la figura 7 los momentos flectores $M(x_o)$ y $M(x_o+\Delta x)$ en las secciones mn y $m_I n_I$, respectivamente, se tiene que la suma de los momentos con respecto al punto x es cero, $\Sigma_M = 0$, por estar la viga en equilibrio. Procediendo de forma similar a como se procedió en la sección 1.1.2 se obtienen entre la fuerza cortante y el momento flector las relaciones: si $q \in C(I)$, entonces $M \in C^2(I)$ y $V=M'$. Si $q \in C(I)$, se prueba que los modelos y de la elástica y θ del ángulo de giro pertenece a $C^4(I)$ y $C^3(I)$, respectivamente, y se tienen las relaciones $\theta = y'$ y $y''=(1/B)M$, donde $B=I_zE$, I_z es el momento de inercia de la sección recta respecto al eje neutro z y E es el módulo de Young.

Una vez obtenidas las 4 relaciones que hemos presentado, los estudiantes fueron guiados para obtener la organizaron significativa del conocimiento que se muestra en el diagrama de la figura 10.

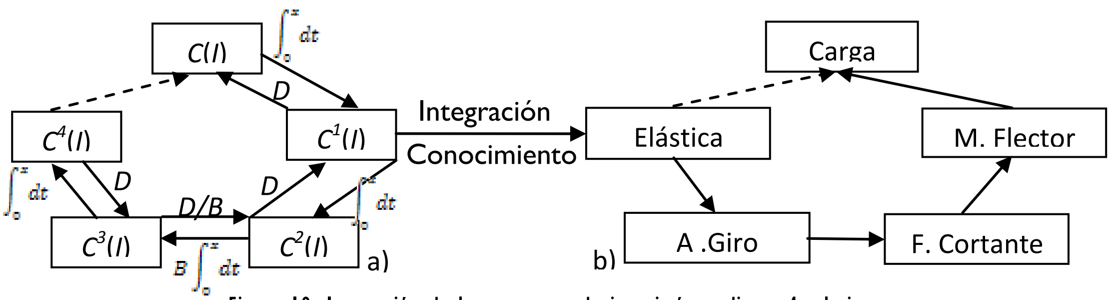


Figura 10. Integración de los conceptos de ingeniería mediante 4 relaciones

a). Posteriormente transfirieron esta organización de los modelos a una organización significativa de los cinco parámetros estáticos, figura 10 b). Componiendo adecuadamente operadores de la figura 10 a) modelaron las veinte relaciones entre los parámetros estáticos.

Características de la asignatura y de los estudiantes

La asignatura "Tópicos Selectos de Análisis Matemático I" de la carrera de Matemáticas Aplicadas de la UAdeC, Coahuila, México, es optativa y se desarrolla en el sexto semestre con una frecuencia de 5 horas semanales. Los 7 alumnos que la cursaron habían aprobado varios cursos de cálculo y de análisis matemático, pero no tenían conocimientos suficientes relativos a los parámetros estáticos, por lo que hubo que dedicar tiempo al desarrollo de estos conocimientos. Mediante hojas de trabajo los estudiantes resolvieron problemas de modelación para cada uno de los cinco parámetros estáticos, utilizando como herramientas modelos mediante funciones particulares. Se aplicaron hojas de trabajo para la formación del concepto de función a partir del análisis de las características de los modelos particulares que dieron solución a los cinco problemas de modelación. En este caso los problemas constituyen herramientas para la formación del concepto de función.

Esta fue la primera vez en que estos estudiantes tuvieron una experiencia de aprendizaje activo mediante hojas de trabajo. No estaba claro para ellos que para lograr la mediación de cada estudiante en el aprendizaje de otros, es necesario una discusión científica lo más profunda posible. Esta fue también la primera vez que los estudiantes utilizaron problemas como herramientas para formar modelos conceptuales mediante funciones y operadores diferenciales e integrales.

Conclusiones

Los estudiantes participaron en la determinación de la solución de un problema de modelación para cada uno de los cinco parámetros estáticos, mediante funciones particulares. Estos cinco problemas fueron utilizados como herramientas para formar el concepto de función real de variable real.

Los estudiantes participaron, además, en la solución de cuatro problemas que se resuelven mediante la derivada como operador. Estos problemas particulares constituyen herramientas para formar el concepto de derivada como un operador que permite encontrar un modelo funcional de un parámetro de la estática a partir de un modelo funcional de otro parámetro de la estática. Por ejemplo, la proposición 3, permite asegurar que si se tiene determinado que el modelo de la fuerza cortante es una función V: $[0, \ell] \to R$ con derivada continua, entonces el modelo q: $[0, \ell] \to R$ de la intensidad de carga es una función continua que coincide con la derivada de V, $q(x) = dV/dx$. Estos cuatro problemas se utilizaron como herramientas para que los estudiantes construyeran el modelo general de la derivada como operador definido por $f \rightarrow g=D(f)$, siguiente:

$$C^{(1)}(I) \xrightarrow{D} C(I).$$

Referencias bibliográficas

Aradillas, M. (2009). *La resolución de problemas mediante ecuaciones y sistemas de ecuaciones algebraicas de primer grado*. Tesis de maestría no publicada, Universidad Autónoma de Coahuila. Saltillo, México.

Douady, R. (1995). La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En P. Gómez (Ed.) *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática* (pp. 61-96). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Douady, R. & Parzysz, B. (1998). La geometría en el salón de clases. En C. Mammana y V. Villani (Ed.) *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21th Century*. (pp. 159-192). New York. Kluwer Academic Publishers.

Hernández, D. (2009). *Diseño de actividades didácticas para facilitar el aprendizaje activo, mediado y significativo de los estudiantes del IDEA en el tema de ecuaciones cuadráticas.* Tesis de maestría no publicada, Universidad Autónoma de Coahuila. Saltillo. México.

Mederos, O. y González, B. (2005). *La Modelación en la Educación Matemática*. Saltillo: Talleres Gráficos de Salvador Impresor S.A. de C.V.

TÉCNICAS Y ESTRATEGIAS PARA PARTICIPAR EN EL PROCESO DE ADQUISICIÓN DE CONOCIMIENTOS CONCEPTUALES EN EL TEMA SUCESIONES CON LÍMITE

Elvira Borjón Robles, Otilio B. Mederos Anoceto
Universidad Autónoma de Zacatecas, Universidad Autónoma de Coahuila México
eborjon@mate.reduaz.mx, omederosa@gmail.com

Resumen. En este trabajo se presentan los resultados de la aplicación de cinco hojas de trabajo al grupo, de catorce estudiantes, de la Maestría de Matemática Educativa, con perfil profesional, en la asignatura Didáctica de la Matemática de la Universidad Autónoma de Coahuila, México, en el primer semestre de 2010. Los estudiantes al resolver los problemas de la secuencia didáctica de las hojas de trabajo, mediante la construcción de representaciones gráficas y analíticas de distintos tipos de sucesiones, lograron organizar e integrar los conceptos de sucesiones con límite finito y sucesiones acotadas sin límite con las extensiones de otros conceptos subordinados al concepto de sucesión, mediante la construcción de mapas de extensiones, proposiciones y simbólicos.

Palabras clave: sucesión, límite, técnicas, estrategias, aprendizaje

Abstract. This paper presents the results of the implementation of five worksheets to the group of fourteen students Masters in Mathematics Education, with professional profile, in the subject Didactics of mathematics at Autonomous University of Coahuila, Mexico, in the first half of 2010. Students to solve the problems of the didactic sequence of worksheets, through of the construction of graphical and analytical representations of different types of sequence, managed to organize and integrate the concepts of sequence with finite limit and sequences bounded without limit with the extensions of other concepts subordinate to the concept of sequence, through the construction of maps of extensions, propositions and symbolic.

Key words: sequence, limit, techniques, strategies, learning

Introducción

En 2011, Borjón y Mederos presentaron los resultados de la aplicación de herramientas didácticas en un grupo de primer año de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas, México. Las herramientas estaban dirigidas a facilitar la participación de los alumnos en la construcción de representaciones gráficas de sucesiones, sucesiones acotadas superiormente, acotadas inferiormente, acotadas, con el objetivo de determinar las diferencias de sus imágenes y grafos respectivos. Los alumnos fueron guiados para que utilizaran técnicas de organización por medio de mapas de extensiones con el objetivo de promover estrategias de aprendizaje.

Los alumnos, con la ayuda del profesor: 1.Consideraron al conjunto $S(N)$ de las sucesiones reales, como conjunto universo. 2. Comprendieron que los conjuntos $S_s(N)$ y $S_i(N)$ de las sucesiones acotadas superiormente y las acotadas inferiormente, respectivamente, eran subconjunto propios de $S(N)$. 3. Fueron guiados para concluir que el conjunto $S_a(N)$ de las sucesiones acotadas coincidía con el conjunto $S_s(N) \cap S_i(N)$ y que era un subconjunto propio de

$S_s(N)$ y $S_i(N)$. 4. Participaron en el proceso de construcciones sucesivas de mapas de extensiones, hasta construir el mapa de la figura 1.

Herramientas didácticas con similares objetivos de aprendizaje se aplicaron en la asignatura Didáctica de la Matemática, de la Maestría en Matemática Educativa (MME) con perfil profesional de la Universidad Autónoma de Coahuila, México, en el primer semestre de 2010. En esta investigación se presentan los resultados de la aplicación de tres hojas de trabajo para facilitar la participación de los estudiantes de la MME en el proceso de formación del concepto de límite de una sucesión real. En las hojas de trabajo aparecen instrumentos didácticos para que los estudiantes desarrollen estrategias de organización y elaboración mediante la ampliación del mapa de la figura 1 al considerar el conjunto de las sucesiones con límite $S_l(N)$; así como por medio de otros tipos de mapas.

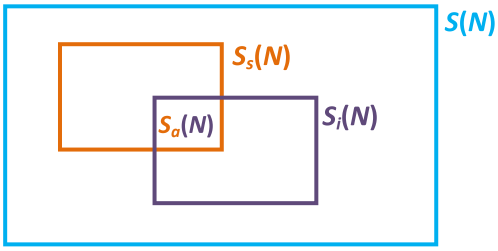


Figura 1. Mapa de las extensiones S(N), S_s(N), S_s(N) y S(N)

En Ausubel, Novak y Hanesian se afirma, "Si tuviese que reducir toda la psicología educativa a un solo principio, enunciaría este: el factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe, averígüese esto, y enséñese consecuentemente." (2000, p. 1). Teniendo en cuenta que los estudiantes de la maestría también participaron en la construcción del mapa de la figura 1, conocíamos lo que ya sabían.

En este trabajo los conceptos se consideran como la cuádrupla (*E*, *C*, *R*, *S*), donde por *E* se indica la extensión del concepto que es el conjunto de todos los objetos que corresponden al concepto, por *C* se denota el contenido del concepto que es una colección de propiedades $C = \{p_i,\ i \in I\}$, donde *I* es un conjunto, que cumplen todos los elementos de *E* y sólo estos elementos, mediante *R* se indica la colección de las representaciones de objetos de la extensión y por medio de *S* se denotan los significados del concepto. Cuando no haya duda se indicará un concepto por *E*.

El estudio de los conceptos se puede realizar mediante los procesos de formación, desarrollo y generalización conceptual. En Martínez (2003) se presenta una propuesta de cómo implementar el proceso de generalización de la adición de números reales, y en una investigación (Mederos y Martínez 2005) se describen tres procesos de formación del concepto de media numérica. En estos trabajos se utilizan diferentes tipos de mapas para determinar la amplitud de la extensión del concepto formado o de las generalizaciones realizadas, las ideas de cómo hacer que los estudiantes participen en la construcción de los mapas se utilizan en nuestra investigación.

Según Beltrán (1998) para que los estudiantes participen en el proceso de adquisición de conocimientos conceptuales es muy importante que desarrollen estrategias de organización y elaboración por medio de mapas conceptuales. Siguiendo estas ideas se utilizaron mapas de extensiones, de proposiciones y simbólicos, por considerarlos más apropiados para los conceptos matemáticos. Para el desarrollo de las estrategias (construcción de los mapas) se utilizaron diferentes registros de representaciones de objetos de las extensiones que intervenían en los mapas, tomando como fundamento los trabajos de (Font, 2002; Godino 2010).

Características del grupo de estudiantes

Trabajamos con un grupo de 14 alumnos de la MME, dos de ellos ingenieros, una arquitecto, cuatro graduados de normal superior y siete graduados de licenciatura en matemáticas aplicadas. Estos alumnos habían aprobado la asignatura "procesos, estrategias y técnicas de aprendizaje", pero no habían diseñados herramientas didácticas que contribuyeran al desarrollo de estrategias de organización para facilitar el proceso de adquisición de conocimientos.

Objetivos de las hojas de trabajo

Las hojas de trabajo se aplicaron con dos objetivos, el primero relativo a la condición de estudiante de los alumnos y el segundo relativo a su preparación como profesores. Con el primer objetivo se pretendía que los estudiantes utilizaran representaciones gráficas de sucesiones reales convergentes y de sucesiones no convergentes, y que las distinguieran atendiendo a las diferencias de sus imágenes y grafos, para utilizar estas diferencias en la ampliación del mapa de la figura 1. Con el segundo objetivo se pretendía que los estudiantes, después de participar en la solución de todos los problemas de las hojas de trabajo, utilizaran esa experiencia para criticar las orientaciones del profesor referentes al diseño de herramientas didácticas que facilitan la utilización de técnicas de aprendizaje para promover estrategias de organización conducentes a la adquisición de conocimientos. De esta forma llegaron a adquirir una concepción propia para el diseño de este tipo de herramienta didáctica.

Diseño y experimentación

Se diseñaron actividades matemáticas para promover el aprendizaje activo y el aprendizaje mediado. Según Beltrán (1998), para que el aprendizaje ocurra, el estudiante debe hacer algo con el conocimiento que se le presenta, debe manipularlo y construir conocimiento para sí mismo, a este tipo de aprendizaje se le da el calificativo de activo. Cuando los estudiantes comparten lo que conocen sobre un tema para hacer predicciones que son probadas o modificadas a medida que interactúan con el profesor y otros estudiantes, se dice que ha tenido un aprendizaje mediado.

Las hojas se estructuraron de tal manera que se fue abordando el concepto de límite gradualmente. Para ello se planteó un primer problema en el que se pedía a los estudiantes que construyeran la representación gráfica de una sucesión tal que todos los puntos de su grafo, excepto un número finito, estuviesen contenidos en una banda de ancho $(l-1, l+1)$, donde por l si indicaba un número real. Se planteó un segundo problema con una exigencia mayor, ya que se requería que todos los puntos de su grafo, excepto un número finito, debían estar en las bandas de ancho $(l-1, l+1)$ y $(l-1/2, l+1/2)$; y que la cantidad de puntos que no pertenecía a la banda más ancha era menor que la que la cantidad no pertenecía a la banda más estrecha. Se fueron planteando este tipo restricciones incluyendo una banda más de ancho $(l-1/n, l+1/n)$, $n = 3,\ldots, 5$.

Posteriormente, se generalizó el procedimiento anterior construyendo para la sucesión de números reales positivos ε, $\varepsilon_1=\varepsilon/2$, $\varepsilon_2=\varepsilon/2^2$, $\varepsilon_3=\varepsilon/2^3,\cdots$ $\varepsilon_m=\varepsilon/2^m$, … dos sucesiones, una de números reales positivos k, k_1, k_2, $k_3,\ldots$, k_m, … y otra de bandas $B_0 = (k, +\infty)\times(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$, $B_1=(k_1, +\infty)\times(l-\varepsilon_1, l+\varepsilon_1)$, $B_2=(k_2, +\infty)\times(l-\varepsilon_2, l+\varepsilon_2)$, $B_3=(k_3, +\infty)\times(l-\varepsilon_3, l+\varepsilon_3),\ldots$, $B_m=(k_m, +\infty)\times(l-\varepsilon_m, l+\varepsilon_m)$, … tales que para cada todo $n > k_m$ los elementos (n, x_n) del grafo de la sucesión están en la banda $B_m = (k_m, +\infty)\times(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$. En la figura 2, se ilustra geométricamente como se pidió que procedieran los estudiantes.

Finalmente los estudiantes fueron orientados para llegar a los resultados:

1. Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ tiene límite l, $l\in R$, si para todo número real positivo ε existe un número real positivo k_ε, se cumple que todos los elementos (n, x_n)de su grafo, con excepción de un número finito, están en la banda $B_\varepsilon = (k_\varepsilon, +\infty)\times(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$.
2. Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ tiene límite l, $l\in R$, si para todo número real positivo ε existe un número real positivo k_ε, tal que para todo $n>k_\varepsilon$ los elementos (n, x_n) del grafo de la sucesión están en la banda $B_\varepsilon = (k_\varepsilon, +\infty)\times(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$.

Obtenidos estos resultados se pidió a los estudiantes que en lugar de trabajar con las bandas de la cadena (1), las proyectaran sobre el eje *y*, para modificar los resultados obtenidos al sustituir las bandas por sus proyecciones

$$B_0 \supset B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \cdots \supset B_n, \ldots \quad (1)$$

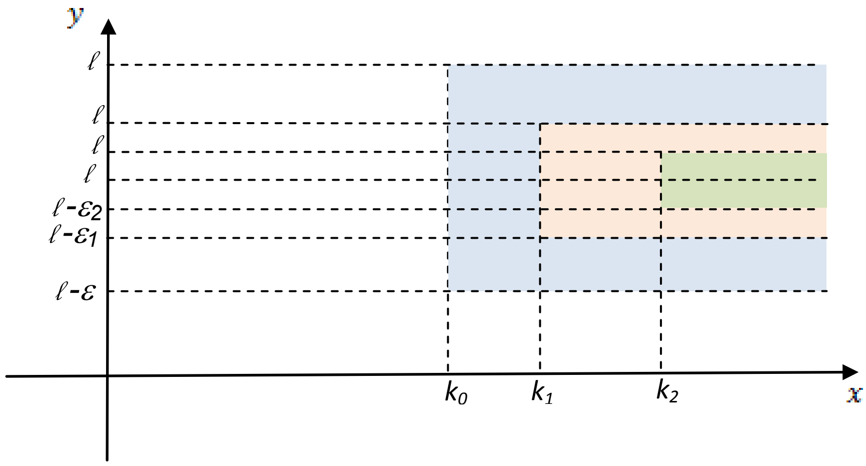


Figura 2. Representación geométrica de las bandas B_0, B_1,…

Los estudiantes en una actividad grupal llegaron a la conclusión que a la sucesión de números reales positivos ε, $\varepsilon_1=\varepsilon/2$, $\varepsilon_2=\varepsilon/2^2$, $\varepsilon_3=\varepsilon/2^3$,$\cdots$ $\varepsilon_m=\varepsilon/2^m$,… le corresponden dos sucesiones, una de números reales positivos k, k_1, k_2, k_3,…, k_m … y otra de intervalos encajados $I=(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$, $I_1=(l-\varepsilon_1, l+\varepsilon_1)$, $I_2=(l-\varepsilon_2, l+\varepsilon_2)$, $I_3=(l-\varepsilon_3, l+\varepsilon_3)$,…, $I_m=(l-\varepsilon_m, l+\varepsilon_m)$, … tales que para cada todo $n > k_m$ los términos x_n de la sucesión están en el intervalo $I = (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$.

No fue difícil que los estudiantes aceptaran las afirmaciones:

1. Una sucesión $\{x_n\}$ tiene límite *l*, si para todo número real positivo ε se cumple que todos los términos de la sucesión, con excepción de un número finito, están en el intervalo $I_\varepsilon = (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$.

2. Una sucesión $\{x_n\}$ tiene límite *l*, si para todo número real positivo ε existe un número real positivo k_ε, tal que para todo $n>k_\varepsilon$ los términos de la sucesión están en el intervalo $I_\varepsilon = (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$.

Una vez que los estudiantes habían participado en los procesos de formación del concepto de límite y de sucesión con límite, utilizando representaciones gráficas, comprendieron que toda sucesión con límite era una sucesión acotada. Se trabajó con los estudiantes en la construcción de sucesiones acotadas que no tuviesen límite. Basándose en estos resultados se construyó el mapa de extensiones de la figura 3.

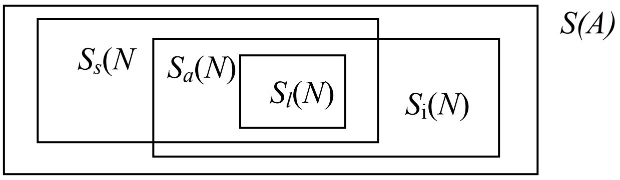


Figura 3. Mapa de las extensiones $S(A)$, $S_l(N)$, $S_a(N)$, $S_s(N)$ y $S_i(N)$

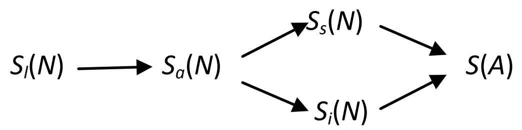
1. Toda sucesión con límite es una sucesión acotada.

2. Existen sucesiones que son acotadas y que no tienen límite.

Figura 4. Mapa de proposiciones

El mapa de extensiones de la figura 3 permitió a los estudiantes construir el mapa de proposiciones, cada una de las cuales debían demostrar o refutar afirmaciones como las que que se muestran en la figura 4. Construyeron, además el mapa simbólico de la figura 5, en los que las flechas indican que el conjunto de donde salen está contenido en el conjunto a donde llegan.

Construyeron, además el mapa simbólico de la figura 5, en los que las flechas indican que el conjunto de donde salen está contenido en el conjunto a donde llegan.



Son distintos del vacío los conjuntos:

$S_a(N)\backslash S_l(N)$, $S_l(N)\backslash S_a(N)$, $S_i(N)\backslash S_a(N)$ y $S(A)\backslash[S_s(N)\cup S_i(N)]$

Figura 5. Mapa simbólico correspondiente al mapa de la figura 1.

Posteriormente se paso al desarrollo del concepto de sucesión con límite, haciendo un estudio de la adición de sucesiones, por medio de una cadena de problemas. Se comenzó planteando un problema en el que se les pedía a los estudiantes que construyeran dos representaciones gráficas de sucesiones con límites l_1 y l_2, respectivamente. En siguiente problema debían construir la representación gráfica de una sucesión haciendo corresponder a cada punto de su dominio, las sumas de las representaciones gráficas de las secesiones con límite l_1 y con límite l_2. Esta nueva representación se definía como la representación de la sucesión suma de las sucesiones sumandos.

En el tercer problema los estudiantes debían hacer una conjetura mediante la cual se relacionara los límites de las tres sucesiones que habían construido. El cuarto problema consistía en demostrar que la sucesión suma de dos sucesiones con límite era una sucesión con límite y que su límite era la suma de los límites de las sucesiones sumandos.

Los estudiantes participaron en la solución de cuatro problemas más, similares a los cuatro descritos en los dos párrafos anteriores, pero ahora dirigidos a demostrar que la sucesión suma de una sucesión con límite y de una sucesión sin límite, era una sucesión sin límite.

El profesor planteo ejemplos de dos pares de sucesiones sin límite tales que la sucesión suma de uno de esos pares tenía límite, y la del otro par no tenía límite.

En la figura 6 se presenta un mapa que muestra los diferentes resultados de sumar sucesiones con límite y sucesiones acotadas sin límite. Las flechas rojas indican que parten de un elemento de $S_l(N)$ y las flechas azules que parten de un elemento de $S_a(N)$. El punto a donde convergen las flechas indica la sucesión suma de las dos sucesiones de donde parten y, además, el conjunto a que pertenece la suma.

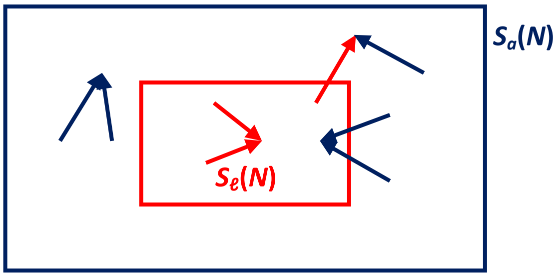


Figura 6. Mapa de la adición de sucesiones con límite y de sucesiones acotadas sin límite

Los estudiantes, en trabajo extra clase hicieron un nuevo diseño de las hojas de trabajo que ellos habían resuelto, teniendo en cuenta, por una parte, las observaciones hechas por el grupo y, por otra, que debían ser aplicadas estudiantes de licenciatura (pregrado) que se enfrentaría por primera vez al concepto de límite de una sucesión.

Conclusiones

Los estudiantes tenían experiencia en pasar de representaciones analíticas de objeto matemático a representaciones gráficas, pero no en el proceso inverso. En muchos casos al trazar la representación gráfica de una sucesión lo hacían considerando primero la representación analítica. Fue muy difícil que entendieran que debían primero considerar un algoritmo de representación gráfica, después utilizar el algoritmo para representarlas gráficamente y finalmente determinar la representación analítica. Por otro lado, para muchos estudiantes representar una sucesión significaba representar su grafo, y unir sus elementos con líneas rectas. Por primera vez comprendieron que el grafo era un subconjunto de $N \times R$. Los estudiantes nunca antes habían determinado características de representaciones gráficas y analíticas de la imagen y el grafo de sucesiones, para establecer relaciones entre las extensiones de diferentes conceptos subordinados al concepto de sucesión. Después que comprendieron que las sucesiones, además de dominio y codominio, tienen imagen y grafo, advirtieron que las representaciones gráfica y analítica de una sucesión requieren de las representaciones de su grafo e imagen. Estos estudiantes no tuvieron dificultad en utilizar los mapas de extensiones, de proposiciones y simbólicos con técnicas para desarrollar estrategias que le permitieran participar el proceso de adquisición de conocimientos. Ya habían aprobado la asignatura técnicas, estrategias y procesos de aprendizaje. Por primera vez, varios de los estudiantes, resolvieron problemas en los que debían plantear una conjetura y después demostrarla o refutarla. Fue muy satisfactoria la experiencia de criticar, y mejorar, las hojas de trabajo después de resolverlas tanto en el aprendizaje de los contenidos, como en el diseño de herramientas didácticas. Además a través de las representaciones analíticas los alumnos tuvieron un primer acercamiento al concepto de límite de una sucesión.

Referencias bibliográficas

Ausubel, D., Novak, J. y Hanesian H. (2000). *Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo.* México: Editorial Trillas.

Beltrán, J. (1998). *Psicología Evolutiva y de la educación. Procesos, estrategias y técnicas de aprendizaje*. España: Editorial síntesis.

Borjón E. y Mederos O. (2011). Técnicas y estrategias para participar en el proceso de adquisición de conocimientos conceptuales en el tema de sucesiones reales. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 24*, 283-291.

Font, V. (2002). *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques*. Tesis de Doctorado no publicada. Universitat de Barcelona. España.

Godino, J. D. (2010). *Marcos teóricos sobre el conocimiento y el aprendizaje matemático*. Recuperado el 15 de marzo de 2011 de http://www.ugr.es/local/jgodino/.

Martínez, A. (2003). *Procedimiento metodológico para la generalización de conceptos de los temas Dominio Numérico y Series en la Educación Superior*. Tesis de doctorado no publicada. Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas. Santa Clara. Cuba.

Mederos, O. y Martínez, J. (2005). La resolución de problemas y la formación y desarrollo de conceptos. El concepto de media numérica. *Números, 62*,53-64.

REGISTROS SEMIÓTICOS Y ENSEÑANZA DEL TEMA INTEGRALES

Alexia Nardín Anarela, Adolfo Álvarez Martínez, Ramón Blanco Sánchez, Seydel Bueno García, Julio Mora Salvador
Universidad de Camagüey "Ignacio Agramonte y Loynaz" Cuba
alexia.nardin@reduc.edu.cu, adolfo.alvarez@reduc.edu.cu, ramón.blanco@reduc.edu.cu

Resumen. En este trabajo analizamos los registros de representación semiótica de conceptos matemáticos presentes en el proceso de enseñanza-aprendizaje del Cálculo Integral en el primer año de las carreras de Ciencias Técnicas (dentro de las que se incluyen las ingenierías, la Arquitectura y las Ciencias de la Alimentación). Los análisis realizados por los autores tienden a reconocer los enfoques de Laura García y James Stewart y se propone unificar estos puntos de vista.

Palabras clave: registros semióticos, representación, integrales

Abstract. In this paper, the registrations of semiotic representation of mathematical concepts present in the teaching-learning process of the Integral Calculation in the first year of the Technical Sciences specialties were analyzed (including Sciences of Feeding, Architecture, and several engineering studies such as Civil Engineering, Electrical Engineering, and Mechanical Engineering). The analyses carried out by the authors tend to recognize Laura Garcia and James Stewart approaches and they propose to unify these points of view.

Key words: semiotic representation, integral calculus

La Semiótica también reconocida, como semiología o ciencia de los signos, aparece por primera vez en la segunda mitad del siglo XIX en los trabajos realizados por el filósofo estadounidense C. S. Peirce y el lingüista suizo Ferdinand de Saussure. Ambos basaron sus teorías en la distinción fundamental dentro del signo entre significante y significado, es decir, entre la forma escrita del signo y lo que representa.

En la Matemática estos signos aparecen en forma de representaciones las cuales juegan un rol fundamental en los procesos de construcción de conceptos, por lo que son importantes en la enseñanza, aprendizaje y comunicación del conocimiento matemático.

Al analizar los registros de representación semiótica y las funciones semióticas que la relacionan en problemas relativos a la búsqueda de la primitiva de funciones así como al tratamiento del significado de la integral definida e indefinida se pretende, dilucidar cuáles de los registros de representación son de mayor peso a la hora de incorporar o darle sentido a dichos conceptos y a sus aplicaciones. Buscamos respuestas a:

¿Cuáles son los distintos registros de representación puestos en juego en la solución del problema? ¿Cómo se suceden? ¿Cómo aparecen y cuál es la necesidad de su generalización?

Introducción

Una de las razones que dificultan el aprendizaje de *las matemáticas* es porque *se expresan en un lenguaje* especial, que es un dialecto o jerga del lenguaje natural (en nuestro caso, español), *en el que no deben caber las ambigüedades ni la posibilidad de interpretaciones diversas*.

El cuarto estadio de refinamiento en el lenguaje es el matemático: un refinamiento del lenguaje natural y la escritura, especialmente adaptado para describir relaciones entre fenómenos. Es el lenguaje sobre el cual se apoya la ciencia. Parte con elementos para describir la individuación y la contabilización de objetos, la creación y especificación de escalas de medidas, y la descripción detallada de relaciones de dependencia y correlaciones entre diferentes factores. Factores que pueden ser tanto de naturaleza cuantitativa como cualitativa. Este refinamiento del lenguaje y la escritura permite especificar en forma detallada relaciones bien determinadas, muy precisas, así como relaciones con componentes aleatorios. Producto del desarrollo de los últimos milenios de civilización, el poderoso lenguaje matemático ha experimentado en los últimos siglos un desarrollo exponencial.

Para entender y aprender las matemáticas es necesario conocer su idioma, pues en caso contrario, aunque se digan cosas muy sencillas, no se entenderían.

Algunos ejemplos que hacen del lenguaje matemático un lenguaje especial son los siguientes:

1. En el lenguaje natural no se utiliza el *cero* como número.

2. En el lenguaje matemático, una *recta* es el ejemplo más sencillo de curva.

3. En el lenguaje natural, sumar es aumentar y restar es disminuir. En el lenguaje matemático, *sumar* es aumentar o disminuir (si se suma un número negativo).

4. En el lenguaje natural, ser iguales es ser indistinguibles. En el lenguaje matemático, una *igualdad* es una equivalencia.

5. Cuando se dice *un número*, en el lenguaje natural se refiere a uno cualquiera determinado, mientras que en el lenguaje matemático se refiere a cualquier número.

6. En el lenguaje matemático una *curva simple* es una curva que no se corta a sí misma, aunque su forma sea extraordinariamente complicada.

Si a esto se agrega que el significado de determinados símbolos u objetos matemáticos depende de múltiples factores no es raro entonces que cueste tanto trabajo interpretar una fórmula y aplicarla a casos particulares. Mayor dificultad aún se presenta si esa fórmula está exigiendo un proceso de integración y se desea llegar a un resultado exacto. Partimos de que frecuentemente el estudiante solamente distingue que apareció un nuevo símbolo delante de la función y que de alguna manera el proceso que representa está relacionado con la derivada de la misma, pero aún no logra comprender de que manera y mucho menos al obtener la primitiva de algunos casos sencillos logra entender el significado de $\int f(g(x)g'(x)dx = F(g(x)) + c$, donde F es una anti derivada de f para lograr generalizaciones necesarias de las tablas que ya conoce. Agregue a esa problemática el hecho de que las aplicaciones físicas y geométricas en la mayoría de los casos están relacionadas con la integral definida y se necesita usar otra fórmula (segundo teorema fundamental del cálculo) cuyo significado no fue asimilado nunca porque la representación de ese objeto no fue registrada en su momento con suficiente solidez por parte del estudiante.

Desarrollo

En el análisis y estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se observa, últimamente, que gran parte de las investigaciones en Didáctica de la Matemática se desarrollan alrededor del uso de nociones que permiten materializar los conceptos matemáticos mediante diferentes conjuntos de símbolos y gráficos.

Duval (1988), hace referencia a las representaciones mentales y a las representaciones semióticas y sostiene que el desarrollo de las representaciones mentales se lleva a cabo como una interiorización de las representaciones externas.

Las representaciones matemáticas se entienden como herramientas (signos o gráficos) que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos, con las cuales los sujetos registran y comunican su conocimiento. Esto es, las estructuras matemáticas adquieren significado para el sujeto mediante el trabajo con las representaciones, y de aquí surge su interés didáctico. No es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a la noción de *representación* en Matemática.

Dentro de las formas convencionales de representación, suelen distinguirse dos familias de sistemas: representaciones simbólicas y gráficas. Las representaciones simbólicas son de carácter alfanumérico. Se pueden simular mediante programas informáticos y la sintaxis se describe por reglas de procedimientos. Las representaciones gráficas incluyen las de tipo figurativo, de carácter analógico y su sintaxis viene dada por reglas de composición y convenios de interpretación. Los registros semióticos incluyen ambas cosas.

La representación pone en consideración el objeto *representante* (símbolo o representación) y el objeto *representado* (conceptos o contenidos conceptuales) que Godino y Batanero (1994) denominan, respectivamente, *significante* y *significado*.

No existe conocimiento que un sujeto pueda movilizar sin una actividad de representación. Sin embargo, Duval (1988) establece que no se deben confundir los objetos matemáticos con su representación, y define los registros de representación como un medio de expresión que se caracterizan por signos propios y por la forma en que se organizan. Por ejemplo, una palabra escrita, una notación, un símbolo o una gráfica representan a un objeto matemático. Un registro está constituido por signos (símbolos, íconos o trazos). Constituyen los grados de libertad que puede disponer un sujeto para objetivarse él mismo una idea aún confusa, un sentimiento latente, para explorar las informaciones o para comunicarlas a un interlocutor. Es cierto que cambiar la forma de una representación en matemática es difícil y a veces imposible para los alumnos, y que la comprensión de un contenido pareciera limitada a la forma de representación utilizada. En cuanto al análisis del desarrollo de los conocimientos y de los obstáculos hallados en los aprendizajes fundamentales relativos al razonamiento, a la comprensión de textos y a la adquisición de tratamientos lógicos y matemáticos, Duval (1988) pone de manifiesto tres fenómenos estrechamente vinculados que deben tenerse en cuenta en la relación de enseñanza-aprendizaje:

- ❖ *Diversificación de los registros de representación semiótica*. El lenguaje natural y las lenguas simbólicas no pueden considerarse como formando un único y mismo registro, así como tampoco los esquemas, los gráficos cartesianos, las tablas o las figuras geométricas, los cuales son sistemas de representación diferentes entre sí.
- ❖ *Diferenciación entre representante y representado*. Generalmente, esta diferenciación se asocia con la comprensión de lo que una representación representa y así permite integrarlas con otras representaciones.
- ❖ *Coordinación entre los diferentes registros de representación semiótica*. La mayor dificultad para la coordinación de registros radica en la importancia de los fenómenos de no-congruencia entre las representaciones en diferentes sistemas semióticos.

Al analizar las relaciones enseñanza-aprendizaje en matemática se hace necesario explicitar los distintos tipos de objetos a los que se recurre para describir la actividad matemática y los procesos que de dicha actividad resultan. Una manera de llevar esto a cabo es observar y analizar qué proponen los textos de matemática respecto de una determinada temática. Tendremos en cuenta para el análisis del problema propuesto las siguientes entidades comentadas por Godino, J. D., Recio, A. M. (1998):

- ❖ *Lenguaje* (términos, expresiones, notaciones, gráficos, tanto oral como escrito). Esto es, las representaciones a las que hace referencia Duval.
- ❖ **Situaciones* (problemas más o menos abiertos, aplicaciones extramatemáticas, intramatemáticas, ejercicios,...).
- ❖ *Conceptos:* Definiciones o descripciones (operar, algoritmos, técnicas de cálculo).
- ❖ *Propiedades:* Enunciados o proposiciones.

La actividad matemática surge cuando el sujeto se enfrenta a situaciones problemáticas en cuya solución hace uso de elementos ostensivos e intensivos de los que dispone. Godino y Batanero (1994), denominan "entidades actuativas" a las acciones que realiza el sujeto en la búsqueda de una solución.

Consideramos, en la actividad matemática, los elementos ostensivos, extensivos e intensivos. Los elementos ostensivos son cualquier representación material usada en la actividad matemática (términos, expresiones, símbolos, tablas, gráficos) y las entidades lingüísticas/notacionales. En los extensivos incluimos las entidades fenomenológicas como situaciones-problemas, aplicaciones. Y como elementos intensivos, las ideas matemáticas, abstracciones, generalizaciones (conceptos, proposiciones, teorías).

La relación entre la actividad matemática y los procesos de difusión del conocimiento se da a través de las funciones semióticas, que permiten formular en términos semióticos el conocimiento matemático.

Resulta imprescindible por tanto, a partir del enfoque anterior, revisar la relación entre los objetos matemáticos del tema Cálculo integral y su representación, con el objetivo de que se alcancen conceptos matemáticos más profundos, elaborados y aplicables.

En este tema hay un trabajo realizado por García, (2006), quien plantea:

> El nexo símbolo objeto en la integral definida presenta diferentes variaciones de acuerdo a la aplicación de que se trate, variaciones que se pueden comprender a través de la resolución de la contradicción que se manifiesta entre el carácter general y el carácter singular de la semiótica de la integral definida. Estas tienen como elemento común la presencia del núcleo invariante de la integral en cada una de sus aplicaciones y los cambios están determinados, en primera instancia, por la región sobre la que se integra, ya sea lineal, superficial o volumétrica.

Esta autora hace una diferenciación por niveles de la siguiente forma:

1er. Nivel

- Relación directa símbolo objeto.
    - El símbolo: $\int f(x)dx$ representa el objeto F(x) + C, familia de primitivas de la función f(x).

2do. Nivel

- Relación del símbolo con dos objetos.

- El símbolo: $\int_a^b f(x)dx$ Implica la determinación de una primitiva, pero además representa el objeto F(b) – F(a), teorema fundamental del cálculo.

3er. Nivel

- Relación del símbolo con tres objetos.
  - El símbolo: $\int_a^b f(x)dx$ representa los elementos contenidos en el nivel dos y además, el área bajo la curva f(x) en el intervalo [a, b] en el cual f(x) es mayor o igual que cero.

4to. Nivel

- Relación del símbolo con una variedad de objetos.

En el caso de las integrales dobles y triples se enfrenta una situación análoga.

Además, esta autora aporta un modelo y una metodología para su utilización que permite emplear todos estos niveles en la resolución de numerosos problemas de temas relacionados con la integral.

Un aspecto también importante en el trabajo desarrollado por García es la determinación de la contradicción que se manifiesta entre el carácter general y el carácter singular de la semiótica de la integral definida, dado que el núcleo invariante de este concepto, permite interpretar la semiótica del concepto tanto de modo general como particular.

La solución de esta contradicción en el plano didáctico, permitió dinamizar el modelo y determinar sus regularidades, lo cual posibilitó a su vez establecer la metodología pertinente para su aplicación. El modelo se apoya en el uso de las TIC, cuyo uso se encuentra fundamentado en el desarrollo de la investigación y su aplicación se hace explicita en la metodología elaborada.

La metodología en cuestión se desarrolla en dos etapas, de acuerdo a la estructura del modelo, esto es la apropiación del concepto de integral, donde se transita por los niveles de complejidad del 1ro al 3ro, se usa una BOA general, completa y ejecutada de forma independiente por parte de los estudiantes, lo que significa que se indica el camino a seguir, pero se deja libertad al estudiante para recorrerlo (Blanco, 1999), por lo que la orientación se hace de modo que el estudiante se enfoque a lo esencial del contenido, logrando así identificar la unión de infinitos infinitésimos, como el núcleo invariante del concepto de integral definida, lo cual se hace mediante un orden lógico y en una estructura sistémica que se buscó en el contenido de la ciencia matemática, originando la nueva propuesta del programa.

La determinación de los diferentes niveles en los que se da el nexo símbolo objeto, en el caso del concepto de integral, permite una mejor orientación al estudiante y un mejor control por etapas, de su asimilación cuando se encuentra en la etapa de las acciones externas. Aquí se manifiesta la contradicción fundamental en el carácter singular y general del núcleo esencial de la integral definida.

La segunda etapa de la metodología está orientada a la resolución de la situación problema, se transita por los niveles de complejidad del nexo símbolo objeto del 2do al 4to. Se continúa la orientación hacia lo esencial del contenido que se centra en la identificación de su núcleo invariante, identificando en cada aplicación, la semiótica que representa la magnitud física, cuyos infinitos infinitésimos, se procederá a integrar; con lo cual el estudiante pasa de hacer generalizaciones por ampliación del concepto a generalizaciones por variaciones al modelo, incorpora la semiótica tratada en los niveles tres y cuatro y llega a interiorizar a nivel mental la acción de aplicar la integral desde una a tres variables, logrando además una auto orientación sistémica en el contenido de estudio.

Otro autor que evidencia la necesidad de cambiar los enfoques de la enseñanza de la integral definida es James Stewart, cuyo libro es usado como texto básico por los autores de este trabajo.

Algunas consideraciones relacionadas con estos puntos de vistas se refieren a:

Organizar y estructurar el contenido del tema según la secuencia siguiente:

1. Presentar la anti derivada de una función a partir de problemas que justifiquen su necesidad y dejen claro su significado y alcance.
2. Presentar problemas de naturaleza diversa, en áreas como la Geometría, la Física, las Ingenierías; que demuestren la necesidad de determinar magnitudes que caractericen propiedades de objetos o fenómenos, en las que para determinarlas se necesite como una invariante, que la misma se divida en un gran número de partes más pequeñas, que se aproxime cada parte, se establezca su suma y se le calcule su límite siempre que exista. El planteamiento de este tipo de problemas conduce al cálculo de límites de sumas, concepto conocido y utilizado con anterioridad por los estudiantes. Como ejemplos se puede presentar el problema de determinar el área de regiones de un plano, limitadas por el grafico de funciones positivas y continuas, el eje x y rectas verticales que limiten un intervalo de la función, análogamente pueden tratarse el problema de determinar la

longitud de un arco de curva o el problema de determinar el volumen que se obtiene al hacer girar una porción del gráfico de una función continua alrededor de un eje.

3. Denominar el proceso anterior como suma de Riemann y a partir de la misma presentar a la Integral Definida como una representación matemática, destacando de la misma su objeto representante y el objeto representado.
4. Definir la Integral definida, profundizar en su interpretación y enumerar sus propiedades. Precisamente el hecho de que la integral definida constituye un símbolo en su totalidad, y que como significado es un límite, constituye por tanto un número el cual tendrá significados diversos que dependen de la naturaleza del problema que modelan, elemento este fundamental para la comprensión del concepto.
5. Elaborar el teorema fundamental del cálculo en sus dos partes, profundizar en su significado y en la relación que el mismo establece entre la derivación e integración como procesos inversos.
6. Presentar a la Integral Indefinida como una representación matemática, destacando de la misma su objeto representante y el objeto representado. Teniendo como condiciones previas que el estudiante se encuentra familiarizado con la representación del concepto de integral definida. Aquí se retoma el concepto de anti derivada de una función y la relación entre la derivada y la integral manifestada en el teorema fundamental del cálculo en sus dos partes integrantes.
7. Definir la Integral Indefinida, profundizar en su interpretación y enumerar sus propiedades.

En el trabajo con la integral indefinida en muchas ocasiones se presenta el problema de que el estudiante olvida sumar +c (c- constante) en la respuesta, y no es porque la tabla está escrita sin ese detalle, en gran medida consideramos, que de acuerdo con el trabajo que hasta el momento se viene realizando con este contenido en la asignatura, muy pocas veces se grafica una familia de curvas que representara el conjunto de primitivas de cierta función. Este es un ejemplo concreto que nos advierte sobre la necesidad de utilizar diferentes registros al abordar un determinado objeto matemático para contribuir a su comprensión.

Por otra parte, el teorema $\int f(g(x)g'(x)dx = F(g(x)) + c$ no podrá tener significado para el estudiante hasta que no realice un estudio de casos particulares, entre otros:

1) $\int f(x)f'(x)dx = \dfrac{f^2(x)}{2} + c$

2) $\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \ln|f(x)| + c$

3) $\int sen(g(x)g'(x)dx = sen(g(x)) + c$

A esto se suma que los estudiantes adquieren los principales conceptos con gran dificultad pero es peor cuando no conocen sus propiedades, referidas en este caso a la linealidad de la integral indefinida y su relación con el concepto de diferencial de la función.

Tratar en este tema los casos que no resulta posible recurrir a la primitiva de la función (por no existir o por no estar dada la función del integrando en forma analítica) para resolver el problema y la integral que se plantea es definida, se suele recurrir a métodos numéricos, lo cual conlleva a un cambio en el registro de representación, elementos estos incluidos en otras asignaturas de la disciplina de Matemática en los currículos de las distintas carreras de ciencias técnicas.

Aumentar en los documentos auxiliares a la docencia y uso de soporte tecnológico el número de problemas aplicados que requieren el uso de este modelo matemático para incrementar el uso de diferentes registros semióticos.

Utilizar la metodología propuesta por Laura García en el estudio de las integrales múltiples y sus aplicaciones.

Referencias bibliográficas

Duval, R. (1988). *Gráficas y ecuaciones. La articulación de dos Registros*. Estrasburgo: Universidad Luis Pasteur, IREM.

García, L. (2006). *Modelo para el desarrollo de la habilidad de resolución de problemas a través del cálculo integral en FIME, basado en los niveles de complejidad del nexo símbolo objeto.* Tesis de Doctorado no publicada. México.

Godino, J. D., Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématique,*14 (3), 325-355.

Godino, J. D., Recio, A. M. (1998). Un modelo semiótico para el análisis de las relaciones entre pensamiento, lenguaje y contexto en Educación Matemática, *Proceedings of the 22 th International Conference of PME,* 3, 1-8.

Montecinos H. (2008). *El lenguaje matemático*. Disponible en: www.icalquinta.cl

Stewart, J. (2006). *Cálculo con Trascendentes Tempranas. Parte 1 y 2*. La Habana: Félix Varela.

APRENDIZAJE RELACIONAL DE LA MATEMÁTICA EN EL BACHILLERATO

Maricela Rodríguez Ortiz, Isabel Santiesteban Pérez, Eduardo Álvarez Rojas, Elsa Gutiérrez Báez, Martha López Cruz
Universidad de Ciencias Pedagógicas "Pepito Tey" Cuba
maricela@ucp.lt.rimed.cu, isasp@ult.edu.cu, ealvarez@dpe.lt.rimed.cu, egutierrez@ ucp.lt.rimed.cu, mlopez@fie.uo.edu.cu

Resumen. El perfeccionamiento del sistema educacional, particularmente de la asignatura Matemática, debe garantizar que el nivel de conocimientos, la formación de hábitos y habilidades en los estudiantes se correspondan con las exigencias de los objetivos declarados para cada nivel educativo. El trabajo aborda el perfeccionamiento de la formación de profesores de Matemática en las Universidades de Ciencias Pedagógicas para el nivel preuniversitario a través de las relaciones entre los conocimientos matemáticos para contribuir a resolver las limitaciones que en el aprendizaje presentan los estudiantes. El aporte fundamental radica en el modelo didáctico para el aprendizaje de la Matemática a través de un proceso que revela las relaciones lógicas de significado entre los conceptos, proposiciones y procedimientos, que transitan por los niveles de los conocimientos básicos, generales y específicos y propicia la transferencia relacional, sobre la base de los nexos entre lo conocido y lo nuevo por conocer, así como la búsqueda activa de los conocimientos.

Palabras clave: relaciones lógicas, transferencia, aprendizaje relacional

Abstract. The improvement of educational system, particularly concerning the subject of Mathematics, should warrant that the level of knowledge, the formation of habits and abilities in the students correspond with the demands of the objectives declared for each educative level. This work is about the formation of Math professors in Universities of Pedagogical Sciences for pre-university level through relationships between the Mathematical knowledge to contribute solving the students' limitations. The fundamental approach consists of the didactic model for learning Math throughout a process that reveals the logic relation and meaning between concepts, proposals and procedures that deal with the basic, general, and specific levels of knowledge and it provides the rational transference over the base of the links between the known and the new about to be known, and also the active research for Mathematical knowledge,

Key words: logic relations, transference, relational learning

Introducción

La enseñanza de la Matemática en la escuela cubana tiene la tarea de contribuir a la preparación de los educandos para la vida laboral, económica y social, de manera que dispongan de sólidos conocimientos matemáticos que les permitan interpretar los avances de la ciencia y la técnica, que sean capaces de operar con ellos con rapidez, rigor y exactitud, de modo consciente para aplicarlos de manera creadora a la solución de los problemas en las diferentes esferas de la vida.

Las tres revoluciones educacionales desarrolladas por el estado cubano representan etapas de transformación, en las que cada vez se enfrentaron nuevos retos, pero todas tienen como idea esencial lograr el crecimiento personal y la formación integral de la sociedad. Es en la escuela donde se concretan estas ideas a través de los objetivos de la Educación y en particular en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

En diferentes escenarios se reflexiona sobre los problemas que afectan la calidad del aprendizaje de la Matemática, haciéndose alusión a un conjunto de: "[...] insuficiencias que se incrementan de grado en grado y que se manifiestan en el limitado desempeño de los estudiantes en la asimilación y uso de los conocimientos, que en general no rebasan el plano reproductivo" (Rodríguez, 2011, p.4).

Lo anterior se refleja en los resultados de los estudiantes del preuniversitario en los exámenes de ingreso a la Educación Superior, en las comprobaciones provinciales, en los operativos de calidad, así como en las evaluaciones valoradas correspondientes al sistema que diseñó el profesor, los que alcanzan niveles inferiores a las aspiraciones y el fin de la Educación Preuniversitaria.

La problemática del aprendizaje que motivó la investigación, provocó la revisión de la concepción teórica de los modelos que han sustentado la formación inicial de docentes que imparten la Matemática en la secundaria básica y el preuniversitario, los cuales transitaron por modificaciones que incluyen el uso de la tecnología en la última etapa. En todas las etapas y modelos prevalece el insuficiente aprendizaje de la asignatura, lo que conllevó a la realización de diversas investigaciones y sin embargo, quedan aristas aún no abordadas, como es el tratamiento didáctico a las relaciones entre conceptos, proposiciones y procedimientos matemáticos que pudiera incidir en la solución de esta problemática.

El aprendizaje relacional

Para contribuir a mejorar los resultados en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en el preuniversitario, se introduce el aprendizaje relacional dentro de la Didáctica de la Matemática, asignatura que reciben los futuros profesores de esta asignatura durante su formación inicial en la Universidad de Ciencias Pedagógicas. Los autores caracterizan el aprendizaje relacional como la transformación procedimental didáctica y gnoseológica que se opera en el estudiante a partir de determinar los tipos de relaciones lógicas entre conceptos, proposiciones y procedimientos, dinamizarlas de manera que permita el tránsito de lo conocido a lo desconocido, de lo conocido parcialmente al conocimiento que se corresponde con el nivel de enseñanza, así como de la dependencia a la independencia cognoscitiva y que pueda aplicar dicho conocimiento a situaciones nuevas.

La modelación del aprendizaje relacional se hace a partir de la representación teórica de su estructura en dos componentes y su funcionamiento como sistema. El primer componente de la estructura lo constituyen las relaciones lógicas en los conocimientos y el segundo los niveles de las relaciones en los conocimientos matemáticos del preuniversitario.

La función del primer componente es determinar las relaciones lógicas entre los elementos de los conocimientos que están presentes en la asignatura Matemática. Las relaciones lógicas de significado, son interconexiones entre las representaciones y palabras involucradas en una situación de aprendizaje, que permiten revelar las relaciones entre conceptos, proposiciones y procedimientos (Montenegro, 2004).

Los conceptos, constituyen la base de las teorías Matemáticas y se sustentan en signos y símbolos matemáticos que se estudian desde los primeros grados, a través de las diferentes líneas directrices que caracterizan la enseñanza de la Matemática. Se tiene en cuenta el papel que desempeñan los conceptos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática para la comprensión de relaciones que se dan entre ellos y las proposiciones y los procedimientos, ya que constituyen una condición previa para la capacidad de aplicar lo aprendido, en la forma más segura y creadora (Ballester, Santana, Hernández, Cruz, Arango, García, 1992).

Para lograr el aprendizaje de estos objetos es preciso conocer las características y el significado de los elementos que lo componen y luego poder aplicarlos a otros contextos de manera reproductiva y/o productiva. Por ello, en los tipos de relaciones definidos a continuación están incluidos los conceptos, los que se vinculan con los otros objetos del conocimiento matemático.

Relaciones lógicas de significado

Las relaciones lógicas de significado que están presentes en las situaciones de aprendizaje pueden ser de tres tipos, dados por los elementos del conocimiento que se involucran en ellas, estas son:

La relación conceptos-procedimientos: que se manifiesta en la relación entre conceptos y procedimientos presentes en el objeto de aprendizaje potencialmente significativo para el sujeto. Significa que el estudiante solo requiere de estos para darle solución a la situación que se le presenta en el proceso de enseñanza aprendizaje. En este tipo se excluyen las proposiciones, pues basta la interpretación del concepto y la determinación del procedimiento relativo que se debe aplicar en la solución de la situación planteada.

La relación conceptos-proposiciones es la que se manifiesta en la relación que se da entre conceptos y proposiciones presentes en el objeto de aprendizaje potencialmente significativo para el sujeto, porque se trata en este caso de situaciones donde la acción generalmente es fundamentar, argumentar acciones adoptadas a través de proposiciones involucradas en el o los conceptos dados en la situación que se le presenta al estudiante, las cuales incorpora a su estructura cognoscitiva y permiten que se desempeñe aplicando significativamente las relaciones lógicas.

La relación conceptos proposiciones procedimientos es la que se manifiesta en la relación entre los conceptos, las proposiciones y los procedimientos relativos a la situación de aprendizaje presente en el objeto potencialmente significativo para el sujeto, es decir, en este tipo de relación para darle solución a la situación que se presenta se deben identificar componentes y relaciones, establecer las estrategias de solución a partir de seleccionar el procedimiento que corresponde con los conceptos y las proposiciones involucradas, que puede incluir fundamentar y/o justificar lo realizado.

Las relaciones lógicas en los niveles de los conocimientos

En el segundo componente se tuvo en cuenta que en la Matemática los conocimientos tienen un carácter sistémico. La función de los niveles de relaciones en los conocimientos matemáticos del preuniversitario es establecer una estructura sistémica para el aprendizaje, sobre la base de las relaciones lógicas determinadas en el primer componente. Estos niveles están dados por las relaciones que se expresan en los conocimientos básicos, los conocimientos generales y los conocimientos específicos.

Para determinar los tres niveles de relaciones en los conocimientos matemáticos del preuniversitario se hizo necesario analizar la estructura del conocimiento matemático, debido a que la comprensión y el aprendizaje de este dependen en gran medida de los nexos que existen entre los conocimientos, las acciones y operaciones y la experiencia ya asimilados, con el nuevo contenido.

Se denominan conocimientos básicos a aquellos que se estudian en grados anteriores para luego ampliarlos y generalizarlos en otros contextos donde se presenten nuevos contenidos, teniendo en cuenta que el conocimiento no es algo totalmente acabado sino en plena creación, que más que conceptos, proposiciones y procedimientos que se aprenden existen estructuras que se amplían y enriquecen a lo largo de toda la vida. En otras palabras, los conocimientos básicos son conocimientos previos que sirven de base para el proceso de aprendizaje relacional.

En el primer nivel se revelan las tres formas de manifestarse las relaciones lógicas de significado que se dan entre los conceptos, proposiciones y procedimientos básicos y que son necesarios para la temática que se aborda, de modo que se convierten en conocimientos previos para el aprendizaje, en temas o ramas de la Matemática para el nivel, como resultado de la interacción entre ellos. Sin embargo, es preciso valorar las relaciones internas en cada uno, que como objetos matemáticos poseen un significado y sentido en cada estructura donde se involucran.

Los conceptos básicos que se implican en este nivel fueron asimilados con anterioridad, pero serán ampliados y enriquecidos para incorporarlos a otras estructuras conceptuales.

Las proposiciones básicas, como objetos matemáticos, que poseen estructuras de mayor complejidad y son consecuencias de las relaciones que se establecen entre conceptos matemáticos básicos, que requieren del conocimiento de éstos, siendo imposible la extrapolación y aplicación sin una interpretación adecuada. Por ello la determinación de las relaciones de significado de los componentes que forman parte de las proposiciones es esencial para su aplicación, de igual modo, para poder aplicar una proposición de manera adecuada es necesario determinar las relaciones de significado y el sentido con que son presentadas en ésta.

La Matemática desde su carácter instrumental, como herramienta para la solución de diversas situaciones de la vida y de las ciencias, se manifiesta a través de procedimientos que aparecen en diversos contextos científicos y didácticos dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje. Los procedimientos se sustentan en conceptos y proposiciones cuyos significados deben guardar alguna relación que conduzca a la solución de la situación que se presenta. Por tanto, es importante la determinación de esas relaciones para su aplicación consecuente.

En este nivel el profesor presenta situaciones conocidas y empleando fundamentalmente el método de elaboración conjunta, reflexiona con los estudiantes los tipos de relaciones lógicas de significado que caracterizan las situaciones conocidas que se presentan, de manera que el estudiante asimila el proceder para el aprendizaje de nuevos contenidos que posteriormente serán objeto de estudio, por tanto este nivel constituye el de relaciones de los conocimientos básicos, pues a partir de él se asciende en el aprendizaje, transfiriendo lo aprendido a un estadio superior.

La esencia está en utilizar los conocimientos del estudiante para aplicarlos en las situaciones de aprendizaje nuevas, de manera que se apropie del conocimiento y lo encuentre significativo o sea importante y relevante en su vida diaria, de modo que pueda integrarlo en su sistema de relaciones.

En el tratamiento didáctico a estos objetos matemáticos en primer lugar se debe garantizar las condiciones previas, las relaciones internas entre cada uno, es decir, entre los conceptos, que son necesarios para estudiar un nuevo concepto. De igual forma entre las proposiciones y procedimientos que tienen nexos con el nuevo contenido que se va a estudiar.

Los conocimientos generales son los que engloban a los del nivel básico y se estudian por primera vez en el grado, por las características del contenido en que están inmersos, por su aplicación y vínculo con otros contenidos tienen un mayor grado de generalidad y responden a objetivos de la asignatura en el grado. O sea que aquí se tiene una dirección precisa hacia donde orientar la actividad a realizar, pues se hace imprescindible generalizar correctamente sobre los rasgos esenciales y los nexos internos de los fenómenos que se estudian.

En el segundo nivel se revelan las relaciones entre los conceptos, proposiciones y procedimientos en los conocimientos matemáticos generales, los que posibilitan la extrapolación y aplicación a nuevas situaciones en las que se manifiestan dichas relaciones. El propio proceso de aplicación favorece la determinación de nuevas relaciones significativas, que contribuyen al desarrollo de tareas de manera independiente, propiciando el aprendizaje significativo, como base del aprendizaje desarrollador.

En el planteamiento de situaciones portadoras de diferentes tipos de relaciones lógicas de significado los estudiantes, guiados por el docente y en colaboración con los otros, transfieren significativamente las relaciones lógicas entre conceptos, proposiciones y procedimientos. Primero entre los conceptos básicos y los nuevos, mediante la inducción – deducción y luego entre las proposiciones y/o los procedimientos básicos y los nuevos, de forma que aprende el nuevo contenido a partir de revelar las relaciones lógicas de significado. En este proceso se emplean procedimientos heurísticos, particularmente el de analogía y ocurre un tránsito progresivo de la dependencia a la independencia, fortaleciéndose la comunicación alumno-alumno.

En este nivel se produce la transferencia significativa por cuanto, a partir de revelar los tipos de relaciones que se manifiestan en los conocimientos básicos se pasa a una generalización, donde los conceptos, las proposiciones y los procedimientos son nuevos para el estudiante.

La significatividad del aprendizaje en este nivel alcanza un estadio superior al abarcar las tres esferas o direcciones en que este se realiza, es decir: la significatividad conceptual, que es denominada a las relaciones entre los conocimientos asimilados y el nuevo contenido, significatividad experencial, al establecer relaciones entre los nuevos contenidos y la experiencia y la significatividad afectiva, al establecer relaciones entre el contenido y el mundo personal, afectivo-motivacional del estudiante, potenciando su relevancia personal y social (Castellans y otros, 2002).

La dinámica que se produce en la determinación de las relaciones de significado que se revelan en conceptos, proposiciones y procedimientos de este nivel, permiten una profundización en los conocimientos, favoreciendo su aplicación a la solución de situaciones nuevas, produciéndose una transferencia significativa de relaciones lógicas.

Los conocimientos específicos son los que están presentes en situaciones singulares, es decir son los que constituyen variantes de los conocimientos generales, en los que se aplican estos a casos concretos. El tercer nivel debe concretar la transferencia de los casos particular y general a situaciones singulares, denotando dominio en el proceso de extrapolación teórica y procedimental de conocimientos matemáticos.

En este nivel para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, se trata de la transferencia en el estudio de conceptos, proposiciones y procedimientos generales de la Matemática a casos concretos, que se comportan como elementos singulares en el proceso de aprendizaje. Se realiza la transferencia del tipo de relación implicada en una situación aprendizaje concreta y aplicarla para resolverla, teniendo como premisas lo aprendido en los niveles precedentes, dando cuenta de la asimilación productiva de los mismos.

Los niveles de las relaciones guardan una estrecha conexión, en tanto responden a la lógica dialéctica, atendiendo a que los conceptos, proposiciones y procedimientos que se involucran, aun cuando responden a la complejidad teórica del contenido, se relacionan para el tratamiento didáctico que permita que el estudiante asimile dando cuenta de la dinámica que se produce en el proceso aprendizaje.

El hacer del aprendizaje relacional un modo de actuación en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática, favorece la autoevaluación y autocontrol del aprendizaje por parte del estudiante, en tanto permite de que éste se percate de los conocimientos que necesita, los relacione e incorpore a su estructura cognoscitiva para hacer las transferencias necesarias que favorecen su implicación conciente en ese proceso. Con ello es capaz de comprobar la calidad de sus resultados al resolver las situaciones que se le presentan.

El aprendizaje relacional permite además que el estudiante pueda adquirir no solo conocimientos, sino que desarrolle habilidades y reflexione conscientemente sobre las diversas acciones que realiza en el proceso de solución de las situaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Transferencia relacional

Con el aprendizaje relacional se produce un salto cualitativo que se manifiesta en la transferencia relacional, como una nueva cualidad en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, que potencia las relaciones lógicas y se expresa en el tránsito por los niveles de las relaciones en los conocimientos matemáticos. Es decir, las relaciones lógicas aprendidas en los conocimientos básicos se transfieren a los conocimientos generales y finalmente a casos particulares, permitiendo el paso de la dependencia a la independencia en el aprendizaje y la búsqueda activa de los conocimientos.

En la transferencia de relaciones lógicas de significado, se contribuye a la fijación de los conocimientos, lo que revela las potencialidades para favorecer el aprendizaje de la Matemática, en un proceso que inicia con el aprendizaje de los tipos de relaciones en los conocimientos básicos, luego lo transfiere a situaciones nuevas generales y finalmente logra aplicar, de forma independiente y creativa, las transferencias de significados a casos singulares, produciéndose con ello, la manifestación de los principios dialécticos de lo particular a lo general y de ahí a lo singular.

Esta dinámica genera una transformación en los demás componentes del modelo, de tal forma que conduce que el objetivo no solo vaya a lo instructivo y lo educativo sino a lo desarrollador y que el estudiante logre metas con un mayor nivel de profundidad. Los contenidos de la asignatura Matemática se organizan y seleccionan en función del logro de la transferencia relacional, sobre la base de métodos desarrolladores y problematizadores que propician en los estudiantes la búsqueda activa, la elaboración personal y el intercambio con sus compañeros y profesores, desde la movilización de los conocimientos previos, que facilitan la selección de los elementos, tanto cognitivos como procedimentales, para encausar la solución de las tareas de aprendizaje que se proponen (Godino, 1996) .

En este proceso ocurre el desarrollo de la evaluación durante los momentos de aprendizaje, la coevaluación y la autoevalución, lo que permite determinar el grado de apropiación de los contenidos y de la lógica para el aprendizaje de la Matemática en el preuniversitario.

Los objetos del sistema de conocimientos de la Matemática están vinculados entre sí por los más diversos nexos y relaciones causales, temporales, espaciales, condicionales, funcionales, directas e indirectas, de unidad, igualdad, etc. El conocimiento y la generalización de estos nexos y relaciones es una de las funciones básicas del aprendizaje relacional, que se sustenta en las operaciones lógicas del pensamiento, análisis, comparación y síntesis. Las cualidades de los objetos singulares de uno u otro género, se llegan a conocer y luego se generalizan, como resultado de esta actividad mental.

Con los métodos tradicionales de desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje, el estudiante se apropia del contenido de forma fragmentada, mediante el estudio aislado de los conceptos, las proposiciones y los procedimientos. Ello provoca que, con frecuencia, no sea capaz de identificar los vínculos y nexos entre éstos objetos, dentro de una misma temática o en temáticas diferentes y mucho menos de aplicarlos para darle solución a una situación de aprendizaje. Sin embargo, la transferencia relacional favorece el aprendizaje de los conocimientos matemáticos con enfoque desarrollador.

Conclusiones

El modelo didáctico, que se fundamenta en el aprendizaje relacional estimula el desarrollo del pensamiento lógico y la independencia cognoscitiva. El mismo es pertinente porque revela una lógica propia del conocimiento matemático, que potencia desde la Didáctica el aprendizaje y sobre su base, la estrategia didáctica contribuye a la búsqueda activa del conocimiento en el estudiante a través de la transferencia relacional,

La implementación de la estrategia en la práctica favorece el proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura Matemática en el preuniversitario, lo que quedó demostrado con la consecuente valoración, a partir de los métodos aplicados.

Referencias bibliográficas

Ballester, S., Santana, H., Hernández, S., Cruz, I., Arango, C., García, M. (1992). *Metodología de la enseñanza de la Matemática*. La Habana: Pueblo y Educación.

Bernardo, J. (1997). *Hacia una enseñanza eficaz*. Madrid: Rialpa.

Coll, C. (1991). *Aprendizaje escolar y construcción del conocimiento en situaciones educativas*. Buenos Aires: Paidós.

Godino, J. D. (1996). *Significado y comprensión de los conceptos matemáticos*. Valencia, España, En. Proceedings of the 20th PME. Conference.

Montenegro, E. (2004). *Modelo para la estructuración y formación de habilidades lógicas a través del Análisis Matemático*. Tesis de Doctorado no publicada. Instituto Superior Pedagógico "Frank País. Cuba.

Rico, L. (2006) *Didáctica de la Matemática como campo de problemas*. Recuperado el 13 de junio de 2009 de http://www.ugr.es/dpto_did/

Rico, P. (1996). *Reflexión y aprendizaje en el aula*. La Habana: Pueblo y Educación.

Rico, P. y Silvestre, M.(2007) *Hacia la remodelación del proceso de enseñanza-aprendizaje*. Recuperado el 12 de junio de 2008 de http://ciEdrimEdcu/revista/21/articulos/a21haciala.html.

Pozo, J.I. (1989). *Teorías cognitivas del aprendizaje*. Madrid: Morata.

Rodríguez, M. (2011). *Aprendizaje relacional de la Matemática en el preuniversitario*. Tesis de doctorado no publicada. Universidad de Ciencias Pedagógicas "Pepito Tey". Cuba.

INTERPRETACIÓN FÍSICA DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN, UN OBJETO DE APRENDIZAJE PRESENTADO EN COMICS

Felipe Santoyo Telles, Eliseo Santoyo Teyes, Karla Liliana Puga Nathal
Centro Universitario del Sur de la Universidad de Guadalajara México
Centro de Bachillerato Tecnológico Industrial y de Servicios 226 de Cd. Guzmán
Instituto Tecnológico de Cd. Guzmán
eliseo.santoyo@gmail.com; santf22@hotmail.com; karlalpn4@hotmail.com

Resumen. En el marco de la Reforma Integral de la Educación Media Superior en México, se entiende que la enseñanza de la Matemática debe orientarse hacia el manejo de los conceptos y herramientas indispensables para comprender la disciplina. Para abordar el tema "interpretación física de la derivada de una función", se diseñó un objeto de aprendizaje, partiendo de una situación problema que recupera el abordaje clásico, –La derivada como una velocidad instantánea–. Se diseñó una historieta con dibujos animados, se trata la velocidad instantánea partiendo del experimento de Galileo, contextualizado dentro de una batalla entre personajes del folclore nacional.

Palabras clave: nción, derivada., interpretación física

Abstract. In the framework of the Integral Reform of Higher Middle Education (High School) in Mexico, it is understood that the teaching of mathematics should be directed toward the management of concepts and tools necessary to understand the discipline. To address the topic "physical interpretation of the derivative of a function", a learning object was designed, starting from a situation problem that recovery the classical approach, -The derivative as an instantaneous speed-. It was designed a comic with cartoons, this is the instantaneous velocity based on the experiment of Galileo and contextualized into a battle between personages of national folklore,

Key words: function, derivative, physical interpretation

Introducción

A partir de 2008 da inició –en las aulas– en México la Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS), en este marco se establece que la orientación de la Matemática debe ser hacia el manejo de los conceptos y las herramientas indispensables para comprender la disciplina. Dadas las limitaciones de tiempo para trabajar la parte conceptual –en la materia de cálculo diferencial– se ha diseñado un objeto de aprendizaje para abordar el tema interpretación física de la derivada de modo autónomo. A partir de una situación problema que recupera el abordaje clásico, –La derivada como una velocidad instantánea–. Se diseñó una historieta con dibujos animados, en la cual se trata la velocidad instantánea a partir del experimento de Galileo, se contextualiza como una lucha entre personajes del folclore nacional.

El bachillerato tecnológico en México, tiene deficiencias sistemáticas y estructurales. La enseñanza de la ciencia y la tecnología se realiza sin contextualizarlas con su proceso histórico de evolución y transformaciones, con lo cual se les desposee de una dimensión formativa fundamental. SEP, SEIT (1996).

Doce años después del diagnóstico académico del bachillerato tecnológico, se cristaliza la Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS, 2010), en ella se observa que una de las bases para llevarla a cabo es la necesidad de promover el desarrollo de competencias, así el enfoque bajo el cual se presenta el objeto de aprendizaje que se propone en este trabajo, está orientado hacia el desarrollo de competencias y una estrategia pertinente en este marco es la resolución de problemas.

En el año 2009 se aplicó aleatoriamente un cuestionario a 30 alumnos de 5° semestre del bachillerato tecnológico –en los programas educativos de técnico en electrónica y técnico en mantenimiento automotriz–, del turno matutino en el centro de bachillerato tecnológico industrial y de servicios 226 (CBTIS 226), para verificar el estado del conocimiento respecto al significado físico de la derivada de una función, el 95% de los alumnos que respondieron el cuestionario desconocían el significado físico de la derivada de una función. Cabe decir que los alumnos de bachillerato abordan el estudio del cálculo diferencial en un curso semestral de 80 horas durante el cuarto semestre. Esta situación de desconocimiento de la interpretación física de la derivada de una función, permea hasta el nivel superior y muchas veces durante toda la vida, dado que, por principio de cuentas gran parte de los egresados de bachillerato no continúan estudios de ingeniería, sino de áreas de las ciencias sociales, biológicas, económico-administrativas u otras, en las cuales ya no se aborda el estudio del cálculo, además, en el caso de aquellos que si acceden a programas educativos de ingeniería, muchas veces los profesores de este nivel dan por hecho que tal contenido –interpretación física de la derivada– se ha tratado ya en el nivel bachillerato.

Cabe decir también, que los tiempos para cubrir los contenidos de los programas son reducidos y además, como señala Ávila (1998), "afirmar que la enseñanza del cálculo es problemática no provoca polémica, –pues prácticamente todo profesor de matemáticas ha vivido la experiencia del fracaso en la enseñanza del mismo–". Bajo tales condiciones se ha ideado la forma de abordar este contenido a partir de una situación problema que recupere el abordaje clásico, –La derivada en su interpretación física como una velocidad instantánea–, a partir de recrear el famoso experimento de Galileo –velocidad de un objeto en caída libre– es decir, bajo una contextualización histórica, de igual modo, es de suma importancia que tal situación sea útil, significativa y divertida para el alumnado en general.

Marco teórico

Mucho se ha dicho respecto al abordaje de los contenidos de aprendizaje a partir de situaciones lúdicas, baste mencionar que se observa el juego en los diversos mamíferos (en particular en los seres humanos) como una actividad de aprendizaje en si misma, es un ejercicio inherente a su desarrollo tanto en lo cognitivo, como en lo físico, los seres humanos necesitan el juego, el esparcimiento, y tienden a desarrollarlo, también porque ayuda a lograr la dosis de diversión y de disfrute que cualquier ser humano requiere para lograr una estadía placentera en este mundo. Robert Fagan, –citado por Hirsh-pasek K. y Golinkoff R. (2011)–, ha llegado a especular que el juego debe tener algún valor adaptativo dado el riesgo y el costo energético para los individuos en desarrollo, en este sentido vale la pena destacar que Piaget considera al conocimiento como el fruto de un esfuerzo por adaptarnos al medio, "las estructuras conceptuales que consideramos como conocimiento, son el producto de conocedores activos que moldean sus pensamientos para encajar las cosas forzadas en su experiencia" citado por Von Glasersfeld (1997), y ya se sabe, la adaptación, como Piaget dijo explícitamente, es equivalente a la habilidad para sobrevivir (Piaget, 1976).

Investigaciones recientes confirman lo que Piaget señala respecto a las actividades lúdicas en la vida de los niños, estas tienen un papel esencial si se considera que el menor esta obligado a adaptarse incesantemente a un mundo social de mayores, cuyos intereses y reglas siguen siéndole exteriores y a un mundo físico que todavía comprende mal, resulta por tanto indispensable a su equilibrio afectivo e intelectual que pueda disponer de un sector de actividad cuya motivación no sea la adaptación, o lo real sino por el contrario, la asimilación de lo real al yo, sin coacciones ni sanciones: tal es el juego, que transforma lo real por asimilación mas o menos pura, a las necesidades del yo (Piaget e Inhelder, 1981).

Tanto el juego libre como el juego guiado son esenciales para el desarrollo de habilidades académicas. La palabra *juego* evoca varias definiciones. Generalmente los investigadores hablan de cuatro tipos de juego, aunque en la práctica éstos a menudo se mezclan: (a) *Juego con objetos*, formas en las que los niños exploran diferentes objetos, aprenden sobre sus propiedades y los transforman para que tengan nuevas funciones; (b) *Juego imaginativo* (sólo o con otros), también conocido como juego de hacer-creer, de fantasía, juego simbólico, juego sociodramático o juego dramático, en el cual los niños experimentan con diferentes roles sociales; (c) *Juego físico brusco*, que incluye todo desde un juego de "escondidas" de un niño de 6 meses hasta el juego libre durante un descanso; y (d) *Juego dirigido,* donde los niños participan en actividades agradables y aparentemente espontáneas bajo la dirección sutil de los adultos (Hirsh-Pasek y Golinkoff, 2011).

Académicamente el juego está relacionado a la lectura y a las matemáticas, así como a importantes procesos de aprendizaje que alimentan estas competencias. Más específicamente, hay estudios que conectan directamente el juego a la lectoescritura y el lenguaje, y a las matemáticas. En el caso del presente trabajo se trata de jugar con la imaginación en una situación divertida en la que se recupera de la memoria del folclor nacional mexicano, personajes míticos –luchadores– que trabajan por la justicia.

Barnett y Storm citados por Hirsh-Pasek y Golinkoff (2011) también encuentran que el juego sirve como un medio para hacer frente al estrés. De hecho, Haight, Black, Jacobsen y Sheridan (2006) demostraron que los niños que han tenido algún trauma pueden usar el juego imaginativo con sus madres para trabajar sus problemas. En conjunto, las competencias sociales tales como la amistad y la capacidad para afrontar problemas, son las bases para el aprestamiento escolar y el aprendizaje académico. Raver (2002) concluyó que "de las dos últimas décadas de investigación es inequívocamente claro que el ajuste comportamental y emocional de los niños es importante para sus posibilidades de éxito escolar temprano." Es a través del juego que los niños aprenden a subordinar sus deseos a las reglas sociales, cooperar con otros deliberadamente, y participar en comportamientos socialmente apropiados, comportamientos vitales para ajustarse bien a las exigencias escolares.

Respecto a los elementos del conocimiento científico que los humanos procuran preservar –en particular en la matemática– son de lo más rígidos –solemnes–, sin embargo, es muy probable que muchas de las profundas cavilaciones de los hombres de ciencia, hayan tenido lugar jugando con configuraciones diferentes que formaban con objetos del entorno –piedras o ramas–, o que observaban en la naturaleza.

Respecto al juego y algunas de sus aportaciones en matemática, De Guzmán (2008), elabora una recopilación –de la cual se recuperan aquí una pocas líneas– referente a algunos de los más brillantes matemáticos que realizaron aportes a esta ciencia a partir de actividades lúdicas, por ejemplo, menciona que Leibniz fue un gran promotor de la actividad lúdica intelectual: "Nunca son los hombres más ingeniosos que en la invención de los juegos... Sería deseable que se hiciese un curso entero de juegos, tratados matemáticamente", de modo similar señala que Euler (1707-1783), oyó hablar del problema de los siete puentes de Königsberg, –sobre la posibilidad de organizar un paseo que cruzase todos y cada uno de los puentes una sola vez (camino euleriano)–. Su solución constituyó el vigoroso comienzo de una nueva rama de la matemática, la teoría de grafos y con ella de la topología general.

Señala De Guzmán, que el mismo espíritu matemático de la época de Euler también participaba fuertemente del ánimo competitivo en la época de Cardano. *Johann Bernoulli* (1667-

1748) lanza el problema de la braquistócrona como un reto a los mejores matemáticos de su tiempo. En este duelo participaron con ardor nada menos que Bernoulli –creador, (precisamente con su solución al problema), del cálculo de variaciones– Leibniz, Newton y Huygens. Los biógrafos de *Gauss* (1777-1855) cuentan de Él, que era un gran aficionado a jugar a las cartas y que cada día anotaba cuidadosamente las manos que recibía para analizarlas después estadísticamente.

Hilbert (1862-1943) uno de los grandes matemáticos de nuestro tiempo es responsable de un teorema que tiene que ver con los juegos de disección: dos polígonos de la misma área admiten disecciones en el mismo número de triángulos iguales. *John von Neumann* (1903-1957), otro de los matemáticos más importantes de nuestro siglo, escribió con Oskar Morgenstern en 1944 un libro titulado *Teoría de Juegos y Conducta Económica*. En él analizan los juegos de estrategia donde aparece en particular el teorema de *minimax*, pieza fundamental para los desarrollos matemáticos sobre el comportamiento económico.

Desarrollo

Es claro que, particularmente en la tarea de iniciar a los jóvenes en la labor matemática, el sabor a juego puede impregnar de tal forma el trabajo, que lo haga mucho más motivante, estimulante, agradable y, para algunos, incluso apasionante. Cabe aquí señalar, que el presente trabajo muestra una introducción al cálculo de manera lúdica, considerando que las situaciones didácticas pueden presentarse con algunos elementos de pasatiempo y diversión que esencialmente tiene el juego.

Como se señaló al inicio del presente, explícitamente la RIEMS menciona que la orientación de toda la Matemática debe ser hacia el manejo de los conceptos y las herramientas indispensables para comprender la disciplina, se puede decir de igual modo que la educación media no consiste en saturar la mente de los jóvenes con un amasijo de información, sino que el objetivo fundamental consiste en ayudarles a desarrollar su mente y sus potencialidades intelectuales, sensitivas, afectivas, físicas, de modo armonioso, colocándoles en situaciones que fomenten el ejercicio de aquellas actividades que mejor pueden conducir a la adquisición de las competencias disciplinares y genéricas básicas, más características que se pretende transmitir con el estudio de cada materia.

Respecto a la utilidad del contenido aquí tratado (la derivada de una función), es importante señalar que vivimos en un mundo caracterizado por cambios continuos. Es importante desarrollar métodos matemáticos para cuantificar, describir y pronosticar estos cambios.

Justamente esto el propósito del cálculo diferencial, que es la matemática de los cambios. Determinar razones de cambio de procesos continuos es muchas veces más importante que estudiar estos procesos. Siempre que dos magnitudes –variables– están conectadas mediante una relación funcional –función–, se puede estudiar el cambio relativo de una de las magnitudes con respecto a la otra.

Son tan amplios los ejemplos de aplicación de la derivada en la vida cotidiana, –no sólo en ciertas situaciones técnicas de ingeniería– que éste debería ser un concepto de conocimiento general para comprender ciertos aspectos básicos del mundo que nos rodea y en el cual necesitamos movernos, prácticamente se aplica en todos los campos de las ciencias en donde interesa el cambio relativo de una magnitud con respecto a otra. Esto puede ser importante para determinar los resultados de un proceso o ayudarnos para pronosticar el futuro del mismo.

El conocer las "razones de cambio" también puede ser útil para buscar factores que controlen los procesos y sus cambios. Una de las tendencias generales más difundidas hoy, consiste en el hincapié en la transmisión de los procesos de pensamiento propios de la matemática más bien que en la mera transferencia de contenidos. La matemática es, sobre todo, saber hacer, es una ciencia en la que el método claramente predomina sobre el contenido. Por ello se concede una gran importancia a la manipulación en términos abstractos de cantidades físicas, con el objetivo de resolver o solucionar una situación problema.

Se reconoce también que la enseñanza es un proceso mediante el cual es posible desplegar en los educandos la curiosidad, la imaginación, la fantasía y la capacidad de interrogarse e interrogar a la realidad. Dado lo señalado anteriormente, se propone preparar materiales que permitan operar los métodos de enseñanza y aprendizaje más eficaces para el logro de los resultados del aprendizaje y de las competencias identificadas –genéricas, disciplinares y profesionales–.

Por la flexibilidad y la posibilidad de reutilizarse en diversos momentos, en diversos cursos y en diferentes espacios físicos o escenarios, se decidió trabajar en la construcción de objetos para aprendizaje, "cualquier entidad digital o no digital que puede ser usada, re-usada o referenciada para el aprendizaje soportado en tecnología". IEEE, (Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc.) citado por Galeana (2004).

¿Qué puede ser un objeto de aprendizaje? Cualquier cosa puede ser..., siempre y cuando el profesor le dé el sentido o el objetivo de aprendizaje. Una fotografía, un documento digital, una ilustración. Y lo que formalmente se llama objeto de aprendizaje es un objeto de información al que se le da un objetivo de aprendizaje; si se tienen varios objetos de aprendizaje se pueden juntar y formar alguna unidad del programa y con las unidades construir el curso.

Respecto a la interpretación física de la derivada, se desarrolló un objeto de aprendizaje, el cual consiste en una historieta con dibujos animados, en la que se aborda a la velocidad instantánea a partir del experimento de Galileo, se toma este tema como pretexto para el abordaje, y se contextualiza como una lucha entre personajes del folclore nacional Mexicano, en particular el famoso luchador “El Santo, enmascarado de plata” quien ayudado por “La Derivada” libran una batalla contra las momias de Guanajuato.

Resultados y conclusiones

En un primer momento, al presentar la caricatura a los alumnos, se ha observado muy buena aceptación, (se escuchan comentarios referentes a que les parece divertida y emocionante), aun no se realizan pruebas formales acerca del nivel de comprensión y aprehensión de este contenido al utilizar estos materiales, sin embargo, se sigue enriqueciendo el material ampliando el alcance del mismo, incluyendo el desarrollo de la situación que da lugar al modelo que describe la relación distancia-tiempo, posteriormente se podrán incluir algunas aplicaciones clásicas abordadas bajo el mismo concepto.

Es importante decir que además de cuidar que el abordaje se presente a partir de un experimento histórico (según los estudiosos de la historia), también se ha cuidado la parte del tratamiento matemático, teniendo mucho cuidado con el rigor correspondiente, aunque se trate de presentar del modo más accesible la información.

Finalmente, se sabe que el conocimiento es una negociación intersubjetiva de significados y cabe decir que, al igual que en las fronteras del conocimiento, también en áreas básicas, –como en el caso presente–, se avanza lentamente y muchas veces a contracorriente, sin embargo, continua el trabajo en la construcción de alternativas para que los alumnos comprendan y se apropien del significado de la derivada de una función y lo empleen para la solución de problemas de su interés personal y profesional.

Referencias bibliográficas

Ávila, R. (1998). *La enseñanza del cálculo*, Tesis de Doctoral no publicada, Universidad de Sonora, México.

De Guzmán, M. (2008). Juegos matemáticos en la enseñanza. Recuperado el 16 de septiembre de http://utenti.quipo.it/base5/introduz/guzmanjuegos.htm

Galeana, L. (2004). *Objetos de Aprendizaje.* Recuperado el día 20 de noviembre del 2009 de http://www.cudi.edu.mx/primavera_2004/presentaciones/Lourdes_Galeana.pdf

Haight, W., Black, J., Jacobsen, T. y Sheridan, K. (2006). Pretend play and emotion learning in traumatized mothers and children. En: Singer, DG., Golinkoff, RM., and Hirsh-Pasek, K. eds. *Play = Learning: How Play Motivates and Enhances Children's Cognitive and Social-Emotional Growth.* New York, NY: Oxford University Press; Chap. 11.

Hirsh-Pasek, K. y Golinkoff, R. (2011). *Enciclopedia sobre el Desarrollo de la Primera Infancia.* Disponible en: http://www.enciclopedia-infantes.com/Pages/PDF/ Hirsh-Pasek-GolinkoffESPxp1.pdf

Piaget, J. (1976). *Le comportement, moteur de l'évolution.* Paris: Gallimard.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1981). *La Psicología del niño*. Madrid: Ediciones Morata.

Raver, C. (2002). Emotions matter: Making the case for the role of young children's emotional development for early school readiness. *Social Policy Report, 16*(3), 3-19.

RIEMS. (2010). *Reforma curricular del bachillerato tecnológico*. Recuperado el 03 de abril, de: http://www.cosdac.sems.gob.mx/programas.php

SEP-SEIT. (1996). Propuestas para la reforma académica del bachillerato tecnológico. Diagnóstico académico del bachillerato tecnológico. pp 21-25, México D. F.

Von Glasersfeld, E. (1997). *Homage to Jean Piaget (1896-1980). Home: Ecology of mind.* En línea: http://www.psico.unlp.edu.ar/externas/genetica/vonglaserfeld.htm última consulta 24 de septiembre de 2011.

COLONIA DE HORMIGAS APLICADA A LA TEORÍA DE GRAFOS

Roberto Millet Luaces, Mirna Indiana Beyris Bringuez, Maikelis Ananka Rosales Almaguer
Universidad de las Ciencias Informáticas Cuba
milletp@uci.cu, mibeyris@uci.cu, maikelis@graduados.uci.cu

Resumen. La teoría de grafos desempeña un papel importante en la fundamentación matemática de las Ciencias de la Computación. Los grafos constituyen una herramienta básica para modelar fenómenos discretos, son fundamentales para la comprensión de las estructuras de datos y el análisis de algoritmos. En el trabajo se hace referencia al algoritmo basado en el comportamiento de las hormigas, para optimizar el costo de un proyecto en la UCI utilizando el algoritmo de Optimización con Colonia de Hormigas. El trabajo muestra un método de análisis inductivo tomando un caso de estudio determinado que es posible generalizar en otro tipo de trabajo.

Palabras clave: toma de decisiones, algoritmo colonia de hormigas

Abstract. Graph theory plays an important role in the mathematical foundations of computer science. The graphs are a basic tool for modeling discrete phenomena, they are fundamental to the understanding the data structures and algorithms analysis.

The paper refers at algorithm based on ant behavior to optimize the cost of a project in the ICU using the algorithm of Ant Colony Optimization. The work shows an inductive analysis method taking a case study determined that it is possible to generalize to other work.

Key words: decision making, ant colony algorithm

Introducción

Los grafos constituyen una herramienta básica para modelar fenómenos discretos, y son fundamentales para la comprensión de las estructuras de datos y el análisis de algoritmos. Un grafo en matemáticas e informática es una generalización del concepto simple de un conjunto de puntos, llamados vértices.

Con el desarrollo de las ciencias de la computación, han avanzado considerablemente los campos de investigación relacionados con la misma, como es el caso de la Inteligencia Artificial. Una de las técnicas que esta estudia son los algoritmos basados en el comportamiento de las hormigas, que son métodos empleados en la solución de problemas complejos de búsqueda y optimización. Para estas soluciones se tiene en cuenta elementos de la teoría de grafos, fundamentalmente los grafos ponderados vinculados a la toma de decisiones.

> Tomar decisiones es la actividad que en el ser humano manifiesta la capacidad de elegir diferentes opciones y llevar a cabo una acción como resultado del conocimiento que posee y de un proceso intelectual que involucra la reflexión y la proyección en el futuro de las consecuencias de la opción elegida. (Ramírez y Zacarías, 2007, p. 36)

Este trabajo está sustentado en una investigación realizada en la Universidad de las Ciencias Informáticas (La Habana, Cuba) con el propósito de encontrar nuevas vías que optimicen el costo de producción necesario de un proyecto en esa Alta Casa de Estudios.

El objetivo del trabajo es mostrar la vinculación del algoritmo optimización con colonia de hormigas aplicando la teoría de grafos.

Desarrollo

Conceptos básicos de la teoría de grafos

La teoría de grafos es una teoría perteneciente al álgebra moderna según la cual se estudian conjuntos de segmentos de línea y de puntos de un plano.

Su diferencia con la geometría euclidiana radica en que la teoría de grafos carece de métrica, pues la conceptualización de "distancia" se obvia para hacer generalizaciones sobre las figuras o grafos. Es así como para la teoría de grafos la línea recta y la curva son equivalentes, una figura compuesta por segmentos rectilíneos es equivalente a la misma figura compuesta por segmentos de arco, todos los triángulos son equivalentes ya que la teoría de grafos, sólo se ocupa de una propiedad común de los mismos: la triangularidad.

La teoría de gratos considera que las figuras se han dibujado en un plano "elástico", es decir supone que las figuras geométricas están representadas en una hoja delgada, altamente flexible y elástica, de modo tal que puede ser sometida a distorsión (estiramiento, retorcimiento) interesándose solamente por las propiedades que mantienen las figuras después de las deformaciones a que han sido sometidas. Obviamente la distancia entre los puntos y las formas de los segmentos han cambiado, pero el número de puntos y sus relaciones no.

La teoría de grafos se aplica en diversos campos, dentro de estos está el análisis de la contabilidad.

Se ha demostrado que la teoría de grafos es una herramienta básica en muchos campos de la ciencia y la tecnología; sus teoremas y métodos han sido aplicados con éxito en temas tan diversos como teoría de la información, planificación de la producción, transportes, programación lineal, redes de conexión, mecánica estadística, genética y química, encontrándosele ahora un nuevo campo de aplicación: la Contabilidad.

> La aplicación de la teoría de grafos a la contabilidad nos conduce a la contabilidad matricial, donde el viejo concepto de partida doble desaparece, sin derrumbar las estructuras de la contabilidad al cual nos habíamos acostumbrado y que han permanecido durante siglos. (Cuellar, 2011)

Optimización con Colonia de Hormigas

La hormigas poseen una característica muy peculiar que las diferencian de otros animales, son capaces de encontrar la vía más corta desde el hormiguero a una fuente de comida y viceversa, sin usar pistas visuales, también pueden adaptase a cambios en el ambiente. Esto es posible por el rastreo de la feromona, sustancia que ellas depositan mientras caminan. (Cobo y Serrano, 2010).

Los algoritmos de OCH utilizan agentes computacionales simples, en este caso hormigas artificiales, que trabajan de manera cooperativa y tienen comunicación mediante rastros de feromona artificial, simulando el comportamiento de una colonia de hormigas naturales.

En este algoritmo se utiliza como ya se mencionaba anteriormente comunicación indirecta a través de la feromona, donde los caminos más cortos tienen una razón más elevada de crecimiento del valor de la feromona y las hormigas disponen de una preferencia probabilística por las rutas con valores altos de feromona (Bello, 2008).

También se deben de tener en cuenta otras características que hacen que las hormigas artificiales posen capacidades que no tienen las reales, pero que contribuyen a la resolución del problema, por ejemplo; cada hormiga es capaz de determinar qué tan lejos está de un estado, poseen información acerca de su ambiente y la utilizan al tomar decisiones y tienen memoria, la cual es necesaria para asegurar que se generen sólo soluciones factibles (Mendoza, 2001).

Aplicación del algoritmo

Para aplicar el algoritmo OCH es necesario establecer una secuencia de pasos, los cuales se indican a continuación.

a. Representar el problema mediante nodos.

b. Definir el significado de los rastros de feromona de una manera adecuada.

c. Poner pesos a la información heurística en cada nodo o arco.

d. Desarrollar algoritmos que permitan realizar optimizaciones locales.

e. Escoger un algoritmo OCH específico.

f. Refinar los parámetros del algoritmo de OCH.

Análisis de costo de un proyecto

El costo es el esfuerzo, o sacrificio económico que se debe realizar para lograr un objetivo, el cual influye directamente en el resultado de la empresa, mientras que el costo de producción es el valor del conjunto de bienes y esfuerzos que se han utilizado o se van a utilizar para obtener un producto terminado, en condiciones de ser entregado al sector comercial.

La gestión de proyectos abarca varias áreas de conocimiento, dentro de las que se encuentra la Gestión de Costo, que es la que se encarga de que el proyecto pueda desarrollarse dentro del presupuesto aprobado.

En esta investigación se relaciona la teoría de grafos con aspectos teóricos del algoritmo OCH utilizando como objeto de estudio el costo de un proyecto productivo. Para la aplicación del algoritmo se confeccionó un grafo donde los nodos fueron tomados como cada una de las tareas a realizar en el proyecto y las aristas como la sumatoria de los costos de estas tareas.

Descripción de los pasos que realiza el algoritmo para optimizar

Las precondiciones para que se ejecute el algoritmo son la entrada de los datos de las tareas, asumiendo que las tareas entradas por el usuario sean: Tarea1 con un costo de $ 10.00, Tarea2 con un costo de $ 75.00, Tarea3 con un costo de $ 68.00, Tarea4 con un costo de $ 15.00, el costo inicial del proyecto será de $ 168.00, esto es un ejemplo hipotético para explicar cómo se realiza la optimización que puede ser ajustable a la realidad de un problema.

En la Figura 1 se hace referencia a los datos de la problemática planteada.

Entregable	Valor
Tarea 1 = T1	10
Tarea 2 = T2	75
Tarea 3 = T3	68
Tarea 4 = T4	15

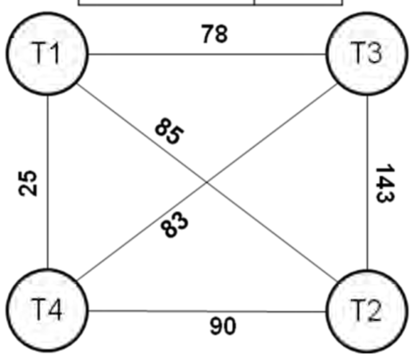


Figura 1: Grafo inicial de la problemática

Dadas las tareas el algoritmo procede de la siguiente manera:

- ❖ Se buscan las tareas a optimizar. Se asume que la tarea seleccionada es Tarea4 del ejemplo anterior.

- ❖ Se crean los subescenarios correspondientes. En cada uno de ellos se disminuye recursos, tiempo o ambos aspectos, estos representan nuevas tareas por los cuales las hormigas artificiales deben decidirse.

- ❖ Se buscan las tareas que le dieron origen a cada uno de los subescenarios creados. Luego de que se encuentren, estas tareas se eliminan de la lista de vértices del grafo correspondiente al nivel de optimización seleccionado.

- ❖ Se adicionan los nuevos subescenarios y se actualiza la matriz de costos. Como estos no se derivan de la misma tarea no van a estar conectados, en el momento de actualizar la matriz de costo debe tenerse en cuenta esta característica. A continuación se muestra un ejemplo visual de cómo quedaría el grafo para la ejecución del algoritmo (**Figura 2)**

Entregable	Valor
Tarea 1	10
Tarea 2	75
Tarea 3	68
Tarea 4	15
Tarea 4a	11
Tarea 4b	7
Tarea 4c	13

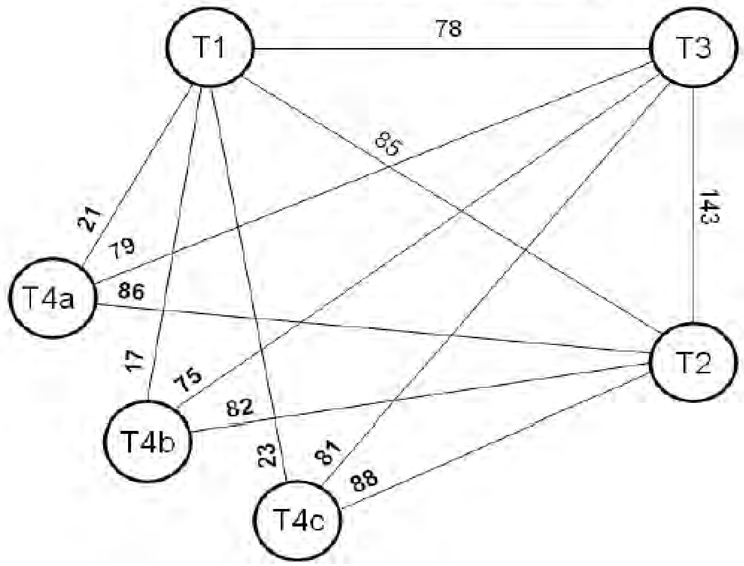


Figura 2: Grafo resultante de adicionar subescenarios

- ❖ Se crean las hormigas artificiales. La cantidad de hormigas va a ser igual a la cantidad de tareas que se tengan para la ejecución. Cuando se crean se le pone como identificador el nombre de la tarea desde la que comienzan su recorrido, por lo que en su lista de tareas visitadas esa tarea va a ser la primera.

- Creadas las hormigas y ubicadas en las tareas correspondientes, en cada paso de un ciclo, una vez que las hormigas estén en un estado, deciden cual es el siguiente estado a visitar (un ciclo se repetirá hasta que todas las tareas hayan sido visitadas por todas las hormigas exactamente una vez). Esta decisión es tomada a partir de una fórmula probabilística que determinará la probabilidad de que la tarea j sea visitada luego de la tarea i.

$$Pij = \begin{Bmatrix} \dfrac{[\mathrm{T}ij]^{\alpha}\,[\eta ij]^{\beta}}{\sum h \in \Omega [\mathrm{T}ih]^{\alpha}\,[\eta ih]^{\beta}} & si\ \ j \in \Omega \\ 0 & en\ \ otro\ \ caso \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Siendo:

$$\eta ij = 1/dij \qquad (2)$$

Donde:

$\mathrm{T}ij$ **:** Cantidad de feromona entre las tareas *i* y *j*.

α **:** Parámetro para regular la influencia de ***T****ij*.

Tendrá valor 2.

ηij : Visibilidad de la tarea *j* a la tarea *i*.

β **:** Parámetro para regular la influencia de *ηij*.

Tendrá valor 1.

Ω **:** Conjunto de tareas que aún no han sido visitadas.

dij : Suma de los costos de las tareas i y j (distancia).

- Como la idea principal es que cada hormiga visite solo uno de los subescenarios derivados de cada tarea, al adicionar una tarea a la lista de visitadas de una hormiga, se pregunta si es un subescenario, si lo es, entonces se buscan en la lista de no visitados de esa hormiga, los subescenarios que tengan como identificador de la madre el mismo que la última tarea que visitó la hormiga son eliminados.
- Cuando las listas de no visitadas de todas las hormigas están vacías, se determina el mejor camino de todos que en este caso es el de menor costo.
- Luego se procede a actualizar las cantidades de feromona, se elimina la feromona en todos los arcos en 0.5, este valor representa la taza de evaporación, y luego se procede a

premiar el mejor recorrido con una cantidad de feromona de 0.2. Los números indicados constituyen valores probabilísticos.

- Con las feromonas actualizadas termina un ciclo del algoritmo, un ciclo termina cuando todas las hormigas han visitado al menos una vez cada tarea.
- Se cuenta cuántas hormigas se decidieron por el mismo camino.
- A cada hormiga se le llena la lista de no visitados con los vértices pertenecientes al grafo del nivel, y se le elimina las tareas de la lista de visitados excepto la primera posición porque es donde comienza su recorrido.
- Se repiten los pasos desde que la hormiga decide qué tarea visitar, hasta que la mitad de hormigas más uno coincidan en el mismo recorrido, esa es la condición de parada.
- Al cumplirse la condición de parada se devuelve el costo optimizado y además una lista con las tareas y subtareas utilizadas en la ejecución del algoritmo, con cada una de sus características, para que el usuario conozca las tareas que se optimizaron así como la subtarea elegida. Aplicando esto al ejemplo propuesto anteriormente el costo sería $160.00, y las tareas utilizadas: Tarea1 con un costo de $ 10.00, Tarea2 con un costo de $ 75.00, Tarea3 con un costo de $ 68.00 y Subtarea4b con un costo de $ 7.00.

Es válido destacar que debido al valor de las tareas ficticias utilizadas en el ejemplo no es mucha la diferencia entre el costo inicial y costo optimizado, pero se evidencia una disminución (Rosales y Beyris, 2010).

Conclusiones

La teoría de grafos constituye una herramienta fundamental en la modelación de problemas en las clases de matemática, particularmente en el álgebra lineal, se hace necesario presentar problemas que modelen situaciones reales, es un espacio donde el profesor puede hacer referencia a grafos reales, es decir a grafos ponderados donde se le dan valores o pesos a los vértices y las aristas para resolver determinados problemas.

En esta investigación se mostró la vinculación entre el Algoritmo Optimización con Colonia de Hormigas y la teoría de grafos, ejemplificando mediante un caso hipotético el funcionamiento de dicho algoritmo que a su vez constituye una novedad teórica, ya que este análisis inductivo es posible aplicarlo en problemas donde intervenga un mayor número de elementos. Este trabajo sirve como antesala a investigaciones de otro carácter científico relacionado con la Inteligencia Artificial, fundamentalmente donde esté presente la toma de decisiones.

Referencias bibliográficas

Bello Pérez, R. (2 de julio de 2008). *Teoría de conjuntos aproximados y colonia de hormigas en el contexto de la inteligencia artificial.* (R. Millet Luaces, Entrevistador).

Cobo, A. y Serrano, A. M. (2010). *Un algoritmo híbrido basado en colonia de hormigas para la resolución de problemas de distribución en planta orientados a procesos*. Recuperado el 23 de enero de 2010, de http://www.uv.es/asepuma/XIII/comunica/ comunica_04.pdf

Cuellar, G. (2011). *Ciencias Contables Económicas y Administrativas*. Recuperado el 2011 de septiembre de 29, de http://artemisa.unicauca.edu.co/~gcuellar/teorgraf.htm

Mendoza, B. (2001). *Uso del Sistema de la Colonia de Hormigas para Optimizar Circuitos Lógicos Combinatorios*. Recuperado el 25 de enero de 2010, de http://www.uv.mx./dgbuv/bd/tesis_posgrado/_mia/2001/mendoza_garcia.pdf

Ramírez, J. A., Zacarías, H. (2007). *Gestión del conocimiento* e *Innovación en la toma de decisiones en el abastecimiento de librerías*. Tesis de Doctorado no publicada. Centro de Estudios Avanzados del IPN.México.

Rosales, M. A. y Beyris, M. I. (2010). *Costo de producción del proyecto SCADA mediante la aplicación del Algoritmo basado en Colonia de Hormigas*. Tesis de Licenciatura no publicada, Universidad de las Ciencias Informáticas, Ciudad de La Habana, Cuba.

PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA PROFESIONALIZACIÓN DEL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA EN LA FORMACIÓN DEL INGENIERO AGRÓNOMO

Iván León Giniebra, Georgina Díaz Fernández, Vicente Eugenio León Hernández, Javier Barrera Ángeles
Universidad "Hermanos Saiz Montes de Oca" Cuba
Instituto Superior Pedagógico "Enrique J. Varona"
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo México
ileong@mat.upr.edu.cu,georginadf@ispejv.rimed.cu,vleon@vrect.upr.edu.cu, jbarrera12@hotmail.com

Resumen. Los cambios de programa han posibilitado una superior formación del Ingeniero Agrónomo, pero aún se manifiesta en los estudiantes falta de interés y motivación por los cursos de Matemática. Pese a las investigaciones realizadas no se dispone de un referente teórico metodológico al alcance de los profesores para profesionalizar este proceso. El trabajo ofrece una propuesta didáctica que permite transformar el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática en la formación del Ingeniero Agrónomo por etapas para la profesionalización, se orienta en función del perfil del profesional, de conjunto con la orientación sociocultural.

Palabras clave: enseñanza, aprendizaje, profesionalización, matemática, agronomía

Abstract. The program changes have made possible the superior Agronomical Engineer formation, however the students shows a lack of interest and motivation to the mathematics subjects. Even whit the investigations achieved there are no theoretical method as a reference for the professors to professionalize this process. This work offers a didactical proposition which allows transforming the teaching learning process of the Mathematics in the Agronomical Engineers formation divided in periods to achieve the professionalization. This is directed to the professional's profile along with the socio-cultural education.

Key words: teaching, learning, professionalization, mathematics, agronomy

Introducción

La sociedad exige a las universidades la formación de profesionales que accedan sin dificultad al conocimiento científico, lo reconstruyan y queden en condiciones de transferirlo a nuevos escenarios (Mena, 2010). Ante esta situación es necesario formar un profesional de perfil amplio, con posibilidades de adaptación a nuevos contextos.

En la actualidad un Ingeniero Agrónomo debe: estar apto para asimilar los constantes cambios de las tecnologías en los procesos profesionales en que participa, movilizar sus conocimientos a nuevos contextos laborales y crear habilidades genéricas que le provean de una plataforma para aprender a aprender, a ser, a pensar y a crear, y ser el profesional más integral de los encargados de la producción agrícola, tener un perfil amplio, una sólida base científica y estar preparado para resolver los problemas agronómicos presentes en las unidades básicas de producción. (López, 2006).

Se reconoce que los problemas de enseñanza y aprendizaje de la Matemáticas son muy complejos en los ciclos básicos universitarios. Particularmente en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática en la carrera de Agronomía de la Universidad de Pinar del Río la situación no es favorable, ya que los estudiantes muestran insuficiente desarrollo en las habilidades básicas como modelar, optimizar, aproximar, graficar y la solución de problemas, lo que limita el uso de la Matemática en actividades científico estudiantiles relacionados con el objeto de la profesión.

La contradicción se manifiesta en que, a pesar de las experiencias y los aportes de las diversas investigaciones didácticas, en la práctica pedagógica de la Matemática para la carrera de Agronomía en la Universidad de Pinar del Río, no exista una propuesta didáctica para la profesionalización del proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática a este nivel, que propicie una mayor orientación profesional de esta ciencia, a tono con su actual rol en la profesión, lo que conlleva a una gestión empírica de la profesionalización en este proceso de enseñanza aprendizaje y a un considerable nivel de fracaso en esta actividad en los estudiantes que ingresan a formarse como Ingenieros Agrónomos en la Universidad de Pinar del Río.

Desarrollo

El proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática en la carrera de Agronomía debe promover en el estudiante una formación científico-técnica comprometida con las acciones tecnológicas de su entorno, que le permita la confección de modelos de la realidad agropecuaria, encaminados a relacionar armónicamente la orientación profesional y sociocultural. Dada esta realidad el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática para la formación de un Ingeniero Agrónomo debe incluir la formación profesional y la lógica de la ciencia.

La presencia de la Matemática en los planes de estudio, por sí sola, no conduce a la formación de un egresado capaz de utilizarla favorablemente en los entornos laborales, por lo que se requiere de una didáctica encaminada a transformar los modos de actuación de estudiantes y profesores, para el logro de este objetivo.

En este trabajo asumimos como base teórica el Enfoque Histórico Cultural, en cual la educación constituye uno de los fundamentos más importantes para el desarrollo integral de la personalidad, ya que mediante esta se logra dispensar vínculos entre los factores sociales, culturales e históricos (Vigotsky, 1968).

Como resultado de la profesionalización del proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática el Ingeniero Agrónomo en formación debe lograr un aprendizaje desarrollador que le permita hacer un uso eficiente de los contenidos de esta ciencia en su radio de acción.

Para lograr lo anterior el profesor puede apoyarse en estímulos e incentivos internos del contenido, dado que la motivación idónea para el aprendizaje desarrollador es la que se genera a partir del propio contenido, de su naturaleza problémica, desafiante, novedosa y relevante (Castellanos, Castellanos, Llivina y Silverio, 2001), con la cual el estudiante se identifique, le encuentre sentido, utilidad y valor.

Los autores coincidimos con V. León en la definición de al menos, tres tendencias bien marcadas en cuanto al tratamiento conceptual dado a la profesionalización, siendo interpretada como: una categoría de máxima generalidad, un proceso y un principio (León, 2007).

La profesionalización como categoría, interpreta esta como una categoría de máxima generalidad, relacionada con otras ciencias sociales, como las ciencias del trabajo, la sociología y las ciencias de la educación. En la profesionalización como principio asumen que desde esta perspectiva se imprimen ciertas exigencias a los procesos de formación y desarrollo que ocurren en los escenarios escolares. La profesionalización como proceso posibilita el diseño de procesos de formación de profesionales bajo ciertas prácticas, en contextos escolares, comunitarios y empresariales y dentro de ellos, hay quienes acentúan la relación dialéctica entre estos contextos y otros que los contraponen.

Tomando como referencia las tendencias precisamos en torno a la profesionalización que: el fin de la profesionalización es formar profesionales competentes, el proceso de enseñanza aprendizaje en si mismo es un proceso de profesionalización del individuo y la profesionalización del proceso de enseñanza aprendizaje debe ser fundamentada sobre la base de los referentes más novedosos de las ciencias pedagógicas.

El Ministerio de Educación Superior de nuestro país ha perfeccionado los planes de estudio en la carrera de Agronomía, hasta llegar a la aplicación del plan D, donde se alcanza un nivel superior en el programa de la Disciplina Matemática.

Para constatar el estado actual de la profesionalización del proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática en la Carrera de Agronomía se aplicaron diferentes instrumentos de investigación, entre ellos: entrevistas y encuestas a directivos, docentes y estudiantes; análisis documental a instrumentos normativos y planes de trabajo metodológicos; así como la observación de clases.

En cuanto al programa de la Disciplina Matemática, se destaca que se enfatiza en los aportes de la Matemática a la formación de los Ingenieros Agrónomos y se toma en consideración el papel de la instrucción como una de las condiciones básicas fundamentales de la relación del estudiante con su entorno natural y social, vinculado con aspectos educativos. Pese a estos logros en el programa de la Disciplina Matemática se enfatiza más en los contenidos que deben ser trasmitidos, que en el como deben ser integrados a la profesión.

Por otra parte las asignaturas Prácticas Agrícolas I y II, de la Disciplina Principal Integradora, no logran atraer a las matemáticas a la formación del profesional.

En cuanto a los profesores que dirigen el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática en la carrera de Agronomía se constató que: gestionan de forma empírica e insuficiente el proceso centrado en la profesionalización, al no diseñar los escenarios agronómicos suficientes para integrar los contenidos a la profesión, lo que limita la solución de problemas profesionales por parte de los estudiantes. Esto refleja una limitada concepción teórica y práctica de la profesionalización en los diferentes niveles de dirección del proceso.

Se verificó que los estudiantes de primer año de la carrera de Agronomía: no consideran la Matemática como una prioridad para su formación profesional, no poseen un accionar profesionalizado para apropiarse de los contenidos matemáticos y desconocen la aplicación futura de los contenidos de Matemática para los grados posteriores, los informes finales de las prácticas laborales y las tesis de grado.

Dado estos resultados fundamentamos una propuesta didáctica encaminada a transformar el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática centrada en la profesionalización de los contenidos, en la carrera de Agronomía de la Universidad de Pinar del Río.

Se asume la posición de la autora Y. Solís, la cual plantea "que una propuesta didáctica es un conjunto de proposiciones o ideas para lograr determinado fin dentro del proceso de enseñanza aprendizaje". (Solís, 2004, p. 80).

El protagonista principal del proceso de enseñanza aprendizaje es el estudiante, el cual construye y reconstruye los conocimientos, se impone retos y aprende del error, todo lo cual compromete su aprendizaje. Los resultados de la profesionalización del proceso deben verse en los modos de actuación del estudiante como un protagonista activo del proceso, en la necesidad de apropiación de los contenidos de la Matemática y sus aplicaciones profesionales y socioculturales.

El profesor promueve el desarrollo integral de la personalidad en los estudiantes. Debe tener la capacidad de utilizar una variedad de métodos y recursos didácticos para promover en los estudiantes la adquisición de valores, actitudes y habilidades. Para alcanzar su rol en la profesionalización el profesor debe tener competencia profesional en las dimensiones Pedagógica, Técnico-Profesional y Humanística (Añorga, 1999).

El grupo es sujeto protagónico, al igual que el estudiante, del proceso de enseñanza aprendizaje, es el espacio de intercambio y comunicación de los estudiantes. Es el ambiente donde el estudiante valora metas y objetivos comunes, lo cual favorece las condiciones idóneas para aprender a convivir y a ser.

El problema, es un elemento mediador de la relación entre los protagonistas del proceso (Castellanos et al, 2001), plantea contradicciones entre al objeto de la Matemática y de la profesión y entre sus respectivas implicaciones socioculturales y los recursos cognitivos y volitivos que posee el estudiante para buscar las vías de solución a los problemas de carácter teórico o práctico.

El problema debe expresar la posibilidad de ser resuelto dentro del proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática y tener implícito la necesidad de la Matemática para resolverlo, debe portar una contradicción (formulada correctamente y que interese a los estudiantes) entre los conocimientos del Ingeniero Agrónomo en formación y los que necesita para ser resuelto.

"El objeto es la parte de la realidad portadora del problema". (Álvarez de Zayas, 1999, p.22). Es el componente de la Matemática y sus aplicaciones al perfil del profesional en la que existe el problema que manifiesta el Ingeniero Agrónomo en formación para el uso óptimo de la Matemática en la solución de problemas socioculturales y profesionales.

La categoría objetivo**,** responde a la pregunta ¿para qué enseñar y aprender?, es la rectora del proceso de enseñanza aprendizaje. El objetivo que atiende la profesionalización del proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática debe dotar al Ingeniero Agrónomo en formación del sistema de contenidos de la ciencia Matemática en la obtención y desarrollo de una cultura científico-profesional, como parte constitutiva de una Cultura General Integral, que permita enfrentar de manera activa, consciente y con el empleo del método científico, los problemas de su área de acción profesional.

El contenido**,** responde a la pregunta ¿qué enseñar y aprender? En el proceso de enseñanza aprendizaje profesionalizado de la Matemática los contenidos tienen implicaciones socioculturales y profesionales, los estudiantes se deben apropiar de estos contenidos desde lo académico, lo laboral y lo investigativo, aportando desde sus modos de actuación una transformación al objeto de la profesión.

El método, responde a la pregunta ¿Cómo enseñar y aprender? Los métodos sugeridos en el proceso de enseñanza aprendizaje profesionalizado de la Matemática son aquellos que permiten el trabajo con situaciones problémicas tales como, los métodos productivos y la utilización de los recursos heurísticos, que promueven la motivación del estudiante, favorecen su iniciativa, independencia, creatividad, el deseo de saber, conocer e investigar y el desarrollo de capacidades que le faciliten la formación del pensamiento lógico-matemático y la construcción del carácter científico del ingeniero.

La influencia de los medios (¿con qué enseñar y aprender?) en los métodos es fuerte, la eficacia de los métodos de enseñanza puede elevarse mediante el empleo de los medios de enseñanza (Klingberg, 1978). Según Zilberstein, los medios de enseñanza y aprendizaje están constituidos por objetos naturales o sus representaciones, instrumentos o equipos que sirven de sostén material a los métodos y apoyan la actividad de docentes y alumnos en función del cumplimiento del objetivo (Zilberstein, 2002).

Las formas de organización "son las maneras en que se manifiesta externamente la relación profesor-alumno, es decir, la confrontación del alumno con la materia de enseñanza bajo la dirección del profesor" (Labarrere y Valdivia, 1988, p. 137). Las formas de organización deben tirar del desarrollo de los estudiantes y tenerlos como sujetos activos de su aprendizaje, enlazando la forma de obtener el conocimiento científico de la Matemática y el modo de aplicarlo en la resolución de problemas socioculturales y profesionales.

La evaluación "es una función del sistema de dirección del proceso enseñanza-aprendizaje mediante el cual el profesor y los alumnos concientizan el grado de desarrollo de los alumnos y qué les falta aún para la consecución de los objetivos de aprendizaje." (Pérez, 2006, p. 271). La evaluación es un puente entre lo laboral, lo académico y lo investigativo, permitiendo conocer las potencialidades de los estudiantes para resolver problemas socioculturales y profesionales, en su interacción con la realidad social y profesional.

La tarea docente es la célula del proceso de enseñanza aprendizaje, pues en ella se presentan todos los componentes y leyes del proceso. En la tarea docente está presente un objetivo, condicionado por el nivel de los estudiantes, un contenido a asimilar, una habilidad a desarrollar y un método dado por el modo que lleva a cabo el estudiante la acción para apropiarse del contenido. Por medio de la evaluación se determina si se ejecutó correctamente la tarea, pudiendo esta evaluarse o no (Álvarez de Zayas, 1999).

En nuestra propuesta las tareas deben expresar una orientación profesional y tecnológica de la Matemática, desarrollando en el estudiante habilidades profesionales orientadas a resolver problemas profesionales y socioculturales, contribuyendo a lograr una educación científico-tecnológica que tenga en cuenta las implicaciones éticas de la profesión.

Para la profesionalización del proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática en la formación del Ingeniero Agrónomo proponemos cuatro etapas: la de diagnóstico, la de planificación, la de ejecución, y la de control y evaluación integral de los resultados.

La *etapa de diagnóstico* parte de un grupo de acciones que acomete el profesor en el espacio de trabajo cooperado con otros docentes del centro. Se asume como una etapa indispensable en la puesta en práctica de la propuesta, que bajo la aplicación de instrumentos pedagógicos brinda información acerca del estado de las variables que condicionan el objeto. En esta etapa el profesor debe diagnosticar las dimensiones que a continuación se tratan:

- Exigencias del modelo del profesional: La existencia del proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática en el currículo es consecuencia del análisis del objeto de estudio de la profesión que emana de la sociedad. Debe partirse del modelo del profesional que expresa de forma condensada las exigencias formativas del plan de estudio del Ingeniero Agrónomo.
- Posibilidades formativas del proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática: El diagnóstico de esta dimensión tiene como propósito valorar la contribución de la Matemática al modelo del profesional, valoración que se realiza centrada en los contenidos del programa de la asignatura y sus incidencias en el plan de estudio de la carrera. También se hace un estudio de las posibilidades que aportan los demás componentes del proceso, objetivos, métodos, medios, formas organizativas y evaluación.
- Nivel de ingreso de los estudiantes: El diagnóstico se realiza en la esfera cognitiva y afectivo-volitiva. Lo cognitivo se diagnostica teniendo como base los contenidos del nivel preuniversitario, con el uso consecuente de la evaluación en su función diagnóstica durante la marcha del proceso. El diagnóstico de la esfera afectivo-volitiva proporciona el nivel de reconocimiento de la Matemática y la disposición que poseen los estudiantes por estudiarla.
- Nivel de necesidades institucionales y comunitarias: De esta manera, el sustento material del proceso de enseñanza aprendizaje rebasa los medios existentes en el aula de la asignatura y los medios tradicionales de enseñanza, enriqueciéndolos al incorporar elementos propios de la tecnología de los procesos productivos y de servicios, así como medios informáticos.

En la *etapa de planificación* la profesionalización se concibe partiendo de la tesis de profesionalizar el proceso de enseñanza aprendizaje de la asignatura en el marco del actual programa de estudio, esto no contradice la posibilidad que existe de emprender la profesionalización del proceso de la asignatura mediante profundas modificaciones al programa, lo cual no se contempla dentro del campo de esta investigación.

La profesionalización parte de la concreción de los objetivos, hasta el diseño y ejecución de la estrategia para evaluar. El profesor concreta el diseño de las unidades de estudio mediante un consecuente trabajo metodológico, se conforman los sistemas de clases y en cada una de las clases un sistema de tareas. Al concluir la etapa de planificación quedan precisadas, a partir de la derivación gradual, los objetivos de cada actividad, el plan calendario de los contenidos con los correspondientes sistemas de tareas, métodos, formas, medios y evaluación.

Las acciones fundamentales a realizar en esta etapa son: Derivación gradual de los objetivos, encuadre del plan calendario con el programa de estudio según posibilidades y necesidades, diseño del sistema de clases y sus respectivos sistemas de tareas (el mismo contiene la profesionalización de cada uno de los componentes del proceso) y la adecuación epistemológica de los contenidos de la Matemática al perfil del profesional.

En la *etapa de ejecución* se concretan todos los elementos pautados en la planificación. La dinámica del proceso de enseñanza aprendizaje conlleva a la realización de un sistema de tareas que conforman la estructura didáctica de la clase, donde el estudiante va transitando por diferentes contextos y eslabones.

El tránsito contextual es planificado por el profesor y ocurre como sigue: un Contexto Motivacional en el cual, a partir del propio desarrollo del programa de la asignatura y teniendo en cuenta las exigencias de los objetivos, el docente presenta uno o varios problemas profesionales, reales o simulados. Los estímulos presentados aquí (tareas de introducción-motivación) conllevan a los estudiantes a experimentar un conflicto intrapsicológico, contenido en su área de acción profesional, que por supuesto tiene repercusión social, pues el sistema de conocimientos que poseen los estudiantes no les permite la solución de esta problemática por sí solos y sin una orientación determinada.

Una vez logrado este propósito, el grupo de estudiantes bajo la dirección del profesor centran sus actividades en la búsqueda de los conocimientos necesarios que aporta la ciencia Matemática en su solución.

En este contexto se da tratamiento a los contenidos de Matemática: conceptos, modelos, procedimientos, sistema de métodos de investigación, tecnología de que dispone, modos de actuación necesarios para solucionar el problema en cuestión y sus similares, a través de sistemas de tareas de formación, sistematización-consolidación y evaluación. Se abordan las limitaciones e implicaciones impuestas a la Matemática y sus aplicaciones tecnológicas, procedimentales y axiológicas en el campo de la profesión.

Transitan los estudiantes al Contexto Operacional, se orientan a la solución de tareas, diseñadas bajo criterios pedagógicos, que pueden ser reales o simuladas y llegar incluso a ser tareas de carácter investigativo, donde se agrupen a varios estudiantes para su solución, el cual se puede subdividir en dos niveles: hipotético y el real; las tareas que aquí se realizan son de formación, sistematización-consolidación y evaluación.

La evaluación como componente del proceso se integra en el cumplimiento de sus funciones a la ejecución, de este modo permite al docente rediseñar constantemente las decisiones tomadas y conocer la magnitud del cumplimiento de los objetivos planteados. En este caso se realiza según lo dispuesto en la estrategia evaluativa concebida en la planificación del proceso.

En la *etapa de control y evaluación integral de los resultados* se reconoce al control como función de dirección que constituye una necesidad para evaluar, medir, registrar, diagnosticar, prevenir, corregir y ajustar las acciones que se han venido desarrollando en la profesionalización del proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática.

El control está presente durante todo el proceso, reforzándose aún más en los finales de sistemas de clases, unidades de estudios o programas de estudio.

El control es compartido por los gestores del proceso de enseñanza aprendizaje. Los contenidos que atiende el control son: los modos de actuación de los gestores (profesor y estudiante), así como los niveles de satisfacción de sus aspiraciones, los medios de enseñanzas, formas organizativas y contextos usados para el logro de la profesionalización. Se encarga de analizar la calidad de las acciones del trabajo metodológico para cumplimentar la gestión del proceso, hace énfasis en la superación y autosuperación y en las actividades cooperadas del trabajo del colectivo de año para el establecimiento de los nodos potenciales de articulación interdisciplinar.

Conclusiones

El diagnóstico de la situación actual de la profesionalización proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática en la formación del Ingeniero Agrónomo en la Universidad de Pinar del Río evidenció que, en los diferentes niveles de dirección del proceso hay una limitada concepción teórica y práctica de la profesionalización, lo que incide en que, los estudiantes no consideren la Matemática como una prioridad para su formación profesional.

La propuesta didáctica elaborada para la profesionalización del proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática en la formación del Ingeniero Agrónomo se fundamenta en el creciente rol de la ciencia en la época actual, en la relación ciencia profesión, en la necesidad de un proceso de enseñanza aprendizaje desarrollador, con la tarea docente como célula del proceso, y en las etapas para su gestión.

Referencias bibliográficas

Álvarez de Zayas, C. (1999). *La Escuela y la Vida*. La Habana: Pueblo y Educación.

Añorga, J. (1999). *Paradigma educativo alternativo para el mejoramiento profesional y humano de los recursos laborales y de la comunidad*. La Habana: ISPEJV.

Castellanos, D., Castellanos, B., Llivina, M. y Silverio, M. (2001). *Hacia una concepción del Aprendizaje Desarrollador*. La Habana: ISPEJV.

Klingberg, L. (1978). *Introducción a la Didáctica General*. La Habana: Pueblo y Educación.

Labarrere, G. y Valdivia, G. (1988). *Pedagogía*. La Habana: Pueblo y Educación.

León, V. E. (2007). *Una concepción didáctica para la profesionalización del proceso de enseñanza-aprendizaje de la física en la formación del bachiller técnico en agronomía*. Tesis de Doctorado no publicada, ISP. Pinar del Río, Cuba.

López, R. (2006). *Modelo Profesional y Plan de Estudio del Ingeniero Agrónomo*. La Habana: MES.

Mena, J. L. (2010). *Concepción didáctica para una enseñanza-aprendizaje de las ciencias básicas centrada en la integración de los contenidos en la carrera de Agronomía: metodología para su implementación en la Universidad de Pinar del Río*. Tesis de Doctorado no publicada, CECES. Pinar del Río, Cuba.

Pérez, O. L. (2006). ¿Cómo diseñar el sistema de evaluación del aprendizaje en la enseñanza de las matemáticas? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9 (2), 270-273.

Solís, Y. (2004). *Propuesta Didáctica para el desarrollo de estrategias de aprendizaje con el apoyo de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones*. Tesis de Doctorado no publicada, CREA. La Habana, Cuba.

Vigotsky, S. L. (1968). *Pensamiento y Lenguaje*. La Habana: Revolucionaria.

Zilberstein, J. (2002). Los medios de enseñanza y aprendizaje una importante categoría didáctica. La Habana: CREA.

EVALUACIÓN DE LA CALIDAD DEL APRENDIZAJE DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN

Ana Mabel Juárez, Sergio Anchorena, Silvia Busab, María Angélica Pérez
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. Argentina
Facultades de Ciencias Económicas y Sociales, Universidad Nacional de Mar del Plata.
Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología y Facultad de Ciencias Económicas,
Universidad Nacional de Tucumán
mjuarez@fio.unicen.edu.ar, pollo_mdp@yahoo.com, sbusab@herrera.unt.edu.ar, mperez200@hotmail.com

Resumen. El presente trabajo forma parte de una investigación realizada con el propósito de mejorar la calidad del aprendizaje de los estudiantes de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, en la asignatura Análisis Matemático III. Para tal fin se diseñó e implementó una propuesta didáctica para la enseñanza y aprendizaje de las Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden, basada en los Enfoques Cognitivo e Histórico Cultural con los aportes de las teorías de Piaget, Ausubel y Vigotsky.

Para elaborar el instrumento que permitió medir la variable Calidad del Aprendizaje, se tuvieron en cuenta dos dimensiones de dicha variable: grado de corrección y reflexión. Los datos obtenidos fueron analizados e interpretados empleando técnicas estadísticas, y contribuyeron a corroborar la hipótesis formulada al inicio de la investigación. En este trabajo se muestran dichos resultados y el análisis de los mismos..

Palabras clave: calidad del aprendizaje, instrumento de medición

Abstract. This work is part of a research developed for the purpose of improving the student's learning quality in Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, in the course Análisis Matemático III. To achieve this goal, a didactic proposal was designed and implemented for teaching and learning First Order Differential Equations, based on Cognitive and Historical-Cultural Approaches with the contributions of the theories of Piaget, Ausubel and Vygotsky.

To elaborate the instrument possible to measure the Quality of Learning variable, took into account two dimensions of the variable: degree of correction and reflection. The data were analyzed and interpreted through the use of statistical techniques, and helped to confirm the hypothesis formulated at the beginning of the investigation. In this paper results and data analysis are shown,

Key words: earning quality, measurement instrument

Introducción

En este trabajo se presentan los resultados obtenidos al aplicar el instrumento diseñado para medir las diferencias en calidad del aprendizaje proporcionadas por una propuesta didáctica implementada en la asignatura Análisis Matemático III, de las carreras de Ingeniería de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, con el objetivo de mejorar la calidad del aprendizaje de los estudiantes. La propuesta consistió en incorporar en el material de enseñanza-aprendizaje, Guía de Trabajos Prácticos (Irassar y Juárez, 2007), del tema Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden (Zill y Cullen, 2006), actividades orientadas a desarrollar competencias de control, entendiendo por competencia de control: "la capacidad de controlar su propia tarea y supervisar el trabajo ajeno". Las actividades, elaboradas de acuerdo con principios derivados de las teorías de Piaget, Ausubel y Vigotsky, fueron llamadas Actividades de Control. La realización de las mismas, contribuyó a que el alumno reflexione sobre sus propios conocimientos, tome conciencia de lo que sabe o no sabe, desarrolle una actitud crítica respecto de su propia producción y la de otros, explique y justifique sus decisiones, ejercite el pensamiento reflexivo y el razonamiento lógico, se retroalimente a través del análisis de su propia práctica y consolide sus conocimientos.

En el trabajo de investigación, que es mucho más amplio, se planteó como hipótesis de investigación: "la incorporación de Actividades de Control en la enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden, contribuiría a mejorar la calidad del aprendizaje". Se definió la variable a medir: Calidad del Aprendizaje, considerándose dos dimensiones de la misma: grado de corrección y grado de reflexión. Para evaluar esta variable se optó por un diseño cuasiexperimental con postprueba únicamente y grupos intactos (Hernández Sampieri, Fernández Collado y Baptista Lucio, 2006). Los grupos seleccionados para comparar los resultados fueron los alumnos que cursaron la asignatura Análisis Matemático III en los años 2006 (trabajaron con una metodología tradicional) y 2007 (desarrollaron las Actividades de Control), controlándose estadísticamente la homogeneidad entre ambos grupos.

En particular se pretendía utilizar las mediciones de la calidad del aprendizaje para evaluar la efectividad de una Guía de Trabajos Prácticos (Irassar y Juárez, 2007) con las nuevas actividades (propuesta innovadora); para ello, se seleccionaron, elaboraron y aplicaron diferentes instrumentos de medición. Ellos fueron:

- Observación con el objetivo de evaluar las actividades.
- Encuesta para evaluar el grado de satisfacción o aceptación de las actividades por parte de los alumnos.
- Postprueba para describir la variable Calidad Aprendizaje de los alumnos que cursaron en el año 2007 para comparar con los resultados de los alumnos del año 2006.

En este trabajo se analizan los datos de la postprueba y se muestra la comparación de los resultados obtenidos, la cual indicó que la propuesta innovadora de incorporar Actividades de Control a la Guía de Trabajos Prácticos (Irassar y Juárez, 2007) contribuyó a mejorar la calidad del aprendizaje de los alumnos.

Marco conceptual

Para elaborar la propuesta didáctica, se analizaron la Teoría Psicogenética de Piaget, la Teoría del Aprendizaje Significativo de Ausubel y la Teoría de Vigotsky (Pozo, 2006).

Para Piaget el mecanismo básico de adquisición de conocimientos consiste en un proceso constructivo en el que las nuevas informaciones se incorporan a los esquemas o estructuras preexistentes en la mente de las personas, que se modifican y reorganizan según un mecanismo de asimilación y acomodación facilitado por la actividad del alumno.

Vigotsky considera al conocimiento como producto de la interacción social y de la cultura, donde todos los procesos psicológicos superiores (comunicación, lenguaje, razonamiento, etc.) se adquieren primero en un contexto social y luego se internalizan.

Ausubel pone el acento de su teoría, del Aprendizaje Significativo, en la organización del conocimiento en estructuras y en las reestructuraciones que se producen debido a la interacción entre esas estructuras presentes en el sujeto y la nueva información. Establece además las condiciones que deben cumplir el material y el sujeto para que se produzca Aprendizaje Significativo.

También se consideraron reflexiones acerca de la enseñanza y aprendizaje de la Matemática (Calatayud, Gil y Gimeno, 1992; Campanario y Moya, 1999), la tendencia actual de poner énfasis en la formación de procesos de pensamiento (Miguel de Guzmán, 1993; Villarini, 1988), el nuevo paradigma educativo en la formación de los ingenieros: "desarrollar en los alumnos las competencias necesarias para su profesión" (Comisión de Enseñanza del Consejo Federal de Decanos de Ingeniería de la República Argentina, 2006), la evaluación como fuente de información de las dificultades de los alumnos y como reguladora del proceso de enseñanza – aprendizaje (Jorba y Casellas, 1997), la metacognición como ayuda a la enseñanza y al desarrollo de procesos de pensamiento (Flavell, 1993; Carretero 2001), la consideración de los errores como recurso para la enseñanza y el aprendizaje (Bachelard, 1985; Rico, 1995; Astolfi, 1999).

El análisis realizado permitió definir criterios para diseñar el conjunto de actividades de aprendizaje/enseñanza orientadas a desarrollar competencias de control, atender los requerimientos de un material significativo para los alumnos y guiar en su implementación.

Medición de la calidad del aprendizaje

Para describir la calidad del aprendizaje de los alumnos, se definió la variable dependiente *Calidad del Aprendizaje,* la cual se interpretó en función de sus dimensiones que son variables más específicas y que pueden ser directamente evaluadas (Busab, 2004). Las dimensiones de la calidad del aprendizaje analizadas fueron: el "grado de corrección" y el "grado de reflexión" de las acciones que se realizan. La definición de cada una de estas dimensiones es:

Grado de corrección: grado en que las acciones ejecutadas se realizan en forma correcta.

Grado de reflexión: grado en que las fundamentaciones de las acciones se realizan en forma correcta.

Para medir el aprendizaje alcanzado por los alumnos, en cada una de estas dimensiones, se construyó una escala conceptual ordinal formada por cuatro categorías.

Grado de corrección:

- Muy Bueno (MB): el porcentaje de las acciones realizadas correctamente está comprendido entre el 80% y 100% (incluidos estos porcentajes).
- Bueno (B): el porcentaje de las acciones realizadas correctamente está comprendido entre el 60% y 79% (incluido el 60%).
- Regular (R): el porcentaje de las acciones realizadas correctamente está comprendido entre el 40% y 59% (incluido el 40%).
- Malo (M): el porcentaje de las acciones realizadas correctamente es menor del 40%.
- *Grado de reflexión:*
- Muy Bien fundamentado (MB): el porcentaje de las fundamentaciones correctas está comprendido entre el 80% y 100% (incluidos estos porcentajes).
- Bien fundamentado (B): el porcentaje de las fundamentaciones correctas está comprendido entre el 60% y 80% (incluido el 60%).
- Regular fundamentado (R): el porcentaje de las fundamentaciones correctas está comprendido entre el 40% y 60% (incluido el 40%).
- Mal fundamentado (M): el porcentaje de las fundamentaciones correctas es menor del 40%.

El instrumento de medición

El instrumento diseñado para analizar la calidad del aprendizaje de los alumnos de Análisis Matemático III, con los cuales se realizó la experiencia fue la postprueba. Su objetivo, como se señaló arriba, fue describir la variable dependiente Calidad del Aprendizaje. Se compararon los resultados obtenidos por los alumnos que trabajaron con las actividades propuestas (grupo experimental, 2007), con los de los alumnos que trabajaron en forma tradicional (grupo control, 2006).

El instrumento estuvo formado por actividades del primer examen parcial relacionadas al tema seleccionado y fue administrado al finalizar el desarrollo de todos los contenidos del programa que formarían parte del primer parcial.

Para construir este instrumento (2007), se analizaron las actividades del parcial del año 2006 con el objetivo de que las actividades propuestas y evaluadas en el año 2007 tuvieran similar grado de dificultad en las dimensiones consideradas para que las mismas permitieran realizar comparaciones entre grupos.

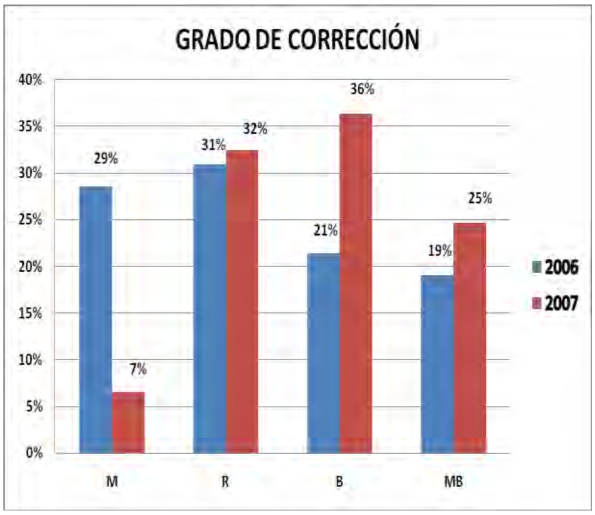
Para verificar los dos requisitos, confiabilidad y validez, que debe cumplir todo instrumento de medición (Nunnally, 1973; Camilloni, Celman, Litwin y Palou, 1998), se procedió como se detalla a continuación. Para la validez, el instrumento fue sometido a la opinión o juicio de la docente responsable de la asignatura, única experta en el tema en la Unidad Académica donde se realizó la investigación, quien opinó que a través de la postprueba, se podría emitir juicios de valor adecuados en cuanto a que la información recogida podía ser representativa de los aprendizajes alcanzados por los alumnos. Para favorecer la confiabilidad de las mediciones y facilitar la corrección del parcial, se elaboró, con anterioridad, una clave de corrección. Al calificar se optó por la evaluación referida a criterios, ya que se contrastó la prueba del alumno con una pauta establecida por el docente como objetivo a alcanzar.

Resultados. Análisis e interpretación

Para la valoración de las producciones de los alumnos se compararon las respuestas a los ejercicios seleccionados en las pruebas administradas en los años 2006 y 2007.

Los resultados obtenidos en cada una de las dimensiones de la variable Calidad de Aprendizaje: grado de corrección y grado de reflexión se describen a continuación:

Gráfico 1: Distribución de frecuencias en porcentaje de la variable Grado de corrección para las poblaciones 2006 y 2007

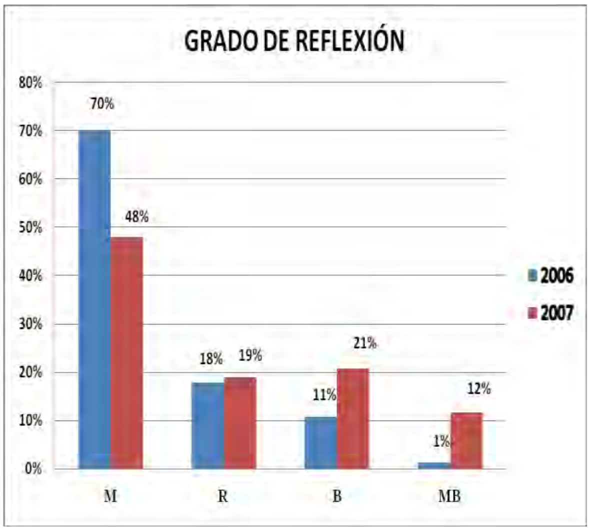


En el Gráfico 1, se observa:

Una mejora en el porcentaje de alumnos para las categorías "Bueno" y "Muy Bueno" correspondiente al año 2007 respecto del año 2006.

Una disminución considerable en el porcentaje de alumnos de la categoría "Malo" en el año 2007 respecto del año anterior.

Gráfico 2: Distribución de frecuencias en porcentaje de la variable Grado de reflexión para las poblaciones 2006 y 2007



En el Gráfico 2, se observa:

Leves diferencias en el porcentaje de alumnos en las categorías "Bien fundamentado" y "Muy bien fundamentado" a favor de los alumnos que cursaron en el año 2007.
Un decrecimiento del porcentaje de alumnos en la categoría "Mal fundamentado" en el año 2007.

Pruebas estadísticas

Se emplearon la Prueba de Homogeneidad con el estadístico chi cuadrada (χ^2) (Walpole, 1999) para poder evaluar si había diferencias entre ambos grupos con respecto a las variables "Grado de corrección" y "Grado de reflexión" y el Método Partición de los grados de libertad en tablas de rx2 (Siegel y Castellan, 1995) para saber en qué categorías de cada dimensión se encontraban las diferencias.

Grado de corrección: se aplicó la Prueba de Homogeneidad obteniendo como resultado $\chi^2_{(3)}$ =14,62 (p=0,0022), lo que indicó que las distribuciones de los puntajes alcanzados por los alumnos en las categorías de la dimensión "Grado de corrección", fueron diferentes en los años 2006 y 2007.

Habiéndose determinado que existieron diferencias en la variable Grado de corrección en los años 2006 y 2007, se quiso saber en qué categorías de cada dimensión se encontraban las diferencias. Para ello se aplicó el Método Partición de los grados de libertad en tablas de rx2. En el contexto de esta investigación se consideró adecuada la siguiente partición:

Año	Grado de Corrección		Total de alumnos por años	Test estadístico
	Malo o Regular	Bueno o Muy Bueno		
2006	50 (60%)	34 (40%)	84 (100%)	$\chi_1^2 = 6{,}416040$
2007	30 (39%)	47 (61%)	77 (100%)	
Total	80	81	161	$p = 0{,}01130$

Tabla 1: Partición de los niveles Malo o Regular y Bueno o Muy Bueno con el total de los grupos

Las categorías "Malo o Regular" y "Bueno o Muy Bueno" del Grado de corrección presentaron diferencias significativas respecto de los años 2006 (no se aplica control) y 2007 (se aplica control). En el año 2007 aumenta el número de alumnos en la categoría "Bueno o Muy Bueno" respecto del año 2006 y disminuye en la categoría "Malo o Regular" respecto al año 2006.

Grado de reflexión: **s**e aplicó la Prueba de Homogeneidad, obteniendo como resultado $\chi^2_{(2)}$=11,19 (p=0,0037) lo que indicó que existían diferencias significativas en ambos años respecto del "Grado de reflexión", en el grupo de alumnos que trabajaron con actividades orientadas a desarrollar competencias de control (2007).

Establecido que existían diferencias en ambos años respecto del "Grado de reflexión", se quiso saber en qué categorías se encontraban las diferencias. Para ello se aplicó el Método denominado Partición de los grados de libertad en tablas de rx2. En el contexto de esta investigación se consideró adecuada la siguiente partición:

Año	Grado de reflexión		Total de alumnos por años	Test estadístico
	Mal o Regular fundamentado	Bien o Muy Bien fundamentado		
2006	74 (88%)	10 (12%)	84 (100%)	$\chi_1^2 = 9{,}229048$
2007	52 (68%)	25 (32%)	77 (100%)	$p = 0{,}0023$
Total	126	35	161	

Tabla 2: Partición de los niveles Mal o Regular fundamentado y Bien o Muy Bien fundamentado con el total de los grupos

Las categorías "Mal o Regular fundamentado" y "Bien o Muy Bien fundamentado" presentaron diferencias significativas respecto de los años 2006 (no se aplica el control) y 2007 (se aplica el control). En el año 2007 aumentó el número de alumnos en la categoría "Bien o Muy Bien fundamentado" respecto del año 2006 y disminuyó en la categoría "Mal o Regular fundamentado" respecto al año 2006.

Conclusiones

El aumento del porcentaje de alumnos en la categoría "Bueno o Muy Bueno" y la disminución en la categoría "Malo o Regular" del Grado de corrección en el año 2007 respecto del año 2006, y el aumento del porcentaje de alumnos en la categoría "Bien o Muy Bien fundamentado" y la consecuente disminución en la categoría "Mal o Regular fundamentado" del Grado de reflexión el año 2007 respecto del año 2006, permitieron respaldar la hipótesis del trabajo, respecto de que la implementación de un material didáctico, específicamente la nueva Guía de Trabajos Prácticos, basado en principios que se desprenden del marco conceptual, contribuye a mejorar la calidad del aprendizaje de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden.

Referencias bibliográficas

Astolfi, J. P. (1999). *El error, un medio para enseñar* (1ª ed.). Sevilla: Díada Editora.

Bachelard, G. (1985). *La formación del espíritu científico* (13ª ed.). España: Siglo veintiuno editores.

Busab, S. (2004). *Diseño de Actividades Superadoras del Modelo de Transmisión – Recepción en la Enseñanza del Cálculo para Ingeniería.* Tesis de Maestría no publicada. Facultad de Arquitectura y Urbanismo, Universidad Nacional de Tucumán, Argentina.

Calatayud, M. L., Gil, D. y Gimeno, J. V. (1992). Cuestionando el pensamiento docente espontáneo del profesorado universitario: ¿Las deficiencias en la enseñanza como origen de las dificultades de los estudiantes? *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 14, 71-81.

Camilloni, A., Celman, S., Litwin, E. y Palou, M. (1998). *La evaluación de los aprendizajes en el debate didáctico contemporáneo.* Buenos Aires: Ed. Paidós.

Carretero, M. (2001). Metacognición: un camino para aprender a aprender [Versión electrónica], *Estudios Pedagógicos, 34* (1), 187-197. Recuperado el 20 de julio de 2008, de http://www.scielo.cl/scielo.php?pid=S0718-07052008000100011&script=sci_arttext

Campanario, J. M. y Moya, A. (1999). ¿Cómo enseñar ciencias? Principales tendencias y propuestas. *Revista Enseñanza de las Ciencias*, 17 (2), 179-192.

Consejo Federal de Decanos de Ingeniería de la República Argentina (CONFEDI) (2006). *Primer acuerdo sobre Competencias genéricas*. Villa Carlos Paz, Argentina: Comisión de Enseñanza.

De Guzmán, M. (1993). *Tendencias innovadoras en educación matemática*. Recuperado el 20 de noviembre de 2008, del sitio web de la Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura: http://www.oei.org.co/oeivirt/edumat.htm#A.

Flavell, J.H. **(**1993). *El desarrollo cognitivo.* Madrid: Visor.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, L. (2006). *Metodología de la Investigación* (4ª ed.). México: Editorial McGraw-Hill.

Irassar, L. y Juárez, A. (2007). *Guía de Trabajos Prácticos de Análisis Matemático III*. Material no publicado. Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Argentina.

Jorba, J. y Casellas, E. (1997). *Estrategias y técnicas para la gestión social en el aula. Vol. 1: La regulación y la autorregulación de los aprendizajes*. España: Síntesis.

Nunnally, J. (1973). *Introducción a la medición psicológica*. Argentina: Editorial Paidós.

Pozo, J. I. (2006). *Teorías Cognitivas del Aprendizaje* (9ª ed.). Madrid: Ediciones Morata. S.L.

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas. En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico (Eds.) *Educación Matemática*, cap. 3 (pp. 69-108). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Siegel, S. y Castellan, N. (1995). *Estadística no paramétrica aplicada a la ciencia de la conducta.* México: Trillas.

Villarini, A. (1988). Teoría y pedagogía del pensamiento crítico. *Perspectiva psicológica*, 3-4, 35-42.

Walpole, R. (1999). *Probabilidad y Estadística para ingenieros*. Prentice-Hall Hispanoamericana S.A.

Zill, D. y Cullen, M. (2006). *Ecuaciones Diferenciales con problemas en la frontera* (6ª ed.). México: Thomson.

CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO PROBABILIDAD: UNA PERSPECTIVA DESDE LA TEORÍA APOE

Claudia Vásquez Ortiz, Marcela Parraguez González
Pontificia Universidad Católica de Chile, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso Chile
cavasque@uc.cl, marcela.parraguez@ucv.cl

Resumen. Esta investigación se centra en el estudio del concepto probabilidad, pero fijando la atención en su significado más que en sus cálculos, específicamente en los aspectos cognitivos vinculados a la construcción de dicho concepto en estudiantes universitarios de primer año. Para alcanzar tal objetivo se ha utilizado como referente teórico de la Didáctica de la Matemática –la Teoría APOE– (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas) pues ésta hace hincapié en la forma en que se construyen o aprenden conceptos matemáticos, otorgando las herramientas necesarias para indagar en las construcciones mentales que ponen en juego los estudiantes para la construcción del concepto probabilidad desde su dualidad de significados. Bajo esta perspectiva se diseñó y documentó una descomposición genética hipotética del concepto, detectándose de esta forma elementos que no fueron considerados en una primera instancia, lo que nos llevó a reformular dicha descomposición, logrando así una descomposición genética refinada y adecuada del concepto probabilidad.

Palabras clave: teoría APOE, descomposición genética, probabilidad

Abstract. The present research focuses on the concept of probability, fixing its attention on meaning rather than on calculations, specifically in the cognitive aspects related to the construction of this concept in college freshmen. To achieve this objective, the APOS (Actions, Processes, Objects and Schemes) theoretical approach has been used as mathematics education theory framework, because of its emphasis on how mathematical concepts are constructed or learnt. This perspective provides the necessary tools to probe in the mental constructions that students bring into play regarding the construction of probability as concept, emerging from the duality of its meaning. Therefore, through this approach, a hypothetical genetic decomposition of the concept was designed and documented, detecting items that were not considered in the first instance, which led us to reformulate this decomposition, achieving thus a refined and appropriate genetic decomposition of the probability concept.

Key words: APOS theory, genetic decomposition, probability

Antecedentes, problemática de investigación y objetivos

Durante las últimas tres décadas, aproximadamente, los contenidos de estadística y probabilidad han ido cobrando gran relevancia en la formación tanto a nivel profesional como ciudadano, esto debido al desarrollo de la estadística como ciencia y su gran utilidad para la investigación, el desarrollo del pensamiento crítico y la formación de ciudadanos. Razón por la cual se ha optado por incorporar fuertemente el estudio de la estadística y probabilidad en el currículum de matemática tanto a nivel básico, medio y superior, en gran parte de los países desarrollados, trayendo esto como consecuencia el desarrollo de numerosas investigaciones centradas en la enseñanza y aprendizaje de la estadística y probabilidad. Si bien el interés por el estudio de probabilidad y los elementos asociados a su aprendizaje no es una inquietud reciente, pues ya en 1951 Piaget e Inhelder se interesaban por estudiar cómo se desarrollan las ideas de azar y probabilidad en los niños, durante las últimas décadas se ha dado un significativo aumento en el surgimiento y desarrollo de investigaciones relacionadas a la enseñanza de la estadística y probabilidad tanto a nivel escolar como universitario. Dentro de las cuales cabe destacar, dada la problemática y objetivos de esta investigación, las investigaciones realizadas por Batanero, como por ejemplo, aquella vinculada a *los significados de la probabilidad en la educación secundaria* (Batanero, 2005), en la cual se dan a conocer los distintos significados vinculados al concepto probabilidad a lo largo de su desarrollo histórico, significados que de acuerdo con lo planteado por la autora, aun persisten y se utilizan en las prácticas de enseñanza de la probabilidad. "Significados que deben incluirse progresivamente, comenzando desde las ideas intuitivas de los alumnos sobre el azar y la probabilidad, ya que la comprensión es un proceso continuo y creciente por el cual el alumno construye y relaciona progresivamente los diferentes elementos del significado que atañen al concepto" (Batanero, 2005, p.257).

Es bajo esta perspectiva que nace esta investigación, cuyo principal interés es indagar en cómo estudiantes universitarios de primer año construyen el concepto probabilidad, pero fijando la atención en su significado, más que en sus cálculos.

Comúnmente el concepto probabilidad se asocia con lo incierto, situándola entre lo seguro e imposible, y para aceptar tal incerteza o certeza utilizamos un lenguaje que admite una variedad de términos (posible, chance, previsible, presumible, etc.) de nuestro lenguaje ordinario; y un suceso es cada uno de os resultados posibles de una experiencia aleatoria, pero ¿Cómo saber cuándo un suceso es más probable? ésta no es para nada una pregunta fácil de responder, de hecho ha sido objeto de estudio a lo largo de todo el desarrollo de la probabilidad, siendo objeto de discusión de numerosos personajes, tales como Pascal, Bernoulli, Bayes, Leibniz, Laplace, de Finetti, von Mises, Jaynes, Carnap, Popper y Keynes, entre otros, quienes desde los comienzos de la probabilidad, 1660 aproximadamente, "han visto la necesidad de definir rigurosamente el concepto" (Hacking, 1995, p. 120), el cual se ha visto sujeto a diversas interpretaciones que van desde lo intuitivo hasta lo matemático, predominando entre éstas últimas la interpretación frecuentista de la probabilidad, lo que estaría despojando al concepto de su significado como objeto de enseñanza y aprendizaje. Concepto que de acuerdo con lo planteado por Carranza y Fuentealba (2010) debe ser entendido desde dos dimensiones *una calculatoria y otra semántica*, la primera enfocada a los aspectos que se refieren al valor numérico de una probabilidad, mientras que la segunda se refiere a aquellos aspectos vinculados al significado dado a un cálculo. Además Carranza y Fuentealba (2010) plantea que, a su vez, la dimensión semántica de la probabilidad involucra dos significados para el término probabilidad uno ligado a la estabilización de la frecuencia de aparición de un fenómeno (*Dimensión frecuentista*) y el otro referido a una medida de certeza de la veracidad de una proposición (*Dimensión bayesiana*).

Es bajo esta mirada dual que hemos realizado la investigación para comprender y analizar desde una postura cognitiva, a través de la teoría APOE: *¿Cómo los estudiantes universitarios de primer año construyen el concepto de probabilidad desde su dimensión semántica?,* para así, por un lado identificar las dificultades presentes en la construcción del concepto probabilidad a partir de su dimensión semántica, en estudiantes universitarios, y por otro identificar y documentar las construcciones mentales que propician la construcción del concepto probabilidad.

Con esta investigación se busca contribuir desde una postura cognitiva a concebir mejor los procesos de construcción del concepto probabilidad en los estudiantes, de modo de contar con antecedentes y fundamentos teóricos que permitan a futuro proponer propuestas de enseñanza que contribuyan a la mejora del tratamiento de la probabilidad en el aula.

Marco teórico

Para dar respuesta a la pregunta antes expuesta y cumplir con los objetivos planteados, nos situamos en la Teoría APOE como referente teórico y metodológico, ya que este lente nos brinda elementos adecuados que permiten describir y analizar las construcciones mentales que los estudiantes ponen en juego para construir el concepto probabilidad desde su dimensión semántica.

La Teoría APOE fue creada por Ed Dubinsky en 1991 a partir de la epistemología genética de Piaget. El propósito central de esta teoría es *entender cómo las matemáticas se aprenden* para así elaborar un programa educativo que ayude a promover el aprendizaje de éstas. Es por ello, que la Teoría APOE se centra específicamente en la manera en que los estudiantes construyen o aprenden los conceptos matemáticos a partir de sus estructuras matemáticas previas, las cuales evolucionan conformando otros saberes, para así ayudar a los estudiantes a realizar las construcciones mentales necesarias para que dicha evolución se dé, de manera tal de mejorar los procesos de aprendizaje.

Bajo la mirada de la Teoría APOE la construcción del conocimiento matemático se origina por medio de las siguientes tres etapas: acciones, procesos y objetos.

Un estudiante muestra una concepción acción de un determinado concepto matemático si no es capaz de realizar las transformaciones sobre el objeto por sí solo, requiriendo de estímulos o instrucciones externas que le indiquen paso a paso como llevarlas a cabo. En nuestro caso, un estudiante tendrá una concepción acción del concepto probabilidad si, por ejemplo, al resolver un problema de probabilidad, lo hace siguiendo los pasos de un problema similar, el cual puede incluso haber sido memorizado.

Diremos que un estudiante muestra una concepción proceso de un determinado concepto matemático cuando es capaz de reflexionar sobre el concepto, realizando transformaciones pero sin la necesidad de realizar acciones específicas sobre él, es decir, sin tener que realizar todos sus pasos; lo que se llama interiorizar las acciones en un proceso. En nuestro caso, un estudiante tendrá una concepción proceso del concepto probabilidad de ocurrencia si es capaz de asignar una probabilidad de ocurrencia a un determinado suceso, reflexionando sobre ella, es decir, asignarle un significado a dicho valor.

Cuando un estudiante reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un determinado proceso y piensa en el proceso como un todo relacionado, entonces ha encapsulado tal proceso como un objeto cognitivo. No obstante, “en el curso de una acción o un proceso sobre un objeto, suele ser necesario desencapsular y regresar el objeto al proceso del cual se obtuvo con el fin de usar sus propiedades al manipularlo” (Dubisnky, 1991, p. 97) En nuestro caso, un estudiante tendrá una concepción objeto del concepto probabilidad si al verse enfrentado a una situación problema, reconoce que ésta se trata de un problema que para su solución necesita del concepto probabilidad, de la selección de métodos apropiados, llegando a establecer relaciones entre procedimientos que le permitan encontrar la solución al problema.

El paso por las etapas de acciones, procesos y objetos no es necesariamente lineal, de hecho un estudiante puede estar en una etapa para ciertos aspectos de un determinado concepto y en otra para otros. Siendo el mecanismo principal que permite que el estudiante evolucione de un estado de construcción del conocimiento a otro la abstracción reflexiva, puesto que esta es una herramienta mental que permite que el estudiante reflexione sobre sus acciones en un objeto, de modo tal que organice sus conocimientos estableciendo nuevas construcciones mentales que permitan el paso de un estado del conocimiento a otro más elevado. Llegando así a construir el conocimiento matemático como producto de abstracciones reflexivas sucesivas, mediante las cuales logra conformar una colección de acciones, procesos y objetos que llevan a conformar el correspondiente esquema asociado a un objeto matemático. De este modo, se lleva a cabo la construcción del conocimiento matemático por medio de las acciones, procesos, objetos y esquemas.

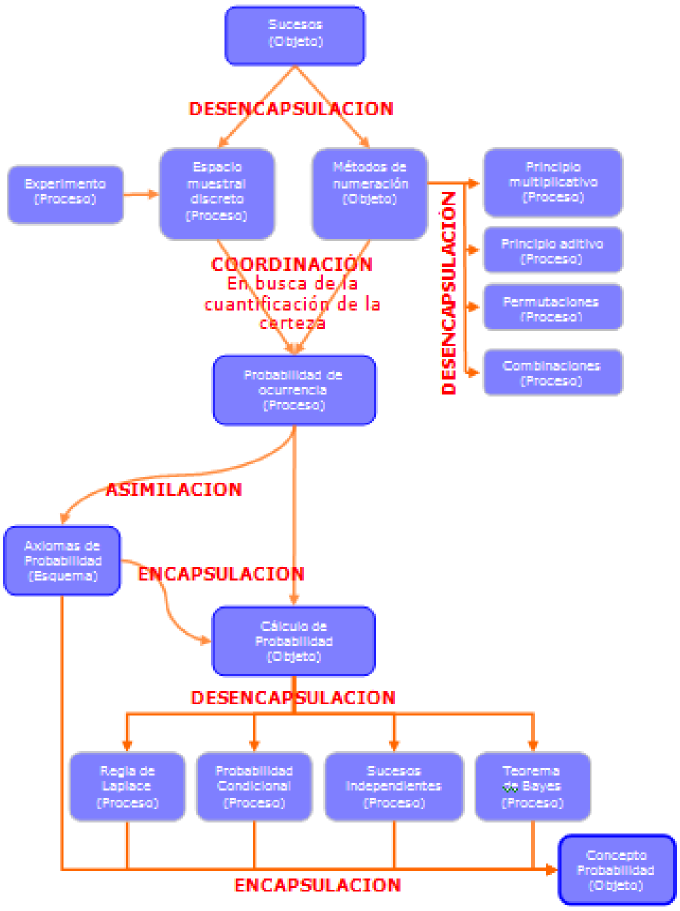
Es importante señalar que la Teoría APOE además de proporcionarnos herramientas para analizar cómo se construye el conocimiento matemático, nos proporciona un ciclo metodológico de investigación, el cual consta de tres etapas: el análisis teórico, el diseño y aplicación de instrumentos y el análisis y verificación de datos.

La aplicación de este ciclo de investigación permite obtener una visión en detalle de la forma en que los estudiantes construyen los conceptos matemáticos, es decir, de sus construcciones y mecanismos mentales.

Metodología

En esta investigación hemos utilizado el ciclo metodológico de APOE, porque nos permite tener una descripción en detalle de la forma en que los estudiantes construyen el concepto probabilidad. Comenzamos realizando un análisis teórico sobre el concepto probabilidad, a partir de un análisis histórico y epistemológico del concepto, junto a la experiencia de los investigadores en el tema; el cual permitió una descripción de las construcciones mentales en torno al concepto, lo que nos llevo a diseñar y proponer una descomposición genética hipotética del concepto probabilidad. En nuestro diseño, algunos de los conceptos relevantes dispuestos en la descomposición genética y que subyacen alrededor del concepto probabilidad son: suceso, experimento, espacio muestral discreto, métodos de numeración, axiomas de probabilidad, regla de Laplace, probabilidad condicional, sucesos independientes y teorema de Bayes.

Figura 1. Descomposición genética hipotética del concepto probabilidad



Mediante la descomposición genética hipotética diseñada, (ver figura 1) describimos de manera explícita las construcciones y mecanismos mentales que los estudiantes podrían estar haciendo para lograr una construcción adecuada del concepto probabilidad, llegando a establecer los posibles caminos a seguir para construir el concepto desde su dimensión semántica, a partir de 4 construcciones fundamentales: objeto suceso, proceso probabilidad de ocurrencia, esquema axiomas de probabilidad y objeto cálculo de probabilidad, las cuales llevarían a la construcción objeto del concepto probabilidad desde su dimensión semántica.

Para cumplir con el objetivo de ésta investigación y documentar la descomposición genética hipotética, se diseñó en base a la descomposición genética hipotética, un cuestionario de 14 preguntas, el cual fue aplicado individualmente a 12 estudiantes universitarios de primer año, que se encuentran cursando la carrera de Licenciatura en Ciencia Estadística en el Instituto de Estadística de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. De este modo, fue posible describir y documentar de manera apropiada las construcciones y mecanismos mentales empleados por los estudiantes en relación al concepto probabilidad desde su dualidad de significados. El análisis de los datos obtenidos de la aplicación del cuestionario se realizó desde la descomposición genética hipotética detectando qué elementos no han sido considerados o cuáles de las construcciones dadas hipotéticamente no se perciben. Es así como a modo de ejemplo podemos citar uno de los argumentos dados como respuesta a la pregunta 4, la cual tenía por objetivo indagar en la concepción de los estudiantes sobre la probabilidad de ocurrencia de un determinado evento o suceso, además de evidenciar la interpretación que otorgan al concepto probabilidad.

Observándose en la mayoría de las argumentaciones que los estudiantes reconocen que para poder asignar una probabilidad de ocurrencia al suceso en cuestión, es necesario contar con más información que ayude a asignar dicha probabilidad, argumentado que no es posible asignar una probabilidad exacta al suceso de que el derrame se pueda controlar (ver figura 2), sino que sólo se puede asignar una probabilidad en base a la opinión personal.

Figura 2. Respuesta a la Pregunta 4 del Estudiante 10

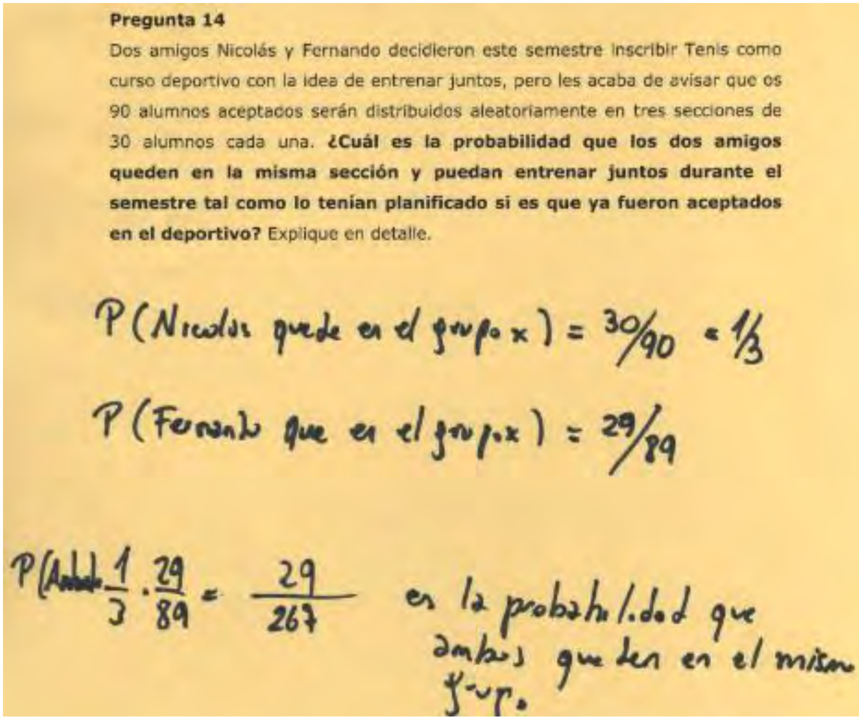
Pregunta 4
Ocurrió un derrame de petróleo. Se pregunta a un científico ambientalista sobre: "¿Cuál es la probabilidad de que este derrame pueda controlarse antes de que cause daño generalizado en las playas cercanas?" **¿Qué piensa usted que puede contestar el científico?** ¿Por qué? Explique en detalle.

El científico puede contestar que antes de responder claramente dicha pregunta se debe realizar un estudio tanto para saber la cantidad derramada, el curso y velocidad de las aguas debido al derrame, daños específicos que provoca dicha situación, etc.
No puede responder a buenas y primeras.

Por lo demás, en la respuesta dada por el estudiante 10 (ver figura 2), quien argumenta que no se puede responder de buenas a primera, es decir, reconoce la necesidad de contar con más información. Con la argumentación dada es posible observar que el estudiante 10 muestra la construcción proceso esperada en la descomposición genética del concepto probabilidad de ocurrencia, así como también la interpretación de la probabilidad desde su dimensión semántica.

Conclusiones

Uno de los principales resultados a partir del análisis de datos se relaciona con la construcción objeto de sucesos, la cual no es alcanzada por los estudiantes, esto ya que ninguno de los estudiantes, a los cuales se aplicó el cuestionario, logro identificar la necesidad de aplicar y relacionar los métodos de numeración, es decir, no lograron coordinar la construcción objeto de los métodos de numeración con la construcción proceso de espacio muestral, construcciones mediante las cuales era posible dar respuesta al problema planteado conjuntamente con la construcción objeto de cálculo de probabilidad, lo cual se observa claramente en las argumentaciones dadas a la pregunta 14 (ver figura 3).



Pregunta 14

Dos amigos Nicolás y Fernando decidieron este semestre inscribir Tenis como curso deportivo con la idea de entrenar juntos, pero les acaba de avisar que os 90 alumnos aceptados serán distribuidos aleatoriamente en tres secciones de 30 alumnos cada una. **¿Cuál es la probabilidad que los dos amigos queden en la misma sección y puedan entrenar juntos durante el semestre tal como lo tenían planificado si es que ya fueron aceptados en el deportivo?** Explique en detalle.

P(Nicolás quede en el grupo x) = $30/90 = 1/3$

P(Fernando que en el grupo x) = $29/89$

P(Ambos) $\frac{1}{3} \cdot \frac{29}{89} = \frac{29}{267}$ es la probabilidad que ambos queden en el mismo grupo.

Figura 3. Respuesta a la Pregunta 14 del Estudiante 1

Finalmente, dada la evidencia empírica de la que se dispone, consideramos que la ausencia de esta construcción objeto, se debe a que estos estudiantes carecen de la construcción objeto de los métodos de numeración, lo cual les impide reconocer la necesidad de aplicarlos a una determinada situación, además de la desencapsulación de éstos de acuerdo a lo requerido. A partir de las respuestas dadas a las distintas preguntas que involucran dicho concepto ha sido posible evidenciar que este grupo de estudiantes muestra una construcción proceso de sucesos, por lo cual es necesario redefinir la descomposición genética en relación a esta construcción, puesto que estos estudiantes logran identificar los sucesos vinculados a una determinada situación reconociendo el espacio muestral sin la necesidad de contar uno a uno, sin embargo no son capaces de desencapsular la construcción objeto de los métodos de numeración en los distintos procesos asociados a ella. No obstante, en base a la evidencia empírica es posible concluir que este grupo muestra tener una construcción objeto del concepto probabilidad, puesto que alcanzan en toda su amplitud las tres construcciones restantes propuestas en la descomposición genética hipotética, mostrando operar con las construcciones y mecanismos mentales descritos en la descomposición genética hipotética, ya que determinan y asignan una determinada probabilidad a sucesos, ya sea en base a creencias y evidencias (dimensión bayesiana) o a las estabilizaciones de frecuencia presentadas (dimensión frecuentista), siendo capaces de reflexionar sobre ellas, asignándoles un significado.

Lo anterior, nos ha permitido analizar el papel que desempeña tanto la dimensión semántica frecuentista como la bayesiana en la construcción del concepto probabilidad, constatando, en base a las respuestas y argumentos dados por este grupo de estudiantes, que existe una predominancia de la dimensión semántica frecuentista por sobre la bayesiana, esto dado que los estudiantes reconocen y argumentan de mejor manera aquellas situaciones bajo un enfoque frecuentista. Mientras que en aquellas situaciones en las cuales es necesario aplicar un enfoque bayesiano logran realizarlo en cierta medida, pero con mayores dificultades, incluso para algunos de estos estudiantes es imposible dar respuesta a ciertas situaciones, en base ya sea a creencias y/o evidencias, argumentando que dado que no se cuenta con datos numéricos o la evidencia cuantitativa suficiente, no es posible dar respuesta a tal situación. Además ha sido posible documentar, en base a los distintos argumentos y respuestas, que la dimensión calculatoria de la probabilidad predomina fuertemente sobre la dimensión semántica de la probabilidad, esto dado que los estudiantes, a los cuales se aplicó el cuestionario, no demuestran tener mayores dificultades para resolver aquellas situaciones en las que sólo se requiere determinar la probabilidad de cierto suceso sin la necesidad de otorgarle un significado, en cambio en aquellas situaciones en las cuales es necesario interpretar la probabilidad asignada, dándole un significado, se muestran confusos e inseguros.

Es importante señalar que, en base a los resultados obtenidos en esta investigación, podemos decir que se cuenta con una descomposición genética documentada, refinada y viable. A partir de la cual es posible, si se quisiera, elaborar propuestas didácticas para la enseñanza y aprendizaje del concepto probabilidad desde su dimensión semántica, para ser implementadas en estudiantes universitarios de primer año.

Referencias bibliográficas

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8*(003), 247-263.

Carranza, P. y Fuentealba, J. (2010). Dualidad de la probabilidad y enseñanza de la estadística. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 24*, 57-68.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall, (Ed), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer.

Hacking, I. (1995). *El surgimiento de la probabilidad*. España: Gedisa.

EL REPARTO CON FRACCIONES MEDIANTE "ESCENARIOS DIDÁCTICOS"

Eliza Minnelli Olguín Trejo, Marta Valdemoros Álvarez
CINVESTAV- IPN México
minnelli_angel@yahoo.com.mx, mvaldemo@cinvestav.mx

Resumen. El presente reporte de investigación trata de una propuesta en la que se aborda el diseño de una intervención experimental para la enseñanza-aprendizaje del reparto con fracciones a través de "escenarios didácticos", los que propician que los niños ideen diversas estrategias de reparto. Se trabajó con un grupo de cuarto grado de primaria en la ciudad de México. Las preguntas de investigación son: 1) ¿En qué medida la intervención en la enseñanza-aprendizaje de las fracciones, en situaciones de reparto y a través de "escenarios didácticos", ayuda a la adquisición de nociones (primeras ideas acerca de: la identificación de todos discretos y continuos, la distribución o reparto, la relación parte-todo, la partición, ideas intuitivas de orden y equivalencia) necesarias para la comprensión de la fracción? 2) Los niños, al confrontar sus estrategias para dar solución a problemas de reparto con fracciones ¿superan las dificultades en la comprensión de la fracción?

Palabras clave: escenarios didácticos, fracciones, reparto

Abstract. This research report is a proposal, which addresses the design of an experimental teaching intervention to deal with fractions learning through educational scenarios, which led them to devise different strategies for children sharing. We worked with a fourth grade group in Mexico City. The research questions were: 1) How much involvement in teaching and learning of fractions, and sharing situations through "learning scenarios" helps the acquisition of concepts (first ideas about: the identification of all discrete and continuous, distribution or sharing, the part-whole relation, partitioning, intuitive ideas of order and equivalence) necessary for understanding the fraction? 2) When can children, comparing their strategies to solve problems with fractions, overcome their difficulties in understanding the fraction?

Key words: teaching scenarios, fractions, share

Introducción

El presente es un reporte de investigación, el *problema* que se planteó en él es el *diseño de una intervención experimental para la enseñanza y el aprendizaje del reparto con fracciones, en primaria, a través de "Escenarios didácticos".* Nos interesamos en conocer las dificultades a los que se enfrentan los maestros al diseñar una clase con fracciones. De acuerdo a lo que exploramos en los docentes en esta investigación, ellos consideran que el nivel de complejidad es mayor que cuando trabajan con números naturales y sienten la necesidad de "bajar el nivel para que comprendan los niños"; con ello, entendemos que buscan facilitar el aprendizaje, pues para ellos es difícil que el estudiante se apropie del concepto por su grado de abstracción. Los profesores comentan que los alumnos, al no usar las fracciones en su vida cotidiana, como lo hacen en el caso de los números naturales, se les dificultan más la conceptualización. Mencionan que al resolver problemas los niños tienen dificultad al dar la respuesta numérica, sus particiones carecen de equidad o exhaustividad, no comprenden la equivalencia, no tienen claro el significado del numerador y el denominador y su relación por lo que invierten su posición. Además, no saben diferenciar en dos fracciones diferentes cuál es la mayor o menor, pues sólo ponen atención aisladamente al denominador si éste es un número mayor, entonces consideran que la fracción es mayor.

Todo lo anterior dio pauta para realizar el diseño de los ocho "Escenarios didácticos", dos para abordar la relación parte-todo, dos para trabajar estrategias de partición, dos para el orden de fracciones y los dos restantes para la equivalencia entre fracciones; ya que son nociones necesarias para la comprensión de la fracción, las mismas son aludidas en la pregunta uno de la investigación. Las *preguntas de investigación* son: 1) ¿En qué medida la intervención en la enseñanza-aprendizaje de las fracciones, en situaciones de reparto y a través de "escenarios didácticos", ayuda a la adquisición de nociones (primeras ideas acerca de la identificación de todos discretos y continuos, la distribución o reparto, la relación parte-todo, la partición, ideas intuitivas de orden y equivalencia) necesarias para la comprensión de la fracción? 2) Los niños, al confrontar sus estrategias para dar solución a problemas de reparto con fracciones ¿superan las dificultades en la comprensión de la fracción?

Marco teórico

Para fines de este estudio, tomamos en cuenta las aportaciones de Solé y Coll (1999), quienes mencionan que el profesor debe actuar como guía y mediador entre el niño y la cultura, mientras que el alumno aprende y se desarrolla en la medida en que construye significados apropiados, en torno a los contenidos que se enseñan, ya que el estudiante aprende cuando es capaz de elaborar una representación personal acerca de un objeto de la realidad o contenido que se pretende enseñar.

Kamii (1994) afirma que los maestros deben ver la enseñanza desde la perspectiva de cómo aprenden los alumnos y cómo llegan a comprender un contenido escolar; deben planear la creación de un ambiente adecuado al pensamiento de sus estudiantes en el que haya confrontación de ideas entre los niños y se estimule la argumentación, pues ello facilita el desarrollo de un nivel de pensamiento más elevado cuando se sistematizan sus conocimientos previos. Lo que también influye ampliamente para que un niño aprenda o no un contenido escolar, es el clima social de la clase, generado por el maestro y los alumnos.

Para Streefland (1991,1993) la enseñanza debe apegarse a la realidad para que el conocimiento sea significativo para el niño. El rol del maestro que define Streefland (1993) es el de un guía, a la luz de los conocimientos previos que reelaboran y el nuevo que construyen los estudiantes sobre algún contenido matemático, en el que propicien confrontaciones entre los alumnos en situaciones relevantes.

Goffree (2000) coincide con Streefland (1991) en que la enseñanza de las matemáticas debe estar basada en la solución de problemas del mundo real para que el conocimiento sea significativo para el niño, por lo tanto, se deben diseñar situaciones concretas para que el estudiante elabore sus propios significados. Manifiesta que la creación del modelo de una situación real permitirá que el alumno investigue la situación y lo llevará a aplicar dicho modelo en la solución de otros problemas.

En cuanto a la "enseñanza experimental", Perera y Valdemoros (2007, 2009a, 2009b) utilizaron un programa de enseñanza exploratorio, con un enfoque constructivista, en el cual se promovió el desarrollo intelectual de los niños, habilitándolos para que ellos mismos construyeran sus propios conocimientos con base en sus experiencias cotidianas. Las actividades fueron realizadas fundamentalmente en torno a varios "escenarios didácticos" que representaban distintos espacios o ámbitos de aplicación de las fracciones, propiciando un ambiente de interacción entre compañeros donde hubo intercambio de ideas, discusión sobre sus puntos de vista, el reconocimiento de errores, lo que permitió el avance en sus conocimientos favorecidos por la reflexión de sus trabajos.

Por otro lado, Perera y Valdemoros (2007) mencionan que a través de los problemas de reparto, los estudiantes lograron manifestar expresiones simbólicas de fracción para nombrar la parte del todo repartido, lo que permitió establecer la relación de orden y equivalencia entre las partes fraccionarias obtenidas en dos repartos diferentes, reconociendo dicha relación mediante la percepción de patrones que los estudiantes construyeron, ejemplificándolos con diferentes fracciones para mostrar la misma cantidad.

En cuanto a estrategias de resolución de problemas usando fracciones, Olguín (2009) observó ocho estrategias diferentes al realizar repartos con fracciones, donde varió la idea de unidad, de divisor y de objetos susceptibles de partición; las siguientes son tales estrategias:

a) Dividen cada unidad en el mismo número de personas.

b) Reparten unidades a cada persona y lo que sobra lo dividen en fracciones.

c) En sus respuestas numéricas, dan una fracción equivalente a la que corresponde a sus repartos.

d) Interpretan la unidad integrando todos los objetos de la colección y con base en ello, hacen el reparto.

e) Partición y reparto equivalente realizando más divisiones de las necesarias.

f) Dividen en mitades cada unidad, las reparten y lo que sobra lo dividen nuevamente haciendo un ajuste.

g) Cuando las características del reparo lo permiten, dividen cada objeto en un número divisible menor a la cantidad de personas que participan. Así, al repartir ocho galletas entre 6 personas, se divide cada una en tercios y le dan a cada integrante del reparto 4/3.

h) Primero dividen cada unidad en el mismo número de personas y a cada pedazo que resultó lo dividen a la mitad; si se pidiera otra forma de repartir, volverían a dividir cada pedazo a la mitad.

Método

Escenario: La escuela donde se realizó el estudio pertenece al sistema público y está localizada en una zona de clase media, dentro del área urbana de la Ciudad de México.

Sujetos: Los alumnos cursaban el cuarto grado de primaria y tenían entre 9 y 10 años.

Los instrumentos metodológicos:

- Cuestionario para maestros

Con la finalidad de indagar acerca de las dificultades que han tenido al diseñar y desarrollar una clase de fracciones. Además de puntualizar las dificultades que han observado en los alumnos al enfrentarse a actividades relacionadas con fracciones.

- Cuestionario para los niños

Que contenía problemas de reparto donde se admiten una interpretación continua y discreta del todo. Con el propósito de conocer las ideas, nociones, conocimientos previos y estrategias empleadas por los niños en la resolución de problemas, en situaciones de reparto.

- Sesiones de enseñanza

Ocho "escenarios didácticos" propiciando un ambiente de interacción entre compañeros, donde se pretende que haya intercambio de ideas, discusión, favoreciendo la reflexión en torno a los trabajos que realicen los alumnos (Perera & Valdemoros, 2009a, 2009b). Al final de cada actividad se les pidió a los estudiantes que plantearan situaciones parecidas a las resueltas y las expusieran a sus compañeros, permitiendo la confrontación entre la enseñanza y lo aprendido, lo cual es una manera de evaluar la instrucción a través del análisis y comparar las propuestas del maestro y las propuestas de los niños.

Los "escenarios didácticos" que se trabajaron y los problemas planteados son los siguientes:

Escenario: Juegos infantiles en la feria (relación parte-todo).

"¿Quién reparte más rápido?" El juego consiste en repartirse figuras entre los integrantes del equipo en partes iguales, el primero que termine será el ganador

Escenario: Taller de manualidades (relación parte-todo).

Tienen dos hojas cuadradas, una roja y una amarilla. ¿Cómo deben dividir las hojas, si cada rehilete debe tener dos aspas rojas y dos aspas amarillas?

Escenario: El parque de diversiones (estrategias de partición).

En la pista de carreras hay tres carros y en cada uno se pueden subir dos personas. ¿Cómo se subirían a los carros los seis integrantes de tu equipo?

Escenario: Los vehículos para ir de Excursión (estrategias de partición).

Si a la excursión van a ir en cuatro autobuses dos grupos con 20 alumnos cada uno ¿cómo acomodarías a los alumnos en los autobuses?

Escenario: El circo (orden de la fracción).

En el circo hay tres malabaristas, dos payasos y un domador. Divide la pista del circo en 6 partes iguales y colorea de amarillo el lugar del domador, de rosa el espacio para los malabaristas y de morado el lugar asignado a los payasos. ¿De qué color es la parte más grande de la pista?¿Qué parte es la más chica de la pista?

Escenario: El zoológico (orden de las fracciones).

El día lunes les llevaron una cubeta de pescados a las cuatro focas del zoológico, el día martes les llevaron dos cubetas. ¿Qué día comieron más pescado las focas?

Escenario: Paseo familiar (equivalencia).

Una familia se repartieron dos panes, un pan lo dividieron en dos partes iguales, uno se lo dieron a la niña y otro a su mamá. El señor y el niño tomaron del otro pan ¼ cada uno, después se repartieron a la mitad lo que sobraba. ¿Quién comió más pan?

Escenario: El restaurante (equivalencia).

Ana, José, Lalo y Ángel fueron a comer pizza, ellos pidieron dos pizzas que compartirán en partes iguales. ¿Qué parte de la pizza le corresponde a cada uno? Divide las pizzas de abajo y escribe el nombre de cada uno, al lado de la porción que les darás.

Reparte de otra manera las mismas pizzas a las mismas personas.

Validación: se realizó la triangulación de métodos y de tareas para observar el contraste entre diferentes momentos del trabajo de campo de la investigación. Con el objetivo de verificar las tendencias detectadas e incrementar la validez de los resultados del estudio. Lo anterior hace que la validación sea de carácter mixto.

Análisis de resultados

En el cuestionario que se les aplicó a los maestros manifestaron que al trabajar con fracciones, debido al grado de complejidad tienen que "bajar el nivel" para que comprendan los niños. Mencionan que el aprendizaje es momentáneo y consideran que deben reforzar el concepto. Los profesores comentaron que los alumnos, tienen dificultades al dar la respuesta numérica, sus repartos y particiones carecen de equidad o no son exhaustivos, no comprenden la equivalencia, no saben diferenciar en dos fracciones distintas cuál es la mayor o menor, pues sólo ponen atención al denominador si éste es un número mayor, de acuerdo a los números naturales, entonces consideran que la fracción es mayor.

En el cuestionario que se les aplicó a los niños se observó la dificultad que tienen para identificar fracciones en diferentes figuras geométricas y la mayor parte de éstas tienen que ver con la estrategia de partición. Se les dificulta dividir las figuras geométricas en tercios, pues algunos dividen en medios y uno de ellos la divide a la mitad; así, obtienen un medio con dos cuartos en lugar de tres tercios. Para dividir en sextos a las figuras geométricas, algunos niños dividen en cuartos y con una línea en diagonal dividen dos cuartos en octavo; así, en lugar de seis sextos, obtienen dos cuartos y cuatro octavos.

En los problemas verbales hubo pocos niños que respondieron con números naturales para indicar la cantidad de partes que corresponden en un reparto, otros realizaron un reparto adecuado pero tuvieron un error numérico, por no saber representar con fracciones su resultado. También les fue difícil utilizar dos estrategias de reparto para dar solución a un mismo problema.

Los alumnos utilizaron cinco estrategias diferentes para dar solución a los problemas verbales. Las estrategias más utilizadas son "Dividen cada unidad en el mismo número de personas" y "Reparten unidades a cada persona y lo que les sobra lo dividen en fracciones".

Tres alumnos utilizaron una estrategia nueva que no fue observada en la investigación realizada por Olguín (2009). Al dividir 4 galletas entre 6 personas, dividen tres de ellas en cuartos; así, el total de las partes es un múltiplo del total de personas y la restante la dividen es sextos, con lo cual le corresponde a cada sujeto 2/4 con 1/6 de las galletas. En la respuesta numérica, uno de ellos escribe "1/4 + 1/2", olvidando incluir 1/4 más. Otro escribe "un medio y un sexto" y el tercer niño no escribió la respuesta numérica. Trabajar el reparto permitió emplear una infinidad de estrategias de partición como de reparto.

En los escenarios didácticos "Juegos infantiles en la feria" y "Taller de manualidades" dedicados a trabajar nociones de relación parte-todo, se propició el debate entre diferentes estrategias de partición, algunas no fueron correctas y al ser confrontadas con los demás equipos, los estudiantes se dieron cuenta del error y cambiaron de estrategia. Por ejemplo, cuando dividieron un cuadrado en sextos, algunos alumnos obtuvieron 2/4 y 4/8, alguien comentó: "No son partes iguales", por lo que verificaron y cambiaron su estrategia de partición (Figura 1). Esto nos lleva a afirmar que la introducción de los "Escenarios didácticos" propició esos cambios en el punto de vista del niño y enriqueció las elaboraciones individuales, lo cual responde a las preguntas de investigación.

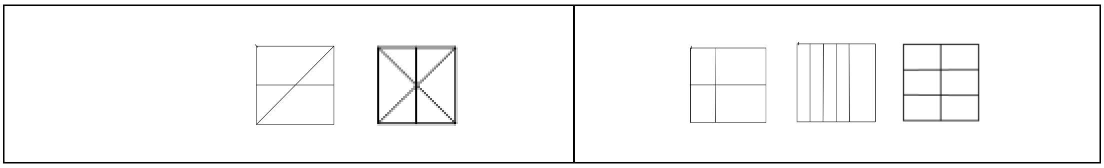


Figura 1.A la izquierda están las estrategias erróneas que emplearon para dividir un cuadrado en sextos y a la derecha las estrategias correctas.

En los escenarios "Los vehículos para ir de excursión" y "El parque de diversiones" al identificar el todo discreto, hubo diversidad de soluciones para un solo problema, admitidas por el grupo una vez que comprobaron que se cumplía con la equidad y la exhaustividad, que son nociones necesarias para la comprensión de la fracción, lo cual fue logrado gracias a las ideas intuitivas empleadas en las estrategias de partición. Al pedirles que inventaran situaciones parecidas a las ya resueltas, aunque los problemas no están bien redactados, se observa que los niños ya tienen más confianza en diseñar situaciones, considerando todas las consignas establecidas (Figura 2).

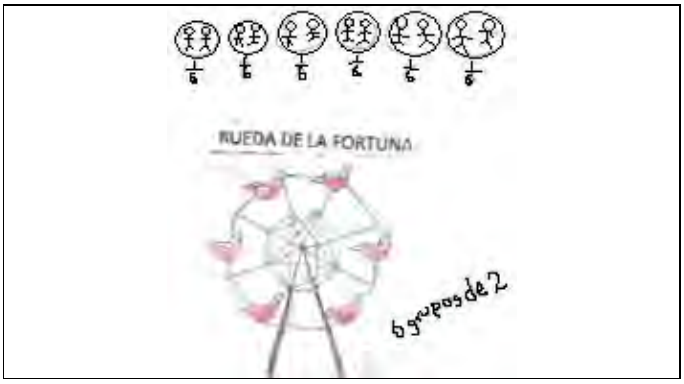


Figura 2. Problema inventado por los niños de un equipo.

En los escenarios "El circo" y "El zoológico", al ordenar las fracciones de mayor a menor los equipos no coincidían, pues algunos consideraron que la fracción que tuviera en el denominador el dígito mayor, esa era la fracción más grande. Ellos discutieron sus ideas, propusieron dividir la figura a modo de comprobar quien tenía la razón. Hacerlo facilitó que los niños identificaran los errores, los corrigieran y que observaran la equivalencia entre fracciones; esto responde la pregunta dos de la investigación. En el del "Zoológico" llegaron a conclusiones interesantes, las que fueron expresadas en sus comentarios: "el martes come más porque hay menos focas y alcanza más comida" argumentos que nos muestran la relación que realiza el niño entre la porción repartida y la cantidad de animales que se la van a repartir. Otro alumnos dice "entre más grande es el número, menos comida va a ser" él se refiere al denominador.

En los dos últimos "El paseo familiar" y "El restaurante" empleados para abordar la equivalencia, los alumnos utilizaron al menos dos diferentes estrategias de reparto para dar solución a un mismo problema, posteriormente compararon el resultado obtenido en cada uno, lo que propició que observaran la equivalencia que existe entre ambas partes. Algunas afirmaciones fueron: "todos comieron igual", "porque comieron dos panes y uno se lo repartieron el papá y el hijo, el otro pan se lo comieron la mamá y la hija", "porque la mamá y la hija tienen un pan y el papá y el hijo tienen un pan nada más que ellos lo repartieron más que la hija y que la mamá". Las siguientes son dos estrategias de reparto que utilizaron para repartir cuatro galletas entre seis personas, los alumnos observan que 1/2 con 1/6 es la misma cantidad que 2/3 (Figura 3).

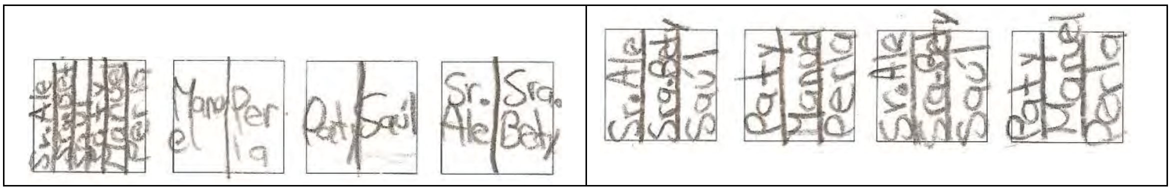


Figura 3. Dos estrategias de reparto para encontrar fracciones equivalentes.

Los resultados obtenidos nos llevan a afirmar que la introducción de los "Escenarios didácticos" ayudó a la adquisición de nociones (primeras ideas acerca de la identificación de todos discretos y continuos, la distribución o reparto, la relación parte-todo, la partición, ideas intuitivas de orden y equivalencia) necesarias para la comprensión de la fracción. Además, permitió la confrontación de los resultados, el debate en el grupo escolar, propiciando cambios en el punto de vista del alumno y el enriquecimiento de elaboraciones individuales, lo cual responde a las preguntas de investigación.

Conclusiones

Los "Escenarios didácticos" propiciaron la discusión en la clase sobre estrategias de partición y reparto, los estudiantes expresaron sus ideas y pensamientos a través de la negociación de significados.

La discusión fue una poderosa herramienta para aprender y emplear nuevos conceptos. Por ello, los "escenarios didácticos" tienen el potencial para practicar las propuestas argumentativas a través de las interacciones eventualmente dirigidas hacia la construcción del conocimiento.

Permitieron que los alumnos superaran las dificultades señaladas por los maestros y observadas en el cuestionario que se les aplicó inicialmente.

Respecto a las ideas erróneas, defender su postura a través de argumentos permitió la construcción del conocimiento, los niños se corrigieron de manera autónoma, al tratar de explicar su razonamiento a alguien y ponerse de acuerdo con los demás, el niño se da cuenta de su error y lo corrige, por ello la importancia de trabajar los "escenarios didácticos" a través de actividades grupales y en equipo.

Referencias bibliográficas

Goffree, F. (2000) Principios y paradigmas de una educación matemática realista. Matemáticas y educación. *Retos y cambios desde una perspectiva internacional,* 9, 151-167. Barcelona: Graó.

Kamii, C. (1994). *Reinventando la aritmética III,* Madrid, Visor Aprendizaje, 1995.

Olguín, E. (2009). *Estrategias empleadas por los niños en la resolución de problemas de reparto con fracciones*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Perera, P. y Valdemoros, M. (2007). Propuestas didácticas para la enseñanza de las fracciones en cuarto grado de educación primaria. *Investigación en educación matemática XI*, Tenerife, España, 209-218.

Perera, P. y Valdemoros, M. (2009a). Enseñanza experimental de las fracciones en cuarto grado. *Educación Matemática*, 21(1), 29-61.

Perera, P. y Valdemoros, M. (2009b). The Case of Karla in the Experimental Teaching of Fractions. *Proceeding of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, 361-368. Thessaloniki, Grecia.

Solé, I. y Coll, C. (1999). *Los profesores y la concepción constructivista: El constructivismo en el aula*, Barcelona, Graó, 7-23.

Streefland, L. (1991). The course in theory and practice. En L. Streefland (Ed.). *Fractions in realistic Education: A paradigm of developmental research, Kluwer Academic,* 46-134.

Streefland, L. (1993). The design of a mathematics course a theoretical reflection. *Educational Studies in Mathematics*, 25, 109-135.

EVOLUCIÓN COGNITIVA DEL CONCEPTO PARÁBOLA COMO LUGAR GEOMÉTRICO: UNA MIRADA DESDE LA TEORÍA APOE

Cristóbal Valdivia Sepúlveda, Marcela Parraguez González
Pontifica Universidad Católica de Valparaíso Chile
cristobal.matematico@gmail.com, marcela.parraguez@ucv.cl

Resumen. La investigación se enmarca en el estudio de la construcción del concepto parábola y sus elementos principales, como un lugar geométrico, bajo la mirada de la teoría APOE y los tres niveles de evolución de los esquemas: la tríada Intra, Inter y Trans. La estructura general del estudio está determinada por tres componentes del ciclo de investigación que contempla la teoría APOE. En la segunda de ellas -aspecto empírico-, se diseñó y aplicó un cuestionario y entrevistas a 5 estudiantes de una universidad chilena que entregó datos respecto a las construcciones mentales que ellos realizan en torno a la parábola como lugar geométrico a través de tres métricas distintas: la euclidiana, la del taxista y la del máximo. Algunos hallazgos de nuestra investigación dan información respecto al cambio que se produce en la forma gráfica de la parábola según métricas no usuales y, además, que los elementos de ella permanecen invariantes ante una u otra métrica utilizada.

Palabras clave: APOE, parábola, lugar geométrico, evolución

Abstract. The research is part of the study of the construction of the concept parabola and its main elements, as a locus, under APOS theory point of view and the three levels of development schemes: the triad Intra, Inter and Trans. The general structure of the study is determined by three components of the research cycle that includes APOS theory. In the second one (empirical aspect), a questionnaire and interviews was designed and administered to 5 students from a Chilean university providing data regarding the mental constructions perform by them about the parabola as a locus through three different metrics: the Euclidean metric, the drivers metric and the maximum metric. Some of our research findings give information about the change that occurs in the graph shape of the parabola as unusual metric, and also that elements of it remain invariant under one or another metric used.,

Key words: APOS, parabola, locus, evolution

Introducción

Actualmente, en la enseñanza superior chilena, existen textos que son utilizados para el estudio del cálculo y la geometría analítica, como por ejemplo, Swokowski y Cole (2011), Stewart, Hernández y Sanmiguel (2007), Larson y Hostetler (2008), donde podemos apreciar que el estudio de la parábola se sitúa en las relaciones que existen entre la ecuación y sus parámetros, y las implicancias que ellas tienen sobre su gráfica. Esto provoca, por una parte, que el concepto se asocie a una determinada curva del plano derivada de la métrica euclidiana (véase figura 1), o a una ecuación cuadrática de la forma $y= ax^2+bx+c$ con a, b y c números reales; y por otra parte, que se privilegie el uso de fórmulas para calcular los elementos principales que tiene una parábola (directriz foco, vértice y eje de simetría).

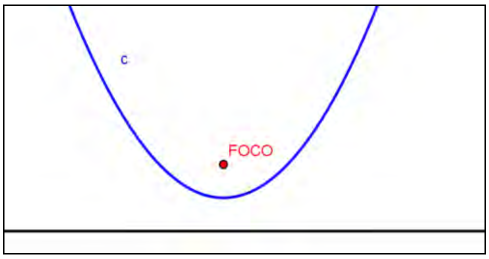


Figura 1. Ejemplo de parábola según métrica euclidiana.

Consideramos que este contexto y tratamiento de la parábola promueve la pérdida de su definición misma como lugar geométrico, y para saberlo investigamos qué sucede con la noción de parábola cuando cambiamos de métrica euclidiana –usual– por las métricas del taxista (Krause, 1986) o la métrica del máximo.

Marco teórico: Teoría APOE

La investigación se realiza bajo el alero de la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema), como marco teórico y metodológico. El proceso de investigación bajo esta teoría conlleva el tener en cuenta un modelo cognitivo mediante el cual un aprendiz puede construir el concepto parábola como lugar geométrico, llamado descomposición genética (Dubinsky, 1991), que es el resultado de la aplicación del ciclo de investigación propuesto por dicha teoría (Asiala, Brown, Devries, Dubinsky, Mathews y Thomas, 1996): análisis teórico o descomposición genética, diseño y aplicación de instrumentos y análisis y verificación de datos. En la descomposición genética que se preparó para la construcción del concepto parábola como lugar geométrico, describimos las construcciones mentales que consideramos prerrequisitos, las construcciones (acciones, procesos, objetos y esquemas) y mecanismos (interiorización, coordinación, encapsulación y desencapsulación) mentales empleados al utilizar la métrica euclidiana, que determinan un camino mediante el cual un aprendiz puede construir de manera adecuada el concepto parábola como objeto. Los niveles de la tríada (Piaget y García, 1989) de la construcción de un esquema, I*ntra*, I*nter* y T*rans*, para dos métricas no usuales (la del taxista y la del máximo), darán cuenta de la evolución de dicho concepto, al permitirnos observar cuáles de los elementos que aquí hemos llamado principales: directriz, foco, vértice y eje de simetría de la parábola, permanecen invariantes.

Las tres componentes propuestas por el ciclo de investigación que nos proveé la teoría APOE determinan la estructura general de la investigación. Para testear la viabilidad de nuestra descomposición genética se diseñó y aplicó individualmente un cuestionario (de 7 preguntas) y entrevistas (de 8 preguntas) a 5 estudiantes de una universidad chilena, que entregaron información respecto a las construcciones que ellos realizaron.

La teoría APOE ha sido utilizada con éxito en diversas investigaciones sobre conceptos matemáticos. Sin embargo, no existe referencia de algún estudio que aborde a la parábola desde su dimensión como lugar geométrico con métricas distintas a la usual. No obstante, encontramos a Pérez y Arrieche (2009) quienes señalan que las dinámicas de aula se basan principalmente en la dimensión algebraica de las secciones cónicas. Por su parte, Marmolejo y su grupo (Marmolejo, Moreno, Hernández y Bahena, 2009) obtienen como conclusión que es necesario acudir a las ideas elementales que conforman la definición de los conceptos matemáticos para la construcción de las cónicas, permitiendo reflexionar sobre el proceso propio de la construcción.

La pregunta que guía nuestra investigación es ¿Cómo construyen los aprendices el concepto de parábola –como lugar geométrico– y sus elementos principales?

Si bien la parábola emerge como una sección cónica, al intersectar un cono circular con un plano, hemos adoptado una noción posterior como lugar geométrico que ha sido aceptada desde el siglo XVIII: "el conjunto de todos los puntos del plano equidistan de un punto fijo llamado foco, y de una recta fija, llamada directriz" (Arancibia y Mena, 2007, p.395)

El objetivo principal de este estudio es, en primer lugar, identificar y analizar las construcciones mentales que realizan los aprendices en el proceso de construcción del objeto parábola –como lugar geométrico– y, en segundo lugar, describir su evolución. Para esto último consideramos los tres niveles de evolución de un esquema, junto a dos métricas no euclidianas: la métrica del taxista (Krause, 1986) y la métrica del máximo, las cuales darán luces acerca de cómo se comporta la parábola (y sus elementos principales) y cuáles son los cambios que se evidencian en ellos cuando se están utilizando estas métricas no euclidianas. A partir de ahí determinaremos la evolución del concepto – lugar geométrico de la parábola– al determinar si existen –y cuáles son– los elementos principales de ella que permanecen invariantes bajo el uso de distintas métricas no euclidianas.

Descomposición genética del concepto parábola como lugar geométrico

La descomposición genética hipotética que presentaremos a continuación (ver figura 2), se obtuvo a partir de nuestra experiencia como docentes de este tema y de una mirada al desarrollo histórico y epistemológico del concepto parábola y de lugar geométrico.

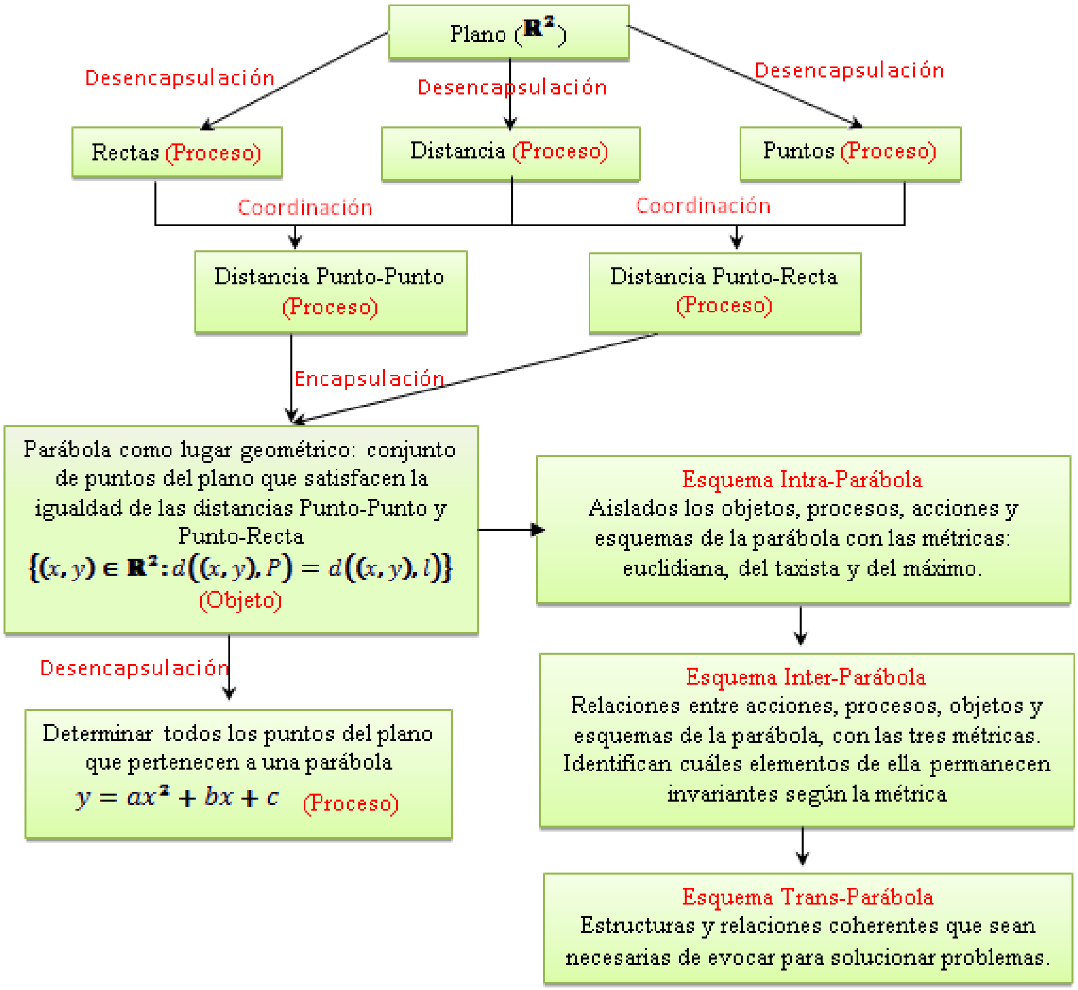


Figura 2. Descomposición genética hipotética del concepto parábola como lugar geométrico y su evolución a través de la tríada.

En la descomposición genética presentada se distinguen cuatro construcciones mentales basales necesarias para construir, de manera adecuada, el objeto parábola como un lugar geométrico: plano, distancia, puntos y rectas. El plano **($\mathbb{R}^2$)** como Objeto, se desencapsula en dos Procesos que son prerrequisito: distancia Punto-Punto y distancia Punto-Recta, que al coordinarse mediante la igualdad, generan el Objeto de parábola como un conjunto de puntos del plano cuya distancia equidista a un punto fijo (*P*) y a una recta dada (*l*), el cual puede desencapsularse en el Proceso que explícita todos los puntos que pertenecen a él. Este Objeto parábola evoluciona a través de los tres niveles de Esquema: Esquema Intra-Parábola, Esquema Inter-Parábola y Esquema Trans-Parábola.

A continuación, presentaremos algunas de las características más relevantes que conforman los tres niveles del concepto parábola como lugar geométrico y sus elementos principales.

Consideraremos que un aprendiz muestra un nivel de Esquema Intra-Parábola, cuando:

- Realiza cálculos de distancia Punto-Punto y Punto-Recta, con cualquiera de las métricas.
- Identifica geométricamente, la distancia entre dos puntos distintos, con cada una de las métricas.
- Identifica puntos discretos de algún lugar geométrico de una parábola, sin embargo, no logra generalizar la forma gráfica que ella tendrá, ya sea con la métrica euclidiana, del máximo o del taxista.

Por otra parte, el nivel de Esquema Inter-Parábola está caracterizado por aquellas respuestas y razonamientos que suceden cuando un aprendiz:

- Interpreta aisladamente los resultados obtenidos de los cálculos distancia Punto-Punto y distancia Punto-Recta, con cualquiera de las tres métricas. Establece, además, relaciones que generan regularidades o propiedades.
- Identifica puntos discretos de algún lugar geométrico de una parábola y, además, logra generalizar la forma gráfica que ella tendrá. Esto con la métrica euclidiana, del máximo o del taxista.
- Reconoce aisladamente elementos principales de una parábola: vértice, eje de simetría, directriz y foco, que permanecen invariantes, cualquiera sea la métrica utilizada.

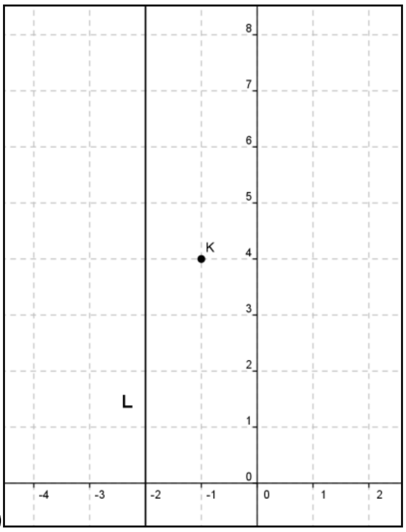
Finalmente, las características que definen el último nivel de Esquema Trans-Parábola, están presentes cuando el aprendiz:

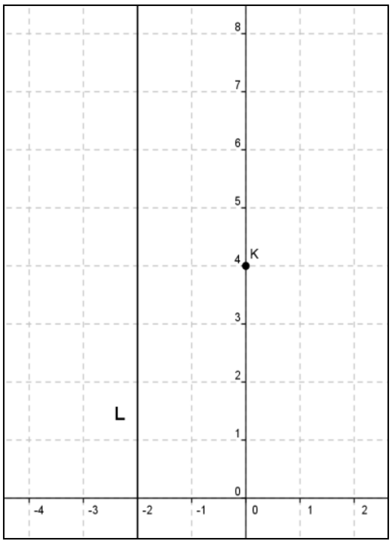
- Concibe la parábola como un lugar geométrico, que puede estar definido con métricas distintas a la usual (euclidiana).
- Reconoce la forma geométrica que tiene la distancia Punto-Punto y la distancia Punto-Recta según la métrica euclidiana, del taxista o del máximo.
- Evoca de manera adecuada las construcciones mentales necesarias dispuestas en su Esquema-Parábola para resolver cualquier situación problema.

Ejemplo de la entrevista

A modo de ejemplo, hemos decidido presentar las producciones del estudiante 1 (E1) frente a la pregunta 4 de la entrevista.

> Pregunta 4: Observa el siguiente gráfico y determina el conjunto de puntos cuya distancia según la métrica del máximo (d_m) al punto K y a la recta L sea la misma. Luego responde para cada uno de los incisos a) y b), ¿Cuál es el lugar geométrico que representa el conjunto de puntos que has encontrado? ¿Por qué?

a) 

b) 

Para resolver la pregunta, en ambos incisos, la estrategia utilizada por E1 fue identificar, primero, el conjunto de puntos del plano que están a distancia –del máximo– uno de la recta, luego buscó cuáles son los puntos que están a distancia uno del punto K (obteniendo una circunferencia con forma cuadrada). Posteriormente intercepta ambos conjuntos y encuentra dos puntos. Luego repite el procedimiento con distintas distancias, tal como aparece en la Figura 3.

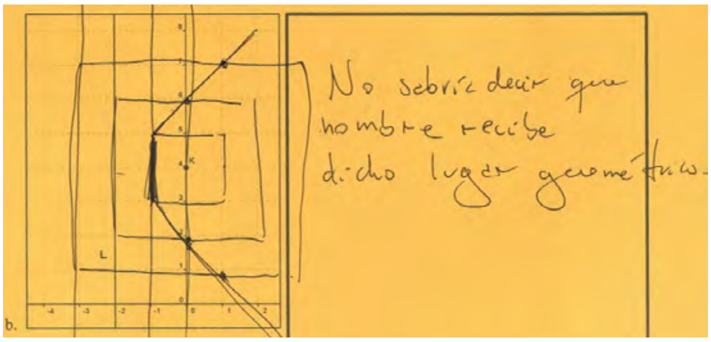


Figura 3. Producciones del estudiante 1 en la pregunta 4, inciso b) de la entrevista.

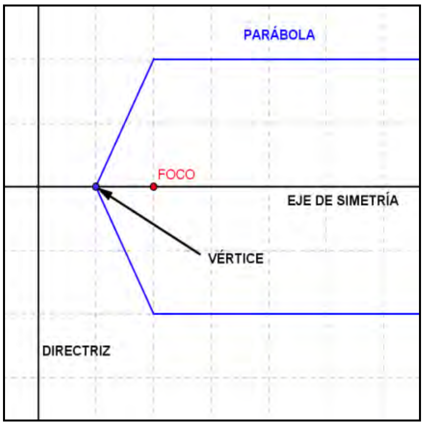
De la figura 3 podemos observar que el estudiante E1 muestra un nivel de Esquema Inter-Parábola, debido a que logra identificar el conjunto de puntos del plano que satisface la igualdad de distancias (establece relaciones entre las distancias Punto-Punto y Punto-Recta), sin embargo no reconoce que el lugar geométrico es una parábola. Esto lo hemos interpretado a partir de lo que escribe junto a la gráfica *"No sabría decir que nombre recibe dicho lugar geométrico"*, reflexión que puede haber sido generada por la incongruencia que existe entre la forma geométrica de una parábola con la métrica euclidiana y esta nueva parábola con la métrica del máximo. En particular, consideramos que el estudiante no logró identificar el lugar geométrico que está en juego, debido a que el vértice no es único –según la apariencia de la gráfica de la figura 3–, y también, por los segmentos rectos que se extiende la parábola.

A manera de conclusión

El proceso de análisis realizado a partir de los datos obtenidos en la entrevista y el cuestionario, nos ha brindado datos relevantes para documentar el conjunto de construcciones y mecanismos mentales dispuestos en la descomposición genética del concepto parábola como lugar geométrico (ver figura 2) y, además, su evolución a través de los niveles Esquema Intra-Parábola, Esquema Inter-Parábola y Esquema Trans-Parábola. Ello implicó, entre otras cosas, la puesta en escena de varios elementos matemáticos que debieron enfrentar los estudiantes entrevistados: plano ($\mathbf{R}^2$), puntos, distancia, rectas y lugar geométrico con métricas no usuales. Las relaciones que los 5 informantes establecen entre ellas fueron explicadas a través de construcciones y mecanismos mentales, y el grado de coherencia que ellas tienen de estos elementos, permitió un acercamiento más adecuado para trabajar el concepto parábola con métricas no usuales.

A tal grado es la relevancia de las construcciones mentales presentes en la descomposición genética, que dos –de los cinco– estudiantes no participaron de la entrevista debido a que en las producciones del cuestionario, entregaron evidencia de no tener una concepción proceso de la distancia Punto-Recta, según la métrica euclidiana: *ellos pensaban que la distancia de un punto a una recta no es única, sino por el contrario, la distancia es cualquier segmento de un punto a una recta*. Al no tener una concepción proceso de la distancia Punto-Recta, no lograron construir el objeto parábola como lugar geométrico, elemento basal para poder incorporar –en la entrevista– métricas distintas a la usual y analizar la evolución del concepto en cuestión.

Los resultados que se derivan de esta investigación dan cuenta de los cambios que se producen en la forma geométrica de la parábola, cuando ella es estudiada con métricas distintas a la usual. Se obtuvo, también, que los elementos principales de una parábola permanecen invariantes ante una u otra métrica: existe un único vértice y eje de simetría; el foco y la directriz no varían (figura 4).



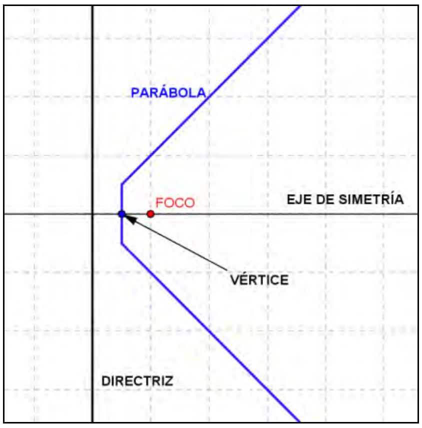


Figura 4. Ejemplo de Parábola y sus elementos principales, según métrica del taxista (figura izquierda), y según métrica del máximo (figura derecha).

Otro resultado de investigación arroja que, en alguna medida, se ha perdido la definición de parábola como un lugar geométrico, y que el concepto queda asociado a una figura geométrica determinada (figura 1) o a una ecuación cuadrática. Esto se puede observar en el ejemplo de la entrevista presentado anteriormente, donde el estudiante E1 puede encontrar el conjunto de puntos solicitado en la pregunta 4 de la entrevista, sin embargo no lo relaciona con el concepto de parábola.

Referencias bibliográficas

Arancibia, S. y Mena, J. (2007). *Matemática para Ingeniería. Introducción al Cálculo.* Chile: Ediciones Universitarias de Valparaíso.

Asiala, M., Brown, A., Devries, D.J., Dubinsky, E., Mathews, D., Thomas, K. (1996). A framaworkfor research and curriculum development in undergraduate mathematics education. In J. Kaput, A. H. Shoenfeld, E. Dubinsky (Eds.) *Research in collegiate mathematics education.* Vol.2. Providence, RI: American Mathematical Society. P.1-32.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall, (Ed), Advanced Mathematical Thinking. Pp. 95-123. Dordrecht: Kluwer.

Stewart, J., Hernández, R. y Sanmiguel, C. (2007). *Introducción al Cálculo.* Buenos Aires, Argentina: Thomson Learning Argentina.

Krause, E. (1986). *Taxicab Geometry: An Adventure in Non-Euclidean Geometry*. New York, United States of America: Dover Publications.

Larson, R. & Hostetler, R. (2008). Pre-calculus (Seventh Edition). Boston, Massachusetts, United States of America: Houghton Mifflin Company.

Marmolejo, E., Moreno, G., Hernández, S. y Bahena, A. (2009). Construcciones geométricas: De la intuición a la formalización. El caso de las cónicas. *Acta Latinoamericana de*

Matemática Educativa, 22, 229 – 237. Recuperado de http://www.clame.org.mx/documentos/alme22.pdf.

Pérez, Y. y Arrieche, M. (2009). Análisis de un proceso de estudio sobre la elipse mediante los criterios de idoneidad didáctica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 22*, 525 – 533. Recuperado de http://www.clame.org.mx/documentos/alme22.pdf

Piaget J. & García R. (1989). Psychogenesis and the history of science (H. Feider, Trans.). New York: Columbia University Press. (Original work published 1983).

Swokowski, E. y Cole, J. (2011). *Precalculus* (12ª edition). United States of America: Grupo Cengage Learning.

LA DIFERENCIABILIDAD DE LAS FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES. UNA PROPUESTA DE TRATAMIENTO METODOLÓGICO

Pablo Ignacio Gómez Fuentes, Juan Raúl Delgado Rubí
Instituto Superior Politécnico "José A. Echeverría" Cuba
pablog@ind.cujae.edu.cu, rdelgado@ind.cujae.edu.cu

Resumen. La diferenciabilidad de funciones de varias variables y sus relaciones con otras propiedades locales no son tratadas suficientemente en los cursos de Cálculo en carreras de ingeniería. El presente trabajo recoge los resultados del análisis documental, las observaciones realizadas y la metodología empleada, así como una propuesta de tratamiento metodológico de este importante concepto que sistematiza el concepto homónimo en funciones de una variable y la construcción de un sistema de conceptos y métodos propios del estudio de las funciones de varias variables. Se revisó una vasta bibliografía de autores pertenecientes a escuelas diferentes y se clasificaron tendencias.

Palabras clave: cálculo diferencial, funciones de varias variables

Abstract. The differentiability of functions of several variables and their relationships with other local properties are not addressed enough in the Calculus courses in engineering. This paper shows the results of document analysis, observations and the methodology used as well as the proposal of a methodological treatment of this important concept to systematize the concept namesake of one variable functions and the construction of a system of concepts and own methods the study of functions of several variables. We reviewed a vast literature of authors belonging to different schools and trends were classified.

Key words: differential calculus, functions of several variables

Introducción

Desde el inicio mismo del Cálculo Infinitesimal surge el concepto de diferencial, el cual constituye un elemento que permite *linealizar,* aproximar errores y hacer cálculos aproximados empleando las nuevas técnicas y métodos de estas novísimas matemáticas de finales del siglo XVII.

Ya en 1755, en su texto sobre Cálculo Diferencial, Leonhard Euler enuncia claramente la regla para calcular el diferencial de una función de dos variables, en este trabajo el cálculo de las derivadas parciales no era más que un paso intermedio hacia su objetivo principal: el cálculo del diferencial.

Durante el siglo XVIII y principios del XIX la forma de trabajar con los diferenciales de funciones de varias variables continuó siendo la misma utilizada por Euler.

Solo a fines del siglo XIX, cuando aparecen ejemplos de funciones no clasificables entre las que hoy denominamos funciones elementales, se produce un cuestionamiento inevitable a este tratamiento "por separado" de cada una de las variables.

En sus investigaciones en torno a las funciones reales de varias variables, el matemático alemán H. A. Schwartz (1843-1921) propone una función que no es continua en $(0,0)$, pero que posee derivadas parciales en ese punto, cuestión que contrastaba fuertemente con las propiedades conocidas para las funciones de una variable. A él se atribuye también la formalización del teorema de las derivadas mixtas o cruzadas.

Es lógico pensar que si la ciencia matemática tardó centurias para desentrañar las particularidades de un concepto que se muestra esquivo a la comprensión y a su ubicación en un sistema conceptual mayor, el proceso de enseñanza-aprendizaje del mismo se tornará no menos dificultoso.

Los autores de este trabajo, profesores con más de veinte años de experiencia docente en la enseñanza de la Matemática en carreras de ingeniería, tras debates, intercambios de ideas y experiencias con otros colegas, análisis de protocolos de exámenes y de clases e intercambio con sus estudiantes, coincidieron en que era una *necesidad* cambiar el tratamiento metodológico que tradicionalmente se hace en los cursos de Cálculo de varias variables en carreras de ingeniería.

Ante la investigación resurge entonces la antigua dicotomía Análisis Matemático versus Cálculo y el punto de vista de si realmente es necesario que en carreras de ingeniería se profundice y dedique más tiempo que el habitual al estudio de este tema.

Se decidió entonces, tras la *situación problemática* planteada, comenzar revisando lo hecho por otros autores, entre ellos lo plasmado en los más “populares” libros de texto usados en carreras de ingeniería en varios países, aunque sin ánimo de agotar el universo.

En este trabajo no se reporta completamente la investigación y sus resultados, sino una propuesta de tratamiento metodológico del concepto de diferenciabilidad de funciones de varias variables que los autores de la misma, tras su experiencia como docentes y apoyándose en los postulados del enfoque histórico-cultural y en los presupuestos de la denominada Metodología de la Enseñanza de la Matemática en Cuba, actualmente someten a investigación en el aula.

Razones que sustentan la necesidad y la factibilidad de la propuesta

Era importante primero determinar la *necesidad* de concebir un tratamiento metodológico diferente para la diferenciabilidad y además la *posibilidad* de hacerlo.

De dicho análisis resultaron los siguientes argumentos:

- El concepto de diferenciabilidad ocupa el centro del sistema conceptual del Cálculo Diferencial de funciones de varias variables. La inmensa mayoría de las aplicaciones de este cuerpo matemático a problemas de ingeniería son posibles, en virtud de que los procesos y magnitudes se modelan como funciones diferenciables en un punto o en un abierto. Cierto es que en un gran número de casos se satisfacen exigencias mayores, como la existencia de derivadas parciales continuas, pero más allá del carácter suficiente de esta condición, la quintaesencia del problema está en la diferenciabilidad y el comportamiento *cuasilineal* del modelo.
- La posibilidad de hacer un abordaje sistémico de dicho concepto como centro del sistema conceptual principal del Cálculo Diferencial, el cual involucra a los conceptos de límite, continuidad, derivada parcial, derivada direccional y gradiente.
- La posibilidad de promover deliberadamente conflictos cognoscitivos en el estudiante a partir de discutir las limitaciones del concepto de derivada, en tanto está asociado a un análisis direccional y en consecuencia parcializado, del comportamiento local de una función; limitación que no surge en las funciones de una variable y que no revela por tanto la diferencia entre diferenciabilidad y "derivabilidad" o existencia de derivada.
- La posibilidad de reforzar el método de análisis parcial de comportamientos locales en las funciones de varias variables, ya abordado por primera vez en el estudio de los límites de estas funciones, al menos en la práctica áulica de los autores, también débilmente tratado en los cursos tradicionales de Cálculo, en la esperanza de que el estudiante lo incorpore a su pensamiento matemático.
- La posibilidad de contribuir a la formación del pensamiento lógico del estudiante, al desarrollar la habilidad matemática Identificar (Hernández, 1989) y utilizar cadenas de inferencias lógicas, uso de contrarrecíprocos y emplear el lenguaje de *condición suficiente*, *necesaria* y *condición necesaria y suficiente* en las múltiples interrelaciones entre los conceptos del sistema.
- La posibilidad de que los estudiantes enriquezcan sustantivamente las imágenes de los conceptos involucrados en el sistema, más allá del aprendizaje reproductivo de las definiciones de los mismos.

Marco teórico de la investigación y metodología empleada

La investigación se sustenta en los presupuestos del enfoque histórico-cultural (Vigotsky y seguidores) como marco teórico psicológico y dentro de él, en los de la Teoría de la Actividad, cultivada inicialmente en la extinta Unión Soviética (A. Leóntiev y seguidores) y enriquecida, en su aplicación didáctica, en numerosas investigaciones en Cuba, entre ellas las relacionadas con la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en el nivel superior, a saber: Hernández, 1989; Rodríguez, 1991; Fraga, 1991; Martínez, 1993; Calderón, 1996; Delgado, 1999 entre otras, así como en un sinnúmeros de tesis de maestrías.

Han sido tomados en cuenta, entre sus principales presupuestos, los siguientes:

- la formación de conceptos, la cual no se produce al margen de la actividad del sujeto, sino inmersa en ella, transformándose cualitativamente con ella, enriqueciéndose, adquiriendo significado y sentido, al incluirse en un sistema conceptual y una base de orientación generalizada y completa.
- la estructuración sistémica de los contenidos de estudio (conceptos, teoremas y procedimientos) en el diseño de las situaciones didácticas, propician la estructuración sistémica del conocimiento subyacente en él.
- la formación y desarrollo de habilidades generales matemáticas favorece la asimilación de conceptos y de procedimientos generales, característicos de quienes hacen bien las matemáticas.
- la formación de bases de orientación generalizadas y completas para la ejecución y control de los procedimientos (acciones), entre los que se destaca con especial importancia la identificación de conceptos, es imprescindible para alcanzar elevados niveles de generalización, reflexión y solidez en los conocimientos asimilados.

Puede encontrarse más información sobre estos enfoques teóricos en Hernández, 1998 y en Delgado, 1999 y 2003.

En la propuesta se asumieron los principios didácticos de asequibilidad, de visualización, de sistematización y del carácter científico de la enseñanza, así como las exigencias didácticas en el tratamiento metodológico de los conceptos y sus definiciones que dimanan de esta teoría.

Durante la investigación se empleó el método de análisis documental para diagnosticar el estado (coincidencias, suficiencia y carácter sistémico) del tratamiento metodológico del concepto de diferenciabilidad de funciones de varias variables en prestigiosos autores de libros de textos de Cálculo para ingeniería usados en distintos países.

En la elaboración de la propuesta se utilizaron los métodos teóricos de análisis y síntesis, el método sistémico y de modelación.

La investigación se encuentra en los estadios iniciales, por lo que no se ofrecen resultados de mediciones sobre el efecto causado por la innovación didáctica en el tratamiento de este sistema conceptual.

Propuesta de tratamiento metodológico

El concepto de diferenciabilidad es un concepto científico, en el sentido de Vigotsky y no evoca directamente a ningún concepto espontáneo o cotidiano con el cual el estudiante pueda establecer algún nexo y tratarlo de incorporar a un sistema anterior que posea.

Por otra parte, el concepto de diferenciabilidad de funciones de una variable está débilmente formado en la mayoría de los estudiantes y no es distinguido del concepto de derivabilidad o existencia de derivada.

Por lo anterior y debido a las características de complejidad cognoscitiva del concepto de diferenciabilidad de funciones de varias variables, se decidió utilizar el principio inductivo para la construcción del mismo, o sea de su imagen y de su definición, siguiendo la distinción que hacen acertadamente Tall y Vinner (1981).

1. Para el *aseguramiento del nivel de partida* y poder promover un aprendizaje significativo (en el sentido de Ausubel) del nuevo concepto, se comienza reforzando lo estudiado sobre el concepto de diferenciabilidad de funciones de una variable.

   Se discute en torno a los aspectos más relevante del concepto, a saber:

$$\Delta f(a;\Delta x)=f(a+\Delta x)-f(a)=\underbrace{f'(a)\Delta x}_{\substack{\text{parte lineal}\\ \text{respecto a } \Delta x}}+\underbrace{\varphi(\Delta x)}_{\substack{\text{error de}\\ \text{interpolación}}}\ \text{donde}\ \lim_{\Delta x\to 0}\varphi(\Delta_x)=0$$

$$\Delta f(a;\Delta x)=f(a+\Delta x)-f(a)\approx df(a;\Delta x)$$

La aproximación anterior, desde el punto de vista geométrico, equivale a la sustitución de una "pequeña" porción de la curva $y = f(x)$, en torno al punto a, por una porción de su recta tangente en dicho punto $y = f(a) + f'(a)(x-a)$.

2. Para inducir al nuevo concepto, se provoca la idea de la *extensión del concepto* de diferenciabilidad de funciones de una variable al de varias variables, lo que parece natural, y "descubrir" así sus limitaciones a través de ejemplos apropiados.

a) La discusión se enfoca desde un *acercamiento geométrico*, para tributar a formar la imagen del concepto a partir del principio de visualización.

b) Se presentan ejemplos que comienzan a revelar las *limitaciones* de los conceptos de derivadas de las funciones de varias variables, a saber:

Ejemplo 1:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & si \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

f es continua en (0,0) y las derivadas parciales existen en (0,0) y ambas, incluso, tienen valor 0.

Sin embargo, en una vecindad de (0,0) la función no es "aproximable" por el plano $z = 0$, o sea, la superficie $z=f(x, y)$ no posee plano tangente en el punto.

Ejemplo 2:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & si \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Esta función posee en (0,0) derivada direccional en cualquier dirección $\vec{u}\in\mathbb{R}^2$, sin embargo, f no es continua en (0,0).

Con lo que se concluye que los conceptos de derivada parcial y de derivada direccional son limitados si se desea hacer un estudio más completo del comportamiento local de la función.

El estudiante debe percatarse de la ruptura entre ambos comportamientos, lo cual permitiría la motivación por formular la definición de un concepto que supere las limitaciones de las derivadas. Tal concepto es el de diferenciabilidad de una función en un punto.

c) Introducción de una definición de *diferenciabilidad en un punto* que abarque tanto el caso de funciones reales de una como de varias variables, por analogía con la definición estudiada para funciones de una variable. Esto tributa a la sistematización del concepto y a su generalización.

   Se discute en torno a la nueva definición:

   - lo común entre los conceptos homónimos de funciones de una y de varias variables,
   - la dificultad que se introduce con el cálculo del límite del error relativo de interpolación lineal, para probar que es un infinitesimal.
   - la independencia de este concepto de la norma que se esté utilizando en el dominio de la función.
   - la extensión de la definición a puntos de la frontera del dominio.

d) Introducción de la definición de *diferenciabilidad en un conjunto* de funciones de varias variables.

e) *Construcción del sistema conceptual* en torno al concepto de diferenciabilidad.

   Las *condiciones necesarias.*

   Se introducen las relaciones del nuevo concepto con los demás conceptos estudiados y con ello comienzan a establecerse las condiciones necesarias de diferenciabilidad.

A saber, las relaciones: *diferenciabilidad→continuidad* y *diferenciabilidad→existencia de derivadas* (parciales y direccionales)

Relación diferenciabilidad→continuidad

Se discute en torno a que:

1. El recíproco del teorema no es cierto, al igual que sucede en el caso de las funciones de una variable.
2. Se recuerda el contraejemplo de la función *f*(*x*)=|*x*|, en el caso de las funciones de una variable. Por analogía surge la idea de la función $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, que es un caso particular de la más general $f(x_1,\dots,x_n)=\sqrt{{x_1}^2+\cdots+{x_n}^2}$. La imagen geométrica del punto anguloso contribuye a pensar en la no suavidad de la superficie y por ende la no diferenciabilidad de la función, a pesar de su continuidad.
3. Se enfatiza en la relación *no continuidad→no diferenciabilidad* y lo necesario del trabajo con el contrarrecíproco del teorema.

Relación diferenciabilidad→existencia de derivadas (parciales y direccionales)

Se puede utilizar nuevamente la propia función del ejemplo1, en la cual se tiene que $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ y sin embargo *f* no es diferenciable en (0,0).

Esto significa que en ocasiones pudiéramos plantear la combinación lineal de las derivadas parciales y los incrementos de las variables independientes y a dicha expresión no la podríamos identificar con el diferencial de la función ya que la misma no es diferenciable en el punto.

Las condiciones suficientes

Se introduce la condición de suficiencia que exige la existencia de las funciones derivadas parciales en un entorno rectangular del punto y su continuidad en el propio punto. Se discute en torno a que aunque en el teorema se hace referencia a una región o entorno rectangular, el punto siempre estará contenido en un conjunto abierto.

Se presentan y resuelven ejemplos en que está presente la condición suficiente.

No deben faltar ejemplos en que se satisfagan las condiciones necesarias, pero no las premisas de la condición suficiente. Un caso tal es el siguiente:

Ejemplo 3:

$$f(x,y) \doteq \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Esta función es continua, posee derivadas direccionales en la dirección de cualquier vector del plano en el punto (0,0) y en particular las dos derivadas parciales las cuales existen y son iguales a cero en (0,0). Se cumplen todas las condiciones necesarias estudiadas.

Adicionalmente, las funciones derivadas parciales son continuas en cualquier vecindad reducida del punto (0,0), pero al menos $f_x(x, y)$ no es continua en (0,0), pues no posee límite en (0,0). Pero el hecho de que la función $f_x(x, y)$ no sea continua en el punto, no implica que la función $f(x, y)$ no sea diferenciable, pues esa condición es solamente suficiente.

En este caso, la función $f_y(x, y)$, es continua en (0,0), pero en virtud del teorema estudiado nada se puede concluir. Debe recurrirse a la definición de diferenciabilidad de la función, lo cual entraña una mayor dificultad. Al recurrirse a ella, se demuestra que:

$$\lim_{\Delta\bar{x}\to\bar{0}} \frac{\varphi(\Delta\bar{x})}{\|\Delta\bar{x}\|} = 0$$

y por tanto f es diferenciable en (0,0).

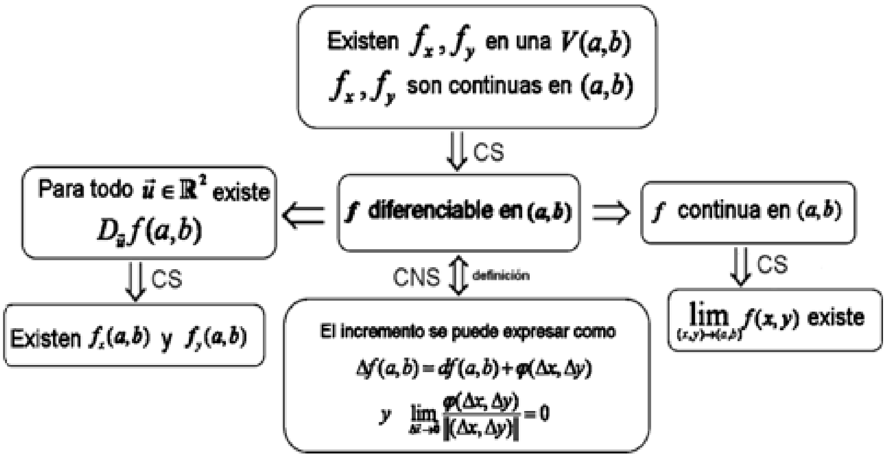
Cuando en la investigación se llegó a este punto, existió el cuestionamiento de si se estaba obligado a utilizar como única condición suficiente la que da el teorema anterior que es bastante restrictiva y se decidió hacer una revisión bibliográfica para conocer de los enfoques de diferentes escuelas, obteniéndose el siguiente resultado:

- El grupo más numeroso de autores, entre los textos revisados, abogan por la exigencia de que: *"las derivadas parciales existan en una vecindad del punto y que sean continuas en el punto"*. A este grupo pertenecen los representantes de la "escuela soviética" L.D. Kudriávtsev (1983), la cuarteta Krasnov, Kiseliov, Makarenko, y Shikin (1990) y el dúo Illín y Pozniak (1991). También están en este grupo los cubanos Rodríguez, García y Echevarría (1985) y autores de la "escuela norteamericana" como Swokowsky (1989) y Stewart (2002).
- El grupo que exige que: *"las derivadas parciales existan y sean continuas en toda la vecindad del punto"*. A este grupo pertenece Fernández Muñiz (Fernández y De la Torre, 1983,1984). También se pueden considerar a los autores Fraguela (1987) y el dúo Kolmogórov y Fomín, que abordan la relación entre los conceptos (más generales) de diferencial débil y diferencial fuerte en Análisis Funcional.
- El grupo que exige que: *"las derivadas parciales existan y sean continuas en el punto"*. A este grupo pertenecen Apostol (1973) y el binomio soviético Bugrov y Nikolski 1985).

- El grupo que exige que: *"las derivadas parciales existan en el punto y que una de ellas exista en la vecindad y sea continua en el punto"*. Con estas características solo se encontró el teorema dado por Pastor, Calleja y Trejo en su Análisis Matemático (1963, Vol. II. 131-132).

Si se hubiera seguido este último y menos exigente teorema, se hubiera podido afirmar, sin tener que utilizar la definición de diferenciabilidad, que la función del ejemplo 3 era diferenciable en (0,0).

Como parte del tratamiento metodológico y en la medida que se van abordando los distintos teoremas que refrendan esas relaciones, se exhorta a los estudiantes a construir el siguiente esquema (u otro similar) de inferencias lógicas que sirve de mapa conceptual del sistema de conceptos asociados.



Esquema: Relaciones de la diferenciabilidad y otras propiedades locales.

El recorrido de este esquema debe reforzar la idea de que: moviéndose a favor de las flechas (condicionales lógicas) se puede realizar una afirmación que enlaza los conceptos asociados, y en consecuencia, resulta una cadena de inferencias lógicas, pues se establecen condiciones suficientes de existencia y, moviéndose en contra de las flechas, se utilizan los contrarrecíprocos de dichos teoremas y se niega la existencia debido al incumplimiento de condiciones necesarias.

Los esquemas construidos por los estudiantes se contrastan y perfeccionan, hasta consensuar uno similar al anterior. El trabajo con el mismo se realiza a través de un sistema de ejercicios con funciones que aborden todas las situaciones teóricamente posibles. Las mediciones preliminares sobre el aprendizaje del concepto de diferenciabilidad apuntan a que existe en los estudiantes una mejor apropiación de este concepto, no quedándose en la mera reproducción de la definición, sino en la conformación de una imagen del concepto cada vez más completa y estructurada.

Un análisis más detallado del tratamiento metodológico seguido, del desarrollo de ejemplos y recomendaciones a profesores, puede encontrarse en un reciente trabajo de los autores (Gómez y Delgado, 2010) con motivo de la capacitación y actualización de docentes.

Conclusiones

De manera sumaria se expresan las siguientes conclusiones:

El tratamiento metodológico de este concepto, más allá de dirigirse al logro de fines utilitarios, debe enfocarse hacia la formación de un sistema conceptual bastante complejo y rico, donde aparecen rupturas con conceptos anteriores y el empleo de métodos de estudio nuevos para el estudiante (el análisis parcial, por ejemplo) no presentes en asignaturas anteriores, persiguiendo el logro de fines educativos desde el punto de vista del pensamiento matemático.

Lo reportado en este artículo son los primeros avances de una investigación, que explora diferentes maneras para el tratamiento metodológico de este y otros conceptos relacionados y se propone indagar por qué existe una dispersión tan grande en la preferencia de diferentes autores por uno u otro criterio de suficiencia.

Referencias bibliográficas

Apostol, T. (1973). *Calculus*. Barcelona: Editorial Reverté.

Bugrov, Y. & Nikolski, S. (1985). *Matemáticas Superiores*. Moscú: Editorial Mir.

Calderón, R. (1996). *La enseñanza del Cálculo Integral. Una alternativa basada en el enfoque histórico-cultural y de la actividad*. Tesis de Doctorado no publicada. CEPES-Universidad de la Habana. La Habana, Cuba.

Delgado, J.R. (1999). *La enseñanza de la resolución de problemas. Dos aspectos fundamentales para lograr su eficacia: la estructuración sistémica del contenido de estudio y el desarrollo de las habilidades generales matemáticas*. Tesis de Doctorado no publicada, CEPES-Universidad de la Habana. La Habana, Cuba.

Delgado, J.R. (2003). La enseñanza de la matemática desde una óptica vigotskiana. En J. Delgado (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 16 (3),* 34-46. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Fernández, J. y De la Torre, G. (1983). *Análisis Matemático III.* La Habana: Pueblo y Educación.

Fernández, J. y De la Torre, G. (1984) *Análisis Matemático IV.* La Habana: Pueblo y Educación.

Fraga, R. (1991). *La sistematización de la Trigonometría en el nivel medio superior en relación con las exigencias del nivel superior*. Tesis Doctoral no publicada. CEPES-Universidad de la Habana. La Habana, Cuba.

Fraguela, A. (1987). *Análisis Matemático en espacios métricos*. La Habana: Pueblo y Educación.

Gómez, P. y Delgado, J.R. (2010). *Guía de Estudio de Complementos de Cálculo Diferencial de funciones de varias variables*. La Habana: CREA-Cujae.

Hernández, H. (1989). *El perfeccionamiento de la enseñanza de la Matemática en la Enseñanza Superior cubana. Experiencia en el Algebra Lineal*. Tesis Doctoral no publicada. CEPES-Universidad de la Habana. La Habana, Cuba.

Hernández, H. (1998). Hacia la calidad. En C. Bixio (Ed.) *Cuestiones de didáctica de la Matemática. Conceptos y procedimientos en la Educación Polimodal y Superior.* Serie Educación. (pp.54-64). Rosario: Homo Sapiens Ediciones.

Illín, V. y Pozniak, E. (1991). Fundamentos del Análisis Matemático. Tomo 2.Moscú: Progreso.

Kolmogórov, A.N. y Fomín, S.V. (1975). *Elementos de la teoría de las funciones y del análisis funcional*. Moscú: Editorial MIR.

Krasnov, M., Kiseliov, A., Makarenko, G. y Shikin, E. (1990). *Curso de Matemáticas Superiores para ingenieros*. Tomo 1. Capítulo XI. Epígrafe 2. pp:615-616. Moscú: Editorial MIR.

Kudriátsev, L.D. (1983). *Curso de Análisis Matemático.* Tomos I y II. Moscú: Editorial Mir.

Larson, R.E., Hosttler, R. y Edwards, B. (1996). *Cálculo*. Volumen 2, pp.1036-1056. Quinta Edición. San Juan: McGraw-Hill.

Martínez. F. (1993). *Una variante de Sistema Didáctico para la enseñanza del Cálculo Diferencial*. Tesis de Doctorado no publicada. CEPES-Universidad de la Habana. La Habana, Cuba.

Pastor, J. R., Calleja, P. P. y Trejo, C.A. (1963). *Análisis Matemático*. Tomo 2, La Habana: Editorial Revolucionaria.

Rodríguez, R., García, J. y Echevarría, P. (1985). *Cálculo Diferencial de Funciones de Varias Variables*. Tomos I. La Habana: Pueblo y Educación.

Rodríguez, T. (1991). *Enfoque sistémico en la dirección de la asimilación de los conceptos básicos de la disciplina Matemática Superior*. Tesis Doctoral no publicada. CEPES-Universidad de la Habana. La Habana, Cuba.

Stewart, J. (2002). *Cálculo. Trascendentes tempranas*. BA: International Thomson Editors.

Swokowski, E. (1989). *Cálculo con Geometría Analítica*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics 12(2)*. 151-169.

ESTUDIO DE LA FUNCIÓN LINEAL EN ESTUDIANTES CON DÉFICIT AUDITIVO: ¿UN PROBLEMA DE TIEMPO O RITMO DE APRENDIZAJE?

Giselle Mora Ocares, Marcela Parraguez González
Pontifica Universidad Católica de Valparaíso Chile
profesoragisellemora@hotmail.com, marcela.parraguez@ucv.cl

Resumen. La investigación indaga en cómo estudiantes con déficit auditivo construyen el concepto función lineal, considerando como marco teórico la teoría APOE con una leve variación, al considerar el conocimiento del cotidiano en una nueva construcción mental que hemos definido como de las preacciones. Para lograr tal objetivo, y considerando el marco metodológico que propone la teoría APOE se presenta una descomposición genética hipotética, considerando en esta no solo conceptos sino también prácticas pedagógicas cotidianas, que ayudan a construir las primeras nociones de los conceptos, que llamamos preacciones. Resultado de la investigación es la documentación de la descomposición genética a través de la aplicación de instrumentos a 4 alumnos de enseñanza media (14 a 18 años de edad) con déficit auditivo.

Palabras clave: función lineal, teoría APOE, cotidiano, déficit auditivo

Abstract. The research explores how students with hearing impairments construct the linear function concept, considering the APOS theory as the theoretical framework with a slight variation. To wit, the everyday knowledge in a new mental construction, which we have defined as the pre-actions. To achieve this objective, in light of the methodological framework of APOS theory, an hypothetical genetic decomposition is proposed by considering not only concepts, but also everyday teaching practices, that help in building the first notions of concepts, called pre-actions. One outcome of the investigation is related with the documentation of the genetic decomposition using the application of tools to 4 high school students with hearing impairments.

Key words: linear function, APOS theory, daily, hearing deficit

Introducción

Nuestra investigación se sitúa en la construcción del concepto matemático –función lineal– en personas sordas, bajo la mirada de la teoría APOE (Dubinsky, 1991) y con una leve variación al considerar el conocimiento cotidiano que definen Mazzitelli & Aparicio (2010) en una nueva construcción mental. La investigación busca indagar cómo estudiantes con déficit auditivo logran el aprendizaje del concepto matemático –función lineal–, noción que está ligada al álgebra, y que generalmente requiere para su construcción de dos elementos fundamentales: por un lado, un alto grado de abstracción y por otro un lenguaje matemático propio de esta rama de las matemáticas (Serrano, 1995).

La pregunta que guía la investigación es: ¿cómo construyen el concepto función lineal, estudiantes sordos, bajo la mirada de la Teoría APOE? Para dar respuesta a ella nos propusimos los siguientes objetivos:

Objetivos de investigación

- Identificar las construcciones mentales de los alumnos sordos asociadas a la función lineal
- Identificar las prácticas sociales-pedagógicas que ayudan a la apropiación de nociones de conceptos asociados a esta investigación.

Antecedentes

Diversas investigaciones han indagado en las concepciones de los estudiantes acerca de la función lineal, pero ninguna de ellas considera el caso de los estudiantes sordos, siendo ésta la principal preocupación de nuestra investigación. Tales investigaciones han sido dadas a conocer a la comunidad en diferentes trabajos (García y Montiel, 2008; Sierpinska, 1992). Estos autores concluyen que los estudiantes tienden a representar la función lineal como una fórmula y como una combinación de variables gráficas en la que no se visibilizan ni valoran los atributos propios de la función, como por ejemplo, considerar la función como una conjunción de elementos relacionados por medio de variables y que deben cumplir ciertas características específicas.

Por otro lado, en 1995, Serrano reportó que en estricto rigor, los estudiantes con déficit auditivo no debiesen tener problemas en adquirir este concepto matemático, si consideramos a la sordera como un problema fisiológico y no cognitivo; y más aún, dependiendo del nivel de sordera el educando sólo necesitaría más tiempo para la adquisición de este concepto. Debido a que álgebra presenta un problema de aprendizaje ligado más bien al lenguaje propio de esta disciplina, –siendo esta la principal dificultad para el docente–; la problemática se traslada entonces a las dificultades asociadas a la apropiación del lenguaje técnico-matemático que posee diferentes aristas. Serrano además señala que el álgebra presenta un lenguaje propio, siendo este otra de las dificultades en la adquisición de este concepto para las personas sordas, aludiendo que cualquier contenido que implique el uso de lenguaje excesivo generará un obstáculo para el aprendizaje, para el caso de alumnos con sordera o hipoacusia en cualquiera de sus niveles, por su falta de lenguaje oral, el nivel de abstracción y señas específicas limitadas en el área de la matemática, dificulta aún más el aprendizaje en forma general de esta disciplina.

Referente teórico y metodología

Teoría APOE

Teoría de carácter cognitiva recibe su nombre debido a sus componentes Acción, Proceso, Objeto y Esquema. La Teoría APOE reflexiona sobre los conceptos desde la propia matemática considerando distintos procesos en la construcción del conocimiento:

> El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a las situaciones matemáticas problemáticas reflexionando sobre ellas en un contexto social y construyendo o reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos y organizando en esquemas con el fin de manejar las situaciones (Dubinsky, 1996, p. 33).

Las construcciones mentales de la teoría APOE, son acción, proceso, objeto y esquema. Las acciones son construidas por respuestas repetitivas a un estímulo; los procesos son construidos ya sea al interiorizar acciones o al transformar procesos existentes; los objetos son construidos al encapsular los procesos; y, en la desencapsulación de un objeto, los únicos procesos que un individuo puede obtener son los procesos que fueron encapsulados para construir este objeto.

Considerando la información de los antecedentes, se decidió interpretar bajo el alero de la teoría APOE el conocimiento cotidiano, contemplando una construcción mental previa, denominada preacciones, la cual se logra asociando labores de la vida diaria con la descripción funcional básica, de las nociones matemáticas que subyacen alrededor del concepto función lineal y, así asociar prácticas cotidianas de los estudiantes con los conceptos asociadas a ella, como por ejemplo: asociar la idea de trabajo con la noción de función; para brindar de esta manera un acercamiento previo a una matemática que ellos conciben desconectada, es decir, carentes de conectivos, por su condición auditiva y, más aún, dando las instancias necesarias para que los alumnos puedan construir la señas específicas que ello requiere.

La teoría APOE en su parte metodológica proporciona un ciclo de investigación, provisto de tres componentes: una descomposición genética, un diseño y aplicación de instrumentos, y un análisis y verificación de los datos. (Figura 1).

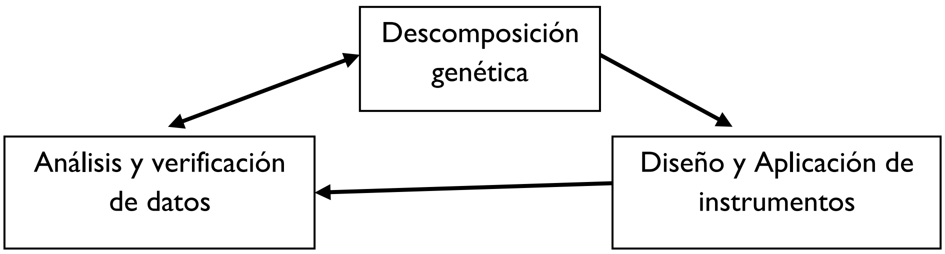


Figura 1. Ciclo de Investigación que proporciona APOE.

En la descomposición genética se evidencian las construcciones y mecanismos mentales de los conceptos involucrados en la investigación, para ir estructurando un camino viable que permita la construcción del objeto de estudio.

La descomposición genética en nuestra investigación juega un rol muy importante no solo por los objetivos propuestos, sino porque estamos considerando una construcción previa no considerara en la teoría APOE, denominada pre-acción y es donde justamente entra en consideración el conocimiento cotidiano, como una etapa previa donde los estudiantes construyen nociones de los conceptos involucrados en la descomposición genética.

Del conocimiento cotidiano al conocimiento Matemático

El conocimiento cotidiano aparece con distintos significados en la literatura como lo es contextualización, ideas previas, conocimiento intuitivo, etc., también es usado en distintas ramas de la enseñanza de las ciencias, en el caso de la matemática es tomado y usado por la socioepistemología en didáctica de la matemática, pero en esta investigación el cotidiano estará mirado desde la didáctica de la ciencias, según lo expuesto por Mazzitelli y Aparicio (2010) y por Pozo y Gómez (1998).

Mazzitelli y Aparicio (2010) proponen que uno de los problemas relevantes en la enseñanza de las ciencias es la desconexión existente entre el conocimiento de los alumnos y el sentido que se le da al conocimiento, mostrando símbolos, esquemas y conceptos abstractos alejados del mundo real. Así entenderemos el conocimiento cotidiano como aquel conocimiento construido desde el contexto de la vida cotidiana. Tal como lo señala Mazzitelli y Aparicio (2010):

> Si consideramos que el hecho educativo no se produce en el vacío sino en un contexto interactivo que involucra distintos actores, comprenderemos que el aprendizaje de las Ciencias implica procesos y acciones que superan el plano individual. Dicho de otro modo, los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las Ciencias son, también, fenómenos sociales en los que confluyen e interaccionan múltiples factores. (Mazzitelli y Aparicio, 2010, p. 637)

Berger y Luckmann (citados por Mazzitelli y Aparicio, 2010) desde una mirada Psicosocial consideran al cotidiano como un proceso de sociabilización, surgiendo este conocimiento como un aval empírico que se organiza sistemáticamente. Estos autores señalan que la realidad en la niñez es natural, pero las realidades posteriores son artificiales por ello la importancia de hacer familiares los contenidos de enseñanza volviéndolos vividos y relevantes.

Prerrequisitos y articulación del conocimiento cotidiano y la teoría APOE

Hay algunos prerrequisitos de nociones matemáticas que son considerados esenciales para que los estudiantes sordos comiencen el aprendizaje de la función lineal en el nivel de enseñanza considerado en esta investigación:

- Comprender la correspondencia entre dos conjuntos, estableciendo relaciones entre ellos.
- Comprender algunas nociones básicas de conjunto; es decir, algunas operaciones con subconjuntos y su notación, y la utilización de la idea de pertenencia y labor desempeñada para establecer relaciones entre dos conjuntos.
- Conocer y aplicar adecuadamente las propiedades de función, interpretándola desde sus usos.
- Familiarizarse con procedimientos algebraicos básicos, incluyendo la manipulación de expresiones polinomiales de primer grado.
- Comprender el significado de implicaciones falsas y verdaderas, así como las implicaciones recíprocas y equivalentes.
- Comprender el concepto de función en un trabajo de la vida real y ser capaz de esbozar gráficos de algunas de ellas.

Descomposición genética propuesta

Cabe destacar que el diseño de la descomposición genética hipotética que presentamos del concepto función lineal (Figura 2), está sustentada en tres pilares matemáticos (variable, relaciones, relación funcional), así como también en *las prácticas* cotidianas que construyen las nociones que subyacen alrededor del concepto función lineal.

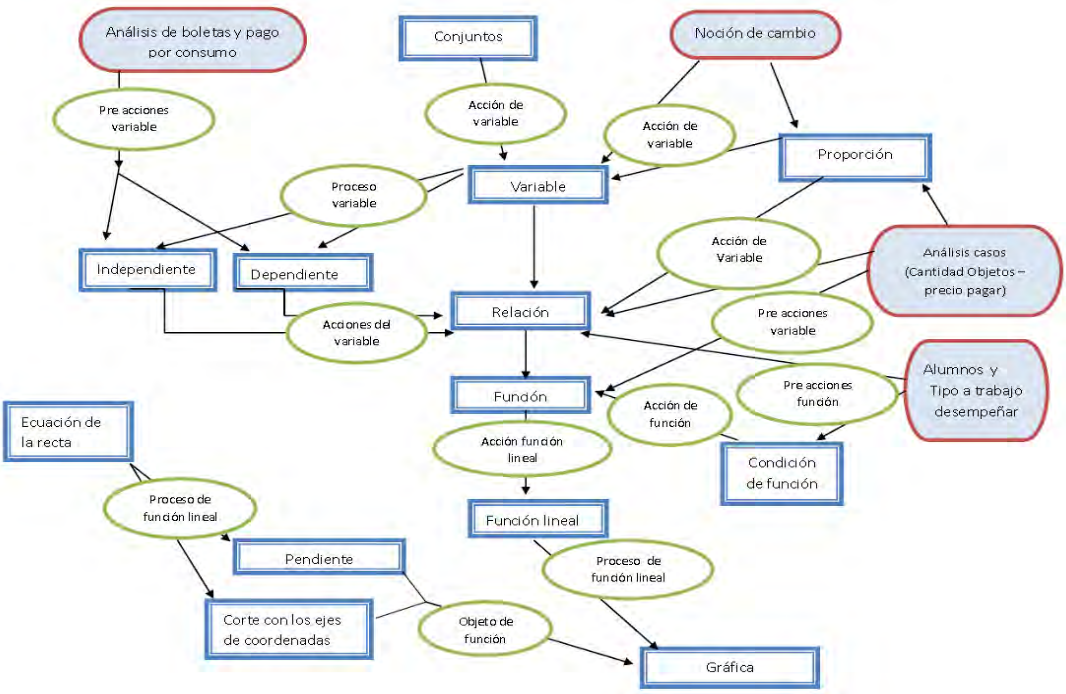


Figura 2. Análisis y Descomposición Genética hipotética del Concepto función Lineal.

Decimos *las prácticas* porque el universo de estudio son alumnos con necesidades educativas especiales, cuya discapacidad auditiva les priva de la primera experiencia de la matemática con sus códigos orales propios; sin embargo, esa misma discapacidad privilegia una instancia exploratoria en que la matemática adquiere sentido y despierta el interés a través de las prácticas que se hace de ella. Por eso consideramos el conocimiento del **c**otidiano para visualizar y determinar prácticas pedagógicas que ayuden a lograr la construcción de las nociones relacionadas con la construcción del concepto función lineal en estudiantes sordos.

Para indagar con profundidad en la construcción que hacen los sordos de la función lineal, es necesario agregar la construcción mental de pre-acción, pues este tipo de construcciones no están propuestas ni definidas en la teoría APOE.

Decimos que un estudiante sordo realiza una pre-acción cuando en sus argumentaciones emplea manipulaciones aleatorias, transformando conceptos relacionados con la función lineal a la vida cotidiana. Por ejemplo trata de abordar la noción de función de la siguiente forma: *para el alumnado sordo la palabra "función" está asociada al rol que él desempeña o al trabajo a desarrollar, por ello se propone un trabajo desde el significado de los alumnos adecuando la matemática en su contexto y desde este, trabajar el concepto matemático para que este adquiera el significado adecuado, con sus propiedades y que este no sea impuesto por el docente o por la propia matemática.*

La teoría APOE al considerar que "*El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a las situaciones matemáticas problemáticas reflexionando sobre ellas en un contexto social*" no contradice el hecho de agregar otra construcción mental que estamos llamando "preacción", la cual nos permitirá explicar y documentar de mejor manera la construcción del concepto función lineal, desde el conocimiento cotidiano del sordo al conocimiento matemático; para así avanzar de mejor manera hacia la construcción de un camino viable que modele cómo los estudiantes sordos construyen el concepto de función lineal.

Análisis y verificación de datos

Se diseñaron y aplicaron cuestionarios (de 8 preguntas) y entrevistas (de 6 preguntas) cada uno de una duración de 90 minutos, con el fin de poder documentar cada una de las construcciones mentales dispuestas en la descomposición genética. Cabe aclarar que es la totalidad del instrumento (cuestionario y entrevista) el que da cuenta de nuestra descomposición genética.

El instrumento se aplicó a 4 alumnos del Centro de Estudios y Capacitación para Sordos de Valparaíso (CECASOV), 3 de ellos pertenecientes al nivel de tercero medio y uno de cuarto medio. Los datos recogidos, permiten analizar la viabilidad de la descomposición genética hipotética propuesta.

Conclusiones y reflexiones

En relación a las construcciones mentales

Con respecto a las construcciones mentales que los alumnos poseen en relación a la función lineal, podemos evidenciar que a través de la construcción mental de las preacciones los estudiantes sordos que entrevistamos logran el paso de un conocimiento cotidiano a un conocimiento matemático de la función en estudio.

Creemos que el haber considerado estos dos referentes teóricos –APOE y cotidiano– en la investigación nos permite evidenciar y responder a nuestra pregunta de investigación planteada inicialmente, de cómo las personas sordas logran construir el conocimiento matemático especifico de la función lineal, ya que al considerar el conocimiento cotidiano hace la matemática cercana y contingente a la realidad de los estudiantes, permitiendo crear nociones de los conceptos y por sobre todo permitir que aparezcan las primeras señas matemáticas de los conceptos trabajados, que surgen desde los propios alumnos y no impuestas desde la matemática y por la o el docente a cargo.

Con respecto al lenguaje

Los resultados obtenidos en esta investigación ratifican también los obtenidos por Van Lamoen (2011), que es sumamente necesario trabajar no solo desde el subsector del lenguaje el vocabulario matemático, sino que desde la matemática, ya que juega un rol fundamental para poder expresar de mejor maneras respuestas, favorecer la comprensión lectora matemática, y sobre todo para soslayar la dificultad que se mostró en el instrumento al tratar de entender lo que se pedía en las preguntas, ya que al ser explicado en señas por una de las investigadoras el alumno comprende que es lo que se pedía resolver, siendo este no un obstáculo desde la matemática sino más bien desde el lenguaje.

Si bien es cierto que esta es una de las principales diferencias que presentaría este tipo de alumnado con respecto a sus pares oyentes, consideramos que este punto es fundamental en el aprendizaje de cualquier persona ya que en una primera instancia es lo que nos permite comunicarnos con otros, expresarnos y comprender nuestro entorno.

Con respecto a la didáctica

Una vez culminado el análisis de las construcciones mentales de los estudiantes, podemos apreciar que el trabajo desde el conocimiento cotidiano de la matemática, hace más significativos los conceptos, permitiendo adquirir nociones más evolucionadas de los conceptos. Particularmente, podemos señalar que el trabajo relativo a la función lineal necesita una preparación previa, fuerte y significativa en lo cotidiano, para que los estudiantes sordos alcancen las construcciones mentales dispuestas en la descomposición genética.

Esta preparación contribuye a que los alumnos logren finalmente una apropiación del concepto función lineal desde la matemática, a partir del conocimiento cotidiano, utilizando cada vez más un vocabulario más cercanos matemáticamente a los conceptos dispuestos en la descomposición genética; desprendiéndose de las palabras del cotidiano que los ayudaron a construir dichos conceptos. Llegando a reemplazar la palabras "trabajo" por "función", "flojo" por "relación", "no es función" por "la falta de imagen en elementos del dominio", entre otros (Figura 3).

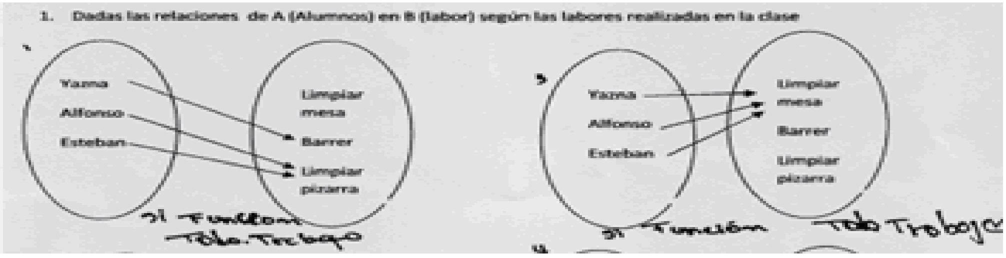


Figura 3. Respuesta de un estudiante a la relación funcional.

Para lograr este desprendimiento se debe hacer un buen enlace entre el trabajo desde el conocimiento cotidiano hacia el conocimiento matemático. Estas instancias que permitirán explorar, descubrir y formalizar el conocimiento matemático no debe estar presionada por los tiempos, sino por el contrario dar el tiempo necesario para que nuestros estudiantes adquieran la etapa exploratoria o de experiencia que les falta, respetando los tiempos de dialogo ya que de aquí surgirán las señas y los conceptos que serán la base de las construcciones mentales de los estudiantes.

Reflexiones y proyecciones

De forma particular consideramos que aún hay una brecha abismante entre el alumnado sordo y el oyente, las formas en que ellos aprenden matemática son sumamente diferentes, por ello la forma en que debemos abordar los mismos contenidos debe ser totalmente distinta, quizás las actividades propuestas en el cuestionario no tenga sentido para estudiantes oyentes, pero para alumnos sordos la etapa previa es algo fundamental, para que los conceptos adquieran sentidos y se apropien de nociones reales de lo que estamos tratando de enseñar.

Referencias bibliográficas

Boyer, C. (1986). *Historia de las matemáticas*. Madrid: Alianza Universidad.

Dubisnky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed), *Advanced Mathematical thinking* (pp. 95-123), Dordrecht: Kluwer.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*, *8*(3), 25-41.

Farfán, R. y García, M. (2005). El concepto de función: un breve recorrido epistemológico. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta latinoamericana de Matemática Educativa 18,* 489-194. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

García-Zatti, M. y Montiel, G., (2008). Resignificando la linealidad en una experiencia de educación a distancia en línea. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias,* *3*(2), 12-26.

Mazzitelli, C. y Aparicio, M., (2010). El abordaje del conocimiento cotidiano desde la teoría de las representaciones sociales. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de la Ciencias*, *7*(3), 636-652.

Pozo, J. I.; Gómez Crespo, M. A. (1998). *Aprender y enseñar ciencia. Del conocimiento cotidiano al conocimiento científico*. Madrid: Morata.

Serrano, C. (1995). *Procesos de resolución de problemas aritméticos en el alumnado sordo: aspectos diferenciales respecto al oyente*, Tesis para optar al grado de Doctor, Universidad Autónoma de Barcelona. España.

Sierpinska, A. (1992). Understanding the notion of function. En G. Harel y E. Dubinsky (Eds), *The concept of function. Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp 25-58) USA: Mathematical Association of America.

Van Lamoen K. (2010). *Construcción del Concepto Función Cuadrática en Estudiantes Sordos: un estudio bajo las teorías APOE y de Registros de Representación Semiótica.* Tesis para optar al Grado de Magíster en Didáctica de la Matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile.

DINÁMICA DEL RAZONAMIENTO INDUCTIVO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS. UNA PROPUESTA DIDÁCTICA

Mailyn Yordana Álvarez Caneda, Isabel Alonso Berenguer, Alexander Gorina Sánchez
Universidad de Oriente Cuba
ialonso@csd.uo.edu.cu, gorina@contre.sum.uo.edu.cu

Resumen. El artículo discute una estrategia didáctica, encaminada a orientar a los profesores hacia la organización y desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos. El énfasis de dicha estrategia está en la formación de habilidades que permitan potenciar el razonamiento inductivo en los estudiantes. La misma toma como base a la modelación de la dinámica del razonamiento inductivo, la que se sustenta en los procesos de orientación inductiva y sistematización inductiva, que se desarrollan en estrecha relación y contienen al razonamiento deductivo.

Palabras clave: razonamiento inductivo, resolución de problemas matemáticos

Abstract. The article discusses a didactic strategy, directed to orient the professors toward the organization and development of the teaching-learning process of the resolution of mathematical problems. The emphasis of this strategy is in the formation of abilities that allow powering the inductive reasoning in the students. This strategy takes as a base the modeling of the dynamics of the inductive reasoning, that is sustained in the processes of inductive orientation and inductive systematization that are developed in close relationship and that contain the deductive reasoning.

Key words: reasoning inductive, resolution of mathematical problems

Introducción

A pesar de la importancia que se le ha concedido a la Matemática en diferentes épocas, el proceso de enseñanza y aprendizaje de esta ciencia ha mostrado numerosas insuficiencias y obstáculos, muchos de los cuales no han sido solucionados aún en la actualidad, lo que ha hecho que se mantengan en desarrollo numerosas investigaciones dirigidas a la obtención de resultados que influyan significativamente en el mejoramiento de dicho proceso.

La presente investigación es una de ellas, la que se inició con la realización de un diagnóstico elaborado sobre la base de entrevistas a profesores del Departamento de Matemática de la Universidad de Oriente, encuestas a estudiantes del primer año de la carrera de Licenciatura en Matemática de dicha universidad y a profesores de Matemática de la enseñanza preuniversitaria. También se observó la ejecución de un examen oral y el desarrollo de 9 clases en la mencionada carrera. Este diagnóstico comprendió los años 2004 al 2009.

El análisis de los resultados obtenidos con la aplicación de los mencionados medios de diagnóstico permitió constatar la existencia de insuficientes actividades docentes que promovieran la reflexión y la aplicación de los contenidos matemáticos a la solución de situaciones concretas, de manera que se facilitase la apropiación de patrones de solución y la construcción del conocimiento. También se constató un bajo aprovechamiento docente y el prevalecimiento de un aprendizaje reproductivo. De las citadas insuficiencias emergió como problema científico de la investigación: insuficiencias en el proceso de apropiación y aplicación práctica de los contenidos matemáticos.

Al profundizar en el diagnóstico, en busca de posibles causas del problema, se pudo observar que se evidencia una inadecuada concepción de las aplicaciones de los contenidos, al contemplar sólo aquellas que requieren del empleo de habilidades algorítmicas para su desarrollo; así mismo, se manifiesta un insuficiente trabajo de análisis de los problemas matemáticos, lo que no facilita que el estudiante se apropie de las componentes de los mismos (objetos, características y relaciones) y de su estructura (condiciones y exigencias) con lo que ampliaría la comprensión de estos. Por último, se comprobó que no se trabaja suficientemente por lograr una apropiación de estrategias heurísticas y metacognitivas que permitan la aplicación del contenido matemático a la solución de problemas.

Todas estas causas indican un insuficiente trabajo de selección de situaciones adecuadas para desarrollar las aplicaciones del contenido matemático, así como un limitado desarrollo de conocimientos y habilidades matemáticas y estratégicas para la aplicación exitosa de dichos contenidos. De ahí que, para dar respuesta al problema anteriormente formulado, se tomase como objeto de la investigación el proceso de resolución de problemas matemáticos y como campo de acción la dinámica del razonamiento inductivo en dicho proceso.

A partir de este diseño investigativo y considerando como referentes teóricos los resultados de los trabajos Polya (1966, 1990), Schoenfeld (1985), Rizo y Campistrous (1999), Alonso (2001), Alonso y González (2003) y Álvarez (2010), se modeló la dinámica del razonamiento inductivo en el proceso de resolución de problemas matemáticos.

Modelación didáctica de la dinámica del proceso de razonamiento inductivo

La dinámica modelada, que se representa de manera sintética en la Figura 1, se inicia con la *comprensión del problema matemático*, la que consiste en un proceso interno de valoración, análisis y apropiación de la estructura de dicho problema, en aras de lograr una orientación en la búsqueda de una vía adecuada de solución para el mismo, lo que dependerá de los recursos cognitivos y afectivos del resolutor.

La persona que aborda un problema comienza por valorarlo, consciente o inconscientemente, para lo cual tendrá que activar conocimientos, habilidades y valores. Cuando el resultado de la valoración es positivo, a los efectos de la actividad resolutora, comienza el análisis consciente del problema para lograr una representación interna de los objetos que intervienen en el mismo, de la lógica de sus relaciones, nexos y cualidades, de manera que se generen esquemas virtuales de solución.

Dicha representación interna se constituye en una comprensión inicial del problema que se aborda y requerirá de la descomposición y comparación de los elementos del mismo (objetos, características y relaciones) y de la identificación, abstracción e integración de los que se seleccionen como relevantes, todo lo cual se realizará sobre la base del desarrollo de un proceso lógico de análisis, síntesis y generalización (Alonso, 2001).

Figura 1: Modelo didáctico de la dinámica del proceso de razonamiento inductivo.

A partir de la comprensión del problema el pensamiento comienza a moverse con un propósito definido, generando un proceso de exploración. Esta exploración deberá estar sustentada en estrategias para la búsqueda de una vía de solución, dando lugar a una *exploración estratégica*, la que va formando un proceso cíclico, que una y otra vez regresa a las condiciones del problema para enriquecer la comprensión que se tiene del mismo, en aras de determinar posibles vías de solución (Polya, 1966). Así la *comprensión del problema matemático* condiciona el tipo de *exploración estratégica* que se llevará a cabo y viceversa.

La relación entre la *comprensión del problema matemático* y la *exploración estratégica* conduce a una *conjeturación matemática*, proceso que consiste en la construcción de una hipótesis basada en el razonamiento realizado. De esta relación pueden surgir numerosas conjeturas, la mayoría de las cuales podrán ser falsas y habrá que modificarlas tan pronto como acudan a la mente del resolutor, pero formarán parte del proceso mismo de razonamiento que se aplica al intentar encontrar la vía de solución de un problema.

Justamente, la conjetura matemática es una idea hipotética que se obtiene a partir del enriquecimiento y perfeccionamiento de la *comprensión del problema matemático* sobre la base de los conocimientos y experiencias que posee el individuo. De manera que el conjeturar expresa la capacidad de obtener una idea de forma hipotética, a través de un proceso exploratorio en el que el resolutor aplica sus recursos cognitivos, meta-cognitivos y su capacidad de expresarse de forma fluida, original y flexible, motivado por el interés de resolver el problema matemático que tiene ante sí.

Así las relaciones anteriormente explicadas conducen a una *orientación inductiva,* la que expresa el proceso de búsqueda de una vía de solución para el problema matemático bajo estudio, a partir de la activación de recursos intelectuales que permitan comprender el mismo acudiendo a una sistemática *exploración estratégica*, desde la aplicación de destrezas heurísticas y meta-cognitivas que lleven a la formación de una conjetura matemática.

Ahora bien, la *conjeturación matemática* es también potenciada desde la *investigación validativa* (Álvarez, 2010), que es la configuración de la dinámica del proceso de razonamiento inductivo que se constituye en proceso de verificación de la conjetura obtenida, a partir de su comprobación en nuevos casos, lo cual le dará mayor credibilidad y la convertirá finalmente en la conjetura a demostrar.

La *investigación validativa* de la conjetura matemática resulta muy útil en el sentido de que una cuidadosa observación de los casos que refuerzan dicha conjetura y le proporcionan más crédito, se constituyen a su vez en fundamentos necesarios para la comprobación de la conjetura descubierta inductivamente. Incluso, del estudio de un caso que fortalezca suficientemente la conjetura puede surgir una suposición general que dé lugar al punto de partida para una comprobación, en aras de dar el máximo crédito a la conjetura y dar así respuesta a la exigencia del problema.

La *investigación validativa* se completa cuando se lleva a cabo la *interacción comprobatoria*, en la que el resolutor se implica en la argumentación formal de la conjetura que ya ha sido validada. La conjunción de estos pasos fundamentará dicha conjetura, con lo que se dará respuesta a la exigencia del problema. Al llevar a cabo dicha interacción se genera una dinámica que lleva hacia la solución mediante un razonamiento inductivo-deductivo.

De esta forma, la *investigación validativa* tiene que ser interpretada en íntima relación con la *interacción comprobatoria*, como procesos que se dan en unidad. De manera que la *investigación validativa* lleva a que se confirme, conscientemente, la conjetura inicial del problema, la que se constituye en punto de partida para la demostración matemática o la argumentación formal que sustenta el resultado, a desarrollarse mediante la *interacción comprobatoria*, necesaria para lograr una solución real del problema.

La contradicción se manifiesta cuando en la *investigación validativa*, a pesar de validar con varios casos la conjetura, no se llega a una conclusión determinante o lo suficientemente fuerte como para considerarla confiable, en cuyo caso la *interacción comprobatoria* carece de los fundamentos necesarios para alcanzar la solución del problema, negando a la primera que deberá superar dicha insuficiencia. Así mismo, cuando la *interacción comprobatoria* no cumple con todos los requisitos que exige el proceso demostrativo, la conjetura validada no podrá ser demostrada, negándose dicho proceso comprobatorio.

Esta contradicción se sintetiza en la *conjeturación matemática* y la refuerza, propiciando un mayor nivel de interpretación del problema matemático.

Las citadas relaciones conducen a una *sistematización inductiva,* interpretada como un proceso que potencia la autorregulación del razonamiento inductivo, a partir de la construcción y validación de una conjetura matemática, como base para su comprobación.

Así, la dinámica del proceso de razonamiento inductivo se sustenta esencialmente en los procesos de *orientación inductiva* y *sistematización inductiva*, los que se desarrollan en estrecha relación, y contienen al razonamiento deductivo que aporta la argumentación formal o demostración matemática.

Estrategia didáctica

La anterior modelación sirvió de base para la concepción y elaboración de una estrategia didáctica encaminada a orientar a los profesores para la organización y desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos, con énfasis en la formación de habilidades para potenciar el razonamiento inductivo.

La estrategia está estructurada en cuatro fases: *inicial*, de *orientación inductiva*, de *sistematización inductiva* y *evaluativa* (Álvarez, 2010), como se muestra en la Figura 2.

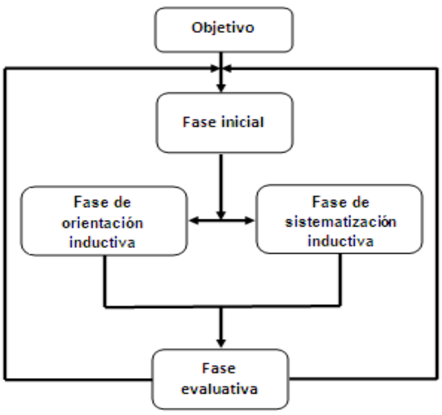


Figura 2: Estructura de la estrategia didáctica

Cada fase está caracterizada por las acciones a desarrollar.

La *fase inicial* contempla condiciones que deben cumplirse por estudiantes y profesores para la aplicación exitosa de la estrategia, exigencias al docente, elementos a contemplar en la preparación metodológica de la asignatura y un diagnóstico al grupo de estudiantes en el que se va a aplicar la estrategia, para conocer previamente su preparación en cuanto al uso de los recursos cognitivos y metacognitivos, así como indagar en aspectos motivacionales que influyen en el éxito o fracaso del proceso de resolución de los problemas.

En la *fase de orientación inductiva* se inicia la dinámica del proceso de razonamiento, de manera que será preciso crear el hábito de observar y analizar en cada problema sus elementos esenciales, para lo cual será necesario:

- Lograr que los estudiantes identifiquen la estructura (condiciones y exigencias) y las componentes (objetos, características y relaciones) de los problemas matemáticos, realizando la valoración y análisis de muchos problemas de varios tipos y explicando la importancia de profundizar en cada uno de sus elementos, en aras de obtener una correcta comprensión (Alonso y González, 2003).
- Propiciar que aprendan a considerar diferentes alternativas para llegar a una conjetura, fijando la atención en las características de los objetos que componen el problema y en las relaciones que existen entre ellos para poder apreciar sus analogías y diferencias.
- Llevar a utilizar, siempre que sea posible, diferentes representaciones de un mismo problema, para observar relaciones que pueden estar implícitas (Rizo y Campistrous, 1999).
- Transmitir patrones de análisis de los problemas, aprovechando para ello la resolución de problemas en la pizarra, en voz alta, por parte del profesor o estudiantes aventajados.
- Favorecer el intercambio, la comunicación y el contraste de ideas, aprovechando el trabajo en grupos pequeños en los que se discutan problemas (Schoenfeld, 1985), de manera que se vayan creando patrones de razonamiento inductivo para la conformación de conjeturas y su exteriorización.
- Incluir en el trabajo problemas abiertos que requieran de la selección de datos y de la determinación de condiciones para poder llegar a una solución.

Algunas preguntas que pueden resultar útiles al docente en esta etapa, para desarrollar su trabajo de moderador del proceso son: ¿Puedes explicar con tus propias palabras de qué trata el problema? ¿Qué componentes involucra este? ¿Cómo se relacionan los objetos del problema? ¿Cuáles son las condiciones y exigencias? ¿Cómo te representas el problema? ¿Esta representación te sugiere alguna idea que quieras exponer?

Este tipo de preguntas debe llevar a una idea hipotética que indique por dónde debe ir la solución del problema. A tales efectos se requiere además:

- ❖ El análisis conjunto (profesor y estudiantes) de problemas en los que realicen un proceso exploratorio que dé lugar a regularidades que se vayan perfeccionando hasta lograr una conjetura, con lo que se transmitan patrones de exploración y se estimule la capacidad de obtener una idea, de forma hipotética, a través de un proceso exploratorio.
- ❖ Propiciar el desarrollo de analogías con problemas ya resueltos y discutir su aplicación colectivamente para extraer reglas formuladas por los propios estudiantes (Polya, 1990).
- ❖ Enseñar la aplicación de estrategias heurísticas tales como: consideración de casos particulares, consideración de un caso general y consideración de todos los casos posibles, en aras de hacer especializaciones o generalizaciones que permitan conjeturar.
- ❖ Emplear métodos participativos en clase, reconociendo los avances de los estudiantes que se destaquen en la exploración, de manera que se activen los recursos motivacionales de los mismos, con lo cual se movilizarán las habilidades cognitivas y metacognitivas que deben conducir la actividad exploratoria.
- ❖ Formar estrategias de autocontrol o autorregulación durante el proceso de resolución, desarrollando actividades en las que los estudiantes describan su propio proceso de pensamiento mientras trabajan.

Algunas preguntas que pueden ayudar a la orientación de esta etapa son: ¿Has resuelto antes algún problema con un rasgo similar? ¿Por qué no analizar algún caso particular o un caso más general? ¿No podrá reducirse a un problema más simple? ¿Tal vez funcione la división en casos y la consideración por separado de cada uno de éstos? Explique ¿cómo llegó a esa conclusión? Trate de encontrar más de una forma de hacerlo.

Para formar estrategias de autocontrol será muy importante que el profesor trabaje sistemáticamente empleando preguntas como: ¿Qué están haciendo? ¿Por qué lo están haciendo? ¿Cómo les ayudará eso a formular una conjetura? ¿Qué harán con ella cuando la tenga?

La *fase de sistematización inductiva* se desarrolla en estrecha relación con la anterior para tratar de validar la conjetura encontrada y luego comprobarla. En este sentido se requiere:

- Reforzar las estrategias de autocontrol o autorregulación, en aras de que se valide el grado de generalidad y veracidad de la conjetura obtenida, confirmándola con un adecuado número de casos que permitan su fortalecimiento antes de someterla a demostración.
- Propiciar que se examinen sus consecuencias en aras de verificar su validez y reforzar la conjetura.
- Hacer que se apropien del conocimiento de que una conjetura adquiere más crédito con la verificación de cada nueva consecuencia.
- Fomentar el uso de casos que realmente constituyan oportunidades de debilitar la conjetura, en aras de su perfeccionamiento, así como de ratificación de la misma.
- Potenciar el trabajo en grupo en aras de discutir y verificar las consecuencias de la conjetura descubierta, como argumento o fundamento para la propia conjetura.
- Fomentar concepciones y actitudes que faciliten la revisión y exteriorización de ideas que se tengan sobre posibles conjeturas en aras de cambiarlas de existir una razón fundamentada para ello, o defenderla con argumentos sólidos en caso de existir razones para ello.
- Emplear ejemplos en los que al validar una conjetura con determinados casos esta se destruya, de manera que esto se aproveche para demostrar cómo adicionándole una restricción se puede hacer resurgir.

Algunas preguntas que pueden ayudar son: ¿Puede explicar su conjetura? ¿En qué casos se cumple? ¿Conoce un resultado similar? ¿Se les ocurre un contraejemplo o caso para el que no se cumpla la conjetura? ¿Por qué sostiene la conjetura? ¿Qué tan incierta la podemos considerar? ¿Es posible generalizarla? ¿Podemos debilitarla? ¿Podemos mejorarla? ¿Qué es lo que no hemos tenido en cuenta? ¿Podríamos formular la conjetura de una manera más accesible? ¿Cuál es la conjetura definitiva?

Así, en caso de concluirse con la aceptación de la conjetura, será preciso desarrollar el proceso de comprobación de la misma, para lo que se deberá:

- Trabajar ejemplos que permitan corroborar que del estudio de un caso, que fortalezca suficientemente la conjetura, puede surgir una suposición general que dé lugar al punto de partida para la comprobación que lleve a dar respuesta a la exigencia del problema.
- Propiciar una cuidadosa observación de los casos empleados y de las consecuencias examinadas para reforzar la conjetura y proporcionarle más crédito, los que se

constituyen en fundamentos necesarios para la comprobación de la conjetura descubierta inductivamente.

- Ejemplificar cómo demostrar una conjetura a partir de resultados matemáticos ya comprobados.
- Emplear numerosos problemas en los que el estudiante tenga que implicarse en la argumentación formal de la conjetura que ya ha sido validada.

La *fase evaluativa* tiene dos direcciones fundamentales, una encaminada a la comprobación de los conocimientos y habilidades adquiridos por los estudiantes y otra orientada a la valoración general de los resultados obtenidos con su aplicación en la asignatura, así como a la recolección de opiniones y experiencias que resulten de utilidad para su posterior perfeccionamiento.

Cabe precisar que la introducción sistemática de esta estrategia en la práctica docente de la carrera de Licenciatura en Matemática de la Universidad de Oriente, a partir del año 2010, ha tenido resultados favorables que muestran avances en el aprendizaje del razonamiento inductivo durante la resolución de problemas matemáticos, facilitando un desarrollo de los recursos intelectuales, así como un crecimiento favorable en el interés y la motivación por las matemáticas y la resolución de problemas de esta ciencia.

Conclusiones

El diagnóstico realizado al proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática en la carrera de Licenciatura en Matemática de la Universidad de Oriente, permitió constatar la existencia de insuficiencias en la aplicación del contenido de esta ciencia a la solución de problemas, fundamentalmente en el razonamiento inductivo requerido para dicha solución, evidenciando la necesidad de una intervención didáctica.

Se realizó una modelación didáctica de la dinámica del proceso de razonamiento inductivo en la resolución de problemas matemáticos, a partir de los referentes teóricos precisados, la que se sustenta en los procesos de orientación inductiva y sistematización inductiva, que se desarrollan en estrecha relación y contienen al razonamiento deductivo.

La estrategia didáctica que se propone se corresponde con la lógica modelada y posibilita orientar a los profesores para la organización y desarrollo de la dinámica del proceso de sistematización inductiva en la resolución de problemas matemáticos, de manera que se logre un aprendizaje transformador y se contribuya a la solución de las insuficiencias detectadas. La introducción de esta estrategia en la carrera de Licenciatura en Matemática, a partir del año 2010, ha mostrado resultados favorables.

Referencias bibliográficas

Alonso, I. y González, H. (2003). *¿Cómo tener éxito al resolver problemas matemáticos?* Potosí: Visión Creativa equipo consultor S.R.L.

Alonso, I. (2001). *La resolución de problemas matemáticos. Una alternativa didáctica centrada en la representación*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Estudios de Educación Superior "Manuel F. Gran", Universidad de Oriente. Cuba.

Álvarez, M. (2010). *Dinámica del razonamiento inductivo en la resolución de problemas matemáticos. Una propuesta didáctica*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Estudios de Educación Superior "Manuel F. Gran", Universidad de Oriente. Cuba.

Polya, G. (1990). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Polya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid: Tecnos.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando: Academic Press.

Rizo, C. y Campistrous, P. (1999). Estrategias de Resolución de problemas en la escuela. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 2(2)*, 31-45.

POR QUÉ ENSEÑAR LOS NÚMEROS RACIONALES SIN SIGNO COMO OPERADORES SOBRE MAGNITUDES Y NO COMO FRACCIONARIOS

Carmen Andrade Escobar
MAK Escuela de desarrollo del pensamiento lógico matemático Colombia
escuelamak@gmail.com

Resumen. El presente artículo tiene como finalidad estudiar los operadores sobre magnitudes como la noción que está en la base de la construcción del número racional sin signo y mostrar que la fracción, que se ha enseñado tradicionalmente, produce dificultades que persisten hasta la edad adulta. Estas dificultades se explican porque la enseñanza de la relación parte-todo conlleva implícitamente conceptos falsos y hace un uso inadecuado de palabras que son el origen de los obstáculos didácticos e impiden promover el salto conceptual entre el número contador y el número relator necesario para construir el significado del número racional. A través de la historia de la matemática se puede identificar que el concepto de número racional sin signo tiene como invariante conceptual el operador sobre magnitudes del que se deriva la medida y la razón; su enseñanza no sólo evita los obstáculos didácticos producidos por la fracción sino que contribuye a construir el significado del número natural racional.

Palabras clave: obstáculos didácticos, números racionales, fracción

Abstract. The following article aims to study the operators on magnitudes like the notion that is in the base of the construction of the rational number without sign and to show that the fraction, the way that it has been taught traditionally, produces difficulties that persist to the adult age. These difficulties are understood if we consider that the teaching of the part-whole relationship implicitly involves false concepts and an inadequate use of words that are the origin of the didactic obstacles, avoiding to promote the conceptual leap between the counting number and the relator number, necessary to build the meaning of the rational number. Throughout the History of Mathematics we can identify that the operators on magnitudes is an invariable of the concept of rational number without sign, from which measure and ratio derives; and their teaching does not only avoid the didactic obstacles produced by the fraction but contributes to the construction of the meaning of rational number.

Key words: didactic obstacles, rational numbers, fraction

Problemática

Tradicionalmente se ha considerado que la noción de fracción como relación parte todo es la base para la construcción de los números racionales sin signo. No obstante, numerosas investigaciones en educación matemática, por ejemplo, Mancera (1992), Tzur (1999), señalan que un alto porcentaje de estudiantes, tanto en los grados superiores como en la universidad, tienen dificultades en el aprendizaje de la matemática, precisamente, porque no pueden darle significado a los números racionales y por consiguiente, no pueden calcular operaciones ni resolver problemas que los involucren.

Las dificultades de los estudiantes en la manipulación de los números racionales se pueden estudiar a través de los errores que se presentan con mayor frecuencia (Mancera, 1992):

- En la construcción de fracciones impropias: no pueden representar la fracción impropia, por ejemplo 5/3, o la invierten y representan 3/5.
  - En la suma y la resta de fracciones: suman numeradores y denominadores como si fueran números naturales, por ejemplo: 5/3 + 2/7 = 7/10.
  - En la relación de la fracción con la medida y la razón: no pueden interpretar una fracción, por ejemplo 2/3 o 3/2, como resultado de una medida o como razón.

Una de las hipótesis sobre estas dificultades se refiere a que la noción de fracción no sólo no promueve la construcción de los números racionales sino que genera obstáculos didácticos que persisten hasta la edad adulta. Sin embargo, antes de analizar estas dificultades es necesario aclarar el significado de número racional sin signo a través de la mirada retrospectiva del proceso histórico de la matemática.

Invariantes conceptuales de los números racionales sin signo a lo largo de la historia de la matemática

La mirada retrospectiva de la historia de la humanidad, desde la Antigüedad hasta el siglo XX, tiene como finalidad identificar las invariantes conceptuales y los momentos de cambio en la construcción del número racional. Los avances en el conocimiento dependen de cada lugar geográfico y de las necesidades socio-culturales de cada época, situaciones que han llevado a diferentes interpretaciones del número racional. A continuación se presenta un resumen de las diferentes interpretaciones, la época, el lugar geográfico y la actividad que impulsó su desarrollo.

Operadores sobre magnitudes: En la Antigüedad (C3.500 a.C.), en Egipto y Babilonia, la actividad que impulsó el desarrollo de los números racionales sin signo fue la arquitectura de las pirámides y de las grandes construcciones. La talla de piedras les permitió erigir pirámides con formas regulares y precisas mediante la comparación de las longitudes de las aristas de las piedras. Este proceso que impulsó el desarrollo de la medición liga la aritmética a la geometría porque el proceso de medición es la cantidad de veces que cierta longitud se puede aplicar en un segmento; "el primer paso (aplicación) es de carácter geométrico, el segundo (cálculo), de carácter aritmético" (Aleksandrov, Kolmogorov, Laurentiev y otros, 1994, p.43).

Fracción como parte de una medida: En Grecia también se conocieron construcciones con piedras talladas en forma regular y lisa como por ejemplo la puerta de Los Leones en Creta pero también se usaba la fracción en relación con el comercio y el uso de la palabra $\lambda\varepsilon\pi\tau\alpha$ que significa moneda o partes de una moneda (los décimos o los céntimos). Los babilonios usaron la fracción sexagesimal, con denominador 60 o múltiplos de 60, para el estudio de los astros.

Estas fracciones también fueron usadas por los griegos y los árabes, y dejaron su huella en nuestra división de la hora y de la circunferencia. En Roma, la fracción era necesaria, especialmente, para el peso y la medida en general. Se usaba la división de la unidad en 2, 3, 4 o 6 partes iguales porque se daba preferencia a la partición duodecimal y se buscaba representar las fracciones como suma de fracciones unitarias con denominador un múltiplo de 12. En India y Arabia reconocían la fracción ordinaria pero preferían usar, como los babilonios y los griegos, la fracción sexagesimal.

Razón y medida entre dos longitudes: La noción de conmensurabilidad, fundamental para la construcción de los números racionales, fue estudiada por Eudoxio de Cnido (C 408-355), alumno de Platón, y Euclides (C 300 a. C.). Eudoxio clarificó el significado de magnitudes homogéneas: un segmento no es comparable, en términos de razón, con el área, y el área no es comparable con el volumen. También determinó que la forma de encontrar la relación numérica o la medida entre dos longitudes es comparando dos longitudes y que si el proceso de comparación termina, se dice que el segmento **a** es conmensurable con el segmento **b**, pero si el proceso no termina, se dice que los segmentos no son conmensurables. La escuela pitagórica descubrió que dos magnitudes tales como la diagonal y el lado de un cuadrado son inconmensurables, porque no tienen una razón tal como un número entero tiene a otro número entero. En la juventud de Platón, el descubrimiento de la inconmensurabilidad causó un verdadero escándalo.

Euclides recoge la teoría de Eudoxio en el Libro V de los *Elementos* y estudia la proporción en el caso de razones conmesurables. La teoría de las proporciones es un estudio de los números racionales (Aleksandrov et al, 1994). Aunque la palabra racional era un concepto indefinido para los matemáticos griegos, Euclides definió la razón como la relación de tamaño entre magnitudes del mismo tipo. Pero más significante es la definición 5 del Libro V: "(...) una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda que una tercera con una cuarta cuando cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera excedan a la par, sean iguales a la par o resulten inferiores a la par, que cualesquiera equimúltiplos de la segunda y de la cuarta, respectivamente y tomados en el orden correspondiente" (Euclides, 1991, p.194). El estudio de las magnitudes inconmensurables es tratado por Euclides en el libro X.

A continuación se presenta un resumen de la revisión histórica sobre la construcción del número racional extraída de Collet (1982). Se presentan cuatro concepciones del número racional: fracción como relación parte-todo, relación entre magnitudes y medida, operadores sobre magnitudes y clases de parejas ordenadas de números naturales.

Fracción como relación parte-todo: En el siglo XII y XIII, el desarrollo del álgebra impulsó la definición de la fracción que significa partes alícuotas de la unidad (Natucci, 1923, p. 29). En India, en el *Lilivati de Bhaskara* (C 1114 d. C.) la fracción se escribe con el numerador arriba del denominador sin signo de fracción interpuesto. Leonardo Pisano (1180-1250), conocido como Fibonacci, en su *Liber Abaci* representa la fracción con una raya que separa el numerador del denominador. La palabra numerador y denominador aparecen en la obra *Summa* de Luca Paciolo y en el curso del siglo XVI se empieza a usar la fracción decimal Collet (1982).

Relación entre magnitudes y medida: En el siglo XV, Nicolás de Cuse ve que la debilidad de la ciencia escolástica está en la incapacidad de medir. "Es más, ya que el término etimológico "*mens* (facultad intelectual, inteligencia) ha sido ligado a *mensura* (medida, medición), el conocimiento debe estar fundado sobre la medida" (Collet, 1982, p. 158). Newton (1643-1727) en su *Arithmetica universalis* reconoce una función común del número para expresar relaciones entre magnitudes, o mejor, cociente entre magnitudes: los naturales se refieren a medida de unidades, las fracciones a medida de submúltiplos de la unidad de medida, y los irracionales a medidas inconmensurables.

Operadores sobre magnitudes: H.C.R. (Charles) Meray (1835-1911) observa que la noción de fracción como suma de partes alícuotas de la unidad no representa claramente el significado de ¾ y muestra el número racional como un "factor ficticio" sobre un número natural. Burali-Forti (1897) ve el número racional y el entero como operadores sobre magnitudes. Peano lo denomina operador en su obra *Aritmetica generale* (1899).

Clases de parejas ordenadas de números naturales: Hasta la primera mitad del siglo XIX no se puede encontrar ninguna teoría sobre los números racionales ni sus propiedades. El desarrollo de la lógica aporta a la definición del número racional. Hacia finales del siglo y principios del siglo XX, Russell, en su obra *The principles* of *Mathematic*, recoge el estudio de Tannery y Stolz sobre el método de las parejas y considera el número cardinal como clases de parejas ordenadas de números naturales pero cambia el método para el número racional por el concepto de relación entre enteros (Natucci, 1923, p. 56). Alessandro Padoa, en su obra *Introduzione alla teoria delle frazioni* (1909), muestra como se puede extender el método de las clases desarrollado por Russell, a las fracciones; las considera como clases de parejas ordenadas de números naturales (Natucci, 1923, p. 56).

Las conclusiones de la revisión histórica son las siguientes: la relación entre magnitudes es una invariante conceptual del número racional sin signo y está en la base de las diferentes interpretaciones: operadores, medida y razón entre magnitudes. La noción de fracción que se usó en varios lugares, desde la Antigüedad, también tiene en su base la relación entre magnitudes porque se refiere a parte de una medida. La noción de fracción como relación parte todo, que se define en el siglo XII, no es una relación entre magnitudes sino entre la parte y el todo, y no se aplica a magnitudes sino a cantidades discretas o colecciones.

Interpretaciones del número racional sin signo y diferencias con la fracción como relación parte-todo

Se pueden establecer dos métodos de construcción de los números racionales: conmensuración y fraccionamiento de la unidad que corresponden a diferencias conceptuales. La conmensuración se refiere a la relación entre magnitudes y aunque se plantean cuatro subconstructos del número racional: medida, cociente, razón y operador, el concepto de operador sobre magnitudes es "(...) en esencia el concepto de razón o medida que tiene un valor práctico que le falta al método analítico" (Natucci, 1923, p. 358) y el cociente entre magnitudes es la misma razón. De esta manera, hay solamente tres interpretaciones del número racional que se relacionan entre sí: operador, razón y medida, y de las que se derivan nuevas nociones como proporción y equivalencia (Tabla 1) (Andrade, 2008).

Operador	3/2 **a** = **b**	(3/2) **a** = **b**
Medida	**a** = 2/3 **b**	**a** = (2/3) **b**
Razón o cociente	**a** / **b** = 2/3	**a**/**b** = 2/3 2/3 = **a**/**b**
Proporción	**a** / 2 = **b** /3	**a**/2= **b**/3
Equivalencia	3 **a** = 2 **b**	3**a** =2 **b**

Tabla 1: Interpretaciones del número racional sin signo

Es conveniente mostrar que no se puede escribir: 2/**a** = 3/**b** porque no tiene sentido dividir un número por una magnitud. El fraccionamiento de la unidad se refiere a la noción de fracción como relación parte-todo, partes alícuotas de la unidad, que se representa por dos números naturales, uno arriba o numerador y separado por una raya, un número abajo o denominador. El de arriba indica la cantidad de partes que se toman y el de abajo el número total de partes.

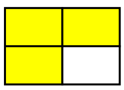
Las diferencias conceptuales entre los operadores sobre magnitudes y la relación parte-todo explican algunas de las dificultades de los estudiantes en la manipulación de los números racionales.

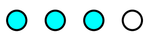
Los operadores sobre magnitudes: una forma de evitar los obstáculos didácticos

Con frecuencia se atribuyen las causas de las dificultades en el aprendizaje de la matemática a condiciones genéticas. No obstante, mediante el estudio de los errores más frecuentes se puede inferir que los errores se producen por las dificultades que impiden avanzar en el conocimiento y que pueden tener origen en tres tipos de obstáculos (Brousseau, 1989): ontogenéticos o producidos por la genética, y por lo tanto, están fuera de este estudio; epistemológicos; o didácticos porque se producen por la misma enseñanza. Los obstáculos epistemológicos se refieren a los saltos conceptuales necesarios para avanzar en la construcción del conocimiento, por ejemplo: entre los números naturales y los números racionales.

Los obstáculos didácticos se generan por errores didácticos que se pueden agrupar en: errores metodológicos, conceptuales y pedagógicos (Andrade, 2008). Los errores metodológicos se refieren al uso inadecuado de palabras. Los errores conceptuales se refieren a conceptos “falsos” que se enseñan. Los errores pedagógicos se refieren a los saltos conceptuales u obstáculos epistemológicos que no se promueven en el currículo y su falta de promoción impide construir nuevos conceptos. A continuación se presentan ejemplos de cada uno de los errores de los estudiantes y se estudia el origen de esta dificultad en los errores didácticos. También se muestra cómo la alternativa para construir las bases de los números racionales mediante las relaciones entre magnitudes, promueve el salto conceptual entre el número natural y el racional, y evita los obstáculos didácticos que se generan por la enseñanza de la fracción (Andrade, 2008).

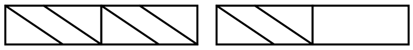
En la enseñanza de la fracción se presentan varios tipos de errores. Los metodológicos que se refieren al uso de palabras en forma inadecuada, por ejemplo: la palabra “fracción” parece inadecuada porque significa romper algo y la palabra “impropio” significa algo sucio que se debe evitar. Pero también se presentan errores conceptuales cuando se enseña que se “toman” o se “cogen” tantas partes que son nociones “falsas” porque las partes no se cogen sino que se señalan, como se observa en las siguientes gráficas que representan la fracción 3/4:



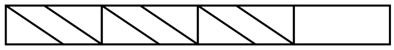


Otra dificultad generada por la fracción consiste en que tanto la parte como el todo están en la misma gráfica lo que explica los errores de los estudiantes en la construcción de la fracción impropia: ¿Cómo “coger” o “tomar” una parte mayor que el total de partes? Por ejemplo:

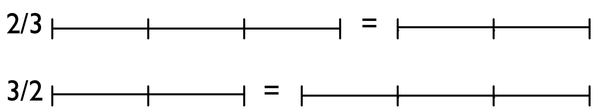
¿Cómo tomar o coger 3 partes de 2? La solución que se da en la enseñanza de la fracción es dibujar dos unidades:


= 3/2

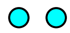
Lo cual conlleva a otro error: ¿Puede una unidad ser dos unidades? Además, ¿Qué sucede si se juntan los dibujos? Se observa que la fracción cambia de 3/2 a 3/4:

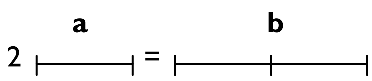

= 3/4

¿Cómo evitar este obstáculo didáctico? La enseñanza de los operadores sobre magnitudes evita los errores que acabamos de señalar. Dado que el proceso para construir los operadores sobre magnitudes implica establecer una relación entre magnitudes, se evita el uso de palabras inadecuadas porque no se "cogen" ni se "toman" cosas, y tampoco se diferencia entre fracción y fracción impropia porque el proceso es igual para cualquier situación, sea el numerador mayor, menor o igual que el denominador.



Lo que si se tiene en cuenta es el análisis del resultado: si el segmento o la magnitud que resulta es mayor, menor o igual de grande que la magnitud inicial. Los obstáculos didácticos no sólo se evitan sino que se promueve el salto conceptual u obstáculos epistemológicos.

En la suma y la resta de fracciones, los errores típicos se refieren a que se suman los numeradores y los denominadores por aparte, por ejemplo: 5/3 + 2/7 = 7/10. Estos errores de los estudiantes se explican porque se les ha enseñado que la fracción son dos números naturales separados por una raya, y no se ha promovido el salto conceptual entre los números naturales que son contadores y los números racionales que son relatores (Federici, 2001). Mediante el estudio de los operadores sobre magnitudes, se promueve este salto conceptual entre el número contador y el número relator. Por ejemplo, el número 2 contador,  cuenta dos cosas discretas, pero el número 2 relator:

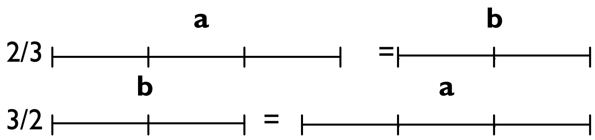


establece la relación entre dos magnitudes. En este caso: 2 significa "el doble de" y se lee: **b** es el doble de **a** o el doble de **a** es igual a **b**. Aunque el número se representa de la misma manera, el significado es diferente.

Otro error de los estudiantes en el aprendizaje de la fracción se refiere a la dificultad para asociar la fracción con la medida y la razón se explica porque se enseña que la fracción es una colección de partes iguales e implica contar pedazos de un todo (cantidades discretas). Por ejemplo:

2/3 son 

Mientras que el estudio de los operadores permite establecer la relación con la razón y la medida (Andrade, 2008):



La medida del segmento **b** con relación a **a** es 2/3 y la medida del segmento **a** con relación a **b** es 3/2.

Conclusiones

El análisis de los errores de los estudiantes en el aprendizaje de los números racionales permite concluir que estos errores provienen de las dificultades generadas por la educación u obstáculos didácticos. Los obstáculos en la enseñanza de la fracción se pueden asociar a errores metodológicos porque se usan palabras inadecuadas; a errores conceptuales porque se enseñan conceptos falsos, y a errores pedagógicos porque no se promueve el salto conceptual u obstáculo epistemológico entre los números naturales y los números racionales, entre el número contador y el número relator, que es indispensable para la construcción del significado de los números racionales.

Por otro lado, a través de la revisión histórica se pudo concluir que una invariante del número racional sin signo es la relación entre magnitudes y que la noción de relación parte-todo es transitoria en una etapa de la historia de la matemática. Esta conclusión junto con el estudio de las dificultades generadas por la enseñanza de la fracción hace suponer que si se enseña la relación entre magnitudes como la base del número racional y no la fracción, las dificultades se disminuyen y se evitan los obstáculos didácticos.

La noción de operador sobre magnitudes tiene en su base la relación entre magnitudes y promueve la construcción de las otras interpretaciones del número racional: como medida y como razón. La comparación entre la relación parte-todo y los operadores sobre magnitudes nos señala un camino para estudiar y superar o evitar las dificultades en el aprendizaje de los números racionales. La fracción se refiere a la relación entre la parte y el todo y está compuesta por dos números naturales; el número natural es contador y se refiere a la medida de cantidades discretas. Por el contrario, el número racional está compuesto por un operador multiplicador y un operador divisor; en este caso, la función del número es la de establecer una relación cuantitativa entre magnitudes y tiene "escondido" el número natural o contador cuando se cuenta la cantidad de veces que cabe un segmento (la unidad de medida) en el segmento que se está midiendo. Por eso se llaman números relatores. Dado que la función del número es diferente hay un salto conceptual entre el número contador y el relator. Sin embargo, con la noción de fracción no se promueve porque son naturales pero, por el contrario, la noción de operador si promueve el salto conceptual y por lo tanto, contribuye a superar el obstáculo epistemológico entre el número natural y el número racional.

Referencias bibliográficas

Aleksandrov, A. D., Kolmogorov, A. N., Laurentiev, M. A. y otros. (1994). *La matemática: su contenido, métodos y significado*. España: Alianza Editoral.

Andrade, C. (2008). *De la mano al cerebro; sobre la construcción de los racionales sin signo (Q^+) con base en la didáctica de la matemática de Federici.* Bogotá: Fondo de Publicaciones del Gimnasio Moderno.

Brousseau, G. (1989). Les obstacles épistémologuiques et la didactique des mathématiques. *Construction des savoirs*, 41-63.

Collet, J. P. (1973). *Histoire des Mathématiques*. Canadá: Editions du Renouveau Pedagogique.

Euclides. (1991). *Elementos*. España: Editorial Planeta.

Federici, C. (2001). *Sobre la resolución de problemas y la numerosidad*. Bogotá: Fondo de Publicaciones del Gimnasio Moderno.

Mancera, E. (1992). Significados y significantes relativos las fracciones. *Educación Matemática* 4(2), 30-54.

Natucci, A. (1923) *Il Concetto di Numero e le sue estensioni*. Torino: Fratelli Boca.

Tzur, R. (1999). An Integrated Study of Children´s Construction of Improper Fractions and the Teacher´s Role in Promoting That Learning. *Journal for Research in Mathematics Education* 30(4), 390-416.

UNA INGENIERÍA DIDÁCTICA PARA CONTRIBUIR EN LA COMPRENSIÓN DE LA NOCIÓN DE LÍMITE EN EL NIVEL MEDIO SUPERIOR

Catalina Navarro Sandoval, Jesús Romero Valencia, José Luis Miranda Nava
Universidad Autónoma de Guerrero México
nasacamx@yahoo.com.mx, jromv@yahoo.com

Resumen. El presente escrito muestra los avances de un trabajo de investigación acerca del concepto de límite, es importante señalar que existe una diversidad de investigaciones alrededor de dicho concepto, sin embargo, el problema sobre los procesos de enseñanza aprendizaje sigue siendo tema de preocupación para más de un investigador, debido a que las dificultades siguen estando presentes en la mayoría de los aprendices. En este sentido, nuestro trabajo se centra en atender la escasa comprensión por parte de estudiantes del nivel medio superior de la UAGRO, respecto del concepto de límite y para ello nos hemos planteado proponer actividades que contribuyan a la comprensión del concepto de límite considerando como base de referencia los planes y programas y libro de texto usados en el NMS de la UAGRO. Para ello, nos hemos dado la tarea de buscar, analizar y organizar investigaciones respecto de tres aspectos: epistemológico, didáctico y cognitivo. Con la intención de identificar y usar, algunas propuestas presentadas en las investigaciones

Palabras clave: límite, actividades, perspectivas cognitiva, didáctica

Abstract. In this paper we show some topics about a limit concept research, we should point that there is a wide variety on this concept researches, however the teaching-learning process problem is even an important topic for researchers because the troubles are still present in most of students. Thus, this work emphasizes in caring the limited understanding of pre-bachelor students of the UAGro about the limit concept. To do this, we proposed some activities that help the limit concept understanding, taking programs and text books used in the UAGro as foundation. To do this we were searching, analizing and organizing researches about three main aspects: epistemological, didactical and cognitive, to intent identify and use some proposals presented in the researches.

Key words: limit, activity, perspective cognitive, didactic

Introducción

Como se ha señalado en el resumen de este escrito, el presente trabajo de investigación se encuentra en desarrollo actualmente, y para comunicar las ideas esenciales del mismo comenzaremos comentando que en los antecedentes se muestran aspectos epistemológicos, didácticos y cognitivos, esta clasificación se decidió debido a que muestra información que nos da luz para atender el problema de la escasa comprensión por parte de estudiantes del nivel medio superior de la UAGRO, respecto del concepto de límite, donde se pretende proponer actividades que contribuyan a la comprensión del concepto de límite considerando como base de referencia los planes y programas y libro de texto usados en el NMS de la UAGRO.

Antecedentes

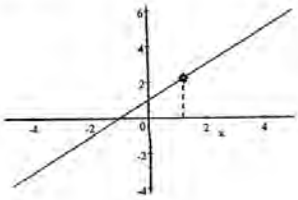
Con las investigaciones de corte epistemológico, se pretende indagar sobre la naturaleza y el origen (a grandes rasgos) del concepto de límite, Ferrante, (2009) señala que en la larga evolución del concepto (desde la matemática griega hasta el siglo XIX) se observa claramente la necesidad de explicitar y formalizar la noción de límite, dado que se utilizaba de forma implícita desde la época griega y que es hasta el siglo XIX cuando se llega a la definición formal y esta es la que se usa y/o trabaja en la actualidad ya sea para validar algunos resultados obtenidos o bien para demostrar otros más generales. Es importante señalar que de Eudoxo de Cnido a la primera mitad del siglo XVIII, aparece una idea muy intuitiva del proceso del paso al límite, pero no existía el concepto como tal, ya que ni siquiera se había explicitado el concepto de función, pero sí aparece como proceso implícito en algunos métodos utilizados. Ahora el *Método de exhaución,* se le atribuye a Eudoxo, aunque la utilización más conocida la hizo Arquímedes (en el año 240 a.c) al trabajar con la esfera y el cilindro y en La cuadratura de la Parábola, quien aplicaba el método del cálculo de áreas de figuras, volúmenes de cuerpos, longitudes de curvas, tangentes a las curvas, etc. El método consistió en aproximar en la figura otras en las que se podía medir la magnitud correspondiente, de manera que se aproximaba a la magnitud buscada. Por ejemplo para estimar la superficie del círculo se inscriben y circunscriben polígonos regulares de n lados cuya superficie se conoce (en definitiva es la de n triángulos isósceles) luego se duplica el número de lados de los polígonos inscritos y circunscritos hasta que la diferencia queda exhausta.

Del aspecto didáctico obtenemos información del tratamiento de la noción del concepto de límite en el sistema escolar, por lo que se realizó el análisis de los programas de estudio y libros de texto del Nivel Medio Superior de la UAGRO. Se encontró que la noción de límite se aborda en el curso de Calculo Diferencial específicamente en la unidad III, y se menciona que al finalizar la unidad el estudiante debe construir la noción a partir del caso particular de la ruptura de la gráfica de una hipérbola. Además alcanzar los siguientes objetivos: en el primero se dice que el estudiante debe construir e interpretar modelos matemáticos, mediante la aplicación de procedimientos variacionales para comprender y analizar situaciones reales. Y el segundo menciona que el estudiante debe argumentar la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales. Respecto del análisis del libro de texto, dado que es la herramienta más cercana con la que cuenta tanto el profesor para la enseñanza y el estudiantes para su aprendizaje de las matemáticas en general y del concepto de límite en particular. En Fernández, Locia, Meza y Nájera (2007), presentan en el primer capítulo de su libro el tema de límite, siguiendo la estructura siguiente. Se inicia con un poco de historia respecto del *cálculo* en general, seguido del tema de *funciones* y *su graficación*, y finalmente presentan el tema de *límite* (incluye limites laterales, teorema sobre existencia de límite y límites que no existen); en los capítulos II y III presentan el tema de *Derivada* y *aplicaciones de la derivada* respectivamente. Cuando se inicia el tratamiento del concepto de *límite* básicamente se presenta bajo el siguiente orden:

1. Se introduce la noción de límite con base en ejemplos, una definición intuitiva, luego límites laterales.
2. Posteriormente se introduce la definición con la que se formaliza la noción.
3. Y por ultimo atienden algunas concepciones que se derivan del manual.

Por ejemplo (ver Figura 1 y 2);

Ejemplo.



Si definimos $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ e intentamos calcular $f(1)$, no obtendríamos ningún resultado porque estaríamos intentando la división por cero.

Si elaboramos una tabla de valores para graficar la función tendremos:

x	-4	-2	0	1	2	4
$f(x)$	-3	-1	1	∞	3	5
(x, y)	$(-4, -3)$	$(-2, -1)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$	$(2, 3)$	$(4, 5)$

Figura 1 (Fernández, et al. 2007, pp. 62)

Ejemplo.

Sea la función racional $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$; tratemos de calcular el límite cuando "x" tienda a 2. Esto es $x \to 2$.

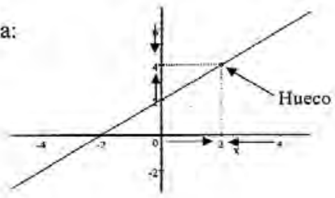
Los valores que toma x se acercan a 2 por la izquierda (se escribe $x \to 2^-$)

Los valores que toma x se acercan a 2 por la derecha. (se escribe $x \to 2^+$)

x	1.5	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1	2.5
$f(x)$	3.5	3.9	3.99	3.999	4	4.001	4.01	4.1	4.5

Observamos que al acercarse la "x" al valor 2, sea por la izquierda o por la derecha, $f(x)$ se acerca a 4. En otras palabras, el límite es 4.

Veamos lo anterior en la gráfica de la derecha:



Matemáticamente se escribe así:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4}{x-2}\right)=4$$

Figura 2: Fernández, et al, 2007, pp. 67

"Para que una función tenga limite en un punto donde x=a, se requiere que el límite por la izquierda sea igual al de la derecha de no cumplirse esto, la función no tiene límite en x=a"

Del aspecto cognitivo en López (2011), reporta algunos preconceptos, concepciones, dificultades y obstáculos que están presentes en estudiantes del Nivel Medio Superior, respecto de la noción del concepto de límite.

Preconceptos de límite

El preconcepto de límite está asociado básicamente al de "una barrera no rebasable".

Concepciones de límite

Las concepciones de límite como referencia a movimiento de las variables, indistintamente de que se alcance o no límite.

La concepción de límite como el valor que toma la función (ó como una sustitución), en el punto que se está analizando, sin importar el análisis del comportamiento de la función.

La concepción de límite como aproximación susceptibles de hacerse tan exacta como se desee; proceso de inducción incompleta.

La concepción de límite como un valor inalcanzable.

La concepción de límite como un movimiento físico.

La concepción de límite como una barrera intraspasable.

La concepción de límite como una marca o como el último término de un proceso.

La concepción de límite como "transferir al límite las propiedades de los elementos".

La concepción de límite de basta tomar para cada ϵ una δ igual a ϵ. (Esta estrategia es correcta para el caso de algunas funciones).

La concepción de límite de considerar el proceso al infinito como una sustitución.

La concepción de usar la definición de límites laterales para determinar límite de alguna función.

Dificultades del concepto de límite, en (Vrancke, *et al* 2006), reportan:

Dificultades para comprender que el concepto de límite es lo que ocurre cerca del punto y no en el punto.

Dificultades para reconocer e interpretar límites laterales.

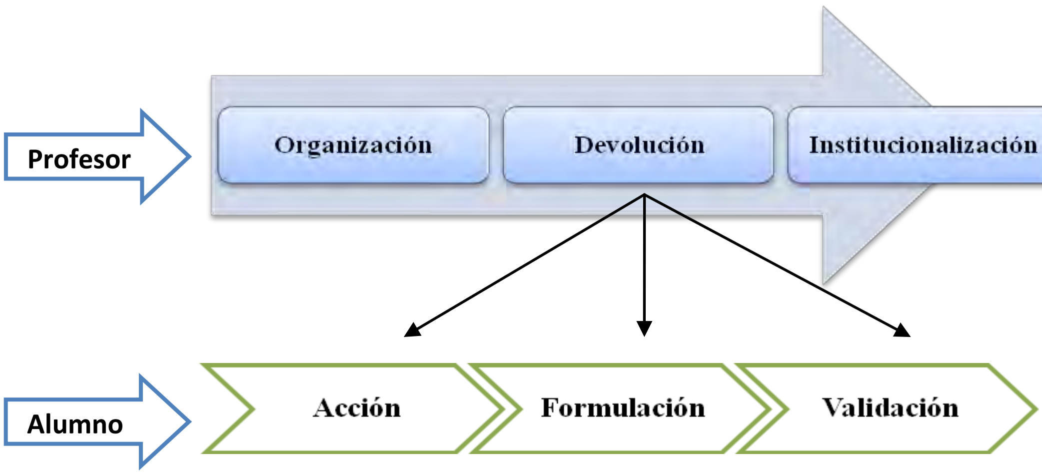
Dificultades para la manipulación algebraica de las funciones cuyo límite se quiere determinar.

Dificultades para comprender que el cálculo del límite no es siempre por sustitución.

Marco teórico y metodología

Dificultades para relacionar expresiones de límites con su traducción gráfica o el proceso contrario.

La teoría que sustenta nuestro trabajo de investigación es la Teoría de Situaciones Didácticas y la metodología a usar es la Ingeniería Didáctica, ya que ambas nos conducen a cumplir el objetivo de nuestra investigación, ya que Brousseau (1986) define a las *situaciones a-didácticas* como aquellas situaciones en las que el alumno por iniciativa propia enfrenta cierto problema por sí sólo y a las *situaciones didácticas* las define como aquellas que son más amplias que las situaciones a-didácticas, ya que las primeras considera que el enseñante está implicado con el sistema de interacciones del alumno, con los problemas que él le ha planteado. Una situación didáctica tiene la intención de que el alumno adquiera un conocimiento específico, pero dicha adquisición depende de las actividades que desempeñan tanto el alumno como el profesor, así pues las situaciones didácticas se clasifican en situaciones de acción, formulación, validación y de institucionalización, como se muestra en el siguiente esquema.



Esquema 1

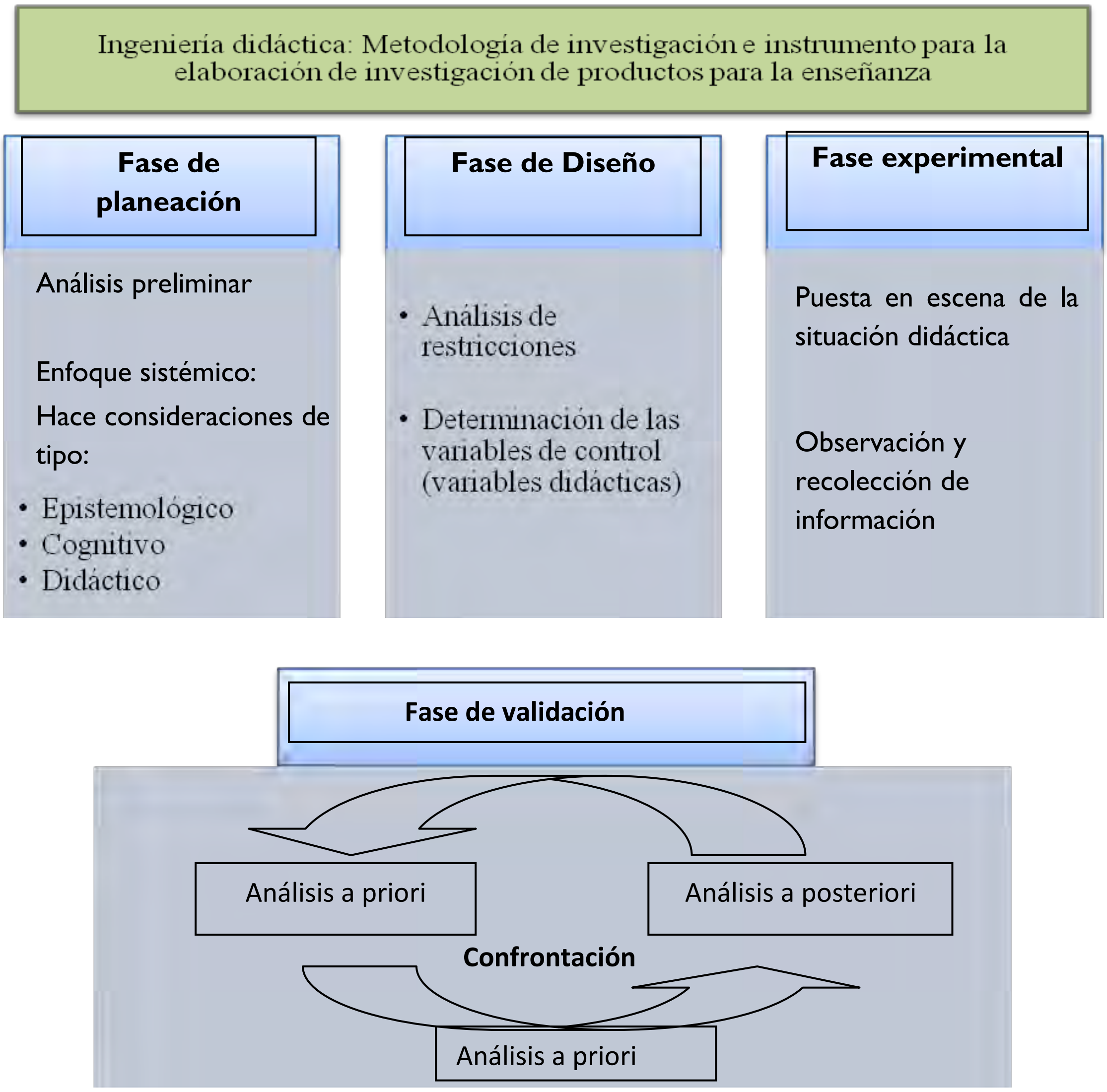
Situación de acción, aquí se genera la interacción entre los alumnos y el medio físico. Los alumnos deben tomar las decisiones que hagan falta para organizar su actividad de resolución del problema planteado.

Situación de formulación, el objetivo de esta situación es la comunicación en informaciones entre alumnos. Para esto deben de modificar el lenguaje que utilizan habitualmente, precisándose y adecuándolo a las informaciones que deben comunicar.

Situación de validación, aquí es donde los alumnos deben elaborar pruebas para demostrar sus afirmaciones y de esa forma convencer a uno o varios estudiantes de la validez de las afirmaciones que se hacen.

*Situación de institucionalización***,** ésta situación está bajo la responsabilidad del profesor, donde se intenta que el conjunto de alumnos de una clase asuma la significación socialmente establecida de un saber que ha sido elaborado por ellos en situaciones de acción, de formulación y de validación.

Esta parte teórica es fundamental para nuestro trabajo, ya que nos permitirá la organización y planificación de la propuesta que se pretende realizar con base en los resultados de otras investigaciones y enfocada al nivel medio superior. Por otra parte, la ingeniería didáctica será la metodología que nos conduzca determinar aquellos elementos que serán esenciales para el logro del objetivo de nuestro trabajo de investigación. Así, el proceso experimental de la ingeniería didáctica consta de cuatro fases como se muestra en el siguiente esquema de acuerdo con Lezama y Farfán (2001) y Artigue, (1995).



Esquema 2

Conclusión

De acuerdo con la información anterior, estamos en condiciones de realizar la propuesta de actividades que contribuyan a la comprensión del concepto de límite enfocada al Nivel Medio Superior de la UAGRO. Para comenzar asumiremos que el estudiante ha comprendido el concepto de límite, si es capaz de realizar actividades en las que use conocimientos previos elementales relacionados con el concepto de interés, así como explicar y relacionar el resultado de las tareas en las que dicho objeto matemático sea determinante. Por tanto en la propuesta de actividades se tomaran en cuenta los hallazgos hechos en cada uno de los aspectos presentados a lo largo de la investigación, por ejemplo: involucrar la idea geométrica que está relacionada con situaciones ligadas al contexto geométrico, como por ejemplo, la aproximación de áreas de polígonos inscritos en un circulo según se aumenta el número de lados. Por otro lado se atenderá lo propuesto en el programa de estudios donde se señala se aborden problemas relacionados con fenómenos físicos, químicos, biológicos, sociales, etc., por lo tanto es importante diseñar problemas que atiendan esa integración y vinculación, en la propuesta de actividades se cuidará que el estudiante trabaje y relacione el trabajo algebraico y gráfico del concepto de límite, así como su representación tabular.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. México: Una empresa docente, Grupo Editorial Iberoamérica.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques.* 7 (2), 33-115.

De Faria, E. (2006). Ingeniería Didáctica. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática.* 1(2)

Fernández, J., Locia, E., Meza, e. y Nájera, O. (2007) Matemáticas V. *Cálculo Diferencial,* Colectivo de la UAG (Texto para el alumno).

Ferrante, J. (2009). Una Introducción al Concepto de Límite (dos mil años en un renglón). Editorial de la U. T. N. Disponible en http://www.edutecne.utn.edu.ar

Gómez, C. y de la Fuente, A. (1998). Análisis de manuales escolares a través del tratamiento didáctico dado al concepto de límite de una función: una perspectiva desde la noción de obstáculo. *Enseñanza de las Ciencias.* 16(1), 73-84.

Lezama, J. y Farfán R. M. (2001). Introducción al estudio de la reproducibilidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 4(2), 161-193.

López, E. (2011). Un estado del arte sobre investigaciones cognitivas acerca del concepto de límite. El caso de habla hispana. Tesis de licenciatura no publicada, Universidad Autónoma de Guerrero. Chilpancingo, México.

Sierra, M., González, M., y López, C. (1999). Evolución historia del concepto de límite funcional en los libros de texto de bachillerato y curso de orientación universitaria (COU): 1940-1995. *Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales. Universidad de salamanca*

Sierra, M., González, M., y López, C. (2000). Concepciones de los Alumnos de Bachillerato y Curso de Orientación Universitaria Sobre Límite Funcional y Continuidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* 3(1), 71-85.

Vrancke, S., Gregorini, I., Engler, A., Muller, D. y Hecklein, M. (2006). Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite. *Facultad de Ciencias Agrarias. Universidad Nacional del Litoral.* Disponible en http://www.soarem.org.ar/Documentos/29%20vrancken.pdf

PLANES Y PROGRAMAS DE ESTUDIO UAG.

Programas de estudio. Área: Físico Matemático, para escuelas preparatorias de la Universidad Autónoma de Guerrero.

MODELACIÓN MATEMÁTICA EN LA RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Jorge Iván López Gómez, Ángel Homero Flores Samaniego
Telebachillerato del Estado de Veracruz México
jorgeivanxa@hotmail.com, ahfs58@yahoo.com.mx

Resumen. El presente trabajo se enfoca a realizar un estudio del impacto que tiene la Modelación Matemática en el aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales dentro del contexto de enseñanza Aprender Matemática, Haciendo Matemática.

Este modelo de enseñanza se fundamenta en el marco teórico de Vygotsky y se busca que el alumno desarrolle una Cultura Básica a partir de dos aspectos fundamentales:

Competencias: las cuales comprenden: el desarrollo de un pensamiento matemático, la capacidad de resolver problemas y el uso de tecnología,

Cualidades Personales: Las cuales se desarrollan al fomentar las cualidades personales y los Valores (Tolerancia, respeto y cooperación).

Palabras clave: modelación matemática, trabajo colaborativo

Abstract. This work focuses on a study about the impact of Mathematical Modeling on the learning of systems of linear equations within the context of teaching Learning Mathematics, Making Mathematics.

This didactic model is based on theoretical frameworks of Vygotsky and we find that the students make a Basic Culture from two fundamentals aspects:

Competences: which involve the development of mathematical thinking, the ability to solve problems and use of technology.

Personal Qualities: which are developed by encouraging personal qualities and values (tolerance, respect and cooperation).

Key words: mathematical modeling, collaborative work

El presente trabajo se encuentra inserto en el modelo de enseñanza *Aprender Matemática, Haciendo Matemática* (Flores, 2007) la cual tiene como objetivo fomentar una cultura básica en el estudiante, a partir de:

- El desarrollo del pensamiento matemático.
- Capacidad de resolver problemas.
- Uso de tecnología.
- Fomento de las cualidades personales.
- Fomento a los valores (Tolerancia, respeto y cooperación).

Para lograr estos objetivos, el modelo de enseñanza parte de dos premisas:

a) El estudiante debe ser el centro de todo el proceso de aprendizaje, por ello es él quien debe realizar la matemática, con el propósito de aplicar lo que ya conoce a situaciones nuevas y específicas, de esta forma, aprende la matemática al resolver nuevos problemas y establecer las nuevas relaciones entre conceptos.

b) El estudiante se desempeña mejor en compañía de otros seres humanos por lo cual debe de relacionarse con ellos, se hace necesario que el alumno se sienta seguro y en confianza para aprender dentro de una comunidad de convivencia armónica.

Dado que este modelo de enseñanza se encuentra centrado en el estudiante, se hace necesaria una empatía entre el profesor y los alumnos, donde el primero debe presentar una preocupación incondicional sobre el aprendizaje y los pensamientos críticos que desarrollarán sus alumnos.

Naturaleza del conocimiento

En el presente trabajo consideramos que el conocimiento es la capacidad que presenta un individuo para resolver una situación matemática, la cual se encuentra enmarcada en un contexto social. Consideramos que el conocimiento depende de dos aspectos, el primero de tipo cognitivo, que es la forma en cómo un individuo incorpora los nuevos conocimientos a su acervo cultural; y en segundo término, un aspecto socio-cultural que es tanto la fuente de información como la motivación para adquisición del conocimiento, por lo tanto, el individuo no puede ser sustraído de su contexto socio-cultural (Vygotsky, 1978), por ello, consideramos que el conocimiento depende, entre otras cosas, del contexto en que éste se de.

Los trabajos realizados por Vygotsky son conocidos como la perspectiva socio-histórica, la cual plantea que los procesos psicológicos superiores, como la percepción, el razonamiento lógico, el pensamiento y la memoria, se encuentran mediados por instrumentos de carácter social, ya que son productos de la actividad humana a lo largo de su vida (Vygotsky, 1932, 1934). Estas actividades se llevan a cabo dentro de un grupo de personas: comunidades o grupos sociales. Dentro de las tesis de Vygotsky se recalca que las actividades se desarrollan primero en los ámbitos sociales para después pasar al plano de lo personal.

> … en el desarrollo cultural del niño, toda función aparece dos veces: primero, a nivel social, y más tarde, a nivel individual; primero entre personas (intersicológica), y después, en el interior del propio niño (intrasicologica) (Vygotsky, 1932, p. 94)

Cuando hace referencia a “toda función” está mencionando a los “procesos psicológicos superiores” y según este autor, estos procesos tienen un origen en la cultura y no en las personas. Vygotsky (1932) se apoya para validar esta concepción a través de nociones como herramientas, las cuales a su parecer conectan las actividades entre las personas; estas herramientas son las que median la acción y por lo consiguiente conectan a los humanos no solo con los objetos del medio, sino también con otras personas, a causa de ello, las actividades humanas van encaminadas a asimilar la experiencia de la humanidad (Wertsch, 1997).

Con ello se hace referencia a que el uso de una herramienta (por ejemplo un martillo), implica no sólo su aplicación, sino también lleva implícito una larga historia para su uso, ya que puede ser utilizada como arma mortal, como una fuente de amenaza o también para realizar otras acciones las cuales no son precisamente las propias.

Conceptos enfocados al desarrollo de la cultura básica en cuanto a competencias

Dentro del modelo de enseñanza *Aprender Matemáticas, Haciendo Matemática* (Flores, 2007), se considera la existencia de un acoplamiento entre los enfoques centrados en el aprendizaje en general y el aprendizaje individual. Para ello se basa en cuatro dominios los cuales son:

- Metacognitivo y congitivo.
- Afectivo y motivacional.
- Social y de desarrollo.
- De factores de diferencias individuales.

Estos cuatro dominios, se engloban en las actividades de enseñanza y evaluación a partir de la creación de un ambiente de enseñanza-aprendizaje de cooperación.

Dentro del modelo *Aprender Matemática, Haciendo Matemática* (AMHM) se considera que un individuo posee una Cultura Básica en Matemática cuando:

El estudiante presenta un Pensamiento Matemático cuando es capaz de encontrar patrones que le lleven a una generalización y argumente sus resultados en términos de sus descubrimientos.

- El estudiante puede resolver problemas matemáticos ya sean dentro del mismo contexto matemático o fuera de él.
- La capacidad de utilizar la tecnología como una herramienta para facilitarle la resolución de problemas matemáticos y la adquisición de nuevo conocimiento.
- Presenta actitudes positivas cuando se enfrenta a tareas matemáticas, para ello debe de argumentar sus soluciones ante sus compañeros, con ello, el alumno observa que las actividades realizadas son para beneficio propio así como para sus compañeros.

- Valores humanos desarrollados a través de la convivencia con sus semejantes y su ambiente.

Para que el alumno desarrolle una Cultura Básica en Matemática debe estar inmerso en un ambiente en donde el estudiante se sienta responsable por la adquisición de su conocimiento, se fomenten conocimientos y competencias matemáticos básicas así como la promoción de actitudes y valores humanos.

De esta forma, se divide la Cultura Básica en dos aspectos fundamentales: Competencias y Cualidades Personales.

En el modelo de enseñanza AMHM, se entiende por competencia a la capacidad para el desarrollo de alguna cosa. Dentro de la Cultura Básica en Matemáticas, se consideran al Pensamiento Matemático, la Resolución de Problemas y Uso de la Tecnología como promotores de competencias. Estos tres aspectos engloban la mayoría de las competencias matemáticas que define Niss (2003) que fueron adoptadas por la Organización para lo Cooperación y el Desarrollo Económico (2005) en su evaluación Program for International Student Assessment (PISA, 2005).

En lo que referente a Cualidades Personales, hacemos referencia a una virtud o rasgo positivo que caracteriza a un individuo o grupo de personas, por ello, dentro de la Cultura Básica en Matemáticas son consideradas como Cualidades Personales las Actitudes Positivas hacia la matemática y los Valores Humanos.

En AMHM, las competencias se desarrollan a través de las actividades de enseñanza y evaluación, que tienen una doble función:

- Utilizar la matemática que conoce y aprender la que no conoce.
- Evaluar el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Las actividades de enseñanza - aprendizaje las dividimos en tres:

- *Actividades de exploración:* su propósito es que el estudiante al plantearle una serie de preguntas debe realizar conjeturas, donde será validada ante sus compañeros y con ello pone en juego sus esquemas de argumentación.
- *Actividades de modelación:* es aquí donde se utiliza la matemática de otros ámbitos del conocimiento. Definimos a la Modelación Matemática como los pasos que deben realizarse para la obtención de un modelo matemático el cual reproduzca los datos del fenómeno, ya sea estos de tipo físico, social o de cualquier otra área de conocimiento.

El modelo matemático es una expresión de tipo matemático como una ecuación, una función, una desigualdad o cualquiera de sus representaciones. Dentro de estas actividades, el alumno debe tomar decisiones sobre qué modelo se adapta mejor a la situación planteada así como los procedimientos para lograrlo. La modelación matemática se enmarcan en dos tipos de actividades:

- Actividades Piensa y actúa: Se le presentan al estudiante todos los datos o elementos para que logre obtener un modelo matemático el cual, reproduzca de la mejor manera la situación planteada.
- Actividades de Ajuste de Curvas: Son las actividades en donde al alumno se le presentan una serie de datos obtenidos a partir de una medición, con el propósito de que los manipule y obtenga un modelo matemático que represente de la mejor manera la gráfica de la situación planteada.

❖ *Actividades de problemas no rutinarios:* Son situaciones en donde al estudiante para resolverlas utiliza sus conocimientos, estrategias de resolución de problemas e ingenio para reconocer patrones y lograr la generalización.

Consideramos que el uso de la tecnología, (software o de calculadora CAS) fortalecen las actividades de enseñanza ya que a través de estas se facilitan las tareas matemáticas y propicia la comunicación entre los integrantes del grupo.

El experimento se realizó con los alumnos del segundo semestre del Telebachillerato de Tonayan, los cuales manifiestan no haber concluido su curso de Matemáticas 1, es decir, no estudiaron los temas referentes a ecuaciones lineales ni los métodos en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. El grupo de investigación se encuentra integrado por una matrícula de 25 alumnos, todos ellos con antecedentes de haber estudiado en alguna institución de Telesecundaria cuyas edades oscilan entre los 15 y 17 años de edad de los cuales 17 residen en la misma localidad y los restantes pertenecen a localidades cercanas al centro de estudio, a una distancia máxima de 3 km.

Metodología

El experimento se desarrolló bajo la visión de un curso adicional fuera de los contenidos curriculares del segundo semestre, ya que los temas referidos a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales no los habían estudiados en su curso anterior.

Se propone un conjunto de dos actividades para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales 2x2, una actividad que ayude a pasar de un sistema 2x2 a uno de 3x3, una actividad para los sistemas 3x3 y una última actividad de un sistema de ecuaciones lineales con varias variables. En todas las actividades no se pensó en la utilización de alguna tecnología (calculadoras, computadoras, etcétera) para el desarrollo de las actividades, por ello los alumnos trabajaron con lápiz, hojas de trabajo, goma y hojas milimétricas. Cada actividad se programó para realizarse en 45 minutos, durante su horario normal de Matemáticas.

Los objetivos perseguidos en el curso son los mismos que se presentan en el programa de estudios de la Dirección General de Bachillerato los cuales son:

- Reconoce el modelo algebraico de un sistema de ecuaciones con dos incógnitas.
- Resuelve e interpreta sistemas de ecuaciones dos incógnitas mediante el método:
    - Suma y Resta.
    - Sustitución.
    - Igualación.
    - Gráfico.
- Reconoce el modelo algebraico de un sistema de ecuaciones con tres incógnitas.
- Resuelve e interpreta sistemas de ecuaciones con tres incógnitas mediante el método:
    - Suma y Resta.
    - Sustitución.
    - Igualación.

Los objetivos que se buscan en nuestra investigación son:

- Desarrollar una estrategia de enseñanza aprendizaje en el tema de sistemas de ecuaciones lineales acorde al modelo *Aprender Matemática, Haciendo Matemática.*
- Investigar cómo afecta el modelo de enseñanza *Aprender Matemática, Haciendo Matemática* en el aprendizaje de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

En cada actividad planeada, los alumnos se integran en equipos de dos (Solo un equipo trabaja con tres integrantes), y en cada sesión los integrantes son rotados. Se les permite, de acuerdo al modelo de enseñanza aprendizaje *Aprender Matemática, Haciendo Matemática* que los integrantes de los equipos puedan intercambiar ideas con otros equipos, además, el instructor (el que escribe) participe en la dinámica de clases monitoreando las actividades de los alumnos y en algunas ocasiones dando sugerencias sobre cómo resolver el problema o llevando una sugerencia que algún equipo ha planteado.

Al final de la actividad, los alumnos deben intercambiar sus procedimientos y métodos de solución, a través de la argumentación con el propósito de que ellos mismo validen sus resultados o en caso de presentar alguna discrepancia, argumento los porqués de ello.

Justificación de las actividades propuestas

Las actividades se desarrollan pensando que el nivel cognitivo necesario para resolverlos aumente representando al alumno un nuevo reto y a su vez le sea motivante. Por ello, se realizó un análisis de como la guía de Matemáticas I, que se utiliza en el Telebachillerato del Estado de Veracruz; se observa que el método gráfico para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales 2x2 se presenta al final del bloque. Para nuestro caso se decidió empezar con el método gráfico, ya que creemos que no se requieren niveles cognitivos altos para entenderlo.

La Actividad 1 se encuentra diseñada para que el alumno busque la respuesta al problema a través del método de graficación. En una primera instancia, se solicita a los alumnos que busquen las expresiones algebraicas donde se representen las condiciones del enunciado, posteriormente se solicita una tabulación de ambas ecuaciones y que encuentren los valores de la segunda variable. Los valores encontrados deberán ser graficados y se deberá localizar el punto de intersección de ambas gráficas. Esta actividad, es considerada como una actividad de exploración.

La Actividad 2 se encuentra enmarcada dentro de las actividades de modelación, específicamente dentro de la forma Piensa y Actúa del modelo de enseñanza *Aprender Matemática, Haciendo Matemática*; en ella, el alumno debe encontrar dos ecuaciones con dos incógnitas y contestar las preguntas al ejercicio. Los alumnos deberán buscar opciones para resolver estos sistemas, empleando cualquiera de los tres posibles métodos (sustitución, suma resta y eliminación), se tiene la tesis de que los alumnos encontraran diferentes maneras de resolver la actividad y que cada grupo exprese su método; al final deberán elegir cuál de los 3 métodos les acomoda mejor de acuerdo con su gusto personal.

La Actividad 3 se encuentra encuadrada dentro de las actividades de Ajuste de Curvas en la Modelación Matemática. Esta actividad tiene un doble propósito, por una parte el alumno busca un modelo que se ajuste mejor al problema y por otra, dicho ajuste se realiza a través de la resolución de sistemas lineales.

La Actividad 4 se enmarca dentro de las actividades de Piensa y Actúa buscando la solución al problema de un sistema de ecuaciones de 3x3. En esta actividad se busca verificar el grado de dominio por parte de los estudiantes sobre los temas abordados.

La Actividad 5 se considera un problema no rutinario en donde el alumno, para poder resolverla, tendrá que poner en juego los conocimientos adquiridos durante la experiencia. Esta actividad también puede ser considerada como de Modelación Matemática.

Resultado y conclusiones

Al momento de realizar el presente reporte, el experimento se encuentra en su proceso de aplicación y en el análisis de los instrumentos de evaluación sin embargo, podemos comentar que en las actividades planeadas existe una mejora el aprendizaje de los métodos utilizados para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, es decir, la Modelación Matemática presenta un impacto importante en el aprendizaje de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales dentro de nuestro modelo de enseñanza *Aprender Matemática, Haciendo Matemática*

Referencias bibliográficas

Flores, A. H. (2007). Aprender Matemática, Haciendo Matemática: modelo de enseñanza centrado en el estudiante. *Acta Scientiae* 9.

Niss, M. (2003). The Danish KOM project and possible consequence for teacher education. En R. Strässer, G Brandell & B. Grevholm (Eds.) *Educating for the future. Proceedings of an international symposium on mathematics teacher education,* 179-192. Göteborg: Royal Swedish Academy of Sciencies.

OCDE (2005) *Informe PISA 2003 Aprender para el mundo del mañana.* Madrid. Santillana

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in Society*, *The development of Higher Psychological Processes.* Harvard University Press.

Vygotsky, L. (1932). *El Desarrollo de los Procesos Psicológicos Superiores*. México. Grijalbo.

Vygotsky, L. (1934). *Pensamiento y Lenguaje*. Barcelona: Paidós.

Wertsch, J. (1997). *Memoria colectiva: cuestiones relacionadas con una perspectiva sociohistórica.* En M. Cole, Y. Engestra, O. Vazquez. *Mente, Cultura y Actividad*, 183-188. México: Oxford.

MECANISMOS DE VALIDACIÓN EN TRANSFORMACIONES ANALÍTICAS. UN ESTUDIO BASADO EN EL ANÁLISIS DE ARGUMENTOS

Florida Pastrana Juárez, Guadalupe Cabañas-Sánchez, Yadira Lizette Villarreal Calderón, Armando Morales Carballo
Universidad Autónoma de Guerrero México
flor_jua_10@hotmail.com; gcabañas.sanchez@gmail.com; ylvc2004@hotmail.com; armando280@hotmail.com

Resumen. El artículo analiza desde los argumentos presentados por estudiantes universitarios, cómo validan una conjetura en torno a la conservación del área de regiones planas. Tomamos como base, los argumentos que ponen en juego para justificar transformaciones analíticas vinculadas a regiones planas. Nos apoyamos para ello en el modelo argumentativo de Toulmin (Toulmin, 1958), donde la garantía es un elemento fundamental en la validación de una tesis o conjetura por parte del argumentador. Los resultados indican que los estudiantes se validan sus resultados en la fórmula de polígonos como el cuadrado, así como en la integral definida, a fin de conservar una medida de área.

Palabras clave: argumentos, conservación del área, modelo argumentativo, transformaciones analíticas

Abstract. The paper analyzes from the arguments presented by university students, how they validate a conjecture concerning the conservation of the area of plane regions. We take into account the arguments they used to justify analytical transformations linked to plane regions. We used Toulmin´s argumentative model (Toulmin, 1958), where the guarantee is a fundamental element in the validation of a thesis or conjecture on the part of the arguer. The results indicate that the students validate their results in the formula of polygons as the square, as well as in the integral defined, in order to conserve a measure of area.

Key words: arguments, conservation of the area, argumentation model, analytical transformations

Introducción

Este artículo analiza *los recursos argumentativos que emplean estudiantes universitarios para validar una conjetura en torno a la conservación del área, en el contexto de las transformaciones analíticas.* Nuestro marco de análisis son las estructuras argumentativas reconstruidas desde los argumentos escritos y verbales presentados por estudiantes universitarios al momento de conservar la medida del área de una región plana, debajo de la curva de una función continua, en un intervalo cerrado. El estudio de los argumentos se sustenta en el modelo argumentativo de Toulmin (Toulmin, 1958), donde la garantía es fundamental en la validación de una tesis o conjetura por parte del argumentador.

La investigación se desarrolló con 32 estudiantes (19-21 años) de una licenciatura en matemáticas, quienes recién habían estudiado el concepto de integral definida —vista como área bajo una curva— así como métodos y técnicas de integración, considerados básicos, a fin de que estuviesen en codiciones al menos hipotéticamente, de intervenir en las situaciones planteadas. El estudio se llevó a cabo mediante cuatro actividades, que los participantes discutieron en equipos de tres integrantes, durante tres sesiones de dos horas cada una aproximadamente. Las sesiones de trabajo fueron videograbadas para su posterior análisis. Por razones de espacio, en este manuscrito se discute una de las situaciones propuestas.

El estudio de argumentos

El estudio de los argumentos producidos por estudiantes y matemáticos ha sido un tema central de investigación en nuestra disciplina, la Matemática Educativa (Inglis, Mejía-Ramos & Simpson, 2007). Su estudio se apoya fundamentalmente en las prácticas discursivas, a través del análisis de textos y de los usos de la lengua verbal y no verbal (Cabañas-Sánchez & Cantoral, 2010). De manera que la argumentación se articula con la confrontación de significados, de reglas, de propiedades o procedimientos matemáticos entre los estudiantes o bien entre su profesor, originándose cambios discursivos al justificar razonamientos.

El interés por el estudio de los argumentos se justifica en los procesos de validación matemática, así como en la construcción de pruebas o demostraciones matemáticas (Fischbein, 1982; Recio & Godino, 2001; León & Calderón, 2001; Crespo & Farfán, 2005, Cabañas-Sánchez & Cantoral, 2010). La validación, como bien sabemos, es un tema importante en la enseñanza de las matemáticas y se sustenta de conceptos sobre objetos, relaciones y procedimientos propios de la disciplina. Este concepto engloba tanto a los procesos de prueba deductiva como a la actividad que involucra a la persuación sistemática, basada en un punto de vista personal (Lannin, 2005; Harel & Sowder, 1998 citados en Lew & So, 2008). En consecuencia, implica razonamiento, así como la elaboración de explicaciones o justificaciones, donde los argumentos desempeñan un papel central. Por ello compartimos la postura de León y Calderón (2001), quienes sostienen que con la validación se busca demostrar la verdad de un enunciado o una teoría y lograr la adhesión de un público a ese enunciado o teoría.

El modelo argumentativo de Toulmin

Un concepto fundamental para Toulmin (1958) es el de argumentación, quien lo entiende como la exposición de una tesis controvertida, el examen de sus consecuencias, el intercambio de pruebas y buenas razones que la sostienen, y una clausura bien o mal establecida. El modelo argumentativo está constituido por seis elementos básicos a los que denominamos categorías, cada una desempeña un papel diferente en un argumento. Los elementos que lo constituyen son: La aserción (A) es la tesis a defender, a debatir, por parte del que argumenta ya sea en forma oral o escrita. La evidencia (E) es la información en la cual se basa la aserción. La garantía (G) justifica la conexión entre evidencia y aserción haciendo referencia, ya sea por medio de una regla, una definición, o mediante una analogía. La garantía es apoyada por el soporte (S) a través de nueva evidencia. El calificativo modal (C) especifica el grado de certeza, la fuerza de la aserción, expresando el grado de confianza en la tesis; y la refutación (R) presenta las excepciones de la aserción. Las seis categorías del modelo están conectadas en la estructura que se muestra en la Figura

1. Categorías que no siempre van a estar explícitas en un texto argumentativo.

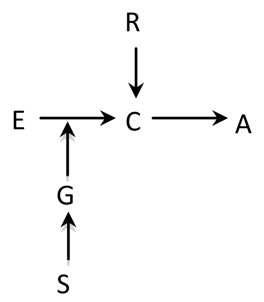


Figura 1. Estructura del modelo argumentativo de Toulmin.

Inglis, Mejia-Ramos & Simpson (2007) sostienen que cuando se modelan argumentos apoyados en el esquema argumentativo de Toulmin, se da el caso en que algunas partes del argumento no son verbalizados explícitamente por el argumentador. Se refieren explícitamente al soporte y a la refutación o excepción a la regla. Y aun cuando todos los elementos contribuyen a la reconstrucción de las estructuras argumentativas, es claro que la garantía presentada por el argumentador, es la que le dará validez o no a sus argumentos; apoyados en datos explícitos o implícitos, asimismo, de conceptos, relaciones matemáticas y procedimientos.

La noción de conservación del área en transformaciones analíticas

Las nociones de conservación del área y transformaciones analíticas son claves en este trabajo y se comprenden en sentido de Cabañas-Sánchez (2011), quien las caracteriza como sigue:

Conservación del área

> "... modificación que no produce cambios en un área. Significa que el valor de un área permanece sin cambios mientras su figura puede ser transformada a otra cualitativamente nueva. Puede darse a partir del cambio de posición de una figura sin modificar su forma, al realizar movimientos como la rotación, traslación y reflexión (Cabañas-Sánchez, 2011, p.70)".

Las *transformaciones analíticas* se comprenden por la autora como sigue:

Se conciben como aquellas que se derivan de un conjunto de operaciones algebraicas sobre expresiones analíticas relativas a la integral definida. El resultado de tales transformaciones es un número real y positivo que representa el valor de un área, situado bajo la representación gráfica de una función continua en un intervalo cerrado. La obtención de dicho número se fundamenta en definiciones, propiedades de los números y de objetos matemáticos como función continua, noción de intervalo, partición del intervalo, integral indefinida y definida. La interpretación geométrica de estas representaciones en el intervalo dado, revelan *cambio de forma* o de *posición* o bien ambas; la medida del área correspondiente *se conserva*.

Desde el punto de vista de la matemática, las transformaciones analíticas (Cabañas-Sánchez, 2011, p. 72) a las que aludimos y que comprenden la conservación del área, verifican las propiedades siguientes:

Sea *R* una función de variable real de la forma $f(x) = kx^n$ con $k > 0$, en un intervalo cerrado $a \leq x \leq b$, a, $b \in R$, continua en dicho intervalo y, por tanto, diferenciables en el intervalo abierto.

A(*R*)= Valor del área bajo la curva de *R*.

Sea *T* una transformación sobre *R* tal que *T*(*R*) es nuevamente una función y *A*(*T*(*R*)) el valor del área de *T*(*R*).

Entonces *A*(*T*(*R*))=*A*(*R*).

La relación *A*(*T*(*R*))=*A*(*R*) se verifica a partir de transformaciones sobre funciones continuas, definidas en un intervalo cerrado, en las que se localizan: 1) el método de cambio de variable; 2) el método para determinar coeficientes de una función polinómica, definida en un intervalo cerrado dado, con la condición de que el área se conserve; 3) transformar una región de área en otra, sin que su medida se altere, y; 4) determinar a partir de los parámetros de funciones polinómicas de grado *n*, qué familia de funciones son las que conservan el área debajo de la curva de su representación gráfica.

Resultados y discusión

La actividad. La actividad que se discute es la siguiente:

Considera las siguientes expresiones $f(x) = 4$; $g(x) = ax$; $h(x) = bx^2$. Encuentra los valores de *a* y *b* de manera que la región formada por la gráfica de la función y el eje *x* sobre el intervalo [0, 4] tenga la misma área. Bosqueja geométricamente.

Una primera acción de los estudiantes fue la representación del área debajo de la gráfica de la función $f(x) = 4$ en el intervalo [0,4]. Sin dificultad reconocieron que dicha región representaba un cuadrado. En consecuencia, tenían claro que la medida de área a conservar era precisamente la de ese polígono. Una mayoría la determinó mediante la fórmula $l \times l$, otros, mediante la integral definida (Figura 2).

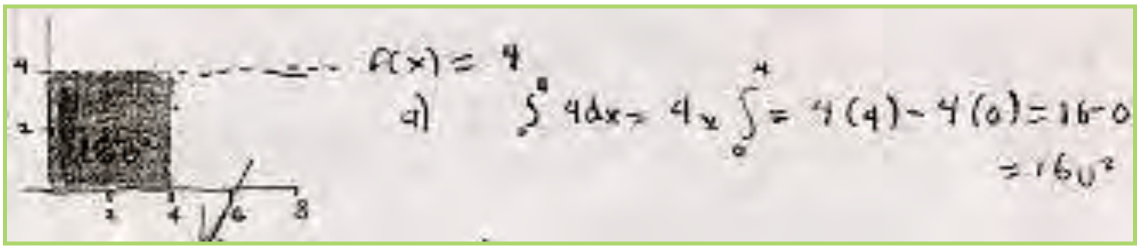


Figura 2. El uso de la integral definida en la determinación del área debajo de la curva de una función lineal.

Quienes validaron sus argumentos en la integral definida, usaron la fórmula que establece que la integral definida de la función *f*(*x*) en el intervalo $[a,\ b]$ es igual a la diferencia entre los valores de cualquiera de sus primitivas en los extremos superior e inferior del intervalo. Es decir, por medio de la resta:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

A través de los argumentos de los estudiantes se documenta que muchas veces "no recuerdan como resolver la resta" y recurren al profesor a fin de que les diga cómo se resuelve.

Para representar las regiones de área asociadas a las funciones lineal y cuadrática, tenían claro que debían determinar el valor de los parámetros *a* y *b*, aunque inicialmente se les dificultó entender cómo proceder. Una vez que determinaron el valor de los parámetros *a* y *b* mediante la integral definida representaron las regiones de área correspondientes. Primero, en palabra de los estudiantes "*calculamos la integral definida*" y luego "*igualamos el resultado con dieciséis*". Esto es, representaron una integral definida para determinar el valor de cada parámetro y la igualaron a dieciséis. Una vez obtenido los valores, los sustituyeron en las funciones *g*(*x*) y *h*(*x*) y posteriormente representaron las regiones de área. En la figura siguiente, se muestra la reconstrucción de los argumentos presentados por el equipo 1.

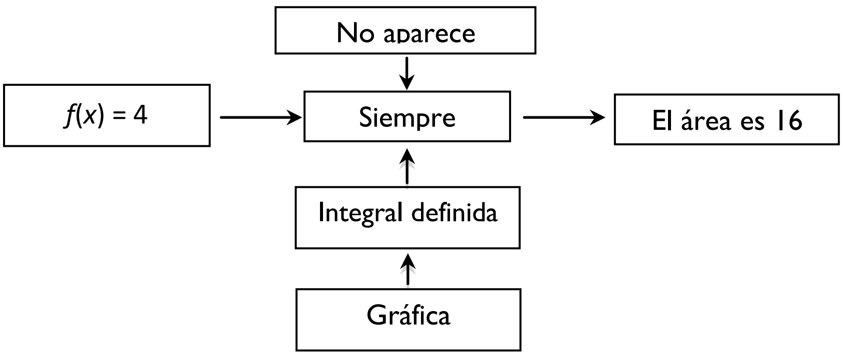


Figura 3. Estructura argumentativa reconstruida de los argumentos que validan el inciso a de la actividad.

Los estudiantes que recurrieron a la integral definida para determinar la medida del área de la región situada debajo de la gráfica de la función $f(x) = 4$ en el intervalo [0,4], argumentaron su uso porque "*recuerdan que la integral es el área*" o *"porque son funciones y como se pide encontrar el área"*.

Conclusiones

Dos mecanismos de validación aparecieron en los argumentos escritos y verbales de los estudiantes, para garantizar que la medida del área de una región se conserva: a). Fórmulas básicas para calcular el área de polígonos (cuadrado y el triángulo) y b) la integral definida. La primera, al reconocer que debajo de la gráfica de una función constante, la región representa una figura conocida, un cuadrado; en consecuencia también usaron la fórmula correspondiente para determinar la medida del área de ese polígono. Esta medida de área debían determinarla a fin de saber cuál era medida de área a conservar. La segunda, para regiones de área más complejas. La representación gráfica apareció a modo de soporte al momento en que justificaron la medida de área a conservar. Por ejemplo, para indicar que se trataba de un polígono que les era familiar.

Referencias bibliográficas

Cabañas-Sánchez, G. (2011). *El papel de la noción de conservación del área en la resignificación de la integral definida. Un estudio socioepistemológico* (tesis de doctorado inédita). México: Cinvestav-IPN.

Cabañas-Sánchez, G. & Cantoral, R. (2010). Exploring de notions of comparison, conservation and measurement of the area in university students. A study through their arguments. In M.M. Pinto and T.F. Kawasaki (Eds), *Proceedings 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 241-248). Belo Horizonte, Brazil: PME.

Cabañas, G. & Cantoral, R. (2009). Perception of the notions of conservation, comparison and measurement of the area. A study through arguments in the classroom. *Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica), Supplemento n.4 al n. 19*, 97-104.

Crespo, C., Farfán, R.M. (2005). Una visión socioepistemológica de las argumentaciones en el aula. El caso de las demostraciones por reducción al absurdo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 8*(3), 287-317.

Crespo-Crespo, C., Farfán, R.M. & Lezama, J. (2009). Algunas características de las argumentaciones y la matemática en escenarios sin influencia aristotélica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 12* (1), 287-317.

Fischbein, E. (1982). 'Intuition and proof'. *For theLearning of Mathematics 3*(2), 9–24.

Inglis, M., Mejia-Ramos, J.P., Simpson, A. (2007). Modelling mathematical argumentation: the importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics,* 66(1), 3-21. doi: 10.1007/s10649-006-9059-8.

León-Corredor, O.L. & Calderón, I. (2001). Validación y argumentación de lo matemático en el aula. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4*(1), 5-21.

Lew, H.Ch & So, K. N. (2008). Two justification processes in solving algebraic Problem using graphing technology. In O. Figueras, J.L. Cortina, S. Alatorre and T. Rojano (Eds), *Proceedings 32th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 113-120). Morelia, Mich, Mexico: PME.

Recio, A. & Godino, J. D. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics 48* (1), 83-99.

Toulmin, S. (1958). *The uses of argument.* UK: Cambridge University Press.

REPRESENTACIONES GRÁFICAS. UNA ESTRATEGIA DIDÁCTICA EN EL PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PROBABILIDAD

Miguel A. Herrera M., Oliver Texta M., Juan Villagómez M., Pericles Ramírez J., Israel Herrera., Abraham Rivera M
Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero México
herrerapolo@hotmail.com,israel_hm@hotmail.com

Resumen. Este artículo es el reporte del taller sobre técnicas y estrategias gráficas para la resolución de problemas de probabilidad, llevado a cabo en el Relme 25 celebrado en la Cd. de Camaguey, Cuba, bajo objetivos didácticos que abordan la enseñanza aprendizaje de la probabilidad en el nivel superior. Para ello se seleccionaron y presentaron para su análisis diversos tipos de problemas con el fin de presentar las técnicas apropiadas para su solución. Se contó con la participación de profesores y estudiantes en la construcción colectiva de los significados, a partir de una situación didáctica representada por el planteamiento de problemas de probabilidad que requieren diferentes estrategias en la búsqueda de soluciones. Siguiendo recomendaciones de la Teoría de situaciones didácticas de Brousseau (1997)..

Palabras clave: resolución problemas de probabilidad, técnicas estrategias

Abstract. This article is the report of the workshop on technical and visual strategies for solving probability problems, carried out in Relme 25 held in the city of Camagüey, Cuba, with learning objectives that address the teaching and learning of probability in the higher education level. To do this we selected and submitted for review different types of problems in order to present the appropriate techniques for their solution. The workshop was based on the participation of teachers and students in the collective construction of meanings, from a teaching situation represented by approaching probability problems that require different strategies for their solutions. In order to achieve this, we followed the recommendations of the Theory of Didactic Situations by Brousseau (1997),

Key words: probability solved problems; techniques

Introducción

La enseñanza de la probabilidad y estadística ha presentado un gran desarrollo en los últimos años, debido a su creciente aplicación en varios campos de la ciencia, la tecnología, las disciplinas sociales y administrativas. Muchos países hacen grandes esfuerzos en el diseño de currículos, y materiales específicos, en los diferentes niveles de enseñanza de la Probabilidad y Estadística. Este esfuerzo también se manifiesta, en la existencia de revistas especializadas y eventos locales e internacionales que fomentan el desarrollo y fortalecimiento de una cultura estadística.

Por otra parte, se han detectado dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los conceptos de la probabilidad, lo cual incide en la calidad de la educación, representando una problemática social que se expresa en la reprobación y deserción de los estudiantes.

Existen varias razones que justifican la propuesta de este taller: la primera es, la referente a nuestra experiencia como docentes: hemos percibido que los temas de probabilidad son de lo más complejo para los estudiantes de todos los niveles educativos; así lo reporta también la literatura en Educación Estadística (Batanero, Navarro-Pelayo & Godino, 1997). La segunda, es que en el currículo de probabilidad en nuestro sistema educativo en México está presente desde el nivel básico al superior, pero los alumnos terminan su instrucción sin haber adquirido el conocimiento y comprensión de significados. La tercera es que, así como los estudiantes tienen dificultades para entender la probabilidad, los profesores tenemos gran dificultad para enseñarla de manera comprensiva y clara. Esta problemática está asociada a varios factores: no hay mucha investigación en este campo que oriente a los profesores (Kavousian, 2005), no hay suficientes recursos didácticos para apoyar la enseñanza; los libros de texto que se usan para enseñar probabilidad y estadística, dan mayor importancia al procedimiento que a la comprensión, y el acercamiento exploratorio es reducido (Ortiz, Batanero, y Serrano, 2007).

Marco teórico

En la teoría de situaciones didácticas, Brousseau nos habla de la *situación didáctica* (*relación didáctica* (Flores y Barrera, 1999). Este es un sistema de interacciones constituido por el estudiante (o grupo de estudiantes). Esta interacción es, el profesor y un saber determinado (los problemas propuestos por él Una *situación-didáctica* (o fase de la situación didáctica) está asociada con un espacio y tiempo donde la gestión de la situación recae enteramente en el estudiante según Brousseau, citado por Godino (2003). El profesor inicia, establece y monitorea la actividad del estudiante (y el aprendizaje asociado) mediante el manejo de la evolución de la situación. Haciendo esto el profesor define el *contrato didáctico* que gobierna la *relación didáctica* y define las condiciones de su existencia. Este *contrato* es un juego de reglas y estrategias de la *situación didáctica*. En otras palabras, es la justificación que el profesor tiene para presentar esta situación. Es el juego de actitudes que el estudiante espera del profesor y que el profesor espera del estudiante (Brousseau, 1997).

En cada situación a-didáctica, *término definido por Brousseau (1997),*está presente el momento de validación que puede ser establecido entre los estudiantes o entre el estudiante y el profesor. Es decir se discute la verdad y la eficacia de la solución. Para la validación de los conocimientos matemáticos generados por el estudiante, se supone que la argumentación se da como condición necesaria. En la *Teoría de situaciones didácticas*, el momento de la validación juega un papel crucial debido a que la aceptación de una estrategia de solución está acompañada de una prueba o una demostración (Guerrero, Sánchez, y Lurduy, 2005).

Desarrollo del taller

Explicación del propósito y modalidad de trabajo del presente taller.

El equipo de trabajo tiene que ser capaz de analizar, discutir, socializar y presentar diversas propuestas de solución a los problemas planteados. Haciendo hincapié en los criterios de selección para el trabajo en el aula como son: 1.Heterogeneidad. Los grupos no deben ser estudiantes autoseleccionados. 2. Recalcar la importancia de tiempo para trabajar en grupo en tareas fuera de clase. 3. Evitar el aislamiento de estudiantes en situación de riesgo en los equipos.

Se presento y detallo la información que se requiere para mediante la técnica expositiva e interactiva, de las actividades propias del taller, mostrando la forma de trabajo para las sesiones, presentando los problemas seleccionados con el fin de evidenciar las diversas formas conceptuales y esquemáticas del tratamiento y resolución de los mismos.

Debido a la complejidad de los problemas seleccionados fueron presentados para su discusión entre los integrantes del taller, orientados por los expositores. Este análisis guiado nos permitió bosquejar y poner en contexto los problemas planteados, identificando los aspectos relevantes presentando las diversas formas conceptuales y esquemáticas del tratamiento y resolución de los mismos, así como expresiones algorítmicas. Se analizaron y discutieron los problemas junto con propuestas bajo la estrategia siguiente:

1) Esquematizar, diagramas, dibujos y/o tablas (modelos matemáticos).
2) Técnicas de conteo
3) Codificación:
4) Aplicación de los Axiomas de probabilidad
5) Operaciones algebraicas
6) Interpretación y conclusión

M1.1. Un dado se construye de tal forma que un 1 o un 2 ocurran dos veces más frecuentemente que un 5, mismo que se presenta tres veces más seguido que un 3, un 4 o un 6.

De acuerdo al enunciado podemos construir la distribución de probabilidades.

x	1	2	3	4	5	6	Sumatoria P(x)
P(x)	2a	2ª	a/3	a/3	a	a/3	6 a = 1

Es posible construir un modelo algebraico que nos permita calcular probabilidades para cada uno de los resultados posibles.

$2a + 2a + a/3 + a/3 + a + a/3 = 6a$	$\Rightarrow$ $a = 1/6$

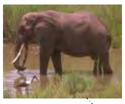
Si el dado se lanza una vez, encuentre la probabilidad de que:

a) El número sea par $P(2)+P(4)+P(6) = 2a + 2a/3 = 1/3 + 1/9 = 4/9$

b) El número sea un cuadrad o perfecto $P(1) + P(4) = 2a + a/3 = 7a/3 = 7/18$

c) El número sea mayor que 4. $P(5) + P(6) = a + a/3 = 4a/3 = 2/9$

M1.2. En una prueba aplicada a niños pequeños, se les pide hagan corresponder cada uno de los tres dibujos de animales con la palabra que identifica a cada animal. Si los niños no saben leer tendrán que asignar aleatoriamente las tres palabras con los tres dibujos. Encuentre la distribución de probabilidad para X, el número de correspondencias correctas.

 = 1	Gato = G	1° .- Codificamos figura y palabra
 = 2	Pato = Pa	2°.- Valores de X = 0,1,2 (cero, uno y dos aciertos) sí acierta 2 el 3° también.
 = 3	Elefante = E	3°.- Aplicamos técnicas de conteo para conocer el espacio muestral calcular probabilidades.

Empecemos por la probabilidad de acertar las tres relaciones de figura y palabra.

⇨ *Relacionar correctamente tres pares:*

[1 y E] = A	[2 y G] = B	[3 y Pa] = C	*Codificamos cada par de Figura y palabra Correctamente.*
A	B	C	*Existen 6 maneras diferentes como Pueden suceder tres relaciones correctas " Como son tres" A B C Permutados = 3! = 6 casos de 36*
A	C	B	
B	A	C	
B	C	A	
C	A	B	
C	B	A	

Analicemos la probabilidad de dos aciertos que es lo mismo para tres aciertos.

P(2 aciertos) = [P(1) P(E)] [P(2) P(G)] [P(3)P(Pa)]
P(2 aciertos) = [(1/3) (1/3)] [(1/2) (1/2)] [(1/1) (1/1)] = (1/36) (6) = 6/36 = 1/6
P(1)=P(E)=1/3 (Ya que tenemos tres figuras y tres palabras y solo escogemos una de cada una), P(2)=P(G)=1/2 (solo quedan dos figuras y dos palabras y solo escogemos una de cada una). Solo queda una figura y una palabra P(3)=P(Pa)=1

Para el caso de obtener un acierto tenemos tres casos:

Caso I P(1 acierto) = [P(1) P(E)] [P(2) P(Pa)] [P(3)P(G)] *(solo un par es correcto)* A *(acierta)* D *(falla)* E *(falla) codificamos*
Caso II P(1 acierto) = [P(2) P(G)] [P(1) P(Pa)] [P(3)P(E)] *(solo un par es correcto)* B *(acierta)* F *(falla)* H *(falla) codificamos*
Caso III P(1 acierto) = [P(3) P(Pa)] [P(2) P(E)] [P(1)P(G)] *(solo un par es correcto)* C *(acierta)* I *(falla)* J *(falla) codificamos*
P(1 acierto) = [(1/3) (1/3)] [(1/2) (1/2)] [(1/1) (1/1)] = (1/36) (6) = 6/36 = 1/6 (*Para cualquiera de los tres casos la probabilidad es 1/6)*
P(1)=P(E)=1/3 (Ya que tenemos tres figuras y tres palabras y solo escogemos una de cada una), P(2)=P(Pa)=1/2 (solo quedan dos figuras y dos palabras y solo escogemos una de cada una). Solo queda una figura y una palabra P(3)=P(G)=1

Caso I A D E Permutamos 3 != 6				
Caso II B F H Permutamos 3! = 6				
Caso III C I J Permutamos 3! = 6 *Total 18 casos de 36*				
P(0 aciertos) = 1- P(2 aciertos) - P(1 acierto) = 1 – 1/6 – 1/2 = 2/6 = 1/3				
x	0	1	2	Sumatoria P(x)
P(x)	2/6=1/3	18/36=1/2	6/36=1/6	12/36+18/36+6/36 = 1

M1.3. Mr. Bandido es un bien conocido ranchero y no tanto bien conocido como ladrón de ganado (abigeo). Mr. bandido tiene 20 cabezas de ganado listas para venderlas, 16 de estas cabezas son de Mr. bandido y consecuentemente tienen su hierro (marca) las otras 4 tienen hierros (marcas) diferentes. Mr. bandido conoce que el inspector en la plaza de venta del ganado checa el 20% de cualquier envío de ganado, Mr. bandido tiene dos camiones uno con capacidad para todas las cabezas de ganado y otro con capacidad de 10 vacas. Mr. bandido considera que tiene cuatro estrategias diferentes para seguir en su intento de comercializar sin ser atrapado.

a) Defina las estrategias de Mr. Bandido.

b) ¿Cuál estrategia minimiza la probabilidad de que Mr. bandido sea descubierto?

c) ¿Cuál es la probabilidad de ser descubierto bajo cada estrategia?

Códigos: 1 = vaca legal 0 = vaca robada

Estrategia1: Utilizar el camión de capacidad 20 cabezas un sólo envío.

Caso	*Xi=cantidad cabezas robadas*	*20% de 20= 4 vacas a inspeccionar*				*Cada caso puede ocurrir de:*	*P(Xi)*
		1ª vaca	*2ª vaca*	*3ª vaca*	*4ª vaca*		
I	0	1	1	1	1	1 manera	364/969
II	1	1	1	1	0	4 maneras	casos que puede ser descubierto suman 605/969
III	2	1	1	0	0	6 maneras	
IV	3	1	0	0	0	4 maneras	
V	4	0	0	0	0	1 manera	

Caso I no lo descubren P(X=0) = (16/20)(15/19)(14/18)(13/17) = 364/969

Casos II,III,IV y V es descubierto por lo tanto:

Sabemos que: P(S)= 1= P(0)+P(1)+P(2)+P(3)+P(4)

P(1)+P(2)+P(3)+P(4) = 1 – P(0) = 1- 364/969 = 605/969 = 0.6243

Estrategia 2: Utilizar el camión de capacidad 10 cabezas dos envíos.

1er envío 10 vacas legales no es descubierto.

2° envío 10 vacas 6 legales 4 robadas

Caso	*Xi=cantidad cabezas robadas*	*20% de 10= 4 vacas a inspeccionar*		*Cada caso puede ocurrir de:*	*P(Xi)*
		1ª vaca	*2ª vaca*		
I	0	1	1	1 manera	1/3
II	1	1	0	2 maneras	casos que es descubierto suman 2/3
III	2	0	0	1 maneras	

Caso I no lo descubren P(X=0) = (6/10)(5/9= 30/90= 1/3

Casos II y III es descubierto por lo tanto:

Sabemos que: P(S)= 1= P(0)+P(1)+P(2

P(1)+P(2)= 1 – P(0) = 1- = (6/10)(5/9)= 1-1/3= 2/3= 0.6666

Estrategia 3: Utilizar el camión de capacidad 10 cabezas dos envíos.

1er envío de 10 vacas 9 legales y 1 robada.

Caso	*Xi=cantidad cabezas robadas*	*20% de 10= 4 vacas a inspeccionar*		*Cada caso puede ocurrir de:*	*P(Xi)*
		1ª vaca	*2ª vaca*		
I	0	1	1	1 manera	4/5
II	1	1	0	2 maneras	1/5 desc.

2° envío de 10 vacas 7 legales y 3 robadas.

Caso	*Xi=cantidad cabezas robadas*	*20% de 10= 4 vacas a inspeccionar*		*Cada caso puede ocurrir de:*	*P(Xi)*
		1ª vaca	*2ª vaca*		
III	0	1	1	1 manera	7/15
IV	1	1	0	2 maneras	casos que es descubierto suman 8/15
V	2	0	0	1 maneras	

Nota: debemos notar que los caso fueron marcados de I al V ya que hay una cuestión importante de cómo se debe analizar el problema:

El espacio: *muestral* es= *casos que no es descubierto* + *casos donde es descubierto*

P(S)= 1= P(no descubren)+P(lo descubren) *por lo tanto:*

P(no descubren) = P(caso I) P(caso III) = [(9/10)(8/9)][(7/10)(6/10)] = 28/75

1 = 28/75 + P(lo descubren) así: P(lo descubren)= 1- 28/75 = 47/75=0.6266

Estrategia 4: Utilizar el camión de capacidad 10 cabezas dos envíos.

Dos envíos de 10 vacas 8 legales y 2 robadas.

Caso	*Xi=cantidad cabezas robadas*	*20% de 10= 4 vacas a inspeccionar*		*Cada caso puede ocurrir de:*	*P(Xi)*
		1ª vaca	*2ª vaca*		
III	0	1	1	1 manera	
IV	1	1	0	2 maneras	casos que es descubierto suman
V	2	0	0	1 maneras	

Nota: Es parecido al anterior analizamos en similar forma:

P(S)=1=P(no descubren)+P(lo descubren) así: P(no descubren)=P(caso I)P(caso III)

= [(8/10)(7/9)][(8/10)(7/10)]=28/45)(28/45) =784/2025

1= 784/2025 + P(lo descubren) así: P(lo descubren)=1-784/2025 =1241/2025= 0.6128

Conclusión: las estrategias 1,3 y 4 podría pensarse que cualquiera de ellas disminuye el riesgo de ser descubierto.

2ª Sesión. Se trabajo con un segundo bloque de problemas don diversas estrategias de solución.

M2.1 Se tienen que asignar aleatoriamente dos contratos de construcción a una, o más, de tres empresas: I, II y III. Cualquier empresa puede recibir más de un contrato. Si cada contrato produce una ganancia de $90, 000 (dólares) para la empresa, calcule la ganancia esperada para la empresa I. Si las empresas I y II pertenecieran realmente al mismo propietario, ¿cuál sería la ganancia total esperada del dueño?

Nota: nos limitaremos a obtener las probabilidades, ya que el interés del taller es analizar la obtención de probabilidades.

<table>
<tr><th>CASO X i</th><th>Primera Asignación</th><th>Segunda asignación</th><th>P (Xi)</th><th rowspan="10">Cada caso se permuta: n! = 2! = 2
Por lo que son 18 en total</th></tr>
<tr><td>1</td><td>A 1</td><td>A 2</td><td>(1/3)(1/2)(1/3)(1)= (1/18)2= 1/9</td></tr>
<tr><td>2</td><td>A 1</td><td>B 2</td><td>1/3)(1/2)(1/3)(1)= (1/18)2= 1/9</td></tr>
<tr><td>3</td><td>A 1</td><td>C 2</td><td>1/3)(1/2)(1/3)(1)= (1/18)2= 1/9</td></tr>
<tr><td>4</td><td>A 2</td><td>B 1</td><td>1/3)(1/2)(1/3)(1)= (1/18)2= 1/9</td></tr>
<tr><td>5</td><td>A 2</td><td>C 1</td><td>1/3)(1/2)(1/3)(1)= (1/18)2= 1/9</td></tr>
<tr><td>6</td><td>B 1</td><td>C 2</td><td>1/3)(1/2)(1/3)(1)= (1/18)2= 1/9</td></tr>
<tr><td>7</td><td>B 2</td><td>C 1</td><td>1/3)(1/2)(1/3)(1)= (1/18)2= 1/9</td></tr>
<tr><td>8</td><td>B 1</td><td>B 2</td><td>1/3)(1/2)(1/3)(1)= (1/18)2= 1/9</td></tr>
<tr><td>9</td><td>C 1</td><td>C 2</td><td>1/3)(1/2)(1/3)(1)= (1/18)2= 1/9</td></tr>
</table>

La distribución de probabilidad quedaría para la empresa A: (Para cualquiera de las empresas es lo mismo)

X= cantidad de contratos asignados	X=0 Casos 6,7,8,9	X=1 Casos 2,3,4,5	X=2 Caso 1	Sumatoria P(Xi)
P(Xi)	(1/9)(4)=4/9	(1/9)(4)=4/9	1/9	2(4/9)+1/9= 9/9 = 1

M2.2 Un vendedor de equipo pesado puede entrevistar a uno o dos clientes diariamente con una probabilidad de 1/3 y 2/3, respectivamente. Cada entrevista tendrá como resultado una no venta o una venta de $50,000 (dólares) con probabilidades de 0.9 y 0.1, respectivamente. Obtenga la distribución de probabilidad para las ventas diarias. Encuentre la media y la desviación estándar de las ventas diarias. Codificamos: 1= compra 0= no compra, P(1) = 0.1 P(0) = 0.9

Persona A

Caso=Xi	A	P(Xi)
I	1	(2/3)(0.1)(0.1) = 1/150
II	0	(2/3)(0.1)(0.9) = 3/50

	Caso=Xi	B	D	P(Xi)
Personas B y D	III	1	1	(2/3)(0.1)(0.1) = 1/150
	IV	1	0	(2/3)(0.1)(0.9) = 3/50
	V	0	1	(2/3)(0.9)(0.1) = 3/50
	VI	0	0	(2/3)(0.9)(0.9) = 27/50

P(S) = 1/30 +9/30 + 1/150 + 3/50 + 3/50 + 27/50 = 1

Es importante señalar y resaltar lo referente al aprendizaje cooperativo. De manera que cumplan criterios que definen la cooperación:

- Interdependencia positiva. Los miembros del equipo deben confiar el uno del otro.
- La responsabilidad individual, de la asignación de las tareas.
- La interacción cara a cara, por lo menos parte del tiempo, parte del aprendizaje se lleva a cabo como equipos de discusión y debate sobre las estrategias de conflicto y soluciones.
- Desarrollo y uso adecuado de las relaciones interpersonales para el trabajo en equipo, incluyendo liderazgo, comunicación, y resolución de conflictos.
- Es necesario tener presente una auto-evaluación de rendimiento del equipo.

Conclusiones

La dinámica de trabajo propuesta permitió establecer un vínculo estrecho de los maestros, participantes y expositores. Se podrá percibir las dificultades en los esquemas individuales y proponer estrategias alternativas de solución en el proceso de enseñanza aprendizaje.

Permitiendo que los tiempos de aprendizaje se manejen de manera flexible, privilegiando la adquisición del sentido de los contenidos conceptuales abordados. Con esta experiencia, se posibilitará cambios en el futuro desempeño en el aula de los participantes. Es necesario que la capacitación docente sea un proceso continuo, sistemático y permanente.

Referencias bibliográficas

Batanero, C., Navarro-Pelayo, V. & Godino, J. (1997). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics* , 32 199.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics.* Dordrecht: Kluwer Academic.

Flores, H. y Barrera, S. (1999). Brousseau in action: Didactical situation for learning how to graph functions. *The Fourth Asian Technology Conference in Mathematics*. Guangzhou, China.

Godino, J. (2003). Teoría de las funciones semióticas. Recuperado el 25 de Abril de2010, de Universidad de Granada: http://www.ugr.es/~jgodino/funcionessemioticas/monografiatfs.pdf

Guerrero, F., Sánchez, N. y Lurduy, O. (2005). La práctica docente a partir del modelo DECA y la Teoría de las situaciones didácticas. *Enseñanza de las Ciencias. Número Extra. VII Congreso* , 1 - 5.

Kavousian, S. (2005). The development of combinatorial thinking in undergraduate students. *Psychology of Mathematics Education of North America, Annual Meeting* 3). Roanoke, Virginia.

Ortiz, J., Batanero, C., y Serrano, L. (2007). Modelización y simulación de la estadística y la probabilidad en los libros de texto de educación secundaria. *X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* 129). Huesca, España.

COMUNICACIÓN Y ENTORNO FAMILIAR: LENGUAJE Y ADQUISICIÓN DE LA NOCIÓN DE CANTIDAD POR NIÑOS Y NIÑAS PREESCOLARES CON AUDICIÓN DIFERENCIADA Y LENGUAJE LIMITADO: DISEÑO Y PRODUCCIÓN DEL MENSAJE

Ingrid Díaz Córdova, Ignacio Garnica Dovala
DME, Cinvestav, IPN México
idiaz@cinvestav.mx , igarnica@cinvestav.mx

Resumen. El presente informe reporta los resultados obtenidos de la fase correspondiente a la producción de medios didácticos, dentro del Aula Entorno [AE] (Díaz, I., & Garnica, I., 2010, p.3) para mejorar la comunicación madre-hijo [MH] en cuanto a la noción de cantidad al realizar tareas en el entorno familiar. El método consiste en comprender las fenomenologías que acontecen en las aulas de Matemática Educativa (Escuela Oral; Escuela de Lenguaje y Aprendizaje) y la de la Escuela para Padres del Instituto Mexicano de la Audición y el lenguaje, AC [IMAL] -Cinvestav (Garnica, I., & González, H. 2009 p. 277).

Palabras clave: comunicación, entorno familiar, sordos, lenguaje

Abstract. This report shows the results of each phase to the production within the classroom environment [CE] (Diaz, I., & Garnica, 2010, p. 3) to improve mother- child communication [MCh] in terms of the notion of quantity to perform tasks in the family. The method is to understand the phenomenology occurring in the classrooms of Mathematics Education (Oral School, School of Language and Learning) and the School for Parents of the Mexican Institute of Hearing and Language and Learning, AC (IMAL)- Cinvestav (Garnica, I,. & González, H. 2009 p.277).

Key words: communication, family environment, deaf, language

Introducción

La presente investigación se realiza en el Instituto Mexicano de la Audición y el Lenguaje, que tiene su origen bajo el signo y la filosofía del oralismo, para su trabajo el IMAL, desarrolla sus programas en tres escuelas, la Escuela Oral [EO], La Escuela de Lenguaje y Aprendizaje [ELA] y la Escuela para padres [EP], su objetivo fundamental, es conducir al niño sordo. Bajo condiciones colegiadas con el Cinvestav (Centro de investigación y de estudios avanzados) y a partir de 2001 se desarrolla un Plan Integral (PI) (Garnica, 2006) con el propósito de comprender el pensamiento matemático de los niños y de las niñas ante la privación de la percepción auditiva y el consecuente lenguaje limitado y generar alternativas favorables a la adquisición de nociones matemáticas. En el periodo 2009-2010 se obtuvieron resultados de la primera fase del desarrollo de esta investigación correspondiente al nivel de operación "Formación" del programa AE, (Alme 24, pág 293-301.). La segunda fase "Producción" se desarrolló durante el segundo semestre correspondiente al ciclo escolar (2010-2011), que consistió en que las madres lograran diseñar y producir medios didácticos que permitieran la construcción del mensaje matemático. Se realizaron diversas actividades para mejorar las estrategias y las formas de comunicación madre-hijo [M-H] en su entono. En este informe se reportan los resultados obtenidos en segunda etapa del programa de operación, en el que describen tres productos, de los seis diseñados y producidos por las madres: medio didáctico, modalidad lúdica.

Referentes teóricos

Ante la situación de asimetría respecto a la acción comunicativa orientada al entendimiento en la que se encuentran los niños y niñas en su relación discursiva con sus entornos familiares se consideran a las fallas articulatorias y el adiestramiento auditivo el foco de análisis, la orientación al entendimiento [Habermas, 84, p. 492] para promover relaciones reflexivas; además de la escritura como otra herramienta para comunicación, (Caplan, D.1997) describe al lenguaje humano como un código que relaciona un conjunto de formas lingüísticas con varios aspectos del significado. "En la comunicación el problema principal del sordo es identificar si hay comprensión del mensaje o si la falla radica en la expresión por la ausencia de herramientas lingüísticas al emitir el mensaje" (Corredera, T. 1978); el modelo de comunicación en sentido amplio, en particular los elementos constitutivos del mensaje "cualquier unidad o conjunto significante… en códigos naturales y/o artificiales … elaborado para su emisión … a un destinatario" [Pasquali, 1970], para el análisis los elementos "medios y recursos, referente, marco de referencia, … perceptor" [Prieto, 1982]. La adquisición se basa en el enfoque genético "Una cantidad continua como una longitud o un volumen, sólo es utilizable para el trabajo del espíritu en la medida en que constituye un todo permanente, ya se trate de cantidades continuas o discontinuas, de aspectos cuantitativos percibidos por el pensamiento, …" (J.Piaget & B. Inhelder, 1975); la comprensión de la comunicación, se basa en la noción de <<zona de desarrollo potencial>> determinada por "la capacidad de resolver un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más capaz" (Vygostki, 1988,). "La actualización de las nociones matemáticas básicas como objeto de comunicación y las orientaciones propuestas al adulto, para la identificación y realización de actividades cotidianas relacionadas con el uso de la noción en situaciones especificas, parecen ser condiciones de posibilidad de la comunicación, como acto de entendimiento, entre el adulto y el niño". (Garnica, 2006).

Método

Esta investigación es cualitativa basada en un método fenomenológico-comprensional que nos acerca a la identificación de los fenómenos de comunicación ante la complejidad de las condiciones de percepción auditiva y/o de lenguaje limitado, en particular lo que concierne a las expresiones, pues, "en el campo del lenguaje hay una diferencia entre las estructuras significativas y las expresivas"(Iglesias, 1981), mediante el análisis, comprender las singularidades en el proceso de comunicación asociado a las experiencias cotidianas del niño en su entorno familiar. Se enfatizan tres aspectos: la observación de las respuestas "orales" de los niños y un análisis lingüístico; la aplicación de entrevistas a las madres y una identificación de perfiles de comunicación; el diseño de actividades en el Aula de Matemática Educativa y el de las del Aula Entorno para la producción de medios didácticos y el diseño del mensaje contenido de nociones matemáticas por parte de la madre. Técnicas de registro: videograbación, bitácora.

Escenario empírico. El esquema correspondiente al programa [EF] que opera en el [AE] y que define los niveles de operación: formación; producción e intervención (ver órgano operativo. (Alme 24, 2011), representa el escenario de la investigación, en él participaron, en esta segunda de tres fases, diez madres, los hijos de seis de ellas siguen los lineamientos de la [EO] y los de las cuatro restantes siguen los de la [ELA]. Sólo cinco de la [EO] y una de la [ELA] lograron los objetivos planteados en la segunda fase: producción del medio didáctico y diseño del mensaje contenido de nociones matemáticas.

Instrumentos y Técnicas. La identificación de perfiles de comunicación [M-H] requirió de la técnica de entrevista en su modalidad de interacción comunicativa respecto a la imagen de la madre de la situación adversa de los niños, cuestionamiento estructurado por cuatro aspectos: a) adiestramiento auditivo/lectura labio facial; b) estructuración; c) articulación; d) comprensión y expresión en tres contextos: a) entorno familiar; b) lenguaje; c) comunicación y lenguaje. Se utilizó la bitácora para el registro de la observación de las actividades realizadas en el aula; el informe semanal de las realizadas por la madre con su hijo en el entorno familiar y el registro de procesos mediante la técnica de video y audio.

Elementos para el análisis. Se consideran: los elementos estructurantes de la técnica "interacción comunicativa respecto a la imagen de la madre relativa a la situación adversa del niño" arriba descritos; los constitutivos del proceso de comunicación: emisor-canal-perceptor (Pasquali, 1970); el contenido matemático del "mensaje (expresar-para-el-otro)" éste concebido en su dualidad expresiva: por un lado la expresión oralizada del texto y por el otro la mediada por acciones sobre los objetos constitutivos del "medio didáctico" producto diseñado por el emisor o figura materna en este estudio.

Operación y Desarrollo. Esta segunda fase se operó bajo los lineamientos del órgano operativo, particularmente los que corresponden a los niveles de: a)"formación" al dar continuidad al desarrollo de las actividades relacionadas con las nociones de cantidades continuas (longitud y peso) y de relaciones espaciales (ubicación y orientación), actividades diseñadas tanto para su realización en el entorno familiar como las que serán realizadas en la tercera fase "intervención" (conducción por la madre de la actividad en el grupo bajo la supervisión de la docente titular) y b) de "producción" al diseñar y elaborar los medios didácticos que en el presente reporte se incluyen, en total seis que se presentaron en las sesiones realizadas en AE para reconocer el contenido matemático del mensaje.

Resultados

Se presentan tres. El primero relativo a los perfiles de comunicación identificados, el segundo corresponde a la producción y diseño del mensaje contenido de nociones matemáticas de tres medios didácticos de los cinco elaborados en el aula entorno, el último referido a procesos de comunicación: dos en el aula entorno y uno el entorno familiar.

En la Tabla 2, derivan de la aplicación de la entrevista en su modalidad de "interacción comunicativa directa con la figura materna respecto a la imagen de la situación adversa del niño" estructurada bajo los elementos formales de un posible [Perfil Alfa] de referencia según se presentan en la Tabla 1.

Tabla 1. Perfil Alfa: Condiciones posibles de competencia comunicativa.

Perfil Alfa	Adiestramiento auditivo/ lectura labio-facial	Estructuración	Articulación	Compresión y expresión
Entorno familiar	Sobreprotección, exceso de actividades	Exigencia durante todo el día	Dejan de lado la pronunciación	No hay dificultad
Lenguaje	Presión sobre el niño	Motivación	Nula importancia	Sin dificultad
Comunicación y lenguaje	Buena comunicación	Excelente organización de las ideas	Mala pronunciación	Buena comprensión, dificultades en exp

Tabla 2. Perfiles de comunicación [M-H]

Perfil	Alfa-a	Alfa-b	Alfa-c
Condición inicial	Acción constructiva	Aceptación	Emotiva
Comunicación	Atención al descuido, previo, a la estructura de la articulación	Centración débil en la pronunciación	Centración en la limitación del niño ante su entorno
Imagen de la matemática	Claridad en la condición del nuevo paradigma	Conflictos ante la comprensión del nuevo paradigma	Limitante de un estado emotivo en la comunicación con el niño

*Medio didáctico: producción y diseño del mensaje contenido de nociones matemáticas***.** Componentes del medio, sus objetivos y el mensaje matemático de cada uno de seis productos, en su modalidad lúdica, elaborados por las participantes del desarrollo de las actividades del nivel "Producción" se presentan tres, por espacio limitado, en la Tabla 3.

Tabla 3. Medio didáctico: objetivos y mensajes [concentración de seis productos]

Medio y componentes	Objetivos	Mensaje matemático
[HG]  Fig. 1 Huevos al gallinero	Adquir léxico nuevo para comprender y expresar contenidos matemáticos. Estimular la percepción auditiva y visual del niño en diferentes áreas de la memoria.	Agregaciones y desagregaciones Identificación de colecciones de números pares e impares.
[R]  Fig. 2 Ruleta numérica	Favorecer la tolerancia a la frustración.	Identificación de colecciones de cantidades pares e impares; agregaciones en cantidades ocultas. Noción de cantidad; agregación de colecciones de manera inmediata.
[LV]  Fig. 3 Las Vegas	Que la madre identifique las fallas de pronunciación o de estructuración del lenguaje.	Situaciones para la adquisición de nociones matemáticas: colecciones, agregaciones, desagregaciones, correspondencia.

Comunicación en el [AE] y en el [EF]. Los procesos de comunicación realizados durante el desarrollo de las actividades perfilan tres modelos: dos, dentro del [AE] y uno en el [EF] del niño. El modelo [D-H] corresponde a la comunicación de la Docente con las madres; el modelo [M-M] se refiere a los procesos de comunicación entre pares dentro del AE, finalmente el modelo [M-H] representa el proceso comunicativo madre-hijo en el entorno familiar.

Comunicación [D-M] en [AE], medio didáctico [H-G], propósito: reconocimiento de su operación e identificación de nociones matemáticas en el contenido del mensaje. La docente conduce el proceso comunicativo, para el logro del propósito, ante dos participantes orientado al entendimiento del sentido de nociones de cantidad [agregaciones] implícitas en el mensaje como se advierte en el segmento de diálogo:

1. I: Vamos a jugar "Huevos al gallinero" (muestra el juego) ¿qué hay?

2. N: *hay gallinas y cuadros de colores*

3. I: contiene casillas de dos colores, azul y verde y la última casilla contiene una granja… [describe el medio didáctico]…

…estas gallinas va a ser nuestras fichas, un dado común, canastos de paja y un contenedor de huevos, tarjetas que contienen imágenes de huevos colecciones de huevos enteros y otras son colecciones de huevos rotos y las que no contienen ninguna imagen….[describe el material concreto]…

…van a tomar la misma cantidad de huevos y la van a ir depositando en su canasta de paja, [correspondencia]

si me sale la imagen de huevos rotos, quitar la misma cantidad de huevos que señala la tarjeta y regresarlos al contenedor …[desagregación]

no va a ganar la gallina que llegue primero a la última casilla, sino la jugadora que haya acumulado la mayor cantidad de huevos… [describe las reglas]…

…

I: … cuatro puntos, tomo cuatro huevos y los coloco en mi canasta de paja yo tengo cuatro huevos … tarjeta de color verde y tiene una colección de tres huevos enteros, ¿Cuántos huevos llevaba? [agregación]

J: cuatro [la madre realiza la agregación]

I: agrego tres)

N: siete [la madre realiza la agregación]

I: tienen que decir en voz alta. “ahora tengo siete huevos”. ¿Tienen alguna duda hasta aquí?

J y N: no

I: quiero que ustedes piensen en sus hijo… al final haremos una reflexión y vamos a pensar si este juego lo podemos llevar al aula o no

Comunicación [M-M] en [AE], medio didáctico [R], comprensión del contenido matemático del mensaje, proceso comunicativo entre pares. A partir de el entendimiento de las reglas para la operación del *medio* [R] diseñado por MJ y comunicado a MA, se espera su uso en el Entorno Familiar en el proceso comunicativo correspondiente [M-H] pero también para el posible a realizarse en el Aula de Matemática Educativa bajo la modalidad de *intervención* [M-G]* (la mamá en función de conducción dentro del [AME]). En este proceso de comunicación [M-M] se advierte la construcción del *contenido matemático del mensaje* al operar el *medio* [R]: a) cantidad discreta de elementos sin conteo uno a uno; b) cantidad oculta (retención); c) agregaciones de elementos de una colección. El segmento de diálogo presenta en secuencia la presencia de acciones asociadas a las nociones en cuestión:

1. MJ: el primer (giro) es tú turno, el segundo (mi turno) hago lo mismo que tú. El tercer (giro) tomas las fichas y la vas a cubrir con otro bote y me vas a decir cuántas fichas tienes en el primer bote, en el segundo y si los juntas cuantas fichas obtienes. Gana quien junte más fichas. [agregaciones de cantidades ocultas].

2. MA: sí

3. MJ: ¿Cuántas tenías aquí? (señalando el bote)

4. MA: tres (respuesta oral)

…

9. MJ: ¿Cuántas tienes acá?

10: MA: tres [cantidad oculta_1]

11. MJ: ¿Y aquí?

12: MA: dos [cantidad oculta_2]

13. MJ: ¿Y si las juntas? [agregación de cantidades ocultas]

14. MA: cinco (quita los botes)

15. MJ: aquí tengo uno (señalando el bote) y en este tres, en total son cuatro y más cuatro que tenía: ocho. ¿Cuántas fichas ganaste? [desagregación]

16. MA: tres

Comunicación [M-H] en [EF], medio didáctico [V]. La madre toma la iniciativa explicando las reglas y la forma de operación del medio, el niño lanza el dado y mira el resultado; la madre le pide que tome esa cantidad de fichas y que vuelva a lanzar el dado, finalmente le pide que junte las fichas, al tiempo que le pregunta:-¿cuántas fichas son?, el niño responde de manera oral:- son seis, (realizando la agregación de los dos lanzamientos):

1. V: … este dado, lo vas a lanzar, *miras la cantidad de puntos*, vas a poner *la misma cantidad de fichas* … aquí en un bote. Y *en este otro* … vas a poner *la cantidad que salió en otro lanzamiento*. Vas a *decir rápido qué cantidad hay* y vas a *avanzar la cantidad que te salga*; Si te equivocas entonces ya no ganas. [correspondencia]

D: sí [respuesta oral]

2. V: [lanza el dado]… ¿qué *cantidad te salió?*

D: *cinco*

3. V: *tómalas y ponlas aquí*

D: *son dos*

4. V: ¡Bien! ¿Y *si las juntamos, cuántas son*? [agregación]

D: *son siete*

5. V: … avanza con tu avión la *cantidad de casillas* que te tocan, *siete* verdad. [correspondencia]

Consideraciones generales

Una restricción importante que se impone al desarrollo del programa "Comunicación y Entorno Familiar" componente del Plan Integral, es el carácter de informal de aquél (el programa) que asigna un tiempo mínimo al desarrollo de las actividades en la institución (una hora por semana) con serias irregularidades de asistencia que aunadas perfiles de comunicación por mejorar tienen efecto de lentitud en el logro de metas y de objetivos. Sin embargo, se manifiestan cambios: a) en la imagen que de las matemáticas poseen las madres con efecto positivo para la comunicación en la vida cotidiana del niño ante situaciones que requieren de conocimiento matemático; b) en el perfil del ejercicio de la docencia ante la enseñanza de las matemáticas en el aula de matemática educativa. Al desarrollo de la tercera y última fase de este estudio: nivel de operación "Intervención" se arriba en condiciones favorables, por un lado las madres han adquirido las nociones básicas de cantidad (discreta y continua) que les permitirán conducir actividades en el grupo, por otro lado las docentes titulares han establecido vínculos con ellas en el curso del desarrollo de las actividades en el aula entorno durante las dos primeras fases.

Referencias bibliográficas

Caplan, D. (1997). *El Lenguaje: estructura, procesamiento y trastornos.* Buenos Aires: Docencia

Corredera, T. (1978). *Defectos en la dicción infantil.* Buenos Aires: Ed.Kapelusz.

Díaz, I y Garnica, I (2011). Comunicación y entorno familiar: lenguaje y adquisición de nociones matemáticas de niños preescolares con audición diferenciada. En Lestón, P. (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 24*, 293- 301. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Garnica, I., & González, H. (2009). Cantidad Discreta y Pensamiento Matemático de Niños (7 - 9) con Audición Diferenciada y Lenguaje Limitado: Estudio de Cinco Casos. En P. Lestón (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 22*, 277 – 286. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Garnica, I. (2006). El conocimiento matemático ante la privación auditiva y la expresión lingüística limitada. *Memoria del seminario de Estudios.* México. Cinvestav e IMAL (en prensa).

Habermas, J. (1984). *Teoría de la acción comunicativa: complementos y estudios previos.* España: Ed. Cátedra.

Iglesias, S. (1981). *Principios del método de la investigación científica*. México: Ed. Tiempo.

Pasquali, A. (1978). *Comprender la comunicación.* Venezuela: Ed. Monte Ávila.

Piaget, J. & Inhelder, B (1975). *Génesis del número en el niño.* Argentina: Paidós

Prieto, D. (1982). *Elementos para el análisis de mensajes.* México: Instituto Latinoamericano de la Comunicación Educativa [ILCE].

LA COMPETENCIA DE ARGUMENTAR EN EDUCACIÓN SECUNDARIA. FORMA, ESPACIO Y MEDIDA

Santiago Ramiro Velázquez, Hermes Nolasco Hesiquio
Secretaría de Educación Guerrero, Universidad Autónoma de Guerrero México
sramiro@prodigy.net.mx, nolascohh.@hotmail.com

Resumen. En este artículo hacemos un estudio de la competencia de argumentar en el marco de forma, espacio y medida que es uno de los ejes que vertebran las matemáticas en educación secundaria. El objetivo fundamental de la investigación consiste en diseñar situaciones didácticas para el desarrollo de la referida competencia. Como parte de los avances de este trabajo explicamos lo que sucede con esta competencia en la escuela, al documentar la actuación de los profesores en este ámbito y la resistencia de los alumnos para argumentar. Identificamos argumentos personales, empíricos y teóricos por medio de una entrevista a alumnos y el análisis de sus diarios de campo. De igual modo estructuramos tres actividades geométricas para desarrollar esta competencia, sobre la base de los distintos hallazgos de la investigación.

Palabras clave: competencias matemáticas, argumentar, situaciones didácticas

Abstract. In this paper we make a study of the competence of argument in the framework of shape, space and measure which is one of the axis that conform the maths in secondary education. The principal objective of this research consists in design didactical situations for the development of such competence. As a part of the progress of this work we explain what's happening with this competence in the school, documenting the performance of the professors in this matter and the resistance of the students for argues. We identify personal, empirics and theoretical arguments trough a interview with the students and by analyzing their daily field journals. Likewise, we create three geometry activities for developing this competence about the basis of the different discoveries of the research,

Key words: mathematical competence, argumentation, didactical situations

Introducción

Sostenemos que las competencias matemáticas son saberes conceptuales, procedimentales y actitudinales, integrados y en movimiento. De manera que una persona es competente cuando hace evolucionar sus saberes al plantear y resolver problemas y tareas matemáticas, que lo sitúan como matemático. Es decir, que transforma sus conocimientos en saberes en las prácticas donde dichos conocimientos tienen presencia y se responsabiliza de las respuestas que emite por medio de diversos argumentos. Estas posiciones coinciden con la concepción de PISA (Program for International Student Assessment) cuando define a la competencia matemática como "La capacidad de los alumnos para analizar, razonar y comunicarse eficazmente cuando plantean, formulan, resuelven e interpretan problemas matemáticos en diversas situaciones". (OCDE, 2006, p. 74). En la didáctica contemporánea a estas situaciones se les denomina prácticas sociales, entonces para desarrollar competencias matemáticas, hay que actuar en estas prácticas, porque en ellas el conocimiento adquiere el estatus de saber. De esta manera consideramos al discurso matemático escolar y la práctica educativa de aula, integrados con prácticas sociales donde se construyen saberes (Velázquez y Nolasco, 2009).

Esta investigación en proceso, se centra en el estudio del eje forma, espacio y medida. Uno de los propósitos de este eje es el desarrollo del pensamiento geométrico para cuyo logro es necesario distinguir varias formas geométricas y sus propiedades, explorar otras formas geométricas más complejas y utilizar resultados geométricos, así como relaciones métricas y algebraicas en situaciones teórico-prácticas. En estos procesos se pueden construir argumentaciones, para establecer resultados tanto en geometría como en relaciones matemáticas que tienen conexión con propiedades geométricas.

De acuerdo al diccionario enciclopédico Grijalbo, argumentar consiste en dar pruebas o razonamientos para defender una acción o afirmación, también la considera como un razonamiento lógico con el que se demuestra una proposición. Por nuestra parte sostenemos que argumentar consiste en aportar pruebas o justificaciones de una acción o afirmación. En orden de complejidad hay argumentos "para explicar, para justificar y para demostrar" (SEP, 2006, p. 18).

En la práctica observamos un escaso énfasis en el desarrollo de la referida competencia, por lo general los contenidos programáticos propuestos para argumentar, se encaminan al cálculo y solución de problemas rutinarios, sin enfocarse al logro de los propósitos planteados. En estos términos se impone una cultura en el aula, regida por un contrato didáctico cerrado en donde no hay cabida para prácticas y normas sociomatemáticas (Yackel y Cobb, 1996), que dan lugar a que los alumnos vayan construyendo su discurso matemático, al confrontar y argumentar sus producciones.

El objetivo de este trabajo es organizar un conjunto de actividades geométricas que conforman una manera de desarrollar la competencia de argumentar y el pensamiento geométrico, como propósito fundamental del referido eje. Para desarrollar la investigación se hace una entrevista a 10 alumnos del 3er grado de educación secundaria en la que se plantean tareas referentes a las condiciones necesarias para la construcción de polígonos y se analizan sus diarios de campo del apartado 2.4. del programa de estudios, sobre los criterios de semejanza de triángulos. Esto es con el propósito de reconocer las formas de argumentar que utilizan los alumnos. Para organizar el conjunto de actividades se realiza un estudio didáctico en diversas fuentes, que revelan formas de argumentar cuando se realizan tareas geométricas. Sobre esta base se diseñan situaciones didácticas Brousseau (1983), para cuyo desarrollo se propone la utilización de materiales manipulables y geometría dinámica.

Forma, espacio y medida

Forma, espacio y medida se concibe como un medio universal donde se sitúan todos los cuerpos físicos. Lugar geométrico de todas las posibles posiciones donde se puede formar la imagen de un objeto mediante un sistema óptico. Hershkowitz, Parzysz y Van (1996) afirman que la interacción con formas y espacios implica la comprensión del mundo que nos rodea, y que la descripción, codificación y decodificación de la información visualizada asegura un conocimiento pleno de ese mundo. Nosotros sostenemos que en este ámbito se da la relación de las figuras –dibujos, representaciones- con las imágenes que la persona concibe mentalmente, como se muestra en la figura 1. En esta dirección forma, espacio y medida asegura el reconocimiento del espacio físico tridimensional en el que habitamos.

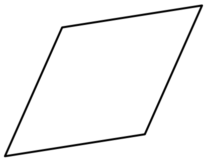


Fig. 1. En este caso las figuras son las representaciones que vemos, una figura geométrica y una estatua, en tanto que la imagen en el primer caso puede ser un polígono, un cuadrilátero o un rombo. En el segundo caso puede ser la de un Quijote con un libro abierto y un corazón que encierran un significato sociohistóricocultural,-esta estatua es el símbolo del Premio ABC Maestros de los que Aprendemos, que otorga la Organización Civil Independiente Mexicanos Primero-.

El estudio de los apartados de este eje favorecen el desarrollo de la competencia de argumentar (SEP, 2006). ¿Cómo argumentar sin tener un desarrollo conceptual?, para argumentar es imprescindible que emerjan articulaciones conceptuales para luego clasificar, jerarquizar, describir, visualizar y abstraer. Se producen articulaciones conceptuales cuando los alumnos experimentan con una gran variedad de figuras, que a su vez construyan recortando y doblando papel, con plastilina, con palillos, con bloques, etc. De esta experimentación pueden descubrir, por ejemplo, que dada la longitud de los lados de un cuadrilátero se puede construir más de uno. En tanto que si se trata de trazar un triángulo dadas las longitudes de sus lados, se puede trazar solo uno o ninguno.

Escenarios de investigación

Del estudio de la entrevista reconocemos que los alumnos expresan argumentos personales, empíricos y teóricos. Cuando se piden justificaciones sobre la posibilidad de trazar un triángulo dadas las longitudes de sus lados, se dan argumentos personales como *Siento que las medidas no alcanzarían*, o empíricos cuando los alumnos intentan hacer trazos con el juego geométrico y dicen *Inclinando hacia l a derecha alcanzan*, y los teóricos cuando formulan la desigualdad triangular.

1. Se quieren construir triángulos de lados a, b, c en los que el lado a mide 20 cm y las medidas de los lados b y c son las que se especifican en la siguiente tabla. Completa la tabla.

LADO b	LADO c	¿ES POSIBLE CONSTRUIR EL TRIÁNGULO?	¿POR QUÉ RAZONES?
8 cm	9 cm	No	Siento que las medidas no alcanzarían
12 cm	7 cm	Si	Se forma un triángulo pero sería un poco alargado

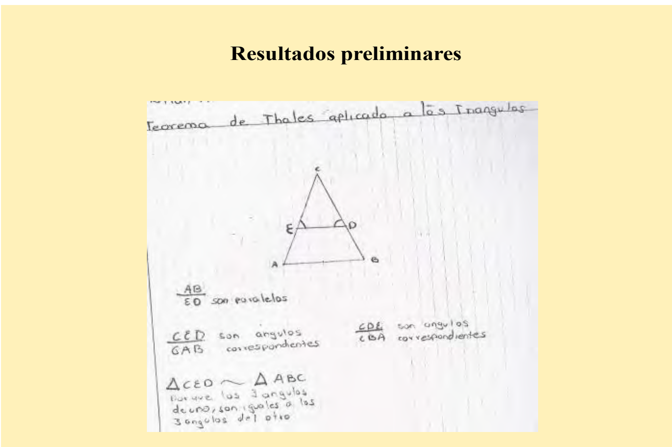
En la siguiente tabla están las respuestas de uno de los alumnos entrevistados, en la 2ª fila se ve un argumento personal y en la 3ª un argumento empírico.

2. ¿De acuerdo a tus saberes y experiencias qué condiciones deben cumplir tres segmentos de recta para poder construir un triángulo?. Justifica tu respuesta.

los lados b y C al sumarlos deben ser mayores al lado A

En esta respuesta de otro de los alumnos entrevistados se expresa un argumento teórico.

En el estudio de los diarios de campo de los alumnos se refleja un proceder rígido y esquematizado cuando se les propone argumentar, como se visualiza en la siguiente producción de uno de los participantes. Esta rigidez les impide hacer explicaciones abiertas, libres, y comunicar con propiedad conocimientos matemáticos. Suponemos que esta manera de actuar obedece a la escolarización del saber e imposición de un discurso matemático de parte del profesor y de los libros de texto.



En el estudio didáctico constatamos que los programas de estudio de la escuela secundaria mexicana tienen potencialidades para desarrollar la competencia de argumentar, en el 1er grado, el apartado 2.6. dice: "justificar las fórmulas de perímetro y área de triángulos, cuadriláteros y polígonos regulares". (SEP, 2006, p. 38). Por su parte el 4.5 dice: "determinar el número π como la razón entre la longitud de la circunferencia y el diámetro. Justificar la fórmula para el cálculo de la longitud de la circunferencia y el área del círculo" (SEP, 2006, p. 53). En el segundo grado se continúa con la justificación de fórmulas para calcular el volumen de cubos, prismas y pirámides, y en general en el estudio de los diversos apartados del bloque referido. Por su parte en el tercer grado se acentúan estas potencialidades al estudiar la congruencia, la semejanza, el teorema de Tales, la homotecia y el teorema de Pitágoras.

Existen principalmente, dos problemas que obstaculizan el desarrollo de la referida competencia, el primero es sobre las condiciones de las prácticas matemáticas de los profesores, que en el caso de la justificación de fórmulas, centran su atención en sus usos, pasando por alto las formas y tipos de argumentar. Esta afirmación se sustenta en el registro de observaciones que realiza la jefatura de enseñanza de matemáticas, en 7 escuelas secundarias. También por la evaluación realizada a 20 profesores que participan en un curso donde se pide argumentar sobre la validez de procedimientos utilizados para calcular perímetros y áreas de polígonos y sectores circulares. Por lo general en sus respuestas se miran solo argumentos personales y empíricos.

El segundo problema consiste en el desinterés y resistencia de los alumnos para argumentar, éstos se oponen a explicar los procesos y resultados al realizar actividades de este corte. Sostienen que no se les ha enseñado a argumentar y que los cálculos correctos conducen a respuestas correctas, por ende son innecesarias otras explicaciones.

Como una manera de contribuir a la solución de esta problemática Yackel y Cobb (1996) proponen que la actividad en el aula de matemáticas, se rija por normas sociales, normas sociomatemáticas y prácticas matemáticas, en este caso, orientadas a la validación de procedimientos y resultados por medio de diversos argumentos. Desde nuestras posiciones sostenemos que se trata de que profesores y alumnos hagan evolucionar sus saberes, de tal forma que consideren a la argumentación como una práctica matemática relevante en el logro de un desempeño exitoso.

En el diseño de situaciones didácticas (AD), además de las ideas sostenidas en este trabajo, nos enmarcamos en el principio básico de la teoría de SD Brousseau (1986) donde postula que se aprende adaptándose a un medio generador de contradicciones y desequilibrios, en esta adaptación el alumno produce saberes manifestados en respuestas nuevas . De modo que en la actividad escolar el alumno aprende, cuando el profesor logra que se responsabilice de las situaciones y problemas propuestos.

También nos basamos en las fases de la apropiación del conocimiento matemático Brousseau (1983), éstas se describen brevemente a continuación. Acción, se trata del planteamiento de la tarea, del compromiso de realizarla y de comprenderla. Formulación, consiste en las diferentes producciones de los participantes encaminadas a la solución del problema. En esta fase se realiza una amplia interacción discursiva entre los participantes, que revela las maneras de cómo se orientan para llegar a estas producciones. Validación, en esta fase se continúa con la interacción discursiva centrada en los argumentos que soportan las formulaciones. Institucionalización, esta fase consiste en el logro de acuerdos y consensos así como la precisión de los saberes mínimos que los participantes deben dominar.

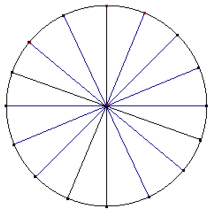
Estas fases como lo sostiene Brousseau (2007) se oponen a las trampas del formalismo e imposición de un discurso matemático en el aula, para que impere la interacción discursiva como una práctica de construcción social de conocimientos. "Este orden en las fases parece oponerse a aquel donde los saberes son primero reorganizados en discursos comunicables según el destinatario y luego aplicables a situaciones personales" (Brousseau, 2007, p. 29).

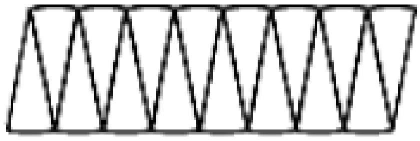
En este sentido sostenemos que en una SD están considerados principalmente, los alumnos, los profesores y el ambiente escolar y familiar. A los profesores les corresponde lograr que los alumnos se interesen en los problemas y tareas propuestos y en resolverlos con o sin la intervención directa del docente.

Diseño de situaciones didácticas

Situación 1. Justificación de fórmulas Ya se hizo referencia al apartado 2.6. "justificar las fórmulas de perímetro y área de triángulos, cuadriláteros y polígonos regulares" (SEP, 2006, p. 38). Y del 4.5 "determinar el número π como la razón entre la longitud de la circunferencia y el diámetro. Justificar la fórmula para el cálculo de la longitud de la circunferencia y el área del círculo" (SEP, 2006, p. 53). La situación 1 consiste en esta justificación, donde los estudiantes reflexionen sobre las formas de realizar y ejecutar esta tarea.

En la justificación de la fórmula del área del círculo se esperan diversas producciones de los alumnos, puede ser que algunos consideren un camino basado en las siguientes figuras, donde se mira que los sectores en los que se divide el círculo se ubican en un arreglo rectangular, cuya base es πr (mitad del perímetro del círculo) y su altura r (radio del círculo), entonces su área es πr^2. Está claro que no es exactamente un rectángulo, no obstante al dividir el círculo en un gran número de sectores iguales el arreglo rectangular se aproxima a un rectángulo, por lo tanto la justificación es válida, considerando además, que es para alumnos de educación secundaria.





Situación 2. Problemas geométricos de construcción. Construir el lugar geométrico de los puntos medios de cuerdas iguales de una circunferencia y justificar la respuesta.

Se espera que los alumnos tengan cierto desarrollo de la habilidad de visualizar y representen la información en diversas figuras, exploren y conjeturen encontrando el conocimiento y orientándose para asegurarlo como ahora se muestra.

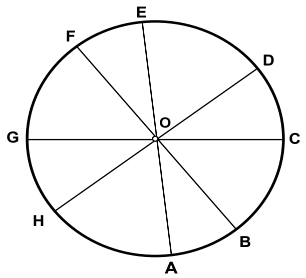


Figura No. 1

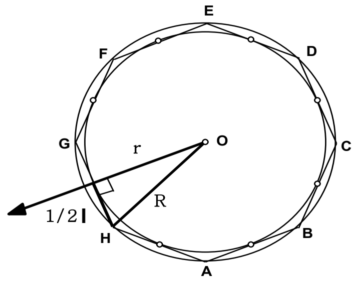
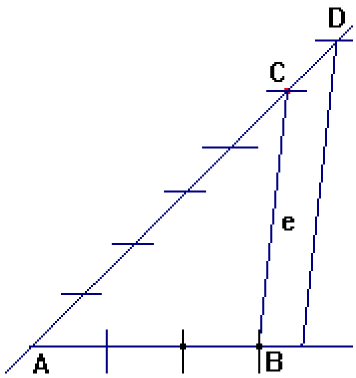


Figura No. 2

¿Cómo represento lo que dice el problema?, ¿Puedo iniciar con un caso particular?, uno de estos casos es cuando las cuerdas referidas son diámetros, como se ve en la fig. 1. Si se trata de cualquier cuerda, la representación está en la fig. 2.

En la Figura 1 reconozco que los puntos medios se reducen a uno sólo, que es el centro de la circunferencia dada, en tanto que en la fig. 2 identifico que los puntos medios de cuerdas iguales forman una circunferencia concéntrica a la circunferencia dada, por lo que puedo conjeturar que se trata del lugar buscado. Para asegurar este conocimiento necesito demostrar que efectivamente se trata de una circunferencia, como es concéntrica con la dada, sólo hace falta encontrar el radio. En la misma fig. 2 trazo R radio de la circunferencia dada y r radio de la circunferencia encontrada, formándose un triángulo rectángulo donde R es la hipotenusa (conocida), ½ *l* es un cateto conocido, “r” es el cateto desconocido, aplicando el teorema de Pitágoras $r = \sqrt{R^2 - \frac{1}{4} l^2}$. De esta forma concluyo que esta circunferencia concéntrica es el lugar geométrico buscado. Aclaramos que todo problema de lugares geométricos exige el cumplimiento de una equivalencia, es decir condiciones necesarias y suficientes. La respuesta y argumentación anterior cumplen con la condición necesaria, haría falta la argumentación de la implicación recíproca, que no se exige debido al nivel escolar para el que está planteada la situación.



Situación 3. Teorema de Tales. Si tres o más paralelas son cortadas por una o dos transversales, los segmentos de las transversales determinados por las paralelas, son proporcionales.

Basado en el teorema de Tales se utiliza un sencillo método gráfico para aplicar una escala como se muestra en la figura de la izquierda.

¿Cómo describimos este método gráfico?, ¿Por qué funciona?

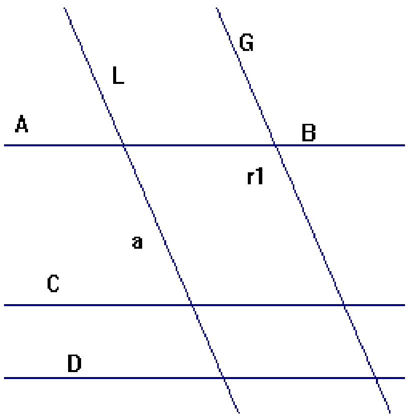


Figura 1

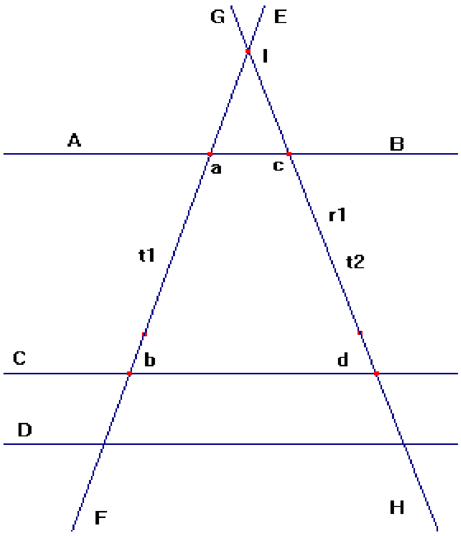


Figura 2

En la fig. 1 la recta L es paralela con G, A paralela con C y con D, ¿Qué relación tiene esta figura con el teorema de Tales? ¿Qué características debe tener la fig. 2 para qué represente el referido teorema? Realiza la demostración del teorema de Tales. Formula el recíproco de dicho teorema, ¿Es verdadero el recíproco?

Reflexiones finales

Consideramos que el estudio de la competencia de argumentar enmarcado en las posiciones que en este trabajo se explican, puede contribuir a su desarrollo en la escuela, ya que da cuenta de las condiciones de las prácticas matemáticas de profesores y alumnos en este ámbito. El estudio didáctico descrito refleja potencialidades y posibilidades para desarrollar esta competencia, considerando un discurso matemático abierto y libre que asegure a los alumnos comunicarse con propiedad. Finalmente en las situaciones didácticas propuestas se concretan las posiciones que se vienen sosteniendo y constituyen una base de orientación para que los profesores las gestionen con sus alumnos.

Referencias bibliográficas

Brousseau, G. (1983). *Los obstáculos epistemológicos y los problemas de la enseñanza*. Versión en español del Departamento de Matemática Educativa, D.F, México: CINVESTAV-IPN.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7 *(2),* 33-115.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de situaciones didácticas*. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zarzal.

Hershkowitz, R. Parzysz, B. y Van, J. (1996). Space and Shape. En a. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.), *International Handbook Of Mathematics Education* (pp. 161-204). Boston, USA: Kluwer Academic Publishers.

OCDE. (2006). *PISA 2006. Marco de evaluación*. Recuperado el 7 de Marzo del 2011 de http://www.stes.es/documentación/...pisa/pisa2006_marco_evaluacion.pdf

Pantón, G. (1995). *Diccionario enciclopédico Grijalbo*. Bogotá, Colombia: Grijalbo.

SEP. (2006). *Programas de estudio de matemáticas en educación secundaria*. D.F, México: Secretaría de Educación Pública.

Velázquez, S. y Nolasco, H. (2009). Rediseño del discurso matemático escolar en la educación secundaria. *Sinergia 1 (2*), 26-31.

Yackel, E. y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentación, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27,4, 458-477.

EXPRESIÓN ESCRITA Y COMPRENSIÓN DE UNA GRÁFICA DE POBLACIÓN POR ESTUDIANTES SORDOS DE 17-26 AÑOS

Pablo Gian-Carlo Lonngi Ayala, Ana María Ojeda Salazar
DME Cinvestav México
giancarlo@cinvestav.mx, amojeda@cinvestav.mx

Resumen. Esta investigación, cualitativa, se refiere a la comprensión de ideas de Probabilidad y de Estadística de estudiantes sordos. Epistemológicamente, concierne a las ideas fundamentales de estocásticos para un currículum en espiral; cognitivamente, a la sordera, a sus esquemas compensatorios y a elementos de Logogenia para adquirir la lengua escrita; y socialmente, a las condiciones de la educación especial del sordo. En un curso de matemáticas preparatorio al bachillerato, la comunicación escrita sobre datos en gráficas de barras se privilegió en las actividades de enseñanza de Estadística aplicadas a cinco estudiantes sordos, uno oralizado y cuatro señantes con educación básica terminada. Fuera del curso, se aplicaron a dos estudiantes sordos al final de la secundaria especial. Se reveló deficiencia en la lectura de gráficas de barras, en el dominio de la estructura del español escrito para referirse a la distribución de los datos y el desempeño del estudiante sordo oralizado no fue mejor que el de los señantes.

Palabras clave: estocásticos, educación media superior especial

Abstract. This qualitative research refers to the understanding of Probability and Statistics ideas of deaf students. Epistemologically, it refers to fundamental ideas of stochastics for a spiral curriculum; cognitively, to deafness, compensatory schemes and some elements of Logogenia to acquire written language; and socially, to the conditions of the deaf's special education. In a mathematics course to prepare students for high school, the written language to communicate about the data shown in bar graphs prevailed in the teaching activities of Statistics applied to five deaf students who have finished secondary school, one of them oral and the other four, signing. Out of that course, two deaf students at the end of the special secondary education were given those activities. The results pointed out a sharp deficiency in reading bar graphs, lack of mastery of the structure of the written Spanish to refer to the distribution of data and no difference in the answers given by the oral deaf student and those by the signing students.

Key words: stochastics, special high school education

Introducción

En general, la formación docente en México no capacita ni certifica para la atención de alumnos con déficit auditivo. A los estudiantes con esta limitación se les dificulta la recepción y emisión eficaces de los mensajes hablados y escritos. La educación básica se simula y desemboca en el otorgamiento de certificados a los alumnos sordos sin que logren el nivel respectivo en los conocimientos, lo cual los coloca en condiciones de vulnerabilidad. Esta realidad contraviene la Ley General de 2005 de las Personas con Discapacidad (véase http://www.diputados.gob.mx/LeyesBiblio/pdf/LGPD.pdf).

Esta investigación se enfoca en la comprensión de ideas de estocásticos de estudiantes sordos. Aquí informamos del desempeño de cinco estudiantes sordos, de edades 17 a 26 años, uno oralizado (**O**, se expresa en forma oral) y cuatro señantes (**S**, se expresan con la Lengua de Señas Mexicana, (LSM)) en una actividad de enseñanza de estocásticos, que tuvo la finalidad de que los alumnos identificaran datos estadísticos de dos variables de una población (edad (X_1) y sexo (X_2)) presentados gráficamente, y que ejercitaran su descripción escrita mediante sus respuestas a preguntas completando oraciones.

Perspectiva teórica

Los fundamentos de la investigación son de orden epistemológico, cognitivo y social.

Orden epistemológico. Consideramos las ideas fundamentales de probabilidad y de estadística propuestas por Heitele (1975) para un currículum en espiral (a saber, medida de probabilidad, espacio muestra, adición de probabilidades, regla del producto e independencia, equidistribución y simetría, combinatoria, modelo de urna y simulación, variable estocástica, ley de los grandes números, muestra). Su enseñanza a los niños desde edades tempranas les evitaría nociones incorrectas de estocásticos en la vida adulta que, en palabras del autor, corresponden a "intuiciones firmemente arraigadas… difíciles de desprender y que pueden impedir la adquisición del conocimiento analítico" (Heitele, 1975, p. 189). Su enseñanza según un currículum en espiral permitiría que, habiendo aprendido algunas ideas básicas, pudieran adquirir estructuras de pensamiento más formales respecto a los fenómenos aleatorios.

Orden cognitivo. La pérdida auditiva recibe el nombre de *hipoacusia* (Ling, 1984), cuyos grados se determinan con audiometrías. Las personas *anacúsicas* no responden a ninguna frecuencia a la intensidad máxima de 120 decibeles (dB), y es frecuente el error de aplicar este término a personas hipoacúsicas que simplemente no fueron oralizadas.

De entre las investigaciones de las dificultades que genera la sordera para adquirir y comprender las lenguas oral y escrita, algunas señalan una distinción central: las dificultades del desarrollo del lenguaje como facultad biológica, y las que se producen en el proceso de la lectura. Las segundas están determinadas por las interfaces entre sintaxis, semántica, pragmática, léxico y otros factores no lingüísticos que participan en el proceso lector (Salas, 2009). La Logogenia, de la lingüística aplicada, fue propuesta por Radelli (1992) para la adquisición de la lengua escrita por los sordos. Consiste en mostrar al sordo pares de oraciones; cada par se distingue sólo por un elemento que puede modificar el sentido entre sus oraciones: para que el sordo identifique las sutilezas del lenguaje, que difícilmente advierte por la limitación auditiva-verbal.

Orden social. La audición limitada, en tanto "deficiencia", dará lugar a esquemas compensatorios, pero Vygotski señalaba (1997) como error que la labor educativa para quien carece de algún órgano de los sentidos resida en que desarrolle los órganos de percepción restantes. Al contrario, pugna por sustituir la compensación biológica por la compensación social del defecto:

> "… un órgano de percepción (analizador) es sustituido por otro, pero… sigue siendo el mismo… todo el mecanismo de su educación… Si psicológicamente una insuficiencia orgánica implica una dislocación social, pedagógicamente educar a ese niño equivale a insertarlo en la vida…" (pp. 116-118).

En la educación de los sordos, existen básicamente dos posturas sobre cómo integrarlos a la sociedad: enseñarles a hablar (**O** oralizados) ó enseñarles LSM (**S** señantes). Esa polarización deriva en una heterogeneidad en el dominio del español y de la LSM de un sordo a otro. Algunas consecuencias son: desconocimiento de la estructura del español, falta de vocabulario básico, de uso cotidiano, incomprensión de la lectura, construcción deficiente de oraciones, conteo uno a uno, falta de automatización de operaciones aritméticas y falta de generalización de conceptos básicos (véase Chávez, Garnica y Ojeda, 2009). Esta situación ocurre continuamente en la mayoría de las personas sordas que transitan por las aulas sin haber recibido la atención necesaria.

Métodos

En sesiones de enseñanza de las matemáticas en el aula, de dos horas, dos o tres veces por semana, a un grupo de estudiantes sordos de 17 a 26 años de edad, se pretendió prepararlos al propedéutico de un bachillerato en línea. El programa propuesto, con carácter emergente, fue: *Primera unidad*, conceptos básicos de aritmética y elementos de pre-álgebra; *Segunda unidad*, geometría y medición; *Tercera unidad*, registro, interpretación y análisis de información cuantitativa.

Esta investigación, cualitativa y en curso, se refiere sólo a la tercera unidad. Se utilizó el método de *experienciación* (Maturana, 2004) de la enseñanza de las matemáticas en el aula, mediante la aplicación de actividades diseñadas *ex profeso* sobre variación, descripción y representación de datos, espacio muestra y conteo. En la enseñanza se utilizó la lengua escrita como medio de comunicación, pero inspirada en el método de Logogenia (Radelli, 1992), si bien éste no se aplicó estrictamente. Esta estrategia se aplicó de forma sistemática y caracterizó al curso. La atención a los estudiantes fue individual para identificar, en lo posible, sus dificultades de comprensión de lo planteado en la enseñanza.

Este informe se refiere a una actividad basada en una situación (véase la Figura 1) presentada en la evaluación nacional de estudiantes de sexto grado de primaria (para la fuente de los problemas, véase http://enlacebasica.sep.gob.mx/2007).

Fuera del curso preparatorio, se realizó una exploración del desempeño en la misma actividad, motivo de este informe, de otros dos sordos señantes provenientes del final de una secundaria especial con orientación bilingüe (LSM y lengua escrita).

Criterios de Análisis. Consideramos para el análisis de los datos recopilados en la investigación: ideas fundamentales de estocásticos, otros conceptos matemáticos, recursos semióticos (expresión escrita, figuras, diagramas, gráficas, simbología matemática) y los términos empleados en alusión a los estocásticos (véase Ojeda, 2006).

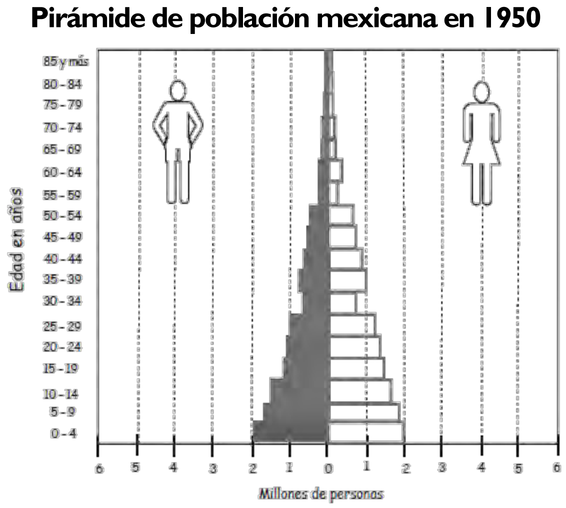


Figura 1. Referente para las proposiciones en la actividad.

Instrumento y técnica. La actividad tuvo dos objetivos: identificar datos estadísticos presentados gráficamente de dos variables de una población —$\mathbf{X_1}$, con sus posibles valores agrupados en 18 intervalos $\mathbf{C_i}$; y $\mathbf{X_2}$, nominal, con dos atributos posibles— y ejercitar su descripción escrita. Específicamente, se refirió a la población de hombres y mujeres mexicanos en 1950 presentada en una gráfica de barras compuesta (véase la Figura 1). Se plantearon cinco reactivos, cada uno constituido por dos proposiciones, la primera para asignarle su valor de verdad (**VV**) (verdadera, *sí*; falsa, *no*) y la segunda, consecuente con la primera, para ser completada según el valor de verdad asignado (véase la Tabla 1).

Tabla 1. Caracterización de la actividad.

Reactivo	**Ideas de estocásticos** Muestra, variable estocástica	**Otros conceptos matemáticos** Números positivos, adición, orden, intervalos; producto cartesiano	**Recursos semióticos** Gráfica de barras, figuras, lengua natural, numerales	**Términos de referencia** Intervalos de edad, sexo y frecuencia
a)	Descomposición C6 por atributos asignados	Comparación valores de componentes	C6 en eje y; largo de barras respectivas	Más, entre, cantidad, menor que, porcentaje
b)	C7$\cup$C8: valores	Comparación sumas de valores de componentes	C7, C8 en eje y; largo	Población, menor que,

	asignados	respectivas	de barras respectivas	cantidades
c)	Población: Unión todas las clases	Comparación de suma de valores de todas las clases	A partición en y, partición en x	Total, población, menor a, país
d)	C4∪C5 y su descomposición respectiva	Suma de valores de las componentes y comparación relativa a los de la C1	A unión de clases disjuntas, suma de frecuencias respectivas	Población, mayor a, más
e)	C1 y C14∪C15	Comparación de valores respectivos asignados.	C1, C14 y C15 en y; largo de barras respectivas	Población, adultos, menor que, más de cuatro veces

Los reactivos se presentan en la sección 4. El análisis de las respuestas consideró el valor de verdad (**VV**) asignado a la primera proposición en cada reactivo; y para la completación de la segunda proposición, el sentido otorgado en matemáticas (**Mt**) y en español (**Es**). La actividad se presentó impresa en papel para contestarse con lápiz.

Participantes. En el curso preparatorio, desarrollaron la actividad cinco jóvenes mexicanos sordos, uno oralizado (**O-F**) y cuatro sólo señantes (**S-M**, **S-P**, **S-G**, **S-Ms**). Los cinco casos tienen educación especial básica terminada. Durante la actividad no se utilizó LSM, sino sólo la comunicación escrita. En la exploración fuera del curso, la actividad se aplicó a dos señantes (**S-I** y **S-B**) de 15-16 años de edad, al final de su educación secundaria, también en condiciones de comunicación escrita solamente.

Actividad en el curso preparatorio: análisis y resultados

Tabla 2. Caracterización de las respuestas de los estudiantes a los reactivos.

Caso	**a) (X_2)**			**b) (X_2)**			**c) (X_1, X_2)**			**d) (X_1)**			**e) (X_1, X_2)**		
	VV	**Mt**	**Es**	**VV**	**Mt**	**Es**	**VV**	**Mt**	**Es**	**VV**	**Mt**	**Es**	**VV**	**Mt**	**Es**
O-F	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓				✓	✓	✓
S-M	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	----	✓	✓
S-P	✓	✓		✓	✓				✓	✓	✓		✓	✓	✓
S-G	✓	✓	✓	✓											
S-Ms	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		
Total	5	5	4	5	4	1	3	3	4	3	3	2	3	3	3

✓: Respuesta correcta; ☐: Respuesta incorrecta; —: Sin respuesta.

El desconocimiento de la estructura del español dificultó la completación correcta de las oraciones y el desempeño en matemáticas del estudiante sordo oralizado no fue mejor que el de los señantes: sólo **S-M** contestó correctamente los cinco reactivos.

Reactivo a). Este reactivo fue el más fácil, aunque también fue en el que más intervino el investigador para mostrar la lógica de contestación del instrumento. No obstante, **S-P** sustituyó a la muestra por la variable edad (véase la Tabla 3).

Tabla 3. Respuestas al reactivo a).

Caso	VV	Hubo más hombres que mujeres entre las personas de 25 a 29 años de edad. Entre las ______ de 25 a ___años de _____la cantidad de ______fue menor que la cantidad de _____.				
O-F	NO	*personas*	*29*	*edad*	*hombres*	*las mujeres*
S-M	NO	*personas*	*29*	*edad*	*los hombres*	*las mujeres*
S-P	NO	*edades*	*29*	*edad*	*hombres*	*mujeres*
S-G	NO	*personas*	*29*	*edad*	*hombres*	*mujeres*
S-Ms	NO	*personas*	*29*	*edad*	*hombres*	*mujeres*

Reactivo b). **O-F** y **S-P** revelaron indistinción entre población (idea de muestra) y la variable edad. La falta de concordancia en el plural por los casos **S-P**, **S-G** y **S-Ms** sugiere la comparación de las edades en los conjuntos considerados y no de sus cardinalidades; aún más, **S-G** sólo se refirió de manera incompleta al grupo de menor edad.

Tabla 4. Respuestas al reactivo b).

Caso	VV	La población de 30 a 34 años de edad fue menor que la población de 35 a 39 años. Las cantidades de mujeres y de hombres de 30 a 34 años de edad son ____ que las_________ de mujeres y de _______ de ___ a ___ años de _______.					
O-F	SI	*menores*	*cantidades*	*hombres*	*35*	*39*	*la población*
S-M	SI	*menores*	*cantidades*	*hombres*	*35*	*39*	*edad*
S-P	SI	*menor*	*cantidades*	*hombres*	*35*	*39*	*población*
S-G	SI	*menor*	*cantidades*	*hombre*	*30*	*34*	*edad*
S-Ms	SI	*menor*	*cantidades*	*hombres*	*35*	*39*	*edad*

Reactivo c). La Tabla 5 presenta las respuestas proporcionadas a este reactivo, el cual es el único al que se dieron más respuestas correctas en el sentido de la lengua que en el de matemáticas; exhibió concordancia entre el valor de verdad asignado a la primera proposición y el adverbio de comparación utilizado (mayor, menor).

Tabla 5. Respuestas al reactivo c).

Caso	VV	El total de la población de la República Mexicana fue menor a los dos millones de personas. El____de la_____del país fue_____a los 2 _____ de ______.				
O-F	NO	*Total*	*población*	*mayor*	*millones*	*personas*
S-M	NO	*Total*	*población*	*mayor*	*millones*	*personas*
S-P	SI	*Total*	*población*	*menor*	*millones*	*personas*
S-G	SI	*Total*	*republica mexicana*	*menor*	*millones*	*personas*
S-Ms	NO	*Total*	*población*	*mayor*	*millones*	*personas*

S-P y **S-G** asignaron valor de verdad incorrecto, no advirtieron lo disjunto de las clases de edad y que a su unión (total de la población) corresponde la suma de las frecuencias individuales; se denunció el anclaje a la barra en la base de la pirámide (población de 0 a 4 años de edad; véase la Figura 1). Aún la completación de **S-G** no tiene sentido.

Reactivo d). Este reactivo fue el de mayor dificultad, revelada por los estudiantes en la identificación de los intervalos de edades y en la lectura de la gráfica presentada.

Tabla 6. Respuestas al reactivo d).

Caso	VV	La población de 15 a 24 años de edad fue mayor a 4 millones de personas. La cantidad de personas de 15 a 19 _____ de edad más la __________de ________ de 20 a ______años de _______ es _______ a ____ millones de _______.							
O-F	NO	*Años*	*población*	*15*	*24*	*edad*	*menor*	*4*	*personas*
S-M	SI	*Años*	*cantidad*	*personas*	*24*	*edad*	*mayor*	*4*	*personas*
S-P	SI	*Años*	*población*	*personas*	*24*	*edad*	*mayor*	*4*	*personas*
S-G	NO	*20*	*población*	*19*	*15*	*edad*	*menyor a*	*4*	*persona*
S-Ms	SI	*Años*	*cantidad*	*personas*	*24*	*edad*	*mayor*	*4*	*personas*

O-F eligió VV incorrecto y mantuvo la congruencia con la comparación *menor*; no logró la distinción propuesta entre población (como conjunto de personas) y cantidad (la cardinalidad del conjunto), no completó correctamente los intervalos de edad disjuntos, componentes del intervalo planteado en la primea proposición, para aplicar la aditividad de sus frecuencias respectivas y con este resultado realizar la comparación propuesta. Prevaleció nuevamente la barra en la base de la pirámide para la comparación.

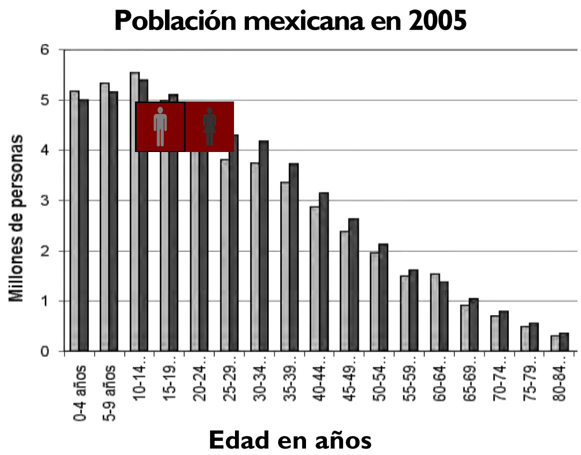
Reactivo e). **S-Ms** y **S-G** compararon las edades (variable X_1) de los grupos propuestos en lugar de lo que se esperaba: las cantidades de personas en esos grupos. En suma, en esta actividad sólo **S-M** decodificó apropiadamente la gráfica presentada.

Tabla 7. Respuestas al reactivo e).

Caso	VV	La población de niños y niñas de 0 a 4 años de edad fue menor que la de los adultos de 65 a 74 años. La ______ de niños y _____ de ____a ___años es más de cuatro veces la _______de los ________de ____ a 75 ____.							
O-F	NO	*población*	*niñas*	*0*	*4*	*población*	*adultos*	*65*	*años*
S-M	-----	*población*	*niñas*	*0*	*4*	*población*	*adultos*	*65*	*años*
S-P	NO	*población*	*niñas*	*0*	*4*	*población*	*adultos*	*65*	*años*
S-G	SI	*población*	*niñas*	*0*	*4*	*menor*	*adultos*	*65*	*años*
S-Ms	SI	*población*	*niñas*	*0*	*4*	*menor*	*adultos*	*65*	*años*

Exploración fuera del curso preparatorio: El papel de la gráfica

Se pidió a dos sordos señantes, **S-B** y **S-I**, que realizaran la misma actividad en las mismas condiciones de comunicación en que se le aplicó a los cinco estudiantes del curso, para explorar su interpretación de los datos presentados en la gráfica piramidal. Tras corroborar sus dificultades debidas a esta última, se la sustituyó por una gráfica de barras convencional de la población mexicana de 2005 (véase la Figura 2), se mantuvieron los mismos reactivos, pero no se obtuvieron mejoras en sus respuestas, al contrario. La Tabla 8 concentra los resultados de la aplicación de la actividad a los casos **S-B** y **S-I**, primero con la gráfica piramidal y una semana después con la gráfica de la Figura 2.



Fuente: INEGI

Figura 2. Referente para las proposiciones presentado a los casos S-B, S-I.

Tabla 8. Caracterización de las respuestas de los dos estudiantes a los cinco reactivos.

Gráfica piramidal 1950															
Caso	**a) (X_2)**			**b) (X_2)**			**c) (X_1, X_2)**			**d) (X_1)**			**e) (X_1, X_2)**		
	VV	**Mt**	**Es**	**VV**	**Mt**	**Es**	**VV**	**Mt**	**Es**	**VV**	**Mt**	**Es**	**VV**	**Mt**	**Es**
S-B				✓			✓			✓			✓		
S-I		✓	✓	✓					✓	✓	✓	✓		✓	✓
		1	1	2			1		1	2	1	1	1	1	1
Gráfica de barras 2005															
Caso	**a) (X_2)**			**b) (X_2)**			**c) (X_1, X_2)**			**d) (X_1)**			**e) (X_1, X_2)**		
	VV	**Mt**	**Es**	**VV**	**Mt**	**Es**	**VV**	**Mt**	**Es**	**VV**	**Mt**	**Es**	**VV**	**Mt**	**Es**
S-B	✓														
S-I		✓							✓	✓	✓		✓	✓	

✓: Respuesta correcta; □: Respuesta incorrecta; —: Sin respuesta.

Reactivo a). **S-B** eligió valor de verdad correcto pero falló en los componentes a ser comparados: "cantidad de hombres menor que el porcentaje de hombres", "entre las mujeres de 25 a 29 años de edad, la cantidad de los hombres…". Por su parte, **S-I** eligió valor de verdad incorrecto, pero logró la correcta identificación de los componentes a ser comparados, así como sus valores.

Reactivo b). Ninguno de los dos estudiantes eligió el valor de verdad correcto, lo cual vuelve a revelar la prevalencia de la variable edad sobre la cardinalidad de los grupos respectivos. **S-B** identificó correctamente los valores de las componentes respectivas pero no colocó la comparación que se requería, sino en su lugar puso que "las cantidades de mujeres y hombres de 30 a 34 años de edad son *el grafia…*". **S-I**, en vez de *menores/mayores* escribió *mujeres* donde correspondía la comparación: distinguió los componentes a comparar pero falló en identificar sus valores respectivos.

Reactivo c). Los estudiantes no acertaron en el cálculo del total de la población del país, pero ambos conservaron congruencia entre el valor de verdad elegido y la comparación "menor" en la justificación. Nuevamente, en vez de "total" o "cantidad" en los otros reactivos, **S-B** escribió "El *grafia* de la *republica mexicana* del país…", revelando confusión y desconocimiento de los términos que componen esa relación de elementos.

Reactivo d). **S-I** contestó correctamente tanto el valor de verdad, como la identificación de los componentes a comparar y sus valores, aunque su comparación no fue del todo correcta en la estructura del español: "La cantidad de personas… es *mas* a 9 millones…". Por su parte, **S-B** erró en el valor de verdad, el cual contradijo su acertada comparación *mayor* a la que acompañó innecesariamente del verbo conjugado *fue*, y equivocó en la suma de los valores de los componentes y en la colocación de *edad* en donde se correspondía *cantidad*. Omitió la comparación mayor/menor y no notó que debía realizar una suma, ni qué valores debía sumar.

Reactivo e). **S-B** y **S-I** escribieron *persona* en vez de *cantidad*. **S-B** eligió valor de verdad incorrecto y escribió *edad* en vez de *niñas*, lo que refleja desconocimiento de los componentes, y mostró imprecisión numérica al considerar edades distintas a las que se pidió en los dos grupos de edad a comparar.

Observaciones

No obstante que el número de participantes sordos en esta investigación es muy reducido, su desempeño durante la actividad de enseñanza sugiere la necesidad de atender a la descripción de datos estadísticos en la educación básica para este tipo de poblaciones, que son necesarias tareas de lectura e identificación de datos y clases en una gráfica (de pirámide o de barras), así como con la relación entre las partes (clases) de un todo (muestra o población) y su comparación. A esto se agrega la necesidad de desarrollar la sensibilidad hacia la magnitud numérica y hacia la estructura del español. La gráfica de la población de 1950 (Figura 1) promovió anclajes a la barra, en la base de la pirámide, de la clase de edades de 0 a 4 años de edad, en la que parecen encajar las clases restantes, en lugar de hacer aparente la partición de la población. Aunque éste no es el caso con la gráfica de barras convencional (población en 2005, Figura 2), en particular los resultados obtenidos con esta última, en acuerdo con lo señalado por Vygotski, indican que más allá de subrayar el sentido de la visión ante la deficiencia auditiva, es necesario fomentar sistemáticamente en la educación del sordo un medio de comunicación eficiente que le permita dotar de sentido a los entes matemáticos implicados en esos recursos semióticos, tal como lo es la expresión escrita.

Referencias bibliográficas

Chávez, H., Garnica, I. y Ojeda, A.M. (2010). Nociones matemáticas adquiridas y audición diferenciada: edades 18-24 años. En P. Lestón (Ed) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 23*, 85-94. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Congreso General de los Estados Unidos Mexicanos (10 de junio 2005). *Ley General de las Personas con Discapacidad.* México: Diario Oficial de la Federación. Recuperado en septiembre de 2009 de www.diputados.gob.mx/LeyesBiblio/pdf/LGPD.pdf.

Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematics* 6, 187-205.

Ling, D. (1984). *Early Intervention for Hearing-Impaired Children: Oral Options.* San Diego: College Hill Press.

Maturana, H. (2004). *Desde la biología a la psicología*. Buenos Aires: Lumen.

Ojeda, A. M. (2006). Estrategia para un perfil nuevo de docencia: un ensayo en la enseñanza de estocásticos. En E. Filloy (Ed). *Matemática Educativa, treinta años: una mirada fugaz, una mirada externa y comprensiva, una mirada actual* , 257-281. México: Santillana-Cinvestav.

Radelli, B. (1992). Una nueva aplicación de la lingüística: la Logogenia. *Memorias del en el Noroeste Sexto Encuentro Internacional de Lingüística 3*. (189-213) México: U. Sonora, División de Humanidades y Bellas Artes, Depto. de Letras y Lingüística.

Salas, P. (2009). *La lectura en las personas sordas.* Recuperado el 15 de marzo de 2010 de: http://debate-educacion.educ.ar/ley/salas.pdf.

Secretaría de Educación Pública (2007). *Prueba Enlace sexto grado de primaria 2007.* http://enlacebasica.sep.gob.mx/2007

Vygotski, L.S. (1997). *Fundamentos de la Defectología. Obras Escogidas V.* Madrid: Visor Dis.

FORMAS E INSTRUMENTOS CON QUE SE REALIZABAN LOS CÁLCULOS, ANTES DE LA ÉPOCA DE LA INFORMÁTICA

Julio Moisés Sánchez Barrera
Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán, UNAM México
sanchezbarrerajm@comunidad.unam.mx

Resumen. La idea de este trabajo es presentar los instrumentos que se utilizaban principalmente en la Ingeniería y las Carreras de Ciencias, para realizar los cálculos, antes de la época de la Informática e inclusive antes de la calculadora científica.

Con la Regla de Cálculo a los estudiantes se les enseñaban a realizar los cálculos desde el Bachillerato, en su formación Profesional, utilizando la regla de Cálculo, y ya siendo Profesionistas con el mencionado instrumento se diseñaron: puentes, edificios, embarcaciones, aviones, vehículos y tantos otros productos de la ciencia y la tecnología, así como los primeros vehículos espaciales.

Para la construcción de la Regla de Cálculo se utilizaron los logaritmos y las escalas logarítmicas, para manejar éste instrumento se aplican las propiedades de los logaritmos

Palabras clave: regla de cálculo, logaritmos, escalas logarítmicas

Abstract. The main idea behind this work is to show the instruments that were used mainly in engineering and science majors to perform calculations, even before computing age and electronic scientific calculators appear.

Using the Slide Rule students were taught to perform calculations since they were studying high school and even through college. These same students, in their professional practice using the Slide Rule they designed: bridges, buildings, vessels, airplanes, vehicles and so many other science and technological products, even spaceships.

Logarithms and their scales were the basis for the Slide Rule construction. As a result, to use it properly, logarithm properties must be applied.

Key words: slide rule, logarithms, logarithmic scales

Justificación

Tomando en cuenta que la invitación para participar en RELME 25 (Vigésimo Quinta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa), tiene textualmente al principio la siguiente frase de José Martí (1891).

> "…Para estudiar la vida futura de los hombres, es necesario dominar el conocimiento de las realidades de su vida pasada. Lo pasado es raíz de lo presente. Ha de saberse lo que fue, porque lo que fue está en lo que es. …."

De lo anterior tiene relevancia la presentación de éste trabajo de cómo se realizaban los cálculos antes de la época de la informática.

Objetivos

- Que se comprenda el que los Cálculos en Ingeniería han tenido cambios a través de la Historia.

- Mostrar la Época de Oro de los Logaritmos.
- Comparar las Ventajas y Desventajas de los Cálculos en Ingeniería con la Época en que vivimos actualmente.

Antecedentes de la Regla de Cálculo

Los Logaritmos fueron descubiertos a principios del siglo XVII; por Napier, para el desarrollo del Comercio, la Astronomía y la Navegación comienza a trabajar en los Logaritmos (1594), dándolos a conocer 20 años después, en 1619 al publicar su manuscrito titulado: Marifice Logarithmrum Cannonis Descriptio, trabajo que contiene una Tabla de Logaritmos además de las Reglas para la solución de triángulos planos y esféricos, con el uso del "Canon".

Por otro lado póstumamente en 1619 se publica su obra Marifici Logarithmorum Cannonis Constructio, traducido como "Construcción del Maravilloso Canon de Logaritmos" y en la que presenta una explicación del método con el que se construyó la tabla así como las propiedades de la Función Logarítmica.

También se reporta que Napier en Escocia, como Burgüi en Suiza, inventaron los Logaritmos antes del uso de la actual notación exponencial se hubiera consolidado en el álgebra de la época y que hoy sabemos que la idea que subyace en la definición de Logaritmo es la relación entre una progresión aritmética y una progresión geométrica y que, si bien Napier construye su teoría haciendo mención explicita al trabajo de Euclides y que los Logaritmos también se pueden obtener por medio de la integral ya que cumplen con que son el área bajo de la curva de la Hipérbola Equilátera.

En que se basan los cálculos

Los Logaritmos desde su aparición han servido para facilitar el cálculo de las operaciones, una de las grandes aplicaciones de los Logaritmos fue en la época que se utilizaba la Regla de Cálculo, ya que esta es una Tabla de Logaritmos, cuyos valores están representados por longitudes proporcionales a su magnitud.

La Regla de Cálculo esta formada por tres partes que son:

1. La *Regla* que es la mayor, tiene en el centro una ranura longitudinal.
2. La *Reglilla* que encaja en la ranura de la Regla y puede deslizarse de un lado a otro.
3. El *Cursor* (o corredera), que es de celuloide o material plástico transparente, y que se desliza en ambos sentidos.

Historia de la regla de cálculo

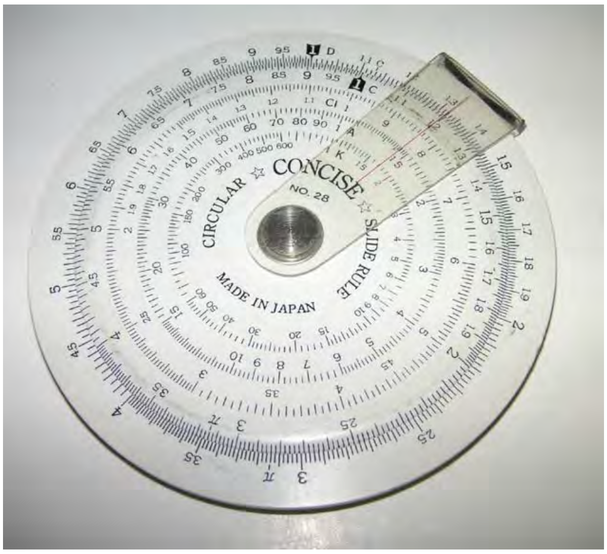
Edmund Gunter en Londres 1620 invento la Escala Logarítmica y usó un compás para efectuar los cálculos, solo multiplicaciones y divisiones. Oughtred en 1630 inventó la Regla de Cálculo Logarítmica Recta, la cual consistía en dos reglas cada una de ellas con escala logarítmica y las cuales se podían deslizar. En 1654 en Inglaterra se conocían Reglas de Cálculo en las cuales la reglilla se movía entre las dos reglas del cuerpo fijo. Robertson en 1775 introdujo a la Regla de Cálculo el primer cursor este debe ser de material transparente y el cual es deslizable, como la rejilla. Roget en 1815 inventó la escala log-log. Manheim en 1850 diseño la Regla de Cálculo estándar moderna.

Clasificación de las reglas de cálculo

Las Reglas de Cálculo por su tamaño y precisión se podían clasificar en:

1. De *Bolsillo* las cuales eran para uso de los estudiantes o bien para ingenieros que las llevaban para uso en campo de trabajo, su tamaño aproximado es de 13 a 16 cm. Las cuales cabían en la bolsa de la camisa y tenían su porta regla de cálculo para protegerlas.
2. Las de *Escritorio* las cuales eran de mayor tamaño que las anteriores de aproximadamente de 25 a 50 cm. Pero debido al tamaño, el número de escalas logarítmicas, la calidad del material con que estaban hechas y la precisión de sus medidas, eran las más adecuadas para los cálculos de la época en que se utilizaban.
3. Las de *Laboratorio de Escuela*, de tamaño aproximado de 2 metros. o mayores las cuales tenían fines didácticos, para enseñar a usar dichas reglas de cálculo a los alumnos de Ingeniería principalmente, en el caso particular de nosotros autores de éste cartel, nos enseñaron con una de ellas en el bachillerato, la cual la enseñaban a utilizar en el laboratorio de Física.
4. Por su forma la mayoría era rectangular pero también las hay circulares, estas tienen la ventaja que al multiplicar con ellas ya no hay que volver al principio, sino siguiendo su trayectoria circular, estas Reglas de Cálculo Circulares por lo general tienen menos escalas que las rectangulares, pero algunas empresas comerciales las regalaban como publicidad.

Figuras 1. Fotografías de las Reglas de Cálculo de Bolsillo y de Escritorio



Figuras 2. Fotografía de la Regla de Cálculo Circular

¿Cómo se realizaban las operaciones?

Ejemplos de las operaciones más simples que se pueden realizar con la Regla de Cálculo, aplicando los logaritmos:

Multiplicación.- Se toma como base la propiedad de los logaritmos, el producto de dos cantidades es igual a la suma de sus logaritmos es decir: $\log AB = \log A + \log B$

Ya que para realizar la multiplicación con la Regla de Cálculo se suman los factores utilizando las escalas logarítmicas "C" y "D".

División.- Se toma como base la propiedad de los logaritmos, el cociente de dos cantidades es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor, es decir:

$$\log \frac{A}{B} = \log A - \log B$$

En la Regla de Cálculo se utiliza la escala "D" como dividendo y la escala "**C**" divisor.

Elevar al Cuadrado.- se toma en cuenta la propiedad de los logaritmos, una cantidad elevada a cualquier potencia es igual al logaritmo de la base multiplicando por el exponente, es decir:

$$\log A^2 = 2 \log A$$

En la Regla de Cálculo se utiliza la escala "D" y el resultado se encuentra en la escala "A", esta escala equivale a un medio la escala "D".

Raíz Cuadrada.- Se toma como base la propiedad de los logaritmos, la raíz enésima de cualquier cantidad es igual al logaritmo del radicando entre el índice del radical, es decir:

$$\log \sqrt[2]{A} = \frac{\log A}{2}$$

En la Regla de Cálculo se utiliza la escala "A" y el resultado se obtiene en la escala "D", esta escala es lo doble que la escala "A".

Elevar al Cubo.- se toma en cuenta la propiedad de los logaritmos, una cantidad elevada a cualquier potencia es igual al logaritmo de la base multiplicando por el exponente, es decir:

$$\log A^3 = 3 \log A$$

En la Regla de Cálculo se utiliza la escala "D" y el resultado se encuentra en la escala "K", esta escala equivale a un tercio la escala "D".

Raíz Cuadrada.- Se toma como base la propiedad de los logaritmos, la raíz enésima de cualquier cantidad es igual al logaritmo del radicando entre el índice del radical, es decir:

$$\log \sqrt[2]{A} = \frac{\log A}{2}$$

En la Regla de Cálculo se utiliza la escala "K" y el resultado se obtiene en la escala "D", esta escala es el triple que la escala "K".

La Suma y Resta.- No se pueden realizar con la Regla de Cálculo, ya que no existen propiedades de los logaritmos para estas operaciones.

Ejemplos de lo que se logro realizar con la regla de cálculo

Torre Latinoamericana

Primeros Vehículos Espaciales

Figuras 3. Fotografías de Ejemplos de lo que se logro realizar con la Regla de Cálculo

Escalas logarítmicas de la regla de cálculo

Escala "D" de la Regla y Escala "C" de la Reglilla:

$$f(x) = m (\log x)$$

Dominio: $1 \leq x \leq 10$; m = Tamaño de la Regla de Cálculo.

Escala "A" de la Regla y "B" de la Reglilla:

$$f(x) = p (\log x)$$

Dominio: $1 \leq x \leq 100;$ $\qquad p = \dfrac{Tamaño\ de\ la\ Regla}{2} = \dfrac{m}{2}$

Escala "L" de la Reglilla: Esta escala es Isométrica (de igual medida).

$f(x) = mx$ Dominio: $0 \leq x \leq 1$

Escala "K" de la Reglilla: $f(x) = t (\log x)$

Dominio: $1 \leq x \leq 1000$; $t = \dfrac{Tamaño\ de\ la\ Regla}{3}$

Escala "CI" y "DF", estas escalas se encuentran desplazadas con relación a las escalas "C" y "D" en un valor igual a $\pi = 3.14159\ldots,$ con estas escalas se puede multiplicar o dividir por $"\pi"$ y también obtener los valores: $\pi\sqrt{n}$ Con la escala "A" y $\pi\sqrt[3]{n},$ con la escala "K" y multiplicar varios factores con las Escalas "C" y "D" (evitando desplazamientos con la rejilla).

Escala "CIF" es la Escala "CI" desplazada en "π", y da como resultado los valores recíprocos en relación con la Escala "CF".

Conclusiones

Los Logaritmos desde su aparición han tenido grandes aplicaciones, así como las Escalas Logarítmicas, sin embargo su época de oro fue con la Regla de Cálculo.

Este Instrumento para que se tuvieran resultados más exactos se requirió de practica y habilidad, ya que se emplean Escalas Logarítmicas, la cual ya en la actualidad no estamos acostumbrados a utilizar.

Desde su aparición su uso fue científico, es por eso que se utilizaba en las carreras científicas tales como las ingenierías, las matemáticas, la física, la química, con este instrumento hasta antes de los años setentas, se diseñaron puentes, edificios, embarcaciones, aviones, vehículos, y tantos otros productos de la ciencia y tecnología así como los primeros vehículos espaciales y los cálculos para que se llevaran para su realización.

Las Reglas de Cálculo fueron desplazadas cuando apareció el cálculo digital y el ordenador electrónico y con esto la aparición de las calculadoras científicas, ya que estas son más fácil de utilizar y la ciencia que se requiere para su utilización es más simple y los cálculos son más exactos, también en los cálculos son remplazadas por las computadoras personales y los paquetes (software).

Referencias bibliográficas

Ferrari, M. (2001). *Una Visión Socio-Epistemológica. Estudio de la Función Logaritmo*. Tesis de Maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Lipka, J. (1961). *Computadoras Graficas y Mecánicas*. México: Editorial CECSA.

Martí, J. (1891). *Nuestra América*. Cuba: [s. e.].

Velásquez, D. (1955). *Reglas de Cálculo Teoría y Manejo*. México: Talleres de Unión Gráfica S. A.

LA VISUALIZACION Y EL APRENDIZAJE COLABORATIVO EN LA ENSEÑANZA DE FRACCIONES

Marco A. Pérez Carrasco, Elvira G. Rincón Flores, Ángeles Domínguez
Tecnológico de Monterrey México
marcopc_23@hotmail.com, elvira.rincon@itesm.mx, angeles.dominguez@itesm.mx

Resumen. La presente investigación se realizó en una escuela primaria pública del sur de México y tuvo como objetivo valorar las estrategias de recuperación de los conocimientos previos, la visualización y el trabajo colaborativo en la construcción del concepto fracciones. El enfoque metodológico fue el cualitativo en el que participaron 18 alumnos de grupo del sexto grado y su maestra. Se encontró que las estrategias de recuperación de los conocimientos previos, la visualización y el trabajo colaborativo favorecieron a que los alumnos construyeran el concepto de fracciones desde una perspectiva amplia. Esto es, los alumnos identificaron a los números racionales en situaciones tales como: relación parte-todo de un entero, cociente, medida, y proporción.

Palabras clave: aprendizaje colaborativo, números racionales, visualización

Abstract. This research was conducted in a public elementary school in southern Mexico. The study aimed to assess the influence of the recovery strategies of previous knowledge, visualization and cooperative learning in building the concept of fractions. The methodological approach was qualitative in which participated18 six-grade students and their teacher. Results indicate that the combination of strategies (recovery of previous knowledge, visualization, and collaborative learning) favor a wider view of the concept of fractions. That is, the students were able to recognize rational numbers is situations that involve, for example, as part-whole relationship of a whole, as a ratio, as measure and as a proportion.

Key words: cooperative learning, rational numbers, visualization

Introducción

Desde una línea constructivista, Cardoso y Cerecedo (2008) justifican la importancia de las matemáticas señalando que su estudio no lleva como objetivo único que el alumno resuelva problemas matemáticos, sino que a partir de su enfoque problematizador ellos encuentren un significado. Dentro de los contenidos conceptuales de dicha ciencia, se ha atribuido especial complejidad a la enseñanza-aprendizaje de las fracciones. La enseñanza, el aprendizaje y la construcción del concepto fracciones en los alumnos de educación primaria se ha investigado en sus diversas concepciones (Carpenter, Fennema y Romberg, 1992; Lamon, 1993; León, 1998). León (1998) y Perera y Valdemoros (2007) afirman que la enseñanza de las fracciones es una de las tareas más difíciles para los maestros de educación primaria ya que su estudio involucra el empleo de un conjunto de signos y significados, que muchas veces no son interpretados de forma correcta por los alumnos. Esto ha dado como resultado un fracaso educativo, tanto a nivel nacional como internacional, al abordar dicho concepto (Fandiño, 2007).

El hecho de aprender matemáticas, y en particular los números racionales y sus operaciones, durante mucho tiempo se vio reducido a la memorización de términos, la mecanización de procedimientos y a la resolución (y aprobación) de exámenes escritos. El niño aprendía mediante los principios de la educación tradicional (Freudenthal, 1983) en forma descontextualizada de su realidad, mediante un carácter predominantemente formalista con énfasis en el lenguaje simbólico y la estructura lógica (Cubillo y Ortega, 2003), originando en los estudiantes una pobreza conceptual (León, 1998). El concepto de fracción involucra: a) a la división de un todo en partes iguales y la relación de cada una de éstas con el todo, b) situaciones de reparto, comparación, medición y representación gráfica, y c) escritura y lectura de cantidades fraccionarias (León, 1998). Ante la problemática de la enseñanza-aprendizaje de los números racionales, este estudio se centra en rescatar los conocimientos previos de los estudiantes, valorar el impacto de la visualización y del aprendizaje colaborativo.

Marco teórico

Los conocimientos previos (Ausubel, 1968; Ausubel, Novak y Hanesian, 1978; Novak, 1998), empíricos (Hume, 1984; Locke, 1980) o preconcepciones (Gil y Guzmán, 1993) son el resultado de la interacción entre el sujeto y la realidad. Redish (1994) argumenta que todos los alumnos acuden a la escuela después de haber construido experiencias con el medio y haber organizado éstas en estructuras mentales. Gil y Guzmán (1993) enuncian que los conocimientos previos constituyen la cristalización de un conocimiento precientífico, es decir, son el punto de partida para la adquisición de saberes más complejos. Así mismo, a pesar de no ser iguales en todos los alumnos, son los determinantes del desarrollo y de la comprensión cognitiva de los sujetos (Ausubel, 1968).

La visualización, como estrategia, consiste en presentar materiales que permitan apreciar el desarrollo y/o evolución de un fenómeno u objeto de estudio con el propósito de formar una imagen mental de lo que se pretende enseñar y aprender. Es así que un fenómeno u objeto de conocimiento que pueda ser manipulado y observado tendrá mejores resultados en el aprendizaje de los alumnos. Duval (1999) y Hitt (2002) coinciden en que la adquisición de un concepto se alcanza cuando se es capaz de relacionar las diferentes representaciones de de dicho objeto matemático, "la articulación entre las representaciones pueden seguir caminos que dependen de cómo el sujeto recuerda su conocimiento previo" (Hitt, 2002, p. 250). Macías (2007) argumenta que la visualización no es un fin en sí mismo, sino un medio para conseguir entendimiento ya que permite establecer el "puente" de comprensión entre el discurso del profesor y los recursos y/o materiales que el docente emplea. El desarrollo de la visualización en la construcción del concepto fracciones consideró el empleo de materiales de tres tipos:

concreto (hojas de colores, galletas, fichas de colores, etc.), gráfico (fotografías, esquemas, dibujos de fracciones) y tecnológico (presentaciones en power point, animaciones, videos y software educativo).

En este estudio, el aprendizaje colaborativo se fundamenta en las ideas de Johnson y Johnson (1991), Slavin (1990) y Ormrod (2004), entendiéndolo como la realización de trabajos por medio de grupos con la finalidad de construir el conocimiento entre todos los integrantes del mismo mediante el apoyo mutuo. De acuerdo con Díaz-Barriga y Hernández (2002) el aprendizaje colaborativo es un proceso de negociación de significados y de establecimiento de contextos mentales compartidos. De ahí, la importancia de la interdependencia positiva y la responsabilidad individual.

Otro elemento importante que se encuentra presente en la construcción del concepto fracciones es la comprensión matemática. Sabiendo que las matemáticas están caracterizadas por un lenguaje de signos, símbolos y significantes, es posible señalar que el alumno desarrolla una comprensión matemática en la medida que transforma sus conocimientos empíricos en conocimientos matemáticos a través de la dialectización de ambos. Para ello, el lenguaje es crucial, ya que a través de la expresión de las ideas de los estudiantes es posible reconocer sus conocimientos, preconcepciones y dificultades de aprendizaje. La reorientación y retroalimentación de esas preconcepciones hará posible el surgimiento de una serie de competencias matemáticas (Cardoso y Cerecedo, 2008) propias del pensamiento científico.

Metodología

La investigación es de enfoque cualitativo en el que participaron 18 alumnos de sexto de primaria de una escuela pública al sur de México. El experimento se llevó a cabo durante 8 semanas en cuatro fases. En cada fase, se emplearon distintos instrumentos como la muestra la Tabla 1. En la Fase 1 se empleó un esquema que se centra en lo que sé, lo que quiero saber, y lo que aprendí (SQA).

Tabla1. Fases del experimento e instrumentos empleados.

Fase	Actividades	Instrumentos
Fase 1	Identificación de conocimientos previos	Prueba piloto. Entrevistas. Esquema SQA
Fase 2	Contextualización. Planeación y selección de las actividades	Pretest
Fase 3	Lluvia de ideas, esquema SQA. Implementación de actividades de visualización. Trabajo colaborativo	Lista de cotejo. Guía de observación Diario del profesor
Fase 4	Indagación a profundidad. Evaluación.	Entrevistas. Postest

Tanto la primera como la última fase fueron momentos dedicados a las evaluaciones (exámenes de opción múltiple). La intervención didáctica ocurre en la tercera fase con material matizado con la información de la segunda fase. Las actividades se basaron en los contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales relacionados con la construcción y uso del concepto de fracción, tales como; representación, lectura y escritura de números fraccionarios; tipo, conversión, simplificación, suma y resta de fracciones y el reconocimiento de fracciones en situaciones de la vida diaria, como en las unidades de peso, medida, capacidad y porcentaje.

Resultados

Los resultados obtenidos de los instrumentos de la Fase 1 y 2 permitieron identificar las preconcepciones y los errores conceptuales más significativos con los que los alumnos se iniciaban en el estudio. Dentro de éstas se puede mencionar que la mayoría de los alumnos tenían dificultades para comprender situaciones que implicaban la suma, resta, comparación de fracción así como el trabajo con las fracciones equivalentes. El promedio grupal inicial pre test fue de apenas 27.5 con un máximo de 8 correctas de 20 preguntas, evidenciando los siguientes puntos: a) dificultad en reconocer términos comunes que se emplean en el trabajo con fracciones: simplificación, mínimo común denominador, y fracción propia, b) una visión predominante de las fracciones como la división de un entero en partes iguales, y c) la falta de visualización de lo que representa la fracción o las operaciones entre éstas. Además, se encontró debilidades en el trabajo colaborativo, hacía falta la interdependencia positiva y la responsabilidad individual.

Durante la implementación de las actividades del experimento se fue apreciando la importancia y el impacto de las estrategias para la recuperación de los conocimientos previos, la visualización y el trabajo colaborativo en el entendimiento de fracciones (ver Tabla 2 y Tabla 3). En la Tabla 2 se concentran las respuestas dadas por tres alumnos a la primera pregunta de la entrevista (Fase 1 y Fase 4).

Tabla 2. Respuestas de tres estudiantes a la pregunta 1 ¿Qué entiendes por fracción o fracciones? de la entrevista en al inicio y al final de la investigación

Momento	Alumna A (bajo rendimiento)	Alumna C (rendimiento medio)	Alumno E (alto rendimiento)
Al inicio del experimento (Fase 1)	Yo casi no les entiendo; tengo muchas dificultades para saber lo que son	Que se dividen las fracciones en dos números	Son partes, fracciones de algo que fue dividido entre un número
Al final del experimento (Fase 4)	Son números que indican las partes en que está dividido un entero	Son partes iguales de un entero y sirven para repartir cosas	Son enteros divididos en partes iguales, y sirven para repartir cosas, cantidades, para medir algo.

Al inicio del experimento, la visión que los alumnos tenían sobre las fracciones se centró en la división de un entero en partes iguales. Al terminar el experimento, los mismos alumnos mostraron una visión más completa reconociendo su uso. Los participantes del estudio se fueron apropiando, de forma paulatina, de los aportes de las estrategias para el rescate de los conocimientos previos, la visualización y en trabajo colaborativo (Tabla 3).

Tabla 3. Respuestas de los estudiantes sobre la importancia de las estrategias del experimento

Pregunta	Respuesta en Fase 1	Respuesta en Fase 4
¿Las veces que has trabajado con las fracciones, te han preguntado qué cosas sabes de ellas? ¿Es eso importante? ¿Por qué?	Sí, si es importante que nos pregunten porque así no repetimos los temas	Sí, y es importante Porque si yo no sé algo, a partir de allí me pueden explicar
¿Te han presentado imágenes o algún otro material en el que tú puedas observar la escritura o equivalencia de una fracción? ¿Cuál o cuáles?	Algunas veces. Con figuras geométricas y dibujos	Sí. Las palabras en foamy, las tarjetas, el cartel, el tendedero de fracciones equivalentes, las imágenes en el salón de Enciclomedia
¿Prefieres el trabajo de las fracciones de forma individual o en equipo?	Individual, muchas veces no quieren trabajar conmigo mis compañeros o no trabajan igual todos	En equipo, porque cuando alguien no sabe algo, otro compañero lo puede ayudar y así aprender más

La información anterior hace valer, desde el punto de vista de los estudiantes, la importancia de la recuperación de los conocimientos previos, el empleo de la visualización y el aprendizaje colaborativo. De igual forma, permitió reafirmar que los estudiantes no prestan suficiente atención a los materiales comunes de enseñanza (libro, láminas en papel bond, círculos para representar determinadas fracciones, etc.), sino que prefieren el empleo de materiales y recursos actuales (presentaciones de Power Point, imágenes, animaciones, videos, etc.), ya que les resultan más motivantes.

Otro punto de análisis en el que se fundamentan el impacto y la transcendencia de las estrategias de recuperación de los conocimientos previos, el empleo de la visualización y el aprendizaje colaborativo es el examen de opción múltiple del pre test y pos test. Es así que la tabla 4 muestra la comparación de los resultados de ambos.

Tabla 4. Comparación de aciertos de los estudiantes (en la fase 1 y en la fase 4, sobre 20 reactivos)

	Pre test	Pos test
Promedio	6.16	17
Máximo	9	19
Mínimo	3	13

Los resultados mostrados en la Tabla 4 sugieren una mejoría en el desarrollo del examen de conocimientos (comparando pre y postest). Por el diseño del instrumento es posible concluir que los estudiantes construyeron el concepto fracciones en un sentido más amplio, ya que además de conceptualizarlas como las partes iguales que dividen a un entero, también desarrollaron habilidades y actitudes para reconocer situaciones de reparto, proporción, comparación y el empleo de sus aprendizajes en situaciones comunes y reales (como el empleo de las fracciones en las unidades del tiempo, peso, longitud y capacidad). Finalmente, el aprendizaje colaborativo incrementó la participación de los alumnos en la construcción de conocimientos ya que “los que sabían” apoyaron a “los que no sabían” o que presentaron mayores obstáculos cognitivos.

Al igual que con los alumnos, el empleo de las estrategias de recuperación de los conocimientos previos, la visualización y el aprendizaje colaborativo favorecieron al cambio cognitivo, conceptual e instruccional en la docente del grupo de alumnos de sexto grado. Ya que al inicio de la investigación al preguntarle sobre la importancia de los conocimientos previos, de la visualización y del aprendizaje colaborativo, ella respondió en base a sus conocimientos teóricos y en base a algunas experiencias docentes, tal es el caso que comentó que hacía uso de los medios comunes de visualización para la enseñanza de las fracciones(los textos escritos en papel bond, las ilustraciones del libro, las figuras geométricas, y el empleo del pizarrón). Sin embargo, una vez concluido el tema de estudio las respuestas de la entrevista a los mismos cuestionamientos cambiaron de forma significativa; por ejemplo, en lo que refiere a la recuperación de los conocimientos previos señaló que todos los alumnos poseen nociones y conocimientos en base a su experiencia, por ello, la consideración de dichos saberes permite orientar la enseñanza y mejorar el aprendizaje de los alumnos. En torno a la visualización aseveró que el empleo de la visualización desarrolla el razonamiento, la comprensión, ayuda a centrar la atención, motiva a los alumnos y desarrolla la metacognición; en ese mismo sentido, argumentó que no era lo mismo que el alumno escuche: “un cuarto” o “un medio” a que los alumnos puedan verlos de forma ilustrada, grafica, sonora o interactiva. Finalmente, expresó que gracias a la implementación del aprendizaje colaborativo apreció que los alumnos “que saben” apoyaban a “los que no saben” y a partir de esa interacción el aprendizaje es más significativo. De igual forma comentó que los docentes deben reconceptualizar estar forma de trabajo, pues muchas veces se piensa que solamente aplica a grados superiores, sin saber que también aporta excelentes resultados en los primeros grados.

En conclusión, los resultados de la investigación remarcan que todo aprendizaje nuevo parte y adquiere significado de acuerdo a los conocimientos previos que el sujeto posee (Ausubel, Novak y Hanesian, 1978; Gil y Guzmán, 1993; Macías, 2007). Así mismo, que la visualización como estrategia de enseñanza y de aprendizaje favorece la sincronización de información auditiva, que el docente expresa en sus explicaciones, con la observación de materiales y recursos, cumpliendo con ello varios roles, entre ellos: motivador intrínseco (Castañeda, 2003), medio de atención (Bastán y Rosso, 2006), fuente de compresión conceptual (Cárdenas y Oropeza, 2009), factor de comprensión (Sastre, Boubeé, Rey y Delorenzi, 2008) y estrategia de evaluación. Por último, el empleo del aprendizaje colaborativo fomentó la participación de todos los integrantes del grupo estableciendo una clase de contrato social de negociación de significados, de establecimiento de contextos mentales compartidos en donde dicha interacción social permitió el reforzamiento de los valores de responsabilidad, compromiso, igualdad, tolerancia y solidaridad (Coll, Palacios y Marchesi, 1990; Martínez, Rincón y Domínguez, 2011; Ormond, 2004).

Referencias bibliográficas

Filloy, E. (1999). *Aspectos Teóricos de Algebra Educativa.* México: Iberoamérica.

Ausubel, D. P. (1968). *Educational psychology: A cognitive view*. New York: Holt, Rinehart & Winston.

Ausubel, D. P., Novak, J. D., y Hanesian, H. (1978). *Educational psychology: A cognitive view* (2a edición). New York, EUA: Holt, Rinehart & Winston.

Carpenter, T., Fennema, E., y Romberg, T. (Eds.). (1992). *Rational numbers: An integration of research*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Bastán, M., y Rosso, A. (2006). Las tecnologías informáticas en la formación de profesores de Matemática. *Revista Iberoamericana de Educación 37*(4), 1-6. Recuperado el 28 de agosto del 2007 de http://www.rieoei.org/experiencias109.htm

Cárdenas, A. y Oropeza, C. (2009). Una experiencia en torno a la estrategia de visualización. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22*, 313-320. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cardoso, E. E., y Cerecedo, M. M. (2008). El desarrollo de las competencias matemáticas en la primera infancia. *Revista Iberoamericana de Educación 47*(5), 1-11.

Castañeda, B. F. (2003). Visualización con Mathematica. *Sigma 22*, 55-82.

Coll, C., Palacios, J., y Marchesi, A. (1990). *Desarrollo psicológico y educación II*. Madrid, España: Alianza.

Cubillo, C. y Ortega, T. (2003). Análisis de un modelo didáctico para la enseñanza-aprendizaje del orden de las fracciones. *Educación Matemática 15*(2), 55-75.

Díaz-Barriga, F. y Hernández, R. (2002). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo una interpretación constructivista* (pp. 138 -229). México: McGraw-Hill Interamericana.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. In F. Hitt y M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st North American PME Conference* (3-26). Cuernavaca, Morelos, Mexico.

Fandiño, M. I. (2007). Fractions: conceptual and didactic aspects. *Acta Didáctica Universitatis Comenianae 7*, 23-45.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of Mathematical Structures.* Holland: Reidel.

Gil, D. y Guzmán, M. (1993). *Enseñanza de las ciencias y la matemática tendencias e innovaciones.* Madrid, España: Porrúa. Hitt, F. (2002).

Construction of mathematical concepts and internal cognitive frames. In F. Hitt (Ed.), *Representations and mathematics visualization* (pp. 241-262). International Group for the PME-NA Chapter and Cinvestav-IPN, Mexico.

Hume, D. (1984). *Tratado de la naturaleza humana.* Barcelona: Orbis.

Johnson, D. W. y Johnson, F. P. (1991). *Joining together: group theory and group skills.* (4a Ed). Englewood Cliffs, N.J.: Prentice- Hall.

Lamon, S. (1993). Ratio and proportion: Connecting content and children's thinking. *Journal for Research in Mathematics Education 24*(1), 41-61.

León, P. (1998). Procedimientos de niños de primaria en la solución de problemas de reparto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 2*(1), 5-28.

Locke, J. (1980). *Ensayo sobre el entendimiento humano*. Madrid: Nacional.

Macías, F. D. (2007). Las nuevas tecnologías y el aprendizaje de las matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación, 42*(4), 1-17.

Martínez, L., Rincón, E. y Domínguez, A. (2011). El juego y el aprendizaje cooperativo en la enseñanza de las ecuaciones de primer grado. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 24*, 397-405. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Novak, J. D. (1998). *Learning, creating, and using knowledge: Concept maps as facilitative tools in schools and corporations.* Mahwah, NJ: Erlbaum.

Ormrod, J. (2004). *Aprendizaje Humano* (4a ed.). Madrid: Pearson-Prentice Hall.

Perera, P. y Valdemoros, M. E. (2009). Propuesta para la enseñanza de las fracciones en cuarto grado. *Educación Matemática 21*(1), 29-61.

Redish, E. (1994). Implications of cognitive studies for teaching physics. *American Journal of Physics 62*(9), 796-803.

Sastre, V., Boubeé, C., Rey, G. y Delorenzi, O. (2008). La comprensión: proceso lingüístico y matemático. *Revista Iberoamericana de Educación 46*(8), 1-9.

Slavin, R. E. (1990). *Cooperative learning: theory, research, and practice.* Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

EL ISOMORFISMO DE MEDIDAS COMO ESTRATEGIA PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS EN EL TERCER GRADO DE LA ESCUELA PRIMARIA

Hugo Cerritos Amador
Cinvestav-IPN México
hcerritos@cinvestav.mx

Resumen. La presente investigación, de orden cualitativo y *en curso*, es parte de una tesis de maestría en México respaldada por el CONACYT. El interés es identificar las dificultades de estudiantes del segundo ciclo de primaria (8-9 años) al resolver problemas multiplicativos según la estructura del "Isomorfismo de Medidas" propuesta por Vergnaud (1995). La propuesta teórica se basa en el "Modelo Teórico Local" (Filloy, 1999). En su primera fase, se realiza la revisión de la propuesta institucional (Secretaria de Educación Pública, [SEP] 1993), bibliografía complementaria respecto a la enseñanza de problemas multiplicativos, y el diseño de pruebas y ejercicios de diagnóstico; en la segunda fase se diseñara y aplicará el modelo de enseñanza centrando el interés en la resolución de problemas con isomorfismo de medidas. Como resultados preliminares, se tiene que los niños muestran modos de resolución de problemas deficientes, debido a que en la propuesta oficial no se tratan problemas relacionados con el "Isomorfismo de medidas". Los niños presentan dificultades al resolver problemas de la vida cotidiana planteados en el aula.

Palabras clave: isomorfismo de medidas, resolución de problemas, multiplicación

Abstract. The nature of the current research in course is qualitative, and is part of a master degree thesis supported by CONACYT in Mexico. The interest is to identify the difficulties of second cycle primary school students (8-9 years) solving multiplicative problems according to the structure of the "isomorphism of measures" proposed by Vergnaud (1995). The theoretical proposal is based on the "Local theoretical model" (Filloy, 1999). In its first phase, it carries out the review of the institutional proposal (Secretariat of public education [SEP] 1993), supplementary bibliography on teaching multiplicative problems, and the design of tests and exercises of diagnosis; in the second phase will be designed and applied the model of teaching focusing the interest in the resolution of problems with isomorphism of measures. As preliminary results, children show a deficient way of troubleshooting, because the official proposal doesn't include with problems related to the "isomorphism of measures". Children have difficulties to solve of everyday life problems in classroom.

Key words: isomorphism of measures, problem-solving, multiplication

Introducción

La sociedad del siglo XXI en la cual vivimos, es de cambios acelerados en el campo de la ciencia y tecnología: los conocimientos, las herramientas y las maneras de hacer y comunicar la matemática evolucionan constantemente; por esta razón, tanto el aprendizaje como la enseñanza de la matemática deben estar enfocados en el desarrollo de las destrezas necesarias para que los estudiantes sean capaces de resolver problemas cotidianos, a la vez que se fortalece el pensamiento lógico y creativo. El saber matemática, además de ser satisfactorio, es extremadamente necesario para poder interactuar con fluidez y eficacia en un mundo "lleno de matemáticas".

Es decir, los problemas y la resolución de los mismos no es sólo una actividad del matemático, sino que también es una actividad de personas o niños que aun cuando no tienen un conocimiento profundo de la matemática, realizan acciones semejantes a las del matemático, es decir resuelven problemas que la sociedad o la necesidad y su medio le presentan constantemente. En este sentido, la resolución de problemas se ha convertido en una forma de indagar los procesos del pensamiento que generan los alumnos cuando resuelven una situación problemática o problema, a la vez que permite determinar los procedimientos informales o estrategias que utilizan al enfrentarse a dichos problemas y su nivel de dificultad. Así pues, en los últimos años se ha abordado la resolución de problemas multiplicativos con el fin de elaborar una clasificación de los mismos, indagar las estrategias que utilizan los alumnos cuando los resuelven y a la vez determinar su grado de dificultad.

Antecedentes

A lo largo de la historia el estudio de las matemáticas se ha realizado desde perspectivas diferentes, a veces enfrentadas, subsidiarias de la concepción del aprendizaje en la que se apoyan. Ya en el período inicial se produjo un enfrenamiento entre los partidarios de un aprendizaje de las habilidades matemáticas elementales basado en la práctica y el ejercicio y los que defendían que era necesario aprender unos conceptos y una forma de razonar antes de pasar a la práctica y que su enseñanza, por tanto se debía centrar principalmente en la significación y en la comprensión de los conceptos.

Por tal motivo las matemáticas se han convertido en la necesidad del quehacer humano al paso de la historia y su proceso de construcción está sustentado en abstracciones sucesivas.

En la construcción de los conocimientos matemáticos, los niños también parten de experiencias concretas. Paulatinamente, y a medida que van haciendo abstracciones, pueden prescindir de los objetos físicos. El diálogo, la interacción y la confrontación de puntos de vista ayudan al aprendizaje y a la construcción de conocimientos; así, tal proceso es reforzado por la interacción con los compañeros y con el maestro. En esas actividades las matemáticas serán para el niño herramientas funcionales y flexibles que le permitirán resolver las situaciones problemáticas que se le planteen.

Así la resolución de problemas es parte fundamental y es generadora de un proceso en el cual se combinan elementos del conocimiento, reglas, técnicas, destrezas y conceptos previamente aprendidos para solucionar una nueva situación. Es así como la resolución de problemas se considera la verdadera esencia para hacer matemáticas. Algunas de las discusiones sobre las estrategias (o heurísticas) de resolución de problemas en matemática, comienzan con (Polya, 1965) que fue el primero en proponerse enseñar conscientemente el proceso de resolución de un problema. Su obra tuvo como objetivo fundamental llevar al salón de clases procedimientos, principios y recursos en general, propios del quehacer matemático. El aporte principal lo constituye el modelo planteado por él basado en las conocidas cuatro etapas: comprender el problema, elaborar un plan de solución, ejecutar el plan y análisis de la solución obtenida. En su criterio, lo más importante es lograr que el individuo aprenda a realizar conscientemente el tránsito por este camino, lo cual requiere del estudio de los métodos de solución llamados heurísticos; este es otro de sus innegables resultados. El término resolución de problemas no es privativo de la Matemática, pero la relación entre ésta y la resolución de problemas parece estar implícita tanto en las creencias populares como en determinados modelos pedagógicos.

Justificación de la Investigación

Para comprender la naturaleza de las dificultades de las matemáticas es necesario conocer cuáles son los conceptos y habilidades básicas que conlleva, cómo se adquieren y qué procesos cognitivos subyacen a su propia ejecución.

Por lo tanto el objetivo de la enseñanza de las matemáticas no es sólo que los niños aprendan las tradicionales cuatro reglas aritméticas, las unidades de medida y unas nociones geométricas, sino su principal finalidad es que puedan resolver problemas y aplicar los conceptos y habilidades matemáticas para desenvolverse en la vida cotidiana.

La orientación adoptada para la enseñanza de las matemáticas pone el mayor énfasis en la formación de habilidades para la resolución de problemas y el desarrollo del razonamiento matemático a partir de situaciones prácticas. Este enfoque implica, organizar la enseñanza en torno a seis líneas temáticas: los números, sus relaciones y las operaciones, la medición; la geometría, procesos de cambio, tratamiento de información y predicción y azar. Para lograr el aprendizaje es indispensable que los alumnos se interesen y encuentren significado y funcionalidad en el conocimiento matemático, que lo valoren y hagan de él un instrumento que les ayude a reconocer, plantear y resolver problemas presentados en diversos contextos de su interés.

Pregunta de investigación

Con el objetivo inicial de analizar cómo se presentan e interrelacionan en la enseñanza dentro del aula el planteamiento y la resolución de problemas multiplicativos con el "Isomorfismo de Medidas" y realizando el estudio de la primera fase orientado hacia la pregunta: ¿Cómo se desarrolla y relaciona el "Isomorfismo de Medidas" en la resolución de los problemas multiplicativos en el tercer grado de la escuela primaria? En particular muestro los primeros resultados de dicha fase, se lleva a cabo con treinta niños que cursan el grado señalado anteriormente dentro de un contexto escolar enmarcado en el cumplimento de objetivos y contenidos señalados por el currículo oficial.

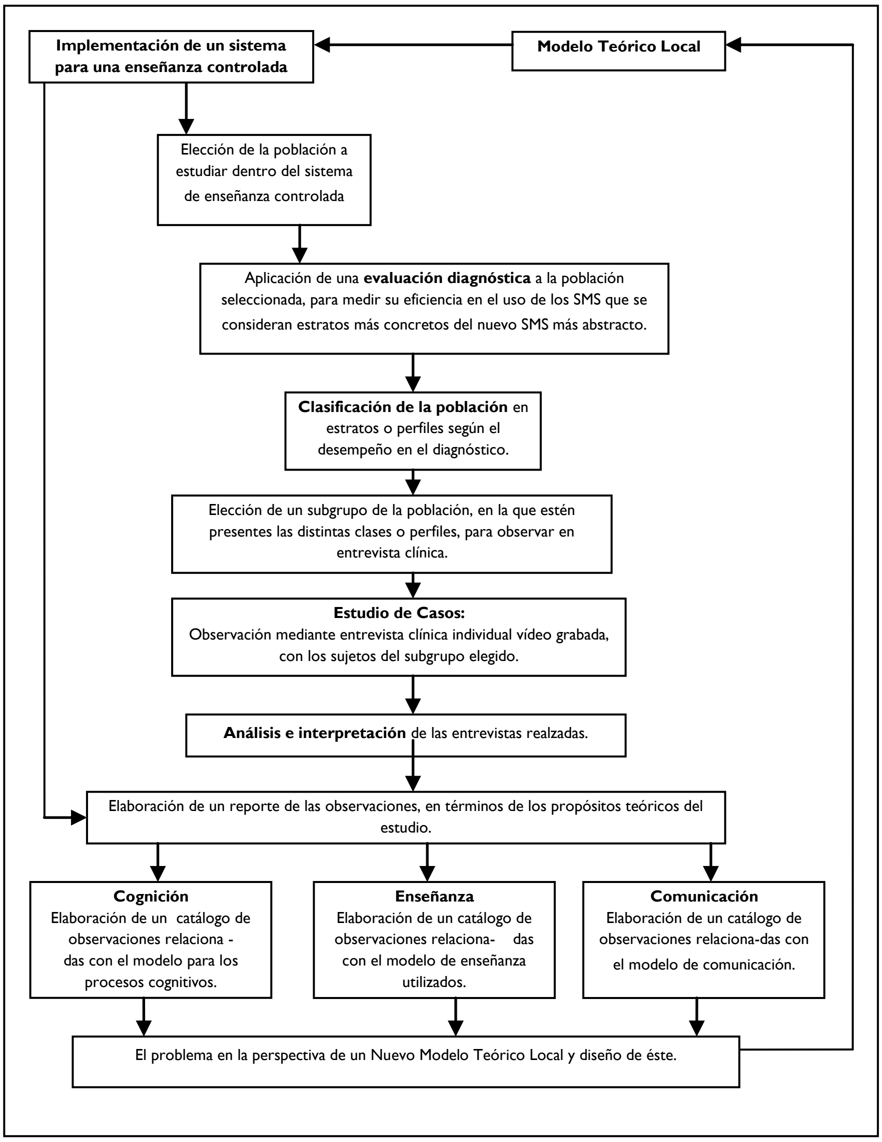
Perspectiva teórica

La investigación se llevará a cabo con base al *Modelo Teórico Local* (MTL) donde el objeto de estudio se enfoca en cuatro componentes transversales, en donde sólo se abordarán dos: Modelos de Enseñanza y Modelos de Procesos Cognitivos. Para dicha investigación considero a un modelo de enseñanza como un conjunto de secuencias de textos matemáticos -porciones extensas de discurso- cuya elaboración y descodificación por el alumno le permiten dar una interpretación a aquellos textos, propuestos en un Sistema Matemático de Signos (SMS) más abstracto, y descodificarlos como mensajes con un código matemático socialmente bien establecido, es decir logra la meta educativa de dicho modelo (Filloy, 1999).

Los procesos cognitivos (Filloy, 1999) que se ponen en acción para llevar a cabo las formas del pensamiento matemático, van afinando los elementos complejos como los que se utilizan en la percepción, en el direccionamiento de la atención y sus relaciones con el proceso de comprensión, en el uso cada vez más intensivo de la memoria, el desencadenamiento de proceso de análisis y síntesis cada vez más entrelazados con el uso de la lógica, en las concepciones heurísticas utilizadas en la resolución de las situaciones problemáticas, en el aprendizaje ligado a los procesos de resolución de problemas, que requieren del uso novedoso de los SMS de la matemática escolar.

En el siguiente esquema (véase Figura 1) se muestra de manera detallada el diseño, organización y curso de la investigación.

Figura 1. Organización de la investigación y Modelo Teórico Local (MTL).



Isomorfismo

El término 'isomorfismo' significa etimológicamente 'igual forma', y con ello se quiere destacar la idea según la cual existen semejanzas y correspondencias formales entre diversos tipos de sistemas. El descubrimiento de un isomorfismo entre dos estructuras significa esencialmente que el estudio de cada una puede reducirse al de la otra, lo que nos da dos puntos de vista diferentes sobre cada cuestión y suele ser esencial en su adecuada comprensión.

En matemática la noción de isomorfismo es desarrollada en la teoría de los grupos. Esta teoría estudia los modos según los cuales cada uno de los términos de un grupo dado es sustituido, siguiendo un mismo modelo, por cada uno de los términos de otro grupo dado. Dentro de las relaciones posibles entre grupos hay la relación isomorfa. Según ella, dos grupos se llaman (simplemente) isomorfos cuando se establece una correspondencia unívoca entre los elementos de los dos grupos, y cuando el producto de dos elementos de un grupo corresponde al producto de otros dos elementos correlativos con los anteriores.

La resolución de problemas

Para trabajar la multiplicación desde el contexto de la resolución de problemas, se opta por la conceptualización propuesta por Vergnaud (1995), autor que ubica los problemas multiplicativos en el campo conceptual de la estructura multiplicativa. Vergnaud ha abordado las relaciones y operaciones y otros conceptos, creando la noción de campo conceptual: "un conjunto de problemas y situaciones para cuyo tratamiento resulta necesario utilizar conceptos procedimientos y representaciones de diferente tipo estrechamente interconectados." (Vergnaud, 1995, p. 127)

Tradicionalmente la operación multiplicativa se ha presentado como una relación ternaria **a x b = c**. Para Vergnaud se trata de una relación cuaternaria entre 4 cantidades y dos tipos de medidas. Dos cantidades corresponden a medidas de un cierto tipo (por ejemplo, número de objetos) y las otras dos, son medidas de otro tipo (por ejemplo, su precio) Este análisis genera el siguiente tipo de esquema que ejemplifica los espacios de medida que se establecen y las relaciones entre las cantidades:

M1	**M2**
A	B
C	D

Isomorfismo de medidas

El Isomorfismo de medidas es una estructura que consiste en una proporción simple y directa entre dos espacios de medidas. En el "isomorfismo de medidas" con respecto a los problemas multiplicativos (Vergnaud, 1995, p. 197), se menciona que es una estructura que consiste en una proporción múltiple entre los espacios de medida: medida uno (M1) y medida dos (M2).

Considérese el siguiente problema:

"Roberto compra cuatro paletas al precio de cinco pesos cada una. ¿Cuánto debe pagar Roberto?"

En el siguiente esquema se observa el "Isomorfismo de Medidas" del problema anterior, donde **M1** es el espacio de medidas (número de paletas), y **M2** es el espacio de medidas el (costo de las paletas).

M1	M2
1	5
4	?

Para este autor los datos numéricos son tres: 4 paletas y una paleta que cuesta 5 pesos, entre las cuales se establece una relación de proporcionalidad directa simple.

La multiplicación puede concebirse de dos formas: como ley de composición binaria ó como una operación unitaria. En el caso de la Ley binaria el niño reconoce que debe multiplicar 4 por 5 ó 5 por 4 para solucionar el problema.

Según Vergnaud (1995), en la estructura "Isomorfismo de Medidas" se observa que:

a) Se establece entre dos espacios de medida una relación cuaternaria, es decir intervienen 4 magnitudes o términos, en la cual se debe hallar el valor de una de ellas para su solución.

b) El procedimiento de solución es de tipo escalar o vertical y de operador función horizontal. En el primero se establece una relación entre magnitudes del mismo espacio, mientras que en el segundo consiste en establecer una relación entre magnitudes de espacio de medida diferente.

Diseño: escenario y sujetos

La investigación se lleva a cabo en una Escuela Primaria del Distrito Federal situada en la delegación Coyoacán, se está trabajando con treinta alumnos de tercer grado de turno completo, cuyas edades oscilan entre los 8 y 9 años; se proyectó trabajar con ellos en un período máximo de cuatro semanas.

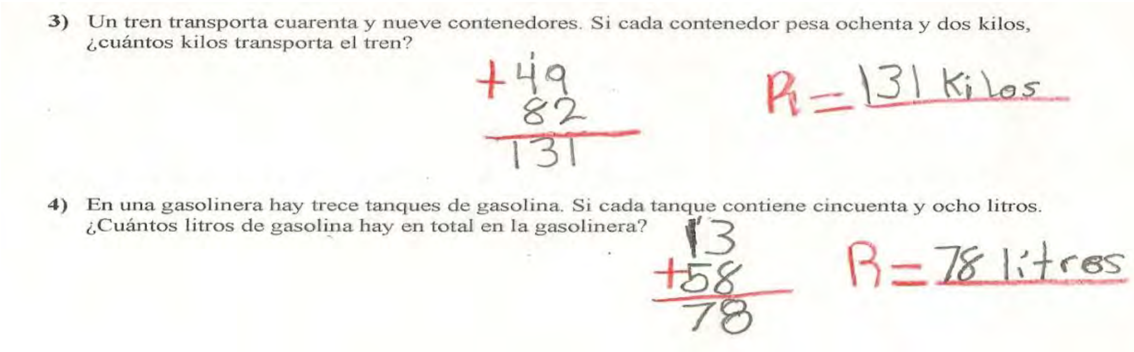
En el análisis de la dimensión curricular se examinaron los planes y programas de estudio de tercer grado de la escuela primaria, los ficheros de actividades didácticas y los libros para el maestro de los grados respectivos, así como los objetivos y contenidos que se mencionan en el eje de "los números sus relaciones y sus operaciones" y al interior de éste, el campo de los problemas multiplicativos y el algoritmo de la multiplicación. También se consultarán algunas investigaciones y libros relacionados con el tema.

El análisis continúa considerando la organización matemática propuesta en los textos escolares con respecto a los problemas multiplicativos, y para ello se analizó los libros de texto oficiales distribuidos por la Comisión de Libros de Texto Gratuitos del Gobierno Federal. En lo sucesivo se señalaron algunas coincidencias y diferencias de la organización matemática propuesta en los Planes y Programas de estudio con las propuestas en dichos libros. Una vez finalizado el análisis entre ambos se formularon hipótesis que se contrastaron empíricamente.

Para llevar a cabo esta primera fase se aplicaron ejercicios y cuestionarios exploratorios, exámenes de diagnóstico, con la finalidad de detectar las problemáticas existentes con respecto al planteamiento y resolución de problemas multiplicativos y así generar la propuesta de uso del "Isomorfismo de Medidas" -que a continuación hago referencia- para abordar estos problemas en el tercer grado de la Escuela Primaria.

Resultados preliminares

Del análisis de la propuesta institucional y del primer acercamiento empírico con los ejercicios de diagnóstico aplicados a los estudiantes resulta escaso el tratamiento de problemas multiplicativos relacionados con el Isomorfismo de Medidas, por otra parte los alumnos no dominan el algoritmo (relación ternaria) como lo señala la currícula oficial (véase Figura 2).


3) Un tren transporta cuarenta y nueve contenedores. Si cada contenedor pesa ochenta y dos kilos, ¿cuántos kilos transporta el tren?

+49
82
131

R = 131 Kilos

4) En una gasolinera hay trece tanques de gasolina. Si cada tanque contiene cincuenta y ocho litros. ¿Cuántos litros de gasolina hay en total en la gasolinera?

13
+58
78

R = 78 litros

Figura 2.

En el Plan y Programas de Estudio de la Escuela Primaria no se aborda el isomorfismo de medidas. El docente tiene escaso conocimiento sobre el "Isomorfismo de Medidas" y por consiguiente no lo aplica ni lo relaciona con el aprendizaje de sus alumnos, y sólo se centra en el uso del algoritmo con respecto a una relación ternaria (véase Figura 3) en donde al observar a los alumnos durante el desarrollo de la clase con el profesor titular la mayoría siempre preguntaba si era de suma, resta, multiplicación y división.

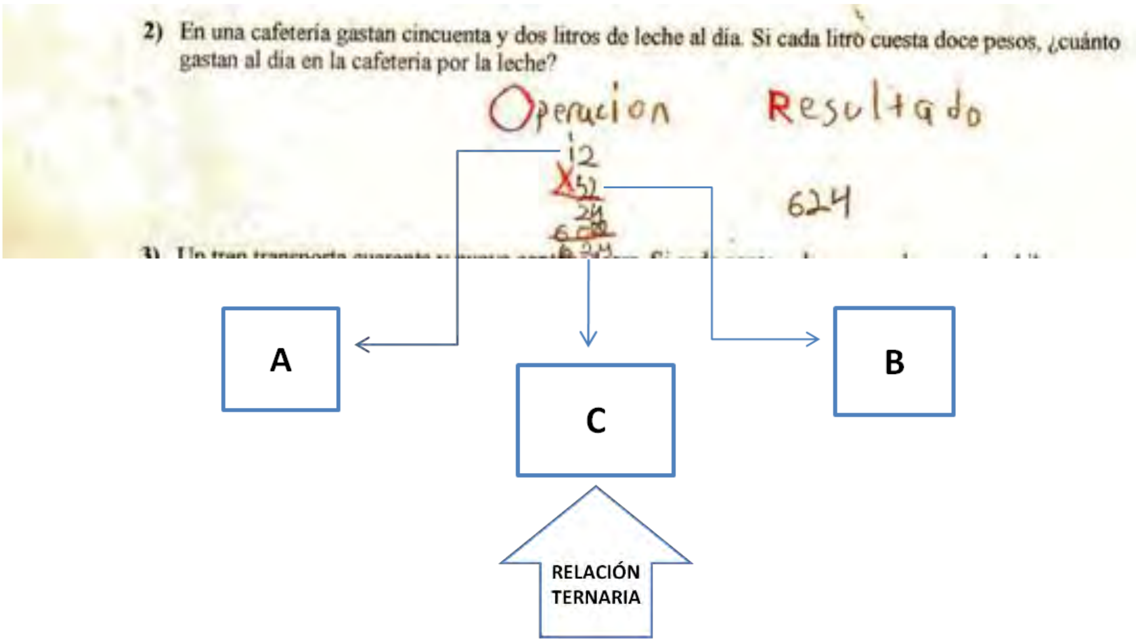


Figura 3. Relación ternaria

Referencias bibliográficas

Filloy, E. (1999). *Aspectos Teóricos de Algebra Educativa.* México: Iberoamérica.

Polya, G. (1965). *Cómo Plantear y Resolver Problemas*, México; Trillas, (reimp.1996)

Secretaría de Educación Pública, *Plan y Programas de estudios 1993*. Educación Básica, Primaria. México.

Secretaría de Educación Pública, (1994). *Fichero de actividades.* Educación Básica Primaria. Matemáticas. Dirección General de Materiales y Métodos Educativos de la Subsecretaría de Educación Básica y Normal de la Secretaría de Educación Pública, México.

Vergnaud, G. (l995): *El niño, las matemáticas y la realidad, problema de las Matemáticas en la escuela.* Trillas: México.

ACCIONES REALIZADAS EN EL MARCO DEL PROGRAMA "LOS CIENTIFICOS VAN A LAS ESCUELAS"

Lidia Beatriz Esper y María del Carmen Pérez Carmona
Facultad de Ciencias Naturales e I.M. Lillo - U.N.T. Argentina
liesper@yahoo.com.ar; macapeca2007@gmail.com

Resumen. Desde el año 2008, el Ministerio de Educación y el Ministerio de Ciencia, Tecnología e Innovación Productiva de la Argentina, está diseñando un conjunto de actividades destinadas a mejorar la enseñanza y aprendizaje de nuestros estudiantes en Ciencias Naturales y Matemáticas. Se hace hincapié, entre otros programas "Los Científicos Van a la Escuela". Se relatan experiencias de las diferentes propuestas didácticas, basadas en el enfoque Resolución de Problemas, que se les dio a los maestros de la Escuela primaria Nº 259 Belgrano, de la capital de Tucumán, en el área Matemática

Palabras clave: resolución de problemas, apoyo científico, escuela primaria, matemática

Abstract. Since 2008, the Ministry of Education and the Ministry of Science, Technology and Productive Innovation from Argentina, is designing a set of activities aimed at improving the teaching and learning of our students in Natural Sciences and Mathematics. It emphasizes, among others programs, "The Scientists go to school". It narrates experiences of different didactical proposals based on the "Problem Solving" approach, which were given to the teachers of Belgrano Nº259 primary School, from the capital of Tucuman, in the Mathematic area.

Key words: problem solving, scientific support, primary school, mathematic

Introducción

El año 2008 ha sido decretado "año de la Enseñanza de las Ciencias" por la Presidenta de la Nación Argentina, constituyendo este tema una prioridad de las políticas educativas en este país. A tal fin, desde el Ministerio de Educación (MEd) y el Ministerio de Ciencia, Tecnología e Innovación Productiva se han diseñado un conjunto de actividades destinadas a mejorar los procesos de enseñanza y de aprendizaje de nuestros alumnos en el área de Ciencias Naturales y Matemática, articulando a su vez al desarrollo de la alfabetización científica de la sociedad.

Entre las actividades previstas por ambos Ministerios se destacó el Programa "Los Científicos Van a la Escuela" (PLCVE). A partir de esta acción se pretendió dar mayor impulso a una de las líneas incluidas en el Programa de Alfabetización Científica (PAC) que el Ministerio de Educación viene implementando, referida al acompañamiento de científicos al trabajo docente en las escuelas.

De este modo, el Programa se propuso que en cada escuela haya un científico que trabaje directamente con los docentes a través del acompañamiento, asesoramiento y actualización en Ciencias Naturales y Matemática, con el objetivo de fortalecer su enseñanza. Dicho Programa comenzó a implementarse a nivel nacional durante el año 2008, con la intención de ir fortaleciéndose en los años 2009, 2010 y 2011.

Dentro de los objetivos del PLCVE se tiene, entre otros, estimular el interés por la ciencia y su utilidad e importancia en la formación ciudadana; promover una mayor articulación entre las escuelas primarias y secundarias y las instituciones científicas y tecnológicas a partir del acompañamiento de los docentes científicos e investigadores al trabajo docente en el aula; fortalecer la experiencia de los maestros para que logren suscitar el interés en sus alumnos hacia la indagación, experimentación y argumentación para la adquisición de nuevos conocimientos científicos.

Para la implementación del PLCVE, los Ministerios de Educación (de cada jurisdicción) convocaron a las instituciones educativas a presentar propuestas donde manifestaran sus necesidades y debilidades, de tal manera que se les designara un científico para que los asesores y acompañen, con el fin de tratar de minimizarlas o subsanarlas. Simultáneamente, desde la Mesa Jurisdiccional (integradas por referentes de los Ministerios de Educación Jurisdiccional, de los Consejos Regionales de Planificación de la Educación Superior, entre otros) se estimuló a la presentación de científicos, docentes investigadores y becarios para el trabajo en las escuelas, entre los cuales se seleccionarían de acuerdo al perfil profesional y a las necesidades requeridas por el establecimiento educativo.

Entre otros científicos, las autoras fueron seleccionadas para participar en el PLCVE y designadas en dos establecimientos educativos del nivel primario, de la capital de Tucumán, Argentina.

El PLCVE se implementa a través de diferentes modalidades, coordinadas con cada jurisdicción: Apoyo científico de acompañante didáctico, Socios científicos del Proyecto de Alfabetización Científica, Científicos en campañas y Actualización disciplinar para profesores.

En este trabajo se relata la experiencia, que tuvo una de las autoras con la modalidad de trabajo: Apoyo Científico del Acompañante Didáctico (AD) en Matemática, designada en el Nivel Primario, para la Escuela N° 259 Belgrano, de la capital de Tucumán, Argentina.

Desarrollo

El establecimiento mencionado consta de instalaciones amplias y cómodas: galerías, lugares de esparcimientos, oficinas y aulas, en buen estado de conservación. El Nivel Primario cuenta con 700 alumnos y funciona únicamente en el Turno Mañana.

Los destinatarios del proyecto son los docentes del área Matemática y Ciencias Naturales, y alumnos de las tres (3) divisiones de 4°, 5° y 6° año, con 25 alumnos en cada sección, aproximadamente. Estos docentes recibieron la capacitación en el área de Matemática.

En cuanto a los materiales didácticos y recursos, cuenta con: 10 computadoras instaladas en una sala de informática; TV; reproductor de video o DVD; filmadora; grabadores, todos a disposición de uso de los docentes. La escuela, además de este Proyecto, participa con el Proyecto "Matemática Para Todos" (PMT) y el Programa Integral para la Igualdad Educativa (PIIE) que trabajan articulados (Esper, Abregu, Álvarez, Pizarro y Robles; 2011). Se trabajó conjuntamente con la responsable del proyecto PMT, donde se desarrollaron las propuestas desde el Enfoque de Resolución de Problemas (Broitman e Itzcovich, 1996; Charnay, 1995).

Algunos rasgos, del trabajo realizado por la investigadora, en la modalidad de trabajo *Apoyo Científico del Acompañante Didáctico*, fueron:

- Asesoramiento a los docentes en relación con las nociones científicas del área matemática dentro de los contenidos que deben enseñar en las respectivas aulas,
- Presencia en algunas clases, donde posteriormente se reflexionó, junto con el docente, acerca de lo ocurrido, discusiones sobre posibles mejoras que pudieran realizarse.
- Realización de experiencias directamente con los niños, acompañados de sus docentes.
- Apoyo a docentes y alumnos en el uso de nuevas tecnologías.
- Colaboración con los equipos de profesores que realizan el acompañamiento didáctico en alfabetización científica en las escuelas escogidas.
- Encuentro de actualización disciplinar con los docentes.
- Apoyo en acciones tales como visitas a museos.
- Colaboración con otros investigadores para conformar una red de apoyo a las escuelas asistidas.

Marco Teórico

¿Qué concepción de Matemática y de aprendizaje de la Matemática orienta el Enfoque de Resolución de Problemas?

Numerosos matemáticos de renombre reconocen que los problemas son el corazón de la actividad matemática. También desde un punto de vista de la Didáctica de las Matemáticas, Brouseau (1990) señala que "Un alumno no hace matemática si no se plantea y no resuelve problemas". La concepción de Matemática que orienta este enfoque parte de enseñar cómo se produce el conocimiento matemático.

Los problemas han sido el motor de la ciencia matemática en la medida en que su resolución ha permitido elaborar nuevos conceptos, relacionarse con otros ya conocidos, modificar viejas ideas, inventar procedimientos. Pero esta elaboración no se realiza sin dificultad. Los problemas a menudo ofrecen resistencias; las soluciones son casi siempre parciales (Charnay, 1994)

Aprender matemática en la escuela debe tener relación, aunque sea delicado precisar sus límites, con lo que ha sido y es para la humanidad hacer matemática. Este planteamiento se apoya en la tesis de que el sujeto que aprende necesita construir por sí mismo sus conocimientos mediante un proceso adaptativo similar al que realizaron los productores originales de los conocimientos que se quieren enseñar (Piaget, 1995). Piaget ha subrayado el rol de la acción en la construcción de conocimientos. "Acción" debe ser entendido no como manipulación de objetos sino como una acción con una finalidad, en un contexto de resolución de problemas. Las acciones que pueden cumplir ese rol son aquellas que los sujetos emprenden para responder a una pregunta, a un problema que se les ha formulado o que se han planteado. La acción matemática consiste a menudo en la elaboración de una estrategia, de un procedimiento que permite anticipar el resultado de una acción no realizada todavía.

Las producciones del sujeto son una información sobre su estado de saber, en particular ciertas producciones erróneas no corresponden a una ausencia de saber. Aprender matemática es, construir el sentido de los conocimientos. La actividad matemática esencial es la resolución de problemas y la reflexión de los mismos.

¿Qué es un problema?

Se entiende por problema (Parra, Broitman e Itzcovich; 1995) toda situación que lleve al aprendiz a poner en juego los conocimientos de los que disponen pero que, a la vez, ofrece algún tipo de dificultad que toma insuficientes dichos conocimientos y fuerza a la búsqueda de soluciones en la que se producen nuevos conocimientos modificando (enriqueciendo o rechazando) los conocimientos anteriores.

La resolución de problemas juega un rol fundamental en el aprendizaje. Los problemas favorecen la construcción de nuevos aprendizajes y brindan ocasiones de empleo de los conocimientos anteriores.

Acciones llevada a cabo

En la primera etapa de implementación del Programa, se interactuó con el equipo directivo y el equipo docente (de 4°, 5° y 6° año del EGB2) para acordar un plan de acción a llevarse a cabo en el periodo asignado. La carga horaria es de 10 hs mensuales, con periodicidad quincenal.

Se realizó un análisis y posterior discusión de las necesidades prioritarias de la escuela y de los docentes involucrados. A partir de un primer diagnóstico, se pudo inferir en la falta de planificación de propuestas innovadoras en la enseñanza de algunos temas de matemática, de actividades lúdicas, de conocimientos conceptuales, de disponibilidad de recursos, etc.

Teniendo en cuenta esta información se decidió implementar un proyecto que contemple la enseñanza de la Matemática, a través de distintas actividades: talleres, seminarios, discusión de la bibliografía, apoyo en el uso de nuevas tecnologías, incorporación del juego como un recurso valioso para el aprendizaje, diseño y análisis de planificaciones y secuencias didácticas, tomando como referencia, entre otros, temas considerados en los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios-NAP- (Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología, 2006).

Para apoyar el trabajo de los docentes, se implementaron otras acciones, que pueden sintetizarse en:

- Participación en actividades de indagación escolar, acompañadas de una reflexión pedagógica posterior.
- Análisis de las prácticas de enseñanza a la luz del enfoque pedagógico adoptado y los desempeños de los alumnos, y diseño de líneas de acción concretas orientadas hacia la mejora.
- Participación de algunas clases junto a los docentes, sin suplirlos,
- Visita de los alumnos de la Escuela N° 259 al Museo de la Facultad de Ciencias Naturales e I. M. Lillo – UNT;
- Supervisión de las tareas que se proponen desarrollar en vistas a la participación en eventos científicos.

Metodología

La estrategia metodológica, en algunos encuentros destinados a la capacitación, fue el planteamiento de distintas situaciones problémicas. En las mismas se proponían realizar alguna tarea, o responder una cierta pregunta, con el objeto de propiciar la reflexión a través de la cual se construyan los conocimientos y se desarrollen las habilidades y actitudes que se pretenden lograr con la actividad en particular y con la lección en general.

- En un primer momento, se promovió el trabajo individual con la situación, con objeto de que en esta instancia permita a los profesores alumnos, un primer nivel de conocimiento de la situación, que es necesario para la realización de la actividad del segundo momento, que se desarrolló en equipos.

- ❖ En un segundo momento las actividades realizadas fueron de comunicación y tuvieron la intención de que los participantes tengan la necesidad de verbalizar el conocimiento adquirido en la primera etapa, para poder contrastar su versión de lo aprendido con la versión de sus compañeros de equipo.
- ❖ En un tercer momento, el trabajo fue a un nivel de todo el grupo, de interacción entre equipos con la conducción del AD, con el propósito de obtener un conocimiento todavía más eficaz del objeto de estudio, que permitió formular una versión del mismo, compartida por el grupo y avalada e institucionalizada por el AD.

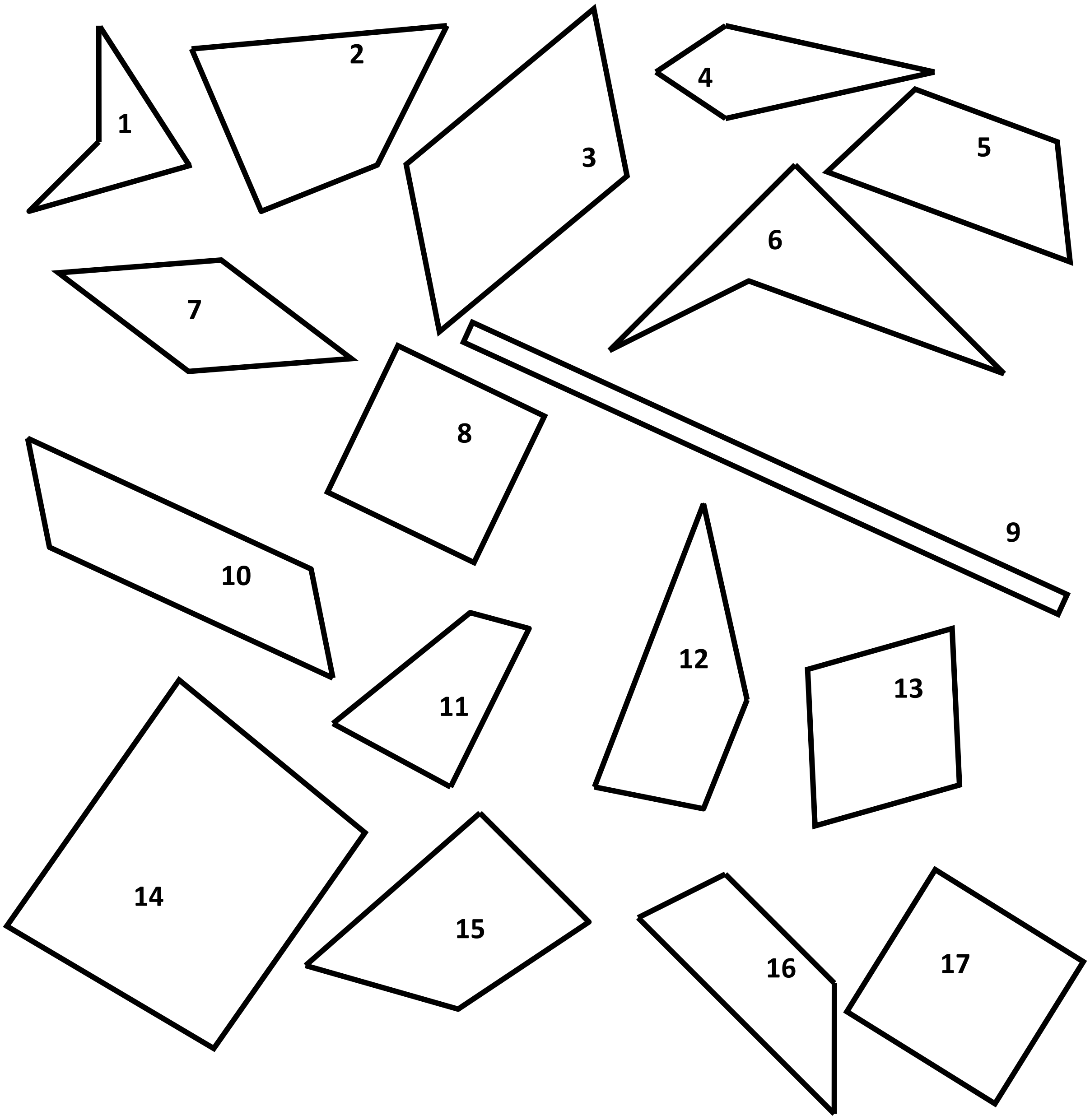
Actividades propuestas

Se presenta a continuación solo dos actividades presentadas a los docentes, fuera de contexto para no exceder en las cuartillas, que ejemplifican lo expresado anteriormente, permitiendo llevarlo a la práctica en el aula.

Actividad 1. Un docente elige un cuadrilátero de la plantilla que se adjunta a continuación, sin que los otros docentes sepan de cuál se trata.

- ❖ Los docentes podrán adivinar realizando preguntas que se respondan con **SI** o **NO**, la exigencia es que se pregunte solamente con relación a las diagonales de la figura.
- ❖ Se juega 2 o 3 veces hasta acordar cuál es el mínimo número de preguntas a realizar.
- ❖ En el grupo acuerden una clasificación de cuadriláteros partiendo de sus diagonales.
- ❖ ¿Qué cosas tuvieron en cuenta para considerar todos los cuadriláteros?
- ❖ Puesta en común de las conclusiones grupales. Sugerir otras actividades con lo mismo.

Figura 1: Plantilla de cuadriláteros



Actividad 2. El Problema del Rectángulo

Dado el rectángulo ABCD con AB = 10 cm, y BC = 6 cm:

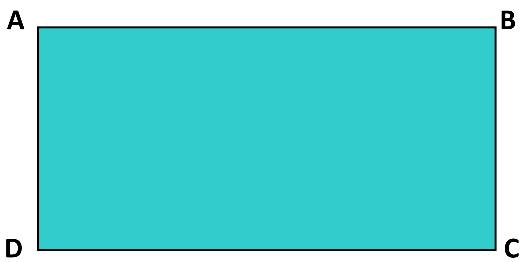


Figura 2. Rectángulo propuesto

- Trazar la diagonal AC y marcar sobre ella un punto **P** a 9 cm de A;
- Trazar una paralela al lado AD que pase por P; llamar **I** al punto en que corta a AB y **J** al punto en que corta a DC;
- También por P trazar una paralela al lado AB, y llamar **K** al punto en que corta a AD y **L** al punto en que corta a BC.
- ¿Cuál de los dos rectángulos IBLP o KPJD tiene área mayor?

Se eligió esta formulación del problema, para que el docente realice una trasposición didáctica coherente a su grupo de alumnos. Al igual que pasó con los docentes, se espera que en la clase, la mayoría de los alumnos resuelva el problema a través de la medición de los lados de cada rectángulo y del cálculo de las áreas. Se hicieron algunas elecciones intencionales de tal forma que los resultados obtenidos por cada sujeto fueran divergentes. Las medidas elegidas para los lados del rectángulo ABCD son tales que los lados de los rectángulos cuyas áreas se deben comprar resultan números irracionales. Esto conduce a una mayor imprecisión en las medidas efectuadas por los alumnos. Por otro lado, si bien hubiera sido posible proponer un enunciado sin medidas, se ha querido evitarlo porque se ha supuesto que la diversidad de dibujos que hubieran surgido en estas condiciones no permitiría evidenciar una contradicción, ya que cualquier individuo podrían atribuir la diferencia entre los resultados obtenidos al hecho de haber dibujado rectángulos diferentes.

La organización de la clase adquiere asimismo un lugar esencial para el establecimiento de condiciones que permitan aproximarse al objetivo deseado. Un primer conflicto apareció en cada grupo, con relación a la confrontación de respuestas diferentes, es importante que los docentes comiencen a cuestionarse la "exactitud de la medida" cuando esta es el resultado de una medición. Debe modificar la concepción de exactitud por la idea de que toda medición tiene incertezas.

A modo de conclusión

El monitoreo fue continuo y tuvo como fin el seguimiento de la calidad de la participación de los docentes en el desarrollo de los planes de las clases elaboradas.

Se cumplieron la mayoría de los objetivos planteados en el proyecto. Además se logró la articulación e integración de tres proyectos en ejecución, PLCVE, PMT y PIIE.

La suma de todas las acciones llevadas a cabo por el científico colaboró en el desarrollo profesional de los docentes y a una reflexión sobre su práctica docente.

Los principales logros obtenidos, respecto a los docentes, fueron:

- Cambio de actitud hacia a la aplicación de nuevas propuestas en la enseñanza de la Matemática, y en la modalidad de trabajo,
- Actualización en la formación docente en torno a la enseñanza aprendizaje de estrategias para la resolución de problemas, como la actividad esencial del quehacer matemático y como motor de dicho conocimiento,
- Revisión y aclaración de algunos conceptos disciplinares, que reconocían como la causa de inseguridad que tenían de sí mismo,
- Incorporación de herramientas tecnológicas y juegos, como un recurso valioso para el aprendizaje,
- Conocimiento de propuestas para la enseñanza de la Matemática de los NAP y del Diseño Curricular Jurisdiccional.

Para optimizar el desarrollo del proyecto es fundamental aumentar la carga horaria para realizar, de la manera deseada, todas las tareas programadas, y mejorar la capacidad y disponibilidad de distintos software para el uso de las PC como herramientas de trabajo.

Se espera, por parte de los directivos, la continuidad del proyecto en los años sucesivos y que se participe a todos los docentes, de los distintos ciclos, del nivel primario.

Referencias bibliográficas

Broitman C. y Itzcovich, H. (1996). *Taller de resolución de problemas. Matemática 3° Ciclo.* Dirección de Curriculum, Secretaría de Educación y Cultura. Dirección General de Planeamiento. Municipalidad de Buenos Aires.

Brouseau, G. (1990). Que pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la Didáctica de las Matemáticas?. En *Enseñanza de las Ciencias* 8 (3), 259-267- Ed.Universitat Autònoma de Barcelona: Institut de Ciències de l'Educació, ICE

Charnay, R. (1994). "Aprender por medio de la resolución de problemas". En Parra, C. y Saiz, I. (comp.) *Didáctica de la Matemática*. Editorial Paidós. Bs. As.

Charnay, R. (1995); La resolución de problemas de matemáticas. En C. Parra (Comp.) *Didáctica de Matemáticas. Aportes y reflexiones.* Paidós Educador.

Esper, L., Abregu, G.; Alvarez, M.; Pizarro, M.A. y Robles G. (2011). Acciones Conjuntas en el Marco de los Proyectos: "Los Científicos van a la Escuela", "Matemática Para Todos" y "Articulación e Integración de la Formación Docente UNT- ISFD", en la Escuela 259

Belgrano, de la Capital de Tucumán. En I Congreso Nacional y II Congreso Provincial de Enseñanza de las Ciencias. *Aprendemos Ciencias en la Escuela.* San Miguel de Tucumán.

Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología. (2006). NAP, Núcleos de Aprendizajes Prioritarios. Serie Cuadernos para el Aula. Segundo Ciclo EGB/nivel primario.

Parra, C.; Broitman, C. y Itzcovich, H. (1995) Actualización Curricular, EGB Área Matemática, Documento de Trabajo Nº 1. Municipalidad de la Ciudad de Buenos Aires.

Piaget, J (1995). *Los estudios Sociológicos*. Londres: Routledge

A NOVA RELAÇÃO INSTITUCIONAL PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DA NOÇÃO DE FRAÇÃO NO ESTADO DE SÃO PAULO

Angélica da Fontoura Garcia Silva, Raquel Factori Canova, Tânia Maria Mendonça Campos, Marlene Alves Dias
UNIBAN Brasil
angelicafontoura@gmail.com, fraquelc@yahoo.com.br, taniammcampos@hotmail.com

Resumen. Varios trabajos de investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la noción de número racional con sus diferentes representaciones han sido desarrollados en los últimos años. En Brasil esas investigaciones han sugerido nuevas formas de trabajo, especialmente, a partir de 1997 en los Parámetros Curriculares Nacionales de Educación Básica. En sus lineamientos dejaban a cargo de las escuelas la forma de desarrollar estas nociones matemáticas en el nivel primario, se observó una profusión de propuestas diversas para la enseñanza y el aprendizaje de los números racionales y sus respectivas representaciones en esa etapa escolar. Para garantizar un contenido mínimo, la Secretaría de Estado de Educación de San Pablo lanzó una nueva propuesta curricular. Por lo tanto, identificamos en ese nuevo documento las ideas de Caraça y de Nunes que apuntan a la importancia de explorar las lógicas del estudio de fracciones (equivalencia y orden).

Palabras clave: currículo, fracción, relaciones institucionales y personales

Abstract. Several research papers on teaching and learning of the notion of rational numbers in its different representations have been developed in recent years. In Brazil these surveys are suggested as new ways of working, in particular, since 1997 through the proposals indicated by the National Curricular Parameters of Elementary School. As the guidelines contained in this document left in charge of school choices for the development of mathematical notions of Elementary School, there was the spread of a wide range of proposals for teaching and learning of rational numbers and their representations in this educational stage. To ensure a minimum content the State Secretariat of Education of São Paulo launched a new curriculum proposal. Therefore, we have identified in this new document the ideas of Caraça as well as those of Nunes that point to the importance of exploring the logic of study of fractions (equivalence and order).

Key words: curriculum, fraction, institutional and personal relationships

Introdução

Neste artigo temos por finalidade analisar os pressupostos e diretrizes que alicerçam o atual currículo de Matemática proposto para o Estado de São Paulo, Brasil, no que se refere à noção de números racionais na forma de fração, com o objetivo de verificar as diferentes formas de organização matemática e didática e identificar a relação com as indicações propostas pelo movimento de implementação curricular e outras orientações e pesquisas que tratam da mesma temática.

Para delimitar nosso problema de pesquisa indicamos a relevância do tema, a fundamentação teórica que utilizamos em nossa análise, os pressupostos do Currículo Oficial do Estado de São Paulo e os estudos que vêm sendo desenvolvidos. Em seguida, apresentamos a análise, as considerações finais e perspectivas futuras.

Relevância da Pesquisa

No que se refere ao objeto matemático – fração, que corresponde à representação fracionária dos números racionais –, observamos a existência de um grande número de pesquisas relacionadas aos problemas de seu ensino e aprendizagem. Behr, Lesh, Post e Silver (1983) afirmam que o conceito de fração é uma das ideias matemáticas mais complexas e importantes na formação do aluno. Além disso, evidenciamos que vários pesquisadores de diversos países, como Behr et al. (1983), Kieren (1988), Strefland (1984), Nunes (2003), entre outros, apontam uma relação de problemas sérios sobre as dificuldades de aprendizagem dessa noção matemática.

No Brasil, pesquisas recentes, fundamentadas na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1993), evidenciaram dificuldades no domínio de fração tanto no que se refere ao seu ensino quanto à sua aprendizagem (Rodrigues, 2005; Canova, 2006; Garcia Silva, 2007; e Damico, 2007, entre outras).

Quanto às pesquisas desenvolvidas no Brasil sobre a temática é importante destacar ainda que Nunes e Bryant (1997), já tomando como base estudos de Campos, Jahn, Leme da Silva & Silva (1995), sinalizavam que havia uma forte tendência por parte dos professores no sentido de trabalhar o conceito de número racional em sua representação fracionária, utilizando prioritariamente o significado parte-todo. Esse fato também é discutido em documentos oficiais, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1997).

Neste último documento, como em alguns dos trabalhos acima referenciados, fundamentam-se, dentre outros, na teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1993). Nesse sentido nos PCNs, indicam-se como objetivos do ensino de Matemática no segundo ciclo do Ensino Fundamental (3.ª e 4.ª séries ou 4.º e 5.º anos): “Construir o significado do número racional e de suas representações (fracionária e decimal), a partir de seus diferentes usos no contexto social” (Brasil, 1997, p. 55), e “resolver problemas, consolidando alguns significados das operações fundamentais e construindo novos, em situações que envolvam números naturais e, em alguns casos, racionais” (Brasil, 1997, p. 56).

Ainda, segundo estas orientações, há também uma preocupação com a compreensão dos significados do número racional – quociente, parte-todo e razão –, além de destacarem a importância do trabalho com suas representações: fracionária e decimal.

Para analisar os pressupostos que embasam o currículo, escolhemos como referencial teórico a noção de relação institucional conforme definição de Chevallard (1992). Lembramos que a Teoria Antropológica do Didático (TAD) tem como foco o objeto, o saber matemático a ser estudado, e não o aprendiz ou o professor. Por esse motivo, acreditamos que a análise do tema fração no novo Currículo por meio das ferramentas desenvolvidas na TAD, nos auxilia a compreender as diferentes organizações matemáticas e didáticas que sobrevivem atualmente e a identificar as regularidades e as diferenças existentes entre as propostas do movimento de implementação curricular e outras orientações e pesquisas que tratam da mesma temática.

Dessa forma, considerando como referencial teórico da pesquisa sobretudo as noções de relação institucional de Chevallard (1992) e de Campos Conceituais de Vergnaud (1993), procuraremos observar influências de estudos que propõem situações específicas para a introdução do tema, como Caraça (1952) e Nunes (2003). Em seguida, uma descrição, ainda que breve, dos estudos que adotamos como referência em nossa análise.

Referencial teórico da pesquisa

Iniciamos pela definição de relação pessoal e relação institucional ao objeto *O* apresentada em Chevallard (1992), ou seja, o autor, após considerar como elementos primitivos da teoria as noções de objeto *O*, pessoas *X* e instituição *I*, define relação pessoal a um objeto *O* quando pelo menos uma pessoa *X* tem relação com esse objeto, e relação institucional a esse mesmo objeto *O* quando uma instituição *I* tem uma relação com esse objeto.

Nesse sentido, no contexto da nossa pesquisa, a noção de número racional na forma de fração é um objeto matemático, mas existem também os objetos "escola", "professor", "aprender", "saber" etc. Dizemos que há uma relação institucional com o objeto fração quando pelo menos uma instituição reconhece esse objeto, assim como a existência de uma relação pessoal ao objeto fração só é possível se pelo menos uma pessoa reconhece esse objeto. Portanto, uma relação pessoal sempre terá as marcas das relações pessoais que um sujeito se submete.

Além das noções de relações institucionais e pessoais definidas por Chevallard (1992), apoiamo-nos também na teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1993). Esse autor propõe que se defina o conceito de fração a partir da terna *(S,I,R),* quais sejam: o conjunto das situações, dos invariantes que definem o conceito e o conjunto das representações, aquele que é utilizado para dar diferentes "formas" ao objeto matemático. No caso deste estudo, são as diferentes "formas" de representação da fração.

Assim, objeto fração será reconhecido pelo estudante em função do conjunto de situações a que ele é submetido, ou seja, sua relação pessoal com esse objeto depende das escolhas institucionais consideradas quando da introdução e desenvolvimento do conceito de fração.

Observamos ainda que, com base nas ideias de Vergnaud (1993), Nunes (2003), propõe-se que sejam considerados os invariantes ordem e equivalência, por meio de situações que possibilitem dar significados à noção de números racionais na forma de fração e às outras representações possíveis. Isso nos conduz a ressaltar que nessa comunicação levamos em conta para as análises as situações parte-todo e medida.

Quanto às situações que envolvem o significado "parte-todo", estas são encontradas facilmente nos materiais didáticos e em sala de aula. Nelas se explora a ideia de dividir uma quantidade em subpartes de tamanhos iguais. A noção de números racionais na forma de fração indica o número de partes tomadas, indicadas, do total de partes divididas.

Já as situações "medida" trazem a ideia de comparação entre duas grandezas, por exemplo, quantos azulejos são necessários para cobrir a superfície de uma parede. Esse mesmo significado é indicado por Caraça (1952) para introduzir a fração.

Considerados os quadros teóricos que nos auxiliaram nas análises, descrevemos a seguir a metodologia utilizada na pesquisa.

Metodologia da Pesquisa

Como metodologia, esta investigação se apoia em uma pesquisa documental/ bibliográfica. O estudo dos resultados de pesquisa sobre a noção de números racionais na forma de fração na nova relação institucional foi desenvolvido por meio da análise das diferentes formas de organização matemática e didática existentes tanto no material de apoio *Cadernos do Professor*, distribuído pela Secretaria de Estado da Educação de São Paulo, como nas indicações para os anos iniciais do Ensino Fundamental denominado *Guia de Planejamento e orientações didáticas do Programa Ler e Escrever*, referente à 3.ª série do Ensino Fundamental publicado em 2009.

Assim sendo, identificamos nesse material algumas tarefas com diferentes formulações para as etapas escolares, isto é, consideramos as diferentes técnicas que permitem trabalhar essas novas formulações. Procuramos ainda identificar, por meio da pesquisa documental, a relação das indicações propostas pelo movimento de implementação curricular e outras orientações e pesquisas que tratam da mesma temática.

Na sequência, apresentamos alguns resultados da pesquisa apontando alguns exemplos de tarefas e técnicas que são propostas nesses documentos.

Alguns resultados encontrados

Como as escolas estaduais de São Paulo-Brasil estão segmentadas em dois ciclos (No Estado de São Paulo, o ensino fundamental está segmentado em dois ciclos: o primeiro relacionado aos cinco primeiros anos e o segundo ciclo refere-se aos quatro últimos anos do ensino fundamental.), analisaremos quais organizações matemáticas e didáticas conduziram à identificação da primeira tarefa sobre o tema fração nos anos iniciais (3.ª série – 4.º bimestre) e a primeira tarefa no seguinte ciclo (5.ª série – 1.º bimestre).

A análise das duas tarefas nos permitiu observar que, apesar de serem apresentadas diferentemente, as duas têm o mesmo objetivo. O que muda são as novas técnicas em função dos novos conhecimentos e da nova forma de trabalho exigidas nas novas etapas escolares, isto é, trata-se de uma mesma tarefa em que novas formas de trabalho são proposta para serem desenvolvidas com os estudantes.

Nos figuras abaixo encontramos as tarefas propostas para introdução da fração. Nos dois casos, a tarefa consiste em encontrar a fração que representa uma medida, informadas uma unidade e um objeto, assim a técnica empregada para resolvê-las depende dos conhecimentos esperados dos estudantes.

Tarefa: Dadas tiras de papel de 30 cm x 4 cm, oriente os alunos a dividir uma tira em 4 partes iguais, outra em 8 e outra em 16 partes. Pergunte como representariam uma parte de 4, uma parte de 8 e uma parte de 16 (São Paulo, 2009, p. 280).

Técnica: Dividir as tiras em partes iguais, conforme a quantidade solicitada, e escrever qual fração representa uma parte de cada uma das tiras.

Figura 1: Exemplo da tarefa para a 3.ª série do Ensino Fundamental.

Tarefa: Dados uma unidade de medida (um pedaço de tira) e um objeto a ser medido (também representado por uma tira), dizer quantas unidades são necessárias para medir o objeto (São Paulo, 2009, p. 35). Vale ressaltar que o tamanho do objeto não é múltiplo do tamanho da unidade.

Técnica: Para essa tarefa o aluno irá perceber que três unidades são insuficientes para medir o objeto e quatro unidades excedem o comprimento total do objeto. A solução é fracionar a unidade em partes iguais, de tal modo que a nova unidade caiba um número inteiro de vezes no objeto. Nesse caso, em particular, bastou dividir a unidade em três partes iguais para medir de forma exata o objeto.

Figura 2: Exemplo da tarefa para a 5.ª série do Ensino Fundamental.

Os exemplos apresentados nas figuras acima colocam em evidência as diferentes possibilidades de trabalho com o mesmo tipo de tarefa, que supõe como técnicas a aplicação de novos conhecimentos cujo nível varia de acordo com a etapa escolar em que os estudantes se encontram. Observamos aqui que o trabalho com as diferentes técnicas corresponde ao desenvolvimento de novas relações institucionais e, consequentemente, a possibilidade do estudante ampliar sua relação pessoal com o objeto "fração".

Ressaltamos ainda que tais indicações parecem sofrer influência da utilização do significado parte-todo descrito por Nunes (2003), ampliada pelas ideias de Caraça (1952). O autor considera ser necessário estabelecer um termo de comparação único para todas as grandezas de mesma espécie, ou seja, uma unidade de medida, por exemplo, centímetros para comprimentos; gramas para peso; segundos para tempo etc.

Na realidade, procuramos uma resposta para a pergunta quantas vezes?, o que se responde por meio de um número que exprima o resultado da comparação, ou seja, esse número é denominado medida da grandeza em relação a essa unidade.

Assim, é importante ressalvar o destaque conferido ao fato que as medidas desempenham um papel fundamental na ampliação do campo numérico dos estudantes, em especial, dos naturais para os racionais.

As tarefas indicadas para os estudantes do primeiro ciclo (Quadro 1) são complementadas pelas tarefas recomendadas para o segundo ciclo (Quadro 2). Para o desenvolvimento das propostas do segundo ciclo há indicações para o professor no material de apoio à implementação do currículo denominado *Caderno do Professor* (CP). Nesse sentido, orienta-se que o docente solicite ao estudante que efetue medidas de diferentes objetos, adotando um objeto-padrão não convencional como unidade, ou seja, medir o comprimento de um livro usando um lápis, por exemplo. Ainda segundo o material, a finalidade de tal encaminhamento é:

> [...] levar o aluno a se deparar com a necessidade do fracionamento de uma unidade em um processo de medida. Eles devem perceber que as frações e os números mistos permitem expressar medidas em que a unidade não cabe um número inteiro de vezes no objeto a ser medido (São Paulo, 2009a, p. 38).

Ressaltamos ainda que na última sequência de tarefas é recomendado aprofundar a ideia de equivalência de frações, indicando situações que desenvolvam tanto a ideia de equivalência e ordem para comparar frações como a das operações com frações – as quais farão uso da equivalência.

Finalmente, as orientações contidas no Caderno do Professor colocam em evidência a não intenção de esgotar o conteúdo frações naquele ano, cabendo ao professor propor outras atividades complementares ou mesmo adequar às indicadas no material de acordo com o perfil e as necessidades de cada turma.

Considerações finais e perspectivas futuras

As novas propostas de trabalho para o Currículo do Estado de São Paulo incluem resultados de estudos e pesquisas da área de Educação Matemática que destacam a introdução do conceito de fração por meio de diferentes abordagens que por muitos anos foi apresentada não só em documentos oficiais, mas também em materiais pedagógicos, explorando, principalmente, a ideia de parte-todo. Nesse novo documento a proposta inicial traz ideias de Caraça, assim como de outros pesquisadores, e no transcorrer do material encontramos diferentes abordagens, o que nos permite considerar que as pesquisas em Educação Matemática têm influenciado as novas propostas institucionais, isto é, as novas relações institucionais.

Observamos ainda que existe uma coerência em relação às propostas institucionais de utilização de uma mesma tarefa nas diferentes etapas escolares que podem auxiliar professores e estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental a revisitar o trabalho realizado em etapas anteriores utilizando conhecimentos prévios disponíveis para a introdução dos novos conceitos, como é possível observar nos exemplos apresentados nos Quadros 1 e 2.

Finalmente, é importante salientar que os resultados apresentados por este estudo não envolvem a análise *in loco* das práticas dos professores envolvidos no movimento de reformulação curricular, o que corresponde a uma diversidade ainda maior de relações institucionais que poderão ser vivenciadas pelos estudantes. Entretanto, nesta investigação podemos afirmar que o estudo dos documentos oficiais mostra a introdução de resultados de pesquisa como novas formas de organizações matemáticas e didáticas, cuja intenção é melhorar a compreensão e o desempenho dos estudantes.

Portanto, consideramos a necessidade de novos estudos que analisem como tal Currículo vem sendo implementado, e se ele está realmente atingindo seu papel.

Referências bibliográficas

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R., & Silver, E. A. (1983). Rational Numbers Concepts. Acquisition of Mathematics Concepts and Process. *Ed. by Richard Lesh* e *Marsha Landau*. (pp. 91-128). New York: Academic Press.

Brasil. (1997). *Parâmetros Curriculares Nacionais:* matemática terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental. Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica. - Brasília: MEC, SEF.

Campos, T., Jahn, A. P., Leme da Silva, M. C., & Silva, M. J. (1995). *Lógica das equivalências.* Relatório de pesquisa não publicado. São Paulo: PUC.

Canova, R. F. (2006). *Crença, concepção e competência dos professores do 1.º* e *2.º ciclos do ensino fundamental com relação à fração.* São Paulo: Pontifícia Universidade Católica.

Caraça, B. J. (1952). *Conceitos fundamentais da Matemática*. Lisboa: Tipografia Matemática.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématique*, 12(1), 73-112.Dicionário

Damico, A. (2007). *Uma investigação sobre a formação inicial de Professores de Matemática para o ensino de números racionais no ensino fundamental.* São Paulo: Pontifícia Universidade Católica.

Garcia Silva, A. F. (2007). *O desafio do desenvolvimento profissional docente:* análise da formação continuada de um grupo de professores das séries iniciais do ensino fundamental, tendo como objeto de discussão o processo de ensino e aprendizagem das frações. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica.

Kieren, T. (1988). Personal Knowledge of rational numbers: its intutive and formal development. In: J.,Hiebert & M.,Behr (Eds.). *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, (pp. 162-180). New Jersey: Erlbaum.

Nunes, T., & Bryant, P. (1997). *Crianças fazendo matemática*. Porto Alegre: Artes Médicas.

Rodrigues, W. R. (2005). *Números racionais:* um estudo das concepções dos alunos após o estudo formal. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica.

São Paulo. (2009) Currículo do Estado de São Paulo: Matemática. Secretaria de Educação do Estado de São Paulo. *Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas* – São Paulo: SEE, CENP.

________. (2009a). Caderno do Professor: Matemática. Secretaria de Educação do Estado de São Paulo. *Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas* – São Paulo: SEE, CENP.

________. (2009b). Ler e escrever: guia de planejamento e orientações didáticas; professor. Secretaria de Educação do Estado de São Paulo. *Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas* – São Paulo: SEE, CENP.

Streefland, L. (1984). Search for the roots of ratio: Some thoughts on the long term learning process. (Towards A theory). Part 1: *Reflections on a teaching experiment.* Educational Studies in Mathematics, 15, 327-348.

Vergnaud, G. (1993). Teoria dos campos conceituais. In: Nasser, L. (Ed.). Anais do 1º *Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro*, (pp. 1-26). Rio de Janeiro: Universidade Federal do Rio de Janeiro.

EXPERIENCIAS EN LA RELACIÓN DISCIPLINAR DE LA MATEMÁTICA EN LA CARRERA DE METEOROLOGÍA

Águeda L. García Martín; María Josefina Codorníu Pujals; Gisela del Valle Rodríguez; Sadiel Novo Cuervo; Pablo E. de Varona de Varona; Jorge J. Becerra Fernández
Instituto Superior de Tecnologías y Ciencias Aplicadas. Instituto de Meteorología Cuba
agueda@uci.cu; marifi@instec.cu; gisela@instec.cu; sadiel.novo@insmet.cu; pablo.varona@insmet.cu; jjbecerra@instec.cu

Resumen. Se presenta el método de concebir el proyecto interdisciplinario integrado en la carrera de Meteorología, que tiene como eje rector la interdisciplinariedad y como metodología la formación académica por competencias. Identificadas éstas en cada semestre se ilustra el diseño de Cálculo y Geometría I y II en su contribución al desempeño cognitivo: comprensión, análisis, interpretación y representación y modelación/simulación. Se muestra el sistema de tareas docentes integradas fundamentalmente a la Disciplina Física y a la Disciplina Integradora. Se analizan los resultados: armónica integración de las acciones didácticas entre profesores y una mejor orientación a los alumnos.

Palabras clave: integración interdisciplinar, habilidades matemáticas, resolución de problemas, metacognición

Abstract. It is presented the method to conceive for the integrated interdisciplinary project in the academic course of Meteorology degree. The principle which guides the method is the interdisciplinary approach and its methodology is the competencies-based academic training. These competencies have been identified in each semester, the design of the subjects Calculation and Geometry I and II is used to illustrate the contribution of the method to cognitive performance: comprehension, analysis, interpretation and representation, and modeling/simulation. It is presented the system of teacher's tasks; mainly they are integrated with the Physics Discipline and with the Integrating Discipline. The outcomes are analyzed: harmonious integration of didactic actions among the teaching staff, and improvement of student’s guidance.

Key words: interdisciplinary integration, mathematical skills, problem solving, metacognition

Introducción

En Cuba, la carrera de Licenciatura en Meteorología comienza oficialmente en el año 2003 en el Instituto Superior de Tecnologías y Ciencias Aplicadas (InSTEC) de La Habana, como única universidad que la oferta en la isla. Aún cuando recién ha salido de las aulas la cuarta graduación, y a pesar de su corta vida, esta carrera ha estado en constante perfeccionamiento y cuenta ya con un segundo Plan de Estudios (Plan de Estudios D) con el que ha debutado la cohorte que cursó el 1er. año de la carrera en el curso académico 2010-2011.

Los antecedentes históricos de la Meteorología se encuentran en: una *actividad práctica* de predicción del tiempo y del clima, una *actividad empírica* de recopilación de datos y obtención de conclusiones basadas en la variabilidad de las magnitudes meteorológicas y de sus relaciones, y una *actividad teórica* destinada a explicar los complejos fenómenos del sistema atmósfera-océano-tierra según cierto sistema de leyes, teorías y modelos. No fue hasta mediado del siglo XX que la conexión entre ellas devino en la unificación de la Meteorología como Ciencia Física Aplicada, íntimamente ligado al desarrollo de la Computación y la

Informática y es a partir de lo cual la Matemática se hace esencial en la Meteorología. Esta esencialidad de la Matemática en la formación profesional del meteorólogo se debe garantizar a través del proceso de enseñanza-aprendizaje durante toda la carrera y con especificidades durante los diferentes años académicos.

Este trabajo trata de las experiencias obtenidas durante el proceso de integración interdisciplinaria a lo largo de los dos primeros semestres del 1er. año de la carrera durante el curso académico 2010-2011. Persigue el objetivo de mostrar, desde la perspectiva de las asignaturas Cálculo y Geometría I y II, la estrategia pedagógica emprendida por el colectivo de profesores de 1er. año para diseñar el sistema de acciones didácticas que ha sido denominado *Proyecto Interdisciplinario Integrado*. Éste tiene como eje rector la interdisciplinariedad y como metodología la formación académica por competencias identificadas en la llamada *Disciplina Integradora* Servicio Meteorológico y Proyecto. Se ilustran algunos ejemplos de evaluaciones finales integradas, integradoras e integrativas tal y como son identificadas y diferenciadas por algunas asociaciones de Calidad Educativa, como es el caso de la Dirección Nacional de Información y Evaluación de la Calidad Educativa de Argentina. (DINECE, 2005)

La Disciplina Matemática en Licenciatura en Meteorología

La formación del meteorólogo debe seguir los estándares orientadores de la OMM, acrónimo de la Organización Meteorológica Mundial, órgano rector de la Meteorología a nivel mundial. En la Cuarta Edición de la directriz OMM-No. 258 se hace énfasis en que la Matemática, la Física y la Química en este campo profesional:

> …exigen algo distintivo y significativo que las diferencian entre el estudio de ciencias atmosféricas y el estudio común de física o química, donde más a menudo el foco se centra en procesos individuales, para revelar las características fundamentales de la materia”. Y añade que “el estudio de ciencias atmosféricas concierne a un sistema grande y complejo” y que “los efectos y las interacciones no pueden ser completamente comprendidas si son consideradas separadamente de su ambiente y que el objetivo final es entender, no sólo cualitativa sino también cuantitativamente, el funcionamiento coherente del sistema como un todo (OMM -258, 2001, p. 28).

Debido a lo anterior es por ello que, en el nuevo Plan de Estudios D de la Carrera de Licenciatura en Meteorología en Cuba y en especial en la sección de la Disciplina Matemática se declara:

> Independientemente del área de actuación en el cual a posteriori se desarrolle el futuro meteorólogo deberá, durante su formación de pregrado, desarrollar un conjunto de habilidades que exigen de esta Disciplina Matemática su distintiva doble funcionalidad: (1) Su utilidad en el ámbito laboral del meteorólogo, tanto de aquellos que se enrumben en las actividades profesionales más cercanas al Servicio Meteorológico, la Predicción del Tiempo y el Clima y el diseño de sistemas de apoyo a las decisiones, como aquellos que desarrollen un perfil investigativo asociado a la modelación/simulación de los procesos físicos del complejo sistema océano-atmósfera-tierra. (2) Por su contribución a la formación intelectual general, en concreto las destrezas susceptibles de ser utilizadas en una amplia gama de casos particulares, y que contribuyen, por sí mismas, a potenciar capacidades cognitivas de los individuos.[…] El propio objeto de aprendizaje matemático deberá permitir el desarrollo de la capacidad para utilizar distintas formas de pensamiento matemático, con los *objetivos* de: (1) Interpretar y describir la realidad y actuar sobre ella, (2) Razonar matemáticamente. (3) Comprender una argumentación matemática. (4) Expresarse y comunicarse en el lenguaje matemático. (5) Utilizar las herramientas matemáticas adecuadas. (6) Integrar el conocimiento matemático con otros tipos de conocimientos. (Cuba-MES, 2011, p.83)

Es importante que desde el 1er. año se apliquen de manera creadora estos preceptos y se concreten en acciones didácticas bien definidas y comunicadas a los alumnos lo cual es el objetivo del Proyecto Interdisciplinario Integrado.

Antecedentes del Proyecto Interdisciplinario Integrado

Identificados de manera particular con otros autores en aquellos temas más vinculados con la interdisciplinariedad a través de los *nodos cognitivos*, el *aprendizaje significativo* y la *resolución de problemas* (Hernández, 1995) (Delgado, 1999) (Fernández de Alaiza, 2000) los autores de este trabajo se inspiran además en las experiencias obtenidas en siete años de intenso trabajo en el seno del Departamento Docente de Meteorología del InSTEC:

- Articulación vertical y horizontal de las asignaturas de las disciplinas básicas y las básicas-específicas. (García, 2005) (Codorníu, Domínguez y García, 2009) (García, López, Heredia, Codorníu, Augier y del Valle, 2011)

- Uso de los asistentes matemáticos -MATHCAD y DERIVE- a través de Laboratorios de Computación en asignaturas de la Disciplina Matemática y de Física General, tanto individuales como integradas como tareas extraclase. (Augier, 2007) (García et.al., 2011).
- Uso de las Tecnologías Educativas, espacios de trabajo colaborativo (Entorno Virtual de Aprendizaje de una Red LAN llamada "VirtualMET") y evaluaciones finales integradoras garantizaron un enfoque sistémico del currículo en cuatro asignaturas en el 2do. Semestre de 2do. Año: Ecuaciones Diferenciales, Laboratorio y Análisis Sinóptico e Idioma Inglés con Fines Específicos. (García et.al., 2011)

Consideran además los autores que, aún cuando de manera independiente puede lograrse la articulación de contenidos y su vínculo con la especialidad con relativo éxito, no podrá lograrse integración interdisciplinaria efectiva si el colectivo de docentes no diseña y ejecuta en conjunto y coordinadamente *acciones didácticas* con enfoque de sistema. Es por tanto menester contar con una plataforma de trabajo de los docentes en el cual de manera dinámica, en un mismo semestre y/o curso académico, organicen, diseñen, controlen y modifiquen el sistema de acciones didácticas. El nuevo Plan de Estudios D concibe la disciplina integradora y para ello la presencia en cada semestre y año de una asignatura de esta disciplina. En el caso de la carrera de Meteorología esta es la Disciplina Integradora Servicio Meteorológico y Proyectos, que como eje rector garantiza el requerido vínculo con la especialidad. (Cuba-MES, 2011)

La manera de lograr esta integración interdisciplinaria a nivel de cada semestre ha sido denominado por los autores: *Proyecto Interdisciplinario Integrado*, el cual ha sido el objetivo central de este trabajo.

El Proyecto Interdisciplinario Integrado: un ejemplo en 1er. Año de la carrera

Los autores conciben el *Proyecto Interdisciplinario Integrado* como un proceso, un proceso que dura todo el semestre y consta de cuatro fases para el diseño, ejecución y control de un sistema de acciones didácticas.

Las acciones didácticas se proyectan coordinadamente en un plan calendario integrado en el que se vela por la articulación de los contenidos seleccionados (tanto espacial como temporalmente), la coherencia en el tratamiento de los temas, un cuidadoso tratamiento de los puntos de encuentro, evitando repeticiones innecesarias y con un eminente carácter educativo a través de lo instructivo. Culmina con la evaluación final - integral, integrada, integradora - a través de diversas formas organizativas como clases seminarios. En la Tabla I se agrupan las principales componentes de este proceso incluyendo la naturaleza principal de la evaluación seleccionada.

Tabla I: Etapas en el Proyecto Interdisciplinario Integrado.

No.	Objetivo	Objetos componentes	Naturaleza del acto evaluativo
1	Identificar	Objetivos del Año	integrales
		Contenidos, habilidades, competencias	interconectadas
		Ejercicios, problemas, proyecto investigativo	de “encuentro ”
			de interés de la especialidad.
2	Diseñar	Sistema de acciones didácticas	integrativas
		Guías de studio	integradoras
		Sistema de evaluación	integrada
3	Controlar	Cortes evaluativos	integrales
4	Evaluar	Seminarios y Encuentros	integrativos
		Tarea Extraclase y/o Proyecto de Curso	integrados
		Examen Final	preguntas integradoras

Una aplicación en el 1er. año del curso académico 2010-2011

Se analizó la contribución de cada asignatura a los objetivos del año y a la asignatura de la Disciplina Integrador Servicio Meteorológico y Proyectos: Práctica de Familiarización. Las contribuciones se analizan desde la perspectivas de la *formación por competencias:* competencias transversales o genéricas (instrumentales, personales, sistémicas) y competencias específicas (cognitivas, procedimentales y actitudinales) precisando hasta el nivel tema en tres categorías confeccionándose una matriz de coincidencias seleccionándose aquellas que mayor relevancia y correlación manifestaron. (García et.al., 2011)

Se promovió, para la solución de las tareas, el *Método de los Cuatro Pasos de Polya* (Polya, 1965) y las tareas en el Laboratorio con los Asistentes Matemáticos tuvieron una doble funcionalidad: ejercicios anteriores al contenido y problemas posteriores al mismo. Los trabajos en equipo requirieron de un informe técnico a entregar con anterioridad al acto de defensa ante Tribunal. Todas las tareas docentes tienen una Guía de Estudio confeccionada que promueve la autoformación.

La relación disciplinar se organizó de manera explícita en el conjunto de tareas docentes de tipo: (a) aplicaciones de interés matemático complementario a lo teórico en problemas y/o situaciones que destaquen contenidos esenciales genéricos y las bases de su implementación algorítmica. (b) aplicaciones relacionadas con la Física General y la Física de la Atmósfera, (c) aplicaciones al ejercicio de la profesión, procesamiento de la data meteorológica y la formación en Modelación y Simulación. No se evadió en ningún momento y cuando así se requiera, temas a tratar que puedan estar en asignaturas que se desarrollarán *a posteriori* como Ecuaciones

Diferenciales Ordinarias, temas de Modelación Lineal, y algunos Métodos Aproximados vinculados. En las Tablas II y III se ilustran las tareas docentes en Física y de la especialidad respectivamente.

Tabla II: Ejemplos de tareas docentes (b) y (c) articuladas con la Disciplina Física.

	FENÓMENO/PROCESO	**CONTENIDOS Cálculo y Geometría I**	**OBSERVACIONES**
FÍSICA		MOVIMIENTO CURVILÍNEO EN 2D (b)	
	Velocidad y rapidez. Aceleración. Trayectoria.	Función Real de una Variable. Función vectorial. Curva. Ecuación paramétrica de una curva. Derivada de una función escalar. Derivada de un vector.	Clase Práctica Seminario Evaluaciones parciales y finales
	Cinemática: problema directo e inverso problem	Integral indefinida. Constantes de integración. Integral definida. Arco de una curva.	
	Dinámica: fuerzas y ecuación del movimiento.	Ecuaciones diferenciales ordinarias sencillas y su solución.	
	FENÓMENO/PROCESO	**CONTENIDOS Cálculo y Geometría II**	**OBSERVACIONES**
		MOVIMIENTO CURVILÍNEO EN 3D (b)	
	Leyes de Kepler. Fuerzas centrales. Campo conservativo.	Movimiento Elíptico. Curvas integrales. Integrales dobles. Integral de Línea.	Taller
		PROCESOS TERMODINÁMICOS (b)	
	Ecuación de los Gases. Experimentos. Procesos.	Funciones reales de varias variables. Derivada y diferencial. Tasas de cambio relacionadas. Área bajo la curva y área entre curvas de un gráfico.	Clase Práctica Seminario Evaluaciones parciales y finales

Con la Disciplina Integradora la integración logra tanto directamente con la Práctica de Familiarización que *"consolidará los conocimientos adquiridos en las asignaturas Instrumentos Meteorológicos y Métodos de Observación I y II"* (Cuba-MES, 2011, p.143) como con los aspectos del Tratamiento de Datos y la Teoría de Errores dentro de estas dos asignaturas que perteneciendo a la Disciplina Ciencias Atmosféricas y Afines, tributan de manera directa a ella.

El enunciado de las tareas docentes, en sus diferentes formatos: problemas, tareas de Laboratorio, proyectos investigativos, etc. por motivos de espacio, lamentablemente no pueden mostrarse en este artículo. En todos los casos se incentiva el proceso de *metacognición* o de reflexión sobre los propios aprendizajes y que éstos sean además, *aprendizajes significativos*. (Delgado, 1999)

Tabla III: Ejemplos de tareas docentes (b) y (c) articuladas con la Disciplina Integradora.

INSTRUMENTOS METEOROLÓGICOS Y MÉTODOS DE OBSERVACIÓN PRÁCTICA DE FAMILIARIZACIÓN	FENÓMENO/PROCESO	CONTENIDOS Cálculo & Geometría I	OBSERVACIONES
	HURACÁN[c]		
	Fórmula de Fletcher. Ecuación de Hughes.	Límite y continuidad de una función. Derivada de una función.	Clase Práctica Tarea Extraclase
	MAPEO DE CAMPOS ESCALARES Y VECTORIALES [a]		
	Isolíneas y tipos. Isotermas, isobaras, isoyetas, isohipsias. Perfil de velocidades. Líneas de flujo. Campo de gradiente.	Campos escalares. Curvas de nivel. Isolíneas. Campos vectoriales. Líneas vectoriales. Campo de direcciones. Derivada direccional. Vector Gradiente. Ortogonalidad.	Laboratorio Seminario Evaluaciones parciales y finales
	FENÓMENO/PROCESO	**CONTENIDOS Cálculo & Geometría II**	**OBSERVACIONES**
	TRABAJO SOBRE MAPAS [a]		
	Superficies de nivel y proyecciones. Curvas de nivel. Campo gradiente sobre la superficie y sobre el plano.	Representación de proyecciones de superficies, superficies de nivel y curvas de nivel. Ortogonalidad de curvas. Mapeo de isoclinas y campo direccional dado $y' = r(x, y)$ Mapeo de campo vectorial y familia de pendientes dado $\vec{V} = [u, v]$.	Laboratorio Ejercicios Informe final Evaluaciones parciales y finales
	SENSACIÓN TÉRMICA[c]		
	Tabla WTC como función. Coeficiente de intercambio térmico y su derivada. Errores absoluto y relativo.	Diseño de experimentos. Tratamiento de datos. Tasa de cambio. Extremos de una función. Diferencial. Incremento finito. Error absoluto y error relativo.	Seminario Problema Evaluaciones parciales y finales
	MAPA SINÓPTICO [c]		
	Área entre isobaras. Gradiente de presión. Tendencias de isobaras. Código FM-12 SYNOP	Integral definida. Arco de una curva Área entre curvas. Mapeo de isolíneas.	Clase Práctica Problemas Evaluaciones parciales y finales

Conclusiones

El Proyecto Interdisciplinario Integrado ha contribuido a *"disminuir la separación entre el currículum pensado y currículum vivido"* (Fernández de Alaiza, 2000). Concebido como plataforma de trabajo, el Proyecto Interdisciplinario Integrado del 1er. Año 2010-2011en el InSTEC, ha aumentado la eficiencia y la eficacia del trabajo metodológico del colectivo de año, la motivación de los docentes, una armónica integración de las acciones didácticas, mejor orientación a los alumnos y un mejor desempeño docente de los mismos.

Referencias bibliográficas

Augier A. (2007). Curso paralelo del Mathcad como auxiliar en asignaturas de perfil matemático. *Memorias en CD ROM de la Convención Internacional de Informática -2007***.** *InfoRedu.* Febrero de 2007, La Habana. Cuba.

Codorníu M.J., Domínguez, A. y García A. (2009). Currículo de Física General en la carrera de Meteorología en Cuba: algunas ideas básicas. *Memorias en CD ROM del IX Taller Internacional sobre la Enseñanza de la Física en la Ingeniería EFING´2010. XV Convención Científica de Ingeniería y Arquitectura*. 29 noviembre-3 de diciembre del 2010. La Habana. Cuba.

Cuba-MES. (2011). *Planes del Proceso Docente. Modalidad Presencial y Semipresencial. Carrera de Licenciatura en Meteorología*. Ministerio de Educación Superior. República de Cuba. Editorial "Félix Varela".

Delgado, J.R. (1999). *La enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Dos elementos fundamentales para lograr su eficacia: la estructuración sistémica del contenido de estudio y el desarrollo de las habilidades generales matemáticas*. Tesis de Doctorado en Ciencias Pedagógicas no publicada, Instituto Superior Politécnico "José Antonio Echeverría". Cuba.

DINECE. (2005). Resolución N° 233 del 10-2-2005. Dirección Nacional de Información y Evaluación de la Calidad Educativa. Consejo Federal de Cultura y Educación. Argentina.

Fernández de Alaiza, B. (2000). *La interdisciplinariedad como base de una estrategia para el perfeccionamiento del diseño curricular de una carrera de ciencias técnicas y su aplicación a la Ingeniería en Automática en la República de Cuba*. Tesis de Doctorado en Ciencias Pedagógicas no publicada, Instituto Superior Politécnico "José Antonio Echevarría", Cuba.

García, A. (2005). INFOCIENCIAS: propuesta metodológica para la integración de las Ciencias Básicas. *Memorias en CD ROM. Convención Internacional de Informática – 2005*. Febrero del 2011. Ciudad de La Habana. Cuba.

García, A., López, M., Heredia, H, E., Codorníu M.J., Augier A. y del Valle, G. (2011). VirtualMET: Tecnologías Educativas para un Proyecto Interdisciplinario Integrado en el cuarto semestre de la carrera de Meteorología. *Memorias en CD ROM del XIV Congreso*

*Internacional de Informática en la Educación. Convención Internacional de Informática´2011***.** Ciudad de La Habana. Cuba.

Hernández, H. (1995). Nodos cognitivos: recurso eficiente para el pensamiento matemático. Conferencia Magistral RELME-9, La Habana, 1995.

OMM-258. (2001). La enseñanza y formación profesional del personal en meteorología e hidrología operativa. Directivas de orientación. En I. F. Draghici, G. V. Necco, R. W. Riddaway, J. T. Snow, C. Billard, L. A. Ogallo (Eds), *Meteorología 1*, 1-143

Polya, George. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Editorial Trillas.

SERIES: UNA INTRODUCCION

Abel Baca Ramírez, Agustín Grijalva Monteverde
Universidad de Sonora México
baca@gauss.mat.uson.mx, guty@gauss.mat.uson.mx

Resumen. Se propone una introducción al estudio de series, mediante el planteamiento de situaciones problemáticas, que se plantean a los estudiantes de Ingeniería de la Universidad de Sonora. Se espera que a partir de este planteamiento, ellos vayan construyendo significados personales acerca de los objetos matemáticos: series, series convergentes, series divergentes, series geométricas así como de los principales criterios de convergencia de series.

Palabras clave: series, convergente, divergente, geométrica, criterios

Abstract. One way to introduce series in engineering students is presented in this paper. A problematic situation is offered to students of a career in engineering of the University of Sonora, and then we hope they construct personal meanings about series, convergent series, divergent series, geometric series and the principal convergence criterions.

Key words: sequences, convergent, divergent, geometric, criterions

Introducción

En el semestre 2007-1 se aplicó un cuestionario a estudiantes de las carreras de Ingeniería de la Universidad de Sonora. El cuestionario contenía 3 situaciones-problema acerca de 3 temas diferentes de matemáticas. Uno de los temas era el de Series numéricas. El problema era el siguiente:

Se tiene un primer cuadrado, y a partir de él se construye un segundo cuadrado uniendo los puntos medios de los lados del primer cuadrado, y así sucesivamente. Hallar la suma de las áreas de todos los cuadrados. Ver Figura 1.

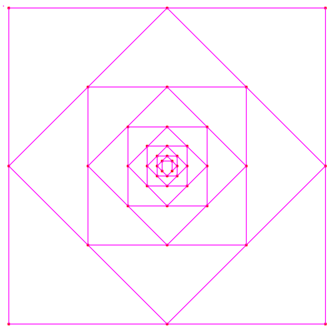


Figura 1: Aquí se muestran los primeros 11 cuadrados

El objetivo de dicho cuestionario era el de observar qué tipos de respuestas daban los alumnos a los que se les aplicó. Posteriormente se harían modificaciones al problema y se complementaría con preguntas para seguir observando el tipo de respuestas.

Alumnos de las carreras del área de Contabilidad y Administración, cuyos temas de cálculo no incluyen el estudio de Series, sólo hicieron comentarios sueltos, aduciendo que la suma era infinita y que no se podía calcular; algunos dijeron que necesitaban más datos; y muchos no dieron ninguna respuesta. Los alumnos de las carreras de Ingeniería hicieron desarrollos muy intuitivos, es decir, hicieron cálculos en lo particular, primero de la longitud del lado del cuadrado al que le querían calcular el área. Hicieron sumas de áreas de los primeros cuadrados, algunos calcularon el área de los primeros once cuadrados, que son los que se muestran en la figura. A partir de esos resultados, hicieron comentarios respecto a la suma total de áreas, algunos aseguraban que la suma no pasaría de dos veces el área del primer cuadrado.

Ninguno hizo referencia a una Serie Geométrica Convergente, pero más de uno trató de recordar alguna fórmula para hacer el cálculo final, identificando que se trataba de un problema relacionado con aspectos ya estudiados previamente por ellos.

Estos resultados muestran que los significados personales de los alumnos de Ingeniería de la Universidad de Sonora, respecto a Series y su Convergencia, no son los adecuados, es decir, están lejanos de los significados institucionales vertidos en el programa de la materia respectiva y de la bibliografía sugerida en dicho programa.

Con base en todo lo anterior, nos formulamos diversas interrogantes que si bien no constituyen planteamientos para la elaboración de un proyecto de investigación, si requerían analizarse para la elaboración de nuestra propuesta de enseñanza. Entre dichas preguntas teníamos las siguientes:

- *¿Para qué enseñar Series a los estudiantes de Ingeniería de la Universidad de Sonora?*
- *¿Qué enseñar de Series a los estudiantes de Ingeniería de la Universidad de Sonora?*
- *¿Cómo temas de Series enseñar a los estudiantes de Ingeniería de la Universidad de Sonora?*
- *¿Qué problemas de Ingeniería que involucren Series en su solución les interesa resolver a los estudiantes de Ingeniería de la Universidad de Sonora?*
- *¿Cómo acercar los significados personales acerca de Series de los estudiantes de Ingeniería de la Universidad de Sonora, a los significados institucionales referenciados en el Programa de la Materia de Cálculo Diferencial e Integral II, de la Bibliografía sugerida por dicho programa y de nuestras observaciones y concepciones individuales?*

La problemática

Con el propósito de profundizar en nuestra comprensión del problema, nos dimos a la tarea de identificar los problemas que se presentan en el aprendizaje de las series por parte de los estudiantes, haciendo, por una parte, un análisis de nuestra experiencias docentes y de las observaciones realizadas con la aplicación del cuestionario ya señalado y, por otra, revisando investigaciones realizadas en matemática educativa sobre el particular. Adicionalmente entrevistamos a tres profesores de cursos de ingeniería posteriores a los de cálculo, en búsqueda tanto del señalamiento de problemas detectados como de concepciones y visiones sobre la importancia del tema en sus cursos y, quizá, práctica profesional.

Todos estos aspectos nos condujeron a plantear, de origen, la existencia de una problemática que es muy similar a la que se señala en Rosas (2007), "encontramos deficiencias en los estudiantes como las siguientes:

- *Alumnos con conceptos incompletos o incorrectos acerca de sucesión y serie.*
- *Confusión en el manejo del concepto de sucesión y serie.*
- *Uso de métodos para analizar la convergencia de sucesiones al momento de estudiar la convergencia de una serie numérica.*
- *Confusión en el manejo de los diversos criterios de convergencia aplicables a las series numéricas.*
- *Uso de los criterios de convergencia mediante ensayo y error.*
- *Uso de criterios de convergencia de series para estudiar la convergencia de sucesiones infinitas.*
- *Problemas (en materias posteriores) para resolver algún tipo de actividad que involucre el manejo de series numéricas y de potencias.*
- *Comentarios de otros departamentos indicando las dificultades de los alumnos al abordar las aplicaciones que requieren el manejo de sucesiones y series.*
- *Alto número de alumnos con calificaciones no satisfactorias en los exámenes que incluyen estos temas."*

Por otra parte, en su trabajo de investigación, en el cual analizan el tratamiento que se da a las series en estudios superiores y presentan los resultados de trabajos desarrollados con profesores y alumnos de la Universidad de Jaén, así como el resultado de análisis de las concepciones sobre series de algunos textos de cálculo, Sánchez Gómez y Marcolini Bernardi (2006), "Sugerimos tomar en cuenta, a la hora de diseñar una propuesta alternativa de enseñanza de series, las siguientes cuestiones:

a) Asignar más tiempo a la construcción del concepto de Series y Convergencia
b) Apoyarse en aplicaciones prácticas, modelos y situaciones problema para la construcción de la noción de serie

Tomando en cuenta estas consideraciones, nuestro problema consiste en diseñar una secuencia didáctica para la Enseñanza de Series en las carreras de Ingeniería de la Universidad de Sonora, tomando en cuenta las características intrínsecas del conjunto de estudiantes (alumnos de las carreras de Ingeniería Civil, Ingeniería de Minas, Ingeniería Industrial, Ingeniería en Sistemas de Información, Ingeniería Química, Geología) al que va dirigido el Curso de Cálculo Diferencial e Integral II, y específicamente el Temas de Series y Convergencia de Series.

Dicha secuencia didáctica deberá tomar en cuenta de manera muy importante, las respuestas a las preguntas mencionadas anteriormente: ¿Para qué enseñar?, ¿Cómo enseñar? y ¿Qué enseñar? de Series y su Convergencia a los estudiantes de las carreras de Ingeniería de la Universidad de Sonora.

En concordancia con nuestro propio conocimiento y los resultados de las entrevistas a docentes de las carreras de ingeniería, ratificamos nuestra convicción de que el tema de Series es importante en la formación de un ingeniero, cualquiera que sea su dominio profesional.

Un tema recurrente en las entrevistas fue la necesidad de que los estudiantes tuvieran un nivel adecuado de conocimientos de las series de potencias, las cuales desempeñan un papel notable en la solución de algunas ecuaciones diferenciales y, en general el tema de Series es soporte para el estudio de otras disciplinas, que marcadamente aparecen en los estudios de posgrado de las ingenierías.

Estas delimitaciones nos dan también una pauta para promover la construcción de significados personales de conformidad con una selección adecuada de significados institucionales que deberán plasmarse en los documentos correspondientes sobre el tema.

Para ello se requiere un marco teórico que abarque aspectos Epistemológicos, Cognitivos y Didácticos, que son básicos para formular cualquier sistema de enseñanza, y en particular de Enseñanza de las Matemáticas, y que también nos proporcione elementos teóricos que nos permita dar respuesta a las preguntas ¿Para qué enseñar series? ¿Qué enseñar de Series? y ¿Cómo enseñar Series? a los estudiantes de Ingeniería de la Universidad de Sonora. El marco teórico que encontramos más adecuado para los propósitos mencionados, es el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (Godino, Batanero y Font, 2008).

Descripción de la propuesta

La propuesta está compuesta por nueve bloques de problemas, y cada bloque representa un tema. Los temas tratados son los siguientes:

Bloque 1. El Problema de Carlita

Bloque 2. Representación de Números Racionales por medio de Sumas Infinitas

Bloque 3. Series Geométricas

Bloque 4. Una Serie Telescópica

Bloque 5. La Serie Armónica

Bloque 6. Propiedades de las Series Convergentes

Bloque 7. Criterios de Convergencia

a) Criterio de Divergencia

b) Criterio de Comparación

c) Criterio de la Integral

d) Criterio del Cociente

Bloque 8. Series-P

Bloque 9. Series Alternantes

Esta propuesta se complementa con un problemario. Se sugiere que se proponga a los estudiantes, como un reforzamiento de los significados personales construidos en la aplicación de la propuesta, y puede ser una actividad extra clase o como una tarea.

Metodología

La propuesta se aplicó a 2 grupos de estudiantes de carreras de ingeniería, que estaban cursando la materia Cálculo II durante el semestre 2009-1, un grupo tenía 35 estudiantes y el otro 30. Se dividió a los grupos en equipos de 5 estudiantes cada uno, y se les fueron presentando los problemas por bloques, y para cada bloque se destinó un tiempo de 50 minutos, que es lo que dura aproximadamente una clase. Los equipos se formaron por afinidad entre los estudiantes dándoles la libertad de escoger a cada quien el equipo al que querían pertenecer. Se le entregaba a cada estudiante un bloque en forma de actividad, se les daba un tiempo de 5 minutos para que leyeran y entendieran la situación planteada. Se les preguntaba si había alguna duda en el planteamiento de la situación y se les respondía mínimamente lo necesario. Se les pedía que por equipo plantearan una solución al problema, después de debatir entre los integrantes de cada equipo, durante 20 minutos. Luego se le pedía a cada equipo que plantearan sus respuestas, y que se abriera una discusión dirigida por el profesor, durante 20 minutos. Los 5 minutos restantes se invertían en consensar respuestas y para su validación. Si algún problema exigía una inversión de tiempo mayor, se continuaba al día siguiente con dicha actividad.

Una muestra de problemas

El Problema de Carlita

Carlita es una niña de 11 años y cursa quinto año de primaria. Ella quiere hacerle un regalo sorpresa a su papá el día del padre, y para ello ha pensado construir un porta-retrato usando cuadrados de fomi de diferentes colores y colocar en él una foto de ella misma sabiendo que a su padre le encantaría tener una foto de ella.

Carlita recortará un cuadrado cuyo lado mide 1 dm. Luego pegará encima de ese cuadrado, otro cuadrado de diferente color, cuyos vértices quedarán en los puntos medios del primer cuadrado. Enseguida recortará otro cuadrado de diferente color al anterior, y hará lo correspondiente. Sucesivamente irá colocando cuadrados hasta que ella lo considere conveniente. El último cuadrado será la foto que ella quiere colocar en dicho porta-retrato.

Pero Carlita está indecisa en cual será esa foto, pues tiene muchas fotos de distintos tamaños que podría usar para dicho regalo.

Ella quiere estar segura de que el material que compre sea suficiente para construir su porta-retrato, así que quiere tener una idea de cuanta cantidad de material ocupará a lo máximo independientemente del tamaño de la fotografía que coloque en su porta-retrato. Su amiga Estefanía le ha dicho que compre muchos cuadrados de fomi de distintos colores que tengan de lado 1 dm para que no le falte material.

Inteligentemente, Carlita piensa que debe haber una manera de saber cual sería la suma de las áreas de todos los cuadrados que se necesiten, independientemente del número de ellos.

Carlita le pregunta a su maestro respecto del problema que enfrenta. Su maestro le dice que cursó 2 años en la escuela de Ingeniería Civil de la Unisón y recuerda que en su curso de Cálculo II, le hablaron de cómo sumar muchos números, que en este caso serían las áreas de todos los cuadrados que Carlita quiere poner en su porta-retrato.

Carlita le dice a su papá que la lleve a la Universidad de Sonora con algún alumno de Ingeniería Civil para preguntarle al respecto. Carlita no quiere que su padre se entere de cuál es el motivo de dicha pregunta, así que sólo le dice que quiere entrevistar a algún alumno de Ingeniería Civil para una tarea de investigación de su escuela.

Supongamos que Carlita viene con usted y le pregunta cómo puede resolver dicho problema. ¿Podría usted ayudarle?

La idea de Carlita está plasmada en la figura 2:

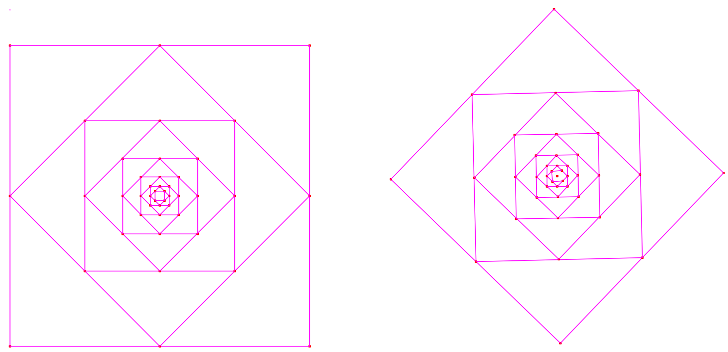


Figura 2: Modelo del portarretrato de Carlita

Contesta las preguntas que se hacen a continuación:

1. ¿Cuál es el área del primer cuadrado?
2. ¿Cuál es el área del segundo cuadrado?
3. ¿Cuál es el área del tercer cuadrado?
4. ¿Puede usted hallar una relación entre el área del tercer cuadrado y la del segundo?
5. ¿Cuál es el área del cuarto cuadrado?
6. ¿Podría usted dar una regla para obtener el área de cualquier cuadrado? Sugerencia: Llámele A1 al área del primer cuadrado, A2 a la del segundo, A3 a la del tercero, y así sucesivamente, es decir A_n sería la del n-ésimo cuadrado. ¿Puede usted dar una expresión para calcular el área de A_n?
7. Si observamos tenemos una sucesión de números A_1, A_2, A_3, A_4,…, An,…. Y nuestro problema consiste en sumar dichos números, es decir, obtener la suma $A_1+A_2+A_3+A_4+\ldots+A_n+\ldots$ ¿Qué podría usted decir acerca de dicha suma?
8. Vamos a llamarle Sn a la suma de las áreas de los primeros n cuadrados. ¿Cuánto vale S_2?
9. ¿Cuánto vale S_3?
10. ¿Cuánto vale S_4?
11. ¿Cuánto vale S_5?
12. ¿Cuánto vale S_6?
13. ¿Cuánto vale S_7?
14. ¿Es posible dar una expresión para calcular dichas sumas en términos de n?
15. ¿Podría usted expresarla?
16. Si ya tiene usted una manera de calcular la suma de las áreas de cualquier número n de cuadrados, ¿podría usted darle ya una respuesta a Carlita? Si su respuesta es sí, ¿cuál sería su respuesta y porqué?
17. Si su respuesta fue no, ¿por qué?

Este problema es una aplicación del problema original que apareció en el cuestionario, a partir del cual se empezó el desarrollo de este trabajo.

Se le pidió a Carlita que hiciera el portarretrato y se observó lo que ella hacía para recortar los cuadrados, y se retomaron algunas ideas de lo hecho por Carlita. Por ejemplo, el hecho de doblar las esquinas de un cuadrado, hasta los puntos medios de los lados, para obtener el siguiente cuadrado.

Un Problema de triángulos

Observe la Figura 3

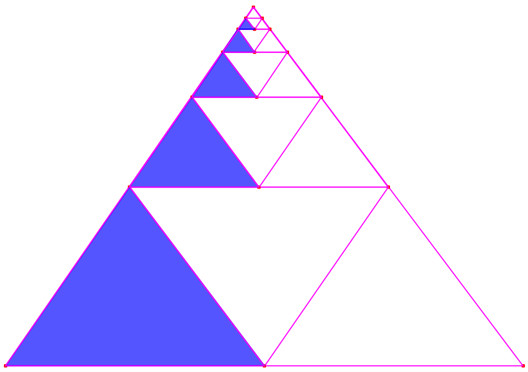


Figura 3

Es un triángulo equilátero, y se han unido los puntos medios de sus lados, luego en el triángulo de arriba se ha hecho lo mismo, y así sucesivamente.

¿Qué puede decir de la suma de las áreas de todos los triángulos sombreados?

Un problema de áreas entre curvas:

Observe la Figura 4

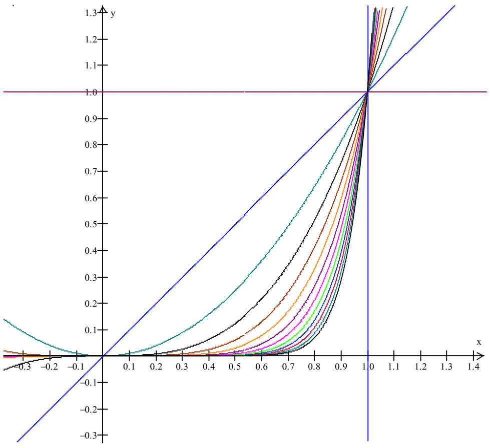


Figura 4

La figura 6 muestra las gráficas de las funciones y=1,y= soy= x^2,y= x^3, y=x^4, y=x^5, y=x^6, y=x^7, y=x^8, y=x^9, y=x^{10} en el intervalo $[0,1]$.

Preguntas

1. ¿Cuánto es el área entre las gráficas de y=1 y y=x, en el intervalo $[0,1]$?
2. ¿Cuánto es el área entre las gráficas de y=x y y=x^2, en el intervalo $[0,1]$?
3. ¿Cuánto es el área entre las gráficas de y=x^2 y y=x^3, en el intervalo $[0,1]$?
4. ¿Cuánto es el área entre las gráficas de y=x^3 y y=x^4, en el intervalo $[0,1]$?
5. ¿Observa algún patrón en la sucesión de números obtenidos?
6. ¿Puede decir cuál es el patrón?
7. Ahora calcule el área entre las gráficas de y=x^n y y=x^{n+1} .
8. Si este proceso se continúa indefinidamente, entonces se obtiene una sucesión infinita de números que representan el área entre las curvas y=x^n y y=x^{n+1} para n=0,1,2,3,…Representa la suma de todas las áreas como una serie.
9. ¿Geométricamente, si juntamos todas esas áreas, ¿qué es lo que se obtiene?
10. Entonces, la serie anterior debe converger al valor obtenido geométricamente. Explique.

El problema de la torre inclinada

Se apilan bloques idénticos de una unidad de longitud sobre el borde de una mesa. El centro de gravedad del bloque superior debe quedar sobre el bloque debajo de él, el centro de gravedad de los dos bloques superiores debe quedar sobre el bloque debajo de ellos, y así sucesivamente (Ver Figura 5).

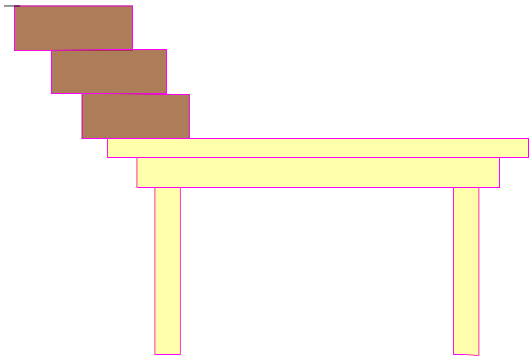


Figura 5

Preguntas:

1. Si la pila de bloques sólo consta de un solo bloque, ¿Cuánto sería su desplazamiento x1 a partir del borde izquierdo de la mesa?

2. Si la pila de bloques consta de dos bloques, ¿Cuánto sería el desplazamiento x1 del bloque inferior? ¿Cuál sería el desplazamiento x2 del bloque superior?
3. Si la pila de bloques consta de tres bloques, ¿Cuánto valen los desplazamientos x1, x2 y x3?
4. Si la pila de bloques consta de n bloques, ¿Cuánto valen los desplazamientos x1, x2, x3, …, xn?

Referencias bibliográficas

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2008). Un Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm

Rosas, A. (2007). *Transposición didáctica de las series numéricas infinitas. Una caracterización del discurso escolar actual en el nivel superior*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

Sánchez Gómez, C. y Marcolini Bernardi, M. (2006). *Análisis comparativo de las concepciones sobre series numéricas en universidades latinoamericanas y españolas*. Universidad de Jaén. España.

EPISTEMOLOGÍA Y DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

Jesús Ávila Godoy, Francisco Javier Parra Bermúdez, Ramiro Ávila Godoy
Universidad Autónoma de Baja California México
Universidad de Sonora
jag_virgo@hotmail.com, fjparra@correo.física.uson.mx, ravilag@gauss.mat.uson.mx

Resumen. En este trabajo se presentan algunas reflexiones hechas en un seminario sobre Epistemología y Didáctica de las Matemáticas organizado para analizar el origen y desarrollo de los objetos matemáticos. Este análisis se realizó asumiendo las premisas del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática de Juan D. Godino y colaboradores (EOS) y estuvo orientado a tratar de mejorar la comprensión de los procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, considerando que dicha comprensión resulta fundamental para mejorar ambos procesos. Se pretende ilustrar, con algunos ejemplos, el papel de las situaciones problémicas en el origen y desarrollo de los significados de los objetos matemáticos y cómo dichos significados, en un cierto momento, se convierten en obstáculos que dificultan el enriquecimiento de tales significados; lo cual, se asume, sucede tanto en el desarrollo histórico de las ideas como en el proceso de aprendizaje que viven los estudiantes en el aula.

Palabras clave: epistemología, didáctica, obstáculo epistemológico, objeto matemático, significado

Abstract. In this paper, we present some reflections originated during a seminar on Epistemology and Mathematics Education, which was developed with the purpose to analyze the origin and development of mathematical objects. The analysis was performed based on the premises about Cognition and Teaching in Mathematics presented by Juan D. Godino et al, in the Onto-semiotic Approach (Enfoque Ontosemiótico or EOS for its initials in Spanish) and aimed at improving the understanding of learning and teaching processes in mathematics, because a better understanding is essential to improve both processes. We use several examples to illustrate the role of problem situations in the origin and development of meanings about mathematical objects and how those mental conceptions developed about the meanings, at one point in time, could become obstacles to enrich those same meanings. We say that those difficulties occur, both, in the historical development of ideas and in the learning process experienced by students in the classroom.

Key words: epistemology, didactic, epistemological obstacle, mathematical object, meaning

Introducción

La investigación educativa que se realiza en los distintos ámbitos, tiene como propósito último y más general, aportar elementos que permitan comprender e interpretar de mejor manera los procesos de enseñanza y aprendizaje que se desarrollan en el aula escolar, como el espacio donde se da la interacción entre profesor y alumnos, considerando que una mejor comprensión e interpretación de dichos procesos, permitirá diseñar estrategias de enseñanza que mejoren significativamente la calidad de los aprendizajes de los alumnos.

Lo anterior equivale a decir, en el caso de la investigación en Matemática Educativa, que lo que se pretende es aportar elementos que puedan ser utilizados para lograr que los alumnos adquieran un conocimiento más sólido de la matemática y, que éste, se vea reflejado en un uso más eficaz de los conceptos y métodos de la disciplina, en el análisis, interpretación y resolución de problemas.

Abordar la investigación, con el propósito de comprender los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática que se desarrollan en el aula escolar, requiere del investigador, asumir una serie de premisas en el ámbito de la ontología y la epistemología de los objetos matemáticos (concepción filosófica); de cómo influyen en el proceso educativo escolar los factores socioculturales del entorno (concepción sociológica); de cómo se desarrolla el proceso mental de construcción de conocimiento en el individuo (concepción psicológica); de cómo influye el trabajo docente, a través del diseño e implementación de determinadas estrategias de enseñanza, en la asignación de significados a los objetos matemáticos por los alumnos (concepción didáctica); además de una comprensión razonable de los conceptos y métodos de la disciplina.

Las reflexiones que aquí se presentan, parten de las siguientes premisas relacionadas con la epistemología y la ontología de los objetos matemáticos:

- Que la matemática, desde sus orígenes ha sido una herramienta intelectual construida socialmente por el hombre, con el propósito de resolver determinado tipo de problemas.
- Que tal herramienta la fue construyendo en el proceso mismo de resolución de dichos problemas, para lo cual creaba y utilizaba sus propios sistemas de prácticas. En este sentido, la matemática ha sido siempre una actividad de resolución de problemas.
- Que los diversos sistemas de prácticas implementados en un determinado momento de su desarrollo histórico, constituyen los significados de los objetos matemáticos emergentes,
- Que los significados construidos se convierten, en cierto momento, en obstáculos (epistemológicos) que dificultan la asimilación al significado de un determinado objeto matemático de nuevos sistemas de prácticas creados para resolver nuevos problemas.

Algunas consideraciones sobre la epistemología de la matemática

La matemática presentada en muchos textos como un cuerpo de conocimientos lógicamente estructurados que, partiendo de un conjunto mínimo de verdades evidentes (axiomas), deduce y establece, a través de un razonamiento basado en los principios de la lógica, la veracidad de un conjunto de proposiciones (teoremas), parece corresponderse con una visión platónica de la misma, esto es, una visión que considera a la matemática, como un ente con existencia fuera e independiente de la actividad humana.

Dicha visión desconoce que el estado actual de la matemática es fruto de un largo proceso a través del cual, el hombre, en su intento por alcanzar la verdad acerca del diseño y funcionamiento del universo y, por resolver los problemas y desafíos que éste le presenta, ha construido los objetos (conceptos y métodos) de la matemática, mismos que han evolucionado en la medida en que el hombre ha ido modificando, diversificando y enriqueciendo los significados de dichos objetos, como consecuencia de la creación de nuevos sistemas de prácticas ideados para abordar y resolver problemas de la más diversa índole.

Fue en la etapa de esplendor de la antigua cultura griega, la primera ocasión que la matemática es presentada como un cuerpo de conocimientos lógicamente estructurado. Euclides, en *Los Elementos*, presenta la Geometría como una abstracción, como un modelo del espacio físico (concebido como un espacio estático).

Si bien, la Geometría Euclidiana prevaleció hasta comienzos del siglo XX, como modelo matemático del espacio físico (estático), en el siglo XVII, Galileo y Kepler inician el estudio de los movimientos, el de caída libre (Galileo) y el de las órbitas de los planetas alrededor del sol (Kepler). Bajo la premisa de Galileo de que el libro de la naturaleza está escrito en lenguaje matemático, intentan describir y explicar dichos movimientos, para lo cual idearon y utilizaron nuevos y diversos sistemas de prácticas que originaron nuevos significados de ciertos objetos matemáticos, dando lugar a la creación de un modelo matemático del movimiento mecánico en el espacio concebido a la manera de Euclides.

En esta misma dirección, de tratar de establecer un modelo matemático de las leyes que rigen el funcionamiento de la naturaleza; durante la segunda mitad del siglo XVII, a partir de nuevos datos, nuevas observaciones, nuevos experimentos y desde luego, a partir del propio desarrollo alcanzado por la matemática, Newton, profundizando en el análisis del movimiento y de las causas que lo originan, diseñó e implementó un sistema de prácticas del que emergieron nuevos objetos matemáticos, cuyos significados provocaron un salto cualitativo en el desarrollo de la matemática, dando origen así, al Cálculo Diferencial e Integral como una herramienta muy poderosa para describir y explicar los fenómenos cuyo rasgo distintivo era la variación.

A la par que Newton y durante el mismo periodo, Leibniz, queriendo resolver el problema de trazar la tangente a una curva en un punto determinado, diseñó e implementó también un sistema de prácticas del que emergieron nuevos objetos matemáticos cuyos significados eran esencialmente los mismos que los construidos por Newton al para resolver los problemas del movimiento. De ahí que a ambos se les otorgue el mérito de la creación del Cálculo Diferencial e Integral.

La concepción de la matemática como modelo de la realidad física, prevaleció desde la época de la Grecia Antigua hasta comienzos del siglo XX, concepción que se reafirmó de manera especial, durante el siglo XVII, como resultado de haberse formulado, utilizando el lenguaje de la Matemática, las leyes y teorías científicas que permitían, describir, explicar y predecir el funcionamiento de la naturaleza, con resultados que eran confirmados por las observaciones y los experimentos. Con base en estos hechos, se puede afirmar que durante este periodo, el desarrollo de la matemática se dio en estrecha colaboración con el desarrollo de las ciencias, particularmente de la Física.

Pero por otro lado, el desarrollo de la matemática muestra que ésta no sólo le fue útil a las ciencias naturales, en su intento por describir y explicar el universo, sino también muestra, que dichas ciencias proporcionaron a la matemática los problemas que motivaron el origen y desarrollo de diversos sistemas de prácticas, cuya implementación, que en principio pretendía dar respuesta a los problemas concretos planteados, motivó el surgimiento y desarrollo de los objetos matemáticos y propició la diversidad y riqueza de los significados de dichos objetos.

La potencia y eficacia mostrada por la matemática y sus métodos en la explicación y predicción de los fenómenos naturales, llevaron a que se considerara a ésta como la verdad, en lo que al diseño de la naturaleza se refiere y, como la máxima expresión de la exactitud en el razonamiento así como un cuerpo de verdades irrefutables, cuyo más sólido criterio de verdad era el propio comportamiento de la naturaleza que parecía estar en completa armonía con los principios y leyes de las matemáticas. Incluso, se concebía a la matemática, y algunos la siguen concibiendo, como un cuerpo de conocimientos cuya existencia era independiente de la mente humana y que el hombre debe descubrir y apropiarse de ella a través de su aprehensión (concepción platónica).

Sin embargo, y como ha ocurrido con todo conocimiento, y la matemática no es la excepción, su propio desarrollo puso de manifiesto que las verdades evidentes por sí mismas y las derivadas de éstas, no eran tales verdades irrefutables y sólidamente sustentadas como se pensaba, sino que eran verdades relativas y de carácter temporal.

El surgimiento en el siglo XIX de las geometrías no euclidianas (y del álgebra de los cuaterniones), puso de manifiesto con claridad que la matemática construida hasta entonces, no era necesariamente la descripción del diseño de la naturaleza o, incluso, que no existía tal diseño, ya que habían surgido otras geometrías, que a pesar de estar en contradicción con la geometría imperante, eran igualmente útiles para describir y explicar el comportamiento de los fenómenos naturales. Esto significaba que recurrir a la naturaleza como criterio de verdad de las leyes matemáticas, no era un criterio confiable, ya que ésta validaba igualmente proposiciones matemáticas contradictorias, pero también representó un duro golpe a la concepción platónica de la naturaleza de los objetos matemáticos y fortaleció la convicción de que éstos eran creaciones de la mente humana.

La pérdida de confianza en la naturaleza como criterio de verdad de las leyes y principios matemáticos y la convicción de que éstos eran construcciones humanas y no objetos con existencia a priori, motivó que los matemáticos se propusieran revisar los fundamentos sobre los que habían construido ese grandioso edificio que hasta entonces había mostrado una gran fortaleza, pero que con las nuevas geometrías se había cimbrado y provocado profundas grietas.

Estos hechos orientaron la actividad de los matemáticos hacia la solución de los nuevos problemas planteados por la necesidad de sustentar la matemática sobre nuevas bases, cuya característica fundamental debía ser el máximo rigor lógico en la fundamentación de la matemática, evitando por completo, recurrir a cualquier argumento que no pudiera justificarse con los principios y las leyes de la lógica. Este proceso se conoce como rigorización de la matemática.

En esta etapa también se pone de manifiesto el papel fundamental que tienen los problemas, aunque de naturaleza diferente a los problemas planteados por el estudio de la naturaleza, como motivadores de nuevos sistemas de prácticas, de los que emergieron nuevos objetos matemáticos cuyos significados se fueron construyendo y enriqueciendo en ese proceso de resolución de los nuevos problemas planteados.

Lo antes dicho, de ninguna manera significa que la matemática haya dejado de ser eficaz en la descripción y explicación de los fenómenos de la naturaleza, sino por el contrario, el tener una idea más adecuada de la naturaleza de los objetos matemáticos, de sus métodos y procedimientos, permitió iniciar el proceso de fundamentación de la misma sobre otras bases, así como utilizar estas nuevas creaciones matemáticas para describir y explicar fenómenos naturales que no podían describirse y explicarse con la matemática previa, incluso, estas nuevas creaciones sirvieron de fundamento a un nuevo paradigma en la concepción del universo.

Los significados de los objetos matemáticos como obstáculos epistemológicos

El desarrollo de la matemática está plagado de ejemplos de cómo el significado construido de un objeto matemático, expresado en un determinado sistema de prácticas en un cierto contexto, representó en otro momento de su desarrollo, y por ende en otro contexto, un *obstáculo epistemológico* para asimilar al significado de dicho objeto, nuevos sistemas de prácticas e interpretar esta asimilación como un proceso de resignificación del objeto que diversifica y enriquece el significado previamente construido.

Un ejemplo especialmente útil para ilustrar lo anterior es el objeto *número*, cuyo significado surgió asociado a la cantidad de elementos de un conjunto dado, es decir, como número cardinal asociado a lo que hoy llamamos cardinalidad de un conjunto, esta significación constituyó un fuerte obstáculo para que en la Grecia Antigua, se reconociera y aceptara los hoy denominados *números racionales*, como números. Los griegos hablaban de la razón entre dos números, sin reconocer a dicha razón como un número propiamente dicho, incluso crearon una teoría sobre razones y proporciones que indica que conocían muchas de sus propiedades, pero no lograron asimilarlos e integrarlos al sistema de los números.

La introducción y uso de los enteros negativos por los hindúes y los árabes en el siglo VI de nuestra era, provocó una resistencia tan prolongada que aún después de la edad media, en Europa había matemáticos de renombre que se resistían a aceptar su utilización bajo el argumento de que era un absurdo la existencia de números menores que nada, de la misma manera que no concebían restarle un número mayor a otro menor. El surgimiento y uso de los números imaginarios o complejos igualmente enfrentó una fuerte resistencia aun entre los matemáticos brillantes de la época. Al respecto, algunos de ellos, declaraban:

> Un número admite ser restado de otro número mayor que él, pero intentar restarlo de un número menor que él es ridículo […] (Frend, 1796. p. x Preface.).
>
> El uso de $\sqrt{-1}$, cantidad que, decía Cauchy (1847), -podemos repudiar por completo y debemos abandonar sin pena, pues no sabe qué significa ese pretendido símbolo ni qué sentido se le debe atribuir- (Kline, 2000, p. 185).

El surgimiento del Cálculo en el siglo XVII, cuyos objetos matemáticos emergentes de los novedosos sistemas de prácticas implementados para la resolución de los problemas abordados, cuya característica esencial era la variación, es otro ejemplo muy ilustrativo de la naturaleza de los obstáculos epistemológicos, ya que enfrentó fuertes resistencias y críticas de connotados matemáticos de la época que se negaban a aceptar la inclusión y el uso de los objetos "infinitesimal" e "infinitamente grande", a pesar de que mostraban ser tan útiles y eficaces en el cálculo para la resolución de los problemas planteados, ya que violentaban el significado de cantidad (número real) del que se disponía en ese momento. Para los matemáticos de la época era inaceptable la respuesta de Leibniz a la pregunta de cuál era el valor de esas cantidades que él llamaba "infinitesimales" o "infinitamente grandes", ya que a esto respondía, que eran "inasignables", es decir, que no se les podía asignar un valor numérico, pero que eran de una gran utilidad para realizar cálculos y obtener resultados verdaderos, utilidad que desaparecía si se optaba por asignarles un valor real.

Algo similar ocurrió con los objetos matemáticos construidos por Newton en el contexto de los fenómenos del movimiento que se propuso describir y explicar.

Así, podrían citarse muchos otros ejemplos de obstáculos epistemológicos constituidos por los significados construidos en determinado momento y contexto que se expresaron en fuertes resistencias para aceptar nuevos objetos o diversificar sus significados.

Algunas consideraciones sobre didáctica de la matemática

Todo lo anterior obliga a los interesados en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en la escuela, a plantearse las siguientes preguntas: i) ¿El estudio del origen y desarrollo de los objetos matemáticos y sus significados, así como de los obstáculos epistemológicos que en un cierto momento representaron, proporciona algunos elementos útiles para la comprensión de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática en el aula escolar?; ii) ¿Dicho estudio proporciona elementos para el diseño de estrategias de enseñanza que sean más adecuadas para el propósito de mejorar significativamente el desempeño matemático de nuestros alumnos?

En los dos casos se asume que la respuesta es afirmativa.

Primero, porque está demostrado con creces, que presentar en la escuela, la matemática como un cuerpo de conocimientos acabado, lógicamente estructurado, dejando de lado las situaciones que dieron origen y motivaron el desarrollo de los objetos matemáticos y sus significados, partiendo de la premisa de que es posible apropiarse de ellos por un simple acto de transmisión del conocimiento y, que una vez comprendido el significado formal, es prácticamente automática la transferencia de dichos significados y en consecuencia se estará en condiciones de utilizar eficazmente los conceptos y métodos de la disciplina en el análisis, interpretación y resolución de problemas en diferentes y variados contextos, ha conducido a resultados que se encuentran muy alejados de los esperados.

Segundo, porque el conocer las situaciones que dieron lugar al surgimiento de los sistemas de prácticas que constituyen los significados de los objetos matemáticos considerados como emergentes, así como las dificultades que enfrentaron y las estrategias y caminos que se siguieron para superarlas, ayuda a la comprensión de las dificultades que enfrentan los alumnos cuando se espera que dominen con cierta eficacia determinados conceptos y procedimientos matemáticos, pero también, dicho estudio nos brinda recursos que nos permiten orientar de mejor manera su actividad para que puedan superar con mayor eficacia dichas dificultades. Esto no significa de ninguna manera, que consideremos que en el aula escolar se reproduzca íntegramente el proceso histórico de construcción del conocimiento, ya que en este caso, dicho proceso es conducido y coordinado por el profesor, sin embargo, hay elementos en común en ambos procesos que deben ser considerados a la hora de presentar la matemática en el aula.

Finalmente, porque si el origen y desarrollo de los significados de los objetos matemáticos muestra que estos son creaciones humanas que emergieron del diseño y la implementación de sistemas de prácticas para la resolución de problemas, podemos suponer entonces que el papel del profesor, lejos de ser el de un presentador a través de la exposición, de los objetos matemáticos, debe ser el de un diseñador de situaciones problémicas que se ubiquen en la zona de desarrollo potencial de los alumnos y que provoquen y estimulen su actividad intelectual, con el propósito de que de dicha actividad emerjan los objetos matemáticos a estudiar y sus significados y debe entonces, ser también un conductor y orientador de dicha actividad.

Conclusiones

En el análisis que se ha hecho del desarrollo de la matemática, se ha asumido que ésta es una construcción humana y que los objetos matemáticos son de naturaleza pragmática, lo cual implica que el objeto emerge de un sistema de prácticas creado para analizar y resolver cierto tipo de situaciones problémicas,

El análisis del origen y desarrollo de objetos matemáticos tales como: cantidad, número, infinitésimo, límite, etc., ha permitido valorar la eficacia de las herramientas conceptuales y metodológicas utilizadas para llevar a cabo dicho análisis.

Un constructo teórico, especialmente útil para la Didáctica, es el de *obstáculo epistemológico* que ayuda a entender las dificultades que tienen los estudiantes para modificar una concepción previamente construida y proporciona elementos para el diseño de estrategias didácticas para superarlos.

La investigación que se ha realizado en el campo de la Epistemología, sobre el origen y desarrollo de la Matemática, ha sido de gran utilidad en Didáctica de la Matemática pues ha permitido identificar elementos que ayudan a comprender de mejor manera el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

Referencias bibliográficas

Frend, W. (1796) *Principios de Álgebra*

Godino, J. (2010a). *Perspectiva de la didáctica de la matemática como disciplina tecnocientífica.* Recuperado el 12 de enero de 2011 de http://www.ugr.es/local/jgodino)

Godino, J. (2010b). *Marcos teóricos sobre el conocimiento y el aprendizaje matemático.* Recuperado el 12 de enero de 2011 de http://www.ugr.es/local/jgodino)

Grijalva, A. (2007). *El papel del contexto en la asignación de significados a los objetos matemáticos. El caso de la integral de una función*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

Ímaz, C. y Moreno, L. (2010). *La génesis y la enseñanza del Cálculo. Las trampas del rigor.* México: Trillas.

Kline, M. (2000). *Matemáticas: La pérdida de la certidumbre*. México: Siglo XXI editores.

PROPUESTA DE ENSEÑANZA DEL TEMA DE POLÍGONOS Y CIRCUNFERENCIAS MEDIANTE ACTIVIDADES DE GEOMETRÍA DINÁMICA, EN EL NIVEL BACHILLERATO

María Guadalupe Vera Soria, Marisol Radillo Enríquez, Francisco Vera Soria
Universidad de Guadalajara, Departamento de Matemáticas, CUCEI México
lupitaverso@hotmail.com, marisolradillo@yahoo.com.mx, fveraso@hotmail.com

Resumen. Se presenta una propuesta de actividades para la enseñanza de los temas de Polígonos y Circunferencias a nivel bachillerato, que consiste en una secuencia didáctica elaborada en base a la teoría de la epistemología genética. Se incluyen prácticas en computadora con el uso de un programa de geometría dinámica, seguidas de una serie de preguntas dirigidas a centrar la atención del alumno en un objetivo específico y propiciar la reflexión sobre los contenidos matemáticos involucrados.

Palabras clave: geometría dinámica, didáctica de las matemáticas

Abstract. We present a proposal of activities for teaching polygons and circumferences at high school level, which consist of a didactic sequence drawn up on the basis of the theory of genetic epistemology. We include practices on computer with the use of dynamic geometry software, followed by a series of questions to focus the student on a specific objective and encourage their reflection on the involved mathematical contents.

Key words: dynamic geometry, didactics of mathematics

Introducción

Un problema al que se enfrentan los maestros a nivel de bachillerato, es que los aprendizajes de Geometría, adquiridos por los estudiantes en la educación básica, se remiten generalmente al estudio memorístico de definiciones geométricas, áreas, volúmenes y construcciones mecanicistas descontextualizadas (Abrate, Delgado y Pochulu, 2007). Por ejemplo, las relaciones entre los elementos de una figura y los teoremas se dictan y suelen ser aceptados sin cuestionamiento, ni mayor reflexión, por la mayoría de los alumnos.

En este escenario, los estudiantes de nivel bachillerato no parecen tener los elementos para alcanzar las habilidades geométricas y la creatividad, que les permita lograr un razonamiento lógico y deductivo, como es el caso de los estudiantes de Matemáticas II del Colegio de Bachilleres del Estado de Jalisco, México (COBAEJ). En esta institución, los objetivos curriculares establecen que "el estudio de la Geometría Euclidiana contribuye a favorecer un pensamiento reflexivo del alumno cuando identifica propiedades y relaciones que puede enunciar en proposiciones generales, construye y proporciona argumentos que validen dichas proposiciones, y establece relaciones lógicas entre ellas" (Programa de estudio de Matemáticas II de la DGB de la SEP, 2008). Por tal motivo el propósito de esta propuesta didáctica consiste en propiciar de mejor manera el logro de los mencionados objetivos.

Con la intención de mejorar las estrategias para el aprendizaje de la Geometría, esta investigación aborda, desde la perspectiva de la epistemología genética de Piaget, los procesos de aprendizaje de los estudiantes de nivel bachillerato mediante el uso del programa de geometría dinámica *Cabri-géomètre II*, como apoyo en el proceso de asimilación-acomodación de los conocimientos.

En la primera parte abordaremos brevemente el soporte teórico-metodológico de la investigación. A continuación se describen algunas actividades diseñadas para el logro de los objetivos curriculares. Finalmente se plantean algunas conclusiones y reflexiones para trabajos relacionados con el tema.

Soporte teórico metodológico

Para Piaget (en Driscoll, 1993), el sujeto se acerca al objeto de conocimiento, dotado de ciertas estructuras intelectuales que le permiten "ver" al objeto de cierta manera y extraer de él información, misma que es asimilada por dichas estructuras. La nueva información produce modificaciones (acomodaciones) en las estructuras intelectuales, de tal manera que cuando el sujeto se acerca nuevamente al objeto lo "ve" de manera distinta a como lo había visto originalmente, y es otra la información que ahora le es relevante. Sus observaciones se modifican sucesivamente conforme lo hacen sus estructuras cognoscitivas, construyéndose así el conocimiento sobre el objeto.

De acuerdo a la tesis de la epistemología genética, el conocimiento matemático es resultado de la reflexión que el sujeto realiza sobre sus propias acciones interiorizadas (Moreno y Waldegg, 1992). En este sentido, el papel activo del sujeto durante el proceso de adquisición del conocimiento, es en realidad, un proceso de construcción. Por tanto, el conocimiento es dependiente de la acción y para que el alumno lo construya con base en la organización de sus propias experiencias se parte que de una acción individual, en la cual ponga en juego los diferentes procesos, por los que se puede acceder al conocimiento, tales como la abstracción reflexiva, la generalización y la toma de conciencia.

Por otra parte, las actividades apoyadas en los programas de Geometría Dinámica brindan una herramienta de arrastre que posibilita la exploración de situaciones geométricas, en donde la construcción de objetos que pueden manipularse, permite la formulación/verificación de conjeturas (Barroso y Gavilán, 2003). Una vez definida la construcción esta se puede "mover" y deformar pero las condiciones que definen cada elemento permanecen invariables. En particular, la aplicación de la Geometría Dinámica, desde una perspectiva constructivista, tiene como propósito apoyar al alumno a realizar por sí mismo la construcción de los conceptos al permitir crear los objetos geométricos y transformarlos para entender el proceso de esta transformación.

La razón por la cual se eligió el *Cabri-géomètre II*, y no otro de los programas de Geometría dinámica, es porque se trata de un programa pequeño que no requiere un equipo sofisticado (6Mb de memoria RAM y 2Mb de espacio libre en el disco duro para archivos de programa), además de estar disponible en español. No es necesario conocer comandos ni saber programar para usar dicho programa ya que funciona con menús de pantalla, propios del ambiente Windows como el Word o el Excel.

Metodología

Se elaboró la propuesta didáctica con las actividades de aprendizaje en base a la teoría del desarrollo cognitivo de Piaget, que incluyen prácticas en computadora con el uso del programa *Cabri-géomètre II* para el estudio del tema Polígonos y Circunferencia de la materia de Matemáticas II. Las actividades se organizaron en torno a los temas (a) líneas y puntos notables en un triángulo, (b) polígonos y circunferencia.

Las actividades que se reportan fueron desarrolladas por los alumnos en cuatro sesiones, de acuerdo a la disponibilidad del laboratorio de cómputo. Posteriormente se aplicó una posprueba con base en los contenidos y objetivos de la materia de Matemáticas II de la DGB, para evaluar el efecto de la propuesta didáctica del tema Polígonos y Circunferencia, así como un cuestionario para conocer la opinión de los alumnos sobre las actividades realizadas, la dificultad, el tiempo, motivación e interés, la actitud sobre la metodología y sobre el uso de *Cabri-géomètre II*.

Actividades de Geometría Dinámica

Cada práctica inicia con el objetivo de aprendizaje a lograr, seguido de las instrucciones para que el alumno construya y manipule diferentes objetos geométricos en la computadora; enseguida se debe contestar una serie de preguntas dirigidas a centrar su atención en la parte sustancial del tema y propiciar la reflexión sobre lo realizado.

La primera práctica se destinó a familiarizar al alumno con el manejo del *Cabri-géomètre II*, mediante la construcción y manipulación de algunas figuras básicas. La práctica 2, de la cual transcribimos algunas secciones a continuación, se centra el análisis de las características que los puntos y rectas notables en los diferentes tipos de triángulos.

Práctica 2. Rectas y puntos notables en el triángulo

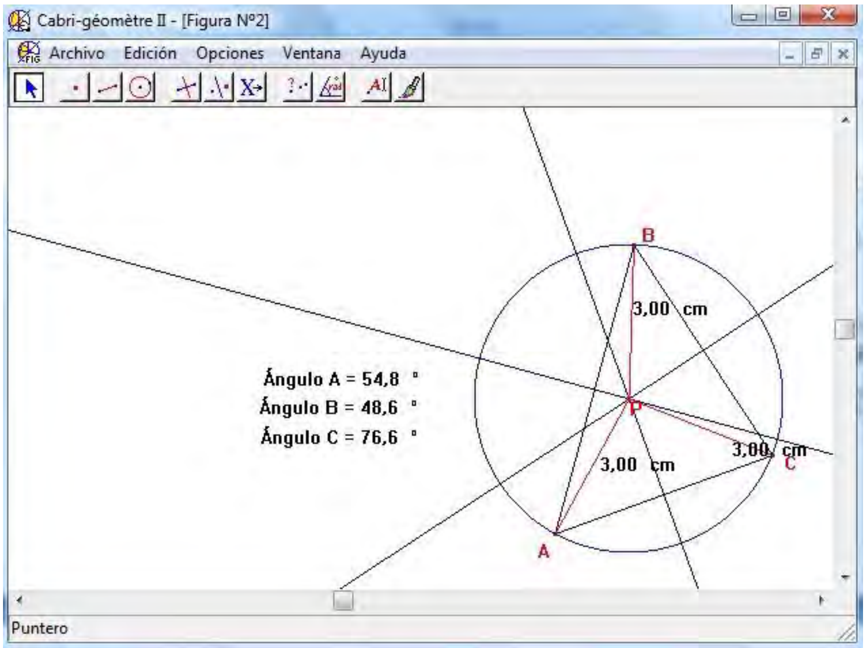
Objetivos:

- ❖ Determinar las rectas y los puntos notables en un triángulo.

- Explorar las propiedades de las alturas, medianas, mediatrices y bisectrices en un triángulo.
- Analizar y comparar las características y propiedades de las rectas y puntos notables del triángulo.

La primera actividad conduce al alumno a la construcción de un triángulo, sus mediatrices e intersección. Se pide que señalen las longitudes de los lados y la medida de sus ángulos para identificar su clasificación y la relación con la posición del circuncentro.

Figura 1. Mediatrices y Circuncentro de un triángulo.



Al finalizar la actividad, el estudiante deberá responder las siguientes preguntas:

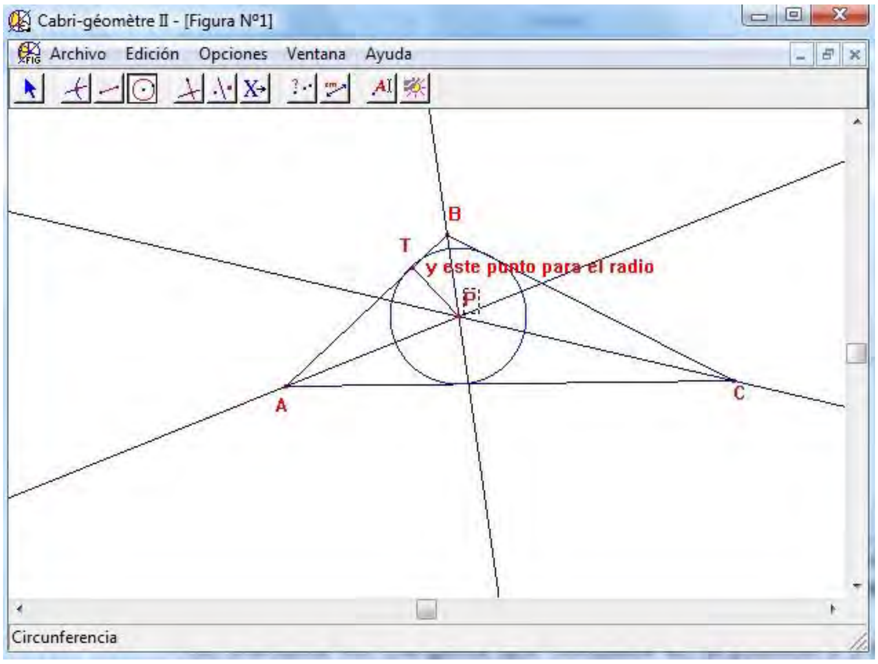
¿Para qué tipo de triángulos el circuncentro (P) permanece dentro del triángulo?

¿Para cuáles triángulos el circuncentro (P) se sitúa en uno de los lados del triángulo?

¿Para qué clase de triángulos el circuncentro (P) se localiza fuera del triángulo

Posteriormente se realizarán actividades similares para las bisectrices, medianas y alturas del triángulo y terminan con el mismo tipo de preguntas que orientan su atención a los conceptos mencionados. El cierre de este bloque de actividades consiste en identificar en qué clase de triángulos coinciden el Incentro, Circuncentro y Ortocentro.

Figura 2. Bisectrices e Incentro de un triángulo.



Al final de la práctica se deben completar las tablas como la siguiente, con la finalidad de propiciar la reflexión sobre lo realizado.

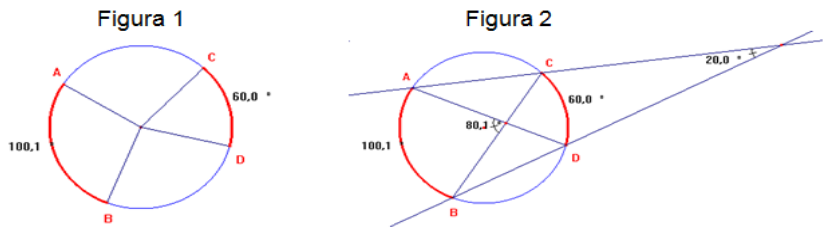
Tabla 1. Actividad de cierre: Puntos Notables en un triángulo.

Características	Siempre se encuentra en el interior del triángulo	Puede localizarse en un vértice del triángulo	Puede localizarse fuera del triángulo	Está a la misma distancia de los vértices del triángulo	Es el centro de un círculo que toca los tres lados del triángulo	Es el punto de equilibrio de un triángulo
Triángulo 1 (**circuncentro**)						
Triángulo 2 (**incentro**)						
Triángulo 3 (**baricentro**)						
Triángulo 4 (**ortocentro**)						

En la tercera de las prácticas se realizan actividades con círculos y circunferencias en las que los objetivos fueron distinguir la diferencia entre círculo y circunferencia, así como determinar la relación entre ángulos y arcos que se forman en una circunferencia; de nueva cuenta, las actividades guiaron al alumno a la construcción y comprensión de conceptos, como se muestra en la figura 3.

Figura 3. Actividad de reflexión en la práctica 3

8. Traza en una circunferencia (Botón 4) dos ángulos centrales opuestos y mídelos (botón 9). Traza los dos arcos correspondientes a los ángulos (botón 4 dando tres clics sobre la circunferencia) y ponles grosor con el botón 10. Jala la medida de los ángulos centrales a los arcos como marca la figura 1. Oculta después los segmentos de los ángulos centrales con botón 11 (Ocultar/Mostrar).
9. Traza dos segmentos (AD y CB) y etiqueta su punto de intersección como O.
10. Traza dos rectas que pasan por los puntos AC y BD, y etiqueta su punto de intersección como E. (Figura 2)
11. Mide con (botón 9) los ángulos interior (AEB) y exterior (CFD) que se forman y ponles marca de ángulo.
12. Manipula la medida de los arcos AB y CD y anota qué relación encuentras entre las medidas originales de los ángulos centrales, con las medidas del ángulo interior y exterior. (Sugerencia: Intenta primero con medidas exactas 100° y 60° o 90° y 40° por ejemplo) Anota tu conclusión:



13. **Guarda el archivo en Mis Documentos como CIRCULO. No olvides incluir tu nombre como comentario botón 10.**

Al finalizar las prácticas se aplicó un postest para verificar los logros de aprendizaje, el cual abarcó el contenido temático de la segunda unidad del curso de Matemáticas II y se clasificó en reactivos por su grado de complejidad, de acuerdo a los objetivos del programa.

Por otra parte, se aplicó a los estudiantes un cuestionario para conocer su opinión sobre las actividades realizadas, sobre la dificultad, el tiempo, motivación e interés y su actitud respecto a la metodología y el uso de Cabri. Después, en base a la escala de Likert fueron evaluados los puntajes promedio de las respuestas de opción múltiple con las opciones: 1) Totalmente de acuerdo, 2) De acuerdo, 3) No se, 4) En desacuerdo y 5) Totalmente en desacuerdo.

COBAEJ

Cuestionario Matemáticas 2
Plantel 10 San Sebastián el Grande, Jal.

Contesta honestamente el siguiente cuestionario con el fin de mejorar en lo posible el trabajo para futuras aplicaciones en otras materias.

Subraya una de las opciones dadas que mejor exprese tu opinión para cada una de las siguientes preguntas.

1. ¿Las actividades de clase te sirvieron para el aprendizaje de los temas Polígonos y Circunferencias?
1) Totalmente de acuerdo 2) De acuerdo 3) No se 4) En desacuerdo 5) Totalmente en desacuerdo

2. ¿Consideras que las prácticas con apoyo del programa Cabri te ayudaron a aprender estos temas?
1) Totalmente de acuerdo 2) De acuerdo 3) No se 4) En desacuerdo 5) Totalmente en desacuerdo

Figura 4. Formato de las preguntas en el cuestionario

Resultados

En general, se concluyó que las actividades planteadas en la propuesta didáctica resultaron ser atractivas e interesantes y definitivamente mejores en comparación con el método tradicional. El único aspecto en el que hubo indecisión fue al respecto del tiempo programado, ya que varios alumnos consideraron necesitar más tiempo del previsto para poder terminar las actividades y reflexiones.

Tabla 2. Interpretación de aspectos cualitativos.

Preguntas al respecto de juicios sobre:	Promedio en las respuestas	Interpretación
Las actividades realizadas	1.5	Totalmente de acuerdo
La dificultad de las actividades	3.8	En desacuerdo
Si el tiempo fue suficiente	2.8	Indecisión
Motivación e interés	1.7	De acuerdo
Si es mejor el método tradicional	4	En desacuerdo
El uso del Cabri	1.8	De acuerdo

En cuanto a los resultados del postest, las preguntas en las que los alumnos presentaron mayor porcentaje de aciertos se relacionaron con el tema de Rectas y puntos notables en un triángulo. Se pidió a los alumnos escribir el nombre correspondiente al centro (incentro, ortocentro, baricentro, o circuncentro) indicado en la figura con el punto P, por lo que se debía identificar el tipo de recta que se marcó gráficamente en cada triángulo (bisectriz, altura, mediana, mediatriz) y el nombre que corresponde a su intersección.

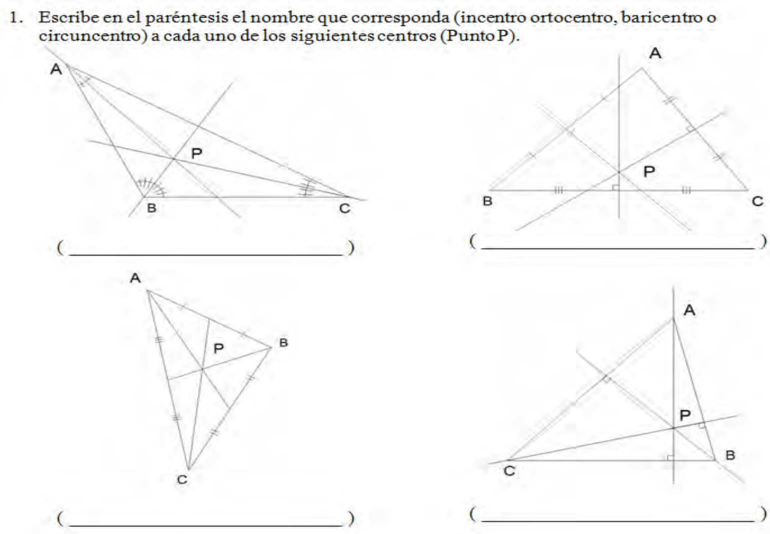


Figura 5. Pregunta en el postest.

Conclusiones

Mediante las actividades propuestas se ofreció a los alumnos la posibilidad de mejorar sus habilidades en el manejo de la computadora, de avanzar a su propio ritmo de trabajo y de conocer previamente el contenido y el objetivo de cada clase. Se notó que los alumnos atendían mejor a las indicaciones por considerar menos aburridas las matemáticas debido a la nueva dinámica experimentada. Ante esta situación, los estudiantes opinaron que les gustaría que otros profesores desarrollaran actividades semejantes para mejorar su aprendizaje.

Otra ventaja de la propuesta didáctica fue plantear una situación desafiante en los alumnos, al incluir el uso de la computadora. Cuando se trabajó en la sala de cómputo, los estudiantes se notaban concentrados y satisfechos de terminar sus actividades. Se sentían capaces de seguir aprendiendo y comentaron que les hubiera gustado poder asistir en más ocasiones a las computadoras.

El tiempo limitado para aplicar la propuesta así como las inconveniencias administrativas del uso del laboratorio de cómputo constituyeron los principales factores que impidieron ampliar la propuesta. Se deben buscar mejores condiciones para futuras aplicaciones de este proyecto.

Mediante los resultados de este estudio queda en evidencia que son muchos los factores que intervienen en el contexto educativo y, por lo tanto la investigación educativa no es una tarea fácil. Sea este trabajo un aporte que promueva el interés por continuar con la investigación sobre las acciones académicas, encaminadas al estudio del aprendizaje de los alumnos de bachillerato. Desde una perspectiva nacional, los altos índices de reprobación en el sistema educativo muestran que están muy lejos de resolver los problemas relacionados con el aprendizaje de las Matemáticas.

Referencias bibliográficas

Abrate, R., Delgado, G. I. y Pochulu, D. M. (2007). *Caracterización de las actividades de Geometría que proponen los textos de Matemática*. Consultado en febrero del 2008 en: http://www.rieoei.org/deloslectores/1290Abrate.pdf

Barroso R. y Gavilán J.M. (2003). *Resolución de problemas con Cabri II.* Consultado el 8 de marzo de 2008 en www.uv.es/Angel.Gutierrez/aprengeom/archivos2/Barroso03b.pdf

Driscoll, M. P. (1993). *Psychology of Learning for Instruction*. Needham Heights, MA: Allyn and Bacon.

Moreno, L. y Waldegg, G. (1992). Constructivismo y Educación Matemática. *Educación Matemática. 4* (2), 7-15.

Piaget, J. (1996). *Seis Estudios de Psicología*. México: Ed. Ariel.

Secretaría de Educación Pública (s/f). *Programa de Matemáticas II de la Dirección General de Bachillerato (DGB)*. Consultado el 2 de febrero de 2008 en: http://www.dgb.sep.gob.mx/

EL USO DE MÚLTIPLES REPRESENTACIONES Y LA INTERPRETACIÓN GLOBAL

Alma Alicia Benítez Pérez, Martha Leticia García Rodríguez
CECyT 11 Wilfrido Massieu- IPN México
ESIME-IPN
abenitez@ipn.mx, martha.garcia@gmail.com

Resumen. El presente trabajo plantea la posibilidad de impulsar la Interpretación Global, en diversas representaciones para desarrollar tratamientos que permitan fomentar la exploración de sus contenidos. La experiencia se llevó a cabo con alumnos que cursaban la asignatura de álgebra del nivel medio superior, cuyo objetivo fue identificar las conjeturas y procesos cognitivos que el alumno desarrolla cuando se ha tenido la vivencia de explorar tratamientos cualitativos y cuantitativos en múltiples representaciones. Los resultados muestran la identificación de patrones cuando se plantean situaciones familiares en el alumno, así como el anclaje del contexto para algunos estudiantes y la descontextualización para otros.

Palabras clave: múltiples representaciones, interpretación global, tratamiento cualitativo y cuantitativo

Abstract. This work focuses on the possibility of promoting and strengthening the Global Interpretation in various representations to develop treatments that allow exploration of their content. The experience was implemented with students of high school in the course of algebra, whose objective was to identify the conjectures and cognitive processes when the students have had the experience of exploring qualitative and quantitative treatments in multiple representations. In terms of discovery there have been identified patterns in family situations for the student, as well as the anchorage in the context and the des-contextualization for others.

Key words: representations multiple, global interpretation, qualitative and quantitative treatment

Introducción

Los programas de estudio del nivel medio superior, mencionan la necesidad de explorar múltiples representaciones, con la finalidad de que el alumno desarrolle estrategias que le permitan enfrentar situaciones no rutinarias, para ello, es necesario explorar diversas representaciones empleando procedimientos que permitan evidenciar su contenido. La Interpretación Global es una vía que beneficia la exploración de las representaciones, desde una visión global, empleando tratamientos cualitativos en las representaciones gráfica, numérica y algebraica, para establecer conexiones entre ellas y la posibilidad de su articulación. Esta propuesta se implementó a un grupo del nivel medio superior que cursaban la asignatura de álgebra (15 a 16 años), en actividades que tomaron en cuenta la vía de interpretación global para polinomios cuadrático y cúbico, permitiendo analizar las estrategias que el alumno emplea en situaciones que demandan la construcción de la expresión algebraica de una gráfica (recta, parábola y cúbica). El presente trabajo expone la posibilidad de explorar múltiples representaciones a través de tratamientos cualitativo principalmente y tratamientos cuantitativos, que permitan en el alumno fortalecer las funciones cognitiva de tratamiento y conversión.

Marco teórico

Desde la perspectiva que expone Duval (2000), la visualización "Es producir una representación que, en ausencia de toda percepción visual de los objetos representados, permita observarlos como si estuviera realmente delante de los ojos", se considera entonces que la visualización se basa sobre la producción de una representación semiótica, donde se identifique de manera directa lo que está representado, de tal manera "ver" en matemáticas implica la identificación de las relaciones o la organización de relaciones entre las unidades representacionales que constituyen a una representación semiótica.

Para reconocer las unidades representacionales, es necesaria la exploración detallada que permita producir construcciones de acuerdo con las propiedades o reglas de la representación. Las representaciones gráfica y numérica son un de tipo de visualización en matemáticas, particularmente necesarias en la investigación a realizar. Ambas representaciones poseen organizaciones visuales bi-dimensionales; el cuadriculado del plano en líneas para la gráfica y la distribución en columnas para la tabla. La representación gráfica posee sus propias leyes de organización, y cuyo funcionamiento se basa en la relación de dos figuras; figura fondo referida al plano cartesiano y figura-forma al trazo. Duval (1988) menciona la importancia de realizar el tratamiento denominado Interpretación Global, el cual permitan identificar los distintos valores visuales de la forma y la orientación de la gráfica, para establecer relaciones con los valores categóricos de la expresión algebraica. Este tratamiento es esencialmente cualitativo, el cual fortalecer la aprehensión global del contenido de la representación gráfica. Además Duval (2000) considera que las condiciones cognitivas internas de un sujeto para lograr la aprehensión del concepto, se enfocan en el desarrollo y fortalecimiento de "La Arquitectura Cognitiva", a través de una organización sólida de diferentes sistemas semióticos. Ello implica la necesidad de considerar la actividad cognitiva de Conversión, una tarea fundamental en el proceso para lograr la aprehensión del objeto, y por consecuencia el fortalecimiento de la Arquitectura Cognitiva.

Por su parte Parnafes & DiSessa (2004) indican que la reflexión de los estudiantes esta ligada a la representación y al contexto que emplean, además las autoras consideran que cada representación resalta un aspecto del concepto y que cuando los estudiantes emplean varias representaciones desarrollan un entendimiento más flexible del concepto. Parnafes & DiSessa se basaron en la noción del efecto representacional para examinar la idea de que particularmente diferentes representaciones apoyan y fortalecen diferentes procesos cognitiva, en particular, los distintos tipos de razonamiento.

Particularmente, Benítez (2009) menciona la relevancia que adquieren las representaciones en la resolución de eventos contextualizados, ya que facilita al alumno dar sentido a la información que le brinda el evento contextualizado y opera hasta dar respuesta a la exigencia solicitada, además considera que la primera representación con la cual se inicia el proceso de solución es decisiva, ya que se presenta entre la percepción del problema y el proceso de resolución, mencionado que la Interpretación Global permite analizar el contenido de las representaciones de polinomios (parábola y cúbica) para establecer las modificaciones en la expresión algebraica e identificar su correspondiente variable visual en la gráfica.

La experiencia que aquí se presenta consideró un acercamiento con las distintas áreas del saber para incorporar al trabajo el concepto de función, con la finalidad de que el estudiante analice e interprete el fenómeno desde distintas perspectivas, permitiendo así el uso de diversas representaciones (numérica, algebraica, gráfica, dibujos, lenguaje natural), para llevar cabo tratamientos que beneficien la identificación del contenido, permitiendo su interpretación y en consecuencia la conversión a otra representación (Duval, 2002). Ello implica la necesidad de considerar la actividad cognitiva de Conversión, una tarea fundamental en el proceso para lograr la aprehensión del objeto, y por consecuencia el fortalecimiento de la Arquitectura Cognitiva, lo cual contribuye a crear y desarrollar habilidades en el estudiante para enfrentar nuevos retos en su formación.

Exploración y Análisis de las Actividades Cognitivas

La Interpretación Global (Duval, 1988), permite explorar las representaciones a través de las actividades cognitivas de tratamiento y conversión, para ello se emplearon las representaciones; gráfica, numérica, textual y algebraica en polinomios (Figura 1).

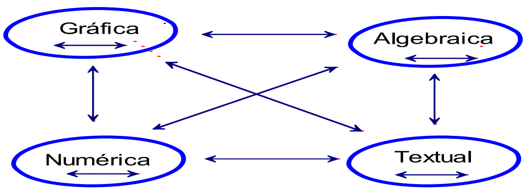


Figura 1. Empleo de Múltiples Representaciones

El diagrama muestra el tratamiento que se realizó en cada representación (flechas bidireccionales), así como la conversión entre los registros de representación (flechas bidireccionales), con la finalidad de establecer sus conexiones para su articulación.

Por lo que la Interpretación Global permite llevar a cabo las funciones cognitivas a través de la modificación de la expresión algebraica para identificar sus correspondientes variables visuales en la gráfica, lo que contribuyó asociar una variable visual con una variable categórica en la expresión algebraica, favoreciendo la articulación entre dichas variables.

El cuadro 1 muestra el tratamiento y la conversión del polinomio de segundo grado empleando tratamientos cualitativos.

Variables Visuales	Valores Visuales	Valores Categóricos
Concavidad del Trazo	El trazo abre hacia arriba El traza abre hacia abajo	a>0 a < 0
Posición del trazo respecto a su eje de simetría	El trazo se acerca a su eje de simetría El trazo se aleja a su eje de simetría	a>1 a < 1
Desplazamiento del trazo que cruza por el origen	El trazo se desplaza a la izquierda del eje vertical El trazo se desplaza a la izquierda del eje vertical	b>0 b <0
Posición del trazo respecto a la recta corresponde al término lineal, teniendo como condición el trazo y la recta que cruza el origen	El desplazamiento del trazo depende de la recta que pasa por el origen y tiene una partición simétrica El desplazamiento del trazo depende de la recta que pasa por el origen y forma con el eje horizontal un ángulo menor que el formado con el eje vertical El desplazamiento del trazo depende de la recta que pasa por el origen y forma con el eje horizontal un ángulo mayor que el formado con el vertical	b=1 0 <b <1 b>1
Posición del trazo respecto al origen del eje vertical	El trazo corta el eje vertical por arriba del origen El trazo corta el eje vertical por abajo del origen El trazo corta el eje vertical por el origen	+ constante -constante

Cuadro 1 Interpretación Global de las propiedades de la Parábola

La identificación de las variables visuales y categóricas, permiten mostrar el comportamiento del polinomio para identificar las características visuales e interpretar la información desde la perspectiva global.

Metodología

El objetivo del presente estudio fue documentar las funciones cognitivos que el estudiante desarrolla cuando ha explorado al menos dos representaciones. Esta investigación, se ubica en un paradigma de investigación cualitativo. Las ideas desarrolladas en los referentes teóricos, sirvieron como ejes para diseñar y aplicar actividades, en las que los estudiantes identificaron, interpretaron y analizaron el contenido de múltiples representaciones en Contextos Simulados, empleando la Interpretación Global como estrategia principal.

La observación del estudio se llevó a cabo durante un semestre escolar (18 semanas) para detectar las cualidades del fenómeno de estudios. La investigación se desarrollo en el CECyT 11 de IPN, cabe menciona que en este centro de estudio, se estaba implementando la metodología del "Proyecto Aula" de manera interdisciplinaria.

Las observaciones en el estudio se desarrollaron en dos niveles: global y específico. El nivel global tuvo su mayor interés en la identificación de los aspectos más notorios de proceso de interacción que desarrollaron los estudiantes en los diferentes contextos. A nivel específico la observación se dirigió a examinar con mayor detalle los procesos que lleva a cabo cuando se les solicitaba enfrentar una situación simulada para emplear las funciones cognitivas e identificar la contenido en las diferentes representaciones.

La triangulación de la información se llevó a cabo desde distintas perspectivas para fortalecer la credibilidad en los resultados e interpretación del estudio. Lo anterior se llevó a cabo a través de identificar los hallazgos que se encontraron en la fuente A (reporte escrito individuales), fuente B (discusión grupal), fuente C (reportes escrito de equipos, fuente D (tareas extraclase) y también puedo corroborarse con la fuente E (observaciones en clase), permitiendo comparar información proveniente de diferentes escenarios.

Participantes

La experiencia educativa se llevó a cabo con un grupo de 45 alumnos, del nivel medio superior (C.E.C.yT. 11) que cursaban la asignatura de álgebra, y cuya duración fue de 18 semanas. Las edades de los alumnos fluctuaban entre 15-16 años. La escuela donde se desarrollo la investigación, se trabaja a través de la metodología basada en proyectos ("Proyecto de Aula"), cuyo objetivo consistió en la búsqueda de solucionar problemas reales. En el salón de clase se diseñaron tareas que impulsaron las funciones cognitivas en diferentes representaciones empleando problemas, para lo cual se organizo al grupo en equipos de 4 a 5 integrantes, formando un total de 6 equipos por grupo. Se entregó al inicio de la sesión una actividad diseñada por el profesor, para trabajarla de manera colectiva, mencionando que un integrante del equipo sería el encargado de recolectar toda la información que se obtuviera durante el proceso de solución, mientras el profesor participaba con los equipos como espectador y para proporcionar información.

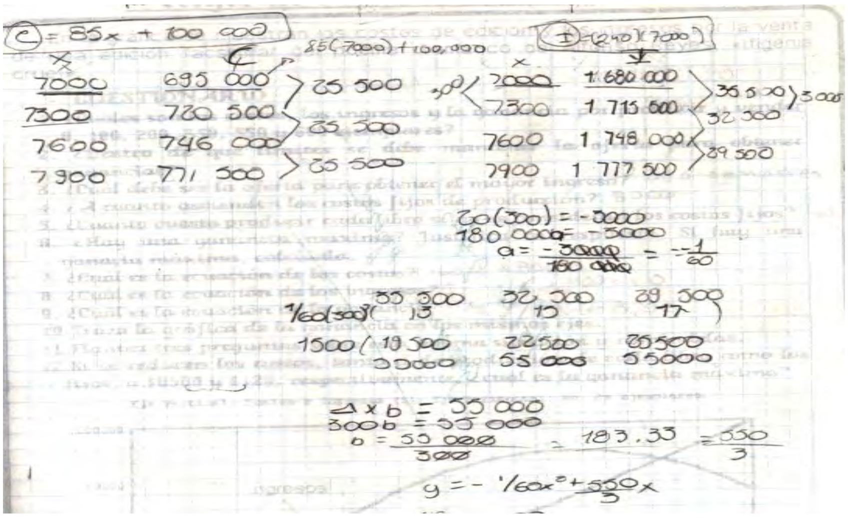
Análisis de datos

Los elementos que guían el análisis son:

- Identificar las funciones cognitivas (tratamiento y conversión) empleado para explorar el contenido de las representaciones en contextos simulados a través de la Interpretación Global.
- Identificar los procesos cognitivos que el alumno desarrolla cuando se ha explorado la Interpretación Global.

El análisis de las videograbaciones, el trabajo escrito por los equipos, así como las notas del entrevistador, muestran las diversas estrategias que los equipos emplearon para explorar las representaciones (numérica, gráfica, textual y algebraica), mencionando las siguientes:

Los equipos interpretaron el siguiente problema: Una compañía de discos estima que pondrá vender siete mil álbumes de una versión a $240 cada álbum. Por cada reducción de $5 en el precio por álbum, calcula que venderá 300 álbumes más A la compañía cada álbumes le cuesta $85 y sus costos fijos son de $ 100,000 en el período de producción. Determina el número de álbumes que darán a la compañía la máxima ganancia?. A partir de su lectura, construyeron la tabla de valores efectuando el tratamiento de la información para determinar los costos y el ingreso de los álbumes. El equipo determina las variables "x" y "y" sin mencionar su significado, obteniendo diversos valores para cada una de las variables, el tratamiento de las diferencias finitas se aplicó en cada una de las variables, permitiendo determinar el comportamiento lineal para los costos, ya que el comportamiento de la primera diferencia es constante, mientras que el comportamiento para el ingreso es parabólico dado que la segunda diferencia es constante. Respecto al tratamiento desarrollado, los alumnos construyen el modelo matemático para los costos $C(x) = 85x + 100000$ explorando el comportamiento de las diferencias finitas, mientras que la construcción de la expresión algebraica para la inversión ($y = a\,x^2 + bx + c$) los estudiantes determinan el valor del parámetro "**a**" empleando la expresión $2a(\Delta x)^2 = (\Delta(\Delta y))$ para determinar el valor del término cuadrático, mientras que el valor numérico del coeficiente "**b**" emplea la secuencia de números de la primera serie de sustracciones, que se identifican en la tabla de valores para el polinomio de segundo grado $(\Delta x)(b) = 55000$, el equipo concluye el modelo matemático $y = -\frac{1}{60}x^2 + \frac{550}{3}x$ e ignoran el termino independiente. La siguiente figura muestra el desarrollo expuesto por el equipo.



Modelo Matemático desarrollado por los estudiantes

Integrando los aspectos conceptuales, el equipo reconoce y da significado a los conceptos en la resolución de problemas, ya que determina las ecuaciones algebraicas que modelan la situación, empleando la Interpretación Global a través de tratamientos cuantitativos en la representación numérica y algebraica, ya que de manera coordinada establece las conexiones entre ambas representaciones para construir el modelo dando significado a las variables que intervienen en el fenómeno.

Otro aspecto relevante fue que el equipo empleó durante su desarrollo, fue el estudio de la escala, el equipo identificó la escala cuando exploró el contenido de la representación numérica, a través de las diferencias. Esto se expresó cuando utilizaron la expresión

$$2a(\Delta x)^2 = \Delta(\Delta y)$$

$$\downarrow$$

Graduación eje "x"

Ya que identificaron las diferencias en la tabla numérica obteniendo el siguiente resultado;

2**a**(300) = - 3000

Lo que permitió identificar el valor del parámetro **a = - 1/60,** así como identificar el valor del parámetro b, también afectado por la escala.

$$\Delta x\, \boldsymbol{b} = \Delta(\Delta y)$$

$$\downarrow$$

Graduación eje x

$$300\, \boldsymbol{b} = 55000$$

El equipo empleó la interpretación global básicamente en la representación numérica, permitiendo determinar los valores numéricos del término cuadrático y lineal, empleando tratamientos cuantitativos.

Discusión

Las funciones cognitivos que los estudiantes desarrollaron durante la experiencia se enfocaron en la exploración de las representaciones; texto-numérica-algebraica y texto-numérica-gráfica, para interpretar el contenido en el contexto. Los primeros acercamientos se desarrollaron a través de la construcción de tablas de valores, para identificar las interpretaciones que realizan los alumnos del contexto, evidenciando las variables y constantes, sin embargo, las variables identificadas están en un contexto matemático y no acorde con el evento expuesto. Mientras que para otros equipos la identificación de las variables que expone el contexto y desarrolla el tratamiento de la información en el contexto, lo cual muestra la influencia que adquiere la primera representación por ser la que inicia el proceso de resolución del problema (Benítez, 2009). El tratamiento que se aplicó en las representaciones fue cuantitativo y/o cualitativo, la cual se interpretó de manera puntual y/o global de acuerdo con las características particulares del contenido.

Los equipos fueron consistentes con las estrategias empleadas, por ejemplo, los equipos basaron su trabajo explorando la representación numérica con tratamientos cualitativos, cuya información se interpretó de manera global, identificando secuencias numéricas que les permitió identificar la variación de los valores obtenidos para determinar el valor de los coeficientes que constituyen la expresión algebraica, lo que codujo al establecimiento de relaciones con la representación algebraica para construir la expresión algebraica que representa el comportamiento de las parejas ordenadas en la tabla numérica. Mientras que para otros la identificación de las variables en términos de x y y, para exponer veinte a treinta datos, que representan el comportamiento del costo como del ingreso, mismos que se colocaron en la representación gráfica para mostrar el comportamiento lineal y parabólico, respectivamente, no obstante los datos no fueron explorados para determinar un tratamiento que permitiera la construcción de una expresión algebraica que se ajustara a la situación planteada.

La Interpretación Global como lo menciona Duval (1988) y Benítez (2009), benefició la identificación de la información a través de los tratamientos empleados en las representaciones, contribuyendo a: determinar el tipo de curva, analizar los términos que integran la expresión algebraica, explorar la escala para analizar su influencia en el trazo y tabla numérica, establecer continuamente relaciones con otras representaciones, validar resultados, identificar el valor numérico de los coeficientes lineal y cuadrático para los polinomios de grado uno y dos respectivamente, plantear conjeturas, proponer conjeturas que benefician el desarrollo de la situación y la justificación de afirmaciones.

Conclusiones

Durante el diseño de las actividades es fundamental favorecer el pensamiento flexible, pues fue evidente, la tendencia a quedar sujetos a los contextos, en los cuales se presentaban las ideas matemáticas o debido a la familiaridad de los tratamientos en la exploración de las representaciones que los alumnos descontextualizan sin considerar el contexto.

Las representaciones empleadas fueron; textual, gráfica, numérica y algebraica, cuyo tratamiento fue de tipo cuantitativo y cualitativo a través de la Interpretación Global.

El desarrollo y fortalecimiento de las funciones cognitivas benefició en el estudiante la posibilidad llevar a cabo tratamientos (cualitativos y/o cuantitativo) para identificar su contenido y establecer conexiones entre las representaciones.

Las funciones cognitivos identificados durante la experiencia evidenciaron el empleo de al menos dos representaciones y tratamientos cualitativos como cuantitativos, en algunos casos se lograron establecer conexiones y en otros los estudiantes, se vieron limitados por los tratamientos aplicados.

Los alumnos muestran patrones cuando se exploran las actividades, lo cual evidencia la influencia que presenta la familiaridad de los tratamientos.

Agradecimiento: A la Secretaria Investigación y Posgrado (SIP) del Instituto Politécnico Nacional, por el apoyo a las investigaciones con número de registro 20110397 y 20111060.

Referencias bibliográficas

Benítez, A. (2009). Estudio de la Primera Representación Gráfica de las Ecuaciones Algebraicas en Contexto. *Innovación Educativa 9 (1)*, 41-50

Duval, R. (1988). "Graphiques et equations: l'Articulation de deux registres". *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives* 1. IREM Strasbourg.

Duval, R. (2000). *Basic Issues for Research in Mathematics Education*, in Proceedings of the 24^{nd} Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. I, 55-69.

Duval R. (2002). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In F. Hitt (Ed.), *Representations and mathematics visualization.* (pp. 311-335). North American Chapter of PME: México: Cinvestav-IPN

Parnafes, O. & diSessa, A. A. (2004). Relations between patterns of reasoning and computational representations. *International Journal of Computers for the Mathematics Learning:* 9(3), 251-280.

EL USO DE MÚLTIPLES REPRESENTACIONES COMO UNA ESTRATEGIA PARA EL APRENDIZAJE DE CONCEPTOS MATEMÁTICOS

Martha Leticia García Rodríguez, Alma Alicia Benítez Pérez
ESIME Unidad Zacatenco-IPN México
CECyT 11 Wilfrido Massieu- IPN
martha.garcia@gmail.com, abenitez@ipn.mx

Resumen. En este documento se analiza el trabajo de diez estudiantes en una actividad que tuvo como propósito conocer la forma en que el manejo de múltiples representaciones, utilizando la hoja electrónica de cálculo, contribuye para su reflexión sobre el comportamiento de una función. Se asume que la habilidad para representar es una competencia esencial para el aprendizaje de la matemática. Los referentes teóricos relacionan las representaciones utilizadas con el tipo de razonamiento de los estudiantes. Los resultados muestran que los estudiantes tienen mayor familiaridad con la representación numérica y la utilidad de iniciar la exploración de una actividad simplificándola.

Palabras clave: representaciones, excel, función, cálculo

Abstract. In this document we analyzed the ways students related two or more representations when they use the spreadsheet in the problem solving process. Representations contribute their reflection on the function performance. We assume that the ability to represent is an essential competency for mathematics learning. The theoretical framework relate to representations theory. The findings obtained make it possible to assert that students show greater familiarity with the numerical representation and the usefulness of proposing a simplification of the original problem.

Key words: representations, spreadsheet, function, calculus

Introducción

La primera década del siglo XXI se caracterizó por el uso de tecnologías digitales y por el manejo de una gran cantidad de información. Para adaptarse a estos cambios, los individuos requieren desarrollar habilidades que les ayuden a manejar en forma eficiente, las Tecnologías de Información y Comunicación [TIC] así como a analizar y utilizar la información disponible, tanto en su vida cotidiana como en su actividad profesional. Los sistemas educativos de diferentes países conscientes de estas necesidades, están modificado sus modelos académicos, el eje de estas reformas, es el concepto de competencia.

En México, se han implementado reformas en los diferentes niveles educativos, la Secretaría de Educación Pública [SEP] puso en marcha reformas en el Nivel Medio Superior [NMS] atendiendo: a) al desarrollo de habilidades y conocimientos básicos o competencias; b) a la definición de los elementos de formación básica comunes a todos los programas de un subsistema; c) a la flexibilidad y enriquecimiento del currículo y d) al establecimiento de programas y prácticas docentes centradas en el aprendizaje e impulsó la creación del Sistema Nacional de bachillerato, acuerdo No. 442 publicado en el Diario oficial de la Federación el 26 de septiembre de 2008. En el nivel superior no han sido menores los esfuerzos, los académicos han reflexionado sobre los retos educativos de este siglo y la transformación de sus prácticas educativas para generar un espacio que ofrezca a la población estudiantil que atienden, estrategias y actividades que promuevan su aprendizaje en los diferentes ámbitos de la ciencia y la tecnología para su desarrollo profesional. En esta dirección en el Instituto Politécnico Nacional [IPN] se ha implementado un modelo académico que pone énfasis en el aprendizaje del estudiante de una forma integral, con una gran preocupación por la calidad científica, tecnológica y humanística en la formación de los egresados; que combine en forma equilibrada el desarrollo de conocimientos, habilidades, actitudes y valores y que otorgue importancia a las metodologías de enseñanza innovadoras que incorporen el uso de las TIC (Un Nuevo modelos Educativo para el IPN, 2004, p.69).

Los principios expresados en el Modelo Educativo del IPN están en concomitancia con los que emanan de los trabajos de La Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico [OCDE], en los que se señala que el capital humano es un factor clave para el crecimiento económico de una nación, sin menoscabo de su importancia en los ámbitos de salud y de inclusión social. Po otra parte, en el proyecto PISA se estableció una definición del concepto de competencia como la capacidad individual para identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo actual, emitir juicios fundamentados y ser capaz de usarlas en las necesidades de la vida personal, laboral y social, actual y futura, como un ciudadano constructivo, comprometido y capaz de razonar (ISEI-IVEI, 2004). En relación con la matemática, el estudio PISA establece como competencias matemáticas: a) pensar y razonar; b) argumentar; c) comunicar; d) modelar; e) plantear y resolver problemas; f) representar y, g) utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones (ISEI-IVEI, 2004). Las ideas anteriores relacionadas con las competencias matemáticas que se sugiere promover en los estudiantes durante su vida académica, motivaron el desarrollo de dos investigaciones en el IPN (No. 20111060 y No. 20110397) que tuvieron como objetivos: Identificar y analizar las competencias matemáticas generales y específicas que requieren los estudiantes de las carreras de ingeniería y de bachillerato en el área de ciencias exactas y que incorporan las TIC, y proponer actividades para el desarrollo de esas competencias matemáticas.

En este documento se analiza el trabajo de un grupo de estudiantes en una de las actividades diseñadas que tuvo como propósito conocer la forma en que el manejo de múltiples representaciones utilizando la hoja electrónica de cálculo, contribuye para que los estudiantes reflexionen sobre el comportamiento de una función (García y Benítez, 2010).

Elementos teóricos relacionados con las representaciones

En este trabajo se asume que la habilidad para representar es una competencia esencial para el aprendizaje de la matemática. Las representaciones que utilizan los estudiantes, están relacionadas con el tipo de razonamiento que tienen; Parnafes & diSessa, (2004) señalan que la reflexión de los estudiantes está estrechamente relacionada con la representación externa y el contexto en el que se emplea, cada representación resalta u oculta aspectos de un concepto, y el uso de varias representaciones favorece una comprensión más flexible de los conceptos matemáticos (p. 251). Otro autor que se refiere al papel de las representaciones para el aprendizaje de la matemática es Ainsworth (2006), para él las representaciones externas también juegan un papel primordial, señala que después de que un estudiante entiende en qué forma se encuentra codificada la información en una representación, y cuál es su relación con el dominio que representa, los estudiantes eligen la que les resulta más adecuada para efectuar una tarea o resolver un problema, esta elección se convierte en un ejercicio cognitivo.

Las tecnologías digitales y el manejo de distintas representaciones

Retomando las ideas de Parnafes & diSessa (2004) quienes señalan la relación que establecen entre la representación utilizada y el tipo de razonamiento de los estudiantes y de Ainsworth (2006) de la elección de una representación que consideran conveniente para abordar un problema, es posible inferir que el uso de diferentes representaciones enriquece la comprensión de los conceptos matemáticos y apoya el trabajo de los estudiantes durante el proceso de resolución de un problema, lo que revela la importancia de diseñar actividades que promuevan el empleo y relación de múltiples representaciones de los conceptos matemáticos involucrados. En esta ardua tarea las tecnologías digitales, como la computadora, los equipos multimedia de CDROM, las redes locales, el Internet, etc. pueden convertirse en auxiliares en el trabajo de los estudiantes; para relacionar internamente representaciones externas y otorgar significado a las representaciones utilizadas. Existe una amplia variedad de tecnologías digitales, en este documento se hará referencia a Excel. Wilson, Ainley & Bills (2004) la consideran una herramienta de gran utilidad en actividades de exploración, un medio para que los estudiantes relacionen representaciones, un auxiliar para realizar generalizaciones para lograr una mejor comprensión del comportamiento de la relación entre las variables de una función.

Las ideas planteadas en los párrafos anteriores fueron el punto de partida para el diseño e implementación de la actividad que se reporte en este documento.

Metodología

La metodología utilizada en la investigación que aquí se reporta es de tipo cualitativo, consistió en analizar el trabajo realizado por el grupo de 10 estudiantes durante dos sesiones.

Sujetos e instrumentos

Participaron 10 estudiantes provenientes de un bachillerato tecnológico, con edades de 18 y 19 años, sus antecedentes académicos eran Álgebra, Trigonometría, Geometría Analítica y Cálculo Diferencial e Integral. Los estudiantes cursaban la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral del primer semestre de una carrera de ingeniería.

Los instrumentos empleados durante la recogida de datos fueron:

- Reportes escritos elaborados en forma individual.
- Reportes escritos elaborados por cada pareja de estudiantes.
- Reportes elaborados por el profesor-investigador.
- Archivos de Excel guardados en discos flexibles elaborados por los estudiantes en forma individual y en pareja.

Construcción y organización de las sesiones

Los elementos que guían el análisis de la investigación realizada con apoyo de Excel son:

1. Identificar la forma en que los estudiantes representan la situación planteada.
2. Identificar la forma en que relacionan las representaciones empleadas.
3. Documentar la forma en que analizan el comportamiento de la función que representa el fenómeno.

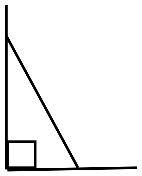
Conceptos matemáticos involucrados

a) Teorema de Pitágoras; b) Dominio de una función; c) Inecuaciones; d) Gráfica de funciones; e) Propiedades de los triángulos rectángulos y f) Ecuación cartesiana de una recta

Actividad de la escalera

La actividad de la escalera se diseñó a partir de un problema propuesto por Zill & Wright (2010, p.58) en el que se tiene una escalera recargada en una pared y se solicitaba expresar la longitud de la escalera en términos de la distancia entre la base de la pared y la base de la escalera. El problema se modificó para incluirlo en la actividad de la escalera, en ella se plantea la siguiente pregunta ¿Cuál es la altura máxima que puede alcanzar una escalera al deslizarla sobre el piso y recargarla en una pared?

Considere que junto a la pared se encuentra una caja cúbica de 1 m de arista (Figura 1).



Longitud de la escalera 5 m

Figura 1. Vista lateral de la escalera y la caja

Para identificar el análisis que los estudiantes realizan de la función que representa la situación se propusieron las siguientes instrucciones y preguntas:

- Dibuja algunas posibles posiciones en las que se puede colocar la escalera
- ¿Qué datos del enunciado de la situación que se plantea en la actividad consideras necesarios para llegar a la solución?
- ¿Cuáles son las variables que identificas en los datos?
- ¿Puedes establecer alguna relación entre estas variables? Escribe la relación.
- ¿Hasta este momento has tomado en cuenta la caja? Explica en qué forma

Análisis de datos

El trabajo de los estudiantes se dividió en tres etapas que se describen a continuación.

Análisis de la forma en que representan y explican la situación planteada

En relación con la primera instrucción los estudiantes dibujaron en una hoja de papel diferentes posiciones en que podía ser colocada la escalera. Los registros escritos y las grabaciones muestran que esta instrucción ayudó para que los estudiantes comprendieran el significado de *altura máxima*, como se observa en las Figuras 2 y 3.

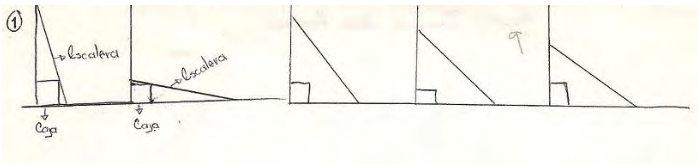


Figura 2. Trabajo inicial de José

Figura 3. Trabajo inicial de Dulce

Los dibujos de los estudiantes sugerían que habían comprendido la situación, pero sus respuestas mostraron que tuvieron dificultades para identificar las variables y constantes y para establecer relaciones entre ellas, como se observa en la Figura 4.

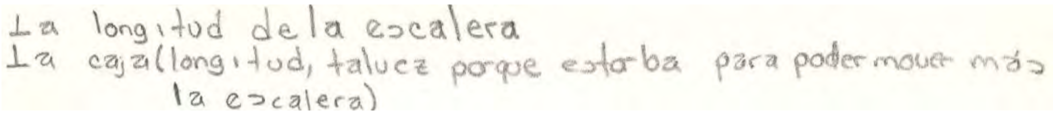

La longitud de la escalera
La caja(longitud, taluez porque estorba para poder mover más la escalera)

Figura 4. Trabajo de Dulce

Esto motivó al investigador para sugerir modificar la situación original, es decir, realizar una simplificación eliminando algún dato, los estudiantes mencionaron que sería más simple si se eliminara la caja. La sesión concluyó con esta propuesta.

Exploración numérica y gráfica de un problema más simple

En la siguiente sesión se plantearon nuevas instrucciones:

a) ¿Puedes escribir una expresión algebraica que relacione los datos, sin considerar la caja?

b) Llena la Tabla 1 con algunos valores de las alturas y distancias horizontales, que se puedan obtener al mover la escalera sobre el piso cuando uno de sus extremos se encuentra en la pared.

Los estudiantes propusieron utilizar el Teorema de Pitágoras para relacionar la altura que alcanza la escalera, la distancia de la base de la escalera a la pared y la longitud constante de la escalera, al parecer los dibujos que habían realizado en la sesión anterior les sugirieron la conveniencia de utilizar el Teorema de Pitágoras. Posteriormente identificaron que la altura que alcanza la escalera podía ser despejada de esta relación. Esto permitió que propusieran una relación funcional para calcular la altura que alcanza la escalera, a partir del Teorema de Pitágoras.

Tabla I. Relación entre la distancia y la altura de la escalera

h Altura que alcanza la escalera	d Distancia de la escalera a la pared (horizontal)	L Verificación del teorema de Pitágoras con valores de h y d

El primer acercamiento de los estudiantes con Excel fue para concentrar los resultados que habían obtenido con la calculadora. En esta etapa se explicó a los estudiantes la conveniencia de usar Excel para el manejo numérico de funciones, ya que los datos de una columna de la hoja de cálculo están relacionados con otras columnas mediante una relación funcional. En la Figura 5 se observa la elaboración, con Excel, de una tabla y una gráfica.

Una vez elaboradas la tabla y la gráfica, se les sugirió que analizaran ambas para motivar la relación entre los datos de las dos representaciones.

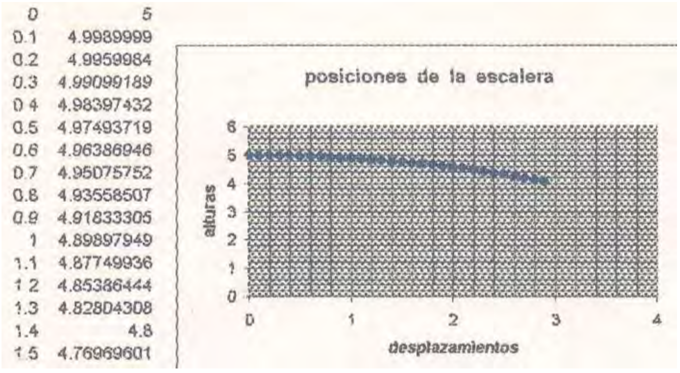


Figura 4. Trabajo de José con Excel

Exploración numérica y gráfica del problema original.

El análisis de la situación original fue dirigido por el investigador, García y Benítez (2010) analizan la forma en que es posible orientar la reflexión de los estudiantes para considerar la situación original. Sugieren identificar la escalera con una recta que corta a los ejes x; y en los puntos (0,h) y (d,0). La ecuación de esta recta es:

$$y-h=-\frac{h}{d}x \qquad (1)$$

El extremo superior derecho de la caja tiene coordenadas P(1,1). Para garantizar que el punto (1,1) quede por debajo de la recta, se requiere que el punto de la recta (1,y) cumpla y>1.

$$1\le y=-\frac{h}{d}(1)+h \qquad (2)$$

$$1\le y=h\,(\frac{-1+d}{d}) \qquad (3)$$

$$\frac{d}{d-1}\le h \qquad (4)$$

La gráfica de la función $\frac{d}{d-1}=h$ se traza en el mismo plano que la gráfica del problema auxiliar y representa la altura (h) que alcanza la escalera en función del desplazamiento horizontal (d) considerando que el extremo superior derecho de la caja se encuentra por debajo o tocando a la escalera. Es importante que los estudiantes reflexionen en el significado de la inecuación $\frac{d}{d-1}\le h$ como una región del plano. Esta región y la gráfica de

$h=\sqrt{25-d^2}$ se cortan en dos puntos, la ordenada de uno de ellos corresponde a la altura máxima buscada.

Conclusiones

En el trabajo de los estudiantes se identifican avances y retrocesos, atribuidos a la familiaridad del estudiante con la representación empleada. En las primeras exploraciones, José y Dulce representan diferentes posiciones que puede tener la escalera de la escalera y dibujan también la caja, lo que sugiere que habían comprendido la situación planteada. Sin embargo en su respuesta, se observa que en un principio no identificaron la necesidad de conocer la distancia de la base de la escalera a la pared ni la distancia del piso al extremo superior de la escalera, al parecer los estudiantes, al cambiar de representación, tuvieron problemas con el manejo de la información.

El trabajo realizado por José y Dulce proporciona evidencia de que el manejo de múltiples representaciones fortalece el aprendizaje de un concepto, lo que coincide con lo que afirman Parnafes & diSessa, (2004), los dibujos de las posiciones de la escalera les sugirieron la posibilidad de utilizar el teorema de Pitágoras, y posteriormente establecer una relación funcional entre las variables, la tabla elaborada con Excel favoreció analizar el dominio de la función y relacionarlo con el contexto de la actividad.

Durante la actividad se identificó que los estudiantes mostraron mayor familiaridad con la representación numérica de la función (tabla elaborada en la hoja electrónica de cálculo), para analizar el comportamiento de la misma.

La simplificación de la actividad contribuyó para que los estudiantes identificaran la relación entre las variables y las constantes presentes en la actividad y exploraran la forma el cambio en los valores de las variables.

Referencias bibliográficas

SEGOB, (2008). *Acuerdo No. 442 por el que se establece el Sistema Nacional de Bachillerato en un marco de diversidad*, DOF: 26/09/2008, Diario Oficial de la Federación. Recuperado de http://dof.gob.mx/nota_detalle.php?codigo=5061936&fecha=26/09/2008

Ainsworth, S. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction 16*(3), 183-198.

García, M. y Benítez, A. (2010, Noviembre). Relación entre representaciones de un concepto matemático con apoyo de tecnologías digitales. *XII Congreso Nacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas*. D. F., México.

Parnafes, O. & diSessa A. A. (2004). Relations between types of reasoning and computational representations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 9(3), 251–280, Kluwer Academic Publishers. Netherlands.

IPN Instituto Politécnico Nacional, *Un Nuevo Modelo Educativo para el IPN. Dirección de Publicaciones*, México. Recuperado el 9 marzo de 2009 de:

http://www.comunidades.ipn.mx/riieeme/Languages/Espanol/UploadFiles/Documents/20ModeloEducativoVersion27julio2003Resumen.pdf (2004).

ISEI-IVEI Instituto Vasco de Evaluación e Investigación Educativa (2004). *Primer Informe de la Evaluación PISA 2003*, http://www.isei-ivei.net/cast/pub/PISA2003euskadic1.pdf

Wilson, K., Ainley, J., & Bills, L. (2004). Spreadsheet generalizing and paper and pencil generalizing. *Proceedings of the twenty-eighth conference of the International Group for the Psychology of Mathematics,* Bergen, Norway, 4, 441-448.

Zill, D. & Wright, W. (2010) Cálculo de una variable. *Funciones* (pp. 57-58). México: McGraw-Hill Interamericana.

OJOS Y OIDOS LOGARÍTMICOS Y TRIGONOMÉTRICOS

Edison De Faria Campos
Universidad de Costa Rica Costa Rica
edison.defaria@ucr.ac.cr

Resumen. En este curso describimos algunos modelos matemáticos para medir grandes distancias, como la distancia de la tierra a las estrellas o distancias intergalácticas, utilizando modelos logarítmicos. También "escuchamos" el sonido de funciones trigonométricas y de otras funciones más complejas como la función zeta de Riemann. Los modelos sugieren que nuestros ojos tienen un comportamiento logarítmico y que nuestros oídos se comportan trigonométricamente.

Palabras clave: medición, funciones, modelos matemáticos

Abstract. In this course we described some mathematical models to measure great distances, like the distance from the earth to the stars or intergalactic distances, using logarithmic models. Also we "heard" the sound of trigonometric functions, as well as other more complex functions like the Riemann Zeta function. The models suggest that our eyes have a logarithmic behavior while our ears behave trigonometrically.

Key words: measurement, functions, mathematical models

Introducción

El concepto de función es fundamental para cualquier curso de cálculo diferencial e integral y facilita la simulación y modelación de situaciones físicas, químicas, biológicas y sociales. Según Hitt (2000) "a través de las funciones podemos modelar matemáticamente un fenómeno de la vida real, describir y analizar relaciones de hechos sin necesidad de hacer a cada momento una descripción verbal o un cálculo complicado de cada uno de los sucesos que estamos describiendo".

La simulación y la modelación son representaciones de un objeto matemático que está vinculado a una situación física o real. La simulación es una aproximación a un fenómeno mientras que la modelación es la construcción o representación del fenómeno. En el proceso de simulación y de modelación se produce la distinción de variables y la relación entre las variables, los cuales a su vez impulsa la construcción de otros registros de representación: gráfico, simbólico, verbal, icónico, tabular.

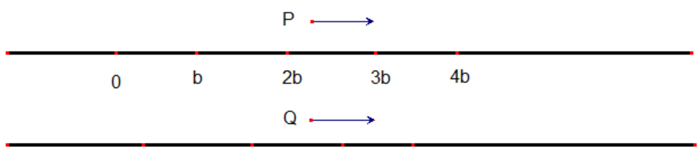
Investigaciones realizadas por Duval (1992) reportan que en estudios en donde se presente un enunciado en el cual están en juego varios sistemas de representación, es importante analizar las articulaciones que hay de un sistema a otro. Para Duval, un aprendizaje significativo se logra cuando se articulan diferentes representaciones de los objetos matemáticos y de las acciones realizadas sobre los objetos, lo que lleva a la construcción de esquemas de acción y de estructuras cognoscitivas. La habilidad para cambiar el registro de cualquier representación semiótica ocupa un lugar central en el aprendizaje de las matemáticas.

Otro aspecto importante se relaciona con la contextualización del contenido matemático construido en el aula. En el caso de las funciones, esta contextualización debería de ser muy natural pues ellas son utilizadas principalmente para modelar fenómenos físicos, químicos, biológicos y sociales.

Según Katz (2009) la idea de logaritmo posiblemente tuvo su origen en el uso de ciertas fórmulas trigonométricas que transformaban multiplicaciones en sumas o restas. Los astrónomos se dieron cuenta de que este procedimiento podría reducir la cantidad de errores de cálculos. Otras fuentes para la idea de logaritmo se encuentran en los trabajos de algunos algebristas como Stifel y Chuquet que elaboraron tablas que relacionaban las potencias de 2 con sus exponentes, y demostraron que la multiplicación en una tabla correspondía a la suma en la otra.

En inicios del siglo XVII John Napier (1550-1617) y Jobst Bürgi (1552-1632), trabajando en forma independiente, construyeron tablas que permitían calcular multiplicaciones de números enteros (no sólo potencias de 2) mediante sumas, pero Napier fue el primero en publicar su trabajo.

En su obra Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio (Descripción del maravilloso canon de logaritmo), publicado en 1614, Napier introdujo brevemente las tablas de logaritmos y mostró cómo utilizarlas. En su segundo trabajo Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio (Construcción del maravilloso canon de logaritmos), publicado en 1619, él describió la teoría utilizada para construir las tablas. Para ello, Napier introdujo una recta y un segmento. En la recta él representó la sucesión aritmética creciente $0, b, 2b, 3b, \cdots$ mientras que en el segmento de longitud r él representó una sucesión cuya distancia al punto extremo derecho del segmento forma una sucesión geométrica decreciente $ar, a^2r, a^3r, \cdots$ con $0 < a < 1$. Napier utilizó $r = 10^7$, el radio utilizado para su tabla de senos, y a cercano a 1.



$$0 \qquad r - ar \qquad r - a^2r \quad r - a^3r$$

Napier supuso que los puntos P y Q se movían hacia la derecha de cada recta de la siguiente manera: P se mueve con rapidez constante (aritméticamente) cubriendo intervalos iguales en tiempos iguales: [0,b],[b,2b],[2b,3b],…mientras que Q se mueve geométricamente tal que su rapidez cubre cada intervalo [0,r-ar], [r-ar,r-a^{2}r], [r-a^{2}r,r-a^{3}r],…en un mismo intervalo de tiempo, de tal forma que la distancia recorrida en cada intervalo forma un sucesión geométrica decreciente r(1-a), ar(1-a), a^{2}r(1-a), … El punto Q se mueve geométricamente si su rapidez es siempre proporcional a su distancia al extremo derecho del segmento.

Si el punto P empieza a moverse desde el origen con rapidez constante igual a rapidez con que el punto Q empieza a moverse (geométricamente) desde el origen, y si P ha sido alcanzado en el punto y por Q cuando la coordenada de Q es x, entonces y es el logaritmo de x.

Midiendo distancias mediante triangulación

Uno de los métodos utilizados para medir distancias en mediana escala es el de triangulación. Este es un método antiguo. Tales (siglo VI a. C.) utilizó triángulos semejantes para calcular la altura de las pirámides de Egipto, usando longitudes de sombras. Pei Xiu (224-271) identificó la medición de ángulos rectos y agudos para trazar mapas y medir distancias. Liu Hui utilizó el cálculo propuesto por Pei Xiu para medir distancias perpendiculares a lugares inaccesibles.

Los métodos de triangulación utilizados por los topógrafos llegaron a la España medieval por medio de algunos tratados árabes sobre el astrolabio.

Midiendo grandes distancias

Una posición en la Tierra es dada, por lo general, en coordenadas esféricas. El plano de referencia es el plano ecuatorial, perpendicular al eje de rotación, intersecando la superficie de la Tierra en el ecuador. Los círculos paralelos al ecuador son conocidos como paralelos de latitud. Semicírculos de polo a polo son los meridianos. La longitud geográfica es el ángulo entre el meridiano y el meridiano cero que pasa por el Observatorio Greenwich. Utilizamos valores positivos para longitudes oeste del Greenwich y negativos para longitudes este de Greenwich. También se acostumbra expresar la longitud como la diferencia entre el tiempo local y el tiempo Greenwich. Una revolución completa corresponde a 24 horas, y por lo tanto 1 hora equivale a 15 grados.

La longitud geográfica es el ángulo entre la línea de plomada y el plano ecuatorial. La latitud es positiva en el hemisferio Norte y negativa en el hemisferio Sur. Si observamos a un objeto desde distintos puntos, lo veremos en distintas direcciones. La diferencia entre las direcciones observadas se conoce como *paralaje*. Por lo tanto, paralaje es el ángulo formado por la dirección de dos líneas visuales relativas a la observación de un mismo objeto desde dos puntos distintos, suficientemente alejados entre sí y no alineados con él.

Debido a que la paralaje depende de la distancia del observador al objeto entonces podemos utilizarlo para medir distancias. Para propósitos astronómicos necesitamos líneas de base mucho mayores que la distancia entre los ojos (aproximadamente 7 cm). Las líneas de base más utilizadas son el radio de la Tierra y el radio de su órbita. Distancias a las estrellas más cercanas pueden ser determinadas mediante la *anual*, el ángulo subtendido por el radio de la órbita de la Tierra (denominado *unidad astronómica*, AU) cómo se mira desde la estrella.

La posición de una estrella puede ser medida en relación con alguna estrella de referencia o bien en relación con un sistema fijo de coordenadas. Normalmente podemos mirar entre 1000 y 1500 estrellas, por encima del horizonte. Bajo condiciones ideales, el número de estrellas visibles a simple vista puede ser aproximadamente 10,000, agrupadas en constelaciones.

El desplazamiento en la dirección de una estrella respecto a estrellas "fijas" debido al movimiento anual de la Tierra se conoce como *paralaje trigonométrico* de la estrella. Como mencionamos anteriormente, esto se utiliza para medir la distancia a la estrella: menor paralaje significa que la estrella se encuentra a mayor distancia. La paralaje trigonométrica es el único método directo que se utiliza para medir distancias a estrellas.

Si utilizamos como línea de base el diámetro de la órbita de la Tierra, durante un año, una estrella parece describir un círculo si se encuentra en el polo de la esfera celeste o un segmento si se encuentra en la eclíptica o, en otros casos, una elipse. El semieje mayor de esta elipse se denomina la *paralaje* de la estrella y se indica por π y es igual al ángulo subtendido por el radio de la órbita de la Tierra, o una unidad astronómica si se ve desde la estrella. La unidad de distancia utilizada en astronomía es *parsec* (pc). A una distancia de un parsec, una unidad astronómica (AU) subtiende un ángulo de un segundo de arco, y al ser 1 radián cerca de 206265´´ entonces un parsec es aproximadamente igual a 206265 AU, y como 1 AU igual a 1.498×10^{11} m entonces 1 pc $\approx 3.086 \times 10^{16}$ m. Si la paralaje π es dado en segundos de arco entonces la distancia r en pc es simplemente $r = 1/\pi$.

Otra unidad de medida astronómica es el año luz, la distancia que la luz viaja en un año y es aproximadamente 9.5×10^{15} m, o 3.26 años luz.

La paralaje de la luna es cerca de 57´, el del sol de 8.79´´ y el de la estrella más cercana (Próxima Centauri) de 0.762´´, una de las tres estrellas del sistema estelar Alfa Centauri, el más cercano a la Tierra. Esto significa que la estrella más cercana a la Tierra se encuentra a una distancia de $1/0.762 \approx 1.31$ pc, unos 4,3 años luz.

Conceptos fotométricos y magnitudes

Muchas observaciones astronómicas utilizan radiación electromagnética. Podemos obtener información de la naturaleza física de la fuente de radiación, analizando la distribución de energía de su radiación.

La potencia de la radiación por unidad de área se conoce como *densidad de flujo de energía* (W/m^2), o simplemente *densidad de flujo* y se denota con la letra F.

En el segundo siglo a. C. Hiparco dividió las estrellas visibles en 6 clases, conforme a su brillo aparente. La primera clase contenía las estrellas más brillantes y la sexta las menos brillantes visibles a simple vista.

La respuesta del ojo humano al brillo de la luz no es lineal. Si las densidades de flujo de tres estrellas se encuentran en proporción 1:10:100, la diferencia de brillo de la primera y la segunda se mira igual que la diferencia de brillo de la segunda y la tercera. Razones de brillo iguales corresponden a diferencias de brillo aparente iguales: *la percepción humana de brillo es logarítmica*.

Norman R. Pogson, en 1856, amplió la clasificación dada por Hiparco. Cómo una estrella de primera clase es cerca de 100 veces más brillante que una de sexta clase, Pogson definió la razón de brillo entre la clase n y la clase n + 1 como $(100)^{1/5} \approx 2.512$.

De esta forma, si tomamos como magnitud cero la que corresponde a la densidad de flujo F_0, entonces las otras magnitudes (aparentes) son definidas por la ecuación:

$$M = -2.5 \log(F/F_0).$$

Observe que en la definición anterior se utiliza 2.5 en lugar de 2.512 y es equivalente a la definición de Pogson pues si las magnitudes de dos estrellas son m y m + 1, y sus densidades de flujo son F_m y F_{m+1} respectivamente, entonces:

$$m - (m+1) = -2.5 \log(F_m/F_0)+2.5 \log(F_{m+1}/F_0) = -2.5 \log(F_m/F_{m+1}) = -1$$

y por lo tanto $F_m/F_{m+1} = (100)^{1/5}$.

Análogamente, si dos estrellas tienen magnitudes y densidades de flujo m_1, m_2 y F_1, F_2 respectivamente, entonces $m_1 - m_2 = -2.5 \log(F_1/F_2)$.

También es claro que para una estrella de primera magnitud y una de sexta magnitud, la relación entre las densidades de flujo de ambas es $1 - 6 = -2.5 \log(F_1/F_6) = -5$, y por lo tanto $F_1=100F_6$.

Debido a que la densidad de flujo depende del instrumento que utilizamos en la observación, la magnitud aparente depende del instrumento utilizado.

Magnitud absoluta

La magnitud aparente no dice nada acerca del verdadero brillo de las estrellas. Una cantidad que mide el brillo intrínseco de las estrellas es la *magnitud absoluta*, definida como la magnitud aparente a una distancia de 10 parsecs de la estrella. Si la estrella se encuentra a una distancia r, como la densidad de flujo es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, la razón entre F(r) y F(10) es $F(r)/F(10)=(10/r)^2$. Si M es la magnitud absoluta de la estrella tenemos:

$$m-M = -2.5\log(F(r)/F(10)) = -2.5\log(10pc/r)^2 = -5\log(10pc/r)$$

con la distancia r dada en parsec.

Intensidad de sonido

Vimos anteriormente la respuesta del ojo humano al brillo de la luz es logarítmico. De igual forma la respuesta del oído humano a las variaciones de la intensidad del sonido también es logarítmica. La intensidad de sonido es una expresión de la cantidad de energía que pasa por un centímetro cuadrado de área transversal en un segundo, es decir, la densidad de flujo de energía.

El decibelio (dB) es la unidad relativa utilizada para expresar la relación entre dos magnitudes acústicas o bien entre una magnitud acústica y otra magnitud de referencia. Es la décima parte del belio, el logaritmo de la relación entre la magnitud acústica y la de referencia. Su nombre se debe a Alexander Graham Bell. Un belio representa un aumento de potencia de 10 veces respecto a la magnitud de referencia mientras que cero belios es el valor de la intensidad de referencia.

Se utilizan dos sonidos en la definición pues al escuchar un único sonido, la persona no puede dar indicar con certeza su intensidad, mientras que si escucha dos sonidos entonces puede distinguir la diferencia entre sus intensidades. El oído humano percibe sonidos a partir de una intensidad de aproximadamente 10^{-12} Vatios/m^2 (corresponde al sonido más débil que se puede escuchar y se toma como el umbral de audición o mínima intensidad audible) y soporta una intensidad máxima de aproximadamente 1 Vatio/m^2. Por ser enorme el rango de intensidades de sonido que el oído humano puede detectar sin dolor, es que se ha elegido una escala logarítmica para expresar dicha intensidad.

$$I_{dB} = 10\log(I/I_0)$$

I_{dB} es la intensidad sonora en decibelios, I (Vatios/m^2) es la intensidad sonora en escala lineal, I_0 (Vatios/m^2) es el umbral de audición. En el rango audible, [10^{-12} Vatios/m^2, 1 Vatio/m^2], la intensidad sonora varía de 0 a 120 dB.

El sonido de las funciones

Algunas funciones trigonométricas tienen sonidos muy agradables y podemos utilizar un software especial para oírlas. El software Mathematica tiene un comando especial, Play cuya sintaxis es Play[f,{t,tmin,tmax}] que permite "sonar" una función al emitir un sonido de amplitud f(t) durante t segundos.

Play aplicado a una función f(t) define una forma de onda para un sonido con amplitud f(t). La señal es transformada en un voltaje que a la vez se transforma en un desplazamiento. Cuando un sonido es ejecutado, su amplitud es muestreada un cierto número de veces por segundo (8000 hz por defecto), y este número puede ser cambiado mediante la opción SampleRate. Play[f,{t,tmin,tmax}, SampleRate □ r] toma r muestras de la amplitud por segundo. El comando Show[sonido] permite volver a tocar el objeto sonido.

También podemos producir sonidos estéreo utilizando varios canales y Mathematica permite el uso de cualquier número de canales. La sintaxis es:

Play[{f1,f2, …}, {t, tmin, tmax}]

El oído humano percibe sonidos en una banda de frecuencias de 20 a 22000 hz.

Algunos ejemplos que desarrollamos (oímos) en el curso fueron:

1. Play[Sin[2 Pi 440 t], {t,0,1}] emite un sonido puro con una frecuencia de 440 hz por segundo.
2. Play[Cos[50t]Sin[3000t], {t,0,2}] suena como un teléfono fijo.
3. Play[(2tCos[500t])Sin[3000t+2Sin[50t]],{t,0,3}]
4. Play[Sin[700t+25tSin[350t]],{t,0,3}]
5. Play[{Sin[700t+25tSin[350t]],Sin[2000t^2 – 500t + 1]},{t,0,4}] sonido estéreo con dos canales.
6. Play[Sum[Sin[1000t√n (1+Cos[nt])],{n,5}],{t,0,5}]
7. Play[RiemannSiegelZ[1000t],{t,0,5}] para la función zeta de Riemann.

Además construimos otros modelos logaritmos como por ejemplo: aquellos utilizados para medir la intensidad de temblores o la dimensión de un objeto fractal. Vimos como los logaritmos y las funciones trigonométricas sirven para explicar fenómenos naturales, y para representar la reacción humana a distintos estímulos. En particular, las funciones trigonométricas son fundamentales para describir modelos que son periódicos. Aplicaciones como estas potencializan la contextualización de las matemáticas y muestran la utilidad de las matemáticas para la vida diaria.

Referencias bibliográficas

Duval, R. (1992) *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitive de la pensée.* Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. IREM Strasbourg.

Hitt F. (2000). *Funciones en Contexto. Proyecto sobre Visualización Matemática.* México: DME - Cinvestav.

Katz, V. (2009). *A History of Mathematics: An introduction*. Boston: Addison-Wesley.

LA NOCIÓN DE FRACCIÓN COMO COMPARADOR PARTE – TODO

Rebeca Flores García
CICATA – IPN México
rebefg@gmail.com

Resumen. El conocimiento sobre el número racional es complejo, diversas investigaciones se han dado a la tarea de establecer los vínculos entre un racional y una fracción; o entre una fracción y una razón, entre otras. En el artículo se reportan evidencias de los resultados encontrados acerca de los significados de las fracciones presentes en la escuela, parte de su tratamiento en el discurso matemático escolar y algunas de las dificultades que presentan los estudiantes al resolver un problema que implica el manejo de nociones vinculadas a la fracción como comparador parte - todo: partición, equivalencia y unitización. Para ello se aplicó un cuestionario a estudiantes de una escuela secundaria perteneciente al Estado de México, este instrumento incluyó seis situaciones problema, las cuales fueron tomadas tanto de resultados de investigación como de libros de texto, con la intención de analizar la manera en la que algunos de estos significados son abordados y trabajados en ellos.

Palabras clave: fracción, partición, equivalencia

Abstract. The knowledge about the rational number is complex; several investigations have been given to the task of establishing links between a sound and a fraction, or between a fraction and one ratio, among others. The article is reporting evidence of the results about the meanings of the fractions present in the school, part of their treatment in school mathematical discourse and some difficulties presented by students to solve a problem involving the handling of notions related to the fraction as a comparator part - whole: partition, equivalence and unitization. To do this we applied a questionnaire to secondary students belonging to the State of Mexico, which included six problem situations. They were taken from both research results and textbooks, in order to analyze the way in which some of these meanings are addressed and worked on them.

Key words: fraction, partition, equivalence

Introducción

En la actualidad el sistema educativo – sobre todo el nivel básico y medio superior – ha dejado de organizarse en torno a las asignaturas tradicionales, ahora se están haciendo en función de temas, situaciones, problemáticas o competencias. Al respecto, el programa de estudio para la escuela secundaria en México señala que para resolver una situación el alumno debe usar los conocimientos previos, mismos que le permiten *entrar* en la situación, pero el desafío se encuentra en reestructurar algo que ya sabe, sea para modificarlo, para ampliarlo, para rechazarlo o para volver a aplicarlo en una nueva situación (SEP, 2006, p.11). Por lo que, tanto para los alumnos como para docentes la propuesta implantada en la reforma de 2006 para la enseñanza de las matemáticas en el nivel básico, implicará asumir retos que demandan condiciones distintas frente al conocimiento matemático e ideas distintas de lo que significa enseñar y aprender. El estudio de las fracciones es importante por sí mismo y porque permite el desarrollo de nociones útiles para el conocimiento de temas más avanzados, como son el razonamiento proporcional y el estudio de las expresiones racionales en el álgebra (SEP, 1994, p. 81).

El proceso de enseñanza aprendizaje relacionado con las fracciones es ciertamente uno de los más estudiados desde el inicio de la investigación en Educación Matemática, debido quizá a que (junto con la cuestión relacionada con los números decimales) representa una de las áreas de dificultad más comunes en las escuelas de todo el mundo (Fandiño, 2005).

Una revisión teórica

El trabajo teórico de investigación durante los últimos 40 años ha afirmado en reiteradas oportunidades que el conocimiento sobre el número racional es complejo. Diversos han sido los investigadores que se han dado a la tarea de mirar lo que se esconde debajo de la noción de fracción, de establecer la diferencia entre una fracción y un número racional, de mostrar diferencias entre nociones como por ejemplo la fracción y razón; así como las relaciones que guardan con otras nociones.

Centrándonos en estudios recientes respecto a los significados asociados a la noción de fracción es posible mencionar que Fandiño (2005) refiere a 14 significados, Lamon (1999), encuentra doce, Kieren (1988) destaca cinco y formula un modelo teórico, mientras que Nesher (citado por Ohlsson,1988) refiere a tres como los esenciales. Estos y otros trabajos, representan considerables progresos hacia una semántica de las fracciones. Por su parte, el Consejo Mexicano de Investigación Educativa elaboró en México estados de conocimiento correspondientes a dos décadas. En 1993, se editó una colección de libros, cuya revisión incluía la producción de la comunidad de investigadores educativos del país de 1982 a 1992; mientras que para el año 2003 se incluye la revisión de 1992 a 2002, en distintos niveles educativos.

En el periodo que va de 1982 a 1992 se destacan algunas de las dificultades que los estudiantes de nivel primaria y secundaria manifestaban respecto a los contenidos programáticos, tales como: comprender conceptos, mecanizar algoritmos y resolver problemas, tanto con números naturales como con números racionales; así como utilizar e interpretar distintos tipos de representación gráfica. Los estudios desarrollados en esta época a nivel internacional se centraron en el análisis de las distintas interpretaciones o significados que un contenido asumía considerando el contexto o la situación en que era usada. Por lo que los trabajos de Freudenthal (1983), Kieren (1976), Ohlsson (1988) y Brousseau (1981) tomaban fuerza, mientras que en México, algunos investigadores de México que incursionaron en el estudio de las fracciones debido a la influencia de las investigaciones francesas de los IREM (Institutos para la investigación de la enseñanza de las matemáticas) fueron Block, Balbuena, Dávila, entre otros (citados por Bonilla, Block y Waldegg, 1993).

En el periodo que va de 1992 a 2002, sólo nueve de las ciento dieciséis investigaciones revisadas incluían el tema de las fracciones. Se encontraron como autores que fundamentaban esa línea de investigación los trabajos desarrollados por Thomas Kieren y Hans Freudenthal. De manera muy particular, el trabajo de Valdemoros (1995 y 2001), señala que una dificultad adicional en el manejo y resolución de problemas con fracciones es la conservación referente (unidad) a la que la expresión $\frac{a}{b}$ remite, dificultad que no se observa en el caso de problemas con los números naturales.

Metodología

Se aplicó un cuestionario a estudiantes de una escuela secundaria perteneciente al Estado de México, este instrumento incluyó seis situaciones, las cuales fueron tomadas tanto de resultados de investigación como de libros de texto, con la intención de analizar la manera en la que algunos de estos significados son abordados y trabajados en ellos. El cuestionario fue aplicado a 36 estudiantes de cada grado del nivel secundario, haciendo un total de 108 estudiantes correspondiente al turno vespertino.

Resultados

En esta sección se reportan evidencias de los resultados encontrados acerca de los significados de las fracciones presentes en la escuela, su tratamiento en el discurso matemático escolar y las dificultades que presentan los estudiantes de uno de los seis problemas que fueron planteados.

El reparto de tres barras de dulce

Este problema fue retomado y adaptado del estudio que Lamon (1999) desarrolló con niños de nivel elemental. Aunque pareciera que el problema será sencillo y directo en su solución, las respuestas de los estudiantes no evidencian una solución así, diversas son las formas en que ellos dan cuenta de la respuesta a la que los conducen sus percepciones e intuiciones.

Seis niños comparten estas barras de dulce. ¿Cuánto le toca a cada uno?

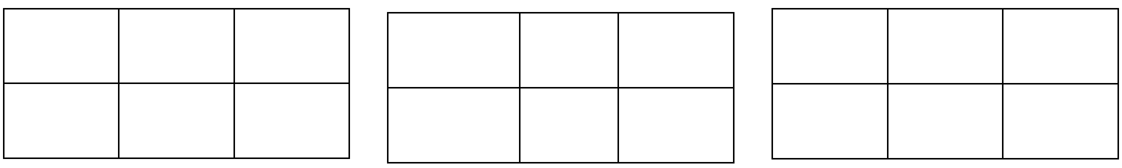


Figura1. El reparto de tres barras de dulces.

En la solución de este problema se alude a una combinación de dos tipos de unidades, de acuerdo con Lamon (1999), una unidad que incluye más de un ítem continuo y una unidad que incluye uno o más objetos continuos que han sido preparticionados. Asimismo, señala que diferentes tipos de unidades pueden proporcionar desafíos a diferentes a los niños. En ocasiones, uno de los factores que afectan un pensamiento del niño acerca de un problema está relacionado a si él puede o no ver todas las piezas bajo consideración.

De igual manera, establece que la noción de *partición* es un mecanismo fundamental para la construcción de los conceptos y operaciones con números racionales También destaca la importancia que adquiere la noción de *equivalencia* cuyas raíces de su comprensión va más allá de las fracciones y son cultivadas cuando se realizan diferentes particiones que resultan en las mismas cantidades relativas

La respuesta esperada para este problema variará dependiendo de la forma en que los estudiantes *reconceptualicen* la unidad en piezas de diferente tamaño; que en este caso pueden ser tamaños que corresponden en términos de: a) un rectángulo pequeño, b) rectángulos pequeños, c) una barra compuesta de seis rectángulos pequeños y d) tres barras. Así que la respuesta, podría darse, respectivamente como: 3 (rectángulos pequeños), $\frac{3}{2}$ (de dos rectángulos pequeños), $\frac{1}{2}$ barra y $\frac{1}{6}$ (de 3 barras) o bien, en expresiones equivalentes a alguna de las descritas.

Estas respuestas tienen relación con la noción *unitizar* propuesta por Lamon (1999, p. 42):

> (…) la asignación cognitiva de una unidad de medida para una cantidad dada; (…), es el tamaño del *bite* mental en términos de los cuales se piensa acerca de la unidad, (…) es un proceso que está en la mente de la persona.

De este modo, también advierte que:

> este proceso es un proceso diferente al de decidir la unidad, agregando que: no solamente es importante para los estudiantes el ser capaces de identificar la unidad en una situación particular; sino que, con objeto de desarrollar sofisticación en el razonamiento, es importante reconceptualizar la unidad en términos de piezas de diferentes tamaños; es decir, es de utilidad ser capaces de *unitizar* y *reunitizar* en el curso de la solución del problema (p.48).

Siendo:

$$I = 3\,(\text{de }1) = 18\left(\frac{1}{18}\right)$$

$$n\left(\frac{1}{n}\right) \quad U = 3\,(\text{de }1) = 6\left[\left(\frac{1}{2}\right)(\text{de }1)\right] = 18\left[\left(\frac{1}{6}\right)(\text{de}\,1)\right] = 9\left[\left(\frac{1}{3}\right)(\text{de}\,1)\right]$$

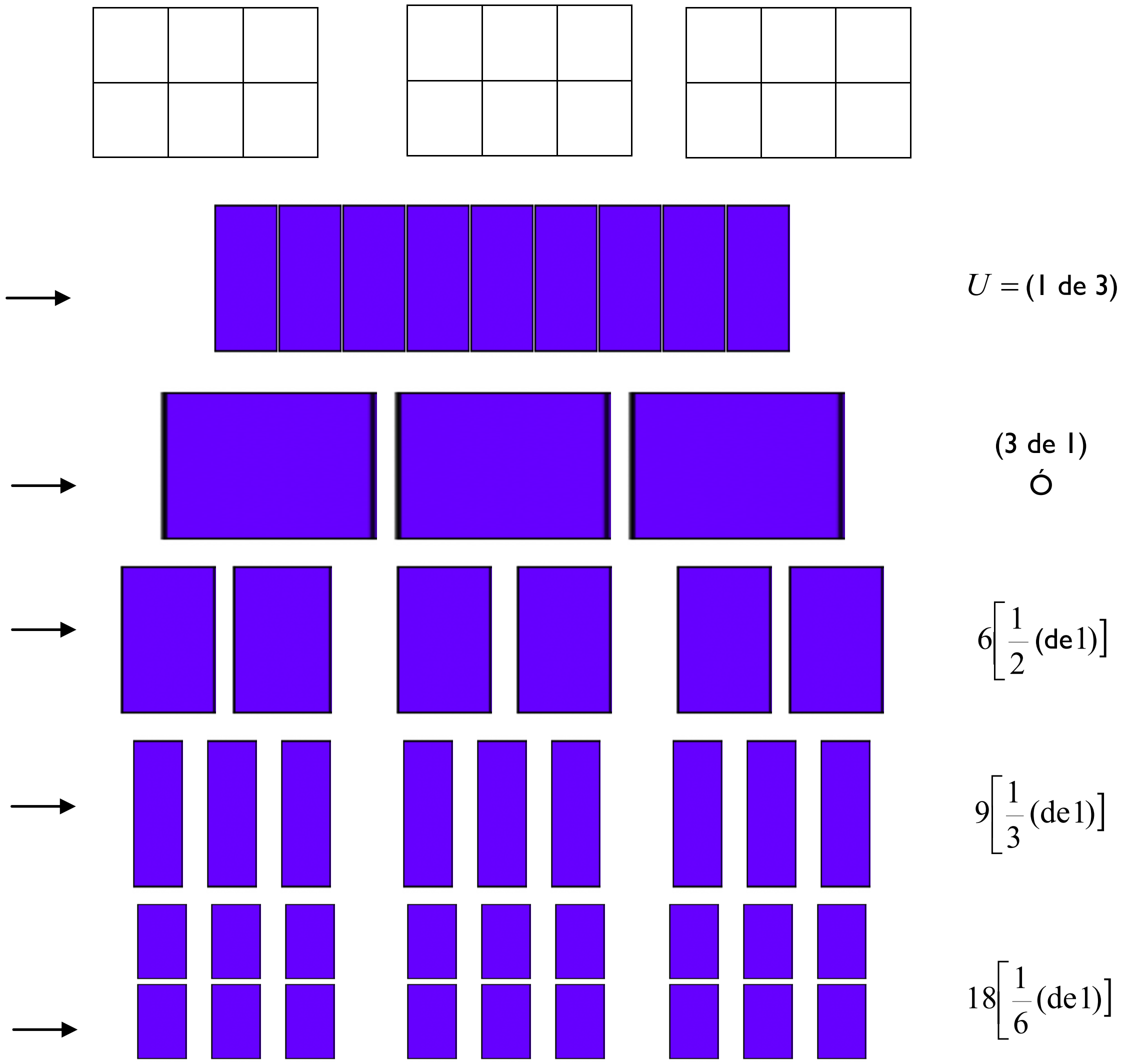


Figura 2. Distintas representaciones de la unidad

La importancia matemática de las nociones incluidas en el problema:

Figura 3. La interpretación de la unidad en la recta numérica.

Se "observa" que la unidad U , por las pre – particiones manifiestas se puede dividir en tantas partes enteras como se desee obteniendo fracciones unitarias como $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}$ ó $\frac{1}{8}$.

Y que la unidad U queda entonces "arreglada" como 3 (de $\frac{1}{3}$); ó 6 (de $\frac{1}{6}$); ó 9 (de $\frac{1}{9}$); o 18 (de $\frac{1}{18}$). Por lo que estos hechos se colocan desde un punto de vista de los racionales como estructura en cuestiones que apuntan hacia la propiedad de densidad y hacia la propiedad descrita como: $m\left(\frac{1}{m}\right)=1$; es decir, a la noción de inversos multiplicativos.

De las respuestas de los estudiantes se puede decir que cerca del 90 % de los estudiantes de cada grado respondió apropiadamente el problema, en cuyas estrategias observamos su percepción del problema y en su respuesta reflejan la idea generada al respecto. Aquí lo interesante es precisamente el cómo lo asumen y entienden, ya que a pesar de considerarse un problema "fácil", cuya solución parece inmediata en el fondo no lo es, requiere de concepciones sólidas como lo son las nociones de *partición unitización y equivalencia.*

A continuación se presentan evidencias de las soluciones planteadas por 4 estudiantes:

En un primer nivel se encuentran lo realizado por Enriqueta, de primer grado:

Ella considera a la unidad como compuesta de 18 rectángulos pequeños; por lo que su respuesta proviene de la realización del cociente $18 \div 6$.

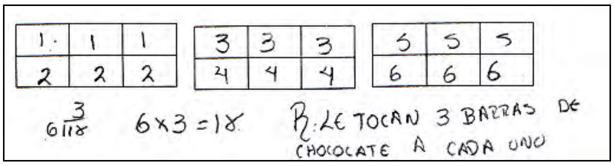


Figura 4. El planteamiento de Enriqueta

En un segundo nivel, se encuentran la producción de una estudiante de segundo grado

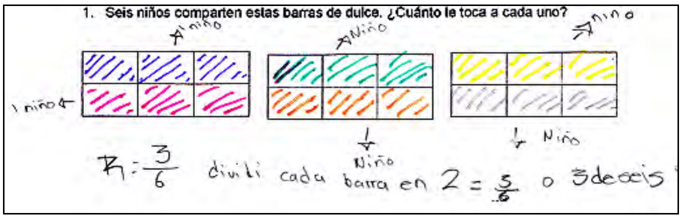


Figura 5. El procedimiento de Sandra

Ella visualiza la unidad como compuesta de 3 barras por lo que su respuesta proviene de la realización del cociente $3 \div 6$ (una unidad formada por 3 de 1).

En un tercer nivel, se encuentran las producciones de Erick, de primer grado y Jaime de segundo:

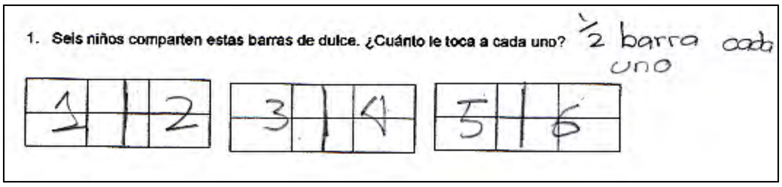


Figura 6. El planteamiento de Erick

Erick visualiza a la unidad como una de 3 (una unidad formada por 1 de 3) por lo que su respuesta proviene del cociente $1 \div 6$.

En el caso de Jaime se observa una visualización similar a la de Erick.

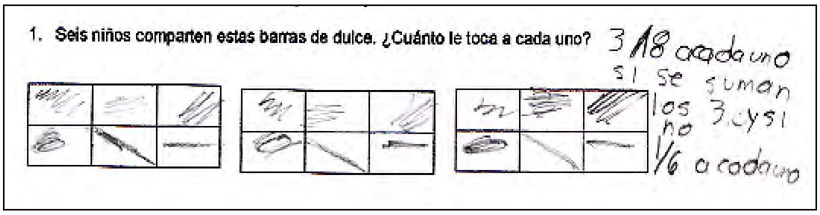


Figura 7. La solución de Jaime

Sin embargo parece que existe una confusión en cuanto a que: $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{18}$; es decir, este estudiante parece tener la falsa idea de la suma de fracciones: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$. Hecho que parece haberse inducido por la equivalencia de fracciones: $\frac{1}{6}=\frac{3}{18}$ y por la condicional "si se suman" planteada por el estudiante.

Conclusiones

El planteamiento generó la aparición de un par de nociones centrales en la respuesta, la unitización y la partición. Tanto una como otra juegan un papel fundamental en la comprensión del problema. Las producciones de los estudiantes permitieron "mirar" la forma en que percibían a la unidad a partir de lo que veían, ya sea una unidad compuesta o no, su respuesta delata la idea que evoca en sus pensamientos. A pesar de aparentar ser un "planteamiento sencillo y directo" las respuestas generadas por los estudiantes dan cuenta de una variedad de interpretaciones al respecto y de cómo establecen un vínculo entre una imagen y un tipo de simbolización.

Se destaca que a pesar de ser un objeto de investigación muy trabajado por casi dos décadas – las fracciones y los distintos significados que le son asociados – continúa siendo el tema de Aritmética que mayores dificultades presenta al finalizar la educación primaria (Eudave y Dávila, citados por Ávila, Block y Carbajal, 2003). Es así como se reitera que en la educación secundaria las investigaciones en torno a la noción de fracción, sus significados y su operatividad son escasas, la mayoría se encuentra centrada en la educación primaria.

Referencias bibliográficas

Ávila, A., Block, D. y Carvajal A. (2003). Investigaciones sobre educación preescolar y primaria. En: Ángel D. López y Mota (Coord.) *Saberes Científicos, Humanísticos y Tecnológicos: procesos de enseñanza y aprendizaje. Tomo I. El campo de la educación matemática, 1993-2001. Educación en ciencias naturales*. (pp. 49 - 170) México: COMIE

Bonilla, E., Block, B. y Waldegg, G. (1993). *La investigación Educativa en los Ochenta, Perspectivas para los Noventa. Cuaderno 10, Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas,* México: Congreso Nacional de Investigación Educativa.

Fandiño, M. I. (2005). *Le frazioni, aspetti concettuali* e *didattici.* Tesis de Doctorado no publicada, Universidad de Bologna, Italy.

Kieren, T. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. In J. Hiebert, & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 162-181). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lamon, S. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Marquette University. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. Mahwah, New Jersey.

Ohlsson, S. (1988). Mathematical meaning and applicational meaning in the semantics of fractions and related concepts. In J. Hiebert, & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 53-92). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

SEP, (Secretaría de Educación Pública) (1994). *Libro para el maestro*. Educación Secundaria, Matemáticas. México.

SEP, (Secretaría de Educación Pública) (2006). *Programas de Estudio 2006*. Educación básica. Secundaria, Matemáticas. México.

EL TRABAJO INDEPENDIENTE Y EL SISTEMA DE TAREAS: INDICACIONES METODOLÓGICAS EN EL APRENDIZAJE DE LA ASIGNATURA PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA APLICADO A LA ESPECIALIDAD DE INGENIERÍA CIVIL

Raúl Báez Olazábal, Doris Prieto Valdés, Ileana Cadenas, Rafael Larrúa, Ramón Blanco, Wilfredo Martínez
Universidad de Camaguey "Ignacio Agramonte y Loynaz Cuba
raul.baez@reduc.edu.cu, doris.prieto@reduc.edu.cu

Resumen. La aplicación del trabajo independiente constituye una vía para consolidar ampliar y profundizar los conocimientos, para el desarrollo de las habilidades y los hábitos indispensables para la realización de una auto – educación permanente, para el logro de la independencia cognoscitiva, para la formación de la personalidad del individuo en su modo de actuar y de pensar. El trabajo realizado ha permitido constatar dificultades existentes en la organización y desarrollo del trabajo independiente de los alumnos, se trata pues de intensificar la relación del proceso enseñanza aprendizaje con la vida. La orientación, ejecución y control del trabajo independiente debe ser realizado teniendo en cuenta las preconcepciones de los alumnos y sus diferencias individuales las cuales actúan sobre la zona de desarrollo próxima de Vigotsky (1984).

Palabras clave: trabajo independiente, independencia cognitiva

Abstract. The application of the independent work constitutes a way to consolidate, enlarge and deepen the knowledge, for the development of the skills and the indispensable habits for the realization of a permanent self-education, for the achievement of the cognitive independence, for the personality formation of the individual in his mode of acting and thinking. The realized work had permitted to verify existent difficulties in the organization and development of the students' independent work, it try here of intensify the relationship between the teaching-learning process with life. The orientation, execution and control of the independence work must be realized out by keeping in mind the previous conceptions of the pupils and your individual differences that which act on the developmental next area of Vigotsky (1984).

Key words: independent work, cognitive independence

Introducción

La Ingeniería se considera una profesión que a través del conocimiento y aplicación de la Matemática, desarrolla un conjunto de métodos y herramientas estadísticas por la necesidad de analizar grandes cantidades de datos recopilados de procesos experimentales para la obtención de conclusiones y la toma de decisiones sobre los fenómenos objeto de estudio. Este trabajo de investigación se realiza en los cursos 2007-2010, analizando como se ha desarrollado el proceso de enseñanza aprendizaje y en particular el trabajo independiente en el aprendizaje de la asignatura Probabilidades y Estadística en la carrera de Ingeniería Civil. En correspondencia con el Principio de vinculación de la teoría con la práctica: se aboga por un proceso de enseñanza aprendizaje contextualizado, vinculado al contexto real, a través de la resolución de problemas reales, pero vinculados al contexto del estudiante. Dentro del contexto de la asignatura esta vinculación se expresa en la aplicación del contenido estadístico en la solución de problemas modelados mediante situaciones relacionadas con el perfil de la profesión con la correcta orientación de procedimientos a los estudiantes para su actividad independiente, básica para el logro de la asimilación productiva de los conocimientos.

Materiales y métodos

Desde un enfoque dialéctico materialista se utilizaron diferentes métodos teóricos y empíricos que permitieron realizar el diagnóstico del estado actual, se realizaron encuestas a profesores y estudiantes, el trabajo realizado nos permitió constatar dificultades existentes en la organización y desarrollo del trabajo independiente de los alumnos: Es insuficiente la orientación, ejecución y el control para el desarrollo del trabajo independiente de los alumnos, es pobre el desarrollo de habilidades de los estudiantes en la realización de algunas formas de trabajo independiente como tomas de notas, trabajo con diferentes bibliografías, realización de resúmenes, cuadros sinópticos y utilización del software educativos, que obstaculizan la actividad independiente del alumno, el nivel de las tareas no rebasa el plano reproductivo y predomina en los estudiantes la tendencia a la ejecución de forma inmediata, con un débil proceso de análisis y autocontrol.

Las habilidades en el pensamiento lógico de los estudiantes, (operaciones mentales que él estudiante empleará para apropiarse de la orientación) son: identificación, clasificación, determinar aspectos esenciales, comparación, conceptualización, etc., que como se ha demostrado aún no están bien formadas, de esta forma, los estudiantes culminan la asignatura con las insuficiencias siguientes: Uso incorrecto o inadecuado del lenguaje estadístico, pobre interpretación de la información reflejada en tablas y gráficas, e inadecuada descripción del comportamiento de los fenómenos estudiados, toma de decisiones basadas en inferencias incorrectas o no confiables, por lo que solucionar un problema, se reduce a buscar vías didácticas para que el alumno interiorice el procedimiento y no sea el profesor el que dirige la solución del problema, buscar las vías y métodos que ayuden a la formación del pensamiento estadístico en los estudiantes.

El trabajo independiente fundamentación teórica

Se utilizaron como marco teórico la teoría de la actividad de Leontiev (1975) que fue completada por la teoría de Galperin (1986), que explica la vía a través de la cual se forman las nuevas acciones internas, sus principales características y condiciones para su formación, llamada Teoría de Formación por etapas de las Acciones Mentales. En ella, el concepto de acción se define como la habilidad de realizar una transformación determinada sobre un objeto; y para ello debe pasar de un plano externo a un plano interno en el proceso de formación. Galperin (1986), plantea que para lograr esta acción el estudiante transita por determinados momentos que constituyen las Etapas del Proceso de Asimilación: Base orientadora, Material o materializada, Verbal y Mental y los momentos funcionales de la actividad que son: Orientación, Ejecución y Control y las transformaciones que sufre la acción en este proceso son: Abreviación, Generalización y Automatización. Los aportes que a la teoría constructivista la realizaron Piaget (1978) y Ausubel (1991), citados por Carretero (2001), así como sugerencias de investigadores en el área de la resolución de problemas de matemática: Polya (1972), Campistrous & Rizo (1993), Poggioli (2002) y los conceptos centrales de la teoría de Vigotsky (1984), de actividad y de mediadores. Esto se puede traducir en: "mediar para enseñar a aprender, posibilita la intervención del docente ya que otorga una especial importancia a los procesos de instrucción a través de la zona de desarrollo próximo. La teoría de la zona del desarrollo próximo de Vigotsky, aporta las nociones elementales para atender las características individuales de los sujetos del proceso enseñanza aprendizaje y su diferenciación aprovechando sus potencialidades individuales. Esta teoría presupone elevar las exigencias de cada estudiante de manera que se desarrollen sus habilidades, propone motivar, potenciar y desarrollar la actividad independiente, en la búsqueda y la elaboración de nuevos procedimientos, para provocar producción de conocimientos y habilidades, para aplicarlos en diferentes contextos, para abrir nuevos interrogantes y para la evaluación de los aprendizajes. Carretero (2001), analiza la dinámica del aprendizaje dentro de la concepción cognoscitivista y constructivista, en términos de estrategias de instrucción, que debe elaborar e implementar el mediador del aprendizaje y las derivadas de esa acción, que son las estrategias de aprendizaje.

Existe una demarcada tendencia a entender el aprendizaje de la Estadística como una labor personal del alumno, en la que éste es considerado el protagonista, o al menos un participante activo (véase por ejemplo; Peña, Prat y Romero (1990); Peña (1992); Garfield (1995); Moore, Cobb, Garfield & Meeker (1995); Marasinghe, Meeker, Cook & Shin, (1996). Este enfoque propone: "el medio de inclusión de los alumnos en la actividad cognoscitiva independiente, el medio de su organización lógica y psicológica" (Pidkasisti, 1972, 1980); y considera el trabajo independiente como "el modo de organización del proceso docente, dirigido a la formación de la independencia, como característica de la personalidad del estudiante" (Álvarez de Zayas, 1999). Ambas definiciones permiten reconocer que la actividad cognoscitiva independiente de los alumnos y el trabajo independiente son dos conceptos distintos. En ellas se destaca como aspecto común el hecho de considerar el trabajo independiente como el modo de organización de la actividad cognoscitiva del alumno en el proceso docente. Solamente difieren en que la que ofrece Álvarez (1999), destaca el fin del trabajo independiente, que es el desarrollo de la independencia del alumno.

Trabajo independiente y sistema de tareas

El trabajo independiente tiene carácter sistémico y se aplica para el desarrollo de habilidades y hábitos que requiere el estudiante para enfrentar el porvenir para aprender a aprender. El desarrollo del trabajo independiente en el proceso docente está estrictamente vinculado con la formación de los siguientes rasgos: El interés por el estudio de los contenidos, las habilidades para organizar racionalmente el trabajo, la realización de todos sin ayuda alguna, la superación independiente de las dificultades, el interés y esfuerzos por aplicar métodos de autocontrol y corrección de procedimientos del trabajo, la comprensión y tratamiento crítico del material de estudio y su significado con la práctica, la preocupación por el desarrollo de la independencia en el colectivo y el planteamiento constante de nuevos problemas.

Para diseñar el sistema de tareas que se propone en la impartición de la asignatura Probabilidades y Estadística en la carrera de Ingeniería Civil, hay que tener en cuenta que: Silvestre y Zilberstein (2003) plantean que la tarea docente puede ser portadora de las exigencias que, si las cumple, le permiten lograr un aprendizaje que no sea sólo reproductivo, le garantiza un mayor éxito y estimula su interés, Silvestre (1999) al analizar las tareas docentes en un contexto de aprendizaje desarrollador, plantea que son aquellas actividades que se orientan para que el estudiante las realice en clases o fuera de esta, cuya realización implica la búsqueda y adquisición de conocimientos, el desarrollo de habilidades y la formación integral de su personalidad y Álvarez de Zayas (1992), considera que "la explicación de un concepto y su correspondiente comprensión por el estudiante, la realización de un ejercicio o de un problema por éste, son ejemplos de tareas docentes". Rico (1985) asume que de este modo el estudiante realiza un control consciente de su aprendizaje, lo cual exige por parte del docente un cambio sustancial en los procesos de orientación, ejecución y control en el proceso de enseñanza aprendizaje y en particular en lo referente a la tarea docente.

Asignatura.Probabilidades y Estadística

Probabilidades	**Estadística**Descriptiva	**Prueba de**	**Regresión**

En el desarrollo de las actividades docentes, como método de enseñanza utilizamos: la selección y solución de los problemas a utilizar para el trabajo con los estudiantes, la organización del trabajo independiente y el diseño de un sistema de evaluación adecuado. El trabajo independiente en el aula orientado y dirigido por el profesor, tomando como referentes, fundamentos psicológicos, la teoría de la formación por etapas de las acciones mentales de Galperin (1983), el enfoque histórico cultural y el enfoque por tareas se infiere la necesidad del vínculo entre los fundamentos psicológicos y didáctico-metodológicos asociados al trabajo independiente. Estas tres etapas no deben estar aisladas entre sí, por el contrario se tienen que integrar al desarrollo de la actividad docente Fase de motivación y orientación, Fase de realización, fase de control, conjuntamente con la habilidad "Resolver Problemas" (Orientación hacia el problema, Trabajo en el problema, solución del problema Evaluación de la solución y de la vía). De modo que si realizan de manera frecuente y periódica, bajo determinadas condiciones, tareas cada vez más complejas, con diferentes conocimientos pero cuya esencia es la misma, se logrará el dominio de la habilidad. La psiquis y la conciencia no sólo se manifiestan sino que se forman en la actividad. Lo primario para las nuevas acciones psíquicas son las acciones externas materiales, en particular las acciones materiales del propio sujeto, y no de otras personas, ya que no se trata de la formación de la imagen de la acción, sino de la acción mental del propio sujeto.

'Llamaremos estudio toda actividad, que como resultado de la misma, en su ejecutor se forman nuevos conocimientos y habilidades o los antiguos conocimientos y habilidades adquieren nuevas características'. Cada tipo de actividad de estudio es a su vez, un sistema de acciones unidas por un motivo, que en su conjunto, aseguran el logro del objetivo de la actividad de la que forman parte.

Piaget dijo: "Destaquemos aquí que lo que constituye la génesis del conocimiento y que aporta su cualidad constructiva son las acciones y no la mera observación." Tomaremos la acción como unidad de la actividad de estudio, como unidad de cualquier actividad humana. Toda acción incluye un determinado conjunto de operaciones que se cumplen en un orden determinado, en correspondencia con determinadas reglas, donde el cumplimiento consecutivo de las operaciones forma el proceso de cumplimiento de la acción.

Para la orientación del trabajo independiente se propone: Presentar las acciones desplegadas, llevar al alumno a que busque la justificación y conducir al alumno a que elija su propio camino de los alumnos, en esta etapa el profesor debe tener presente:

1. Identificar la Base orientadora de la acción (BOA): La imagen de la acción y la del medio donde esta se realiza, se unen en un elemento estructural único sobre cuya base transcurre la dirección de la acción y que llamamos: "base orientadora de la acción. La distinguimos como el sistema de condiciones objetivamente necesario para el cumplimiento exitoso de la acción. La base orientadora de la acción debe ser tal que indique al estudiante el camino a seguir pero le permita elegir la forma de transitar por dicho camino, esto es, la base orientadora de la acción no es en general un algoritmo, pero podemos decir que un algoritmo es un caso particular de base orientadora de la

acción, en la cual el estudiante tiene restringida su libertad de acción; cuando el estudiante tiene libertad para ejecutar las orientaciones para realizar la acción, decimos que es una base orientadora de la acción ejecutada por el estudiante de forma independiente.

2. Identificar las habilidades lógicas para su comprensión, comprobar en los estudiantes si poseen dichas habilidades, comprobar que tengan las condiciones implicados en la BOA, estructurar la explicación en un lenguaje comprensible con los estudiantes y estructurar la explicación a través de una secuencia lógica.

Resultados

En la Especialidad de Ingeniería Civil, cuyo objetivo es: Producción de construcciones existen diferentes esferas de actuación: obras industriales, edificaciones sociales y agropecuarias, carreteras y aeródromos, vías férreas, puentes y alcantarillas, puertos y obras marítimas, obras hidráulicas y obras subterráneas.

Entre las tareas se propone que la la asignatura Probabilidades y Estadística debe tener en su preparación los contenidos que se le darán salida a través del trabajo independiente con otras asignaturas de la disciplina Proyecto y Conservación de Vías de Comunicación en particular la Asignatura: Ingeniería de Tránsito.

Actividades:

Conferencia

Fase de motivación, orientación y control: Comenzar explicando cómo surgió la Teoría de las Probabilidades y dar algunos ejemplos de su aplicación a los juegos de azar y la vinculación con la geometría al impartir las definiciones clásica, geométrica y estadística de probabilidad. Comprender el significado de la definición de experimento aleatorio, evento elemental o simple y relaciones entre eventos, las cuales pueden expresarse haciendo uso de la Teoría de Conjuntos. Acciones: Los estudiantes participan en la construcción de los conocimientos, utilizan módulos de simulación para introducir el concepto de probabilidad, (así como programas interactivos y dinámicos que sirven de apoyo a la enseñanza de conceptos y habilidades estadísticas (Statistics in Applets).

Fase de realización: El proceso de modelación del problema y la interpretación de su solución. Las principales formas de trabajo independiente trabajadas en los grupos de estudiantes fueron: Tomar notas de clases, trabajo con el texto, lectura y discusión de artículos, realizar valoraciones críticas de las tareas, formular conjeturas o preguntas, discutir y sacar conclusiones (los actores principales son los estudiantes) y resolver ejercicios tipo con independencia del marco teórico concreto que lo fundamenta.

Fase de control. Revisar la preparación previa, (Tarea 1), desarrollar trabajo independiente en el aula y orientación del trabajo independiente para la próxima actividad. Los medios de enseñanza: computadora, videos, Libro de Texto: Probabilidades y Estadística para Ingenieros. Walpole y Myers (2008); guías de estudio; información en el soporte electrónico y en sitios Web.

Clase práctica

Fase de realización: Identificar las habilidades lógicas para su comprensión Etapas de las acciones externas materiales: Las formas de organización: de forma individual, en parejas, equipos y de todo el grupo.

Fase de control: Comprobar que tengan las condiciones implicados en la BOA: Realizar el diagnóstico inicial para precisar si la tarea se encuentra en la zona de desarrollo próximo de los estudiantes o si es necesario modificarla y especificar los objetivos por habilidades y orientarlos correctamente para que los estudiantes concienticen lo que se espera de ellos.

Orientación del trabajo independiente para la próxima actividad: Se caracterizan diferentes tipos de tareas en función de las etapas de la asimilación: Para asegurar las condiciones (crear las condiciones necesarias para la realización de la acción), para orientar y asimilar la habilidad (cree en ellos la contradicción entre lo que hasta ese momento pueden hacer y lo que deben ser: Capaces de llegar a hacer), para dominar la habilidad. (persiguen la realización de la acción que debe ser dominada como habilidad), para sistematizar la habilidad (que puedan generalizar la ejecución a otras situaciones del contexto profesional. Diseñar la enseñanza a través de la resolución de problemas vinculados a la carrera a otras disciplinas y asignaturas, realizar ejercicios desde un nivel reproductivo hasta llegar al nivel productivo, modelar, hacer transferencias de un lenguaje analítico a gráfico.

Laboratorio

Fase de realización: Se familiariza a los estudiantes en la utilización del software estadístico en la primera clase práctica se orienta el primer problema, analizándose de forma conjunta el procedimiento a seguir, se va revisando el trabajo realizado por cada dúo de estudiantes en la solución de preguntas que aparecen en el libro de texto, haciendo las aclaraciones pertinentes en caso de ser necesario, porque propicia la comunicación e intercambio.

Fase de control: Se logra comprobar los resultados obtenidos empleando el asistente Statgraphics, SPSS o Excel y se resumen los logros y deficiencias de los estudiantes.

Orientación del trabajo independiente para la próxima activida: Se orienta ampliar la información mediante la búsqueda plataforma moodle, web docencia y el asistente matemático, realizar ejercicios de generalización para comparar sus resultados y resumir. Ir introduciendo ejercicios en las guías de acuerdo a las orientaciones dadas. En esta etapa el alumno ejecuta el método y es necesario que lo haga en presencia del profesor para que este ejerza su control, no necesariamente, al resultado de la acción, sino durante el desarrollo de toda la acción misma. Estructurar la explicación en un lenguaje comprensible con los estudiantes: El control es el momento donde se comprueba la efectividad de los procedimientos y estrategias empleados y realizar los ajustes y correcciones requeridos.

Seminario

Comprobación de los aspectos más importantes del tema para dar respuestas a preguntas planteadas por el profesor. Ampliar la información mediante la búsqueda, de aplicaciones, tesis y revistas. Elaborar un informe final. En las tareas, así concebidas, se pueden aplicar los métodos productivos que "exigen de los estudiantes la aplicación de sus conocimientos, habilidades y experiencias en una situación docente nueva, que se encuentre en su zona de desarrollo próximo y que constituya un reto, que demande de él la reflexión, el análisis y otros procesos lógicos del pensamiento para descubrir los nuevos conocimientos, solucionar problemas, resolver tareas, responder preguntas y establecer determinadas normas de relación con el mundo". (Ginoris, 2001).

Tarea Extraclase No 1. Volúmenes de tránsito.

En una sección transversal de una carretera rural de dos carriles se realizó un conteo vehicular en períodos de 15 minutos, las 24 horas del día durante dos semanas consecutivas, como muestra, que representan los volúmenes de tránsito en vehículos mixtos por hora.

a. Para cada semana calcule los intervalos de confianza para el tiempo promedio diario anual (población, TPDA) en función del tiempo promedio diario semanal (muestra, TPDS) para los niveles de confianza del 90%. y 95%. ¿Cuál es su interpretación?

b. Dibuje un histograma de la distribución de los volúmenes diarios en las dos semanas.

c. Dibuje un histograma de la distribución de los volúmenes horarios para el día sábado de la segunda semana.

d. Construya una tabla de percentiles para los siguientes niveles de confianza 68.8; 89.6; 90, 95; 98.8; 99; 99.7.

Acciones desplegadas. Tareas docentes para el tema IV: Regresión y correlación. Las habilidades lógicas para su comprensión. Sistema de acciones psíquicas y prácticas necesarias para la ejecución independiente. Interpretar el concepto de correlación entre variables. Interpretar la ecuación de regresión entre las variables objeto de estudio distribución de los volúmenes horarios y tiempo promedio de volúmenes diarios. Realizar análisis de regresión y correlación, con la utilización de un software estadístico Statgraphics, interpretando los resultados obtenidos. Transitar gradualmente por los diferentes niveles de asimilación del contenido bajo la guía del profesor.

Tarea Extraclase No 2

Se brindan los resultados de las mediciones de la velocidad de 200 vehículos, los valores se han reducido al km/h más próximo y se ordenan de menor a mayor. Realice los cálculos de gabinete para completar el estudio de velocidad. a) De forma manual. b) Utilizando un software profesional. c) Compare los resultados obtenidos de velocidad media, límite mínimo y máximo de velocidad y velocidad de diseño. d) Determine el tamaño de muestra óptimo al estimar el intervalo de confianza referido en el inciso a, utilice un error de estimación de 1,5 km/h.

Conclusiones

Las indicaciones metodológicas propuestas constituyen una guía para los profesores en su trabajo, la orientación, ejecución y control del trabajo independiente se deben realizar teniendo en cuenta las preconcepciones de los alumnos y sus diferencias individuales y actúan sobre la zona de desarrollo próxima de Vigotsky (1984). El trabajo independiente de los estudiantes, utilizado sistemáticamente y con criterios prefijados, facilitan la tarea del profesor, tanto en lo que se refiere a la planificación, como al desarrollo y la evaluación del proceso de enseñanza y aprendizaje, logra desarrollar el pensamiento creador y crítico y aumentar el interés por la asignatura; hace más sólidos y amplios los conocimientos adquiridos, autodisciplina la actividad de los estudiantes y los prepara para su futura labor profesional

Referencias bibliográficas

Álvarez de Zayas, C. (1992). *Fundamentos teóricos de la dirección del proceso docente - educativo en la Educación Superior Cubana.* La Paz, Bolivia: Instituto Cultural y de Amistad Cubano – Boliviano.

Álvarez de Zayas, Carlos. (1999). *La escuela en la vida.* La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación.

Ausubel, D; Novak, J, Hanesian, H (1991) *Psicología Educativa.* México D.F: Editorial Trillas.

Campistrous, L. & Rizo C. (2000). *Tecnología, resolución* de *problemas y didáctica de la Matemática.* Cuba: Editorial Pueblo y Educación.

Carretero, M. (1993). *Constructivismo y Educación.* Buenos Aires, Argentina: Aique.

Galperin, P. I. (1986). Stage-by-stage formation as a method of psychological investigation. *Journal of Russian and East European Psychology, 30* (4), 60-80.

Garfield, J. (1995). How Students Learn Statistics. En *International Statistical Review, 63, 1, pp. 25-34.*

Ginoris, Q. O (2001). *Didáctica Desarrolladora; teoría y práctica de la escuela cuba*na. Memorias del evento Pedagogía 2001. La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación.

Marasinghe, M.G., Meeker, W.Q., Cook, D. y Shin, T.S. (1996). Using Graphics and Simulation to Teach Statistical Concepts. *The American Statistician, 50* (4), 342-351.

Moore, D.S, Cobb, G.W, Garfield, J. y Meeker, W.Q. (1995). Statistics Education Fin de Siècle. *The American Statistician, 49, 3, 250-26.*

Peña, D, Prat. A, y Romero, R. (1990). La Enseñanza de la Estadística en las Escuelas Técnicas, *Estadística Española, 32 (3),* 147-200.

Peña, G. (1992). Reflexiones sobre la Enseñanza Experimental de la Estadística. *Estadística Española, 131,* 469-490.

Pérez, C. (2002). *Estadística Práctica con Statgraphics.* Madrid: Editorial Prentice Hall.

Piaget, J. (1978) *The principles of genetic epistemology.* USA, New York: Columbia University Press.

Pidkasisti, P.I. (1986). *La actividad cognoscitiva independiente de los alumnos en la enseñanza.* La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación.

Poggioli, L. (2002). Estrategias de resolución de problemas. Disponible en http://www.fpolar.org.ve/ poggioli/poggio05.htm

Polya, G. (1972). *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Editorial Trillas.

Silvestre, O. M. y Zilberstein, T. J. (2003). El aprendizaje y la tarea docente. En: *CD-ROM. Carrera de Matemática para los Institutos Superiores Pedagógicos.* La Habana, Cuba: Cesofte.

Silvestre, M (1999). *Aprendizaje, educación y desarrollo*. La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación.

Rico, M. P. (1985). La Actividad Docente. Algunas Consideraciones. *En Revista Educación No. 58 (pp. 56 – 62)*. La Habana, Cuba.

Sanjurjo y Vera (2003),

Vigotsky, L. S. (1982). *Pensamiento y lenguaje.* La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación.

Vigotsky, L. S. (1984). *El desarrollo de las funciones psíquicas superiores*. La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación.

Walpole, R. E. & Myers, R. H. (2008). *Probabilidad y Estadística, Parte I. Sexta Edición.* La Habana, Cuba: Editorial Félix Varela.

CATEGORÍA 3

ASPECTOS EPISTEMOLOGICOS EN EL ANÁLISIS Y EL REDISEÑO DEL DISCURSO MATEMATICO ESCOLAR

Introducción al Capítulo de Aspectos socioepistemológicos en el análisis y el rediseño del discurso matemático escolar

Francisco Cordero

CINVESTAV – IPN. (México)
fcordero@cinvestav.mx

Uno de los aspectos cruciales, para el desarrollo, de la Teoría Socioepistemológica (TS) ha consistido en haber orientado y problematizado en dos grandes vertientes. De la primera, se señaló oportunamente que no solo era en el dominio matemático donde habría que entender la problemática del aprendizaje de la matemática y de la segunda, que para ofrecer respuestas cabales a nuestras realidades sociales y educativas se requiere estudiar a la matemática desde su construcción social.

La generación de las líneas de investigación encaminadas en las dos vertientes ha obligado a cuestionar la necesidad de ampliar los episodios de aprendizaje *del estudiante en el aula al cotidiano del ciudadano* como referente educativo. Un avance al respecto es que la matemática del aula es diferente a la matemática que sucede en el cotidiano, en el trabajo y en otros dominios de conocimiento. Es así como la TS se ha dado a la tarea disciplinar de conformar un estatus epistemológico que rinda cuentas del conocimiento matemático con sus diferentes escenarios y en su dimensión social. Se requiere problematizar la relación de la matemática con otros dominios de conocimiento, con otros escenarios y con la vida cotidiana.

Abordar dicho propósito requiere entender al conocimiento matemático como una construcción social, lo que conlleva cuestionar no en sí a la matemática, sino su función social. Por eso importan conceptos entorno al conocimiento matemático como su resignificación y su institucionalización, sus usos e instrumentos innovadores y tradicionales, sus prácticas sociales que norman sus construcciones, el cotidiano, la labor, el trabajo y las acciones organizativas humanas, como la identidad, entre otros.

Es así como el lector encontrará en este capítulo *catorce reportes de investigación* que plantean temas diversos al respecto. Por ejemplo, a través de ciertas *comunidades de conocimiento* como la otomí, en la diversidad educativa, la comunidad sorda, y en la disciplinar, la comunidad de ingenieros en formación se discute como las usanzas del conocimiento matemático no son aisladas, sino por el contrario tienen tradición, pertenecen a la cultura y a la historia de ciertas comunidades de conocimiento. En algún sentido, son la expresión de una humanización del conocimiento en cuestión.

El lector también encontrará diversos artículos donde se discute *la modelación en la matemática escolar*, la cual es concebida como una práctica social plasmada específicamente como la argumentación de la situación en cuestión. Esto es, la modelación es el uso del conocimiento matemático en una situación específica, en donde se debate entre la función y la forma, de ese conocimiento, de acorde con lo que organizan los participantes. A este último se le llama resignificación. Así, la modelación puede llevar a cabo múltiples realizaciones y hacer ajustes en su estructura para producir un patrón deseable. Lo que significa que es, por un lado, un medio que soporta el desarrollo del razonamiento y de la argumentación. Y por el otro lado es una práctica que trasciende y se resignifica, que transforma al objeto en cuestión. En ese sentido se reporta los contextos extraescolares de la modelación lineal, la modelación en la cinética química, los uso de la ecuaciones diferenciales en la ingeniería y los usos de las gráficas en el bachillerato.

La formación del docente en matemáticas, también es uno de los temas abordados. Se desarrolla la hipótesis de que la *problematización del saber matemático*, por parte de los docentes, modifica la relación aprendizaje-docente-saber. Para tal fin se estudian los procesos de *empoderamiento* de los docentes. Pero también, otros trabajos enfocan su atención a constructos de la construcción social del conocimiento matemático: *la exclusión, el cotidiano y la identidad*. El primero identifica el hecho de que el discurso matemático escolar excluye a los actores de la construcción del conocimiento matemático; el segundo plantea que para abatir la exclusión habrá que generar marcos de referencia de la matemática funcional; y el tercero formula que el rediseño del discurso matemático escolar obligadamente necesita de un proyecto de identidad comunitaria.

Otro tema es el *discurso matemático escolar* el cual es discutido en conceptos específicos de la matemática, en contenidos curriculares y en libros de textos del cálculo y en categorías asociadas a prácticas sociales como los consensos, la conservación de área, las contextualizaciones y los usos tecnológicos. Y estudios *sui generis* donde el *títere* es un mediador para ciertos saberes matemáticos, en las niñas y niños de la primaria.

¿EXISTE MÁS DE UNA CLASIFICACIÓN DE CUADRILÁTEROS? ¿POR QUÉ?

Mónica Lorena Micelli, Cecilia Rita Crespo Crespo
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González" Argentina
Centro de Investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, CICATA–IPN México
monikmathis@gmail.com, crccrespo@gmail.com

Resumen. El presente trabajo forma parte de una investigación sobre la presencia de los cuadriláteros en el discurso matemático escolar y se centra en la clasificación de los mismos. La investigación se enmarca dentro de los lineamientos de la construcción social del conocimiento matemático, la socioepistemología. Se han analizado libros de texto escolares y se han analizado casos particulares. Según los resultados obtenidos puede decirse que la clasificación de cuadriláteros no es única y depende de los consensos realizados al momento de institucionalizar un contenido matemático.

Palabras clave: socioepistemología, cuadriláteros, clasificación, consensos

Abstract. The present work is part of an investigation about the quadrilaterals and it concentrates in the classification of quadrilaterals. The investigation is framed within the lines of the social construction of the mathematical knowledge, the socioepistemology. We analyze the presence of quadrilaterals in the mathematical scholar speech, so we analyzed the scholastic text books and particular cases. According to the obtained results it can say that the classification of quadrilaterals is not unique and that it depends on the consensuses realized at the time of institutionalizing a mathematical content.

Key words: socioepistemology, quadrilaterals, classification, consensus

Los cuadriláteros en el discurso matemático escolar

Partiendo de la base de concebir a la matemática como un saber construido socialmente, evidenciamos que existen consensos en el proceso de institucionalización de dichos contenidos matemáticos. Concebimos a la matemática como un conocimiento que surge para dar respuesta a las diferentes preguntas que se presentaron en distintos contextos sociales. En este trabajo se intenta dejar registro de las distintas respuestas que pueden darse a un mismo interrogante como puede ser: la clasificación de cuadriláteros. En particular, se intenta registrar y analizar cuáles son los consensos referidos al tema de los cuadriláteros. Este tema se encuentra presente entre los contenidos a enseñar en los diseños curriculares de Argentina desde el nivel básico profundizándose en los niveles educativos posteriores. A pesar de encontrarse el contenido de los cuadriláteros desde los primeros años de escolaridad, ello no implica que los alumnos, en un nivel educativo terciario, hagan un correcto uso de las propiedades de los mismos polígonos, como se ha observado dentro del aula.

La problemática que da origen a esta investigación fue el detectar entre alumnos del profesorado de nivel primario, en la materia Enseñanza de la Matemática II, dificultades en la aplicación de propiedades de los cuadriláteros, no pudiendo además establecer relaciones entre las definiciones (clasificación) en un nivel donde se supone que los alumnos tienen ya los conocimientos previos para poderlo realizar. Observar estas dificultades generó varios interrogantes acerca de la unicidad de las clasificaciones existentes en el discurso matemático escolar y la visión de docentes y alumnos frente a esta variedad.

El trabajo original tenía como objetivo acercarse a la caracterización de los cuadriláteros en el discurso matemático escolar actual para poder dar respuesta a los interrogantes que surgieron. En el presente reporte solo se incluye uno de los aspectos analizados en dicha investigación, la clasificación de los cuadriláteros convexos. El marco teórico desde el que se desarrolló la investigación es la socioepistemología. Este enfoque trata de explicar algunos mecanismos de "la adquisición y de difusión del conocimiento matemático desde una perspectiva múltiple, que incorpore al estudio de la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza" (Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez-Sierra, 2006, pp.85-86).

Por otro lado, se entiende por discurso matemático escolar a **"**aquel que atiende formación de consensos en la noosfera en torno a un saber escolar y a aspectos relativos a su tratamiento y características, incluyendo aspectos de organización temática y profanidad expositiva" (Castañeda, 2006, p.255).

Los cuadriláteros en la historia de la matemática

Para iniciar se realizó un rastreo de la presencia de los cuadriláteros en la historia, en documentos pertenecientes a distintas culturas.

El documento más antiguo que sirve para interpretar la clasificación de dichos polígonos es la obra de Euclides. En el libro primero se expone explícitamente las definiciones correspondientes a cada uno de los cuadriláteros convexos, no encontrando en otras culturas anteriores definiciones explicitas.

- *Definición 19:* Son figurasrectilíneas las comprendidas por rectas. Triláteras, las comprendidas por tres; cuadriláteras las por cuatro; multiláteras las comprendidas por más de cuatro (Euclides, 1944, p. 9).
- *Definición 22:* De entre las figuras cuadriláteras, cuadrado es la que es equilátera y rectangular; rectángulo es la que es rectangular pero no equilátera; rombo la que es equilátera, pero no rectangular; el romboide la que tiene los ángulos y los lados opuestos iguales entre sí, pero no es equilátera ni rectangular, y llámense trapecios a las demás figuras cuadriláteras (Euclides, 1944, pp. 9, 11).

Al leer las definiciones presentadas en la obra de Euclides, puede observarse que son muy distintas a lo que se puede encontrarse actualmente dentro de las aulas. Por ello, el segundo paso fue describir el discurso matemático escolar actual.

La presencia de los cuadriláteros en los libros de texto actuales

Se han analizado 16 libros de texto escolares de escuela media que abarcan los últimos veinte años de educación en Argentina. Esta selección se fundamente en que “el libro de texto tiene una participación importante en la formación del discurso, ya que norma las acciones de enseñanza y aprendizaje o por lo menos tiene una gran influencia en ellas” (Castañeda, Molina y Rosas, 2009, p.1).

Para poder categorizar el tipo de clasificación la cual se aborda en cada libro, se tomaron los conceptos de De Villiers quien distingue:

- ❖ Clasificación jerárquica: “los conceptos más particulares forman subconjuntos de los conceptos más generales”
- ❖ Clasificación por partición: “los subconjuntos de conceptos son considerados disjuntos unos de otros” (De Villiers citado en Renzuli y Scaglia, 2007, p.5).

Ambas conceptos sirvieron para analizar el material recogido en los libros de texto y volviendo a las definiciones de Euclides puede decirse que la clasificación que se deriva de dichas definiciones es una clasificación por partición pues los cuadrados no son rombos, ni rectángulos. A partir de las primeras definiciones encontradas en la obra de Euclides y en comparación con la encontrada en los libros de textos escolares actuales puede establecerse que la clasificación de cuadriláteros no es estática, que varía como se podrá ver a continuación con varios ejemplos.

Huerta (1996) analiza variaciones que ha sufrido la clasificación de cuadriláteros que como se ha mencionado no ha sido estática, entre los ejemplos que presenta puede encontrarse las definiciones de Vallejos:

> Cuando los ángulos adyacentes a un mismo lado son desiguales, e iguales los lados adyacentes a un mismo ángulo, se llama rombo, cuando los ángulos adyacentes a un mismo lado son iguales y los lados adyacentes a un mismo ángulo desiguales, se llama rectángulo; y cuando los lados contiguos a un miso ángulo son iguales, y los ángulos contiguos o adyacentes a un mismo lado también son iguales, recibe el nombre de cuadrado (citado por Huerta, 1996, p.56).

Según esta clasificación los cuadrados no son rombos, ni rectángulos, lo que parece coincidir con las definiciones presentadas en los Elementos de Euclides.

Los nuevos interrogantes que surgieron en la investigación en relación al tipo de clasificación qué clasificación se utiliza en el aula actualmente. Para dar respuesta a estas preguntas se seleccionó una muestra de 16 libros de texto de escuela media editados por distintas editoriales de Buenos Aires, Argentina, entre los años 1987 a 2007. En la figura 2 puede observarse los cuadriláteros que son trabajados en los libros analizados.

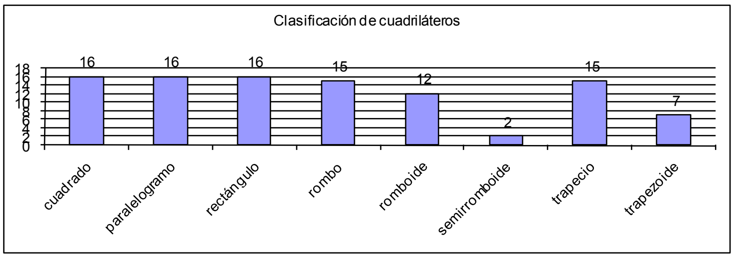


Figura 1: Frecuencia de los cuadriláteros de la muestra analizada

Puede concluirse que:

- Los trapezoides o en su defecto los semirromboides, son los menos abordados.
- El romboide también es poco trabajado.
- Hay cuadriláteros que son mencionados en toda la muestra, como es el caso de los cuadrados, paralelogramos y rectángulos.

Aunque hubo cuadriláteros mencionados en todos los libros de la muestra, pudo observarse que no en todos se presentan las mismas definiciones para dichos cuadriláteros. Como ejemplo de este hecho, es posible encontrar para los trapecios las siguientes definiciones:

- "Cuadrilátero que tiene por lo menos un par de lados paralelos" (Vázquez de Tapia, 1993, p.244).
- Cuadrilátero que tiene "solamente dos lados paralelos" (Amadori, 1995, p.106).

Según la primera definición los paralelogramos son trapecios, lo cual implica una clasificación jerárquica, mientras que para la segunda definición los paralelogramos no son trapecios, lo que deriva en una clasificación por partición, según la clasificación de De Villiers.

Algunos esquemas que permiten visualizar distintas clasificaciones que se desprenden de las definiciones planteadas en los libros de texto analizados, son los siguientes:

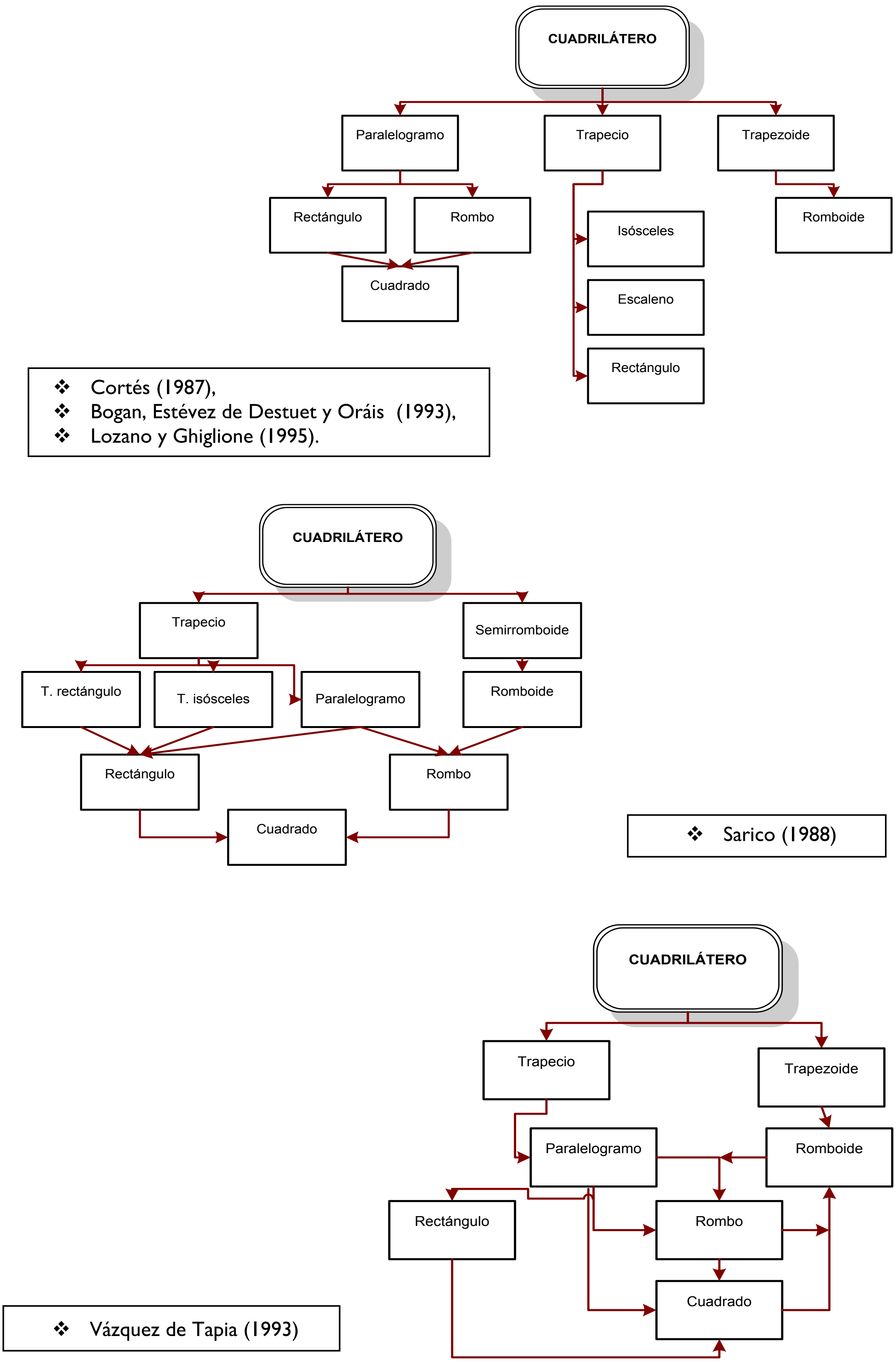
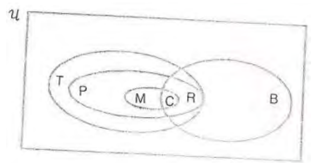


Figura 2: Esquemas de clasificación de cuadriláteros

En los libros de la muestra, las actividades de clasificación se ven destacadas especialmente en los libros donde se desarrolla la teoría conjuntista aunque ello no es excluyente.

Sadovsky, Kass, Panizza y Reyna (1989, pp.144 y 149)



Sarico (1988, p. 82)

T: trapecio
P: paralelogramo
M: rectángulo
C: cuadrado
R: rombo
B: romboide

Figura 3: Diagramas para la clasificación de cuadriláteros

A través del análisis realizado, se infiere la coexistencia en el discurso matemático escolar de distintas definiciones para los cuadriláteros de los cuales se desprende una clasificación particular que influye directamente en la forma de abordar las propiedades de los mismos, ya sea tanto para su aplicación como para una demostración. El problema no radica en que existan distintas definiciones para un mismo cuadrilátero, sino que las dificultades pueden aparecer cuando el docente no lo hace explicito en su discurso y no acuerda con sus alumnos cuáles son las definiciones con la cual se trabajará en su clase. Con esto no se afirma que una definición este bien y la otra este incorrecta sino que son todas válidas pero si esto no se clarifica puede ocurrir malos entendidos en realización con la resolución de actividades y, sobre todo, en su corrección. Las definiciones, como los axiomas se generan a través de la aceptación de convenciones, razón por la cual se puede encontrar variantes en las definiciones de un mismo cuadrilátero.

Los cuadriláteros en las producciones escolares de los estudiantes

Se puso en juego, además, una secuencia de actividades de la cual se desprendió una encuesta que se refería únicamente al abordaje de la clasificación de los cuadriláteros convexos. Dicha secuencia se realizó a docentes de nivel primario y medio, como así también a alumnos de dichas carreras.

La consigna de la actividad planteaba: "Construir el cuadrilátero según los datos dados, detallar los pasos seguidos en la misma construcción y analizar posibles soluciones. Una vez terminado intercambiar con el compañero para que realice la corrección fundamentando su respuesta". En este caso en particular, ya que cada alumno tenía que construir diferentes cuadriláteros, los datos eran: "Construir un romboide sabiendo que una de las diagonales mide 6 cm y la otra 4 cm."

La construcción puede observarse en la figura 4 y la corrección de su compañera se transcribe a continuación: "El ejercicio no es correcto porque se pide graficar un romboide y el dibujo hecho es un rombo. Las diagonales de un romboide no se cortan en la mitad como ocurre si con el rombo."

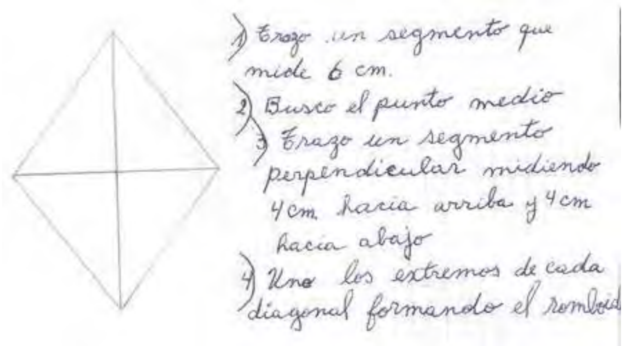


Figura 4: Respuesta de alumnas

El significado dado a la palabra romboide depende del discurso matemático escolar en el cual se encuentran inmerso, ya que por ejemplo en otros escenarios académicos se hace referencia a los romboides para designar a los paralelogramos que no son ni rombo, ni rectángulo (Puig Adam, 1965), denominación que no coincide con el discurso de donde el caso fue extraído. Como se ha dicho el romboide es uno de los cuadriláteros menos abordados en los libros de texto. Para los casos del rombo y romboide en ninguno de los libros analizados se estudia las propiedades en común, o que el rombo puede ser un caso particular del romboide, aunque en algunos de ellos en la clasificación sí se relacionan pero no se deja explícito al momento de estudiar las propiedades. Tal vez, ante esta falta de relación (deducido de la muestra de libros de texto analizados) es que la alumna comete el error de establecer que la construcción realizada no responde a lo pedido, sin poder estableces que el rombo es un caso particular de todas las posibles soluciones al ejercicio dado. Algunas reflexiones finales: se ha dejado registro que la clasificación de cuadriláteros no es única y que esta falta de unicidad se ve reflejado en los contenidos de los libros de texto escolares de una misma época historia. Se plantea que es imprescindible establecer claramente las definiciones con las cuales se está trabajando a la hora de abordar el contenido de cuadriláteros, hacer explícita la clasificación con la cual se adhiere para evitar malos entendidos entre el discurso de los docentes y alumnos. La finalidad de dejar claro con cuál clasificación se acuerda es facilitar el abordaje de las propiedades de dichos cuadriláteros al establecer sus relaciones y al plantear estas relaciones para que sea un trabajo reflexivo y no un estudio memorístico.

Algunos comentarios a partir de este trabajo

Para concluir, no es imposible dar distintas definiciones para un mismo cuadrilátero, lo que lleva a generar clasificaciones distintas en el discurso matemático escolar, siendo todas, por igual, validas ya que son comprendidas como una convención. Dicha coexistencia da muestra de los consensos que se establecen en el proceso de institucionalización de dichas definiciones.

Estos consensos son los que hacen que un determinado cuerpo de conocimiento sea declarado válido para ser enseñado en la escuela (Castañeda, Rosas y Molina, 2009), es la institucionalización de un saber matemático. El tema de la clasificación de cuadriláteros es un ejemplo evidente de la existencia de dichos consensos en el discurso matemático escolar. Ampliando lo expuesto:

> …una convención matemática es un agregado (bajo la forma de una definición, un concepto, una restricción, una interpretación entre otras) a una teoría (o un marco conceptual), establecido con el objetivo de que una estructura, o parte de ella, de objetos matemáticos construida con anterioridad se conserve. Este agregado puede surgir por diversos requerimientos; por ejemplo de generalización, unidad o para evitar contradicciones dentro de la teoría (Martínez, 2002, p.9).

Las convenciones son uno de los mecanismos de corte social que permiten, por ejemplo, la organización y generación de conocimientos matemáticos a través de la construcción de significados y funcionalidad. Cabría preguntarse si los docentes son conscientes de la existencia de estos convenios que, en el caso de los cuadriláteros, derivan en la coexistencia de diferentes clasificaciones. Y luego, la pregunta se traslada a los alumnos, ¿son ellos capaces de comprender que existen consensos que pueden variar?

Referencias bibliográficas

Amadori, L. (1995). *Matemática 2*. Buenos Aires: Aique.

Bogan, A., Estévez de Destuet, E. y Oráis, M. (1993). *Matemática 2*. Buenos Aires: Plus Ultra.

Castañeda, A. (2006). Formación de un discurso escolar: el caso del máximo de una función en la obra de L'Hospital y María G. Agnesi.*Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(2), 253-265.

Cantoral, R., Farfán, R., Lezama, J. y Martínez-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9 (extraordinario 1), 93-102.

Castañeda, A., Molina, G. y Rosas, A. (2009). *Origen y naturaleza del discurso del aula.* XII Escuela de Invierno en Matemática Educativa, IPN, México.Recuperado de http://www.red-cimates.org.mx/Documentos/eime/Grupos/GT01.pdf

Cortés, D. (1987). *Matemática 2*. Buenos Aires: Kapelusz.

Euclides (1944). *Elementos de geometría. Obras completas de Euclides.* Universidad Nacional Autónoma de México.

Huerta, P. (1996*). Los cuadriláteros a comienzos del siglo XIX, a comienzos del siglo XX y a finales del siglo XX, ¿qué ha cambiado?* Suma 21, 55-62.

Lozano, V. y Ghiglione, L. (1995*). Matemática 2.* Buenos Aires: Editorial Métodos.

Martínez, G. (2002). *Explicación sistémica de fenómenos didácticos ligados a las convenciones matemáticas de los exponentes*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa *5*(1), 45-78.

Puig Adam, P. (1965). *Curso de geometría métrica*. Tomo I: Fundamentos. Madrid: Biblioteca Matemática Rey Pastor.

Renzulli, F. y Scaglia, S. (2007). Clasificación de cuadriláteros en estudiantes de EGB3 y futuros profesores de nivel inicial. *Revista de Educación Matemática* 22 (2), 3-19.

Sadovsky, P, Kass, M., Panizza M. G. y Reyna, M. I. (1989). *Matemática 2*. Buenos Aires, Argentina: Santillana.

Sarico, D. (1988). *Matemática 2*. Guía de aprendizaje y evaluación. Buenos Aires: Kapelusz

Vázquez de Tapia, N. (1993). *Matemática 2*. Buenos Aires: Editorial Estrada.

TAREAS Y APRENDIZAJES MATEMÁTICOS EN BACHILLERATO. UN ESTUDIO DE CONTEXTOS

Eddie Aparicio, Landy Sosa, Isabel Tuyub, Martha Jarero
Universidad Autónoma de Yucatán México
alanda@uady.mx, smoguel@uady.mx

Resumen. En el escrito se presentan algunos resultados obtenidos en un trabajo de investigación enmarcado en la teoría socioepistemológica. Particularmente se discute un análisis de los aprendizajes matemáticos asociados a la noción de función como relación entre variables, en jóvenes de bachillerato desde una perspectiva contextual del conocimiento. Se infiere que el contexto guarda estrecha relación con las formas en que estudiantes movilizan su matemática y su pensar, por lo que el aprendizaje se caracteriza como un proceso relacional epistémico contextual.

Palabras clave: matemática, contexto, aprendizaje, función

Abstract. We present some results of a research socioepistemológica. In particular we discuss the mathematical learning associated with the notion of function as a relationship between variables in young high school level from a contextual perspective of knowledge. It is inferred that the context is closely related to the ways in which students move your math and your thinking, so that learning is characterized as a relational process contextual epistemic.

Key words: mathematics, context, learning, function

Introducción

Recientemente diversas investigaciones en Matemática Educativa han incorporado aspectos socioculturales en sus intentos por explicar la naturaleza de los procesos de construcción y difusión del conocimiento matemático, tanto aquel en situación escolar como fuera de éste. La intención ha sido explorar y proveer formas de rediseñar favorablemente el currículum matemático y en tal sentido, en algunos estudios se ofrecen explicaciones de cómo el gesto constituye un medio de análisis que permite tener información sobre las formas en que jóvenes estudiantes desarrollan su pensamiento matemático (Aparicio y Cantoral, 2003; 2006, 2007; Radford, 2003; Nuñez, 2006; Edwards, 2009). En algunos otros se ha centrado la atención en entender cómo el papel de la comunicación entre estudiantes puede ayudar a potenciar el aprendizaje en matemáticas (O' Connor, 1998; Crespo, Farfán y Lezama 2009; Sfard, 2001) y en otros se discute más ampliamente el papel de lo cultural como mediación en los procesos cognoscitivos (Guida de Abreu, 2000; Lerman, 2001; Chappet, 2004; Canul 2007).

Particularmente en este trabajo se aborda un análisis del aprendizaje matemático asociado a la noción de función, desde una perspectiva contextual del conocimiento, buscando con ello no sólo extender el campo de análisis del papel de los aspectos socioculturales en los procesos de construcción, adquisición y difusión del conocimiento matemático en situación escolar, sino, proporcionar evidencia empírica del papel del contexto en la generación de aprendizajes.

Se asume que en una comunidad que interactúa por razón y en razón de un cierto saber matemático, piénsese por ejemplo en una comunidad escolar, se determinan *contextos* específicos a partir de los cuales se generan procesos propios de aprendizaje que derivan en algún tipo de construcción y difusión de conocimiento. En efecto, pues por contexto ha de entenderse el conjunto de condiciones y circunstancias de carácter sociocultural en las que física o simbólicamente se sitúa un hecho o persona, y que supone la especificidad de los fenómenos o situaciones para combinarse de manera única e irrepetible y tener influencia en lo que él acontece.

Marco teórico

En el sentido anterior se reconoce que un análisis múltiple y sistémico de los procesos de construcción, organización y difusión del conocimiento matemático, tanto al seno escolar como fuera de éste, provee de mayores recursos para entender y favorecer los aprendizajes matemáticos, pues el conocimiento se constituye orgánicamente en los individuos en razón de sus experiencias, y éstas a su vez, son producto de interacciones en situaciones donde se da sentido y significación a las nociones o conceptos (para este caso particular, nociones o conceptos matemáticos). En efecto, el conocimiento es un todo, mismo que no podría entenderse o explicarse sólo mirando sus partes constitutivas, o más aún, ignorando las relaciones o correlaciones entre éstas.

Dicho esto, el estudio se sustentó teóricamente en la socioepistemológica de la investigación en Matemática Educativa, pues en ella se asume y reconoce que el centro de la discusión y análisis de los fenómenos didácticos asociados a la matemática, lo constituyen las prácticas sociales asociadas a determinado conocimiento y no propiamente los conceptos matemáticos *per se*. En esa dirección, desde esta visión teórica, el conocimiento matemático se problematiza no a la luz de los conceptos matemáticos mismos, sino a partir de aquello que da origen y funcionalidad a la matemática (esencialmente aspectos de naturaleza social en correlación con aspectos de naturaleza cognitiva, epistemológica y didáctica de los saberes).

Método de estudio

Población participante en el estudio

El estudio se desarrolló en dos aulas de clase en una escuela de educación media superior pública, contando con la participación voluntaria de treinta y seis estudiantes de ambos géneros (hombres y mujeres) que cursaban su primer año de estudio. La edad de los estudiantes oscilaba entre los 16 y 17 años y su participación fue sin recibir algún tipo de compensación o sanción por la misma.

La organización de la población de estudio fue en dos grupos de dieciocho estudiantes. Cada grupo se subdividió en subgrupos de trabajo de tres integrantes, teniendo un total de doce subgrupos, seis por aula. A todos ellos se les aplicó en dos sesiones de sesenta minutos cada una, un instrumento constituido por cuatro bloques de actividades asociadas a la noción matemática función, registrando los datos en notas de campo, video y entrevistas posteriores a la implementación.

Instrumento de recolección de datos

El instrumento empleado consistió de cuatro actividades diseñadas a partir de la información obtenida en una revisión de corte socioepistemológico sobre la noción función, así como atendiendo la naturaleza dual del concepto, esto es, como proceso y como objeto.

En la primera actividad se proponía un trabajo con la noción de función como proceso, asociado a la idea de relación entre magnitudes y relación de dependencia.

En la segunda actividad se atendía la noción de función entendida como un proceso vinculado a la relación entre cantidades variables en un ambiente fenomenológico, es decir, la función como herramienta en la modelación de situaciones variacionales.

En la tercera actividad se requería movilizar la noción de función como proceso y objeto a la vez. Se favorecía la idea de función como objeto de estudio en una relación entre cantidades variables, más que a su simple uso como relación de dependencia entre variables.

En la última actividad se atendía la noción de función como modelo matemático. Se sintetizaban e integraban las ideas plasmadas en las actividades previas, bajo el supuesto de que todo aprendizaje deriva en un conocimiento. Es decir, en la última actividad los estudiantes debían mostrar aptitud para movilizar la noción de función como una relación de correspondencia entre cantidades variables en su sentido dual.

Análisis de datos

Para el análisis de datos se hizo uso de la ingeniería didáctica ampliamente expresada en Artigue (1995), en tanto método de investigación de validación interna en Matemática Educativa. Es decir, se hizo una confrontación entre el análisis a priori (aquello que se espera lograr u obtener en cada una de las actividades diseñadas y en la totalidad del instrumento, previo a su implementación) y el análisis a posteriori (aquello que se obtiene posterior a la implementación del instrumento).

Como resultado del proceso de análisis anterior, se estableció una clasificación de los resultados en tres dominios, las experiencias, lo experimental y lo intramatemático, asociando dichos dominios con alguna etapa de aprendizaje identificada en cada una de las actividades implementadas según la teoría APOS.

En la teoría APOS se reconocen cuatro etapas cognitivas definidas por las construcciones mentales que el individuo establece de una noción o concepto matemático: *acciones, procesos, objetos* y *esquemas*.

Resultados

Las experiencias en el aprendizaje

En un sentido amplio se puede decir que las experiencias de los estudiantes son constitutivas de su actividad cognitiva. En efecto, se detectó que las etapas de aprendizaje (en los términos de la teoría APOS: Action, Process, Objects, Schemas) en las que se lograban ubicar los estudiantes en cada actividad, estaban esencialmente ligadas al tipo de experiencias cercanas con la respectiva situación de análisis. Por ejemplo, el establecimiento de relaciones entre magnitudes tuvo como principal referente las experiencias, situándose el aprendizaje en una etapa de pre-acción. Véase la siguiente actividad y transcripciones de respuestas obtenidas.

Actividad. Relaciona cada magnitud de la Columna A con alguna magnitud de la Columna B, e indica el razonamiento que seguiste en cada caso.

Tabla. 1 Columna de magnitudes

Columna A	Columna B
Distancia	Tiempo
Presión	Longitud
Área	Volumen

Tabla 2. Transcripciones de respuestas ofrecidas por estudiantes en relación de magnitudes

Distancia - Tiempo	Distancia - Longitud	Área - Volumen	Área - Longitud
Para llegar a un sitio hay una distancia que recorrer por lo que hay un tiempo que se toma para recorrer dicha distancia.	Porque la distancia se mide en metros o Km y esas son las unidades de medición de longitud	Es la unidad de medición y es una de las que se toman en cuenta para saber el espacio que ocupa un cuerpo	Porque para conocer el área debemos tener en cuenta la longitud
Necesitas tiempo ¿o no? Cada distancia hay un tiempo.	Distancia la relacioné con longitud por referirse a magnitudes que tienen que ver con la medición	Área se relaciona con volumen porque ambas se usan en geometría	Porque para sacar el área de un cuerpo debemos tener entre los datos la longitud

Pienso que la distancia y el tiempo están muy unidos pues para tener una distancia tenemos que recorrer un camino y eso implica tiempo	Porque longitud te puede decir cuánta distancia hay entre una cosa u otra	Los relacioné por referirse a que con ellas puedo saber la capacidad	Por medio de la longitud se puede hallar el área
Distancia se relaciona con el tiempo porque distancia/tiempo=veloc*idad*	Una distancia tiene cierta longitud, la longitud es la medida de la distancia	Se refieren a lo mismo, a lo que se encuentra en una figura ya sea plana o tridimensional	porque el área es la longitud plana de un cuerpo
Me recuerda una fórmula sobre la velocidad	Es una medida que se mide en cm	El área es la medida del volumen, del volumen sacan el área	longitud determina la longitud de un cuerpo en el plano
Recuerdo que la fórmula de velocidad es $v = {}^{d}/_{t}$			El área ocupa un espacio, es decir, una longitud. Correctamente es que cierta longitud ocupa un área
Porque para llegar a algún lado se necesita medir a cuánta distancia está y en cuánto llegamos			

En esta actividad los estudiantes se situaron en etapa de *pre-acción*que consistiría en la actuación sobre la situación y el concepto implícito en ella, sin embargo tal actuar no conduce a una concepción adecuada. Esta afirmación se hace bajo la consideración de que la mayoría establecieron relaciones sin advertir la particularidad de dependencia variacional entre las magnitudes o en su defecto, establecer relaciones bien definidas.

Se puede entender a la experiencia como un agente determinante al momento de solicitar a los estudiantes establecer relaciones, particularmente, relaciones entre magnitudes variables, tal aspecto guarda congruencia con lo encontrado en la revisión epistemológica sobre el desarrollo de la noción función, donde se puede observar que aunque las definiciones cambiaron, lo que prevaleció en todo el proceso de desarrollo del concepto fue la relación entre variables, condicionada claro, por las situaciones socio-culturales de cada época.

Lo experimental en el aprendizaje

Lo experimental en matemáticas provee de formas de acceder y desarrollar el pensamiento matemático y por ende, el aprendizaje. Se detectó que los estudiantes movilizan su matemática cuando reconocen una relación entre la situación de análisis y sus conocimientos previamente adquiridos, sin embargo, éstos ignoran las singularidades del fenómeno experimental que consecuentemente se traduce en un incorrecto uso del conocimiento. Como ejemplo, se muestra lo referido por los estudiantes al momento de pedirles que predijeran el tiempo en el que una vela en proceso de derretimiento habría de estar a cierta altura.

Actividad. Dispones de cerillos, regla y dos velas idénticas con la diferencia que una es más grande que la otra. Si se te permite encender la primera y tomar los datos que consideres necesarios, ¿en cuánto tiempo después de haber encendido la vela más grande, ésta medirá 3.5 cm? Indica el razonamiento que seguiste para dar respuesta.

Tabla 3. Respuestas obtenidas en relación entre magnitudes mediado por lo experimental

La vela medirá 3.5 cm cuando hayan pasado 5.18 minutos. La vela chica tardó en reducirse 1cm, 1 minuto con 48 segundos y por tanto, la otra vela estaría en las cantidades especificadas. Lo hice por regla de tres.	La vela chica tardó 120 segundos en derretirse 1 cm y la vela grande mide 5.7 cm, para que llegue a medir 3.5 tendrían que pasar 264 segundos	Si 1cm de la vela se consumió en 2 min 07 seg, en la vela de 6 cm, Yo estimo que cuando llegue a a 3.5 cm ya habrán pasado 5 min 10 segundos aprox.
En 1:45 llegó a la primera marca. *A los 4:00 min llegó a la segunda marca. *Vela pequeña mide 3cm. *La vela se apagó a los 6:37 min. Estimación: La vela grande tardará en consumirse 3.5 cm en 6.37 min	2 cm – 1.30 min 1 cm – 4.00 min 4.5 cm – 3.6 min 4.5 cm – 2.22 min No entendí. No me dio el mismo resultado, quizá porque no medí bien el tiempo	1.23 minutos por centímetro Llegará a 4.5 minutos en 2.15 cm de la marca

La "regla de tres" fue usada como herramienta matemática de predicción, ignorándose las características del fenómeno y la validez del uso de dicha regla. En esta situación los estudiantes se ubican en una etapa de acción de aprendizaje, pues logran movilizar una matemática legítima aunque incorrectamente empleada, pues la relación entre las magnitudes variables no es proporcional. Se infiere entonces que lo experimental favorece evocar la matemática y el desarrollo del pensamiento matemático entre los estudiantes. Así, aunado a lo anterior se interpreta un papel decisivo del contexto en los aprendizajes y conocimientos que movilizan las personas en ciertas situaciones.

Conclusiones

Se concluyó que los niveles cognitivos de los estudiantes se encuentran en una estrecha relación con el tipo de situación de análisis a la que se someten, de tal forma que se podría decir que si bien es común pensar que lo cognitivo obedece a implicaciones mentales propias de un individuo, las condiciones socio-culturales (su contexto) en las que se sitúa, hacen que su manera de actuar se encuentre condicionada a ciertas características y por consiguiente, lo que piensa y hace también. Baste mirar los resultados referenciados en el apartado anterior.

En el sentido anterior se comparte lo referido en Radford (2006), al mencionarse que los objetos matemáticos son definidos de acuerdo a la interrelación entre la subjetividad de un individuo y las actividades propias de su realidad cultural que le permiten percibir y dar cuenta del objeto. Cabe decir que en razón de la totalidad de los resultados obtenidos en el estudio, se infiere que las prácticas matemáticas de estudiantes de bachillerato se rigen por cuestiones matemáticas, situacionales y cognitivas, y éstas dan la pauta de qué y cómo se está construyendo el conocimiento matemático, de ahí la importancia de estudiar el papel del contexto en los aprendizajes escolares.

Referencias bibliográficas

Aparicio, E. y Cantoral, R. (2006). Aspectos discursivos y gestuales asociados a la noción de continuidad puntual. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa.* 9(1), 7-30.

Aparicio, E., Cantoral, R. (2007). La formazione della nozione di continuità puntuale presso gli studenti dell'università. Un approccio socioepistemologico. La Matematica e la sua Didattica. *Pitagora Editrice Bologna*, 21(2) 163-196.

Aparicio, E., Cantoral, R. (2003). Sobre la noción de continuidad puntual: Un estudio de las formas discursivas utilizadas por estudiantes universitarios en contextos de geometría dinámica. *Epsilon56*, 169-198.

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno, P. Gómez (Eds), *La enseñanza de los principios del cálculo: Problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos* (pp. 97-107). Iberoamérica, México.

Canul, E. (2007). *Actitudes generalizadas sobre la enseñanza de la matemática en el nivel medio.* Tesis de licenciatura no publicada. Universidad Autónoma de Yucatán. Facultad de Matemáticas.

Chappet Pariès, M. (2004). Comparaison de practiques D' Enseignants de Mathématiques Relations Entre Discours Des Professeurs Et Activités Potentielles Des Élèves. *Recherches en Didactique des Mathemátiques,* 24(2.3), 251 – 284.

Crespo, C., Farfán, R. y Lezama, J. (2009). Algunas características de las argumentaciones y la matemática en escenarios sin influencia aristotélica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 12*(1), 29 – 66.

Guida de Abreu, M (2000). Relationships Between Macro and Micro Socio-Cultural Contexts: Implcations for the Study of Interactions in the Mathematics Classroom. *Educational Studies in Mathematics,* 41, 1-29.

Edwards, L. (2009). Gestures and conceptual integration in mathematical talk.*Educational Studies in Mathematics, 70, 127-141.*

Lerman, S. (2001). Cultural, discursive psychology: a sociocultural approach to studying the teaching and learning of mathematics. *Educational studies in mathematics 46* (1-3), 87–113.

Nuñez, R. (2006). Do real numbers really move? Languaje, thought, and gesture: The embodied cognitive foundations of mathematics. En R. Hersh (Ed.) *18 unconventional essays on the nature of mathematics (pp. 160 – 181).*New York, USA: Springer.

O' Connor, M.C. (1998). Language socialization in the mathematics classroom: Discourse practices and mathematical thinking. In M. Lambert & M.L. Blunk (Eds.) *Talking Mathematics in School: Studies of Teaching and Learning.* (pp.17-55).Cambridge University Press, Cambridge, UK.

Radford, L. (2003). Gestures, speech and the sprouting of signs.*Mathematical Thinking and Learning, 5*(1), 37 -70.

Radford, L. (2006). Elementos de una cultura de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* Número especial. 103-129.

Sfard, A. (2001). There is more to Discourse than Meets The Eras: Looking At Thinking As Communicating To Learn More About Mathematical Learning. *Educational Studies in Mathematics,* 46, 13 – 47.

UNIDADES DIDÁCTICAS EN EL ÁREA DE PRECÁLCULO. UN ESTUDIO SOBRE ORGANIZADORES DE CONTENIDO

Landy Sosa Moguel, Irene Pérez Oxté, Eddie Aparicio Landa
Universidad Autónoma de Yucatán México
smoguel@uady.mx, carolina_azul.18@hotmail.com, alanda@uady.mx

Resumen. En este escrito se presentan resultados de un estudio socioepistemológico para diseñar unidades didácticas basadas en prácticas y verificar la efectividad de organizadores de contenido matemático en su diseño, en el área de Precálculo. En el estudio se buscó determinar condiciones y situaciones para la generación de aprendizajes matemáticos asociados a las nociones de variación y cambio. Se identificó que la relación entre las experiencias de los estudiantes, la naturaleza variacional de las situaciones y la matemática en actividades de naturaleza social fueron un factor determinante en el éxito en la resolución de los diseños de aprendizaje.

Palabras clave: reorganización, saberes, precálculo, práctica, aprendizaje

Abstract. In this paperwe present resultsof a socioepistemologic studyto designpractice-baseddidactic unitsand verify the effectivenessof organizersof mathematical contentin their design,in the area ofPrecalculus. The study sought to determine conditions and situations for the generation of mathematical learning associated with notions of variation and change. It was found that the relationship between students' experiences, the variational nature of mathematics in situations and activities of social nature were a determining factor in the successful resolution of learning designs.

Key words: reorganization, knowledge, Precálculo, practice, learning

Introducción

En la búsqueda de condiciones y circunstancias socioculturales para estructurar un currículo matemático de bachillerato acorde al contexto de una institución educativa particular, en esta investigación se pretende aportar evidencia empírica que oriente bajo qué condiciones y situaciones reorganizar los saberes matemáticos en Precálculo para la generación de aprendizajes matemáticos a partir de diseños didácticos basados en la noción de práctica.

En esta investigación se reconoce como *práctica* a las actividades humanas que posibilitan la construcción de conocimiento matemático en los usos de conocimiento y quehacer de una comunidad para resolver una situación o problema en un contexto específico.

La discrepancia entre la matemática que se enseña y la que se usa en la cotidianidad, entre la actividad matemática escolar y aquella en campos científicos, queda en un plano visiblemente notorio cuando se mira a la matemática en actividades de naturaleza social. Si bien con esta óptica de la matemática se resalta la emergencia del rediseño del discurso matemático escolar y de prácticas educativas que susciten una actividad matemática más auténtica por parte de los estudiantes, también se reconoce a la *práctica*como un contenido transversal en el currículo y eje de reorganización, pues en prácticas como predecir, modelar y optimizar en el quehacer científico se ha concitado el uso y desarrollo de conocimientos, herramientas y habilidades matemáticas, por ejemplo, para entender y explicar fenómenos de naturaleza variacional.

En contexto escolar, Arrieta y Méndez (2009) dan evidencia de cómo la experiencia que se crea mediante el ejercicio de una práctica de modelación lineal, otorga herramientas matemáticas y argumentativas a los estudiantes, con las que significan conocimiento matemático relativo a la noción función. Según Mejía y Nieves (2001), el aprendizaje en Precálculo se debe desarrollar a partir de experiencias para conformar una estructura mental en los estudiantes que les permita acercarse cualitativa y cuantitativamente a los procesos de cambio. Con tal propósito, se considera la pertinencia de la reorganización de contenido y tratamiento didáctico en Precálculo basado en prácticas de resolución de problemas y la modelación de lo variacional (Alanís y Salinas, 2009).

Con el objetivo de verificar la efectividad de organizadores de contenido en unidades didácticas en Precálculo basadas en prácticas, se desarrolló un estudio exploratorio en el que se cuestionó, ¿En qué medida las unidades didácticas basadas en prácticas favorecen la construcción de conocimiento matemático en Precálculo?

Marco teórico

La investigación se encuadra en dos complejidades asociadas al aprendizaje matemático: la construcción de conocimiento y los diseños didácticos, ambas analizadas en el marco de la Socioepistemología. Con esta teoría se analizan los procesos de construcción y organización del conocimiento matemático a partir del análisis de los contextos y prácticas específicas de las comunidades sociales. Dicho así, la organización y construcción de conocimiento matemático comporta el uso de verbos como predecir, argumentar, gesticular, estabilizar y acumular, que representan prácticas vinculadas al uso social y funcionalidad de la matemática (Cantoral, 2004).

Respecto a la construcción (social) del conocimiento matemático, la noción de contexto adquiere especial importancia, pues de la interpretación de las prácticas que ejercen y las construcciones que hacen determinados grupos sociales se concluye que no están determinadas fuera de su existencia y no son unívocas, por el contrario, es en contextos sociales específicos donde se brinda un abanico de posibilidades de construcciones, si bien variado, restringido, donde los actores toman "lo que está a la mano", es decir, el contexto social es una totalidad que da significado a las partes (Arrieta, 2003).

Por tanto, se reconoce a la matemática no como un saber fijo y preestablecido, sino como un conocimiento con significados propios que se construyen y reconstruyen en el contexto mismo de la práctica que realiza el hombre (Arrieta, Buendía, Ferrari, Martínez y Suárez, 2004), es decir, un conocimiento que tiene una función social.

Empero se reconoce que, desde una perspectiva cognitiva, la construcción de conocimientos matemáticos implica el entendimiento e internalización de los símbolos y signos de la cultura y grupo social al que se pertenece, a partir de la negociación mutua de significados y la construcción conjunta de los saberes. Esto es, un conocimiento situado es parte y producto de la actividad, el contexto y la cultura en que se desarrolla y utiliza (Díaz, 2003). Con relación a lo anterior se sabe que:

> "el significado de un concepto se deriva del contexto en que está implicado. Por tanto, es el estatuto como útil lo que entra en juego. También se deriva de las relaciones desarrolladas en el contexto con otros conceptos en el mismo dominio matemático o no" (Douady, 1991, p. 116; citado en Godino y Batanero, 1994).

Según Brown, Collins y Duguid (1989, p. 34), "el conocimiento queda referido a la situación de la que surge y en la que se usa, las situaciones co-producen el conocimiento por medio de la actividad. Se puede argumentar que el aprendizaje y la cognición son fundamentalmente situadas".

Por lo anterior, con base en una perspectiva socioepistemológica, se considera que el conocimiento que se produce en la sociedad se construye bajo un contexto específico, esto es, el conjunto de condiciones y circunstancias en las que física o simbólicamente se sitúa un hecho o persona, asimismo, supone la especificidad de los fenómenos o situaciones, pues éstos han de combinarse de manera única e irrepetible para tener influencia en lo que él acontece. Dicho así, el contexto tiene presencia en las formas de pensar, aprender y actuar de los individuos de una comunidad.

En cuanto a la complejidad de diseño de unidades didácticas en matemáticas, Rico (1998) señala que el problema reside en la definición de criterios para la toma de decisiones sobre tareas en su planeación, desarrollo y evaluación. Por tanto, para su diseño es necesario tomar en cuenta criterios que permitan desarrollar aprendizajes en los estudiantes a través de organizadores menos subjetivos y más funcionales. Se denominan organizadores a aquellos conocimientos que se adoptan como componentes fundamentales para articular tales tareas. Por ende, un organizador debe ofrecer un marco conceptual para la enseñanza de las matemáticas, un espacio de reflexión que muestre la complejidad de los procesos de construcción y difusión del conocimiento matemático y criterios para abordar y controlar esa complejidad.

En ese sentido se consideran como organizadores a los conocimientos derivados de la didáctica de los conceptos matemáticos, su epistemología, los procesos cognitivos que le son asociados a dichos conceptos y lo sociocultural que, bajo un análisis sistémico (socioepistemológico), proporcionan información sobre los procesos de construcción, organización y difusión del conocimiento matemático.

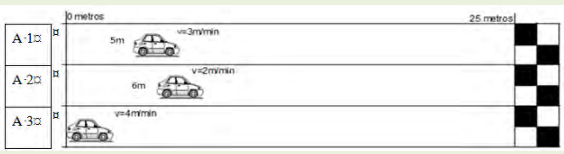
Método

Se diseñó y experimentó una unidad didáctica en Precálculo basada en la práctica de modelación de lo variacional, fundamentada en el análisis socioepistemológico del concepto función.

Las actividades de aprendizaje se estructuraron a partir de tareas de conceptualización, operación y formalización inherentes al desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. Así, se conformó un diseño de unidad didáctica en la que subyace la práctica de modelación lineal en situaciones de naturaleza variacional, continua y discreta.

La unidad se experimentó con dieciocho estudiantes (9 hombres y 9 mujeres) del segundo semestre de una escuela preparatoria, quienes aún no habían cursado Precálculo, conformados en equipos de tres personas.

Tabla 1. Actividades de la unidad didáctica de modelación lineal

<table>
<tr><th colspan="2">Actividad 1: Movimiento de un objeto</th><th>Actividad 2: Costo de un servicio</th></tr>
<tr><td colspan="3">Práctica</td></tr>
<tr><td colspan="2">Generar modelos matemáticos para calcular y representar la variación de movimiento de cuerpos u objetos con rapidez constante</td><td>Generar estrategias y modelos matemáticos para calcular costos a partir de datos numéricos</td></tr>
<tr><td colspan="3">Situación</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td><td>Compañía A
<table><tr><td>Cantidad de llamadas</td><td>3</td><td>6</td><td>12</td><td>18</td><td>21</td></tr><tr><td>Cantidad a pagar por el consumidor ($)</td><td>54.8</td><td>59.6</td><td>69.2</td><td>78.8</td><td>83.6</td></tr></table>
Compañía B
<table><tr><td>Cantidad de llamadas</td><td>3</td><td>6</td><td>12</td><td>18</td><td>21</td></tr><tr><td>Cantidad a pagar por el consumidor ($)</td><td>101.5</td><td>103</td><td>106</td><td>109</td><td>110.5</td></tr></table></td></tr>
<tr><td colspan="3">Tareas</td></tr>
<tr><td>1-2</td><td colspan="2">Describir qué cambia en la situación y con respecto a qué cambia</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Indicar el lugar o posición en el que</td><td>Tomar una decisión sobre qué compañía</td></tr>
</table>

	llegarán los autos a la meta	telefónica ofrece mejor costo de servicio para los hogares
4	Proporcionar un modelo matemático que permita calcular la posición de cada auto conforme el tiempo transcurre	Decidir y argumentar qué gráfica modela el costo del servicio telefónico en los hogares
5	Estimar que tan lejos estará un auto de control remoto cuando haya transcurrido un determinado tiempo	Generar un modelo matemático asociado a los costos de los servicios telefónicos para una empresa y tomar la decisión justificada sobre qué compañía telefónica conviene contratar
6	Etiquetar los ejes coordenados de una representación gráfica, así como describir verbalmente el movimiento de los autos de control remoto durante el lapso de la carrera que se representa gráficamente	

Resultados

El establecimiento de una relación entre la naturaleza de las situaciones y las experiencias de los estudiantes, a partir de la fijación y discusión de la variación, favorece que evolucionen sus recursos y habilidades matemáticas para modelar lo variacional, pero en especial para darle significado a la matemática de la variación y el cambio.

La práctica de modelación lineal y el papel de las experiencias previas de los estudiantes presentes en cada actividad del diseño didáctico, en conjunto dieron la pauta para que ellos movilicen recursos matemáticos y manifiesten significados de nociones matemáticas (por ejemplo, la noción función) y físicas (velocidad, distancia), como puede observarse a continuación en las respuestas de los estudiantes.

Equipo 2:

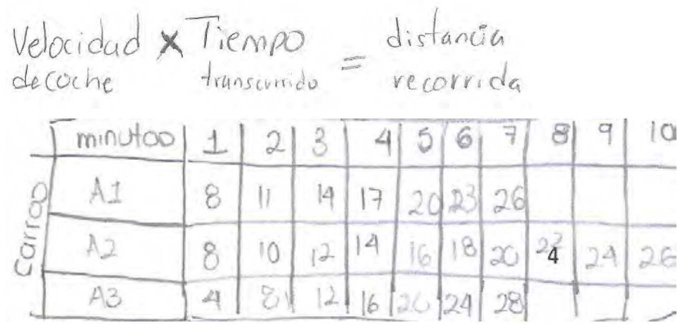
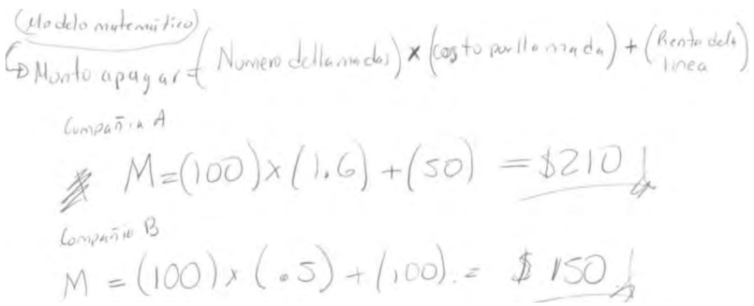


Imagen 1. Respuestas de la Tarea 4 - Actividad: Movimiento de un objeto

Lo anterior permitió que los estudiantes asignaran significados a las componentes de los modelos matemáticos que proporcionaban, de tal manera que al variar una condición en la situación, ellos reconocieron cómo se traduce esto en el modelo obtenido (ver la Imagen 2).

Equipo 2 - Tarea 3



"La compañía B (le conviene) porque cada llamada cuesta $. 50 mas la renta que son 100 y al llegar a las 100 llamadas de los dos se comparan los precios y es más barato la compañía B"

Equipo 2 - Tarea 5

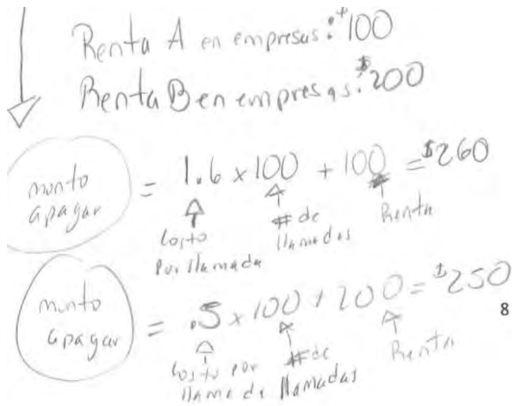
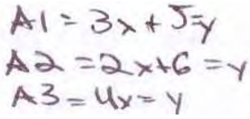


Imagen 2. Respuesta del Equipo 2 - Actividad: Costos de un servicio o producto

Asimismo, las condiciones sociales como la experiencia y la función social de la matemática en los diseños, permitieron evolucionar la práctica de modelación lineal en los estudiantes, lo que se constató en las estrategias, herramientas e incluso argumentos que emplearon en las actividades. Véanse los ejemplos siguientes.

Establecimiento de secuencias de cambios



Equipo 6- Actividad 2

Equipo 4 - Actividad 2

A partir del comportamiento de datos de un modelo primario, establecen otro modelo cuando se ha variado una condición en la situación

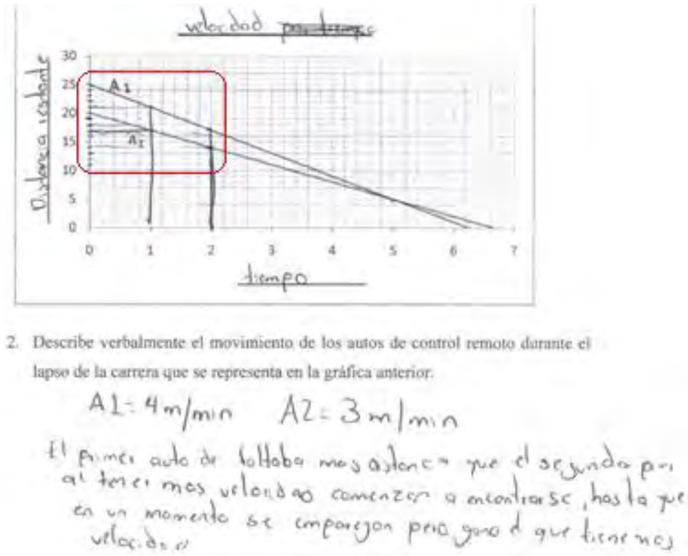
→

A) $=1.6 (x)+50
B) $=.5(x)+100

A) $=1.6 (x)+2 (50)
B)$=.5(x)+2 (100)

Equipo 3 - Actividad 3 y 5

Imagen 3. Evolución en las estrategias o herramientas matemáticas ante una práctica de modelación lineal



Equipo 3- Actividad 2

Equipo 3 - Actividad 3:

"Si la compañía realiza muchas llamadas le conviene la B porque aunque la renta sea cara las llamadas son más baratas. Si son pocas las llamadas le conviene la A porque la renta es menor"

Equipo 5 - Actividad 3:

"La compañía B, porque a pesar de que a partir de 3 llamadas se cobra $101.5, después cobra por llamada $1.5 que resulta menos costoso que la compañía A"

Imagen 4. Argumentos de los estudiantes ante situaciones de modelación lineal

Así, incorporar en los diseños las experiencias del estudiante con la actividad matemática que se pretende construya, en este caso, la práctica de modelación lineal, favorece que el estudiante otorgue significados a los conceptos matemáticos que subyacen en las actividades (en esta unidad, el concepto función lineal) y realmente hace que evolucione su práctica conforme se enfrenta a más situaciones de este tipo.

Conclusiones

Cuando en los diseños de aprendizaje se parte de organizadores obtenidos de la interacción del análisis entre la epistemología del conocimiento, lo social, cognitivo y didáctico asociado a nociones del Precálculo, adquiere importancia la integración tanto de la matemática en actividades de naturaleza social como de tareas que posibiliten el desarrollo de estructuras cognitivas variacionales para ampliar las posibilidades de éxito en la resolución de actividades y en la construcción de significados matemáticos.

Así, la relación dialéctica entre las prácticas diseñadas bajo este modelo y las experiencias de los estudiantes, es decir, entre la función social de la matemática y el individuo son condiciones bajo las cuales el estudiante otorga un significado a lo que hace y por ende construye conocimiento matemático que es funcional en la situación que le da cabida.

Referencias bibliográficas

Alanís, J. y Salinas, P. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 12(3), 355-382.

Arrieta, J. y Méndez, M. (2009). La experiencia como la evolución de las prácticas sociales. En P.Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22,* 573-580. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula.* Tesis de de doctorado no publicada, Institución Centro de investigación y de estudios avanzados del instituto politécnico nacional. Unidad Zacatenco. Distrito Federal, México.

Arrieta, J., Buendía, G., Ferrari, M., Martínez, G. y Suárez, L. (2004). Las prácticas sociales como generadoras del conocimiento matemático. En Leonora, D. (Ed). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17(1),* (418-422) México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Brown, J. S., Collins, A. y Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning.*Educational Researcher*, January-February, 32-42.

Cantoral, R. (2004) Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. En L, Díaz (Ed). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17(1),* 1-9. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Díaz, F. (2003). Cognición situada y estrategias para el aprendizaje significativo. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 5* (2). Consultado el 20 de Septiembre de 2011 en: http://redie.ens.uabc.mx/vol5no2/contenido-arceo.html

Godino, J. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325-355.

Mejía, H. y Nieves, A. (2001). Propuesta de análisis del cambio en el Precálculo, a partir de una situación real. En C. Cortés, F. Hitt, A. Sepúlveda y L. Guerrero (Eds.). *Memorias del Noveno encuentro de profesores de matemáticas del nivel medio superior* (pp. 174-181). Michoacán: Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

Rico, L. (1998). Complejidad del currículo de matemáticas como herramienta profesional. *RevistaLatinoamericana de Investigación en Matemática Educativa1*(1), 22-39.

FORMAS Y USO DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO. UN ANÁLISIS EN COMUNIDADES DE PROFESIONALES Y DE CIENTÍFICOS

Landy Sosa, Julio Yerbes, Melby Cetina, Isabel Tuyub
Universidad Autónoma de Yucatán México
smoguel@uady.mx, julyer11@hotmail.com, melby_gcv@hotmail.com, isabel.tuyub@uady.mx

Resumen. En el presente artículo se presentan los resultados del análisis de formas y usos del conocimiento matemático que subyacen en torno a ciertas prácticas en una comunidad de Biología Marina y en el área de producción de una empresa. Se trata de un estudio socioepistemológico que se llevó a cabo para identificar el papel del contexto en el uso y funcionalidad de dicho conocimiento en escenarios no escolares, con el propósito de reconocer condiciones socioculturales que posibiliten la transferencia del conocimiento escolar al entorno del estudiante.

Palabras clave: contexto, formas y uso, conocimiento matemático

Abstract. This articlepresents the resultsof the analysis offorms and usesof mathematical knowledgeaboutunderlyingcertain practices ina community ofMarine Biology andproduction areaof a company.This isa socioepistemologic studythatwas carried outto identifythe role of contextin the useand functionality ofsuch knowledge innonschoolscenarios, in order to obtainsocio-cultural conditionsthat enable thetransferof school knowledgeto thestudent'senvironment

Key words: context, formsand use, mathematical knowledge

Introducción

La transferencia del conocimiento matemático escolar a ámbitos o situaciones fuera de esta por parte de los estudiantes, es una problemática que ocupa a un grupo de investigadores en Matemática Educativa que desarrollan estudios sobre el papel del contexto en los aprendizajes matemáticos, para obtener lineamientos que sustenten la conformación de un programa educativo de matemáticas en bachillerato acorde al contexto de la institución (véase Aparicio, Sosa, Jarero y Tuyub, 2010).

Se asume que el conjunto de condiciones y circunstancias de carácter sociocultural en las que física o simbólicamente se sitúa un hecho o persona, en conjunto con la especificidad de los fenómenos o situaciones que a él acontecen, denomínese a esto el contexto, influye en las formas de pensar, aprender y actuar de los individuos. En particular, los resultados que aquí se presentan corresponden a estudios que se ubican en un nivel de análisis macrosociocultural (interacción institución-sociedad-conocimiento) del papel del contexto en las formas y usos del conocimiento matemático en ámbitos fuera de la escuela.

Se sabe que la matemática adquiere sentido y significación en dominios no escolares como el científico o en prácticas de referencia (Cantoral y Farfán, 2003) en los que se manifiesta su estatus funcional. Por ejemplo, en algunas investigaciones de corte socioepistemológico

(García-Torres, 2008; Tuyub, 2008; Vázquez y Cordero, 2009), se escudriñan los mecanismos y procesos de uso de conocimiento matemático en prácticas científicas, en las cuales se vislumbra el carácter funcional del conocimiento matemático en la toma de decisiones, ejecución de tareas, definición de protocolos o resolución de problemas en el quehacer científico.

Si bien la matemática escolar está al servicio de dominios científicos y prácticas de referencia como las antes citadas, el estatus funcional de la matemática se soslaya en el ámbito escolar. Aunado a lo anterior y en disonancia con la lógica de tratamiento del contenido matemático escolar, en las prácticas científicas, tal como señalan (Cordero y Flores, 2007), los mecanismos de desarrollo del uso de conocimiento en una situación específica se basan en una justificación normada por aquello que le es de utilidad al humano, no en una proposición lógica.

Por otra parte, un aspecto relevante que deriva de tales investigaciones es el reconocimiento de prácticas, como la optimización, que norman el uso y construcción de conocimiento matemático, pero en particular de la presencia de ciertas condiciones socioculturales (el contexto) que inciden en el uso de dicho conocimiento y en el actuar de los individuos, por ejemplo, la interrelación entre personas, las experiencias, la generación de consensos, las situaciones, por citar algunas.

Visto desde estas aristas, en esta investigación la práctica se considera como un medio de análisis para indagar qué relación existe entre lo que se enseña-aprende en la escuela y lo que se usa fuera de ella, más aún, para entender cómo podría vincularse el conocimiento escolar con la realidad. Por tanto, resulta de interés analizar el papel del contexto en los usos y formas del conocimiento matemático fuera del ámbito escolar. Es así que se cuestiona ¿Qué y cómo se usa conocimiento matemático en torno a ciertas prácticas en comunidades no escolares? ¿Cuáles son las condiciones socioculturales asociadas al uso de tal conocimiento?

Marco teórico

Una premisa en esta investigación consiste en la afirmación de que en una práctica (por ejemplo, en un ámbito científico o profesional) no solamente se genera, sino se significa y contextualiza, el conocimiento matemático. Se entiende por práctica lo que se constituye de los procesos y mecanismos que emergen en los usos de conocimiento y quehacer de una comunidad, que posibilitan la constitución o construcción de conocimiento matemático.

Así, la investigación se sustenta en la teoría socioepistemológica que se basa en la tesis de que las prácticas sociales son generadoras de conocimiento matemático y en el estudio de la epistemología de prácticas, es decir, en el estudio de las circunstancias que favorecen o posibilitan la construcción del conocimiento, concibiendo a la matemática como un conocimiento con significados propios que se construyen y reconstruyen en el contexto mismo de la práctica que realiza el hombre (Arrieta, Buendía, Ferrari, Martínez y Suárez, 2004).

Con este engranaje de ideas, se analiza la relación del contexto con los usos y formas de conocimiento en ciertas prácticas en comunidades no escolares. En el desarrollo del escrito, considérese al uso como “la función orgánica de una situación que se manifiesta por las tareas que la componen” (Cordero y Flores, 2007, p10). La forma del conocimiento matemático se refiere al sentido con que se usa la matemática, no el objeto o su representación, es decir, la forma será aquello que subyace al uso de dicho conocimiento que lo hace asumir cierta representación.

Método de investigación

El desarrollo de la investigación giró en torno a observar el uso y forma de la matemática que subyace en prácticas de contextos no escolares de naturaleza distinta: una *científica*, basada en la investigación y producción de conocimiento; y otra *operativa*, basada en rutinas y actividades laborales.

Las poblaciones de estudio y el método para recabar información se sintetizan en la tabla siguiente:

Práctica	Científica	Laboral
Población	Científicos de una comunidad de Biología Marina	Empleados del área de producción de una empresa
Motivo de elección de la población	Impacto en economía, pesca e industria en la región. Identificación de la matemática y la modelación en sus producciones escritas	Empresa de la región con expansión comercial, diversificación en productos y crecimiento económico. Matemáticas en el área de producción
Técnica de recolección de datos	Análisis de artículos científicos (Robledo y Freile-Pelegrín, 2010; Guzmán del Próo, 1993; y Muñoz, Freile-Pelegrín y Robledo 2004). Entrevista a un científico de la comunidad	Análisis etnográfico de observación no participante.
Instrumentos	Cuestionario de entrevista semi-estructurada con preguntas sobre la práctica científica, su impacto social y su relación con lo escolar	Listas de cotejo Registro en audio Notas de campo

Tabla 1. Población y método de la investigación

Formas y uso de conocimiento matemático en ámbitos no escolares

En actividades del quehacer en las comunidades referidas, la optimización es una práctica que norma la movilización y uso de conocimiento matemático, por ejemplo, en la determinación de las condiciones y el sistema de cultivo con mayor factibilidad para producir un cultivo comercial de cierta especie de alga marina en una localidad costera de Yucatán (en Biología Marina) y en la obtención de productos alimenticios de alta calidad en un menor tiempo y sin desperdiciar material (en el área de producción).

La matemática subyacente en las prácticas observadas se asocia con propósitos relacionados a saberes matemáticos que se espera desarrollar en bachillerato como son: el establecimiento de relaciones entre variables, la modelación de la variación lineal y exponencial, el cálculo de proporciones y el análisis del comportamiento gráfico de funciones. Tanto en la práctica científica como laboral se observó una función social de la matemática en la que ésta adquiere significación según las situaciones y experiencias de los participantes en las prácticas. Véanse los ejemplos siguientes.

En la práctica científica, en el análisis preliminar de la ventana de oportunidades que significa producir cierta especie de alga en México, algunos científicos determinaron cómo ha variado la demanda de dicha especie a lo largo de los años a partir en un análisis global de manera tendencial en un gráfico sobre valores de importación (Imagen 1), asociado a un modelo lineal, que resultó efectivo para explicar la existencia de un aumento o disminución en la demanda.

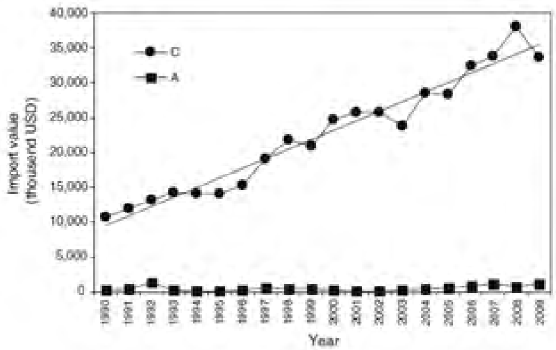
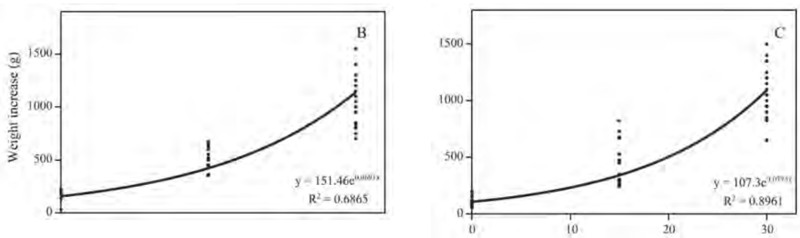


Imagen 1. Gráfico sobre valores de importación en dólares de algas a Méxicopara el período1990-2009.

En este caso, el científico entrevistado otorga un significado a la variación lineal creciente como un modelo de relación entre variables (valores de importación en dólares y años en el periodo), con el que intenta comunicar que la tendencia global en los valores de importación presenta un aumento constante. Tal matemática adquiere sentido en el contexto del quehacer de los biólogos marinos, pues éstos lo traducen en términos de “incrementos o aumentos en la demanda de carregenina (producto derivado de una especie de alga) en México”.

Con ese tipo de modelos matemáticos establecen justificaciones: "*la industria de la especie de alga en México ha crecido mucho porque se utiliza en la industria cárnica y láctea*", y conclusiones: "*si la industria del alga crece, la demanda por su materia prima crece… si hay mayor demanda… tiene que haber más ofertas y las ofertas están en la producción de algas a partir del sistema productivo costero*", que le serán de utilidad en la toma de decisiones y para mostrar la pertinencia de su investigación.

En otra actividad científica, se usó la matemática en una prueba de cultivo piloto del alga con el propósito de inferir el rendimiento en su crecimiento bajo cierto sistema de cultivo y en cierta zona costera de Yucatán, para así determinar su productividad y comprobar la viabilidad de su cría comercial. Entre las tareas realizadas se encuentra el registro de los datos de la tasa de crecimiento del alga por día, ajuste de éstos a un modelo gráfico (Imagen 2) que represente el crecimiento según los días de cultivo y estimar su productividad en un área mayor, a partir del promedio de datos.



Días en cultivación

Imagen 2. Curvas exponenciales de crecimiento de cierta alga después de 30 días de cultivo (Muñoz, Freile-Pelegrín y Robledo, 2004)

En la descripción del proceso de crecimiento de una especie de alga marina (Imagen 2), los modelos gráficos representan una variación exponencial que adquirió significado para los científicos como un modelo de relación entre variables reales continuas cuyo comportamiento presenta variaciones de rápido crecimiento.

En la práctica laboral, con base en las experiencias de los empleados ante ciertas situaciones en las tareas de producción, se usan estrategias y argumentos matemáticos para resolver problemas y realizar actividades de la rutina de trabajo. Por ejemplo, se detectó el problema del mal funcionamiento de una máquina con la que se terminaba de elaborar un producto, cuando se observó que el tamaño de cada producto era mayor al esperado. Ante tal situación, un par de empleados establecieron relaciones entre la medida de longitud de un empaque de la máquina y el tamaño del producto, según la cantidad de materia prima requerida en su elaboración. El análisis visual de la correlación entre las variaciones de estas medidas favoreció generar un argumento matemático que permita determinar la longitud adecuada del empaque para solucionar el problema.

En otra parte del área de producción, en un determinado momento, cuando se terminó de elaborar la masa de cierto producto, se percibió que tenía un ingrediente extra. Debido a que una norma de la empresa es no desperdiciar material y que la producción no se retrase, se reunieron un grupo de trabajadores para resolver el problema. Para ello usan estrategias matemáticas de experimentación y estimación para proponer una solución al problema. Después de aplicarla se reúnen analizan su impacto y se determina que esa solución no funcionó, de manera que se propone otra solución que consistió en combinar porciones de la masa de dos productos. Esta estrategia se aplica y se obtienen resultados favorables. Posteriormente, se identifica cuál fue el ingrediente extra que se agregó a la masa.

Así, la forma de la matemática en una práctica es como un generador de argumentos para legitimar un resultado, tomar una decisión o validar un dato a través de consensos de los miembros en las comunidades.

Por ejemplo, en Biología Marina los modelos gráficos con funciones, por citar algunos, se usan en el análisis tendencial de información sobre los valores de importación de algas (Imagen 1) como argumento para decidir sobre la viabilidad de una planta comercial de cultivo algas en el país. También, se usan en la predicción matemática sobre el crecimiento de algas como argumento (Imagen 2) para validar la elección del cultivo de cierta alga según su rendimiento.

En lo que respecta al área de producción de la empresa, en la resolución de un problema, la matemática se convierte en un argumento para determinar las proporciones de ingredientes que permitan contrarrestar el efecto de un ingrediente extra en la elaboración de cierto producto, así como para analizar el efecto que producen los ingredientes en una mezcla y descartar otros, por mencionar un ejemplo. En los dos tipos de comunidades se usa la matemática como una herramienta para tomar decisiones consensuadas y sustentadas.

Los argumentos matemáticos posibilitan que haya interacción entre los usos de conocimiento matemático identificados en la práctica de optimizar en Biología Marina, tales como: analizar información, experimentar, predecir y tomar decisiones.

En ambas comunidades, científica y profesional, se reconoce la presencia de factores socioculturales que influyen en los usos del conocimiento matemático, tales como las experiencias situadas, las situaciones, las intencionalidades y necesidades de las actividades, la generación de consensos, la identidad como comunidad y las formas de interacción, mismos que contribuyeron a la realización efectiva de actividades en el quehacer de los individuos en las comunidades.

Conclusiones

La forma de uso de la matemática deviene de la práctica. En los usos del conocimiento matemático se construyen y determinan los significados de la misma a partir de establecer una relación dialéctica entre las experiencias situadas de los individuos, la matemática y su función en actividades de naturaleza social.

Con base en esta dialéctica se constituye un marco de referencia matemático que integra el uso de la matemática y su forma, es decir, dicho marco permite a las personas decidir que matemáticas usar, cómo y por qué en un contexto específico. De manera que, la función social de la matemática se ve reflejada como una herramienta para entender y explicar los fenómenos y situaciones a los que se enfrenta el individuo en su vida cotidiana, científica y profesional. Lo anterior hace considerar la función social de la matemática como una condición y vía para que el conocimiento matemático escolar pueda transferirse a contextos no escolares.

Referencias bibliográficas

Aparicio, E., Sosa, L., Jarero, M. y Tuyub, I. (2010). Conocimiento matemático. Un estudio sobre el papel de los contextos. En Rodríguez y Aparicio (Eds.), *Memoria de la XIII Escuela de Invierno en Matemática Educativa*. (pp. 167-174). México: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa.

Arrieta, J., Buendía, G., Ferrari, M., Martínez, G. y Suárez, L. (2004). Las prácticas sociales como generadoras del conocimiento matemático. En L. Díaz Moreno. (Ed). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17(1),* (418-422) México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* 6(2). 161-193.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 10(1), 7-38.

García-Torres, E. (2008). *Un estudio sobre los procesos de institucionalización de las prácticas en ingeniería biomédica. Una visión socioepistemológica.* Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Guzmán del Próo, S. (1993). Desarrollo y perspectivas de la explotación de algas en México. *Cienc Pesq (México)* 9, 129– 136.

Muñoz, J., Freile-Pelegrín, Y. y Robledo D. (2004). Mariculture of Kappaphycus alvarezii (Rhodophyta, Solieriaceae) color strains in tropical waters of Yucatán, México. *Aquaculture 239*, 161–177.

Robledo, D. y Freile-Pelegrín, Y. (2010). Prospects for the cultivation of economically important carrageenophytes in Southeast Mexico.*Journal of Applied Phycology DOI* 10.1007/s10811-010-9585-8.

Tuyub, I. (2008). *Estudio socioepistemológico de la práctica toxicológica: un modelo de la construcción social del conocimiento.* Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN. México.

Vázquez, E. y Cordero, F. (2009). Funcionalidad de la estabilidad en biología. Un estudio socioepistemológico. En Buendía y Castañeda (Eds.), *Memoria de la XII Escuela de Invierno en Matemática Educativa,* (pp. 250-260). México: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa.

LOS TÍTERES: DE LO ESTÉSICO A LO GEOMÉTRICO

Marcela Ferrari Escolá
Universidad Autónoma de Guerrero México
marcela_fe@yahoo.com.mx

Resumen. Discutiremos en este reporte, bajo la perspectiva socioepistemológica, el papel que los títeres, como expresión cultural que nos acompaña desde la prehistoria y que han ido evolucionando a la par del humano, juega en el desarrollo del pensamiento geométrico. Nos centraremos en el análisis del trabajo de los Matetíteres, grupo de teatro guiñol donde estudiantes y maestros de matemática educativa se dan cita para crear, producir y presentar obras de títeres con el fin de acercar las matemáticas a las personas en ámbitos no escolares; prestando atención a la interacción que se genera con los niños luego de escuchar… primera… primera llamada… comienza la función… preguntándonos entonces sobre ese elemento sutil, lo estésico, como ingrediente del desarrollo de lo geométrico.

Palabras clave: figuras geométricas, títeres, estesis

Abstract. We will discuss in this report, under the perspective socioepistemological, the paper that the puppets, as cultural expression that accompanies us from the prehistory and that they have been evolving at par of the human being, plays in the development of the geometric thought.

We will centre on the analysis of the work of the Matetíteres, group of theatre of puppets where students and teachers of educational mathematics give themselves appointment to create, to produce and to present works of puppets in order to bring the mathematics over to the persons in not school areas; paying attention to the interaction that is generated by the children after listening … first … to the first call … it begins the function … wondering then on this subtle element, aesthesical, as ingredient of the development of the geometric thing..

Key words: geometric figures, puppets, aesthesia

Introducción

Varios son los años que los Matetíteres, como grupo de teatro guiñol, están presentes en la comunidad acapulqueña dando respuesta a un desafío lanzado por la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, sobre acercar las matemáticas al ciudadano, trabajando para generar un diálogo distinto al que aún persiste en las aulas (Ferrari, 2010).

En la escuela mexicana, títeres y matemáticas parecieran ocupar nichos distantes e incluso no dialógicos, generando quizás realidades disjuntas, aquellas construidas socialmente en el sentido discutido por Berger y Luckmann (2008). Pareciera haberse quebrado las vías de comunicación entre lo sensible y los saberes matemáticos a transmitir; entre la posibilidad de jugar equivocándose al intentar comunicar y la complejidad de adoptar un lenguaje ajeno al ser impuesto sin discusión sin invitación a participar en una construcción de herramientas adecuadas para su uso posterior.

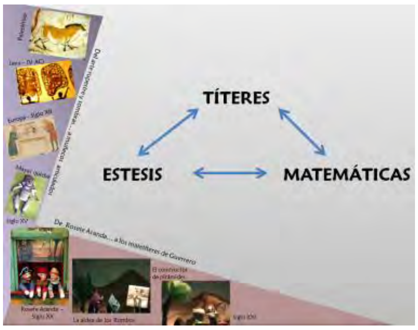
Nuestra disciplina, la matemática educativa, ha ido evolucionando atenta a diferentes factores y variables que impactan en la apropiación de herramientas matemáticas, siendo sensible a analizar el distanciamiento entre los saberes escolares basado en génesis ficticias y la mayoría de las veces recontextualizadas artificialmente, marcando una gran distancia con las matemáticas de uso y su funcionalidad.

Según Giménez, Díez-Palomar y Civil (2007) sigue percibiéndose, lo ya reportado en Carey, Fennema, Carpenter y Franke (1997), las y los estudiantes de todos los niveles educativos presentan una actitud de rechazo hacia las matemáticas mismas que se refleja, entre otras cosas, al alardear de sus malos resultados como una forma de sobresalir de sus amistades. En uno de los primeros reportes del National Research Council (NRC), dado en 1989, se exponía que "la distancia entre quienes tienen éxito en el estudio de las matemáticas y quienes no lo tienen «coincide alarmantemente con las categorías sociales y de grupo étnico»" (NRC, 1989, p.14; citado en Giménez, *et al.* 2007, p. 9).

La investigación sin embargo, fue tomando rumbos distintos. Algunos, como Carreher, Carreher y Schilemann (1991) o Arrieta (2003), evidenciaron la distancia entre la matemática escolar y la de uso cotidiano basando sus explicaciones en el impacto del contexto y la funcionalidad de las matemáticas alejada de las explicaciones escolares. Otros, realizaron estudios de género como Campbell (1997, citado en Giménez, *et al.* 2007, p. 17) reportando la inversión del rol de las niñas como matemáticas exitosas en su niñez ganando esos puestos los muchachos en los cursos superiores. Otros se detuvieron a analizar el impacto que el lenguaje tiene en la comprensión de una clase de matemáticas cuando se da en un idioma distinto al natal tal como lo reporta Cummins (2000, en Giménez, *et al.* 2007, p. 14), e infinidad de otras investigaciones que centran su discusión en la matemática en sí, con todos los matices que cada objeto matemático a transmitir conlleva, con su propia complejidad, así como en sus mecanismos de transmisión escolar.

Evidencian así, las investigaciones mencionadas, entre otras muchas, que las matemáticas fueron convirtiéndose lentamente en herramientas para la exclusión, de "medición" de éxitos o fracasos escolares, de generar un aurea, una creencia de que son "difíciles" y sólo para personas especiales, alejándonos cada vez más de su esencia, de esa mirada contextualizada que le da razón de ser, esa que la utilizamos a diario sin darnos cuenta de que están allí, quizás no con un lenguaje puro y riguroso, sino empapado de intuición y creatividad.

Las matemáticas en tanto, estructuradas desde el rigor científico, como aquello que debe ser transmitido, preservado, se alejan cada vez más de sus génesis, de sus primeros argumentos, invitándonos escolarmente a conocerla desde sus síntesis más descarnadas, en general desde las “obligaciones” de saber y de demostrar diariamente que desarrollamos nuestro lenguaje matemático, la mayoría de las veces como aquel discurso externo que se requiere reproducir sin cuestionar ni cuestionarnos, evolución que está en permanente vigilancia disminuyendo quizás nuestro gusto por ellas al ir aumentándose la distancia entre la matemática escolar y la matemática del cotidiano (Arrieta, 2003; Carraher, Carraher y Schilemann, 1991; Chaiklin y Lave, 2001).



En contraposición, los títeres, estructurados desde el juego, la expresión artística, la creatividad en un mundo donde lo titiritesco propicia el transferir a un objeto inanimado nuestra propia voz (Palomas, 2002; Tillería, 2003; Rogozinski, 2005; Szulkin y Amado, 2006), nos permiten escapar de nuestra propia realidad, de aquella que nos aprisiona.

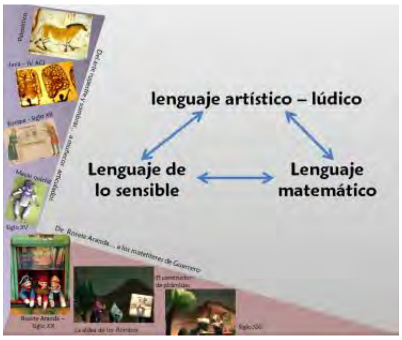
Discutiremos entonces en este reporte, un primer análisis de una parte del trabajo de los Matetíteres, un grupo de teatro guiñol donde estudiantes y maestros de matemáticas se dan cita para crear, producir y presentar obras de títeres con el fin de acercar las matemáticas a las personas en ámbitos no escolares, prestando atención principalmente a la interacción que se genera con los niños luego de escuchar… primera llamada… primera llamada… comienza la función…

Reflexiones teóricas y metodológicas

Para Mané Bernardo (1988), titiritera argentina del siglo pasado, el títere “…Es un muñeco y algo más… Ligado al hombre desde la más temprana edad de la historia, que se ha mantenido a través de los siglos hasta hoy, época en que se le da cabida en muchos campos de la ciencia, del arte, de la filosofía, de la educación” (en Escalada Salvo, 1993, p. 11). Para nosotros, los títeres, como toda expresión artística, abren paso a la estesis como aquella manera de hablar de lo sensible, de la significancia, de los procesos que involucran a un ser en tanto sujeto abierto al mundo (Mandoki, 2008, 2006) entremezclada con la semiosis en tanto proceso de intercambio de significación y significancia. Según Finkel, (1984), los títeres permiten situarse en un plano de intersección entre lo lúdico y lo real, porque el niño puede identificarse con ese objeto amigable y crear con él escenas imaginarias, pero también puede proyectar y atribuirle vivencias reales que no podría aceptar en sí mismo.

Coincidimos también con Santa Cruz y García Labandal (2008) sobre que los títeres constituyen un modo de expresión universal, sin edad ni clase social, que propician la comunicación entre personas, favoreciendo la autoestima, posibilidad de humor, potencia la creatividad y genera la autonomía, pilares fundamentales de la resiliencia (p.13), constructo teórico de psicólogos para explicar la capacidad del humano "de afrontar la adversidad y resurgir fortalecido creativamente" (p.12).

Incorporar al títere en el ámbito matemático escolar ha sido un reto que ha tensionado la difusión de saberes invitando a jugar y el análisis del impacto que podría generar en niños de nivel básico. Es reconfortante escuchar las risas de complicidad y los gritos en defensa del débil, los gestos de asombro entremezclados con incredulidad, esa extraña complicidad niño-títere, esa zambullida al cuento que se desarrolla, esa incorporación a esa irrealidad que pareciera ser tan tangible para ellos.



Es la socioepistemología (Cantoral, Farfán, Lezama, Martínez, 2006) quien enmarca este trabajo invitándonos a realizar estudios sistémicos centrándonos en develar epistemologías de prácticas. Nos preguntamos entonces, sobre los lenguajes que invaden este espacio, donde lo lúdico, lo sensible y lo matemático se entrelazan y emergen en esas prácticas implícitas, naturalizadas, en aquellas que ya no cuestionamos o reflexionamos sobre ellas, sólo nos comunicamos.

El trabajo detrás de escena, que inicia generalmente con la decisión sobre el argumento central de la obra, de trabajar sobre cómo generar un diálogo que provoque risas y discusiones, reflexiones divertidas entrelazadas con objetos matemáticos, pensar en los personajes y la forma que se les dará a los muñecos, generar la utilería que enmarcará el cuento, las prácticas constantes para ajustar los tiempos y entradas así como cambio de telones y escenografía, para finalmente presentarlo a un público crítico, los niños, genera una comunidad especial.

Forma, espacio y medida es uno de los tres ejes de contenido en los programas de matemáticas en México, y que ha sido el más trabajado por los Matetíteres en la creación de algunas de sus obras. Analizaremos en este reporte el impacto que ha generado *El Pirata Barbasucia*, obra presentada varias veces en ámbitos no escolares y que ha ido evolucionando desde su estreno en el año 2006 durante la Expomatemática en el Zócalo acapulqueño. Discutiremos entonces, algunos elementos percibidos durante su presentación en un preescolar acapulqueño frente a ochenta niños de entre tres y cinco años, actividad analizando desde la videograbación de la actuación y gracias a la colaboración de sus maestros quienes continuaron en sus salones discutiendo las obritas solicitándoles a sus pequeños que dibujaran a su personaje favorito.

La participación emocionada de los más pequeños

El argumento central de la obra *El pirata Barbasucia*, gira alrededor de la búsqueda de un tesoro que les obliga a cruzar mares y océanos guiados por pistas que encuentran en cada isla a la que llegan. El mapa es el mediador del diálogo con los pequeños ya que el pirata Barbasucia y su compañero Perico, solicitan apoyo a los niños para determinar el rumbo que deben seguir (ver Figura 1). La emoción, el nerviosismo, las risas y los gritos no se demoran en aflorar cuando las cortinas del teatro se abren y aparece, en un mar embravecido, al barco que transporta al Pirata Barbasucia.

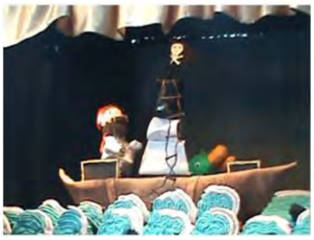


Figura 1: El pirata Barbasucia y su Perico en búsqueda de un tesoro

Encontrar el mapa es el primer desafío que propone la obra, y en esa discusión aparece un tiburón. Entre sorpresa y susto, los niños comienzan a gritar que hay un tiburón formando un alboroto cada vez que la cabeza se asoma. Esta emoción tan a flor de piel de los pequeños se traduce en un zapateo nervioso en uno de los niños de tres años quien se para e intenta avisarle a todos sus compañeritos que hay un tiburón… (ver Figura 2)

Figura 2: Entre sorpresa y nervios compartir con los compañeritos

Aparece entonces la primera pista, que el pirata lee: "*¿Cómo se llama la isla que es redonda… redonda…?* mientras gira su bracito en forma circular en espera de una respuesta del público. Rápidamente los niños repiten el movimiento con sus manos en el aire en tanto gritan al unísono: *"círculo… círculo"*… reconociendo así la primera figura geométrica con la que se inicia el diálogo con ellos. Luego, el pirata les pregunta: *"donde está la isla círculo… ¿arriba o abajo del barco?...* sin dudar todos los niños vuelven a gritar *"arriba… arriba"*… expresiones que el perico recoge: *ahhh… hacia el norte… vamos al norte…* idea que es reforzada por el pirata al repetir *"para arriba… vámonos al norte… vámonos".*

El pasaje de la isla Círculo hacia la siguiente isla llamada "Triángulo", provoca desconcierto en los más pequeños, pues asociar abajo y derecha, es decir, "sureste" fue imposible de armar como respuesta, por lo que el apoyo se redujo a gritar *"ahí… ahí"*… indicando con los brazos. Ante la exigencia del pirata que indicaran "donde", los niños optan por salir corriendo para indicar en el mapa, con sus deditos, el lugar donde estaba la isla… (ver Figura 3).

Figura 3: Pequeños indicando el triángulo con gestos distintos

En tanto esto sucedía con los pequeños de tres años, los niños de cinco años, asociaban la palabra "triángulo" con el gesto de armar en el aire un triángulo con sus manos, tal como su maestra se los había mostrado en clase. Este tipo de gestos acompañaron toda la obra, generando un ambiente de alegría y participación, atención y discusión, respeto y apoyo, abriendo así un interesante vínculo entre el argumento principal de la obra, la ubicación espacial en cuanto a reconocer los puntos cardinales a partir del "arriba-abajo" de los niños y del "norte-sur" de los títeres, así como el reconocimiento de algunas de las figuras geométricas que se introducen en preescolar.

Para varios de los niños, esta obra fue la más interesante, y la que eligieron para dibujar. En la evolución de los dibujos que nos regalaron luego de presenciar la obra de títeres, se puede percibir varios elementos centrales de la discusión. Entre garabatos de los más pequeños, se observan varios retratos del pirata, del barco, de su escalera, así como del perico. Sólo un pequeño, Leandro, nos regala un "foto" de una escena, incorporando al público y centrando el dibujo en su hoja, demostrándonos mayor madurez de expresión y coordinación respecto a sus compañeritos, así como la precisión del mapa con todos sus elementos: el círculo, el triángulo, el cuadrado y la palmera con el número 4.

Los niños de cuatro y cinco año completaron sus dibujos agregando elementos como el sol y las nubes que no estaban presentes en el desarrollo de la obra, pero sí en su imaginación y cotidianidad. El barco fue el protagonista de sus obritas, acompañándolo de un mar azul y de otros elementos como el tiburón y los señalamientos de las islas. Sólo un niño dibujó el teatro, tomando quizás distancia con la obra en sí (ver Figura 4).

Figura 4: Las obritas de las salitas de cuatro y cinco

A manera de conclusiones

En esta experiencia con niños de preescolar se percibe, en la interacción, la abertura hacia lo sensible y lúdico entremezclado con lo geométrico al establecer un diálogo mediado por los títeres. El trabajo posterior en sus aulas con sus maestras, quienes les solicitaron dibujar, sorprendió a varias de ellas al observar en las producciones de sus niños algunos detalles interesantes para analizar, no sólo respecto a la distinción entre las figuras geométricas o la ubicación espacial, sino también respecto al trabajo en equipo o aceptar desafíos, entre otros elementos que se encuentran en esta obra y que da pie a seguir trabajando y profundizando.

El uso del títere en ámbitos escolares, entremezclando lo teatral no ordinario con lo cotidiano de las clases, genera posibilidades de distinto orden. Evidencia este ejercicio la importancia de detonar en los niños la sorpresa y la emoción, de recuperar valores y saberes, de invitarlos a expresarse libremente en tanto juegan, en tanto defienden a su personaje favorito, en tanto se van involucrando plenamente en el desarrollo de un cuento. Creemos haber evidenciado también, lo tenue que los títeres convierten a la distancia entre la estesis y lo geométrico, propiciando su paso, generando ámbitos de convivencia, de fortalecimiento mutuo, que escolarmente pareciera ser infranqueable.

Referencias bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de la modelación como proceso de matematización en el aula.* Tesis de Doctorado. Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Bernardo, M. (1988). *Del Escenario del Teatro al muñeco actor*. Cuadernos de divulgación 2. Instituto Nacional de Estudios de Teatro. Secretaría de Cultura de la Nación. Buenos Aires.

Berger, P. y Luckmann, T. (2008). *La construcción social de la realidad.* Buenos Aires: editorial Amorrortu.

Campbell, P. (1997). Una nueva definición del problema de las niñas en matemáticas. En W.G. Secada, V. Fennema y V. Adajian (Comp.): *Equidad y enseñanza de las matemáticas: nuevas tendencias* (pp. 242-259). Madrid, España: Morata.

Cantoral, R., Farfán, RM., Lezama, J. & Martínez-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*9(4), 83 –102.

Carey, D.A., Fennema, E., Carpenter, T. & Franke, M.L. (1997). La equidad y la educación matemática. En W.G. Secada, V. Fennema y V. Adajian (Comp.): *Equidad y enseñanza de las matemáticas: nuevas tendencias* (pp. 109-140). Madrid, España: Morata.

Carreher, T., Carreher, D. & Schilemann, A. (1991). *En la vida diez en la escuela cero: los contextos culturales de educación matemática*. (Primera edición en español). Madrid, España: Siglo XXI.

Chaiklin, S. & Lave, J. (Comps.) (2001). *Estudiar prácticas. Perspectivas sobre actividad y contexto*. Bs. As., Argentina: Amorrortu editores.

Cummins, J. (2000). *Language, power and pedagogy*.Buffalo, USA: Multilingual Matters.

Escalada Salvo, R. (1993). *Taller de títeres*. Argentina: Aique didáctica.

Evaluación Nacional del logro académico en centros escolares (ENLACE). Disponible en http://enlace.sep.gob.mx/, consultado en enero de 2011.

Ferrari, M. (2010). Lo titiritesco en matemáticas ¿dos esencias en la misma práctica? En P. Leston (Ed.): *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol 23*. (pp.849-858). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Finkel, B. (1984). *El títere y lo titiritesco en la vida del niño.* Buenos Aires, Argentina: Plus Ultra.

Giménez, J., Díez-Palomar, J. & Civil, M. (2007). Exclusión y matemáticas. Elementos que explican la investigación actual en el área. En J. Giménez, J. Díez-Palomar y M. Civil (Coords.): *Educación matemática y exclusión* (pp. 9-44). Barcelona, España: Graó.

Mandoki, K. (2008). *Estética cotidiana y juegos de la cultura. Prosaica uno.* México: Conaculta-Fonca.

Mandoki, K. (2006). *Prácticas estéticas e identidades sociales. Prosaica dos.* México: Conaculta-Fonca.

National Research Council (1989).*Everybody counts*. Washington, USA: National Academy Press.

Palomas, S. (2002). *Estrategias metodológicas para la promoción de la salud comunitaria. Los títeres tienen la palabra.* Argentina: Espacio editorial.

Rogozinski, V. (2005). *Títeres en la escuela. Expresión, juego y comunicación.* Argentina: Ediciones Novedades Educativas.

Santa Cruz, E. & García Labandal, L. (2008). *Títeres y resiliencia en el nivel inicial. Un desafío para afrontar la adversidad.* Rosario, Argentina: HomoSapiens Ediciones.

Szulkin, C. & Amado, B. (2006). *Entretelones. Una propuesta para el uso del teatro de títeres como herramienta socio-pedagógica en las escuelas rurales*. Argentina: comunicarte editorial.

Tillería Pérez, D. (2003). *Títeres y máscaras en la educación. Una alternativa para la construcción del conocimiento*. Argentina: Homo Sapiens Ediciones.

LA DECONSTRUCCIÓN COMO DISEÑO DIDÁCTICO PARA LA MODELACIÓN

José Trinidad Ulloa Ibarra, Jaime L. Arrieta Vera
Universidad Autónoma de Nayarit México
Universidad Autónoma de Guerrero
jtulloa@nayar.uan.mx, jaime.arrieta@gmail.com

Resumen. Este reporte es una contribución al trabajo "Las prácticas sociales en la construcción social del conocimiento" y en él se analizan las interacciones de quienes se encuentran inmersos en la construcción de modelos de crecimiento, tanto desde el ámbito académico como del profesional, centrando el interés en los modelos de crecimiento exponenciales.Consideramos que el diseño de aprendizajes a partir de las prácticas sociales, en este caso especial, la construcción de modelos de crecimiento, rescata la forma en que surgen los modelos matemáticos en el área de estudio y cómo ellos llevan a la determinación de la tasa de crecimiento de diferentes tipos de organismos acuáticos (Nieves–Soto, 1994), realizando la deconstrucción de los mismos en caso necesario, con lo que el estudiante tendrá herramientas para modelar cualquier situación de crecimiento.

Palabras clave: modelación, deconstrucción, prácticas sociales, socioepistemología

Abstract. This report is a contribution to the work "The social practices in the social construction of the knowledge" andit analyzesthe interactionsof those who areinvolvedin the construction of growth models, as much from the academic scope as of the professional, centering the interest in the models of exponential growth. We consider that the design of learning's from the social practices, in this special case, the construction of growth models, rescues the form in which the mathematical models in the area arise from study and as they take to the determination of the rate of growth of different types of aquatic organisms (Nieves-Soto, 1994), performing the deconstruction ofthe same, if necessary, so that the student will havetoolsto model anygrowth situation..

Key words: modeling, deconstruction, social practices, socioepistemology

Introducción

La investigación tiene diversos antecedentes, entre los principales se encuentran los trabajos acerca de la modelación como práctica social. Uno de los aspectos fundamentales de esta línea de investigación consiste en situar el estudio de las prácticas de modelación en una comunidad, en un lugar y en un tiempo.

La modelación es una práctica que se ejerce en diversas comunidades, es una actividad recurrente y les otorga identidad, con base en diferentes estudios consideramos que puede funcionar como un vínculo entre la escuela y su entorno. Para ello investigamos prácticas de modelación de comunidades, en este caso, de profesionales de la pesca. Las prácticas de esta comunidad son prácticas que se encuentran constituidas, y como tal, al igual que otros muchos procesos se realizan de forma casi mecánica o algorítmica. Para que estas prácticas puedan ser base de diseños de aprendizaje en la escuela, debemos efectuar un proceso de deconstrucción de la práctica para explicitar las intencionalidades, las herramientas que se utilizan, los argumentos que la sustentan, y los métodos y procedimientos que se desarrollan. Esta deconstrucción, entonces, puede ser base de diseños de aprendizaje, en nuestro caso de diseños de aprendizaje basados en la modelación del crecimiento de poblaciones.

El egresado de licenciaturas del área generalmente no conoce las intencionalidades de la práctica y la apropiación de ellas se hace indispensable para su óptimo desempeño ya que requiere ejercer su trabajo en tiempo y forma, por lo que se encuentra sujeto a presiones de tipo laboral cuando desconoce la forma de realizar la actividad y por otra parte cuando aprende a hacerla, no reflexiona sobre los conocimientos teóricos matemáticos que se encuentran implícitos en su tarea diaria, llegándose entonces a realizar las actividades de manera rutinaria.

Es aquí en donde urge acercar la escuela con las práctica de la profesión ya que en al aula no existe la presión laboral, si bien pueden darse presiones de tipo académico, deben planearse secuencias de aprendizaje en la que se analicen en forma individual y conjunta las diferentes tareas que realiza un profesionista y utilizar la deconstrucción como base para varios diseños de aprendizaje basados en las prácticas de las comunidades y una vez hechos, ponerlos a disposición de la comunidad escolar general y también a las comunidades que ejercen esas prácticas.

Las prácticas de modelación exponencial que ejercen los profesionistas de las comunidades de la pesca y la acuacultura, no están apegadas en forma estricta a la modelación que se realiza en el aula durante su formación académica. En las licenciaturas los modelos de crecimiento que más se utilizan son: Von Bertalanffy, Malthus y Verhulst. Estos modelos se ven de manera independiente y no se toman consideraciones que se requieren en la práctica profesional, como lo que se requiere en el caso del crecimiento de microalgas, en los que la gráfica puede considerarse conformada por diferentes etapas y la que se requiere para establecer el momento del desdoblamiento es la fase exponencial.

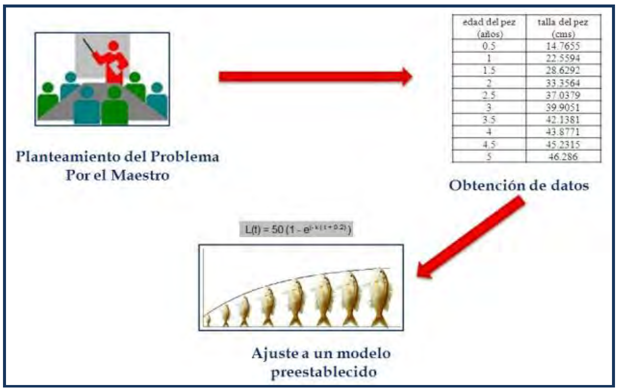


Figura 1: Práctica de modelación escolar constituida

La Deconstrucción

Para fines de nuestra investigación y desde nuestro punto de vista, consideramos a la deconstrucción como un medio para mostrar o encontrar la intencionalidad de una práctica constituida, (Ulloa y Arrieta, 2009)

De este modo podemos dividir la deconstrucción de la siguiente manera:

- La búsqueda de las intenciones (el ¿por qué las emplean así? y el ¿por qué funcionan?)
- Los argumentos que los validan (¿Qué sustento tienen? ¿De dónde proviene?)

Tomamos a la deconstrucción como una estrategia para modelar fenómenos biológicos, considerándola como un concepto de naturaleza crítica, que define el todo de un sistema en función de la tensión establecida entre sus partes, imaginando al sistema como algo abierto, extenso, desdibujado y siempre contradictorio consigo mismo (Krieger, 2004). La deconstrucción evoca al término creado por Derrida (1985), quien afirma que deconstruir no es regresar hacia un elemento simple y tampoco es destruir, insinúa que ello implica reconstruir cuando explica que deconstruir es desestructurar para entender. Por consiguiente afirmamos que la deconstrucción es un proceso individual y/o colectivo de búsqueda de nuevos significados y de sentidos innovadores; y que, como proceso no tiene final y su estructura es espiral y no lineal. Para su utilización como estrategia de modelación matemática, lo proponemos como un ciclo de nueve momentos (Ulloa y Arrieta, 2010) que, una vez conocido, se va repitiendo de manera constante y se conforma en la manera de pensar y actuar del sujeto reflexivo.

La deconstrucción como diseño didáctico para la modelación

El concepto de Diseños de Aprendizaje o LD (del inglés Learning Design) es un término utilizado por muchos docentes en su planificación cotidiana. La primera idea general es que las personas aprenden mejor involucrándose en la actividad de aprendizaje. La segunda idea es que para promover un aprendizaje más efectivo, las actividades pueden ser ordenadas como un flujo de aprendizaje. La tercera idea es compartirlos y/o reutilizarlos (Álvarez, Bucarey, Triviños y Araya, 2007). La mayoría de las actividades están compuestas por objetos de aprendizaje.

Figura 2: La deconstrucción como sustento de diseños de aprendizaje

El diseño didáctico es básicamente el plan desde el cual el sujeto del conocimiento, el que aprende, es decir el estudiante, se apropia del objeto que va a conocer.

Las etapas propuestas para los diseños de aprendizaje

El diseño de aprendizaje debe dar respuesta a las siguientes preguntas:

¿Qué?

¿Cómo?

¿Por qué?

¿Con qué?

Para esto, los diseños de aprendizaje los consideramos en las siguientes fases:

Fase I. Planteamiento de una situación problema de modelación exponencial.

Fase II. Contextualización e institucionalización de la práctica de modelación.

Fase III. Adecuación de la práctica deconstruida y reconstruida.

Fase IV. Desarrollo.

Un diseño de aprendizaje basado en la deconstrucción del modelo del cultivo de microalgas para ser puesto en escena en el sistema.

Situación Problema:

Se desea modelar el crecimiento de microalgas que se producen en el medio de cultivo (F) de Guillar en los laboratorios de producción de larvas de camarón en el estado de Nayarit, México.

El cultivo se inicia en tubos de ensaye de 15 ml., inoculándose con 3 ml. de cepa (*Skelétonema*) en el cual al término de tres días se obtiene la productividad máxima que es de 1 x 10^6 células por ml. Enseguida se inoculan otros 3 tubos de ensaye del mismo volumen, con 3 ml. del cultivo cada uno para mantener la existencia de la cepa y con los 12 ml. restantes de cada tubo, inocular otros 3 tubos de ensaye de 25 ml. Para continuar el cultivo. Como tercer paso con el volumen de estos 3 tubos, se inocula un recipiente transparente de 8 l. de capacidad en donde también el cultivo se sostiene por 72 horas, al término del cual la población llega a un máximo de 1×10^6 células por ml. Cuarto paso, con estos 8 l. producidos se inocula a un tanque de 340 l. de capacidad, prolongándose el cultivo por un término de siete días en esta etapa.

Contextualización.

Se requiere obtener el modelo de la fase en la que hay crecimiento con la finalidad de poder determinar el momento adecuado para el desdoble.

Institucionalización.

Nuestra intención es la de construir un modelo matemático que modele la situación anterior. El ciclo de las microalgas puede representarse por tres etapas bien diferenciadas: crecimiento, estabilidad y decrecimiento. Se debe trabajar con el primero y para ello, los datos los extraeremos de los experimentos llevados a cabo por Belmont (2003) quien al aplicar los modelos de crecimiento aprendidos en el aula obtuvo una producción muy baja y que se vio en la necesidad de analizar, determinar fallas y construir otros modelos (deconstrucción de la práctica), para lograr resultados satisfactorios. El modelo que le funcionó fue un modelo exponencial construido por medio de Excel.

. Los siguientes datos obtenidos en un laboratorio de producción de microalgas representa el ciclo de las microalgas. Grafícalos y describe lo que ocurre.

Días	Cels/ml
0	90000
1	151250
2	427500
3	703750
4	690000
5	325500
6	62000
7	1000

Predicción: Los estudiantes con base en la gráfica podrán diferenciar claramente tres etapas.

2. ¿Qué tipo de modelo representa el crecimiento de las microalgas?

Predicción: Algunos estudiantes propondrán un modelo lineal, otros quizá exponencial.

3. ¿Qué otros tipos de modelos se pueden encontrar en el proceso de producción de microalgas?

Predicción: Propondrán modelos exponenciales y el logístico.

4. ¿Cómo puedo obtener los modelos que se encuentran implícitos en el proceso?

Predicción: Los alumnos optarán por modelos gráficos y numéricos.

5. ¿Con qué herramientas matemáticas puedo determinar los modelos?

Predicción: Utilizarán el método que utilizan generalmente en el aula que es la correlación lineal.

6. ¿Con qué herramientas tecnológicas puedo determinar los modelos?

Predicción: Propondrán la utilización de computadoras y calculadoras graficadoras, en cuanto a las primeras privilegiarán el uso de Excel

Conclusiones

Consideramos que el estudio y exploración de las prácticas sociales en comunidades especificas, tal como la de los profesionales de la pesca y la acuacultura, puede lograr establecer aspectos determinantes en la deconstrucción de las prácticas, logrando encontrar la estructura y esencia de la práctica. Mediante la deconstrucción de las prácticas se llegará a la construcción de diseños de aprendizaje.

Consideramos necesario analizar la posibilidad de la realización de diseños que vayan de situaciones escolares a situaciones extraescolares, aunque para ello sabemos es necesario particularizar en las comunidades que se atienden y visualizar las perspectivas de éstas.

Referencias bibliográficas

Álvarez, L.; Bucarey, S.; Triviños, S. y Araya, E. (2007). Enseñanza de Anatomía del Hígado Humano con Diseños de Aprendizaje. Int. J. Morphol., 24(3):357-62. Recuperado el 10 de Abril de 2011 de http://www.gita.cl/files/ Ensenanza_Higado_con _LD_short_paper.pdf

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aul*a. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Belmont, J. (2003). *Algunos aspectos poblacionales y reproductivos de Oreochromis aureus en la presa el Salto, Sinaloa.* Tesis de Licenciatura no publicada, Universidad Autónoma de Sinaloa, México.

Derrida, J. (1985). Carta a un amigo japonés. En J. Derrida, ¿Cómo no hablar? Y otros textos. *Suplementos Antrhopos (13*), 86 – 89.

Krieger, P. (2004). La deconstrucción de Jacques Derrida (1930-2004). *Anales del Instituto de Investigaciones estéticas (84)*. 179-188.

Nieves-Soto, M. (1994). *Producción de fitoplancton abajo costo. 1. Aislamiento y cultivo de monoraphidium sp (chlorophyceae) en un sistema estático en medio f y cuatro a base de fertilizantes agrícolas*. Anales del Instituto de Ciencias del Mar y Limnología. 1994 – 1 – 2. Recuperado el 10 de Abril de 2011 de: http://biblioweb.tic.unam.mx/cienciasdelmar/instituto/1994-1-2/articulo443.html

Ulloa, J. y Arrieta, J. (2009). Los modelos exponenciales: construcción y reconstrucción. En P. Lestón (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22*, 479-488. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Ulloa, J. y Arrieta, J. (2010). La deconstrucción como estrategia de la modelación. En P. Lestón (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 23,*909-917. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

UNA PROPUESTA PARA RESIGNIFICAR LO LINEAL EN UNA SITUACIÓN DE MODELACIÓN DE MOVIMIENTO

Mario Adrián Caballero Pérez, Rosario Pérez López, Claudia Soto López
CINVESTAV- IPN México
macaballero@cinvestav.mx, rperezl@cinvestav.mx, clsoto@cinvestav.mx

Resumen. Considerando algunas investigaciones donde se ponen en escena situaciones de modelación de movimiento con la perspectiva socioepistemológica, podemos ver en las producciones realizadas por los estudiantes, que se recurre en primer lugar y de manera persistente a los trazos rectos para modelar el movimiento de una persona (Torres, 2004; Suárez, 2008; Briceño, 2008). Consideramos que en sus respuestas, no hay indicios de haber comprendido las características que presenta un movimiento a razón constante. Por tal razón realizamos un diseño de situación con el objetivo de resignificar lo lineal, la cual está sustentada por la categoría modelación-graficación y la formulación de una epistemología de lo lineal.

Palabras clave: epistemología, lineal, situación de modelación de movimiento, resignificación

Abstract. Considering some findings in situations of modeling of motion problems from a socioepistemology perspective, we can see in the students' productions that they use at first and persistently straight lines to model the movement of a person (Torres, 2004; Suarez, 2008; Briceño, 2008). We consider that in their answers, there is not an indication of having understood the characteristics presented by movement at a constant rate. For this reason we design some activities in order to redefine the linear model, based on the category modeling -graphing and the formulation of an epistemology of the linear situation.

Key words: epistemology, linear, situation modeling motion, redefinition

Introducción

Este trabajo surge como un proyecto del seminario "Educación y nuevas tecnologías" impartido durante el primer semestre de la maestría en ciencias con especialidad en matemática educativa del CINVESTAV-IPN. La idea del trabajo tiene su origen al considerar los resultados de la puesta en escena realizada por Torres (2004), Suárez (2008) y Briceño (2008) de una situación de modelación de movimiento (SMM), la cual consiste en hacer la gráfica del movimiento de una persona que se aleja de un punto de partida hasta 500 metros, para luego regresar y sólo dispone de nueve minutos, pero durante dicho trayecto se detiene cuatro minutos. La puesta en escena de dicha situación consistió de dos fases, en la primera se les pidió a los participantes que realizaran la modelación del movimiento con lápiz y papel, mientras que la segunda consistió en que realizaran la simulación de movimiento con el uso de tecnología (sensores de movimiento). Cada uno de estos investigadores utiliza ésta situación para mirar aspectos relevantes propios de su investigación. No obstante, en cada una de las puestas en escena que se aplicaron en momentos y lugares distintos, se observa en la primera fase, que los participantes recurrieron en primer lugar y de madera persistente a trazos rectos para modelar dicho movimiento. En la segunda fase de la situación, al realizar la simulación con los sensores, los participantes pueden comparar ambas gráficas (la primera realizada con lápiz y papel y la segunda realizada con tecnología) y argumentar, entre otras cosas, sobre el por qué es más adecuado utilizar trazos curvos para la modelación del movimiento de una persona. Dados los resultados, consideramos que en sus respuestas no hay indicios de haber comprendido las características que presenta un movimiento a razón constante, debido a que al realizar un análisis de las producciones realizadas por los participantes encontramos que utilizan los trazos rectos para representar la trayectoria, y no en sí para modelar el movimiento de una persona.

Respecto a esto, Catalán y Dolores (2000) mencionan que el tratamiento que se le da a la razón de cambio constante en el bachillerato mexicano es una manera estática de estudiar un proceso de variación, pues se hace énfasis en solo un punto y la pendiente, en lugar de analizar el comportamiento que experimentan las variables en todo su dominio. En su estudio, muestra que los estudiantes de bachillerato tienen un escaso conocimiento para identificar la razón de cambio constante. Considerando lo anterior, en este trabajo proponemos un diseño de SMM con el objetivo de que los participantes logren resignificar lo lineal, caracterizando el movimiento que presenta razón de cambio constante por medio de la modelación de movimiento a través de la calculadora graficadora.

Nuestro trabajo está sustentado en la Socioepistemología ya que proporciona elementos para formular epistemologías, entendidas como construcciones de conocimiento, las cuales tendrán como base el uso del conocimiento matemático es una situación específica. En nuestro caso, formulamos una epistemología de lo lineal en una SMM. Retomamos de Cordero (2001) la noción de Categorías del Conocimiento, las cuales permiten que la matemática sea funcional por medio de la resignificación, que entendemos como una unidad de análisis que emerge "como elemento para dar cuenta de que el conocimiento tiene significados propios, contexto, historia e intención; lo que señala la posibilidad de enriquecer el significado de los conocimientos en el marco de los grupos humanos" (García, 2007, p. 30). Para nuestro trabajo retomamos la categoría Modelación – Graficación y, como habíamos mencionado, la resignificación de lo lineal en este diseño consiste en caracterizar el movimiento a razón constante.

Aspectos metodológicos

El diseño de la epistemología está conformada por la categoría Modelación-Graficación (M-G), propuesta por Suárez (2008), y la construcción de lo lineal, basándonos en los trabajos de Catalán y Dolores (2000) y Arrieta (2003).

La categoría modelación-graficación

Para el diseño de la situación empleamos la categoría M-G propuesta por Suárez (2008), la cual permite resignificar el uso de las gráficas en situaciones de variación y cambio, en particular de movimiento. El binomio M-G es la categoría que permite caracterizar y articular la modelación y la graficación con el uso tecnológico (Briceño, 2008). Esta categoría considera en su constitución el funcionamiento y la forma del uso de las gráficas de movimiento, así como elementos propios de la modelación, como el reconocimiento de patrones y las múltiples realizaciones. El hilo conductor de su epistemología es el tratado de Oresme sobre las figuras geométricas, en particular, la figuración del devenir de las cualidades. Los elementos de esta epistemología se usan para el diseño de una situación en un ambiente tecnológico que conforman las secuencias llamadas SMM.

Según Suárez (2008), son tres los aspectos que caracterizan al binomio M-G: las múltiples realizaciones al graficar, los ajustes en una estructura para producir un patrón deseable y la graficación como un medio que soporta el desarrollo del razonamiento y la argumentación. Estos elementos conforman las características de las tareas asociadas a la práctica de M-G en situaciones específicas de modelación de movimiento. Estas tareas a su vez determinarán un nuevo uso de las gráficas, que permitirán resignificar la variación en situaciones de cambio. Para el diseño de situación hemos considerado el tercer uso de las gráficas propuesto por Torres (2004), el uso de gráficas a partir de la simulación de un fenómeno físico con tecnología. En este trabajo el uso de las graficas está presente en todo el diseño, los participantes podrán relacionar características propias de la situación de movimiento con las gráficas obtenidas a partir de múltiples realizaciones frente al sensor, identificar los intervalos de cambios de velocidad, identificar en la gráfica que una recta con menor inclinación implica que la velocidad del móvil es menor que aquella con mayor inclinación. En este uso de las gráficas la tecnología facilita una visión global y local, así como una cualitativa y cuantitativa. De esta manera se posibilita la exploración y explicación sobre lo que sucede en la situación de movimiento.

Estatus epistemológico de lo lineal

En Catalán y Dolores (2000) se realiza el diseño de una secuencia de actividades con el objetivo de desarrollar el pensamiento y lenguaje variacional que se necesita para la deducción de la ecuación de la recta. Ellos observan que en el sistema didáctico mexicano, la variación y en particular la linealidad, son abordadas de forma estática desde la primaria, pues se hace énfasis en algunos puntos o en el cálculo de la pendiente. Coincidimos con ellos en que “para comprender la esencia del lugar geométrico determinado por la ecuación de la recta, es necesario enfocar la atención no sólo en algunos puntos y su pendiente, sino en el comportamiento de los cambios que experimenta X y Y". Por ello, en nuestro diseño de situación se hace énfasis en la variación de las variables en juego, y cómo estas cambian a una razón constante; es decir, que a un cambio constante de una variable le corresponde un cambio constante de la otra variable.

Según Arrieta (2003) lo lineal es una herramienta que se utiliza en las prácticas de modelación, y que además, cobra sentido y adquiere significados en escenarios donde se ejercen prácticas de modelación, las cuales son ejercidas al hacer uso de herramientas, en nuestro caso lo lineal. Las prácticas de modelación a las que hace referencia son, entre otras, la figuración del devenir de las cualidades, que están basadas en el análisis que realiza del trabajo de Oresme, donde las nociones de cualidad y la figuración de su devenir son usadas como herramientas para argumentar los cambios y la variación de un fenómeno. Se entiende por cualidad aquello que cambia, como la velocidad, la distancia o el calor, mientras que su devenir es la manera en que crece o disminuye esa cualidad en un instante de tiempo. Oresme figura este devenir mediante un gráfico de dos dimensiones, plasma los cambios y la variación mediante gráficas, la cuales adquieren formas particulares según el devenir de las cualidades y las agrupa en tres categorías: uniforme, uniforme disforme y disforme disforme. De esta forma, el devenir de una cualidad uniforme disforme tendría como figuración un triángulo rectángulo, el cual a su vez, corresponde a un comportamiento lineal, que en graficas cartesianas representaría una línea recta. Observamos entonces que puede argumentarse acerca de lo lineal a partir de la figuración del devenir de sus cualidades; es decir, lo lineal significa líneas rectas cuando se ejercen prácticas del devenir de cualidades. Esto significa una centración en los modelos gráficos, y a partir de ellos construir diferentes significados, argumentos y herramientas de lo lineal. Por ello, para lograr una resignificación de lo lineal, emplearemos modelos gráficos haciendo uso de la línea recta en nuestro diseño de situación.

Para Arrieta (2003), el proceso para la construcción de modelos lineales implica hacer referencia a tres prácticas, las cuales deben estar en una relación dialéctica: La caracterización de lo lineal en el modelo, su utilización como herramienta y el establecimiento de una red de significados de lo lineal mediante esquemas.

Caracterización de lo lineal en el modelo

Un modelo es lineal si se tiene que a un incremento constante de una variable, le corresponde un incremento constante de otra variable. Pero no basta con identificar estos cambios o identificar las características de lo lineal en un fenómeno, es necesario poder distinguir un fenómeno lineal de otro que no lo es; es decir, lo lineal se construye al confrontarlo con lo no lineal.

Su utilización como herramienta

La construcción de lo lineal requiere de su utilización como una herramienta, lo cual significa el poder hacer predicciones de algún fenómeno con el modelo lineal, en el caso de nuestro diseño, la predicción de la posición de un móvil para diferentes instantes de tiempo. Para ello, los estudiantes pueden emplear métodos como regla de tres, calculo numérico de la razón de cambio, extrapolación, entre otros.

El establecimiento de una red de significados

Consideramos dos aspectos que plantea Arrieta para establecer una red de significados. Primero, los estudiantes construyen esquemas que relacionan el fenómeno con sus modelos; es decir, asocian a un cierto fenómeno con un modelo lineal y también pueden establecer relaciones y distinciones con otros modelos lineales. Segundo, establecen esquemas de relación entre las características físicas del fenómeno con los parámetros del modelo, por ejemplo, relacionan la inclinación de la recta con el valor de la razón de cambio, o la posición inicial del móvil con el punto de corte de la recta con el eje Y.

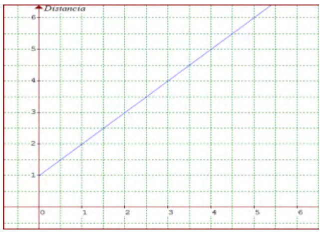
Diseño de la situación

En nuestro diseño se situación, la resignificación de lo lineal se podrá observar a partir de los elementos de significados, procedimientos, procesos y objetos, y argumentos que conforman el uso de las gráficas a partir de la simulación de un fenómeno físico con tecnología. Los significados se podrán leer en el uso que le den a conocimientos como velocidad y gráficas, y en general al uso de conocimientos previos al momento de tomar decisiones sobre el comportamiento de la gráfica, y su relación con la situación de movimiento que se les presenta. A partir de estos significados, el estudiante establecerá procedimientos que le permitan describir la situación (va más rápido, más lento) y tratar de controlar los parámetros del modelo (moverse de forma constante), con el fin de ajustar su modelo a las características de la situación. Se espera que los estudiantes centren su atención en la modelación y simulación con ayuda de las calculadoras graficadoras para organizar comportamientos lineales, es decir, de variación constante. Con estos elementos el alumnos podrán construir argumentos para establecer relaciones entre las características de la situación y los elementos del modelo gráfico (movimiento a velocidad constante se expresa como una línea recta, a mayor velocidad, mayor inclinación de la recta).

La SMM que se propone, se diseñó a partir los datos epistemológicos de la construcción de lo lineal, expuesta anteriormente y de los datos que aporta la categoría M-G, y está estructurada en cuatro momentos. Hasta ahora la situación no ha sido aplicada, sin embargo, se espera hacerlo a un grupo de alumnos de Bachillerato con fines de validación.

Momento Uno: Caracterización de lo lineal

1. La siguiente gráfica muestra la posición de un móvil al paso del tiempo. Reprodúcelo con el sensor de movimiento. Guarda la gráfica de tu primer intento con el nombre de "gráfica1", y la que consideres que se aproxime más a la que se te pide con el nombre "gráfica 2".



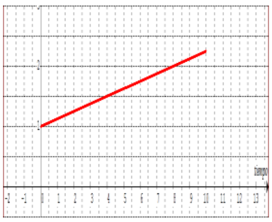
i)

2. Describe qué fue lo que te permitió llegar a la gráfica que se te pidió.
3. Describe el movimiento que realizaste en la "gráfica 1" y la "gráfica 2". ¿Qué diferencia hay en cuanto al movimiento realizado en cada una?

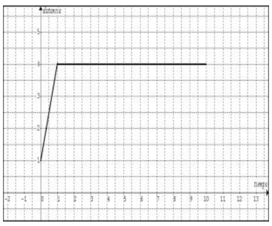
Se pide al alumno reproducir con el sensor de movimiento la gráfica de una línea recta. Con esto esperamos que obtengan inicialmente una curva, pero conforme lleven a cabo múltiples realizaciones obtendrán una gráfica aproximada a la que se les solicitó. Deberán guardar la gráfica de su primer intento, así como la gráfica que consideren es la más aproximada. De esta manera, el estudiante podrá comparar las gráficas e identificar las características del movimiento que le permitieron reproducir la gráfica deseada. El estudiante empezará a identificar las características de un movimiento lineal al compararlo con un movimiento que no lo es.

Momento Dos: Identificación de los parámetros del modelo

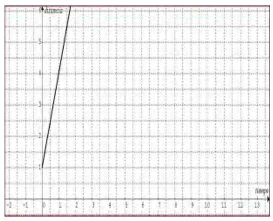
1. Reproduce las siguientes gráficas con el sensor de movimiento.

a) 

ii)

b) 

iii)

c) 

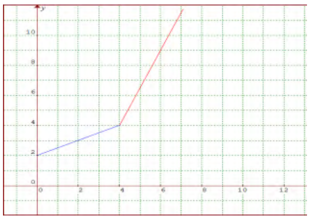
iv)

2. ¿Qué diferencias encuentras en el movimiento realizado para reproducir las gráficas de los incisos a) y b)?
3. ¿Cómo fue el movimiento realizado para reproducir la gráfica del inciso c)?

Se espera que los alumnos comiencen a relacionar la inclinación de la recta con la rapidez del móvil, si se mueve rápido reflejará una recta muy inclinada, si se mueve lento una recta poco inclinada y si no tiene velocidad es una recta horizontal. Pero además, verán que estos movimientos, aunque sean rápidos o lentos, para reproducirlos exitosamente deberán moverse a razón constante, como se vio en el momento anterior. En este segundo momento el alumno podrá comparar y relacionar diferentes modelos lineales, así como identificar y relacionar los parámetros del modelo con las características de la situación de movimiento.

Momento Tres: Predicción con el modelo lineal

1. Observa la siguiente gráfica que muestra el recorrido de un móvil al paso del tiempo.



v)

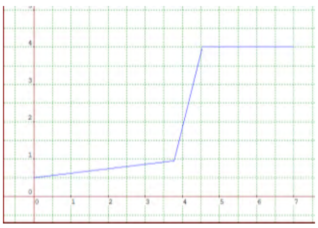
a) ¿Qué distancia habrá recorrido el móvil a los 2 segundos?, ¿y a los 6 segundos?
b) ¿Qué distancia por segundo recorre el móvil en el intervalo desde que inicia el movimiento hasta los 4 segundosy qué distancia recorre en el intervalo de 4 segundos en adelante?
c) De no haber cambiado la rapidez a los 4 segundos ¿qué distancia hubiera recorrido al cabo de 10 segundos?

Las preguntas que se presentan tienen el propósito de emplear un modelo lineal para hacer predicciones con respecto a la distancia recorrida por un móvil, cuyo movimiento se representa con la gráfica. El estudiante podrá hacer uso de diferentes métodos para lograr este objetivo, como plantear un modelo numérico, hacer extrapolación en la gráfica, o aplicar una regla de tres.

Momento Cuatro: Establecimiento de esquemas de lo lineal

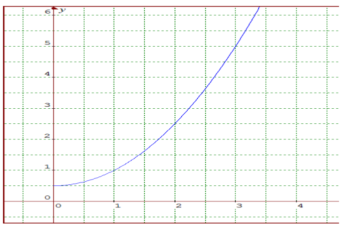
Describe el movimiento que representa cada una de las siguientes gráficas e identifica cuál de ellas corresponde a un movimiento a razón constante.

a)



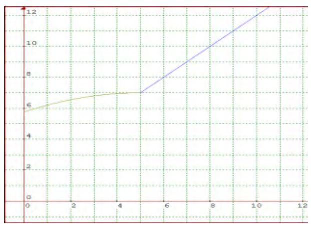
vi)

b)



vii)

c)



viii)

El alumno comparará movimientos lineales, identificando sus características en común y sus diferencias, así como comparar movimientos que son lineales con movimientos que no lo son, y reforzar las relaciones que ha visto en los momentos anteriores sobre las características de un movimiento lineal. Entre las respuestas que se obtendrán, se espera que hagan referencia a expresiones como: inicia a tantos metros del sensor, se mueve rápido, lento, se mueve a la misma velocidad en cierto intervalo, en tal segundo cambia su velocidad, entre otros, y también se espera que puedan describir el movimiento realizado en cada gráfica, estableciendo características globales sobre los movimientos que no son lineales, y profundizando en los que sí lo son.

Referencias Bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN. México.

Briceño, D. (2008). *El uso de las gráficas desde una perspectiva Instrumental*. Un estudio socioepistemológico. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN. México.

Catalán, A. y Dolores, C. (2000). El comportamiento variacional de la función lineal. Una experiencia didáctica con estudiantes de bachillerato. En R.M. Farfán, C. E. Matías, D. Sánchez y A. Tavarez (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 13,* 36-41. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cordero, F. (2001). La distinción entre las construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa,* 4(2), 103-128.

García, M. (2007). *Resignificando el concepto de función lineal en una experiencia de educación a distancia*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN. México.

Suárez, L. (2008). *Modelación – Graficación, Una Categoría para la Matemática Escolar. Resultados de un Estudio Socioepistemológico*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN. México.

Torres, A. (2004). *La modelación y las gráficas en situaciones de movimiento con tecnología*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN. México.

MODELACIÓN SENOSOIDAL: UN EXPERIENCIA EN EL LABORATORIO VIRTUAL DE CIENCIAS

Jaime Arrieta, Gabriela Buendía, Carmelinda García, Darío López
Universidad Autónoma de Guerrero, México
CICATA-IPN
jaime.arrieta@gmail.com

Resumen. En este trabajo se concibe a las prácticas de modelación como una actividad que articula dos entidades con la finalidad de intervenir en una de ellas, lo modelado, a partir de la otra, llamada modelo. Elaboramos un diseño de aprendizaje basado en la modelación de fenómenos por modelos senosoidales con la intención de aportar elementos para la caracterización de la construcción de la red de lo senosoidal. Las características de este diseño son la experimentación virtual, la interacción con datos, gráficas y ecuaciones algebraicas y/o diferenciales que modelan fenómenos periódicos, así como el ajuste de los datos con las herramientas tecnológicas que henos diseñado para este fin.

Palabras clave: modelación senosoidal, Laboratorio Virtual, prácticas

Abstract. This paper conceives modeling practices as an activity that links two entities in order to participate in one of them: a model to intervene on that which has to be modeled. We prepare a learning design based on the modeling of phenomena by means of sinusoidal models intended to provide elements for the characterization of the construction of the sinusoidal network. The characteristics of this design are virtual experimentation, interaction with data, graphs and algebraic equations and / or differential modeling periodic phenomena, and the data fit with the technological tools designed for this purpose.

Key words: sinusoidal modeling, virtual laboratory, practices

Introducción

En las clases de ciencias, tradicionalmente se pretende el aprendizaje sin experimentación, sin laboratorios, donde se resuelven problemas de tipo artificial, manipulando fórmulas, despejando variables y operando con entes algebraicos y numéricos; dichos problemas están exentos de lo que llamamos *ruido en datosrespecto a una teoría*.

Nuestro planteamiento es revalorar el papel del experimento en la generación del conocimiento, relacionar las demás ciencias y a las matemáticas con prácticas diferentes a las que actualmente las enlazan. Proponemos a las prácticas de modelación como vínculo entre las ciencias y las matemáticas.

La experimentación y la modelación

La interacción con el fenómeno, o la experimentación en sentido amplio, es una actividad necesaria en las prácticas de modelación. La fase inicial de la modelación es la interacción con el fenómeno. Sin embargo, la simple interacción no caracteriza la modelación, son necesarios actos de articulación entre el fenómeno con otro ente que permita intervenir en el fenómeno a modelar. Por ejemplo, los datos numéricos obtenidos en la experimentación del movimiento pendular no se conforman en modelo hasta que son utilizados para predecir el fenómeno. La modelación se da, en este caso, al articular los datos numéricos con el fenómeno con la intención de predecirlo, es en este momento que la tabla de datos adquiere el estatus de modelo numérico. Esta es la fase del acto de modelar o la construcción de modelos. En este sentido los modelos son herramienta, su razón de ser es la intervención en el fenómeno.

Para la intervención en un fenómeno se construyen y utilizan diferentes modelos, numéricos, gráficos y algebraicos, por mencionar algunos. Articulando los parámetros del fenómeno y de los diferentes modelos se construye una red del fenómeno con sus modelos. Esta red hace posible la intervención en el fenómeno a partir de los modelos sino la articulación de los diferentes modelos. Esta es otra fase de la modelación.

Es posible que los actores conformen una red de modelos con un determinado fenómeno, mas ésta no será estable hasta que pueda prescindir del fenómeno que le dio origen. Es así que estudiantes, después de conformar una red de lo lineal al modelar la elasticidad de los resortes, actúan como sino tuvieran experiencia al modelar el llenado de un recipiente cilíndrico con un gasto de agua constante. No utilizan la red construida previamente pues la red es de la elasticidad de los resortes (Méndez, 2008). Es necesario establecer ligas entre estos dos fenómenos, es necesaria una fase de analogía entre estos dos fenómenos.

Es así que proponemos cuatro fases de la modelación: la interacción con el fenómeno, el acto de modelar y la construcción de modelos, la conformación de una red de modelos con el fenómeno y la analogía.

La modelación virtual

En el intento de incorporar las prácticas de modelación a los sistemas escolares, encontramos diversas dificultades, una de éstas es la ausencia de laboratorios o de instrumentos de medición, que dificultan la reproducción de los fenómenos a modelar.

Como alternativa diseñamos un *software* para calculadoras o PC's, llamado *Laboratorio Virtual de Ciencias (LVC)* que simulan diversos fenómenos de las ciencia naturales o sociales y que atienden a las intenciones de diseños de aprendizaje basados en la modelación (López, 2010).

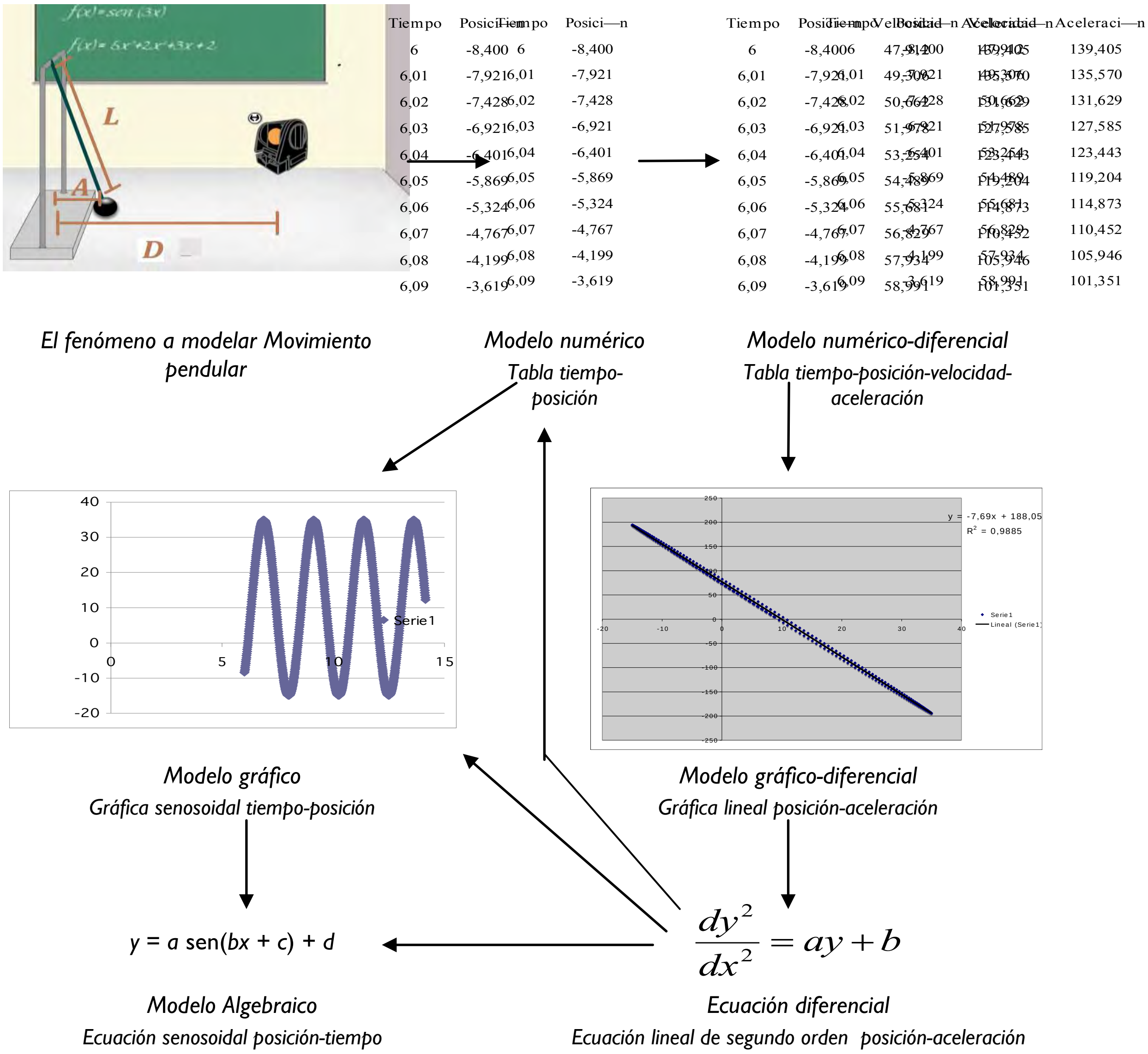
El carácter situacional de las prácticas de modelación es fundamental en nuestra perspectiva, desde este punto de vista, las prácticas ejercidas en contextos virtuales contienen aspectos que las diferencian de prácticas de modelación en otros contextos. Es por esto que estudiamos las "prácticas de modelación virtual", prácticas que devienen de las prácticas de modelación al modificar el contexto de su ejercicio y con ello adquieren características particulares.

La red de lo senosoidal

Consideramos una red llamada lo senosoidal como la red que articula un fenómeno con sus diferentes modelos senosoidales. Estos modelos pueden ser numéricos, numéricos-diferenciales, ecuaciones algebraicas, ecuaciones diferenciales, gráficas y gráficas-diferenciales.

En esta red partimos del fenómeno, experimentando construimos una tabla que se constituye en el modelo numérico, calculando las razones de cambio construimos un modelo numérico-diferencial, ajustando los datos distancia-aceleración obtenemos la ecuación diferencial que modela el fenómeno. En un camino paralelo podemos pasar del modelo numérico, al modelo algebraico vía el ajuste de los datos tiempo-posición. Los dos caminos desarrollados se articulan comparando los resultados obtenidos al resolver la ecuación diferencial y comparando la tabla de datos generada a partir de la solución y su gráfica (figura 1).

Figura 1. La red senosoidal que articula los modelos con el fenómeno



Esta red pretende poner en funcionamiento elementos que la investigación socioepistemológica ha propuesto para desarrollar en pensamiento trigonométrico (Buendía y Montiel, 2009, 2011). Al ser una perspectiva teórica interesada en el rol epistemológico de las prácticas en la construcción del conocimiento matemático, Buendía y Montiel proponen elementos que integran el pensamiento trigonométrico –más que la función trigonométrica como tal- y que se desarrollan en el ejercicio intencional de ciertas prácticas.

Así, la especificidad de este comportamiento periódico se construye en un contexto de variación, y se distingue de otros comportamientos cuando se reconoce en sus cambios y sus variaciones sucesivas el mismo *tipo* de comportamiento (trigonométrico, acotado y periódico). Proponen entonces, como aportación al rediseño del discurso matemático tradicional, un escenario donde la ley de variación de un comportamiento periódico-acotado constituya una herramienta predictiva.

"La modelación del movimiento pendular", un diseño de aprendizaje basado en la modelación senosoidal

Elaboramos un diseño de aprendizaje basado en la modelación de fenómenos por modelos senosoidales con la intención de aportar elementos para la caracterización de la construcción de la red de lo senosoidal. El diseño esta guiado por las fases que hemos definido para la modelación.

Fase I. La experimentación.

En esta fase los estudiantes experimentan con un péndulo virtual; a través de la simulación por medio de software, toman datos y los estructuran en una hoja de cálculo.

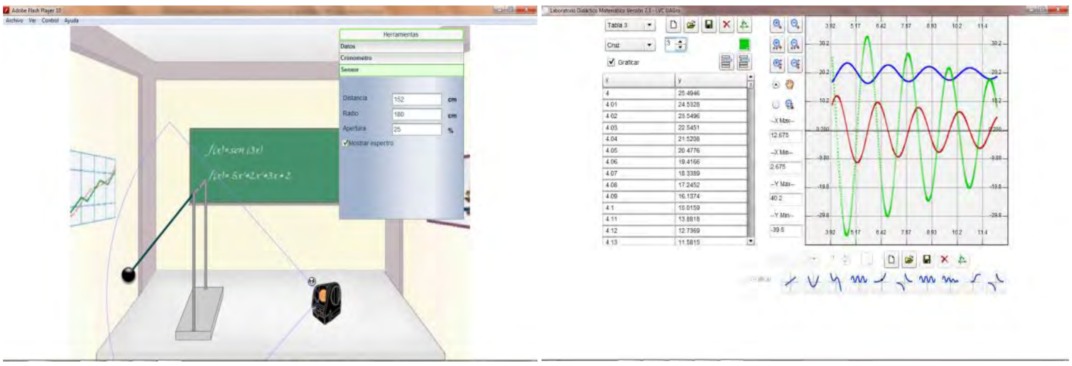


Figura 2. Simulador del movimiento pendular y software (LDM) para el ajuste grafico de datos

Fase II. El acto de modelar, la construcción de modelos

En esta fase se plantean situaciones a los actores en donde tendrán que articular tablas, gráficas y ecuaciones con el fenómeno. Las situaciones planteadas son las siguientes.

1. A partir de la predicción los estudiantes utilizan y caracterizan la tabla, identifican numéricamente el periodo, la amplitud y la frecuencia.

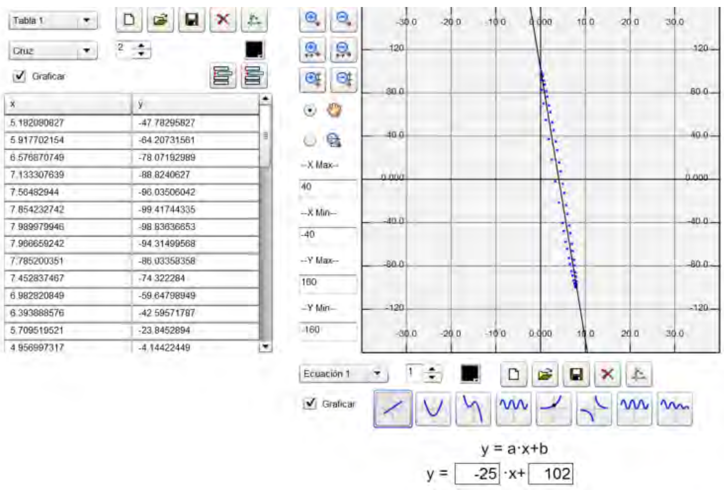
2. En su intento por caracterizar la tabla calculan con la hoja de cálculo la primera razón de cambio y exploran la relación entre tiempo-velocidad, distancia-velocidad.

3. Calculan la segunda razón de cambio y exploran la relación tiempo-aceleración, distancia-aceleración, velocidad-aceleración.

Tiempo	Posici—n	Velocidad	Aceleraci—n
6	-8,400	47,912	139,405
6,01	-7,921	49,306	135,570
6,02	-7,428	50,662	131,629
6,03	-6,921	51,978	127,585
6,04	-6,401	53,254	123,443
6,05	-5,869	54,489	119,204
6,06	-5,324	55,681	114,873
6,07	-4,767	56,829	110,452
6,08	-4,199	57,934	105,946

Figura 3. Modelo numérico-diferencial. Tabla tiempo-posición-velocidad-aceleración

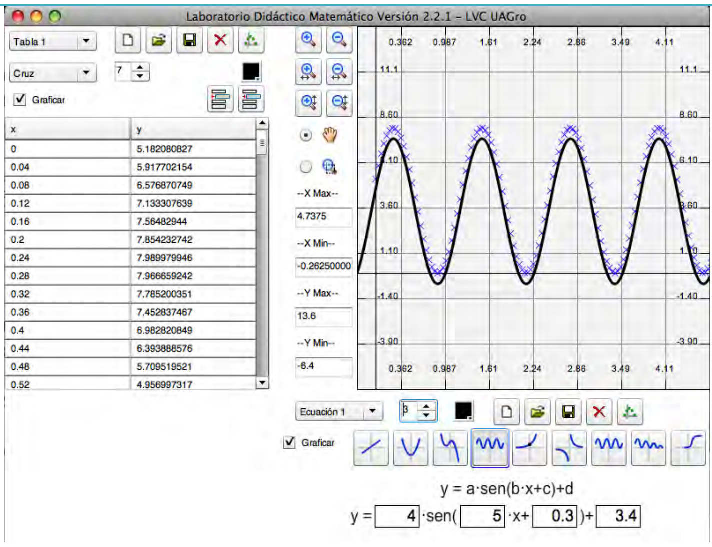
4. Al analizar la gráfica de los datos distancia-aceleración consideran que existe una relación lineal. Ajustan gráficamente los datos con el programa LDM. De esta manera obtienen el modelo diferencial.



$$\frac{dx^2}{dt^2} = -25x + 102$$

Figura 4. Ajuste de datos posición-aceleración y obtención de la ecuación diferencial como modelo

5. En el programa LDM ajustan gráficamente los datos tiempo-distancia, identifican gráficamente el periodo, la amplitud y la frecuencia y articulan los parámetros gráficos con los de la fórmula *y* = *a*sen(*bx* + *c*) + *d*.



$x(\,t\,) = 4 \text{ sen } (5\,t + 0.3) + 4$

Figura 5. Ajuste gráfico de los datos tiempo-posición y obtención de la ecuación senosoidal como modelo

Fase III. La red de lo senosoidal

Articulan el parámetro *a* de la fórmula con la amplitud de la gráfica, de la tabla y del movimiento pendular. El parámetro *b* de la fórmula con la frecuencia de la gráfica, de la tabla y del péndulo. El parámetro *c* de la fórmula con el desplazamiento horizontal de la gráfica, el tiempo inicial de la tabla y del péndulo. El parámetro *d* de la fórmula con el desplazamiento vertical de la gráfica, la posición inicial en la tabla y del péndulo.

Fase IV La analogía

Los actores establecen una analogía entre el movimiento pendular y el movimiento armónico simple.

Investigan con que otros fenómenos pueden establecer analogías.

Los actores de la puesta en escena del diseño

Los actores que participan en la puesta en escena son 25 estudiantes de cuarto semestre del Colegio de Bachilleres, organizados en seis equipos cinco de cuatro integrantes y uno de cinco.

Primeras observaciones

El discurso entablado en los equipos y en la búsqueda de consensos en el grupo es muy rico en argumentos pues muestran la articulación que establecen entre el fenómeno y los diferentes modelos. Para mostrar esto presentamos dos episodios, uno del equipo uno donde presentan las formas de predecir con la tabla de datos y el otro del equipo tres tratando de interpretar la gráfica distancia-velocidad.

Episodio 1. Hay diferentes formas de decir cuál es la posición

Este episodio se desarrolla después de discutir la situación donde se pedía que determinaran la posición del péndulo después de 8.48 segundos. La tabla tiempo-distancia contenía datos hasta el segundo 3.44 y el incremento del tiempo era de 0.04 segundos. Para predecir en este caso determinan el periodo, es decir cada que tiempo tomaba la misma posición el péndulo, 1.24 segundos, entonces la posición requerida es la del segundo 1.04, 1.17 metros. El segundo 1.04 lo calculan restando al segundo 8.48 seis veces 1.24, 8.48 -6 (1.24) = 1.04.

La situación que se propone es ¿Cuál es la posición del péndulo en el segundo 1.374?

Luisa: Se calcula de otra forma que el anterior

Roberto: Si, ya tengo la forma. Mira, tomamos la posición en el más cercano (señala la posición en 1.36) o sea 6.915. Aja, te falta .014, lo multiplicas por la velocidad (señala la celda donde ha calculado la velocidad promedio en 1.36, escribe .014 por 12.14) y nos da 0.1699, casi 0.17, esto es lo que me faltaba de metros. Aja, y sale (anota 6.915 + 0.17) 7.085. Aja 7.085 metros.

Análisis: El método de Roberto es $x\ (t + h) = x\ (t) + h\ \Delta x/\Delta t$, un método basado en la serie de Taylor de primer orden, con argumentos contextuales y con diferencia finitas.

Episodio 2. ¿Por qué sale un círculo?

María: Ya te fijaste, que rara sale la gráfica, ¿por qué sale un círculo?

Ulises: Jamás me hubiera imaginado que la gráfica saliera así.

María: ¿Cómo te explicas esto?

…

Isaías: Ya me rompí la cabeza y no doy, como que debe de haber un equilibrio. Si el péndulo está más lejos la velocidad disminuye, si esta cerca la velocidad aumenta.

Ulises: No. En el punto más cerca la velocidad es cero y en el punto más lejos también.

Isaías: Aja, pero yo imaginaba así porque deben de compensarse para que quede una cantidad constante. Todos los puntos deben de quedar a una distancia igual del centro. Es círculo pues.

María: Pero los puntos no son distancia, son distancia como velocidad.

Isaías: Pero es lo mismo. Aquí quién es el centro.

Ulises: Mira este es el punto más cercano al sensor y este el más alejado. (Señala con el dedo en la gráfica el punto (0,0) y le punto (8,0)). Cámbiale ahí (se refiere al simulación del péndulo) el vuelo del péndulo y se va hacer más grande (el círculo).

Isaías: Entonces el centro es como el centro del péndulo. Aja, ahí la velocidad es máxima en una dirección por eso esta hacia arriba (señala el punto (4,20)) y la otra es la velocidad máxima pero en otra dirección por eso esta hacia abajo (señala el punto (4,-20)). Aja, ya sabía que tenía razón es como guardar el equilibrio. Va aumentando la posición y va aumentando la velocidad, luego sigue aumentando y baja la velocidad (con su dedo va recorriendo la parte superior del círculo) y luego al revés pero negativo (ahora recorre la parte inferior del círculo de derecha a izquierda).

Análisis: En este episodio es notorio como argumentan los actores utilizando elementos del movimiento pendular así como propiedades del modelo gráfico y numérico.

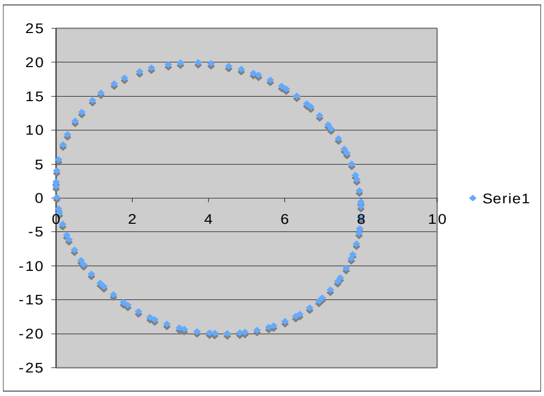


Figura 6. Gráfica posición-velocidad

Referencias Bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Buendía, G. y Montiel, G. (2009). Acercamiento socioepistemológico a la historia de las funciones trigonométricas. En P. Lestón (Ed) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa22*, 1285-1294 México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Buendía, G. y Montiel, G. (2011) From History to Research in Mathematics Education: socio-epistemological elements for trigonometric function. In Katz, V. and Tzanakis, C. (Eds.), *Recent Developments on Introducing a Historical Dimension in Mathematics Education*. Mathematical Association of America.

López, C. (2010).*El laboratorio virtual de ciencias, una experiencia intercultural*. Tesis de Maestría no publicada. Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Méndez, M. y Arrieta, J. (2005). Las prácticas sociales de modelación multilineal de fenómenos en el aula. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 18, 575 - 581. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Méndez, M. (2008). *Un estudio de la evolución de las prácticas: la experiencia de modelar linealmente situaciones análogas.* Tesis de Maestría no publicada, Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero. México.

LA GRÁFICACIÓN EN UNA COMUNIDAD CIENTÍFICA

Isabel Tuyub, Gustavo Martínez, Gabriela Buendía
CICATA-IPN México
be.tuyub@gmail.com, gmartinezsierra@gmail.com, gbuendíag@hotmail.com

Resumen. El presente escrito aborda algunos ejemplos sobre el uso de las graficas en una comunidad científica de ingenieros, sobre el discurso de investigaciones de una maestría en ingeniería ambiental. Los resultados que se han obtenido son que el uso de las gráficas en dicha comunidad proporciona un nuevo enfoque para analizar cómo construye conocimiento, además de que las gráficas son herramientas que permiten identificar, para esa comunidad, la función social de la matemática: la argumentación y la validación.

Palabras clave: contexto, funcionamiento y formas de gráficas

Abstract. Present paper addresses some examples of the use of graphics in a scientific community of engineers, on the research speech of a master of environmental engineering. The results are that the use of graphics in this community provides a new approach to analyzing how a community develops knowledge, and the graphs are tools to develop the social function of mathematics: The argument and validation.

Key words: context, functionings and forms of graphs

Introducción

Las gráficas son elementos que juegan un papel central dentro de los diversos contextos, ya sea en la escuela, en nuestra vida cotidiana o en la ciencia misma (Dolores, Chi, Canul, Cantún y Pastor, 2009). El *contexto* se entenderá como el conjunto de condiciones y circunstancias de carácter sociocultural en las que, física o simbólicamente, se sitúa un hecho o persona; cuenta con la especificidad de los fenómenos o situaciones que a él acontecen, lo que incide en las formas de pensar y actuar de los individuos involucrados (Aparicio, Sosa, Jarero y Tuyub, 2010).

Desde la antigüedad hasta nuestras épocas, las gráficas han sido usadas como una forma de describir el movimiento de situaciones u objetos, la variación de fenómenos para caracterizar comportamientos, una forma de interpretación de soluciones, de comunicar resultados para entender problemas o generar habilidades para resolverlos, un registro que favorezca la optimización en procesos y favorecer la resignificación del conocimiento matemático (Buendía, 2010).

En el contexto escolar se encuentra evidencia que éstas representan los modelos del comportamiento tendencial de funciones (Cordero, 2006; Cordero y Flores, 2007; Cordero, Cen y Suárez, 2010). Roth y McGinn (1997), referido en Dolores, Chi, Canul, Cantún y Pastor (2009), asumen que las gráficas son una forma humana de vida; plantean que para desarrollar habilidades para su lectura e interpretación es necesario involucrar a los estudiantes en la realización de *prácticas socialmente compartidas*, más que en la posesión a priori de habilidades cognoscitivas.

En un contexto de investigación, se pretende identificar el uso que se le da a las gráficas en la construcción del conocimiento científico de una comunidad. Entendiendo por este último aquel que transforma la existencia de la sociedad, "la irrupción de una ciencia o una nueva técnica en la sociedad siempre tiene el efecto de perturbar la relación con lo real, la jerarquía de valores, el peso relativo de los comportamientos (la teoría microbiana institucionalizo la higiene)" (Moscovicci y Hewstone, 1986, p.14).

Marco de referencia

La teoría socioepistemológica desarrolla estrategias de investigación de naturaleza epistemológica, estudia las circunstancias que favorecen o posibilitan la construcción del conocimiento, concibiendo a la matemática como un conocimiento con significados propios que se construyen y reconstruyen en el contexto mismo de la práctica que realiza el hombre (Arrieta, Buendía, Ferrari, Martínez y Suárez, 2004), destacando que respetan un contexto, espacio, tiempo, ideología y cultura.

Esta investigación considera a la teoría socioepistemológica como el marco principal, por tomar en cuenta que en los usos del conocimiento matemático se construyen y determinan los significados de la matemática a partir de establecer una relación dialéctica entre las experiencias situadas de los individuos, la matemática y su función en actividades de naturaleza social.

Dentro de dicha teoría, las gráficas son consideradas como una manifestación (representación) del uso del conocimiento matemático en diferentes contextos, a través de las relaciones dialécticas entre sus *funcionamientos* y *formas* (Cordero, 2008). El uso de las gráficas adquiere una connotación más en el sentido funcional que utilitario, por tanto involucra el contexto. Considera al *funcionamiento* como la esencia que perdura en las distintas situaciones de uso y a la *forma* como el tipo de tareas que las componen (Cordero y Flores, 2007).

Además más que objetos, las gráficas son algo dinámico, temporal y evolutivo, un saber con el que en algunos casos desarrolla el razonamiento, por ejemplo al discutir la posición de la pendiente de una recta, y además permite la argumentación en diversas situaciones de uso, con las cuales posee una relación dialéctica. Son un producto material continuo por ser resultado de la experiencia histórica de comunidades, grupos sociales y científicos que, dependiendo de la institución a la que pertenecen, lo norma y lo requiere para ciertos fines, por ejemplo cuando se introducen y permanecen en el sistema educativo se van transformando y transformándolo a su vez (Buendía, 2010). Por lo que se asume que un universo amplio y significativo de gráficas puede contribuir al desarrollo de la forma de pensamiento matemático (Dolores et al, 2009), además de que en las comunidades los seres humanos construyen conocimiento matemático funcional a partir de las prácticas que llevan a cabo para satisfacer sus necesidades sociales.

Determinar cuál es el uso de las gráficas que se manifiestan en una comunidad puede apoyar a entender la función de la matemática en ese tipo de contextos de carácter científico y determinar el papel de la matemática en ese medio.

Método de investigación

El desarrollo de la investigación giró en torno a identificar el uso de la matemática a través de sus funcionamientos y formas que representan las gráficas que subyace en una práctica científica, basada en la investigación y producción de conocimiento en ingeniería.

La comunidad de estudio fueron científicos especialistas en problemas de sobre investigación en ingeniería ambiental de una comunidad de académicos investigadores de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Yucatán.

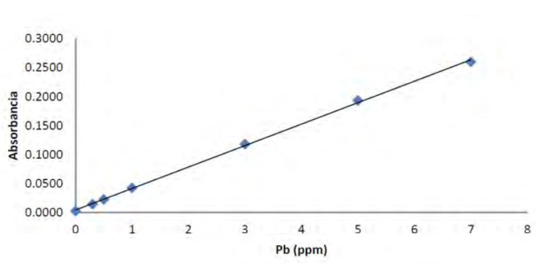
La recolección de datos se basó en el análisis de la graficación que se manifestó en el discurso generado en artículos científicos publicados por los profesores de la maestría en ingeniería de la Universidad Autónoma de Yucatán en una revista propia de la comunidad.

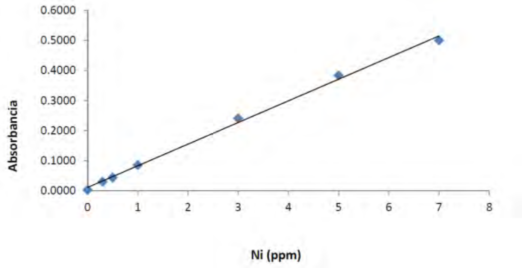
Según Cordero (2006), uno de los funcionamientos de las gráficas es la *graficación* como la modelación de los comportamientos tendenciales de las funciones, lo cual determina una vía para la construcción de conocimiento y en ella se pueden determinar diferentes usos de las gráficas. Para el contexto de ingeniería se considerará todo aquello que conlleva a interpretar una gráfica o conjunto de gráficas: las herramientas, el ambiente en el que se manifiesta, sus características particulares, ejes cartesianos, entre otros, que determinan o permiten identificar el contexto de la gráfica, lo que nos conlleva a encontrar, posiblemente, gráficas diferentes a las enseñadas en el contexto escolar.

Resultados

A continuación se muestra dos ejemplos del uso de la gráfica en dicha comunidad:

Ejemplo 1: Linealidad en las curvas de calibración
Para la evaluación del método analítico a emplearse en la determinación de metales en sedimento de mar, se procedió a realizar curvas de calibración para Pb y Ni en un rango de 0 ppm - 7 ppm, usando 7 puntos considerando tener 4 puntos en la zona de mayor sensibilidad (0 ppm – 1 ppm).



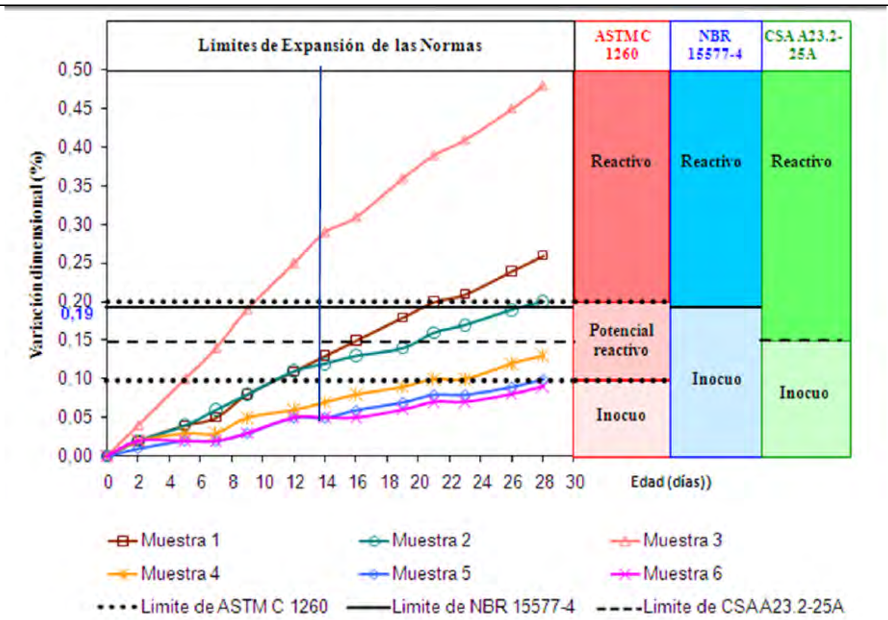


Las curvas mostraron linealidad ya que **obtuvieron un coeficiente de correlación de 0.9995 y 0.9985** respectivamente, **aceptables** según la EMA (2008). El intervalo lineal que se maneja es muy amplio (0.3 ppm – 7.0 ppm) y permite tener **más seguridad de que la concentración de la muestra** de sedimento marino **sea cuantificable dentro de** dicho **intervalo.**

Tabla 1. Representación de una gráfica de una investigación en ingeniería ambiental (Aragón, Ponce, Coronado y Giacomán, 2011).

Ejemplo 2: Límites de Expansión de las Normas

Resultados del método acelerado de las barras de mortero **relacionando el porcentaje de expansión** de las barras **con el tiempo**, para clasificar la potencialidad relativa de los agregados a través del límite de expansión por tres normas: ASTM C 1260 (2005), NBR 15577- 4 (2008) y CSA A23.2-25A (1994).



De acuerdo con la ASTM C 1260, expansiones intermedias inferiores a 0.10 % a los 14 días, a partir de la lectura inicial, están constituidas de agregado inofensivo (inocuo). Si son superiores a 0.10% e inferiores a 0.20%, se tiene un comportamiento potencialmente reactivo.	La NBR 15577-4 considera expansiones intermedias inferiores a 0.19% a los 28 días son inocuas. Barras con expansiones mayores o iguales a 0.19% a los 28 días, los agregados se consideran reactivos.	La CSA A23.2-25A establece que inferior a 0.15% a los 14 días se consideran inocuas y expansiones mayores a 0.15% en la misma edad se consideran reactivos.

Se puede constatar que las muestras 1, 2 y 3 que presentan **mayores cantidades decuarzo,tuvieron las mayores expansiones**, comprobando que los cristales intervienen en la potencialidad de los agregados.

Tabla 2. Representación de una gráfica para determinar si la cantidad de cuarzo en algunos reactivos influye para potencializar los agregados (Cavalcante, Barreto y Duarte, 2011).

El funcionamiento está dado por la función social de la matemática que es *argumentar* para optimizar en el sentido de ahorrar recursos, asegurar resultados menos erróneos, potencializar materiales, entre otros. En el ejemplo 1 era mantener una linealidad en un mayor intervalo, asegura mayor concentración de una muestra; en el ejemplo 2, a mayor cantidad de un material (cuarzo) en unas muestras, es más potencial el reactivo.

La forma que se presenta en relación con el funcionamiento es la manera en cómo se analiza la información que permite establecer un consenso entre la comunidad (validación). En el ejemplo 1, es la linealidad en la que se comportan los datos en el intervalo; en el ejemplo 2 es la interpretación de las relaciones de los datos entre las diferentes normas.

El uso de la matemática asociada a la gráfica en el primer ejemplo se manifestó para comprobar qué materiales tenían una linealidad con un mayor intervalo; en el segundo fue para organizar información de los comportamientos en determinados parámetros que pueda constatar una premisa. La información obtenida de datos experimentales se analiza de acuerdo a relaciones de valores o variables de una gráfica con la intención de determina conjeturas a través del comportamiento gráfico en determinado intervalos, lo cual proporciona distintos significados.

Consideraciones finales

Los ejemplos mostrados en este escrito son una muestra del análisis de artículos científicos de la comunidad con la intención de tener una muestra global del funcionamiento de las gráficas en esa comunidad, a través de distintos usos. Lo que se identificó es que la matemática (las gráficas) es un medio para construir conocimiento científico, es decir es por medio de ellas en las que la comunidad discute, valida y argumenta.

En contextos científicos lo que se aprecia es la función social de la matemática, más que la matemática misma, que consiste en la argumentación y validación de conjeturas y la importancia del contexto en el que se desarrolla, con la intención de indagar cómo una comunidad construye su conocimiento y cómo la matemática lo influye en el uso de gráficas.

El uso de la matemática en una comunidad puede manifestarse en las representaciones gráficas y variar de acuerdo al contexto, a pesar de ser la misma comunidad de investigación. Pero lo que se puede globalizar es la función social de la matemática y generar indicadores para mostrar un panorama de cómo una comunidad construye conocimiento, que se puede indagar en el uso de sus gráficas.

Dentro de los resultados obtenidos se identificó que la necesidad que norma el uso del conocimiento matemático fue la *optimización,* la cual moviliza el uso de recursos y conocimientos matemáticos para entender y explicar aspectos y situaciones que se desenvuelven en su práctica, la cual engloba cuatro actividades: análisis de información tendencial, experimentación de una situación, predicción, argumentación y validación.

En una comunidad de ingenieros se pueden encontrar gráficas que se producen de datos reales en experimentos para analizar su comportamiento con intención de predecir, afirmar conjeturas, evidenciar nuevos hallazgos. Dichas gráficas más que mirarlas como productos acabados permiten generar argumentos que pueden dar cuenta de los funcionamientos de la matemática que están presentes, con ello originar nuevas formas y por consiguiente nuevos funcionamientos y de esta manera construir conocimiento en la evolución de la gráfica, es decir en mirar nuevas relaciones originadas de la discusión para resolver un problema.

Referencias bibliográficas

Aparicio, E., Sosa, L., Jarero, M. y Tuyub, I. (2010). Conocimiento matemático. Un estudio sobre el papel de los contextos. En Rodríguez y Aparicio (Eds.), *Memoria de la XIII Escuela de Invierno en Matemática Educativa*. (pp. 167-174). México: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa.

Aragón C., Ponce C., Coronado V. y Giacomán G. (2011). Evaluación de un método analítico para la determinación de níquel y plomo en sedimentos de mar por espectroscopia de absorción atómica. *Ingeniería-Revista Académica de la Facultad de ingeniería de la Universidad Autónoma de Yucatán 15* (1), 1-8.

Arrieta, J., Buendía, G., Ferrari, M., Martínez, G. y Suárez, L. (2004). Las prácticas sociales como generadoras del conocimiento matemático. En L. Díaz Moreno. (Ed). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17(1),* (418-422) México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Buendía, G. (2010). Una revisión socioepistemológica acerca del uso de las gráficas. En G. Buendía (Ed.) *A diez años del posgrado en línea en Matemática Educativa en el IPN* (pp.21-40). México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa AC.

Cavalcante C., Barreto E. y Duarte A. (2011). Análisis de métodos de prevención de reacción álcali-agregado: Análisis petrográfico y método acelerado para barras de mortero.

Ingeniería-Revista Académica de la Facultad de ingeniería de la Universidad Autónoma de Yucatán 15(1), 9-17.

Cordero, F. (2006). La modellazione e la rappresentazione grafica nell'insegnamento-apprendimento della matematica. *La Matematica* e *la sua Didáctica 20*(1), 59-71.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socio epistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa10*(1), 7-38.

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R.M. Farfán, J. Lezama, A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (pp. 285-309). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C. y Díaz de Santos S.A.

Cordero, F., Cen, C. y Suárez, L. (2010). Los funcionamientos y las formas de las gráficas en los libros de texto: Una práctica institucional en el bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 13(2), 187-214.

Dolores, C., Chi, A., Canul, E., Cantún, C. y Pastor, C. (2009). De las descripciones verbales a las representaciones gráficas. El caso de la rapidez de la variación en la enseñanza de la matemática. *UNION. Revista Iberoamericana de Investigación Matemática18,* 41-47.

Moscovicci, S. y Hewstone, M. (1986). De la ciencia, al sentido común. En S. Moscovicci, M. Billing, J.P. Deconchy, R.M. Farr, M. Gilly, C.F. Graumann, M. Hewstone, J. Jaspars, D. Jodelet, L. Kruse, G. Mugny, H. Paincheler, S. Papastomuo, B. Rimé y M.L. Rouquette (Eds). *Psicología Social, II* (pp.680-710) Barcelona: Paidós.

Suárez, L. y Cordero, F. (2005). Elementos teóricos para estudiar el uso de las gráficas en la modelación del cambio y de la variación en un ambiente tecnológico. *Revista Electrónica en Educación en Ciencias 3*(1), 51-58.

CONTENIDO CURRICULAR EN PRECÁLCULO. UN ESTUDIO DE SU DIMENSIÓN SOCIOCULTURAL

Landy Sosa, Eddie Aparicio, Martha Jarero
Universidad Autónoma de Yucatán México
smoguel@uady.mx, alanda@uady.mx, jarerok@uady.mx

Resumen. En la presente investigación se problematiza la organización de saberes matemáticos asociados a contenidos del Precálculo desde una perspectiva socioepistemológica, en la que se asume que los procesos de construcción, difusión e institucionalización de conocimiento se corresponden con un contexto específico. Por ende se analizaron variables socioculturales de contexto asociadas al uso y construcción de conocimiento matemático en ámbitos no escolares y en el escenario escolar. En éstos se reconoció el papel de la práctica, la dimensión social de la matemática y la actividad humana como condiciones socioculturales para la reorganización y construcción de saberes matemáticos en Precálculo.

Palabras clave: organización, currículo matemático, precálculo, contexto

Abstract. In the present investigation is problematized the organization of mathematical knowledge associated to contents of the Precalculus from a socioepistemological perspective, which assumes that the processes of construction, diffusion and institutionalization of knowledge correspond to a specific context. Therefore were analyzed sociocultural variables of context associated with the use and construction of mathematical knowledge in non-school and the school scenario. In these were recognized the role of practice, the social dimension of mathematics and human activity as socio-cultural conditions for the reorganization and construction of mathematical knowledge in Precalculus..

Key words: organization, mathematical curriculum, precalculus, context

Introducción

Los procesos de organización y construcción escolar del conocimiento matemático no solo atañen a la cognición de un individuo, también influyen aspectos de carácter social y cultural asociados a dicho conocimiento, (García y Aparicio, 2007; Godino y Llinares, 2000; Aparicio, Sosa, Jarero y Tuyub, 2010; López, 2011). Se ha observado por ejemplo, que los pensamientos matemáticos de jóvenes escolares no son del dominio exclusivo de la matemática misma o cognición pura, de hecho sus tareas o actividades de índole matemático pasan por un medio contextual en el que se entrelaza lo cognitivo con lo social, dígase la componente vivencial de las personas (López, 2011).

En tal sentido, se asume que los procesos de construcción y difusión de la matemática en ámbitos científicos como escolares, son inherentes al contexto sociocultural en que se desarrollan (Aparicio, Sosa, Jarero y Tuyub, 2010). Esta idea motivó explorar la dimensión sociocultural del currículo escolar de Precálculo, pues se reconoce que en él se conjugan ideas variacionales presentes y necesarias en actividades humanas como la modelación (matemática) en diversos ámbitos de la vida y con ello, la posibilidad de reestructurar los contenidos matemáticos del Precálculo y Cálculo a partir de una sintaxis propia con génesis en actividades humanas en situaciones de variación y cambio (Alanís y Salinas, 2009).

En el estudio de una reorganización escolar de saberes matemáticos resulta ineludible el análisis de la relación dialéctica entre tales saberes y aquella estructura social donde estos se producen. Desde esta óptica el presente estudio atendió la cuestión siguiente: ¿qué tipo de variables de contexto se asocian con la reorganización y construcción escolar de saberes matemáticos en Precálculo?

La búsqueda de respuestas a esta cuestión derivó en el reconocimiento del papel de la práctica, la matemática, su dimensión social y la actividad humana como condiciones socioculturales en las que el uso y construcción de conocimiento matemático relativo al Precálculo, se haya presente tanto en ámbitos escolares como no escolares.

Marco teórico

En la teoría Socioepistemológica se concibe a la matemática como un conocimiento con significados propios que se construyen y reconstruyen en el contexto mismo de la práctica que realiza el hombre (Arrieta, Buendía, Ferrari, Martínez y Suárez, 2004), basándose en la tesis que postula a las prácticas sociales como generadoras del conocimiento matemático.

Esto es, los procesos de construcción y organización del conocimiento matemático se corresponden con contextos y prácticas específicas de comunidades sociales. El contexto lo constituye el conjunto de condiciones y circunstancias de carácter sociocultural en las que física o simbólicamente se sitúa un hecho o persona, y supone la especificidad de los fenómenos o situaciones, pues éstos han de combinarse de manera única e irrepetible para tener influencia en lo que él acontece (Aparicio, Sosa, Jarero y Tuyub, 2010).

Siendo así, desde este encuadre teórico, la posibilidad de intervenir en la reorganización y construcción escolar de dicho conocimiento partirá del estudio de estos procesos desde una perspectiva múltiple que incorpore el estudio de la epistemología de prácticas y la dimensión sociocultural del conocimiento en actividades humanas donde se usan o producen matemáticas (Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez-Sierra, 2006).

Método

Para la reorganización del contenido curricular en Precálculo se abordó el estudio del papel del contexto en los usos y construcción de conocimiento matemático por medio de tres estudios clínicos:

a. En ámbitos no escolares, se analizó la relación del contexto con el uso de conocimiento matemático en una práctica científica y una laboral. Respecto a la práctica científica se analizaron usos y formas de conocimiento matemático asociado a la variación en una comunidad de Biología marina. Las técnicas de recolección de datos fueron: análisis de artículos científicos y entrevista semi-estructurada a un biólogo marino.

   En la práctica laboral desarrollada en el área de producción de una empresa de botanas, el objeto de estudio lo constituyeron las formas de organización e interacción social de los empleados. Con este objeto se realizó un estudio etnográfico educativo de observación no participante, registrándose los datos en listas de cotejo sobre formas de organización (Bavelas, 1962, citado en Horton y Hunt, 2000) e interacción escolar (Godino y Llinares, 2000), bitácoras de grabaciones de voz y notas de campo sobre la matemática que subyace en los procesos de producción. Así, se analizaron los aspectos del contexto y la práctica que modificaron o potenciaron las interacciones y el éxito en las actividades laborales.

b. En un ámbito escolar, se analizó un contexto de aprendizaje por medio de la experimentación de una unidad didáctica basada en la práctica de modelación de lo variacional. El diseño se sustentó en la Socioepistemología en cuanto al ejercicio de un análisis sistémico sobre la construcción del concepto función, así como en la noción de práctica. La población participante fueron dieciocho estudiantes de una escuela preparatoria, sin proceso de instrucción alguno en Precálculo.

Conocimiento matemático del Precálculo: Condiciones socioculturales de uso y construcción

La matemática en la práctica y actividad humana

La práctica como medio para el estudio de relaciones matemáticas a propósito de una actividad humana de naturaleza social, moviliza el desarrollo y empleo de recursos matemáticos tanto en el ámbito científico como en el escolar.

Ámbito	Científico	Escolar
Práctica	**Optimización.**Establecimiento de condiciones ambientales óptimas para obtener un mayor crecimiento de algas en menor tiempo y búsqueda de condiciones que permitan minimizar los costos de producción de materias primas y de importación de productos derivados de algas.	**Modelación de lo variacional.**Desarrollar técnicas y modelos matemáticos para calcular la variación de fluidos líquidos en el llenado de un tanque cilíndrico.

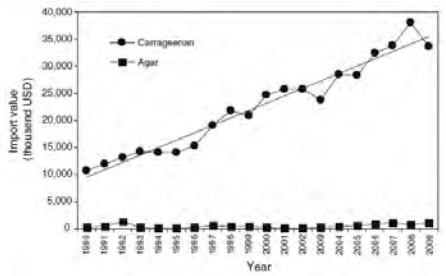
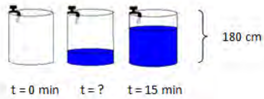
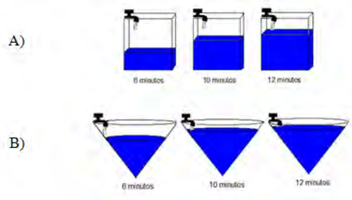
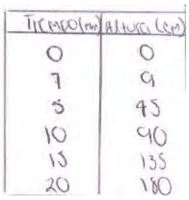
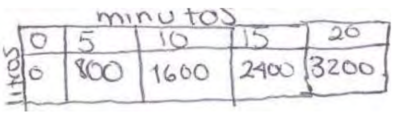
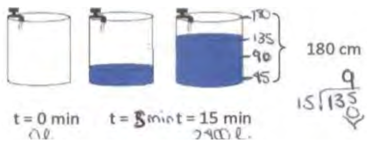
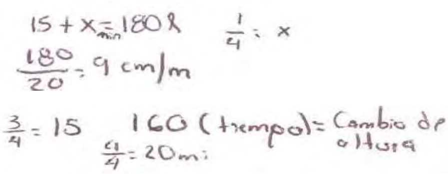
<table>
<tr>
<td>Situación</td>
<td>Actividad en Biología Marina.Análisis de información tendencial sobre los valores de importación y exportación de productos derivados de una especie de alga marina.


Imagen 1. Gráfico sobre valores de importación en dólares de productos derivados de cierta alga a México, de 1990 a 2009 (Robledoy Freile-Pelegrín, 2010).</td>
<td>Actividad en el diseño didáctico. Parte 1. Predicción de la altura del agua en un cilindro en cierto tiempo.


Parte 2. Decidir y explicar ¿en cuál de dos recipientes de diferente forma el llenado se puede calcular empleando un modelo matemático lineal?

</td>
</tr>
<tr>
<td>La matemática en la actividad</td>
<td>Comportamiento tendencial de funciones, función lineal (modelo gráfico), variación constante, proporciones, función creciente</td>
<td>Nociones de cambio, variación, variación constante y no constante, función lineal, modelos matemáticos, estrategias para calcular y representar la variación</td>
</tr>
<tr>
<td>Recursos para establecer relaciones matemáticas</td>
<td>Analizar de forma cuantitativa y cualitativa el comportamiento tendencial de las variables inmersas en la situacional variacional.
Interpretar la variación de datos expresados de forma numérica (tabla de datos) o gráfica.
Establecer relaciones entre variables.
Comparar puntualmente los distintos estados de las variables.
Asociar la variación de los datos a un modelo matemático lineal.
Informar discursivamente sobre la variación y el cambio que se presenta en la situación.</td>
<td>Respuestas de los estudiantes (E):
E1, E3: 

E2:


E1-E3, E10-E15: En un minuto se llenan 9 cm. El tanque se llena a la mitad en 10 min.


E7-E9:
</td>
</tr>
</table>

Significados matemáticos	Argumento del investigador: *"Ahí presento básicamente una **gráfica de cómo ha incrementado la demanda de carregenina con respecto al agar,** es decir, la demanda se ve reflejada en el valor de importación … pero **el agar es muy estable** y sus aplicaciones son muy concretas… perola industria de carragenina en México **ha crecido mucho porque se utiliza demasiado en la industria cárnica y láctea** …"* *"Entonces **si la industria de carragenina crece, la demanda por carragenina crece y esto es lo que representa el gráfico**…".* *"Identifico … que **el incremento también ha sido creciente en valor económico,** lo que de alguna manera **justifica** que haya cultivo de especie o haya explotación de especie para **establecer la producción de carregenina en el país**"*	Argumento de los estudiantes por equipo: *"(A) Por su llenado va siendo constante y así se podría calcular su altura de llenado. (La B no corresponde) Porque esta figura se comienza a llenar por un pico y su capacidad aumenta conforme se va abriendo".* *"(A), B no varía proporcionalmente".* *"(A) Se puede apreciar de mejor manera como aumenta proporcionalmente el agua".* *"(A) Porque hay una variación constante".*

Tabla 1. La matemática y la práctica en el ámbito escolar y no escolar

La matemática y su dimensión social

El conocimiento matemático adquiere sentido y funcionalidad cuando se usa como argumento en una actividad de naturaleza social, por ejemplo, en la toma de decisiones, la validación de un resultado o la resolución de un problema. Tal dimensión social de la matemática deviene de su uso para entender y explicar situaciones en una actividad humana, a partir de las experiencias propias de un individuo y no necesariamente del desarrollo de la matemática en sí misma.

En el caso del biólogo marino entrevistado, él menciona lo siguiente sobre el uso del modelo gráfico lineal (véase la Imagen 1 en la Tabla 1) como argumento para tomar una decisión sobre la apertura de una planta de cultivo comercial de algas:

> En este caso lo interpreté como inicio y final. Elegí 1990 porque hubo un fenómeno llamado fenómeno del niño en la costa de Baja California que produjo una caída en la disponibilidad de algas en ese lugar, lo que bajó la producción de algas y su exportación... A partir de estos datos, es obviamente por lo que decido manejar este punto, a partir de este punto en adelante es conveniente hacerlo, obteniéndolo desde una fecha que tenga una significación para el tipo de trabajos que estoy haciendo, como también hubiera sido a lo mejor interesante hacer la parte central y hacer una función de cómo ha ido variando y de que otras

> variables, como pueden ser variables ecológicas, o qué factores o épocas son criticas, pero en particular el interés fue simplemente ver la oportunidad de que hay mayor demanda, .., esto es un poco la intención de mostrar algo que crece...
>
> …El interés no era analizar a detalle la gráfica, sino ver si se logra una tendencia general para justificar la necesidad del cultivo.

Así, el uso de un modelo matemático lineal radica, más que en el desarrollo de una herramienta matemática, en el interés (social) de lo que se pretende comunicar: una tendencia de inicio a fin en el contexto de la situación referida (demanda de importación de productos derivados de cierta alga), y en la toma de una decisión.

En lo escolar, en la puesta en escena de la unidad didáctica de modelación lineal, se concluyó que la fijación y discusión en la variación a partir de las experiencias de los estudiantes, favoreció que evolucionen sus recursos y habilidades matemáticas en la generación de modelos matemáticos como argumento para determinar el tiempo de llenado de un recipiente, tomar una decisión sobre la contratación de un servicio telefónico y para explicar el movimiento de objetos (aun cuando no habían tenido experiencias previas de modelación matemática). En dicho proceso otorgaron significado a la matemática de la variación y el cambio.

Por tanto, un factor sociocultural como la experiencia, es una condición que en el contexto de una práctica posibilita la adquisición de significados matemáticos y el desarrollo de procesos de pensamiento por parte de los individuos, pues permite establecer relaciones entre la matemática y la situación (véase también la última fila de la Tabla 1).

Condiciones de institucionalización

La institucionalización de un procedimiento o conocimiento en torno a una práctica es un proceso social, no individual, que reside en la argumentación y generación de consensos entre los individuos de una comunidad para validar o legitimar un resultado.

Al respecto, en el estudio llevado a cabo en el área de producción de la empresa, se identificó que el proceso de interacción social entre los participantes de una comunidad es clave para la generación de consensos, pues modifica la organización de estos y favorece el diálogo. Dicha interacción se suscita cuando se conjugan factores del contexto de la práctica tales como la identidad que como comunidad adquieren los individuos en torno a cierta práctica, su experiencia en situaciones específicas y el respeto a decisiones o posturas en la generación de debates, sin remarcarse la postura de un líder totalitario.

Los consensos por parte de los empleados jugaron un papel determinante en la validación de soluciones a diversos procesos y problemas en la producción, cuya resolución precisó de la realización de tareas matemáticas. Por ejemplo, para estimar la temperatura de entrada y salida para graduar los medidores de un freidor, la velocidad de una cinta lavadora o la longitud de un empaque según el tamaño del producto, el personal del área estableció supuestos, propuso y experimentó distintas posibles soluciones a los problemas, generó argumentos con base en su experiencia y llegaron a consensos sobre la validez de éstas.

En la experimentación de diseños de aprendizaje basados en prácticas en el escenario escolar, también se ha puesto de manifiesto ese tipo de factores socioculturales en la generación de consensos para la validación de una solución, razonamiento o proceso matemático por jóvenes escolares. Tal resultado puede constatarse en López, Sosa y Aparicio (2010) en la experimentación de una actividad de predicción matemática de las posiciones de tres partículas en movimiento.

La comunicación entre pares, gesticulaciones, argumentaciones contextuales, uso de lenguaje común para describir cambios fueron medios que usaron jóvenes de distintos niveles educativos en los consensos generados acerca del desarrollo de razonamientos y recursos matemáticos para predecir, mismos que favorecieron la discusión de ideas asociadas a nociones como función, convergencia y derivada.

Conclusión

El estudio de aspectos socioculturales de la matemática en contextos científicos y escolares muestra a la articulación de la práctica, la matemática y la actividad humana como eje para la reorganización escolar de saberes matemáticos. Tal forma de rediseño del discurso matemático escolar se soporta como un medio para ampliar las posibilidades de éxito en la generación de aprendizajes, por encima, de un discurso que apele a la naturaleza axiomática de la matemática misma.

Por lo antes expuesto y como resultado de la verificación de organizadores de diseño de unidades didácticas basadas en la práctica de modelación de lo variacional, se discurre que el aprendizaje en Precálculo es un producto social que se manifiesta en la actividad de los individuos para modelar lo cambiante, tanto en un plano matemático como en lo sociocultural. Se identifica así, una condición de partida para reorganizar los saberes en esta área de la matemática, en el estudio del contexto de uso y construcción del conocimiento matemático en su dimensión social y cultural.

Referencias bibliográficas

Alanís, J. y Salinas, P. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 12(3), 355-382.

Aparicio, E., Sosa, L., Jarero, M. y Tuyub, I. (2010). Conocimiento matemático. Un estudio sobre el papel de los contextos. En R. Rodríguez y E. Aparicio (Eds.). *Memorias de la décimo tercera Escuela de Invierno en Matemática Educativa* (pp. 167-174). México: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa A.C.

Arrieta, J., Buendía, G., Ferrari, M., Martínez, G. y Suárez, L. (2004). Las prácticas sociales como generadoras del conocimiento matemático. En L. Díaz Moreno (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17,* 418-422. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cantoral, R., Farfán, R., Lezama, J. y Martínez-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking. L. Radford, L. and D'Amore, B. (Guess Editors) 27 - 46.

García, E. y Aparicio, E. (2007). Un estudio descriptivo de las interacciones en el aula. Elemento de análisis en la reprobación y rezago de Cálculo. En C. Crespo Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 20,* 210-215. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Godino, J. y Linares, S. (2000). El interaccionismo en educación matemática. *Educación Matemática,* 12(1), 70-92.

Horton, P. y Hunt, C. (2000). *Sociología.* México: Mc Graw Hill.

López, A., Sosa, L. y Aparicio, E. (2010). Predicción y construcción de conocimiento matemático. *Un análisis clínico transversal. Revista de Investigación y Divulgación en Matemática Educativa, 1*, 3-10.

López, L. (2011). *Etapas de aprendizaje asociadas al concepto función. Un estudio socioepistemológico*. Tesis de Licenciatura no publicada, Universidad Autónoma de Yucatán, México.

Robledo, D. y Freile-Pelegrín, Y. (2010). Prospects for the cultivation of economically important carrageenophytes in southeast mexico. *Journal of Applied Phycology* 23,415–419

MATERIALES DIDÁCTICOS DE MATEMÁTICAS PARA BACHILLERATO. UN ESTUDIO DE INDICADORES PARA SU DISEÑO

María Guadalupe Ordaz Arjona, Martha Imelda Jarero Kumul, Landy Elena Sosa Moguel
Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Yucatán México
oarjona@uady.mx, jarerok@uady.mx, smoguel@uady.mx

Resumen. El presente trabajo de investigación tiene por objetivo la obtención de indicadores para la organización de saberes matemáticos correspondientes al área de Precálculo, Geometría y Álgebra de nivel medio. Para la consecución de éste, se realiza en primera instancia un estudio documental el cual permitiera generar un estado del arte de propuestas didácticas generadas en Matemática Educativa en la última década, seguido de un estudio descriptivo cuyo objetivo es identificar aquellos elementos que caracterizan las propuestas como favorecedores de la construcción del conocimiento matemático. Particularmente nos centraremos en los resultados obtenidos al momento en el área de Precálculo, entre los cuales se tiene que las propuestas didácticas parecen tener en común el que la construcción del conocimiento se dé a través de la práctica humana y el carácter científico de los conocimientos matemáticos, como son: la predicción, la visualización y la modelación. La tecnología ya no es un recurso para el profesor sino una herramienta para el estudiante..

Palabras clave: material didáctico, bachillerato, indicadores, precálculo

Abstract. The present work research has to objective the obtaining of indicators for the organization of mathematical knowledge corresponding to the area of Precalculus, Geometry and Algebra of middle level. For the attainment of this, it performed in first instance a documentary study which will allow generate a state of the art of didactic proposals generated in Mathematics Education in the last decade, followed by a descriptive study whose objective is identify those elements that characterize the proposals as encouraging of the mathematical knowledge construction. Particularly we will focus in the results obtained to the moment in the Precalculus area, between which it has that the didactic proposals seem to have in common that the knowledge construction is given through the human practice and the scientist character of the mathematical knowledges, such as: the prediction, the visualization and the modeling. The technology is not any more a resource to the professor but a tool for the student.

Key words: didactic material, baccalaureate, indicators, precalculus

Introducción

Un elemento de suma importancia en la formación de profesores son los recursos con los que éste cuenta; por ejemplo, en el estudio con profesores realizado por Maldonado, Rodríguez y Tuyub (2007) reportan que el libro de texto constituye para ellos una fuente de recursos tanto para las explicaciones de clase como para el conjunto de ejercicios a resolver en el salón, para llevar tarea o para usarse en la evaluación. Por otra parte, Rico (1998) considera que uno de los factores que pueden hacer fracasar los intentos de cambio de un currículo de matemáticas, son los libros de texto, ya que la carencia de materiales y Libros de Texto adecuados a los nuevos currículos son en ocasiones obstáculos insalvables.

Por otra parte, las tendencias curriculares en matemáticas, plasmadas en reformas educativas, han sido un elemento transformador del discurso matemático escolar, al reflejar distintas concepciones sobre la epistemología de las matemáticas y su enseñanza. Una postura, enmarcada en la reforma de las matemáticas modernas, en la que se concibe a la matemática como una ciencia lógica-deductiva, caracterizada por un sistema deductivo cerrado y estrictamente organizado, ha de generar nociones y prácticas distintas que aquella postura en la que la matemática se concibe como un conjunto de reglas y fórmulas para fortalecer la mecanización y automatización de algoritmos, desatendiendo aplicaciones ligadas a la génesis de los conceptos y procedimientos García (s/f) citado en Aparicio, Jarero, Ordaz y Sosa (2009).

Por lo antes expuesto, consideramos que es importante y necesario generar materiales didácticos innovadores, que tengan un sustento en la investigación, que presenten a la matemática no como algo acabado, sino como aquella que se construye como producto de la actividad humana. Es decir, que la matemática no sea un punto de partida de estas propuestas, sino un punto de llegada. Esto, lo vemos expuesto también en investigaciones desarrolladas en Matemática Educativa como las de Alanís y Salinas (2009), quienes exponen la necesidad y conveniencia de reestructurar los contenidos matemáticos a partir de una sintaxis propia cuya génesis esté en actividades humanas.

El trabajo que ahora presentamos contribuye al proyecto de investigación titulado "Saberes matemáticos; un estudio de organización escolar centrado en prácticas"; dicho proyecto de investigación pretende analizar la organización del conocimiento matemático asociado a contenidos del Precálculo y Cálculo escolar. Tiene como intención establecer indicadores de organización y tratamiento didáctico que favorezcan el rediseño de los contenidos en unidades didácticas. Este proyecto plantea como objetivo general Determinar organizadores socioculturales e institucionales que permitan diseñar unidades didácticas de contenidos en el área de Precálculo basadas en prácticas y como objetivos específicos: **1.** Conformar un núcleo temático invariante de contenidos en Precálculo. **2.** Obtener indicadores para la organización de saberes matemáticos relativos a la variación y el cambio. **3.** Diseñar y experimentar unidades didácticas basadas en prácticas.

Particularmente, nuestro trabajo contribuye al objetivo 2, es decir, a la obtención de indicadores para la organización de saberes matemáticos, y tiene por objetivos, generar un estado del arte de las propuestas didácticas de matemáticas que la matemática educativa a desarrollado en la última década a nivel Latinoamérica y en España e identificar los elementos que caracterizan aquellas propuestas centradas en la construcción del conocimiento matemático. Particularmente nos interesa el nivel medio, las áreas de Cálculo, Precálculo y Geometría. Para el logro de dichos objetivos se desarrollan tres trabajos de tesis de licenciatura uno centrado en cada área, sin embargo, por extensión del presente documento nos centraremos principalmente en los avances y resultados obtenidos para el área de Precálculo y que es el trabajo que contribuye directamente al proyecto antes descrito.

Este estudio es de carácter documental en su primera etapa y descriptivo en la segunda. Y coincidimos con Rico (1998), en que le conocimiento matemático que transmite el sistema educativo se ha de considerar parte integrante de la cultura, socialmente construido y determinado: en él han de intervenir las necesidades formativas de las matemáticas y tenerse en cuenta las connotaciones políticas, morales, generales y específicas, conectadas con la formación matemática de los escolares. Por ello, tomamos como su trabajo considerando que en las propuestas que analizaremos podríamos encontrar elementos como lo son, la diversidad de representaciones para cada sistema conceptual, la fenomenología de los conceptos, la diversidad de los materiales manipulativos y por último la epistemología del concepto. Otros elementos que consideraremos pudieran estar presentes en las propuestas son la visualización y la modelación.

Sobre la visualización y la modelación, las consideraremos como a continuación describimos:

- La visualización en matemáticas la entenderemos tal como Guzmán (1996, citado en Martínez, Torres, Tellería y Dibut, 2007), es la representación concreta de relaciones abstractas y donde las ideas matemáticas, los conceptos y métodos representan riqueza de contenidos visuales como por ejemplo las representaciones geométricas. Guzmán señala que la visualización aparece como algo natural en el nacimiento del pensamiento matemático como en el descubrimiento de nuevas relaciones entre los objetos matemáticos y también en la transmisión y comunicación propias del quehacer matemático. De modo que el alumno habrá comprendido un objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diversas situaciones didácticas, en las que requiera utilizar diferentes notaciones, así como convertir una representación en otra de manera natural (Martínez et al 2007)
- La modelación por su parte la entenderemos no como una representación de expresiones algebraicas, sino más bien, como un acto de intencionalidad humana, pues un modelo es un *ente* para la intervención en la naturaleza, es una herramienta utilizada para comprender e intervenir en lo modelado. Es así que la representación forma un reflejo de una "realidad", de una situación o conocimiento preexistente (Arrieta y Buendía, 2003).

Respecto a los elementos metodológicos, consideramos dos etapas en la primera se realizó un estudio documental que consistió en la revisión de revistas y documentos publicados en

Matemática Educativa y que pudiéramos acceder gratuitamente a éstos. En una primera revisión se seleccionaron aquellos artículos que trataran algún tema del área de interés, es decir de Precálculo, de estos documentos se seleccionaron aquellos que tuvieran alguna propuesta didáctica pero que tuviera además la característica de ser una propuesta que se centre en la construcción del conocimiento por parte del estudiante. En la segunda etapa, se lleva a cabo el análisis de cada uno de estas propuestas didácticas para caracterizar aquellos elementos presentes en éstas y que favorecen la construcción del conocimiento matemático.

En el estudio documental finalmente fueron 6 medios de publicación que se consideraron, las revistas *RELIME, NÚMEROS, UNIÓN, PREMISA Y REVISTA DIGITAL MATEMÁTICA,* el Acta Latinoamericana de Matemática Educativa *ALME,* y las memorias de laEscuela de Invierno en Matemática Educativa *(EIME).*

A continuación presentamos algunos de los resultados obtenidos hasta el momento:

Etapa1. Estudio documental.

De la revisión documental de revistas de investigación y memorias de congresos en Matemática Educativa y Educación Matemática, se encontraron 186 artículos de referentes a algún tema del Precálculo, de éstos, sólo 24 artículos presentaban alguna propuesta didáctica, de éstas propuestas se seleccionaron aquellas centradas en la construcción del conocimiento matemático, siendo finalmente 15 las propuestas que cumplieron con este requisito y por tanto las que pasaron a la etapa de análisis, 12 de éstas se reporta que fueron experimentadas y que tuvieron resultados favorables, las otras 3 no reportan resultados al no haber sido puestas en escena.

Etapa 2. Análisis de las propuestas didácticas.

Del análisis de las propuestas didácticas antes mencionadas, se obtuvieron los resultados que a continuación concentramos una tabla y posteriormente describimos. Aquellas propuestas que fueron puestas en escena y que reportan resultados favorables son resaltadas con negrita y con celda sombreada; el cuadro relleno indica que dicho elemento se encontró presente en la propuesta.

Propuesta	Predicción	Modelación	Visualización	Aspectos sociales	Socioepiste-mología	Tránsito entre registro
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
11						
12						
13						
14						
15						

Tabla 1. Propuestas centradas en la construcción del conocimiento

Podemos observar que los elementos encontrados en mayor medida fueron la modelación, predicción, visualización y aspectos sociales.

El elemento *predicción* es encontrado en las propuestas como una "práctica", no se considera para formalizar los conceptos, sino para favorecer la construcción del conocimiento respecto a los mismos. Las actividades se relacionan con prácticas predictivas que favorecen el razonamiento, el análisis, la identificación de patrones y comportamientos en un estado futuro (ver figura 1).

Un cuerpo se encuentra frente al sensor; ¿cómo debe ser el movimiento de dicho cuerpo para que la gráfica resultante sea del siguiente tipo?

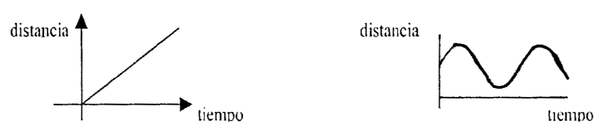


Figura 1

En cuanto a la *modelación* encontramos que no se espera del estudiante un resultado o modelo algebraico, sino que este elemento se refiere al proceso de identificar relaciones de ciertos elementos matemáticos como son, las variables. Por ejemplo, en la siguiente figura se encuentran los datos de las variables consideradas para la elección de una raqueta adecuada para niños de cierta edad.

Nombre / variables	edad	Peso (gr.)	Longitud (mm)	Longitud del grip (cm)	Tamiz (cm2)
Boll fighter 80	3 años	165	430	11	----
Boll fighter 100	5 años	170	500	13	----
Boll fighter 110	6 años	210	550	15	615
Boll fighter 125	8 años	220	600	16.5	615
Boll fighter 140	9 años	245	650	18	
Rodick junior 140	7 años	230	635	-----	680
Rodick junior 145	9 años	240	660	-----	680
Rodick junior 125	7 años	220	650	-----	645

Fig. 3. Tabla de datos que muestra características estructurales de las raquetas para distintas edades del usuario y para distintos modelos.

Figura 1

En esta actividad los estudiantes debían identificar variables y relaciones entre estas, para poder modelar. Las relaciones existentes que proponen los estudiantes, son la edad, el peso, la longitud, longitud del mango y el Tamiz. Con lo anterior los estudiantes determinaron varios modelos de raquetas para diferentes edades de niños. El estudiante tiene además la oportunidad de ser quien valide sus resultados, teniendo que escoger entre varias opciones que los mismos estudiantes sugerían.

En las propuestas analizadas, la visualización se encontró presente como es el caso por ejemplo en la Figura 3, en la que se muestra una actividad propuesta por Pech y Ordaz (2010), en ésta nos encontramos que el estudiante debe visualizar el comportamiento de la figura y su respectiva área al mover el punto indicado, para poder determinar cierto evento futuro e incluso puede determinar qué pasará si en lugar de mover el punto rojo se mueve el punto azul. De esta forma, la visualización se percibió como una práctica desarrollada por el estudiante y que favorece el desarrollo del pensamiento geométrico y variacional al tener que identificar las relaciones existentes entre las variables y cómo estas influyen en el área del rectángulo dado, así mismo, esto forma parte de la construcción del concepto función.

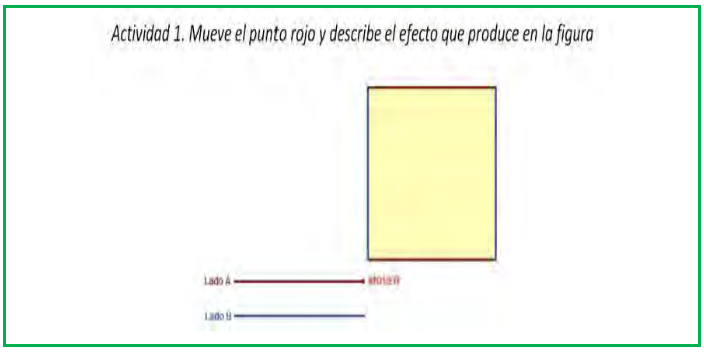


Figura 3

En cuanto a los *aspectos sociales* se refiere al hecho de que las actividades hacían referencia a situaciones en un ambiente conocido para el estudiante, ya sea de su cotidiano como por ejemplo el balancín que se presenta en la figura 4, hasta aquellos es los que la situación se presentaba dentro de un contexto científico pero conocido para el estudiante, como es el caso del ejemplo de la figura 5.

El balancín. Se tiene un balancín, en la situación que se presenta en la figura 4, éste repite su movimiento de sube y baja usando el mismo tiempo cada vez.

Figura 4

Se describe una situación de reproducción celular, conocido como *meiosis*, en el que una célula cumple su ciclo en 24 horas, es decir, la célula diploide inicial se convierte en 4 células haploides. Se requiere predecir, ¿cuántas células se tendrán después de 5 días?

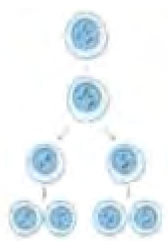


Figura 5

De los resultados encontrados al momento consideramos que lo que favorece la construcción del conocimiento no es solamente que estén en un contexto, sino la forma en que se lleva a cabo la actividad bajo este contexto; el estudiante lleva a cabo las prácticas de predicción, modelación o visualización, justo dentro de estos contextos, considerando aquellos aspectos sociales asociados al objeto matemático en cuestión.

Los elementos encontrados en las propuestas analizadas, desarrolladas al seno de la Matemática educativa y por ende de la investigación, favorecen la construcción de conocimiento como bien lo reportan sus resultados, pero además, lo común en las propuestas fue que dicha construcción de conocimiento está centrada en las prácticas y no en el objeto mismo, a lo cual atribuimos el éxito de las mismas. Siendo que aún en aquellas que no han sido experimentadas, encontramos presente estos elementos, por lo cual consideramos que obtendrán resultados similares.

Referencias bibliográficas

Alanís, J. y Salinas, P. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la Enseñanza del Cálculo en una institución educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 12(3), 355-382

Aparicio, E., Jarero, M., Ordaz, M. y Sosa, L. (2009) Discurso y práctica docente en matemáticas: Un estudio exploratorio en bachillerato. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática* 18, 58-72.

Arrieta, J. y Buendía, G. (2003). Diseño de situaciones desde una perspectiva de la actividad humana. En J. Delgado Rubí (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa16(2)*, 735-740. México: Comité de Matemática Educativa.

Maldonado, M., Rodríguez, M. y Tuyub, J. (2007). *Un estudio sobre el discurso en los libros de texto de matemáticas. Su relación con la práctica escolar*. Tesis de Licenciatura no publicada, Universidad Autónoma de Yucatán, Yucatán, México.

Martínez, D., Torres, A., Tellería, A. y Dibut, L. (2007). Estrategia didáctica para flexibilizar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática en la universalización de la educación superior. En C. Crespo Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 20*, 138-143. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Pech, V. y Ordaz, M. (2010). Las producciones sobre el concepto función en situaciones variacionales. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 23*, 15-22. México: Comité de Matemática Educativa.

Rico, L. (1998). Complejidad del currículo de matemáticas como herramienta profesional. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa,1(1)*, 22-39.

CONSTRUCCIÓN DE LA RECTA TANGENTE VARIACIONAL A TRAVES DE LOS USOS DEL CONOCIMIENTO DEL SIGLO XVII Y XVIII

Luis Arturo Serna Martínez, Apolo Castañeda Alonso, Gisela Montiel Espinosa
CICATA Legaria IPN México
luisarturo_sernamartinez@yahoo.com.mx, apcastane@gmail.com, gisela.montiel@gmail.com

Resumen. El presente trabajo es una investigación en curso. Una fuente de dificultades didácticas es la interpretación geométrica de la derivada, en donde la recta tangente no se considera como objeto de estudio. Nuestro planteamiento es que al construir la recta tangente desde una perspectiva variacional puede servir como una introducción a la derivada desde un punto de vista gráfico, lo cual implica también un rediseño del Discurso Matemático Escolar. Utilizamos la teoría de la Socioepistemología, en la cual se plantea que el uso de herramientas matemáticas para resolver actividades organizadas intencionalmente con la intención de resolver un problema, son una práctica, normadas por una práctica social. El escenario histórico nos ha servido para reconocer la práctica de la tangente variacional. Actualmente hemos implementado un método para obtener nuestros datos el cual nos servirá para que un futuro próximo podamos analizarlos y obtener conclusiones.

Palabras clave: recta tangente variacional, usos del conocimiento, variación

Abstract. The present work is an on going research.Onesource of difficulty teachingis the geometric interpretation of the derivative, where the tangent lineis not consideredas objects of study. Our approach is to construct the tangent line from a variational perspective can serve as an introduction to the derivative from a view point graphic, which also implies a redesign of School Mathematics Discourse. We use the theory of Socioepistemology, in which it is proposed that the use of mathematical tools to solve intentionally organized activities with the intentionof solving a problem is a practice, regulated by a social practice. The historical setting has helped us to recognizethe practice of variation altangent. Currently we have implemented a method to obtain our data which will serve for the near future we can analyze and draw conclusions.

Key words: variational tangent, uses of knowledge, variation

El modelo epistemológico en el Cálculo Diferencial

El modelo epistemológico con el que la sociedad concibe a las matemáticas influye de manera determinante en las aulas escolares. Hay un modelo de acuerdo a Gascón (2001) en el que se considera a las matemáticas como un conjunto organizado de axiomas, teoremas y principios matemáticos estructurados coherente y lógicamente el cual descansa sobre un conjunto de enunciados (axiomas primitivos) perfectamente bien conocidos, bajo este precepto se puede considerar a las matemáticas como verdades universales sin falla alguna y que son importante por sí mismas, es decir sin considerar su relación con otras áreas de conocimiento, ni mucho menos pensar que son productos de los mecanismos sociales que hay en una sociedad y que se presentan como respuestas a las necesidades de la misma. Este modelo le da alta importancia a la teoría y el formalismo matemático, sin casi considerar las aplicaciones prácticas de donde surgieron las matemáticas o donde se puedan aplicar, cuando se llega a emplear a la teoría en la resolución de problemas es considerado esta actividad como algo secundario o auxiliar en los proceso de enseñanza aprendizaje (Gascón, 2001).

Cuando el formalismo fracasa, por ser demasiado difícil para los estudiantes se recurre a el uso de algoritmos de naturaleza algebraica, los cuales se pueden emplear por ejemplo al saber encontrar los máximos y mínimos de una función o la derivada pero sin comprender los significados que se encuentran presentes atrás de estos conceptos; sin embargo esto de alguna manera salva la situación evitando caer en una crisis y legitimando de nueva cuenta a el profesor (Cantoral, 2000).

Si este modelo epistemológico de las matemáticas es predominante en una sociedad entonces se ve reflejado en los libros de texto y programas escolares los cuales a su vez son retomados por profesores, alumnos y sociedad en general. Las concepciones que de las matemáticas se tienen por parte de los profesores y profesoras a partir de la consulta de los libros de texto se ven a su vez también plasmadas en su modelo de enseñanza-aprendizaje lo cual es reforzado por los programas de estudio, que también son altamente influenciados en su diseño por estos mismos textos (Dolores, 2007). Todo lo anteriormente dicho ocasiona una serie de problemáticas en las matemáticas en general y las clases de Cálculo Diferencial (CD), de acuerdo a lo reportado en Serna (2011) existen problemas en cuanto a la enseñanza aprendizaje de esta asignatura en la educación media superior en el sistema escolar mexicano.

Los modelos de enseñanza docentes se ven evidenciados en las aulas escolares, dándole alta importancia a la enseñanza de la teoría y/o en su defecto al uso de estrategias algebraicas para llegar a resultados, lo cual no implica la construcción de conocimiento y que por lo tanto permita que los estudiantes sepan reconocer cuando un problema requiera del uso de algún objeto matemático determinado, por ejemplo la derivada, máximos y mínimos, el límite por citar tan solo unos ejemplos. De acuerdo a Dolores (2007), bajo este modelo de enseñanza aprendizaje tampoco se reconocen las ideas variacionales que se encuentran presentes en la derivada, y de acuerdo a diferentes investigaciones podrían ser utilizadas didácticamente (Buendía, 2005; Cantoral, 2001; Castañeda, 2004, Dolores, 2007; Serna, 2007).

Otra de las implicaciones de el modelo de enseñanza citado es la forma que se tiene de dar clases, la cual consiste (con posibles variantes) en explicar la parte teórica para posteriormente dar un ejemplo y cambiar algunos datos para que los alumnos y alumnas resuelvan problemas similares (Parra, 2005; Serna 2011); también bajo este enfoque y como las matemáticas son consideradas como algo ya dado preexistente e inmutable y el que las conoce es el profesor, entonces es este el que da los ejemplos, guía el proceso de enseñanza-aprendizaje estableciendo quien está en lo correcto o no, y también que es lo correcto o incorrecto, no se permite que sean los alumnos quienes construyan el conocimiento, argumentando discutiendo, analizando, emitiendo conjeturas ya que quien tiene la última palabra es el profesor o profesora y/o en su defecto el libro de texto utilizado.

Un fenómeno didáctico: La recta tangente en Cálculo

Las problemática señaladas en la sección anterior se manifiestan en la enseñanza-aprendizaje en CD en donde al parecer los profesores de CD tienen una urgencia por que los alumnos aprendan a derivar (González, 1999). Por otro lado no se le da importancia a los aspectos visuales como es el caso de las gráficas ya que se considera como algo no formal (Cantoral, 2000; Castañeda, 2009) de acuerdo a este contexto de enseñanza-aprendizaje la interpretación geométrica de la derivada es vista tradicionalmente como la sucesión de una familia de rectas secantes cuya posición límite es la recta tangente, y está documentado que esta forma de abordar el tema ha sido fuente de dificultades didácticas (Artigue, 1998; Cantoral, 2000; Dolores, 2007, Martínez, 2005; Serna, 2007, 2011). Este es un tema que es abordado como por requisito del currículo, ya que viene en el programa, pero que no se va a utilizar más, ya que posteriormente se le da mucha importancia al hecho de los alumnos resuelvan ejercicios en donde hay funciones que tienen que derivar y prácticamente la recta tangente no se vuelve a ver en el transcurso de las clases (Serna, 2007). Esto ocasiona dificultades entre los estudiantes, entre ellas está el hecho que no pueden establecer un vínculo entre la recta tangente vista en sus cursos anteriores en Geometría y Geometría Analítica en donde la recta tangente tiene un carácter estático y no dinámico como es requerido en CD, también bajo esta forma de enseñanza los estudiantes conciben que la recta tangente a una curva toca a la misma en un solo punto sin volver a tocarla, así mismo consideran que la recta no puede cortar a la curva, otra situación con esta forma de estudiar el tema es que se pone demasiado énfasis en el punto de contacto quedando una idea errónea de que la derivada es la recta tangente en un solo punto y por lo tanto no puede volver a tocarla, tal y como es evidenciado en Castañeda (2004).

Lo anteriormente mencionado hace que se pierda el carácter variacional de la recta tangente de tal forma que cuando los estudiantes revisan el tema de máximos y mínimos a pesar de que se les menciona que la pendiente de la recta tangente a la curva cambia de signo de positivo a negativo en un máximo y que la pendiente de la recta tangente vale cero en el mismo, es frecuente que los estudiantes no comprendan esto ya que fue una idea que no quedo estabilizada en su momento, por lo que tienen que recurrir a los pasos a seguir para encontrar las coordenadas de los máximos y mínimos lo cual no implica que los alumnos y alumnas establezcan una conexión entre estos pasos a con los elementos conceptuales a los que están asociados.

Desde nuestro punto de vista consideramos que la recta tangente a la curva es algo que debería de ser visto como un tema en sí para abordar en Cálculo ya que de acuerdo a Cantoral (1988) la interpretación geométrica de la derivada es vista como una aplicación de la misma y no como el problema que le dio origen. Consideramos que al revisar obras antiguas en donde es abordado el problema de las tangentes usando a los infinitesimales como la herramienta con la cual fue resuelto, podemos detectar elementos que nos puedan permitir reconocer como se construyo conocimiento al resolver el problema en cuestión y elaborar una serie de secuencias didácticas que permitan que los alumnos puedan construir la noción de recta tangente variable, la cual es una noción que se requiere en CD puesto que nuestra hipótesis es que "la construcción de la recta tangente variable proporcionará argumentos que permitirán la introducción de la noción derivada desde un punto de vista gráfico".

Estado del Arte

Nuestro interés consiste en que se pueda construir la noción de recta tangente variable desde un punto de vista variacional, esa línea de investigación ha sido trabajada en la Socioepistemología y por lo tanto revisamos investigaciones que tienen que ver con el nacimiento de las ideas del CD del siglo XVI, XVII y XVIII, específicamente aquellas que tratan o están relacionadas con la resolución del problema de las tangentes mediante el uso de los infinitesimales.

Una de las obras consultadas fue la tesis doctoral de Castañeda (2004); sus productosde investigación nos proporcionaron elementos teóricos para la nuestra. Uno de los elementos clave que encontramos fue el uso de los infinitesimales como una herramienta que fue utilizada por el marqués de L´Hospital y María Agnesi en la resolución del problema de las tangentes.

Se retoman también algunas ideas de Cantoral (2001) ya que el reconoce la importancia de la diferencia fundamental entre dos puntos de una curva y como el análisis de esto nos puede ayudar a determinar comportamiento de la misma, pero este análisis se llevo a cabo reconociendo que el pensamiento matemático fue orientado por el pensamiento físico en donde la predicción jugó un papel determinante en la construcción social del pensamiento matemático y en donde teóricamente también retomamos ideas como la de Farfán (1983, citado en Cantoral, 2001) que dice

> …existen elementos que permiten, e históricamente hicieron posible la construcción de un concepto, todos esos andamios de los que se vale el sujeto en

> su acción sobre el objeto para acceder al concepto, andamiajes con vida efímera que circunstancialmente son las herramientas con las que se captan los primeros elementos del concepto…
>
> (pp. xxiv-xxv)

Otra investigación que vamos a utilizar es la llevada a cabo en Serna (2007) en la cual se lleva a cabo un análisis de varias obras antiguas y vamos a retomar específicamente aquellas que tratan el problema de las tangentes utilizando como herramienta para su solución a los infinitesimales. En Serna (2007) hay ideas germinales que aportan en la construcción de la recta tangente variable.

En la obra de Copérnico sobre las revoluciones de las orbes celestes su interés esta puesto en poder saber las posiciones que tendrían los astros o cuerpos celestes con tal intención llego a la conclusión de que una curva se comporta como una línea recta en una región muy cercana entre dos punto de la misma, esta misma idea se puede encontrar también presente en la obra de Newton, sin embargo ahora los dos puntos son la hipotenusa de un pequeño triángulo infinitesimal con lo cual se puede intuir también el carácter variacional ya que su ángulo y posición va cambiando consecutivamente.

También en Serna (2007) se puede observar que en L´Hospital se utiliza una definición de punto de una curva que dice que un punto de una curva es un segmento infinitesimal de tal forma que la curva está constituida por el ensamblaje de estos pequeños segmentos infinitesimales y cuando uno de estos pequeños segmentos infinitesimales se extiende indefinidamente en ambos sentidos se obtiene lo que podemos llamar recta tangente de una curva e intuitivamente se puede también determinar su carácter variacional.

Al analizar la obra de Euler l'analyse infinitésimale en su segundo volumen se observa que hay un cierto abandono por los argumentos geométricos aunque no totalmente. Con su obra se infiere que se pretende formalizar el cálculo naciente que se había formalizado con Newton y Leibniz pero se estaba intentando crear un mayor soporte matemático, de tal forma que Euler empieza a manejar argumentos de tipo algebraico pero todavía retomando ideas de los infinitesimales. Euler enuncia explícitamente el carácter variacional de la recta tangente mostrando un método algebraico en donde da explicaciones que utiliza ideas matemáticas, en donde se muestran los cambios a partir de polinomios y se dan una serie de argumentaciones del porque son eliminados ciertos términos del polinomio analizado y como al final de cuentas se va a tener uno que representa una línea recta, todo esto lo hace mediante un análisis que hace a partir de desarrollos algebraicos auxiliándose de representaciones gráficas en donde se muestra como dos puntos infinitamente cercanos de una curva se convierten en la hipotenusa de un pequeño triángulo infinitesimal.

Marco Teórico

Utilizaremos a la Socioepistemología como nuestro referente teórico, la cual es una teoría que da cuenta de la construcción social del conocimiento, y reconoce que el origen de las ideas tiene que ver con la cultura, época, lugar, ubicación geográfica y todos aquellos elementos que de alguna forma caracterizan a una comunidad. Este marco teórico incorpora cuatro componentes con la intención de desarrollar el pensamiento matemático de los estudiantes, las cuales son: las componentes cognitiva, didáctica, epistemológica y social (Montiel, 2005).

El conocimiento matemático "no nace puro" cuando en una sociedad hay necesidades por resolver, surgen formas, producto de su forma de ver la vida, existe una racionalidad contextualizada, es decir las personas construyen conocimiento y lo hacen como lo hacen por vivir en sociedad. La Socioepistemología postula que la práctica social norma la construcción del conocimiento matemático, en nuestro caso la práctica social que existía en la época en que investigamos es la predicción, (Cantoral, 2000).

La práctica social de la predicción normó la construcción de conocimiento matemático a través de las prácticas que existían entre las comunidades de matemáticos eruditos, la práctica (no la práctica social) la podemos considerar como aquella acción que enlaza conocimiento previos o cúmulos de experiencias anteriores con la construcción de nuevas ideas con la intención específica de resolver un problema que atañe a una comunidad.

El problema de las tangentes existente en los siglos XVII y XVIII era una *práctica*, a la cual le vamos a llamar la *práctica de la tangente variacional*, una *práctica* no es algo que nace instantáneamente, es más bien algo que se da por generaciones en una sociedad y tiene una historia y un futuro potencial es decir tiene *historicidad* (Zemelman, 2005). Lo anterior nos muestra que una *práctica* es algo dinámico, no estático, lo cual nos ha llevado reconocer diferentes momentos de la *práctica.* Las ideas germinales con Copérnico que se van resignificando conforme van transcurriendo los años como producto de la actividad humana, para nosotros la resignificación no tiene que ver con crear nuevos significados sino más bien es crear conocimiento en la organización del grupo humano, pero esta resignificación tiene la característica de iniciar con una idea que se va enriqueciendo y que va conservando sus elementos de inicio pero se va robusteciendo para llegar a ser cada vez más funcional.

Cuando a través de la práctica se ha resuelto un problema y la comunidad ha podido sistematizar este conocimiento y las herramientas correspondientes para llevar acabo ciertas actividades de manera cotidiana podemos decir que se ha establecido un uso del conocimiento.

En nuestro caso hemos hecho un análisis de los usos del conocimiento para descubrir los significados existentes en las herramientas matemáticas que son utilizadas y que actualmente ya no se encuentran presentes por los cambios que se presentan cuando un objeto matemático es introducido a los sistemas escolares pero también digamos que con el paso del tiempo los conocimientos sufren una evolución. Con el análisis hecho obras originales mencionadas se pueden detectar elementos que nos sirven de andamiajes en la creación de secuencias didácticas y que a partir de ellas los alumnos puedan construir la recta tangente desde una perspectiva variacional, esto en base a el ejercicio de la *práctica de la tangente variacional.*

Metodología

A partir de los elementos encontrados en el análisis de obras mencionadas se llevaron a cabo la creación de cinco secuencias didácticas la elaboración de las mismas, tomando en cuenta que el uso de los infinitesimales sirvió de herramienta matemática para la solución del problema de las tangentes, como encontramos ideas germinales de lo que es la recta tangente en la obra de Copérnico implementamos una secuencia didáctica en donde nuestra intención es que a partir de la interacción herramienta matemática-actividad los estudiantes pudieran construir significados, en este caso específico que una curva se comporta como una recta cuando hay dos puntos infinitamente cercanos de la misma, para esto se hizo uso de elementos geométricos que los estudiantes podían utilizar como herramienta para llegar a sus conclusiones.

Posteriormente en la secuencia didáctica 2 se retomo la idea anterior, y nuestra intención es que al desarrollarse la secuencia los estudiantes pudieran construir significados tales como que una pequeña recta al extenderse se convierte en una recta tangente y tiene una cierta inclinación, además que se puede intuir que su posición va a ir cambiando, todo esto a partir de elementos geométricos como son la semejanza de triángulos rectángulos que fueron usados con Newton y que también pueden ser utilizados en una didáctica actual . En la secuencia didáctica tres se retoman los elementos anteriores pero se refuerza la idea con lo expuesto por L´Hospital en su obra en donde enuncia que un punto de una curva es un pequeño segmento infinitesimal y que al extenderse en ambos sentidos se forma la recta tangente la cual va a ir cambiando de punto en punto. Se diseño la secuencia también con la intención de que se usara lo visto hasta ese momento para resolver un problema para calcular la velocidad instantánea de un cuerpo que se lanza verticalmente hacia arriba. En la secuencia didáctica cuatro se retoman los elementos anteriores pero ahora se usan elementos de tipo algebraico por medio de los cuales se puede obtener una expresión matemática la cual represente una razón de cambio instantánea. Por último en la secuencia didáctica 5 en una de las últimas actividades se tiene la intención de que los alumnos a partir de la gráfica de una curva de polinomio de grado tres (a los alumnos no se les da la ecuación) se les pide que encuentren la gráfica de la función derivada, es decir al diseñar la secuencia se tiene la intención de que los estudiantes usen el objeto construido ahora como una herramienta matemática. Esta propuesta problematiza sobre la construcción de la recta tangente variacional, lo cual nos permitirá hacer un rediseño del Discurso Matemático Escolar.

En una etapa posterior de la investigación pretendemos hacer un análisis de los datos obtenidos con lo cual pretendemos dar cuenta de cómo a partir de los elementos teóricos mencionados en nuestro marco teórico y puestos en marcha a partir de las secuencias didácticas los estudiantes podrán construir conocimiento matemático.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa. 1 (1), 40-55*

Buendía, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales.* Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Cantoral, R. (1988). Historia del cálculo y su enseñanza: Del trazado de tangentes al concepto de derivada. En Hitt, F., Figueras, O., Radford, L. y Bonilla, E., *Memorias de la Segunda Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa.* (Vol. Único, pp. 381-386), Guatemala.

Cantoral, R. (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Trillas.

Cantoral, R. (2001). *Un estudio de la formación social de la analiticidad* México: Iberoamérica.

Castañeda, A. (2004) *Un acercamiento a la construcción social del conocimiento: Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión.* Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, México

Castañeda, A. (2009) Aspectos que fundamentan el análisis del discurso matemático escolar. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22,* 1379-1387. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Dolores, C., (2007). *Elementos para una aproximación variacional de la derivada.* México: Díaz de Santos.

Gascón J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 4 (2), 129-159.*

González, R. (1999). *La derivada como una organización de las derivadas sucesivas. Estudio de la puesta en funcionamiento de una ingeniería didáctica de resignificación.* Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de EstudiosAvanzadosdel IPN, México.

Martínez, R. (2005). *La Pendiente y su variación: un estudio didáctico y cognitivo.* Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación en Matemática Educativa de la Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Montiel, G. (2005). *Estudio Socioepistemológico de la Función Trigonométrica.* Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, México.

Parra, H. (2005). Creencias matemáticas y la relación entre actores del contexto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 8 (1), 69-90.

Serna, L. (2007). *Estudio Socioepistemológico de la tangente.* Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

Serna, L. (2011) Estudio Socioepistemológico del desarrollo de la recta tangente. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 24,* 825-834. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Zemelman, H. (2005). Formación de sujetos y perspectivas de futuro en América Latina. En M. Escorza (Ed), *Discurso Pedagógico. Horizonte epistémico de la formación docente.* (pp. 1-9), México: Editorial Pax México.

MATERIALES DIDÁCTICOS EN PRECÁLCULO. UN ESTADO DEL ARTE

María Ordaz, Reyna Chan, Gaspar Arceo
Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Yucatán México
oarjona@uady.mx, reyna_chan@hotmail.com, gaspar_arceo@hotmail.com

Resumen. En el presente documento presentamos los avances de una investigación de carácter documental y descriptiva. Estos avances se centran básicamente en la primera etapa que es en la que nos encontramos. Consiste en la revisión de artículos de investigación en matemática educativa y selección de aquellos que contengan propuestas didácticas en el área de Precálculo. El objetivo de esta investigación es generar un estado del arte de propuestas didácticas en Precálculo que en matemática educativa se han desarrollado en la última década y caracterizar elementos de corte investigativo e innovador a través del análisis de dichas propuestas.

Palabras clave: precálculo, investigación, innovación, estado del arte

Abstract. In this document we present the research advances of a documentary and descriptive kind. These advances basically focus on the first stage which is in where we are. It consists in the review of research articles in mathematics education and selection of those that contain educational proposals in the area of PreCalculus. The objective of this research is to generate a state of the art of didactic proposals in PreCalculus which in mathematics education have been developed in the last decade and characterizing elements of investigative and innovative cutting through the analysis of these proposals.

Key words: precalculus, investigation, innovation, state of the art

Introducción

En los resultados de la Evaluación Nacional de Logros Académicos en Centros Escolares (ENLACE) aplicada en el 2009 en México, se reporta que el 46.1% de la población estudiantil evaluada de nivel medio superior tiene un dominio Insuficiente de habilidad matemática. Mientras que en el Informe del Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes o Informe PISA por sus siglas en inglés (Programme for International Student Assessment), en su edición del 2009 se reporta que el 36.7% de la población estudiantil mexicana de nivel medio superior evaluada está por debajo del nivel 1 (insuficientes para acceder a estudios superiores y desarrollar las actividades que exige la vida en la sociedad del conocimiento). Con base en estos porcentajes presentados en dos diferentes pruebas, podemos ver que las habilidades matemáticas de varios alumnos en México de nivel medio superior, hasta el año 2009, son deficientes y por debajo de los requerimientos actuales de la sociedad. En la matemática educativa se estudian "temas relacionados con el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas" (Ortiz, 2004, p. 172) y por medio de esta se pretende dar solución a los problemas generados en la escuela y disminuir los porcentajes negativos de aprovechamiento en esta asignatura.

Es así que la elaboración de propuestas didácticas centradas en el aprendizaje y no en la enseñanza, es decir, actividades que propicien que sea el estudiante quien construya su propio conocimiento a través de su actividad, y con base en su práctica dentro de situaciones reales o aplicativas sea él quien modele, prediga o visualice, se hacen una necesidad.

Una de las asignaturas donde se pudieran observar esas aplicaciones adaptables a situaciones reales dependiendo de la cultura de cada sociedad es el Precálculo, entendemos por Precálculo como aquella asignatura en donde se presenta el concepto función el cual es empleado posteriormente en temas relacionados al Cálculo como los son los límites, las derivadas y las integrales, dependiendo del sistema educativo pueden contemplarse otros conceptos en Precálculo, por ejemplo en la Universidad Autónoma de Yucatán (UADY) en México se manejan dentro de ésta asignatura los conceptos Inecuaciones así como las Series y sucesiones, todos estos conceptos son los que entenderemos como relativos al Precálculo. Ejemplo de las aplicaciones sociales del Precálculo son las funciones a través de las cuales se pueden modelar el crecimiento de poblaciones humanas en diferentes lugares. Adicional a esto hay que considerar la importancia dentro del mismo plan de estudios, ejemplo de esto es el plan de estudios para bachillerato de la UADY donde se escribe que esta asignatura relaciona entre sí los conocimientos previos de álgebra, de las geometrías plana y analítica, y de trigonometría visto en los semestres previos, además de vincularlos con los conocimientos que el alumno posee de otras ciencias como física o biología.

Por otra parte, el profesor y su práctica docente tienen especial importancia en el proceso de enseñanza aprendizaje, ya que como reportan Jarero y Ordaz (2007, p. 131) "son las prácticas docentes las que en mayor medida condicionan y delimitan tanto lo que los estudiantes han de aprender como la forma de hacerlo". Es así que en la matemática educativa se reconoce la necesidad de realizar estudios en la línea Formación de profesores, realizando estudios como son aquellos centrados en las creencias y concepciones de los profesores, sin embargo, poco se ha abordado sobre los materiales que debieran incorporarse en los cursos de formación de profesores, que posteriormente el docente pudiera incorporar al aula, estos materiales son las actividades o propuestas, como se mencionó anteriormente, centradas en el aprendizaje que propician en el estudiante la construcción de su propio conocimiento a través de su práctica.

Generalmente estas actividades son presentadas a los alumnos a través de los libros de texto, Dalcín y Olave (2007, p. 161) afirman que "el desarrollo de las ideas matemáticas no debiera ser tan lineal como lo presentan en general los libros de texto"; por nuestra parte consideramos que los conceptos debiesen aparecer en los materiales didácticos desde su génesis, es decir, que el concepto no solo sea visto como algo acabado sino como algo en construcción. Por esto, los materiales involucrados en la construcción del conocimiento matemático son de vital importancia, pues el concentrado de conceptos que se estudian en un curso de matemáticas y en especial en Precálculo, son sugeridos en los materiales que usen, así como también el tratamiento que se proporcione a los conceptos, el problema es que los materiales empleados por los docentes durante las sesiones de clase no cuentan con actividades o propuestas que generen dicha construcción de conocimiento en el estudiante, por el contrario, en ocasiones generan prácticas repetitivas de procesos.

Ahora bien, las actividades no deben surgir de la nada, sino que debe haber un análisis previo de cuáles pudieran ser las características que contribuyan a favorecer un aprendizaje significativo por parte del alumno, aquí es donde nuestro trabajo tiene cabida, ya que centramos nuestro interés en llevar a cabo un estado del arte de los trabajos desarrollados en el área de Precálculo a partir del año 2000 en Latinoamérica y España; de éstos extraeremos las características de corte investigativo y de corte innovador que estén presentes en estos documentos y que en un futuro pudieran apoyar en la creación de propuestas didácticas como las ya mencionadas.

Esto nos llevó a preguntarnos, ¿Cuál es el estado del arte de las propuestas didácticas de Precálculo centradas en construcción de conocimiento matemático de la última década?, ¿Qué características innovadoras y de investigación contienen dichas propuestas?

Para dar respuesta a estas preguntas nos propusimos alcanzar los siguientes objetivos específicos:

- Generar un estado del arte de propuestas didácticas en Precálculo que en matemática educativa se han desarrollado en la última década.
- Caracterizar elementos de corte investigativo e innovador a través del análisis de dichas propuestas.

Elementos teóricos

Entenderemos *estado del arte* como la recopilación y organización de investigaciones con el fin de informarse de las producciones científicas llevadas a cabo en un área del conocimiento específico. Y como nuestro estado del arte corresponde a *materiales didácticos*, entenderemos éstos como aquellos elementos, impresos o digitales, que permiten la instrucción del alumno en un determinado tema de estudio.

Los elementos de investigación que esperamos encontrar en las propuestas son la *predicción*, entendiéndola como esquema argumentativo donde se permite construir cierta noción; la *modelación*, no como una representación de expresiones algebraicas, sino más bien, como un acto de intencionalidad humana, pues un modelo es un ente para la intervención en la naturaleza, es una herramienta utilizada para comprender e intervenir en lo modelado (Arrieta y Buendía, 2003, p. 737); y la *visualización*, como "la representación concreta de relaciones abstractas y donde las ideas, conceptos y métodos en las matemáticas representan riqueza de contenidos visuales" (Guzmán, 1996, citado en Martínez,Torres, Tellería, Dibuti, 2007, p. 142), por mencionar algunos.

Y en cuanto a la innovación, nos centramos en una de sus variantes, la denominada *innovación educativa*, esto son aquellas características que generan algún tipo de cambio favorable en las prácticas educativas. Estos cambios se darán en alguno de los elementos de lo que llamamos, para fines de este trabajo, *cuadrilátero didáctico*, profesor-alumno-saber-ambiente, este último elemento se anexó debido a que es el espacio donde se da la interacción entre los tres elementos del conocido triángulo didáctico, quedando de la forma en que se puede ver en la imagen 1.

Los cambios en estos elementos se espera que estén relacionados con los elementos de investigación, mostrando así que existe una conexión entre la investigación y la innovación, y que no son ajenas una de la otra.

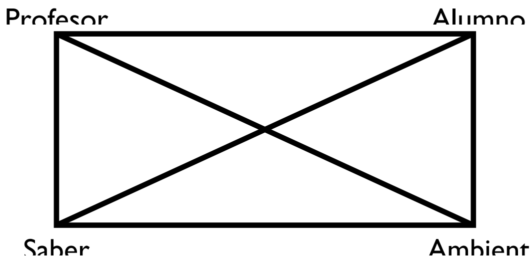
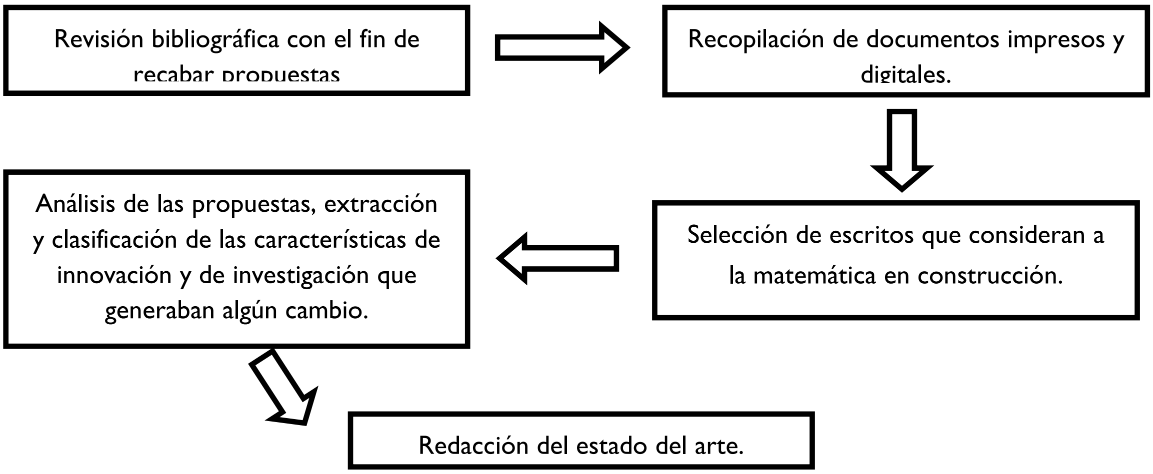


Imagen 1. Cuadrilátero didáctico

Método

Este es un estudio de carácter documental y descriptivo que consta de las siguientes etapas (ver Esquema 1).



Esquema 1. Fases del trabajo

Los artículos se seleccionan de la Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, las Actas Latinoamericanas de Matemática Educativa, la Revista Unión, la Revista Premisa, la Revista Números, la Revista Digital Matemática, Educación e Internet y las Memorias de la Escuela de Invierno de Matemática Educativa. De éstas se consideran aquellas propuestas didácticas donde se propicie un cambio favorable en alguno de los elementos del cuadrilátero didáctico y no generen prácticas repetitivas por parte del estudiante tales como las mostradas en la siguiente imagen 2.

Actividad 1

1.– Siendo P = (2 ; 3) un punto de la gráfica de una función de proporcionalidad directa, creciente, con dominio en los Reales y denominando O al origen del sistema de coordenadas cartesianas:

a) Escribe las coordenadas de otro punto A perteneciente a la gráfica de la función tal que la distancia (O; A) sea mayor que la distancia (O; P) ¿Cuántas soluciones hay para A?.Hallar la distancia (O; A) y la distancia (O, P)

b) Escribe las coordenadas de otro punto B perteneciente a la gráfica de la función tal que la distancia (O; B) sea menor que la distancia (O; P) ¿Cuántas soluciones hay para B?. Hallar la distancia (O, B)

c) Escribe las coordenadas de otro punto $C \neq P$ que pertenezca a la gráfica de la función y tal que la distancia (O; C) sea igual a la distancia (O; P) ¿Cuántas soluciones hay para C?. Hallar la distancia (O, C)

d) Encuentra las ordenadas de otros puntos pertenecientes a la gráfica cuando la abscisa toma los valores: 20 ; –200 ; 105 ; 2/3 y 5/7 ?.

Imagen 2. Ejemplo de matemática construida. Tomada de Rey, Forcinito, Lazarte y Hernández 2005

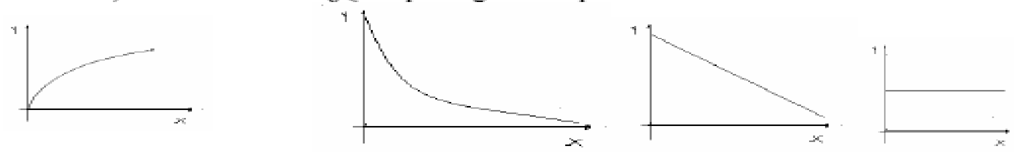
Actividades como esta no generan conocimiento nuevo en el estudiante sino prácticas repetitivas y en ocasiones mecanizadas de procesos que él ya conoce, en este caso hallar distancias o coordenadas de puntos, a este tipo de matemática donde el concepto es el punto de partida del cual se basa el alumno para llevar a cabo los reactivos de la propuesta la denominamos *matemática construida*. El tipo de matemática que nos interesa es la que llamamos *matemática en construcción*, es decir, aquella donde el alumno, a través de la puesta en escena de la propuesta, y con base en su práctica, genere en sí los conceptos matemáticos que se desee que obtenga. Ver Imagen 3 y 4.

Problema

En la siguiente tabla se encuentra los progresos de sus grandes alcances de la velocista sonorense Ana Gabriela Guevara con sus mejores tiempos en los 400 metros planos hasta el año 2003.

Año	Tiempo (segundos)
1996	54:75
1997	52:46
1998	50:65
2000	49:70

a) Al leer los datos ¿Qué tipo de gráfica esperas?



b) Realizar su representación gráfica.
c) ¿Coincide con la conjetura de la pregunta a?
d) ¿Cómo se comporta el tiempo registrado por Ana de 1996 al 2003?

Imagen 3. Ejemplo de matemática en construcción 1. Tomada de Flores 2005

Actividad nº 1. Reconocimiento y descripción de la variación [captación cualitativa]

Se le estrega a cada equipo de estudiantes una pelota y se les pide que describan el movimiento del objeto cuando de deja se caer a cierta altura.

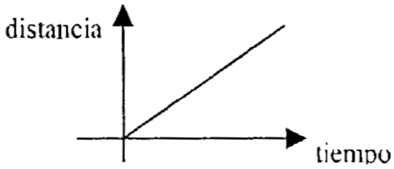
Imagen 4. Ejemplo de matemática en construcción 2. Tomada de Villa 2008

En las imágenes de los trabajos de Flores y Villa podemos ver que con ayuda de las instrucciones y los reactivos el alumno puede transitar entre registros de representación (del tabular al gráfico) y hacerse una idea del tipo de relación que guardan los datos (lineal, exponencial, constante, etc.) como en el caso de la imagen 3 y hacer sus propias conjeturas de qué es lo que puede ocurrir al realizar un experimento, qué variables intervienen, cómo se relacionan entre sí, etc. como se ve en la imagen 4.

Resultados

Los elementos de investigación fueron analizados desde el punto de vista de cómo contribuyen en la construcción del conocimiento matemático en Precálculo. En este aspecto encontramos a la predicción y modelación como una práctica relacionada con la intencionalidad humana, es decir, son elementos que se vinculan con el qué hacer de los estudiantes (ver Imagen 5).

Un cuerpo se encuentra frente al sensor; ¿cómo debe ser el movimiento de dicho cuerpo para que la gráfica resultante sea del siguiente tipo?



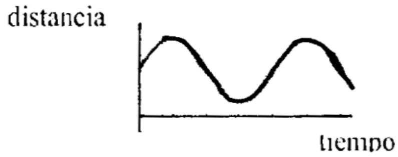
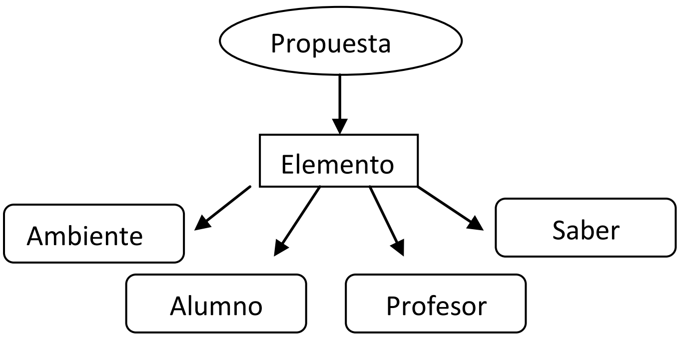


Imagen 5. Predicción y Modelación relacionadas con las prácticas humanas. Tomada de Arrieta y Buendía 2003

En el ejemplo anterior, podemos notar que es el estudiante quien describe un movimiento del móvil, teniendo que realizar un ejemplo con palabras del modelo, así como también recrea un movimiento con el propósito de predecir una nueva gráfica que se ajuste a ciertas condiciones como por ejemplo ¿Cómo tendrá que ser el movimiento para que la gráfica se desplace hacia arriba o hacia abajo? ¿Cómo sería la gráfica si el movimiento es más rápido o más lento?

En cuanto a la visualización, esta es encontrada con el propósito de vincular experiencias del estudiante con los conceptos u objetos matemáticos, en el sentido que es el estudiante quien observa y analiza ciertas imágenes de gráficas para después relacionarlas con prácticas propias, como en el ejemplo anterior, el estudiante relaciona las gráficas con movimiento que puedan caer en su mismo contexto sociocultural; es decir, al observar las gráficas, los estudiantes pueden relacionarlas con trayectorias cotidianas como por ejemplo, ir a su recámara, cierto paso de baile, etc.

Al identificarán los elementos de investigación presentes en las propuestas, se analizan los cambios generados en cada uno de los elementos del cuadrilátero didáctico; por ejemplo, se observa cómo se propicia la visualización en la propuesta y qué cambios favorables para la construcción del conocimiento genera en el ambiente, en la práctica del alumno, en el rol del profesor y en el saber; posteriormente se analizará cómo se propicia la predicción y los cambios que genera, y así sucesivamente para los demás elementos de investigación que se hallen en cada propuesta generando un esquema como el siguiente:



Esquema 2

Del análisis de las propuestas se espera poder concluir cuáles son las tendencias al realizar propuestas didácticas en Precálculo, por ejemplo acerca de qué tema se han desarrollado más trabajos, en qué país se han desarrollado más, cuáles son los recursos más empleados, cuáles son los elementos de investigación más favorecida y los cambios más significativos, por mencionar algunos.

Referencias bibliográficas

Arrieta, J. y Buendía, G. (2003). Diseño de situaciones desde una perspectiva de la actividad humana. En J. Delgado Rubí (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 16(2), 735-740. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Dalcín, M. y Olave, M. (2007). Ecuaciones de primer grado. En C. Crespo Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 20, 156-161.México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Flores, C. (2005). Características de las gráficas y su relación con la modelación de situaciones de movimiento. En G. Martínez Sierra (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 19. 406-412. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (2009). *Información sobre México en PISA 2009*. Recuperado el 6 de agosto del 2011 de http://www.inee.edu.mx/archivosbuscador/2011/02/INEE-201102297-informacion_pisa2009.pdf

Jarero, M. y Ordaz, M. (2007). Prácticas discursivas y libros de texto. Un estudio de sus relaciones en las clases de matemáticas. En G. Buendía Ábalos y G. Montiel Espinosa (Eds.). *Memorias de la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa*, (pp. 131-140). México: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa.

Martínez, D., Torres, A., Tellería, A. y Dibuti, L. (2007). Estrategia didáctica para flexibilizar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática en la universalización de la educación superior. En C. Crespo Crespo (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 20, 138-143. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Ortiz, L. (2004). Prolegómenos a las etnomatemáticas en Mesoamérica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 7(2), 171-185.

Rey, M., Forcinito, S., Lazarte, G y Hernández, C. (2005). Ecuación de la recta: una ingeniería didáctica para su enseñanza. En G. Martínez Sierra (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 19. 48-54. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Secretaría de Educación Pública (2011). *ENLACE. Media Superior 2011. Resultados nacionales por entidad. Matemáticas*. Recuperado el 12 de abril del 2012 de http://enlace.sep.gob.mx/ms/estadisticas_de_resultados/

Villa, A. (2008). El concepto de función: una mirada desde las matemáticas escolares. En P. Lestón (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa21,* 245-254. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

UNA VISIÓN SOCIOEPISTEMOLOGICA: EL TÍTERE COMO MEDIADOR DE SABERES GEOMÉTRICOS

Adilene García Luna, Marcela Ferrari Escolá
Unidad Académica de Matemáticas. Universidad Autónoma de Guerrero México
fower_gril@hotmail.com, marcela_fe@yahoo.com.mx

Resumen. Ya es conocido en nuestra disciplina, la matemática educativa, ciertas dificultades que presentan los estudiantes para la comprensión de los conceptos relacionados con las figuras geométricas y su clasificación; problema que se atribuye, en la mayoría de los reportes de investigación, a lo ostensivo de su presentación tanto en los salones de clase como en los textos escolares.

En este artículo, reportamos el análisis de una experiencia realizada en una escuela primaria de Acapulco con el grupo de teatro guiñol, en la cual los Matetíteres presentaron parte de la obra "La aldea de los rombos", desafiando a los niños de quinto grado a proponer el final y a decidir si el Señor cuadrado podría o no formar parte de esa comunidad de los rombos, discutiéndose así la inclusión en la clasificación de figuras geométricas.

Palabras clave: socioepistemología, geometría, rombo, cuadrado, títeres

Abstract. Researches in mathematical education has shown certain difficulties that the students present for the comprehension of the concepts related to the geometric figures and his classification, demonstrating that his presentation in the classroom and school texts is ostensive.

In this article, we present the analysis of an experience realized in a primary school of Acapulco. The group of Theatre of puppets presented "The village of the rhombuses ", but without the end, so that the children were inventing their end. We invited then twenty children of ten years to decide if the square mister could or not to be a member of this community of rhombuses. We proposed to discuss to them about the classification of geometric figures and of the inclusion the square.

Key words: socioepistemology, geometry, rhombus, square, puppets

Introducción

El títere ha sido un difusor de saberes desde sus orígenes, encontrándoselo en antiguos rituales, ceremonias, exorcismos, etc., y que paulatinamente se ha ido introduciendo en la escuela convirtiéndose en un medio de comunicación entre profesores y alumnos. Por lo general, es utilizado en el aula con la intención de que los estudiantes desarrollen ciertas competencias tales como la comunicación oral y escrita al interactuar con su profesor y compañeros. Para Tillería (2003, p.11), "los títeres son un aliado pedagógico, pues permiten al niño comprometerse integralmente en el proceso de enseñanza y aprendizaje, ayudándolo a ampliar todo su potencial".

La magia que emana en un espectáculo de teatro guiñol implica reconocer el trabajo del titiritero, tal como lo menciona Rogozinski (2001, p.11):

> los títeres son objetos inertes que tienen una vida prestada, infundida por el titiritero; él los anima, con su ritual maravilloso, colocándoles el alma en sus cuerpitos de mentira,

> transformándolos en seres absolutamente vivos que abren la puerta de nuestro corazón sin pedir permiso y a cuya inocencia nos entregamos desprejuiciadamente.

Las actividades que se generan alrededor del títere son priorizados para el trabajo en los cursos de español y artística, ya que la transmisión de ideas, su organización, la manera de comunicarlas así como la creación de elementos que nos permitan darlas a conocer, son encasillados en el desarrollo del dominio de la lengua y de la apreciación estética, siendo las tareas involucradas importantes para el desarrollo de las competencias mencionadas. Nosotros cuestionamos estas ideas, pues estas prácticas escolares se enriquecen al reflexionar sobre la presencia de las matemáticas en cada una de ellas. Consideramos entonces que al comunicar y crear obras de teatro guiñol, estamos utilizando matemáticas y es por ello que proponemos que los títeres sean un medio por el cual las matemáticas sean parte de los juegos de los niños, de sus actividades cotidianas y de su faena escolar.

Breve reflexión sobre el estudio de geometría

Son tres los ejes troncales de los programas de estudio de matemáticas en México: el que propicia el desarrollo del lenguaje y pensamiento aritmético y algebraico; el que atiende el manejo de información y el que se ocupa de acercar a generar herramientas para distinguir formas, espacio y medidas.

Como mencionábamos anteriormente, nos interesa reflexionar sobre el desarrollo del pensamiento geométrico, aquel que se apoya en la intuición propiciada por "mirar", por analizar lo que vemos a nuestro alrededor. La escuela griega, siglos antes de la era cristiana, genera las primeras herramientas para hablar de lo geométrico, entremezclándose con elementos de lógica y por ende de filosofía. Las primeras reflexiones geométricas se asociaban a volúmenes y sombras, desarrollándose un pensamiento espacial que requiriera también su expresión plana. Vivimos en un mundo de tres dimensiones, por lo que percibimos cuerpos y volúmenes antes de lo bidimensional, ideas a las que regresa la introducción de elementos geométricos en los libros escolares mexicanos donde al solicitarles a los pequeños de primer año (seis años) traer cajas o latas inician el diálogo sobre prismas, cubos y cilindros.

Las figuras geométricas son discutidas brevemente en el preescolar mexicano donde con gestos, láminas, material concreto se insiste en asociar figura con palabra y sonido. Círculos, cuadrados, rectángulos y triángulos son los más trabajados, en tanto que en primaria, vuelven a aparecer en la discusión de las caras de los cuerpos estudiados. Se prioriza la forma, el reconocimiento de características y se va construyendo una definición desde la cantidad de lados, los ejes de simetría, las diagonales, entre otros elementos.

Si leemos la obra: "Elementos" de Euclides, encontramos que "*un cuadrado es una figura equilátera y equiangular*", en tanto que un rombo *"es equilátero y no equiangular*". Primeras definiciones que inhiben la inclusión de un cuadrado en el mundo de los rombos, elementos presentes en las calificaciones actuales de las figuras geométricas. Definiciones que desatan discusión alrededor de cuál es la mínima expresión para describir completamente una figura geométrica como el rombo y el cuadrado, y por ende sobre lo que se entiende como calificación de figuras geométricas. Efectivamente, la definición de rombo aceptada actualmente es "figura geométrica de cuatro lados iguales", lo cual incluye a los cuadrados pues sólo falta agregar ángulos de 90° para diferenciarlos y por tanto la clasificación escolar se puede sintetizar en el Esquema 1.

Esquema 1: Clasificación escolar de las figuras geométricas

Varios investigadores, como D'Amore, Fandiño, Marazzani y Sbaragli (2008) oScaglia y Moriena (2005) entre otros, han abordado esta problemática, donde se reportan dificultades en la comprensión de los conceptos relacionados con la clasificación de figuras geométricas y reconocerlas en especial, atribuyendo los mismos a lo ostensivo de su presentación en los salones de clase así como en los textos escolares.

El objetivo principal de este trabajo es analizar la posibilidad de que los alumnos de primaria desarrollen su pensamiento geométrico, interactuando con los títeres y invitándolos a construir conocimiento acerca de figuras geométricas. Nos enfocamos entonces en una problemática ya estudiada en nuestra disciplinaacerca de la geometría, orientándonos directamente en las figuras geométricas y su clasificación; pero más en especial en el cuadrado y el rombo.

Reflexiones teóricas y metodológicas

Ante este desafío de reflexionar sobre las prácticas escolares que en salones de matemáticas de nivel primaria se observan, de los resultados evidenciados por la prueba ENLACE (2010) así como en un breve análisis de los textos utilizados en las clases matemáticas, y de las definiciones primeras de cuadrado y rombo es que iniciamos una Ingeniería didáctica (Artigue, 1995) que organiza nuestro proyecto, y cuyo análisis preliminar ha sido reportado en los parágrafos anteriores mencionando brevemente y entremezclando las dimensiones cognitivas, epistemológicas y didácticas que lo componen. Si bien omitimos el análisis *a priori* realizado para controlar de alguna manera la puesta en escena, lo evidenciamos en el reporte de los resultados es decir, del análisis *a posteriori* que presentamos en el siguiente apartado.

Esta investigación surge bajo la mirada socioepistemológica, es decir, de esa necesidad de reconocer prácticas que se ejercen en ámbitos lejanos de los salones de clase y que permitieron a los títeres desarrollarse conjuntamente con la risa del humano, con la posibilidad de comunicarse llanamente y que ahora deseamos entrelazar con algunos objetos matemáticos convertidos en objetos escolares distanciados de sus argumentos iniciales. Es decir, analizar la construcción de conocimientos desde las prácticas que la propician y por ende de ciertas reflexiones que el títere dispara, de esas emociones y juegos, sensibilidades y alegría que emanan de él.

Coincidimos con Buendía y Montiel (2009) sobre que el análisis de los usos del conocimiento matemático en situaciones socioculturales específicas permite dar cuenta de que éste no está conformado por conceptos y estructuraciones conceptuales de forma aisladas, sino que presenta una articulación gestada al seno del desarrollo de ciertas prácticas. El supuesto central que nos interesa evidenciar en este trabajo es que el conocimiento emerge del ejercicio de prácticas sociales convirtiendo a un lenguaje ajeno en uno propio al construir herramientas con intencionalidades diversas.

La práctica de *clasificar* será la que guía el diseño y análisis de la experiencia realizada en una escuela primaria del Puerto de Acapulco (Ver Figura 1), en la cual los Matetíteres presentaron la obra "La aldea de los rombos" (Ferrari, 2010), desafiando a los niños de quinto grado a proponer el final de la obra. Por tanto nos interesa reflexionar sobre la dupla "matemáticas-títeres", involucrada en la construcción social de conocimiento y por ende en las prácticas discursivas que conllevan lo afectivo, estésico (Mandoki, 2008) y lúdico de la mano de cierto rigor matemático en la práctica de clasificar.

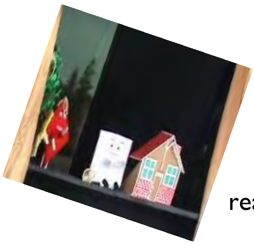
Puesta en escena

Luego de presentar la obra en el salón de actos de la escuela, dejando trunco el final de la obra "La aldea de los Rombos", llevamos a los niños a sus salones de clase y les solicitamos que se reunieran en grupos de cinco para que crearan su final. Video filmamos el intercambio de ideas generado en el grupo de 20 niños de quinto año, análisis que presentamos en esta sección.

Figura 1: Uno de los papeles en juego: ser espectador

La historia del Señor cuadrado que llega a la Aldea de los Rombos fue el disparador de la actividad. Algunos habitantes de la aldea conversan con el forasteros en tanto otros, lo rechazan y solicitan apoyo a la policía para encarcelarlo y llevarlo a juicio. Los estudiantes debían decidir entonces cuál sería el veredicto del juicio solicitado por los rombos en contra del Señor cuadrado al creer que éste había invadido su aldea violando así su ley principal: “La aldea sólo puede ser habitada por rombos”.

Un extraño llega a la aldea

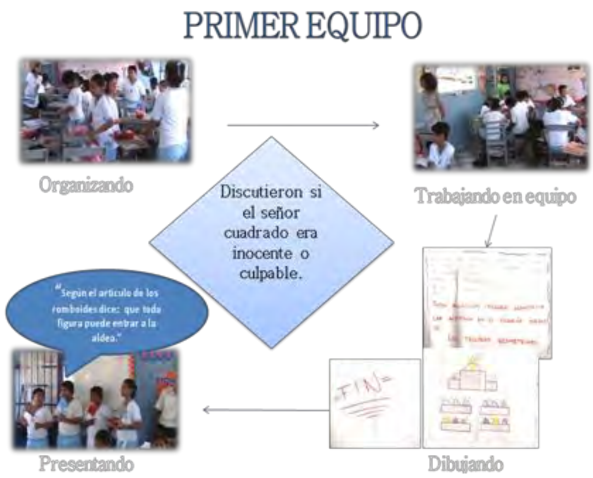


Los aldeanos reacciones de manera diferente

Encarcelan al cuadrado y varios corren al juicio

Figura 2: Breve recorrido por el cuento

Tres fueron los equipos de trabajo que se formaron en el salón de clase, y por ende tres finales diferentes.



El primer equipo, discuten si el cuadrado podría o no quedarse a vivir en la aldea. Dudan en realidad de que existan buenas razones para que radique en la aldea, pero gana su sensibilidad al decidir que el juez declare que se cambiaría la ley general: “toda figura puede entrar en la aldea”. Confirma esta idea de que prioriza en ellos lo diferente que se percibe a primera vista entre un rombo y un cuadrado, uno estilizado como los personajes del cuento y un gordito que pareciera no pertenecer. No surge en estos niños la idea de que “giradito se puede quedar”, argumento utilizado con bastante frecuencia.

El segundo equipo en cambio, inventa a *un mago* para que “*convierta al cuadrado en rombo*”, percibiéndose su atención a “lo diferente” no en las coincidencias que convierten al cuadrado en un caso particular de los rombos, sino en la necesidad de cambiar su forma, es decir, cambiar sus ángulos. Los equipos creativamente continúan el argumento del cuento, apoyando su final en su lado humanitario, lejano de argumentos matemáticos.

El tercer equipo, entremezcla los finales de los equipos anteriores, aunque entre sus discusiones aparece la idea de que girando el cuadrado puede quedarse en la aldea fortaleciendo la idea con la propuesta de cambio de leyes.

Observamos entonces que ninguno de los equipo discutió la idea de que "todo cuadrado es un rombo, pero no todo rombo es un cuadrado", ya que en la escuela primaria se incentiva el discernir entre un cuadrado y un rombo, limitándose las explicaciones más en la posición de estas figuras geométricas y no en discusiones alrededor de sus características, propiedades, elementos que permitan reconocerlos y por tanto, construir sus definiciones más sintéticas.

A manera de conclusión

Presentamos entonces, bajo la perspectiva socioepistemológica (Buendía y Montiel, 2009; Cantoral, 2007) y guiados por la ingeniería didáctica como metodología de investigación, nuestro análisis de la interacción generada entre títeres y niños en torno de figuras geométricas. Entremezclamos así, en la obra, elementos geométricos con valores sociales. Efectivamente, mediante el rechazo social que sufre el "señor cuadrado" por la comunidad de los rombos, se discute la noción que a niños y profesores suele sorprender: un cuadrado es un rombo. En general, los niños se emocionan ante este tipo de expresiones culturales ya que la mayoría no han interactuado contíteres anteriormente y se identifican con el personaje del cuadrado.

La experiencia realizada con estos alumnos de primaria, nos deja un saber especial, el de transmitir un concepto matemático a través de los títeres. La actividad finaliza solicitándoles que propongan un final mediante dibujos, comentando algunos de los niños que sólo "poniéndose de ladito" o "gracias a un mago" podría el cuadrado quedarse en la aldea, u otros que proponen cambiar el nombre a la aldea y llamarla "figuras geométricas", ideas que se enriquecen mediante la interacción con los títeres y sus pares al discutir algunas de las propiedades de rombos y cuadrados bajo la dirección de la maestra luego de escuchar sus finales y argumentos. Mediante esta actividad logramos que los niños se expresaran de manera libre y de explorar algunos conocimientos matemáticos mediante su creatividad.

Figuras geométricas y su clasificación contra el "rechazo al diferente" se entremezclan en la obra generando conocimiento al hacerlos dudar sobre lo que significa llamarse rombo o cuadrado y darles la oportunidad de discutirlo. Observamos que la sensibilidad hacia defender al débil comanda las decisiones de los niños y donde "cambiar" al cuadrado o "ampliar" la aldea confirman lo ya reportado abundantemente en nuestra comunidad (Scaglia y Moriena, 2005, D'Amore et al., 2008) sobre lo ostensivo de la enseñanza en geometría, donde la forma y posición es prioritario para distinguir figuras geométricas, pero arrojándonos luz sobre la importancia de "jugar" con las ideas escolares y generar un ambiente discursivo donde los sensible y lúdico se entrelace con los saberes matemáticos a compartir con los niños.

Referencias Bibliográficas

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En: Pedro Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Buendía, G. y Montiel, G. (2009). Acercamiento socioepistemológico a la historia de las funciones trigonométricas. P. Lestón (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22,* 1287-1296. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Cantoral, R. (2007). Socioepistemología y Matemáticas. P. Lestón (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21,* 740-753. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

D'Amore, B., Fandiño, M.I., Marazzani, I y Sbaragli, S. (2008). *La didattica e le difficoltà in matematica. Analisi di situazioni di mancato apprendimento.* Roma,Italia: ERICKSON.

Evaluación Nacional de Logro Académico en Centros Escolares. (2010). *Prueba ENLACE.* Disponible en http://www.enlace.sep.gob.mx/gr/?p= evento 2010

Ferrari, M. (2010). Lo titiritesco en matemáticas: ¿dos esencias en la misma práctica? En P. Lestón (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 23,* 849-858. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Mandoki, K. (2008). *Estética cotidiana y juegos de la cultura. Prosaica uno.* México: Conaculta-Fonca.

Rogozinski, V. (2001) *Títeres en la escuela. Expresión, comunicación y juego.*

Buenos Aires, Argentina: Novedades Educativas

Scaglia y Moriena (2005). Prototipos y estereotipos en geometría. *Educación Matemática 17*(3). 105-120.

Tillería, D. (2003). *Títeres y máscaras en la educación. Una alternativa para la construcción de saberes.* Buenos Aires, Argentina. Homo Sapiens Ediciones.

MODELACION DE UNA CINETICA QUIMICA PARA EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMATICAS

Adriana Galicia, Leonora Díaz, Jaime Arrieta, Ángeles Gama, Lorena Landa
Instituto Tecnológico de Acapulco México
Universidad Autónoma de Guerrero.
Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación Chile
agsosa2001@yahoo.com.mx

Resumen. El presente trabajo centra la atención en aproximar las prácticas sociales de modelación de los entornos profesional e investigativo con el entorno escolar. El estudio que se reporta se inscribe en la línea de investigación que se orienta a describir el papel de las matemáticas en comunidades de profesionistas, su deconstrucción y posterior reconstrucción en la escuela. Como metodología se acuña una secuencia de actividades encaminadas hacia la investigación de prácticas, iniciando con la identificación de la comunidad en estudio y cerrando con la puesta en escena de diseños de aprendizaje..

Palabras clave: modelación matemática, cinética química

Abstract. This paper focuses in bring closer the social practices of modelized of professional environments and researched with school environment. The report study is enrolled in the line of research that characterizes the role of mathematics in professional communities, its deconstruction and subsequent reconstruction at school. Methodologically, materializes in a sequence of activities investigating these practices, the sequence begins with the identification of the studied community and ends with the staging of learning designs.

Key words: mathematical modeling, kinetic reaction

La problemática

El estudio de la desvinculación entre la escuela y su entorno social, ha sido ampliamente abordado desde diversas perspectivas. En (Díaz ,1987) se reconoce que, a pesar de que a la matemática se le asignan roles formativo, informativo y práctico, en el campo laboral no se sabe por qué. En los trabajos de (Galicia, Díaz y Arrieta 2011), (Ulloa y Arrieta 2010) y (Landa, 2008), se da cuenta de la separación entre las prácticas sociales de modelación en comunidades de las ingenierías bioquímica y pesquera, con las comunidades escolares. El estudio que reportamos tiene que ver con aspectos de cómo vive la práctica del cálculo de una cinética química y las intencionalidades de la comunidad de ingenieros bioquímicos al ejercer dicha práctica.

La Socioepistemología como perspectiva teórica

La perspectiva teórica que sostenemos es la Socioepistemología (Cantoral y Farfán, 2004), en tanto que es una perspectiva teórica que estudia la emergencia de los conocimientos matemáticos cuando son ejercidas las prácticas por diversas comunidades y cómo es que viven estas prácticas y conocimientos matemáticos en las comunidades escolares. Particularmente nuestra perspectiva asume a las prácticas sociales de modelación como fuente de procesos de matematización en el aula: los estudiantes construyen argumentos, herramientas, nociones y procedimientos matemáticos en la intervención con los fenómenos de la naturaleza (Arrieta, 2003).

Estudiar la tensión entre las prácticas profesionales y las prácticas escolares es complejo, por ello cabe la flexibilidad en el orden de algunas de las actividades que se plantean en las fases de la investigación. Por otra parte la profundidad de las mismas está en función del alcance de los objetivos de la investigación y de las características de las evidencias levantadas.

Fases del estudio

1. *Identificación de la comunidad en estudio*. Se precisa conocer la historia, el perfil, los objetivos, el currículo, artículos científicos, es decir investigar los antecedentes teóricos para conocer qué tipo de problemáticas atienden.
2. *Reconocimiento de los escenarios*, de los espacios en que viven las prácticas de comunidades específicas. La infraestructura necesaria, el equipamiento así como las condiciones ambientales de estos espacios.
3. *Identificación y clasificación de prácticas sociales recurrentes*. Se identifican las problemáticas atendidas con la asesoría de profesionistas, investigadores y profesores de la comunidad en estudio. Se caracteriza la complejidad de ejercer la práctica y el conocimiento previo que requiere así como la complejidad del modelo matemático que vive en esa práctica.
4. *Estudio in situ de las prácticas recurrentes*. Se observa cómo los actores ejercen sus prácticas, incluyendo a los actores en formación. Se precisa conocimiento previo de la actividad a observar. Se levantan videos y audio grabaciones así como notas de campo para posteriormente distinguir entidades tanto matemáticas como no matemáticas que emergen en el ejercicio de la práctica.
5. *Análisis, esquematización y selección de las prácticas sociales a deconstruir*. Esta fase requiere contar con la asesoría de profesionistas de la comunidad que no formen parte del grupo de estudio. Se esquematizan las prácticas y se selecciona la que se va a deconstruir, con base en las mejores evidencias levantadas, por la posibilidad de reconstruir su modelación en el aula, de acuerdo a la caracterización del desplazamiento de la práctica a través del tiempo y la experiencia de quien la ejerce, entre otras características.
6. *Deconstrucción de la práctica seleccionada*. Su propósito es desestructurar para entender, por lo que se realizan las siguientes etapas:
   a) Revisión histórica de las entidades en práctica.

b) Situar la práctica y sus herramientas matemáticas en el currículo.

c) Interactuar con los actores que ejercen la práctica e investigar por qué ejercen la práctica de la forma en que lo realizan. Esto es fundamentalen el acopio de elementos para el ulterior diseño de aprendizaje basado en prácticas.

El término deconstrucción es acuñado porDerrida, en los años 60´s esta filosofía francesa se perfiló como desafío en el discurso pedagógico, esta transferencia de un concepto filosófico a otras esferas de conocimiento comprueba su comunicabilidad y trascendencia (Landa, 2008).

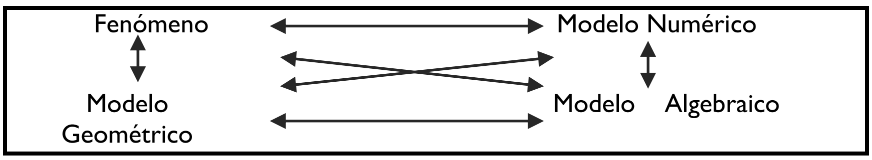
7. *Caracterización de las prácticas sociales por su desplazamiento en el tiempo*. Después de deconstruir las prácticas es posible mirar la relación entre la experiencia y la intencionalidad que subyace al ser ejercida. En ese sentido una práctica emergente es aquella que se presenta cuando surge en y para la práctica misma, como contingencia de un fenómeno o proceso. La práctica constituida es aquella que ya ha sido aceptada y normada por la comunidad y la práctica naturalizada es cuando es ejercida cotidianamente perdiendo la intencionalidad que la generó, sin que se cuestione su ejercicio.Es posible también tomar en cuenta la complejidad de ejercicio de la práctica y del conocimiento previo que se requiere. Matemáticamente es posible caracterizar la práctica como modelo primario, compuesto ó modelo *ad hoc*.

8. *Elaboración y puesta en escena del diseño de aprendizaje basado en prácticas sociales de modelación.* Etapas presentes en el diseño de aprendizaje:

a) La interacción con el fenómeno. Consiste en "la toma de datos", que conduce a la construcción de una tabla, reconociendo y relacionando las variables que intervienen en el fenómeno.

b) El acto de modelar se presenta al identificar las características distintivas de la tabla y, a partir de ésta, efectuar predicciones sobre el fenómeno.

c) La articulación de red de entidades. Se procede a relacionar los modelos entre ellos, y a su vez con el fenómeno estudiado, formando de esta manera una red de modelos.



d) La analogía. Se realizan actividades mediante las cuales se puedan proponer fenómenos modelables de manera análoga.

Es importante evidenciar la identificación de variables que intervienen el comportamiento tendencial y el proceso de predicción.

Desarrollo de la investigación

La comunidad de Ingenieros Bioquímicos

Situamos esta investigación en comunidades de ingenieros bioquímicos, quienes en su formación se espera que el egresado diseñe, controle, simule y optimice equipos, procesos y tecnologías sustentables que utilicen recursos bióticos y sus derivados, para la producción de bienes y servicios que contribuyan a elevar el nivel de vida de la sociedad, en un tiempo de nueve semestres.

Los escenarios

El Instituto Tecnológico de Acapulco es una institución formadora de Ingenieros Bioquímicos con especialidad en alimentos, cuenta con laboratorios de microbiología, química, instrumental, investigación y taller de alimentos, escenarios en los que se desarrollan la mayoría de las actividades,todos medianamente equipados. El ingeniero bioquímico ejerce en laboratorios de análisis, plantas de tratamiento de agua potable y residual, industrias productoras de cemento y concreto, agroindustrias, industrias de bebidas embotelladas, así como en el sector educativo.

Seguimiento de una cinética química como práctica recurrente

En esta etapa se realizó una revisión del plan de estudio, la retícula. Es posible clasificar las prácticas del ingeniero bioquímico por la complejidad de la entidad matemática que está presente en los diversos fenómenos en los que intervienen como entidades primarias, entidades compuestas y entidades ad hoc. De la diversidad de prácticas de modelación nos centramos en la práctica de la realización, seguimiento y control de una cinética química, por su importancia en la comunidad y la posibilidad de que ésta sea reproducible. La cinética química tiene relación con la rapidez o velocidad, con la que ocurre una reacción química, es el cambio en la concentración de un reactivo o de un producto con respecto al tiempo.Para el cálculo de la cinética química se utiliza la forma diferencial es $dx/dt= k(a_0-x)$ ó la forma integrada$ln(a-x)=-k_1t+lna$. Siendo x la concentración del compuesto y a_0 la concentración inicial enel tiempo$t$.

Estudio de la cinética química *in situ*

Se tomaron como referencia prácticas que son ejercidas en diferentes escenarios.

La planta de tratamiento de aguas. El proceso de depuración de las aguas residuales es por la actividad de los microorganismos. Las actividades que se realizannormalmente son análisis Fisicoquímicos y Microbiológicos del agua en los diferentes puntos del proceso. Uno de los parámetros que le permite tomar decisiones al operador es la cantidad de sólidos presentes en los lodos (masa microbiana) que le indican la capacidad de degradación de la materia orgánica, los llamados en esta comunidad "lodos maduros" son los adecuados. Ocasionalmente opera el proceso, como es la purga de lodos ó regular el flujo del influente.

Laboratorio de investigación. Se asistió a un laboratorio de investigación en el cual se estudia el mejoramiento en la producción de mezclala nivel laboratorio. Se logro constatar que estudiantes de posgrado realizaban análisis bromatológicos y microbiológicos a las muestras de las diferentes etapas de la producción de mezcal y en esta actividad es importante llevar a cabo el control de la cinética del consorcio microbiano que fermenta el agave.

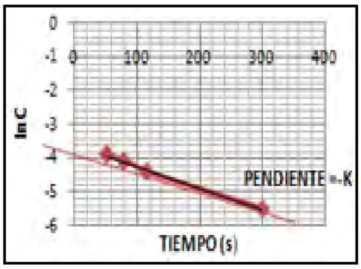


Figura1 Método integral

La clase de Cinética Química y Biológica.Se observó dificultades de los estudiantes en la preparación de soluciones. En el reporte no siempre identifican las variables involucradas. El tratamiento matemático de los datos o su interpretación es nula, ya que no logran establecer el comportamiento tendencial de la reacción matemáticamente. Para validar este modelo el estudiante precisa encontrar la pendiente que indica la constante de velocidad de reacción por el método integral, el modelo de primer orden es$(-r_A)=k\ C_A$y la forma integrada:$kt= lnC_{A0}/C_A$al graficarlnC_{A0}/C_Arespecto a t , se debe obtener una recta con pendiente k interceptando en el origen.

En la figura 2 se muestra un esquema general del ejercicio de una cinética.

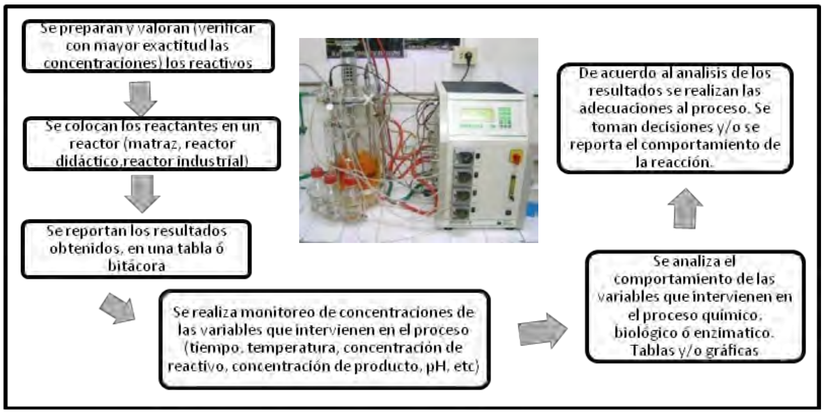


Figura 2. Esquematización de la práctica de cinética química

Deconstrucción

La revisión histórica de la cinética química es muy amplia, en (Masel, 2001) se menciona que el estudio de la cinética química comenzó hace más de 200 años. Iniciando en 1771 con Wenzel cuando noto que la disolución de Cinc y cobre en ácido tomaba un tiempo finito, posteriormente varios científicos, mostraron que la rapidez de las reacciones químicas variaba con la concentración de los reactivos. El método diferencial emplea la ecuación de velocidad en su forma diferencial sin integrar. Los valores de dc/dt se obtienen de una gráfica de *c* contra *t* tomando las pendientes y estas se comparan directamente con la ecuación de velocidad.

La principal dificultad del método es que no siempre se pueden obtener con precisión las pendientes. A pesar de este inconveniente el método es el más confiable y a diferencia del método de integración no produce dificultades especiales cuando se presentan complejidades en el comportamiento cinético. En la clase y en los libros de consulta se privilegia el método integral.

Cinética química en el currículo

La asignatura de Cinética Química y Biológica se imparte en cuatro horas de teoría y en dos de práctica a la semana, en sexto semestre. Para cursar esta asignatura se requieren bases de química y es prerrequisito para cursar las asignaturas de microbiología e ingeniería de biorreactores. Las herramientas matemáticas que se requieren son de cálculo diferencial e integral.

La interacción con los actores

En la planta de tratamiento de aguas residuales. El ingeniero entrevistado argumenta no llevar el control de la cinética de reacción en los reactores, percatándonos de esta aseveración si se considera la forma en cómo se realiza en el aula, es decir, tomando datos y aplicando ecuaciones, sin embargo consideramos que la determinación de la demanda química y bioquímica de oxígeno, sólidos disueltos y sedimentables y analizar los resultados le permiten la toma de decisiones respecto a la velocidad y efectividad de la biorreacción.Una práctica interesante que realiza para conocer las características del lodo son la coloración, la consistencia y el olor.

En la comunidad de investigadores. En esta comunidad los estudiantes de posgrado hacen notar que aun cuando no les gustan las matemáticas hacen uso de los modelos cinéticos de fermentación para lograr el control de la misma y sobre todo tener la capacidad de hacer las predicciones pertinentes y el escalamiento del proceso para un nivel planta piloto, en esta actividad buscan el apoyo del profesor de maestría de la asignatura de matemáticas aplicadas.

En esta comunidad se encontró la aplicación directa de modelos cinéticos e incluso la adaptación de estos modelos a la biorreacción.

En la clase de cinética química y biológica. Al cuestionar a los estudiantes sobre la explicación de una gráfica mencionan: "Concluimos que en la gráfica a mayor tiempo también la cantidad va aumentando porque hay un tiempo de reacción más lento". Lo que realmente los estudiantes quisieron decir en este momento es que el comportamiento tendencial de los datos era logarítmico.

La experiencia y las intencionalidades

En la Tabla I se intenta caracterizar la práctica, nos referimos a modelos primarios las tablas y gráficas logarítmicas y linealesen todos los niveles a excepción del profesionista quien toma datos en bitácora, consideramos modelos compuestos aquellos cuya complejidad matemática es mayor y ad hoc a los que son generados como producto del ejercicio de la práctica.

Tabla I. Caracterización de la práctica de cinética química

Nivel	Intención	Expe-riencia	Refe-rencias	Adecua-ción de la practica	Caracterización de la práctica por		
					Desplaza-miento en el tiempo	**Ejercicio**	**Modelo Matemá-tico**
Alumnos de 6° semestre	Aprender, acreditar la asignatura	Mínima	Apuntes, clase, libros	Ninguna	Naturalizada	Operación y control	Primarios
Profesor	Enseñar las leyes que rigen una cinética	Experto	Libros, artículos, normas	Ninguna	Constituida	Operación y control	Primarios
Ingeniero Bioquí-mico	Atender una problemática social	Experto	Normas	No la identifica formal-mente	Naturalizada y emergente informal	Operación y control	Primarios
Investi-gador	Reproducibili-dad de trabajos. Generar ciencia	Experto	Artículos Prueba y error	Constan-temente	Emergente formal	Operación control y diseño	Compues-tos y ad hoc

El diseño de aprendizaje

Los actores participantes fueron estudiantes de primer semestre sin conocimientos previos de cinética química. Se trabajó con 3 equipos de 3 integrantes cada uno. Se realizaron dos diferentes diseños usando la técnica de volumetría y el método conductimétrico sin resultados esperados. Posteriormente se diseño la cinética del yodato de potasio. El método que se utilizó fue el diferencial.En esta reacción el iodo elemental que se libera origina un color azul intenso en la solución en presencia de almidón, esto tiene lugar cuando se ha formado cierta cantidad de iodo. Se realizó el procedimiento indicado en la figura 3.

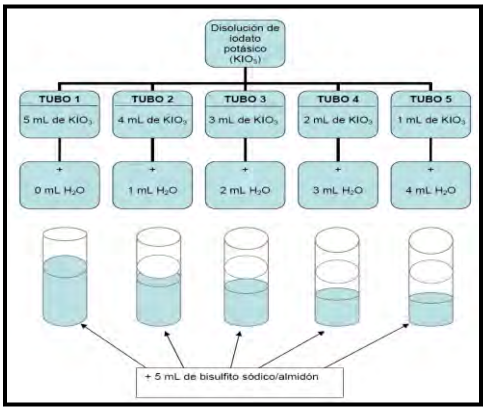


Figura3. Diagrama de preparación de muestras

*Etapa I: La interacción con el fenómeno.*Los estudiantes identificaron rápidamente las variables tiempo y la concentración cuando las muestras cambiaban de color. Organizaron los datos numerizando el fenómeno en una tabla y esquemáticamente. A continuación se muestra una predicción errónea del comportamientode la reacción:

Omar: El color aparece cada tres minutos en cada tubo.

Sin embargo a partir del tubo cuatro se dan cuenta que sus predicciones son erróneas

Omar: Nos equivocamos. Va tardar mucho más en reaccionar

En este momento inician un nuevo análisis predictivo, sumando los minutos del tubo cuatro al quinto potencialmente pero sin éxito, ya corría el minuto 30. Los estudiantes relacionaron el tiempo con la concentración en una gráfica. Sin embargo tuvieron dificultades sobre cómo plantear la dependencia entre las variables. En la figura 4 se muestra a la izquierda un boceto de la gráfica correcta, no así la derecha en la que se aprecia la fijación en lo lineal.

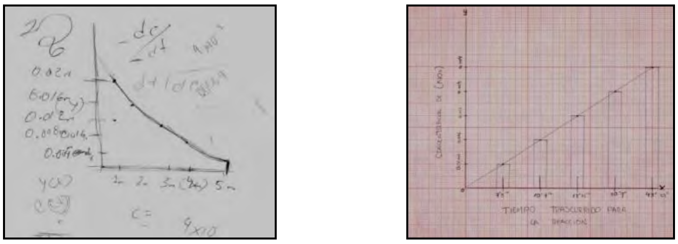


Figura 4. Gráficas de concentración de reactivo Vs tiempo

*Etapa II: El acto de modelar.*Observaron que el tubo con menor concentración tardó más en cambiar de color. Se les solicitó que calcularan los parámetros de la tabla 2, se les guió para que graficaranlas relaciones de la figura 5. Estableciéndose las relaciones lineales. Los estudiantes solicitan utilizar laptop.

Tabla 2.Datos del experimento cloruro de terbutilo

No.	C	C_0	-Δ C	T min	-Δ C	Δ T	Δ C/Δ T	C_0-C
1	0,02	0,02		7,52			-	
2	0,016	0,02	0,004	10	0,004	3,31	0,001208459	0,004
3	0,012	0,02	0,004	13,31	0,004	6,78	0,00058997l	0,008
4	0,008	0,02	0,004	20,09	0,004	25,16	0,000158983	0,012
5	0,004	0,02	0,004	45,25	0,004		-	0,016

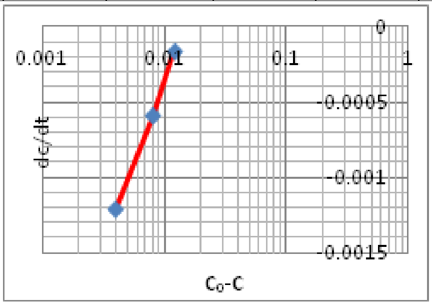


Figura 5. Gráfica velocidad de formación de producto

A la pregunta: ¿Cuál será el valor de la concentración de iodo si la velocidad de la reacción es 0.014? (dato intermedio) argumentaron los estudiantes:

Carlos: Ese dato no lo tenemos

Daniel: Se tienen las diferencias, Co-C y la concentración inicial es 0.02

Javier: Pues tomamos el dato de Co-C que corresponde, 0.02 menos 0.014, es decir 0.006, éste a la dc/dt más cercano que nos pide y le agregamos la mitad del valor de Co-C que le corresponde a la siguiente mitad de la dc/dt multiplicando por el valor próximo.

En otras palabra lo que el estudiante expresaba era la aproximación a la función por la serie de Taylor de primer orden, es decir la primera aproximación de la serie, luego entonces la serie sería: $f(C_0\text{-}C + h) = f(C_0\text{-}C) + \Delta(C_0\text{-}C)/\Delta(\Delta C/\Delta T)\,h$.

Etapa III: La articulación de red de entidades.

Profesora: ¿Saben de otra manera de encontrar estos valores?

César: ¿Puede ser gráficamente?

Profesora: ¿cómo?

César: Localizando aproximadamente el valor de dc/dt que nos pide en las Y´s, tocando la recta y leyendo en las X´s, de hecho más o menos como se fue armando la recta ¿no?

Conclusiones

En la comunidad de ingenieros bioquímicos una de las prácticas relevantes es el seguimiento de cinéticas tanto químicas como biológicas y enzimáticas, una práctica que da lugar a la emergencia de su identidad profesional.

En este trabajo se muestranalgunas evidencias de como la práctica social constituye el motor de la evolución profesional al aproximar la caracterización de la práctica, la tendencia a naturalizarse e incluso cómo el profesionista concibe a la cinética química como una actividad escolar apartada de su actividad cotidiana, en la que la experiencia se impone a todo cálculo matemático contrastando con la actividad del investigador que precisa de estas herramientas connotándose la diferencia en la emergencia informal del primero y la emergencia formal del segundo. Existiendo la posible abstracción de entidades en la comunidad escolar.

La caracterización y deconstrucción de la práctica proporciona elementos importantes para experimentación en el aula, mostrando lasconcepciones de los participantes delfuncionamiento de lasentidades matemáticas, las relaciones logarítmicas, lalinealidad de lavelocidad de desaparición de reactivosrespecto a las diferencias de estos, así comola interpolación lineal y la primera aproximación de la serie de Taylor contando con conocimientos básicos de química y matemáticas. Los actores al predecirasocianel modelo com lo modelado, actividad distintiva de los investigadores.

Modelar experimentos para el aprendizaje de las matemáticas de estudiantes de ciencias químico-biológicas debe considerarse una actividad primordial.

Referencias bibliográficas:

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis de Doctorado no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2004). La sensibilité a la contradiction: logarithmes de nombres négaties et origine de la variable complexe. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 24, 137-168.

Díaz, L. (1987). *Un estudio de relación entre matemática y campo laboral*. Tesis de Magíster en Educación Matemática no publicada. Universidad de Santiago de Chile.

Galicia A., Díaz L. y Arrieta J. (2011). Práctica social de modelación del ingeniero bioquímico: Análisis microbiológico. *En resúmenes de la XII Conferencia Interamericana de Educación Matemática*

Landa, L. (2008). *Diluciones seriadas y sus herramientas, una práctica de estudiantes de ingeniería bioquímica al investigar la contaminación del río de la Sabana.* Tesis de Maestría no publicada. Universidad Autónoma de Guerrero. México.

Masel, R. (2001). *Chemical kinetics and catalysis*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Ulloa, J. y Arrieta, J. (2010). La deconstrucción como estrategia de modelación. En P. Leston, (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 23, 909-917. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

HERRAMIENTAS, ARGUMENTOS Y MÉTODOS DE LA MODELACIÓN LINEAL

Maurilio Castro, Candelaria Salgado, Mateo Bustos, Humberto Gallardo, Adriana Galicia, Jaime Arrieta
Colegio de Bachilleres del Estado de Guerrero México
Instituto Tecnológico de Acapulco
m_castro95@hotmail.com, agsosa2001@yahoo.com.mx

Resumen. El presente trabajo de investigación forma parte de las actividades que se realizan en el desarrollo del proyecto Laboratorio Virtual de Ciencias como estrategia didáctica para profesores del estado de Guerrero, particularmente de Ayutla de los Libres. Muestra las primeras exploraciones de la puesta en escena con estudiantes de nivel medio superior de diseños de aprendizajes basados en prácticas sociales de modelación de contextos extraescolares. Se muestran las herramientas, argumentos y métodos que emplean los actores al modelar fenómenos lineales creciente, decreciente y constante.

Palabras clave: herramientas argumentos métodos modelación lineal

Abstract. This research is part of the activities that are made in the project to Virtual lab of Science as a teaching strategy for teachers in the state of Guerrero, particularly Ayutla de los Libres. It shows the first explorations of the staging with students' of highschool superior level of certain learning designs based on social's modeling practices of non-school contexts. It presents the tools, arguments and methods used by actors in generating growing, decreasing or constant models type of linear phenomena.

Key words: tools, arguments, methods linear modeling

La desvinculación de prácticas sociales, la problemática

La problemática que se atiende en este trabajo está en relación con la tensión que existe entre las prácticas escolares y las prácticas que son ejercidas fuera del aula. Tensión que produce en el estudiante contradicción, puesto que por una parte el estudiante asiste al aula, entre otras actividades, para aprender a resolver problemas y cuando precisa resolver un problema de su entorno no hace uso de "lo aprendido".

Puesto que en la escuela se ha constituido, en muchos casos por falta de recursos y en otros intencionalmente, la enseñanza de las ciencias en un aula aislada, sin laboratorios, sin interacción con las problemáticas de las diferentes comunidades. La enseñanza de las matemáticas vinculada a procesos abstractos es privilegiada hasta la creencia de que la matemática es producto del "razonamiento puro" o de la abstracción de la realidad.

El presente trabajo centra la atención en aproximar las prácticas sociales de modelación colindantes con el entorno escolar, es decir con las prácticas cotidianas de las que el joven estudiante de nivel medio superior no es un espectador pasivo más, sino un ciudadano partícipe en una problemática social. Situaciones en las que las problemáticas no son enunciados que obedecen a soluciones triviales y algorítmicas, no son ejercicios escolares, donde el profesor enseña y el estudiante aprende a resolver.

El laboratorio virtual como herramienta recursiva al contexto

En el estado de Guerrero se lleva a cabo vía el proyecto de Laboratorio Virtual de Ciencias (LVC), la capacitación a profesores de nivel medio superior de las siete regiones del estado para que se apoyen en tecnología virtual como herramienta didáctica. El laboratorio virtual se distingue de otros simuladores porque el usuario interviene con fenómenos de la naturaleza de manera activa, es decir cuenta con un escenario en el que transita ubicando las herramientas propias del experimento y las herramientas matemáticas que le permitan construir la red de modelos que expliquen el fenómeno en cuestión. No es una caja negra a la que se alimenta de datos y se recoge el resultado.

La Socioepistemología como marco teórico

El marco teórico en el cual se enmarca la investigación es la Socioepistemología (Cantoral, 2004), aproximación teórica de naturaleza sistémica que permite tratar los fenómenos de producción y de difusión del conocimiento desde una perspectiva múltiple, al incorporar el estudio de las interacciones entre la epistemología del conocimiento, su dimensión socio cultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza. Tradicionalmente, las aproximaciones epistemológicas asumen que el conocimiento es el resultado de la adaptación de las explicaciones teóricas con las evidencias empíricas, ignorando, sobremanera, el papel que los escenarios históricos, culturales e institucionales desempeñan en la actividad humana. La socioepistemología por su parte, plantea el examen del conocimiento social, histórica y culturalmente situado, problematizándolo a la luz de las circunstancias de su construcción y difusión.

En esta investigación se asume a las prácticas sociales de modelación como fuente de procesos de matematización en el aula: los estudiantes construyen argumentos, herramientas, nociones y procedimientos matemáticos en la intervención con los fenómenos de la naturaleza (Arrieta, 2003). Los trabajos de Arrieta (2003), López (2010), Galicia, Díaz y Arrieta (2011) y García (2011) dan luz de cómo la matematización de fenómenos químicos, físicos ó biológicos ya sean experimentales reales ó virtuales detonan la construcción de la red de modelos que caracterizan el fenómeno en cuestión, trabajos anteceden a esta investigación.

La ingeniería didáctica como metodología de investigación

La ingeniería didáctica como método de investigación tiene varias etapas, la primera de ellas es la de concebir una situación didáctica, es decir el diseño a trabajar, lo que consideramos nuestra secuencia, en seguida se deberá realizar un análisis a priori de cada una de las actividades que componen nuestra situación didáctica, para verificar si los objetivos que nos hemos planteado cumplirán con su finalidad, la puesta en escena del diseño y por último el análisis a posteriori y su confrontación con el análisis a priori. Hacemos uso de la ingeniería didáctica como metodología, tomando como base las prácticas sociales. El trabajo está fundamentado en la "la numerización de los fenómenos": las prácticas de modelación que parten de la recolección de datos numéricos de un fenómeno para construir modelos numéricos y su uso se toma como central. Estas prácticas ponen en el centro el uso de modelos numéricos (Arrieta,2003).

Para el levantamiento de las evidencias se grabó audio y video de la puesta en escena de los diseños de aprendizaje, se tomó notas de las observaciones. Posteriormente se realizó la transcripción de los materiales y se seleccionaron episodios que mostraran riqueza de las interacciones.

Caracterización y organización de los actores

Los estudiantes cuentan con edades que fluctúan entre los 15 y 16 años, se organizaron por afinidad en 4 equipos de cinco elementos cada uno. La mayoría de los estudiantes son de bajo nivel socioeconómico.

La elasticidad de los resortes

En este diseño, puesto que ya se dan los datos, la experimentación consiste en que los estudiantes entiendan cómo están relacionados los datos con el fenómeno. Para esto, se pide que describan el experimento y que utilicen la tabla para responder las preguntas que se plantean.

Peso	Posición del portapesas
0	45
20	75
40	105
60	135
80	165
100	195
120	225

Planteamiento del problema: Tenemos un soporte universal y un resorte colgando de él, en su extremo le colocamos un portapesas que tiene una flechita (indicador) que apunta a una regla y contamos con seis pesas de 20 gramos. Entonces vamos colocando pesas en el portapesas y tomamos las posiciones de la flechita, con estos datos hacemos una tabla.

1. Describe el experimento

A priori: Los estudiantes describen con palabras el experimento. Por ejemplo, "el resorte se va estirando cuando se van colocando

2. Si colocamos 85 gramos, ¿en qué posición estará la flechita del portapesas?

A priori: Intentan utilizar el mismo método anterior, algunos con éxito otros no. "Sí 45 está a la cuarta parte de 40 y 60 entonces la posición debe estar a una cuarta parte de 165 y 195, o sea 172.5. Otros estudiantes intentan utilizar la regla de tres.

A posteriori: La posición del portapesas al colocar 85 gramos

Eugenia:	Profe, la pregunta que se refiere a la posición de la flechita si colocamos 85 gramos, estamos considerando dividir 15 a la mitad.
Elizabeth:	Es como la pregunta anterior en donde 50 gramos estaba a la mitad de 40 y 60 y que la flechita indicaba la mitad entre los 105 y 135 mm ósea la mitad de 30.
Eugenia:	Así, sólo que ahora tenemos que dividir 15, porque a los 85 gramos se está sumando la cuarta parte de 20 que es el aumento del peso, es decir se suman 5 a 80 gramos.
Elizabeth:	Cuando dividimos 15 obtenemos 7.5
Profesor:	De acuerdo, entonces analicen sus resultados con la tabla de datos.
Eugenia: .	Aquí solo se va agregar a 165 mm a los 7.5 que se estiró el resorte y entonces la posición del portapesas será de 172.5 mm.
Análisis:	Los estudiantes intuyen sus respuestas haciendo uso del método de los puntos medios

¿Cuánto debo de mi carro? Construyendo un modelo lineal decreciente

El diseño de aprendizaje está basado en la práctica de modelación lineal y tiene la intención de que los estudiantes consoliden la red de "lo lineal" a partir de modelar linealmente fenómenos con diferentes características. En esta práctica se modela un fenómeno con variable decreciente, razón de cambio negativa, coeficiente de x negativo en la fórmula $y = ax + b$ o recta con inclinación hacia la izquierda.

Planteamiento del problema: Juan Antonio compró un auto nuevo en la agencia, lo compró a crédito en una promoción donde no paga intereses. Le costó $120,000.00 y lo pagará en dos años y medio.

1. ¿Cuánto habrá pagado después de diez meses?

A priori: Inicialmente se espera quelos estudiantes calculen cuando pagará Juan por mes y multiplicar esta cantidad por diez meses, esta cantidad la resta a los 120,000 pesos.

Es posible que los estudiantes confundan el monto del crédito con el monto de lo que se ha pagado. Podrían aplicar regla de tres.

2. Se solicita al estudiante que complete la tabla de datos, este es el modelo numérico del crédito de Juan Antonio donde se muestra en una columna el número de mensualidades pagadas y en la segunda el monto del crédito que debe por 30 meses.

A priori: Los estudiantes completan la tabla de datos, posiblemente aún se presenta en las confusiones en el cálculo del monto del crédito que se presentan en la situación anterior.

3 ¿Cuál es el modelo algebraico del crédito de Juan Antonio?

A priori: Los estudiantes dan una ecuación de la forma C = 120,000 -4,000n el profesor tendrá que hacer notar que esta ecuación es la misma que C = -4,000n + 120,000, esta forma nos interesa pues corresponde al esquema general de las ecuaciones lineales. Tienen dificultades los estudiantes para comprender el signo negativo del coeficiente de n y la sustracción entre la deuda inicial y lo que lleva pagado hasta el mes n.

4 ¿Cuál es el modelo gráfico del crédito de Juan Antonio?

A priori: Puntean los datos de la tabla y obtienen una recta inclinada hacia la izquierda

5 ¿Cuál es la razón de cambio? ¿Por qué?

A priori: Los estudiantes tienen dificultades para identificar la razón de cambio como el abono mensual. Otra dificultad es el concebir a razones de cambio negativas. En este caso darle significado al signo de -4,000. Si es necesario el profesor debe de intervenir para explicar que si la razón de cambio es negativa la variable decrece y si es positiva la variable crece.

6 ¿El monto de la deuda crece o decrece? ¿Por qué?

A priori: Los estudiantes no tienen dificultad en determinar que el monto de la deuda decrece, pero a estas alturas todavía tienen confusión entre el monto de lo que han pagado y el monto del crédito.

A posteriori: Mostramos las argumentaciones siguientes

Profesor: ¿Cómo van con su gráfico Adán?

Adán: Vea profe esto es lo que estamos haciendo.

Profesor: ¿Qué es lo que tienen en el eje vertical?

Adán: Lo que se paga y en este eje (horizontal) colocamos los meses, así que cuando pasan 2 meses Juan Antonio paga 8 mil y la cuenta queda en 112 mil y si se pagan después en otros 2 meses la cuenta queda en 104 mil.

Profesor: ¿Entonces cada dos meses se pagan 8 mil pesos?

Adán: Si profesor, porque cada mes se pagan 4 mil pesos pero como estamos indicando en el grafico dos meses se ve que después de 2 meses la deuda va disminuyendo.

Análisis

En el desarrollo de la actividad, los estudiantes no presentan dificultades en la construcción del modelo gráfico de la deuda de Juan Antonio, debido a que notan que con el transcurso del tiempo la deuda va disminuyendo. Sin embargo no lograr construir el modelo algebraico ni identificar la razón de cambio.

Figura 1. Estudiantes del equipo 3

Un asunto de pollos

El diseño de aprendizaje tiene la intención de que los estudiantes construyan una red de modelos llamada "lo constante" y la integren a la red de "lo lineal". En esta práctica se modela un fenómeno con variable constante, razón de cambio cero, coeficiente de x cero en la fórmula $y = ax + b$ o recta paralela al eje x.

Planteamiento del problema: Para incubar huevos debemos mantener la incubadora con una temperatura de 35 grados centígrados, para ello la incubadora cuenta con un termostato que mantiene la temperatura constante.

1. ¿A que temperatura estará la incubadora a las 2 de la mañana?

A priori: Los estudiantes argumentaran sobre la situación y concluirán que la temperatura es de 35 grados.

2. ¿A que temperatura estará la incubadora a las 4 de la mañana?

A priori: Producto de los argumentos en la situación anterior los estudiantes no tienen dificultades para responder 35 grados.

3. Por favor llena la siguiente tabla, este será el modelo numérico de la temperatura de la incubadora.

Hora *h*	*Temperatura de la incubadora* *T*
1	
5 6	
12	
18	
24	
30	

A priori: Los estudiantes llenarán la tabla colocando 35 en todas las celdas de la columna derecha.

4. ¿Cómo son los datos?

A priori: Los estudiantes intentaran caracterizar los datos de diferente forma pero se consensará en que los datos son constantes.

5. ¿Cuál es su modelo algebraico?

A priori: Los estudiantes tendrán dificultades en presentar una fórmula de la forma $T = 0h + 35$ ó $T = 35$

6. ¿Cuál es su modelo su modelo gráfico?

A priori: Puntean la tabla de datos y obtienen una recta paralela al eje *h*.

7. ¿Cuál es el valor de la razón de cambio? ¿Por qué?

A priori: La respuesta de los estudiantes es que la razón de cambio es cero.

Los argumentos que dan son variados, hay que privilegiar formas que vinculen la razón de cambio cero con la recta paralela al eje *h* y con datos constantes.

Un argumento puede ser este: "No hay crecimiento ni decrecimiento por lo que el incremento en la temperatura de la incubadora es cero y por tanto la razón de cambio es cero".

8. ¿Cómo es la recta? ¿Por qué?

A priori: La respuesta de los estudiantes basada en la situación 6 es una recta paralela, pero la pregunta es una invitación a resumir lo trabajado por los estudiantes vinculando recta horizontal con razón de cambio cero, con coeficiente de *h* cero y con variables constantes.

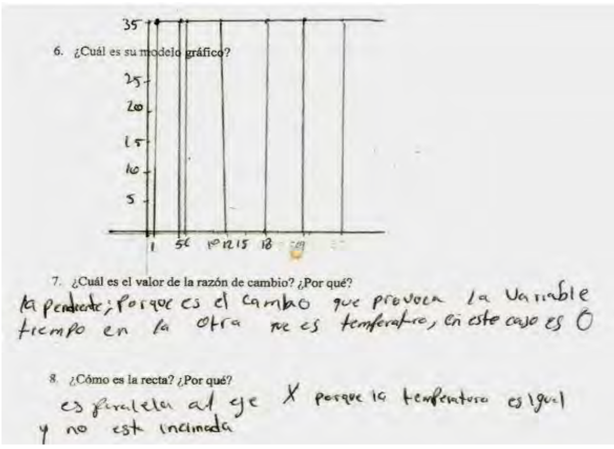


Figura 2. Anotaciones de Mariana

A posteriori:

Mariana: No hay razón de cambio porque no hay inclinación, es una recta paralela a las equis

Análisis

Los estudiantes luego de un consenso concluyen que la razón de cambio es cero debido a que la recta no presenta inclinación, otros argumentan que la razón de cambio es la pendiente con valor de cero debido a que la temperatura se mantuvo constante. Todos coinciden que la gráfica que se forma es horizontal o paralela al eje *x* e indican de manera gráfica en su mayoría que la temperatura es de 35° desde las cero horas a excepto del equipo 3 se observó que su gráfico no inicia a partir de los cero grados.

Conclusiones

En este trabajo se muestran los resultados preliminares de la puesta en escena de diseños de aprendizaje basados en situaciones sociales cotidianas. Se muestra cómo los estudiantes reconocen las variables que intervienen en el problema planteado vía la numerización, construyen tabla de datos, identifican las características de la tabla relacionándola con el problema y con la gráfica, transitando en la red de modelos numérico, gráfico y algebraico.

Sin embargo a pesar de haber participado en la modelación del estiramiento del resorte, no lograr encontrar el modelo algebraico de manera análoga en el segundo problema. No así en el problema de la temperatura de la incubadora.

En las actividades que se presentan en este estudio el estudiante interactúa con diversos fenómenos, esta interacción es indispensable para la modelación. La experimentación puede ser mental, cuando los datos se dan, presencial cuando se experimenta directamente y virtual cuando se experimenta a partir de simulaciones por medios electrónicos, por ejemplo con el Laboratorio Virtual de Ciencias.

No hay modelación sin interacción con un fenómeno, esta es parte indispensable, pues para modelar hay que asociar el fenómeno, lo modelado, con los modelos. Inicialmente esta interacción es la experimentación.

Como parte del grupo de profesores-estudiantes del proyecto de Laboratorio Virtual de Ciencias como herramienta didáctica para el proceso de enseñanza-aprendizaje, la presente investigación, así como el compartir experiencias con colegas de América Latina ha sido demás una experiencia enriquecedora que nos motiva a contribuir con el desarrollo social de la región de Costa Chica del Estado de Guerrero en México, aplicando y generando nuevos diseños de aprendizaje tendientes a aproximar las prácticas escolares con las prácticas del entorno.

Referencias Bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Lasprácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis de doctorado no publicada. Centro de investigación y de estudios avanzados del IPN. México.

Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. En L. Díaz Moreno (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17,* 1 – 9. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Galicia A., Díaz L., Arrieta J. (2011). Práctica social de modelación del ingeniero bioquímico: Análisis microbiológico. *En resúmenes de la XII Conferencia Interamericana de Educación Matemática*.

García, C. (2011). *Prácticas y herramientas matemáticas en situaciones con ruido en los datos.* Tesis de maestría no publicada. Universidad Autónoma de Guerrero. México.

López, C. (2010). *Las prácticas de modelación virtual, un estudio intercultural*. Tesis de maestría no publicada. Universidad Autónoma de Guerrero. México.

LOS USOS DE LAS GRÁFICAS EN EL BACHILLERATO DE UNA COMUNIDAD SORDA

Claudia Leticia Méndez Bello, Francisco Cordero Osorio
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, IPN México
clmendezb@cinvestav.mx, fcordero@cinvestav.mx

Resumen. En este escrito centramos nuestra atención en la problemática educativa de la Comunidad Sorda, ésta con características, cultura y lengua propia. Se pretende responder ¿Cuáles son los usos de las gráficas de un estudiante Sordo de bachillerato? Partiendo de la funcionalidad del conocimiento matemático en su condición de Sordo, a través de sus usos. Para ello, descansamos en la perspectiva Socioepistemológica que nos permite una visión diferente de la problemática además de diversos constructos teóricos, dado que da cuenta de la construcción social del conocimiento matemático de una comunidad basándose en la funcionalidad de éste.

Palabras clave: sordos, comunidad, usos

Abstract. In this paper we are focusing on the educational problematic of the Deaf Community, it features its own culture and language. It seeks to answer, what are the uses of graphs of a deaf student at high school, based on the functionality of mathematical knowledge as Deaf, through their uses. To do this, us we based in the socioepistemologic perspective that allows us a different view of the problem as well as various theoretical constructs because it gives account for the social construction of mathematical knowledge of a community based on the functionality of that knowledge.

Key words: deaf, community, uses

Introducción

En el año 2005, a partir de la aparición de la Ley General de personas con Discapacidad, se reconoció a los sordos como miembros de una comunidad con cultura y lengua propia, denominada entonces como Comunidad de sordos. Cabe señalar que, si bien se le dota de un status de comunidad, por las características mencionadas, ésta considera a toda persona con alguna afección auditiva pese a que la Lengua de Señas Mexicana no sea su medio de comunicación. En este escrito se distinguirá grosso modo entre Comunidad de sordos y Comunidad Sorda.

Por otro lado, en el ámbito educativo, los niños, niñas y jóvenes sordos reciben atención educativa por diversas instituciones públicas y privadas, estas últimas con altos costos. Sin embargo, la Secretaría de Educación Pública generó organismos de apoyo a la educación regular para estudiantes con alguna discapacidad.

Dicha atención educativa está basada en Planes y Programas de estudios generados para estudiantes normoyentes, por lo que cabe preguntarse si ésta es adecuada para estudiantes sordos sí sólo ha tenido algunos cambios que pudieran no ser significativos dado que no ha sido generada *desde* las necesidades educativas de las personas con discapacidad auditiva, sino que sólo, en algunos casos, han tenido "adecuaciones" *para* ellos.

Por ello, generar propuestas educativas, acorde a las necesidades educativas de las personas sordas, tiene cierta complejidad y no debe trivializarse, por lo que debe considerarse la gran diversidad de características físicas y educativas que implica la sordera, y no porque conlleven deficiencias en comparación con estudiantes no sordos, sino más bien porque implica características que le son propias a esta comunidad, como comunidad constructora de conocimiento matemático.

Algunas características de la Comunidad Sorda

Presentamos algunos datos de la población con alguna discapacidad, antes de referir a la problemática educativa y el marco teórico que nos permite una mirada y explicación distinta hacia ésta.

A partir de la aparición de la Ley General de personas con Discapacidad en el 2005, se dota de derechos a las personas con discapacidad auditiva, así como de un status de comunidad reconociendo una cultura y lengua propia, la Lengua se Señas Mexicana (LSM), pese a que ésta no necesariamente sea su medio de comunicación. Por otro lado, la Comunidad Sorda deberá entenderse como una comunidad de sordos, donde su característica principal recae en una Cultura Sorda, así como la lengua que le es propia a ésta, en términos generales, que tiene su propia forma de ser y hacer dada su condición de sordo señante. Algunos autores que fortalecen este constructo son: Fridman (1999); Oviedo (2001); Jullian (2002); Segura (2007), entre otros.

Por otro lado, la Comisión Nacional de Derechos Humanos (CNDH) estima basándose en cifras de la Federación Mundial de Sordos, que el 80% de las personas sordas que viven en países en vías de desarrollo no reciben educación alguna.

En México, cada año nacen 4000 niños con sordera (García, sf), y sólo el 10% recibe educación, discapacidad que ocupa el cuarto lugar entre los diferentes tipos de discapacidad. Y según datos del INEGI (2000), existen 11 580 niños y niñas con discapacidad auditiva en una edad entre los 5 y los 9 años, 13 181 en una edad entre los 10 y los 14 años; de estos grupos de edad, aproximadamente entre 12 000 y 13 000 niños y niñas están en educación primaria y no recibieron una educación bilingüe como lo establece la ley.

Cabe mencionar, que en México es hasta diciembre del 2010 cuando se certificó la labor del intérprete de LSM, por lo que nos demuestra la viabilidad de que en las aulas de clase se brindará una educación bilingüe.

No por eso el niño, niña y joven sordo no ha tenido atención educativa. Existen instituciones encargadas de dar dicha atención a personas con discapacidad auditiva, y éstas son del tipo gubernamental y no gubernamental. Estas últimas obedecen a diferentes filosofías de enseñanza. Es decir, priorizan diferentes aspectos como: el uso de la LSM; la lectoescritura del español; algunas otras, dan espacio tanto al español como a la LSM, además de otras lenguas o idiomas, por ejemplo el inglés. Por otro lado, los maestros pueden tener especialidad en diferentes áreas, como lo es la lingüística, psicología, o bien, maestros oyentes (con o sin intérprete), maestros sordos, maestros bilingües, etc.

La Secretaría de Educación Pública (SEP) ofrece atención a personas con discapacidad, sea el caso de las Unidades de Servicio de Apoyo a la Educación Regular (USAER), la cual ubica a maestros de educación especial, denominados maestros de apoyo, en escuelas regulares para apoyar, escolarmente, a los niños sordos y a otros niños con otras discapacidades con o sin Necesidades Educativas Especiales (NEE); los Centros de Atención Múltiple (CAM), los cuales pueden ser escolarizados (para niños que debido a su discapacidad y a sus NEE no pueden ser incluidos en la escuela regular) o de atención complementaria (para niños con alguna discapacidad que asisten a la escuela regular y en turno contrario reciben apoyo de acuerdo a sus NEE), entre otras.

Sin embargo, esta atención educativa no ha sido generada *desde* las necesidades educativas de las personas con discapacidad auditiva, sino que han sido generadas *para* ellos pero basándose en los Programas y Planes de estudio generados para las personas no sordas. Por ello, generar propuestas educativas, acorde a las necesidades educativas de la Comunidad Sorda, tiene un status de complejidad y no debe trivializarse, por lo que debe considerarse la gran diversidad de características físicas y educativas que implica la sordera, y no porque conlleven deficiencias en comparación con estudiantes no sordos, sino más bien porque implica características que le son propias a esta comunidad, como comunidad constructora de conocimiento matemático.

Sin embargo, en México existe poca investigación realizada con esta población en el ámbito educativo la cual pudiera fundamentar propuestas acordes a la comunidad. Hay una notable diferencia de lo realizado en México respecto a algunos países europeos.

Algunas experiencias educativas con estudiantes sordos las podemos conocer a través de Rosich, Núñez y Fernández (1996), donde se expone una visión general de la sordera y la educación del sordo, descrito a través de diversos autores. Por citar algunos ejemplos, Oléron reporta que, “de todos los niños físicamente deficientes, los sordomudos son los que plantean problemas educativos más graves”, y en algunas ocasiones, el déficit auditivo está acompañado de otras afecciones de índole psicológico, emocional, etc. Sin embargo, como lo señala Wood, “no hay, efectivamente, datos convincentes que sugieran que la sordera sea la causa de ninguna limitación necesaria, esencial, en el desarrollo del pensamiento racional”.

Por otro lado, señala que las habilidades de las personas sordas son similares a las de los oyentes y que en un número significativo de niños sordos padecen retrasos escolares que oscilan entre uno y tres años respecto a sus compañeros oyentes.

En México se hace notaria la diferencia de edad, de personas sordas y personas oyentes que ingresan a una educación del Nivel Medio Superior (NMS). Por ejemplo, la edad de los estudiantes oyentes aspirantes a ingresar a una institución de NMS, oscila entre los 14 y 15 años, en nuestro caso, los estudiantes sordos aspirantes a ingresar a un bachillerato oscila entre los 17 y 27 años de edad.

Problemática educativa de la Comunidad Sorda

El Sistema Educativo, dotado de un estatus homogéneo, no responde a las necesidades educativas de grupos minoritarios con características diferentes al grueso de la población. Los Planes y Programas de Estudio, así como los materiales didácticos de apoyo al quehacer docente, son generados para normoyentes, por lo que, además de no responder a las necesidades educativas de los estudiantes sordos, los excluyen.

La inexistencia de investigación educativa que identifique o caracterice la funcionalidad del conocimiento de la Comunidad Sorda, aleja la posibilidad de dar una educación que responda a sus necesidades educativas. Por ello, interesa conocer cuál es el *uso* del conocimiento matemático de dicha comunidad, dada su importancia para la generación de propuestas y políticas públicas inclusivas.

Al colaborar, en la Secretaría de Educación del D.F. en algunos cursos de matemáticas con carácter pre-propedéutico para estudiantes sordos aspirantes a un bachillerato en línea, se hace notoria la complejidad de éste, dadas las necesidades y características de los estudiantes. Ellos habían intentado ingresar a otro bachillerato, sin embargo, las evaluaciones estandarizadas que se realizan para tal ingreso están alejadas a la realidad de la Comunidad Sorda, y este bachillerato en línea no era la excepción, dada la manera natural de comunicación y las dificultades que, en particular estos estudiantes, presentan respecto a la lecto-escritura del español, característica técnica clave de dicho bachillerato.

Es decir, el Sistema Educativo en su carácter homogéneo atiende al grueso de la población y excluye a las minorías, por lo que es de suma importancia identificar y caracterizar las necesidades educativas de los jóvenes Sordos, más aún, caracterizar cómo usan el conocimiento matemático. Si bien esta investigación no responderá de manera inmediata a esto, se plantea la necesidad de hacer investigación en Matemática Educativa que de cuenta de la funcionalidad del conocimiento matemático de la Comunidad Sorda. Para tal efecto, nos preguntamos cuál es el uso de las gráficas de estudiantes Sordos de NMS.

Marco Teórico

El objeto de esta investigación es el *uso* de las gráficas y su desarrollo, como la práctica institucional que norma el sentido y la funcionalidad de la matemática.

Dado el cuestionamiento planteado y en función de la problemática educativa que describimos, referiremos a la perspectiva socioepistemológica. Ésta nos dota de diferentes elementos teóricos, además de una visión diferente de la problemática a tratar, dado que, no mira a los conceptos por si mismos sino que trata con las prácticas que generan tales conceptos. Es decir, da cuenta de la construcción social del conocimiento matemático, por medio de prácticas sociales. La perspectiva teórica asume a las prácticas sociales como las acciones de un grupo social que tiene significados propios e intención, ubicado en un contexto histórico o actual que actúan de acuerdo a ideologías predominantes en ese momento y utilizan a la matemática como herramienta para construir conocimiento (Cordero, 2001).

Además, investigaciones realizadas en Matemática Educativa, nos proporcionan un Marco de Referencia sobre *usos de las gráfica*, como lo son Flores (2005) y Cen (2006) que identifican Categorías de Usos de Gráficas (CUG), al analizar algunos elementos del discurso matemático escolar (dME) del NB y NMS, respectivamente. Cabe destacar que estas investigaciones se realizaron con estudiantes normoyentes, además consideran Planes y Programas de estudio, y libros de texto generados para la escuela regular.

En Flores (2005) se considera, a partir de un análisis del dME a través de los libros de texto del NB, a la graficación como una práctica social en su proceso institucional. Como resultado de dicho análisis, identificó y caracterizó tres momentos del uso de las gráficas: del *uso del síntoma de la gráfica de la función* (curricularmente no se trata el concepto de gráfica, sin embargo, los libros de texto presentan actividades que usan gráficas alusivas a lo que posteriormente se le llamará gráfica de una función), del *uso de la gráfica de la función* (curricularmente se menciona la palabra gráfica, sin hacer alusión al concepto de función, y en los libros de texto se presentan actividades cuyos usos manifiestan tablas, pictogramas, gráficas de barras, gráficas poligonales y de sectores con escalas en los ejes de referencia) y el del *uso de la curva* (manifiesta el comportamiento de las curvas de las funciones, curricularmente es declarado el concepto de función). El siguiente esquema muestra las CGU identificadas en los primeros dos momentos.

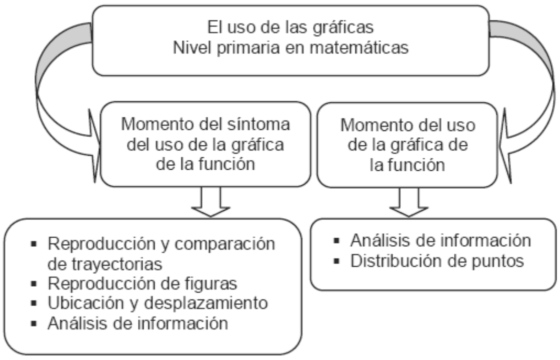


Grafico 1. Usos de las gráficas en NB (Cordero y Flores, 2007)

Y el siguiente esquema muestra las categorías identificadas en los tres momentos en el NB.

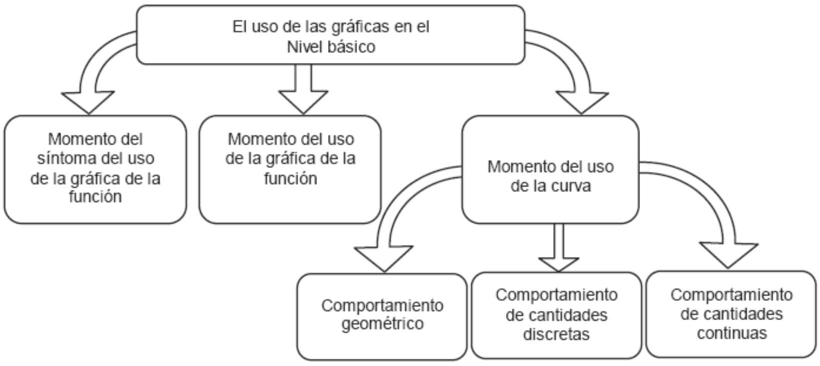


Grafico 2. Usos de las gráficas en libros de texto de NB (Cordero y Flores, 2007)

Por otro lado, Cen (2006) reporta que a partir de realizar una investigación respecto al uso de las gráficas en el NMS, existe un gran bagaje de gráficas en los libros de texto, por lo que se propuso entender la función de ese universo de gráficas en las prácticas institucionales. Para ello, analizó los usos de las gráficas en los libros de texto y en las experiencias escolares de los estudiantes, es decir, analizó los programas de estudio del bachillerato del Instituto Politécnico Nacional con el fin de conocer el estatus epistemológico de las gráficas y el momento en que aparecen curricularmente con el fin de caracterizar el uso de la gráfica en tanto su funcionamiento y su forma.

Con base en tal análisis identificó seis CUG: *distribución de puntos*, *comportamiento geométrico*, *análisis de la curva*, *cálculo de área*, *cálculo de volumen* y *análisis de información*. Así identificó, además sus desarrollos en los argumentos de los estudiantes en una situación específica. Enseguida un diagrama que resume las CUG identificadas en el NMS.

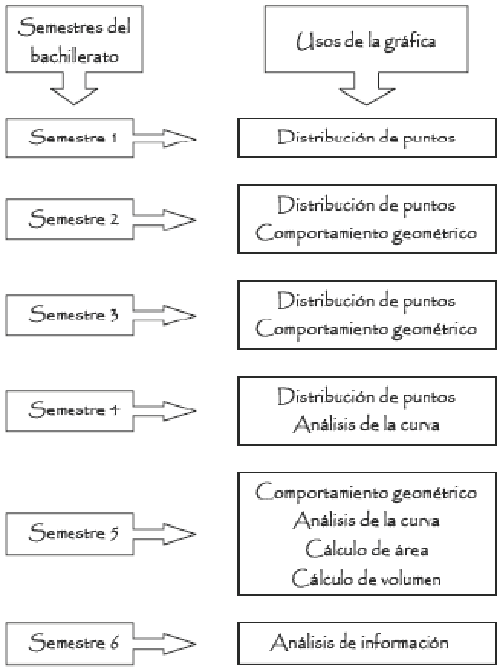


Grafico 3. Categoría de Usos de las gráficas identificadas en NMS (Cen, 2006)

Los análisis efectuados, por ambas autoras, en el dME en el NB y NMS nos proporcionan un marco de referencia respecto al uso de las gráficas. Esto nos permitirá identificar los *usos* de las gráficas de estudiantes sordos del NMS, que si bien el *funcionamiento* pudiera ser el mismo, la *forma* no necesariamente lo sea, dadas las características de la población. Se espera obtener evidencia de esto a partir de las producciones de algunos estudiantes Sordos de bachillerato, teniendo como instrumento una situación diseñada con base en dicho marco de referencia. Sin embargo, para ello se requiere precisar algunas cuestiones técnicas, así como la metodología para ello.

Reflexiones finales

Dado que esta es una investigación en proceso, no se presentan conclusiones. Sin embargo, cabe hacer mención del carácter de ésta, al mirar, con una perspectiva socioepistemológica, la problemática educativa de la Comunidad Sorda. Al poner atención en cómo construye conocimiento matemático un estudiante sordo, dando cuenta de la funcionalidad del conocimiento matemático a través de sus usos. Y considerar a un colectivo de sordos como comunidad y no sólo por tener una lengua y cultura propia, sino como comunidad constructora de conocimiento matemático, matizado por la identidad de la comunidad.

Referencias bibliográficas

Cen, C. (2006). *Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato.* Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcción del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 4(2), 103-128.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 10 (1), 7-38.

Flores, R. (2005). *El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Fridman, B. (1999). La comunidad Silente de México. *Viento del Sur*, No. 14. México: D.F., México.

García, M. (sf). ¿Discapacidad o Cultura?. Recuperado el 30 de abril de 2012 de http://www.imipens.org/EXTENSO/MARGARITAGARCIA.pdf

INEGI, (2000). *Discapacidad en México*. Recuperado 5 de abril de 2010 de http://cuentame.inegi.gob.mx/impresion/poblacion/discapacidad.asp

Jullian, C. (2002). *Génesis de la comunidad silente en México. La Escuela Nacional de Sordomudos (1867 a 1886)*. Tesis de Licenciatura no publicada, Universidad Nacional Autónoma de México. México.

Oviedo, A. (2001). Algunas reflexiones acerca de las personas Sordas y sus lenguas. En: Patiño, L.M., A. Oviedo y B. Gerner de García (eds.) *El estilo sordo. Lecturas acerca de la cultura y la lengua de los sordos.* Cali, Universidad del Valle, pp.189-203.

Rosich, N., Núñez, J. M. y Fernández, J. E. (1996). *Matemáticas y deficiencia sensorial*. Madrid: Síntesis, 26.

Segura, L. (2007). L*a educación de los sordos en México: controversia entre los métodos educativos, 1867-1902*. Recuperado el 4 de abril de 2007 de http://www.cultura-sorda.eu

UNA REFLEXIÓN SOBRE LA DIVERSIDAD Y LA MATEMÁTICA ESCOLAR COMO ELEMENTOS DE EQUIDAD EDUCATIVA

Erika Canché, Claudia Méndez, Teresa Parra, Francisco Cordero
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, IPN México
emcanche@cinvestav.mx, clmendezb@cinvestav.mx

Resumen. Presentamos una reflexión basada en la diversidad escolar como una problemática de los sistemas educativos actuales. A modo de particularizar y evidenciar nuestra postura, elaboramos una discusión alrededor de tres perspectivas del problema. Resaltamos el rol de la matemática en cada una de ellas y la necesidad de realizar investigaciones al interior de cada una de las poblaciones descritas. Nos interesa reflexionar sobre el rol del discurso matemático escolar en contraste con la diversidad escolar, bajo la hipótesis de que el primero no considera las características de los estudiantes, contexto, cultura, factores que la propician. Referiremos a dicha diversidad escolar, tras el análisis de tres comunidades desatendidas por el sistema educativo: los(as) niños(as) con talento cuyas mismas capacidades superiores los aíslan de una educación diferenciada y por el otro, los(as) niños(as) Sordos(as) y niños(as) indígenas, cuya condición física o socioeconómica los determina con rezago educativo.

Palabras clave: talento, discapacidad auditiva, indígenas, equidad

Abstract. We present a reflection based on the diversity at school as a problem of current education systems. A way to segment and highlight our position, we developed a discussion about three perspectives on the problem. We emphasize the role of mathematics in each of them and the need for research within each of the populations described. We are interested to reflect on the role of school mathematical discourse in contrast to diversity at school under the assumption that the former does not consider student characteristics, context, culture, factors that propitiate it. We'll make reference this diversity at school, following the analysis of three communities underserved by the educational system: Talented children whose superior capacities isolates them from a differenciated education, indigenous children and the deaf children.

Key words: talent, hearing impairment, indigenous, equit

Introducción

La educación es un derecho constitucional según lo establece el artículo 3º de la Constitución Mexicana, en el cual se estipula que todo individuo tiene derecho a recibir educación. Sin embargo, lograr que todo individuo haga uso de este derecho es aún más complicado, por tal motivo las autoridades educativas han optado por privilegiar acciones para elevar los promedios de escolaridad de la población. Dado que éste es un indicador del progreso de cada uno de los países. La educación y, en particular, la educación básica se han constituido para fomentar el progreso personal y social en pro de combatir la desigualdad social (SEP, 2002). Pero, a pesar de la expansión de la cobertura y del aumento de la escolaridad de la población, la justicia educativa aún no se alcanza, pues cada vez se hace más fuerte la diferenciación entre la población marginada y el resto de la población del país: … *mientras un sector de la población alcanza cada vez más altos grados de escolaridad subsisten sectores de población que no acceden a la educación básica o que desertan de la misma desde muy temprana edad* (SEP, 2002).

Evidencia de esto es que la mayoría de las niñas y niños que no tienen acceso a la educación, pertenecen a poblaciones indígenas; rurales aisladas o con discapacidad, con un menor acceso. Esto configura diferentes problemáticas de corte educativo que se vuelven fundamentales en términos de equidad y calidad en la educación.

Al hablar de calidad, como menciona Blanco (2006), es la base de una sociedad justa e igualitaria. Y que difícilmente podría separarse de la equidad. Entendamos a ésta no sólo como igualdad de acceso, sino que la educación ofertada debe ser de calidad y logre que todas las personas desarrollen al máximo sus múltiples talentos y capacidades. Para ello, consideramos que ésta debe responder a la diversidad escolar.

La falta de atención a la diversidad escolar, es una de las principales críticas que recibe el Sistema Educativo actual al dar respuesta homogénea a poblaciones escolares heterogéneas. Dado que separa a los estudiantes de sus condiciones culturales, socioeconómicas o, incluso, obviando las capacidades que los caracterizan. Esto segrega a los estudiantes al interior del aula, que ya reciben una educación formal, y además los separa de las comunidades marginadas que aún no se escolarizan.

Como lo habíamos mencionado, la educación contemporánea se enfrenta a lograr que los actores reciban una educación de calidad, cuyo rasgo esencial es la equidad en la oferta educativa. Se vuelve entonces, fundamental, la atención de todas las problemáticas inmersas en el tratamiento educativo. En términos de justicia educativa (SEP, 2002) es fundamental que todos, alumnas y alumnos, independientemente de su origen étnico, ambiente familiar de procedencia o características individuales, participen en experiencias educativas que propicien el *desarrollo* máximo posible de sus *potencialidades*.

Para Blanco (2006) la educación inclusiva implica una transformación radical en los paradigmas educativos vigentes desde un enfoque basado en la homogeneidad a una visión de educación común basada en la heterogeneidad. Esto establece la necesidad de una reflexión sobre los factores involucrados en la diversidad escolar como problemática fundamental en contraste con los contenidos curriculares que pueden propiciar esta segregación, así como las características propias de la población a la que se oferta dicha educación. Un ejemplo de los contenidos curriculares, que provocan esta segregación, son los que se presentan en la matemática escolar, ya que son contenidos que no problematizan las características propias de la población a la que se oferta dicha educación. En este sentido, Soto (2010) menciona que el profesor o el estudiante aparecen como los únicos responsables del desinterés o de los bajos rendimientos en la materia. Sin embargo, demuestra que la problemática no se reduce a los problemas cognitivos o didácticos, sino que puede ser la misma Matemática Escolar quien excluye.

La diversidad escolar la situamos en tres comunidades desatendidas por el sistema educativo. Por un lado se encuentran los niños con talento cuyas mismas capacidades superiores los aíslan de una educación diferenciada y por el otro, los niños Sordos e indígenas, cuya condición física o socioeconómica los determina con rezago educativo. En este escrito presentamos el panorama sobre el cual evidenciamos esta problemática.

La alta capacidad como factor de exclusión. El caso del Talento en Matemáticas

La escuela, en su estructura actual, favorece la individualidad por encima de la colectividad en el aprendizaje y desarrollo de las capacidades de los estudiantes, resultando contrastes entre lo que se es capaz de hacer o no en el ámbito académico. Por lo que se promueve un aprendizaje basado en la individualidad, en continua valoración con las capacidades de sus pares y eliminando rasgos de construcción colectiva.

Para los educadores se trata de determinar el rendimiento académico, el cual consideramos está fuertemente basado en la noción de inteligencia predominante: aquella cuyo carácter es estático y por tanto medible mediante diversas evaluaciones y, donde el conocimiento y su nivel de apropiación (evidenciada en una calificación), clasifican a los estudiantes. Por otra parte, el conocimiento científico asociado tiene un rol indiscutible e importante, en especial la lingüística y el razonamiento lógico-matemático ya que el nivel de desempeño que demuestre un individuo tener, determinará en gran medida su éxito escolar ya que pareciera que la escuela promueve su aprendizaje.

Bajo ésta visión, la evaluación de procesos asociados a la resolución de problemas darán como resultado el reconocimiento de los mecanismos propios del funcionamiento intelectual del individuo, en contraste con lo evidenciado en la media de la población. Es cuando, aceptando el desarrollo conceptual, se distingue y valora la superdotación o la genialidad.

Aún las investigaciones actuales sobre la estructura y origen de la inteligencia reconocen la importancia e influencia de factores socioculturales, pareciera que la falta de sistematicidad al respecto, no permite que la noción de Talento se vea afectada y asociada a aspectos que en su misma conceptualización se favorecen: su desarrollo y su rol coletivo.

Aceptar éstas características, supone el análisis de un importante debate entre dos procesos: el de aprendizaje y el de desarrollo intelectual, que a su vez conllevan a una discusión aún más puntual:

- Lo natural, en contraste con lo obtenido por la crianza y resultante de la interacción de lo genético y lo experiencial.
- En el mismo sentido, las capacidades ¿son innatas y heredables o se pueden aprender?
- Por último, este aprendizaje ¿es individual o es colectivo?

Nuestra crítica fundamental es que lo natural, lo heredable y lo individual caracterizan una propuesta educativa actual. Es necesaria una reflexión basada en la sistematización de lo experiencial, con lo aprendible y lo colectivo como una alternativa de concebir el talento y su potencialización en las aulas.

El talento en matemáticas ha sido muy pocas veces tratado en las investigaciones del campo, posiblemente por la complejidad de explicarlo. Es evidente la demanda por generar propuestas educativas que sistematicen las diferentes aproximaciones teóricas al término.

Creemos importante resaltar que las matemáticas no son ni deben ser únicamente un referente, sino que la concepción de su misma naturaleza en el ámbito escolar es un eje de discusión tanto para la conceptualización y tratamiento educativo del talento. Postulamos que el uso manifestado sobre las matemáticas determinará el talento, pues este conocimiento genera experiencias académicas particulares, es relativo a la comunidad y es construido (en escenarios escolares y no escolares) socialmente.

La discapacidad como factor de exclusión. El caso de la Comunidad Sorda

Las personas sordas han sido foco de atención de diversas disciplinas, especialmente de la Medicina. Mirar al sordo desde esta perspectiva, nos dará una imagen de la persona, como cualquier otra, pero con una deficiencia física, o discapacidad. Por lo que, necesita medicamentos o intervención quirúrgica, según sea la afección. Sin embargo, ver al sordo como una persona con discapacidad no es aceptado por todos los sordos. Existen grupos u organismos que luchan porque sean considerados como un grupo con características, cultura y lengua propia, la Lengua de Señas Mexicana (LSM). Por lo que, deben ser reconocidos como Comunidad Sorda (Oviedo, 2001).

En México, en el ámbito legislativo, a partir de la aparición de la Ley Federal de personas con Discapacidad en el 2005, se tuvo algunas consideraciones a dicha comunidad, así como una caracterización y reconocimiento a ésta como comunidad de sordos, siendo equiparable a una comunidad indígena, con características, cultura y lengua propia.

La Comisión Nacional de Derechos Humanos (CNDH) estima que el 80% de las personas sordas que viven en países en vías de desarrollo no reciben educación alguna. A pesar de que la Ley General de las Personas con Discapacidad establece textualmente, en el Artículo 10, inciso VIII "Garantizar el acceso de la población sorda a la educación pública obligatoria y bilingüe, que comprenda la enseñanza del idioma español y la Lengua de Señas Mexicana. El uso suplementario de otras lenguas nacionales se promoverá cuando las circunstancias regionales así lo requieran". Sin embargo, según datos del INEGI (2000), existen 11 580 niños y niñas con discapacidad auditiva en una edad entre los 5 y los 9 años, 13 181 en una edad entre los 10 y los 14 años; de estos grupos de edad, correspondiente al Nivel Básico, cerca de 13 000 no recibieron una educación bilingüe como lo establece la ley.

Cabe mencionar, que en México en el mes de Diciembre de 2010 se entregaron las primeras constancias de certificación a la labor de interpretar de LSM al español, y viceversa, es decir, antes de eso ni una persona era reconocida por tal labor, a pesar de que la LSM era considerada como lengua propia de la comunidad de sordos y patrimonio nacional, por ser una lengua natural. Entonces, cómo podría darse una educación bilingüe, dadas estas condiciones.

A pesar de ello, los sordos han recibido atención educativa. La Secretaría de Educación Pública generó organismos que ofrecen atención a personas con discapacidad. Ejemplo de ello son: Las Unidades de Servicio de Apoyo a la Educación Regular (USAER), ubicando a maestros de educación especial en escuelas regulares para apoyar escolarmente, a niños con discapacidad; los Centros de Atención Múltiple (CAM), los cuales pueden ser escolarizados o de atención complementaria, entre otras. Sin embargo, los Planes y Programas de Estudio, así como los materiales didácticos de apoyo al quehacer docente, son generados sin tomar en cuenta las características y necesidades de la Comunidad Sorda, por lo que, además de no responder a las necesidades educativas de los estudiantes sordos, los excluyen.

Es por ello que se hace evidente la gran necesidad de generar investigación educativa que dé cuenta de la funcionalidad del conocimiento matemático en su condición cotidiana de Sordo. Y así generar propuestas y políticas educativas desde las necesidades y características propias de la Comunidad Sorda, reconociendo a ésta como comunidad constructora de conocimiento matemático, y no sólo adecuar los materiales existentes en el Sistema Educativo actual, para dicha comunidad.

La diversidad cultural como factor de exclusión. El caso de las comunidades indígenas

La constitución política Mexicana reconoce al país como pluricultural, que se sustenta originalmente en sus pueblos indígenas que son aquellos descendientes de poblaciones que habitaban en el territorio actual del país.

Con respecto a la educación indígena en México, la Constitución Mexicana establece:

- Preservar y enriquecer sus lenguas, conocimientos y todos los elementos que constituyan su cultura e identidad.
- Garantizar e incrementar los niveles de escolaridad, favoreciendo la educación bilingüe e intercultural, la alfabetización, la conclusión de la educación básica, la capacitación productiva y la educación media superior y superior. Establecer un sistema de becas para los estudiantes indígenas en todos los niveles. Definir y desarrollar programas educativos de contenido regional que reconozcan la herencia cultural de sus pueblos, de acuerdo con las leyes de la materia y en consulta con las comunidades indígenas. Impulsar el respeto y conocimiento de las diversas culturas existentes en la nación.

Con todo esto los resultados son: en México, por cada 100 indígenas, 24 no estudian; 25 no terminaron la primaria; 19.5 lograron acabar la primaria; mientras que 19.2% estudiaron hasta la secundaria. Sólo 11 de cada 100 indígenas cursaron educación media superior. Según datos del Coneval (Consejo Nacional de Evaluación de la Política de Desarrollo Social) (*Llegan a 5.4 millones los indígenas pobres: Coneval,* 2011)

Ser indígena en México es sinónimo de pobreza, marginación y racismo. Navarrete (2008) señala que en México en muchos círculos sociales la palabra indio es sinónimo de "atrasado", "ignorante" e incluso "tonto" y se utiliza como insulto. Es frecuente que en muchas ciudades del país los indígenas son mal tratados y discriminados por hablar una lengua diferente, vestirse de manera diferente a los mestizos o por sus rasgos físicos. Lo cual les afecta en cuanto al acceso a servicios, trabajos y oportunidades de mejoramiento que sí están disponibles para otros mexicanos.

La barrera del racismo no permite comprender las complejas realidades de estos pueblos, para valorarlos y darles el lugar que ellos merecen.

Según Ramírez (2006) el concepto de "La educación indígena" nace a partir del encuentro entre indios y españoles y cuando aparece el deseo de transformar a los habitantes originarios del país en algo diferente o cuando se les define desde categorías ajenas a sus culturas. A partir de ese momento, del conocimiento de la existencia del indio y visto como un ser inferior a los conquistadores inicia el pensamiento de redimirlo, de educarlo, de conquistarlo. La educación indígena siempre se ha referido a aquello que se considera que los indígenas deben saber, y no a la instrucción o enseñanza que los indios mismos imparten o impartieron. Desde siempre, hablar de educación indígena supone una apreciación externa de sus culturas.

En el caso de los temas matemáticos, no se reconocen sus actividades cotidianas dentro de la propuesta educativa, se soslayan sus conocimientos, dándoles poco reconocimiento. Un ejemplo de que en las actividades propias de los indígenas podemos encontrar conocimiento matemático, es el caso de otomíes de la Sierra de Puebla que están establecidos en la Capital de País por mejores oportunidades. Ellos se dedican a la venta y elaboración de artesanías hechas con chaquiras. Muchos de ellos son analfabetos, sin embargo realizan trabajos como los siguientes:

Figura 1. Trabajos realizados por indígenas artesanos.

En donde está presente la simetría, contar, medir, construir figuras geométricas.

Así mismo la práctica de la compra-venta les permite estar en constante contacto con cantidades con las cuales realizan operaciones básicas como la suma, resta, multiplicación y división. Sin embargo, al realizar las operaciones con el empleo de algoritmos como se enseñan en las escuelas, se enfrentan con dificultades.

En este sentido, el uso de las matemáticas es propia de su cultura y por la práctica para su sobrevivencia, como lo es el trabajo con la chaquira y la compra-venta, respectivamente. La cantidad adquiere sentido en el trabajo con la chaquira, en la medida, en el conteo, en los diseños. Así como en la compra de sus materiales, en establecer precios y en la venta de sus artesanías. Sin embargo, el conocimiento adquirido en estas prácticas es poco valorado y reconocido.

Reflexión final

Con este panorama de base y con el rol del discurso matemático escolar como eje, conformamos una crítica sobre la necesidad de realizar investigación tomando en cuenta la diversidad de las aulas sin estandarizarla ni obviarla. Son justamente las características de los estudiantes, su contexto, sus condiciones socioeconómicas las que han sido soslayadas de cualquier política educativa. Sostenemos la hipótesis de que existe potencialidad en la diversidad escolar y lo importante es encontrar mecanismos educativos estructurales basados en experimentación previa para que la inclusión de las y los estudiantes en las aulas sea más que una mera escolarización sino que desarrollen al máximo sus capacidades.

Referencias bibliográficas

Blanco, G. (2006). La equidad y la inclusión social: Uno de los desafíos de la educación y la escuela hoy. *REICE-Revista Electrónica Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación,* 3, 1-15.

INEGI, (2000). *Discapacidad en México*. Recuperado 7 de agosto 2010 de http://cuentame.inegi.gob.mx/impresion/poblacion/discapacidad.asp

Llegan a 5.4 millones los indígenas pobres: Coneval, (sf). Recuperado el 9 de agosto de 2011 de http://www.proceso.com.mx/?p=278195

Navarrete, F. (2008). *Los pueblos indígenas de México.* México: CDI.

Oviedo, A. (2001). Algunas reflexiones acerca de las personas Sordas y sus lenguas. En: L.M. Patiño, A. Oviedo y B. Gerner de García (Eds), *El estilo sordo. Lecturas acerca de la cultura y la lengua de los sordos*. (pp. 189-203). Cali: Universidad del Valle.

Ramírez, E. (2006). *La Educación indígena en México*, México D.F., UNAM.

SEP (2002). *Programa Nacional de fortalecimiento de la educación especial y de la integración educativa*. Recuperado el 9 de agosto de 2011 de http://conadis.salud.gob.mx/descargas/pdf/ProgNalEducEsp.pdf

Soto, D. (2010). *El Discurso Matemático Escolar y la Exclusión. Una Visión Socioepistemológica*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

PROFESIONALIZACIÓN Y EMPODERAMIENTO DOCENTE EN MATEMÁTICAS: UNA MIRADA DESDE LA TEORÍA SOCIOEPISTEMOLÓGICA

Daniela Reyes-Gasperini, Ricardo Cantoral-Uriza
Cinvestav-IPN México
dreyes@cinvestav.mx, rcantor@cinvestav.mx

Resumen. Este reporte de investigación se basa en la Teoría Socioepistemológica, analiza y caracteriza el proceso de empoderamiento docente considerándolo un factor de aprendizaje basado en la construcción social de conocimiento. Se parte de la hipótesis de que la problematización del saber, por parte de los docentes, modifica la relación aprendizaje-docente-saber. La problematización fortalecerá su postura frente al saber matemático y en consecuencia, su concepción sobre el aprendizaje de las matemáticas. De este modo, el empoderamiento impulsará cambios en las prácticas docentes. El entendimiento y caracterización de este fenómeno, se expone como una de las maneras de atender a los fenómenos de exclusión del discurso matemático escolar (dME) (Soto, 2010) y al de la reproducibilidad (Lezama, 2005).

Palabras clave: empoderamiento docente, socioepistemología, saber matemático

Abstract. This research report is based on the socioepistemological theory, it analyzes and characterizes the process of teacher's empowerment considering that it is a learning factor based on the social construction of knowledge. It starts from the hipothesis that when a teacher problematizes the knowledge, changes the teaching-learning-knowledge relationship. The problematization will strength their posture about the mathematical knowledge and, consequently, their conception of learning mathematics. Thus, the empowerment will drive changes in teaching practices. The understanding and characterization of this phenomenon of exclusion is exposed as one way to address the phenomena of exclusion from school mathematical discourse (DME) (Soto, 2010) and reproducibility (Lezama, 2005).

Key words: teacher´s empowerment, socioepistemology, mathematical knowledge

Introducción

La docencia como profesión y sobre todo, el docente como profesional, acarrean un importante e inmerecido “desprestigio social”. La primera razón, manifestada en el inconsciente colectivo, que califica de fracaso en el logro de las matemáticas con base en el desempeño docente. Es sabido también, que la enseñanza se conduce con apego a los programas escolares de los sistemas educativos, los cuales se centran en la comunicación de objetos matemáticos más que en los procesos de construcción social del conocimiento matemático; es decir, se concibe que las matemáticas tratan con objetos abstractos, anteriores por tanto a la praxis social y en consecuencia externas al individuo, siendo el profesor quien comunica “verdades preexistentes” a sus estudiantes normado por el *dME* (Cantoral, 2003). En recientes investigaciones (Soto, 2010; Soto & Cantoral, 2010; Soto & Reyes-Gasperini, 2011) se evidencia, con apoyo de un *modelo de exclusión*,que “el *dME* es caracterizado como un sistema de razón, que excluye a los actores del sistema didáctico de la construcción del conocimiento matemático a través de una violencia simbólica” (Soto, 2010, p. 91). Asimismo, se emplea un mapa del *dME*, que delinea lo que queda fuera y dentro de "lo normal". En él se evidencia el carácter hegemónico del *dME*, la atomización en los conceptos, la concepción de que la Matemática es un conocimiento acabado y continuo, el carácter utilitario y no funcional del conocimiento y la falta de marcos de referencia para resignificar a la matemática escolar (Soto, 2010).

Ahora bien, bajo esta afirmación, nos hacemos la pregunta: si el *dME*, legitimado por el sistema educativo, es el que excluye de la construcción del conocimiento, y los docentes que actualmente están a cargo de las clases de Matemática de secundaria, fueron y son formados con base en este mismo *dME*, ¿es posible que ellos favorezcan la construcción social del conocimiento matemático de la que han sido excluidos también? (Reyes-Gasperini, 2010). De igual manera, desde la investigación se proponen situaciones de aprendizaje que privilegien la construcción social del conocimiento con base en la problematización del saber matemático y los docentes, apropiándose de ella mediante el rediseño de la situación, se espera, sean quienes puedan llevar al aula estas discusiones, reflexiones y acompañar en el proceso de aprendizaje (Lezama, 2005), pero… ¿Podrán ellos favorecer la problematización del saber si no lo han hecho durante su formación, ni inicial, ni continua? Parece imposible creer que un docente puede provocar, bajo estas circunstancias, situaciones que propicien dicha construcción.

Ante estos cuestionamientos, Montiel (2010) asegura que la interacción investigación y práctica, no se reduce a poner en juego las propuestas didácticas que en la investigación avala, sino en reflexionar sobre los procesos por los cuales debe transitar el docente para poder llevarla a la práctica:

> (…)llevar al aula propuestas didácticas que rediseñen dicho discurso (*dME*) no se limita a secuencias que el profesor debe seguir como algoritmos, sino que debe reconocer en ellas cómo se problematiza un saber, el tipo de interacción que se genera en el sistema didáctico, los momentos de construcción de conocimiento, cuándo se logran los objetivos de aprendizaje, cómo se generan construcciones personales y colectivas, cómo pasar del consenso a la institucionalización del saber, reconocer los momentos de intervención para provocar respuestas del alumno, etc. Es decir, la comprensión de aquello que fundamenta la propuesta didáctica se torna más importante que la propuesta misma. (p. 71).

Por tanto, es explícito que la puesta en práctica, como una herramienta cotidiana, de las propuestas de investigación, por ejemplo las situaciones de aprendizaje, no es algo trivial para los docentes (Lezama & Mariscal, 2008; Montiel, 2010). Respecto a esto, Montero (2001, citada en Nemiña, García Ruso & Montero Mesa, 2009), asegura la existencia de esta separación entre la teoría y la práctica, como así también, el fracaso de los docentes ante la intención de interiorizar la teoría y la investigación disponible.

De aquí se desprende nuevamente, otra pregunta: entendiendo que el *dME* excluye de la construcción del conocimiento (Soto, 2010), que los docentes también han sido excluidos de ésta (Reyes-Gasperini, 2010) y que la puesta en práctica de las herramientas que de la investigación surgen, aun con la apropiación de ellas (Lezama, 2005), no es una cuestión sencilla ¿cuál es el proceso que debe vivir el docente para lograr la comprensión de aquello que fundamenta la propuesta didáctica, como así también, cualquier saber matemático que se le presente en su labor? ¿Qué podemos hacer, desde la investigación, con el fin de que el docente favorezca entre los estudiantes el aprendizaje con base en la construcción social del conocimiento? A estas preguntas, son las que la Socioepistemología, con el presente reporte, comenzará a reflexionar.

Marco Teórico

Es necesario focalizarse en dos aspectos básicos de la Socioepistemología: sus *principios fundamentales* y la *construcción social del conocimiento*.

Si entendemos como *principio*, a aquello inherente a una disciplina como el reflejo de las características esenciales de un sistema, que los investigadores asumen y sin el cual no es posible trabajar, comprender o usar dicho sistema (Wikipedia, 2011), la Socioepistemología descansa en cuatro principios fundamentales (Cantoral, 2011), a saber: el principio normativo de la *práctica social*, el de la *racionalidad contextualizada*, el del *relativismo epistemológico* y el de la *resignificación progresiva* o *apropiación*.

La Teoría Socioepistemológica sostiene que las *prácticas sociales* son los cimientos de la construcción social del conocimiento, y que el contexto determina la racionalidad con la que un individuo o grupo -como miembro de una cultura- construye conocimiento en tanto lo signifique y ponga en uso. Una vez que este conocimiento es puesto en uso, es decir, se consolida como un saber, su validez será relativa al individuo o al grupo, ya que de ellos emergió su construcción y sus respectivas argumentaciones, lo cual dota al saber de un relativismo epistemológico. Así, a causa de la propia evolución de la vida del individuo o grupo y en la interacción con diversos contextos, se resignifican esos saberes enriqueciéndolos con nuevos significados hasta el momento construidos.

Ahora bien, ¿cómo contempla estos principios la Socioepistemología para relacionarlos con el ámbito escolar? Las investigaciones que se abordan, vislumbran la necesidad del cambio de concepción del objetivo de la matemática escolar, es decir, un cambio de la "centración en el *dME*" a otro que va de los objetos matemáticos a la construcción social del conocimiento mediante un juego de prácticas: prácticas socialmente compartidas, prácticas sociales y prácticas de referencia. Este es uno de los objetivos que persigue la teoría: cuestionarse el *qué* se enseña, además del *cómo* se enseña; es por esto que se estudia un rediseño del *dME* que se fundamente en los conocimientos matemáticos concebidos como emergentes de la construcción social del conocimiento, en vez de los objetos matemáticos como preexistentes a la actividad humana.

Contextualización

La Socioepistemología tiene la peculiaridad de acuñar constructos teóricos que han emergido de la observación de la realidad, es decir, con sustento empírico. En nuestro caso, se trató de un proyecto de carácter nacional llevado a cabo conjuntamente por la Secretaría de Educación Pública y el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, denominado *Especialización de Alto Nivel en la Profesionalización Docente en las Matemáticas de Secundaria. Estudio de reproducibilidad de situaciones didácticas*, fue el escenario que dio lugar al constructo de *empoderamiento*. El proyecto fue dirigido a docentes de matemáticas en secundarias públicas de todos los estados del país, con interés en profundizar sobre el papel que juegan las matemáticas en el tratamiento escolar del saber científico, en el desarrollo de competencias, habilidades y valores. Allí, los docentes problematizaron el saber; conocieron la epistemología de alguno de ellos; descubrieron que existen diversas maneras de abordar un mismo problema, en donde, los resultados distintos no se reducen a errores, sino que son pensamientos diferentes a los otros y deben potenciarse, entenderse y comunicarse; aprendieron y aprehendieron matemáticas; discutieron con sus colegas sobre las problemáticas propias de la práctica docente, como así también, las maneras de diseñar actividades para sus clases; resolvieron, discutieron, diseñaron, aplicaron y rediseñaron situaciones de aprendizajes, entendiendo a éstas como la herramienta didáctica para llevar esta problematización al aula, respetando los contextos socioculturales de cada uno de los grupos de estudiantes; discutieron la importancia de la transversalidad del saber matemático puesto en juego en la dinámica del aula, y por sobre todas las cosas, reflexionaron sobre el cambio de centración de los objetos a las prácticas. Fue allí en donde se observó cómo los docentes ingresaban con cierta actitud (por ejemplo: de desconcierto, tímidos, a la expectativa) y concluían el proceso presencial con otra, utilizando frases del tipo: "me iba a jubilar, pero ahora, voy a volver al aula a cambiar las cosas", "darle el toque de investigación a mi profesión", "uno necesita del otro para poder hacer un cambio en la educación"… como estos, son muchos los comentarios que pueden rescatarse de los profesores que participaron del proyecto. Podría, con una mirada ingenua, creerse que esas opiniones derivan del excelente ambiente que vivieron, o bien, se puede -como lo hemos hecho nosotros- generar la pregunta de "¿qué es lo que les pasa a los profesores que salen diciendo que ahora pueden cambiar las cosas?". *Hacerse dueños del saber que enseñan*, era nuestra primera hipótesis del porqué los docentes se *empoderaban*.

El fenómeno de empoderamiento, la exclusión deldME y la reproducibilidad

Postulamos que dos fenómenos están intrínsecamente relacionados con el fenómeno de empoderamiento. El primero de ellos es el fenómeno de *la exclusión del dME* y el otro es el fenómeno de la reproducibilidad. El primero evidencia que es el actual *dME* el que excluye a los actores del sistema didáctico (estudiantes, docentes, autores de libros de texto, etc.) de la construcción social del conocimiento (Soto, 2010); y el segundo, se ha estudiado la reproducibilidad de una situación de aprendizaje, lo que significa buscar y determinar los factores que posibilitan el logro de los propósitos didácticos de ésta, una vez que ha sido puesta en práctica en distintos escenarios. Respecto a este último, se concluye que es frágil, "ya que la repetición del efecto didáctico está determinado por múltiples factores, siendo los más complejos e incontrolables los humanos." (Lezama, 2005, p.357).

En ambos fenómenos se reflexiona sobre el *dME*. En el primero, se reconoce su carácter hegemónico, la atomización de conceptos, la concepción de que la Matemática es un conocimiento acabado y continuo, el carácter utilitario y no funcional del conocimiento y la falta de marcos de referencia para resignificar la matemática escolar. En el segundo, se consideran propuestas que atiendan al rediseño del *dME*, en tanto, se consideren las aportaciones que desde la investigación se producen para llevar al aula y estudiar su efecto.

Algunas preguntas planteadas en este contexto: "¿cómo deberán ser comunicados estos productos de investigación?, y ¿cómo podrán ser tomados en cuenta o utilizados por el profesor en su práctica docente?" (Lezama, 2005, p. 347).Nosotros concebimos al empoderamiento como el proceso vivido por el docente, en comunidad (docentes e investigadores), con el objeto de comprender, asimilar, asumir, aceptar y sumarse a la nueva propuesta del *dME*, donde se privilegie la diversidad de argumentaciones, se permita la emergencia y cohabitación de racionalidades contextualizadas, se reconozca el carácter funcional del saber, se favorezca una resignificación progresiva considerando varios marcos de referencia; todo lo anterior sobre la consideración de las prácticas sociales como generadoras de dicho conocimiento. Asimismo, este proceso le permite al docente "adueñarse" del saber que enseña mediante su problematización, lo cual le brinda confianza y autonomía para abrir caminos a la innovación, no sólo de diseños o implementaciones de situaciones de aprendizaje, sino también, en la generación de cuestionamientos, debates y reflexiones con sus estudiantes. Todo ello, como uno de los mecanismos didácticos que acompañe al rediseño del *dME*, para propiciar el aprendizaje con base en la construcción social del conocimiento, y así, atender a la exclusión que provoca el *dME* actual y a las dificultades de los docentes para llevar las propuestas didácticas que de la investigación surgen hacia su propia práctica. En síntesis, el empoderamiento está estrechamente vinculado con la relación al saber que tiene el docente.

Aspectos metodológicos para el análisis del fenómeno

Con el fin de tratar empíricamente el fenómeno de empoderamiento, se eligió utilizar el estudio de caso con un profesor partícipe de la *Especialización*. Con este método buscamos "medir y registrar" la acciones de las personas involucradas en el fenómeno estudiado. Para ello, se utilizaron las siguientes técnicas: entrevistas estructuradas y semiestructuradas; observación no participante; videograbaciones; espacios de interacción con el docente; recolección escrita de datos; inmersión en su hábitat escolar y personal. Se acompañó al docente durante 4 días de labor didáctica, en los cuales se observaron 24 horas reloj de su práctica, de las cuales, aproximadamente 20 horas se trabajó sobre la noción de proporcionalidad.

Con base en esto, se realizó un análisis, desde la mirada Socioepistemológica, de los datos recolectados para encontrar elementos que evidencien cómo es que a través de una intervención reflexiva, se modifica la relación al saber por parte del docente.

Relación docente-saber pre reflexión (extracto 1C 06/06/11)

[1] *Profesor*: De acuerdo, de ahí salió el 120 y ¿el 400?

[2] *Alumno*$_1$: El 400 sale… 240 lo dividí entre 3 y me salió 80.

[3] *P*:Ok, vamos haciendo la división aquí, vamos haciendo la división. ¿Qué representa el 80? ¿Alguien habló allá atrás? ¡A$_2$! ¿Qué representa el 80, el valor de quién?

[4] *A*$_2$: El valor… representa… mmm

[5]*P:* No sabe ¿verdad?

[6] *A*$_2$:Representa la constante de proporcionalidad.

[7] *P*: ¿Por qué?, ¿por qué representa la constante de proporcionalidad?

[8] *A*$_2$: Porque 240 entre 3 es 80.

[9] *P:*Ya lo tiene ahí, pero ¿80 qué representa, el valor de qué A$_3$?

[10] *A*$_3$: De una hora

[11] *P:* El valor de una hora. Ponle, una hora por favor.

Reflexión respecto a la proporcionalidad con el docente

Se llevó a cabo una reflexión, fuera del horario de clase, con el docente (Profesor, comunicación personal, 7 de junio de 2011), sobre la proporcionalidad, se trató sobre los la proporcionalidad directa, el uso cotidiano de la frase "a más-más, a menos-menos" como dificultad para aceptar la relación $y = -x$ como función proporcional; el empleo de números naturales para el dominio de las tablas de valores y el hallazgo de la constante de proporcionalidad como "lo que se va sumando" en contraposición a la utilización de números racionales y el hallazgo de la constante de proporcionalidad como la razón entre los pares de valores de las variables; se trabajó sobre la gráfica de este tipo de funciones, su lectura y sus características. Respecto a la proporcionalidad inversa, se hizo una reflexión homóloga. Todo esto, bajo el fundamento de que la proporcionalidad emerge como respuesta al tratamiento de las razones de medidas inconmensurables, lo cual, en esta intervención no se ha podido abordar con el docente.

Relación docente-saber post reflexión (extracto 1A 09/06/11)

[12] *P:* Y para comprobar que hay una constante de proporcionalidad ahí ¿cómo podríamos hacer? ¿Cómo podríamos verificar?

[13*] A4:* Con una tabla… con una gráfica

[14] *P:*A ver… *(se acerca él al pizarrón y dibuja la tabla).*¿Dónde o cómo presientes que esto… bueno ya me dices que esto es una tabla, la del tres… Este valor y este que está aquí *(3,1)*, este valor y este que está aquí *(6,2)*, ¿Cómo podemos decir que son proporcionalidad, dame una justificación, qué otra forma? ¿Cómo podremos comprobar esa proporcionalidad?

[15] *A4*: Dividiendo

[16] *P:*Ok, ¿qué valor y qué valor vas a dividir?

[17] *A4:* Voy a dividir 3 entre 1 y da igual a 3; 6 entre 2, me da igual a 3; si divido 9 entre 3 me da igual a 3 y 12 entre 4 da igual a 3 y así, todos me tienen que dar 3.

[18] *P:*Y eso ¿qué me indicará? Eso que acabas de hacer tú, eso exactamente la relación ¿qué? La relación que estableció ella, entre estos dos, entre estos dos, entre estos dos *(señala los pares ordenados)*… y aquí, aquí la tienen *(señala los resultados de las divisiones que daban 3)* sale el mismo valor, ¿sí? Y por esa simple y sencilla razón son…

[19] *As:* Proporcionales

El análisis de los datos

Del análisis de las videograbaciones de las clases, se infiere que en la mayoría de ellas, el foco del profesor respecto al tema de la proporcionalidad, radica en la obtención del valor de la unidad y desde allí, mediante el hallazgo de varias constantes de proporcionalidad de distintos ejemplos, puede entenderse la idea de que "ese es el concepto de constante de proporcionalidad, el valor que se mantiene, por eso es `constante´" (extracto observación 1A 06/06/11). En este reporte, se ha considerado uno de los extractos para ejemplificarlo.

Si bien en las intervenciones [6-9] se observa que el estudiante, con su justificación, podría estar reconociendo a la constante de proporcionalidad como una razón, el docente insiste y acepta como válida sólo aquella que refiere a la unidad [10], estipulando un tipo de relación respecto al saber matemático de la proporcionalidad.

Sin embargo, luego de la reflexión realizada con él, se observa que el docente modifica su relación al saber, buscando en las reflexiones que realiza con los estudiantes que emerjan argumentaciones y procedimientos distintos a los que hasta ese momento se lograban, así también que el saber matemático que aprendieran los estudiantes, se asocie a aquel que emergió como una construcción social.

Conclusiones

El fenómeno de *empoderamiento* pretende generar, a través de la reflexión, reacciones en la práctica, afirmando que "el poder es un logro de la reflexión, conciencia y acción de las personas interesadas, y no un regalo o donación de otro poderoso" (Montero, 2006, p. 62), así también que "el proceso de empoderamiento no implica atribuir a uno poder sobre los demás, sino que se adquiere el poder al tomar las riendas de su propio crecimiento" (Howe & Stubbs, 1998, p.169).

Si bien se precisa de un análisis mayor, es aquí donde encontramos la relación dialéctica entre el fenómeno de *la exclusión del dME*, el fenómeno de *la reproducibilidad* y el fenómeno de *empoderamiento*. Concebimos al *empoderamiento* como el proceso que vive el docente, en conjunto con sus colegas e investigadores, con el objeto de comprender, asimilar, asumir, aceptar y sumarse a la nueva propuesta del *dME*, en donde se privilegie la validación de las distintas argumentaciones, se permita la emergencia de las diversas racionalidades contextualizadas, se posea un carácter funcional del saber, se favorezca una resignificación progresiva considerando varios marcos de referencia, sobre la base de considerar a las prácticas sociales como las generadoras dicho conocimiento. Asimismo, este proceso le permite al docente hacerse dueño del saber que enseña mediante la problematización del mismo, lo cual le brindará confianza y autonomía para abrir caminos a la innovación, no sólo de diseños o implementaciones de situaciones de aprendizaje, sino también, en la generación de cuestionamientos, debates y reflexiones con sus estudiantes. Todo ello, como uno de los mecanismos didácticos que acompañe al rediseño del dME, para potenciar el aprendizaje con base en la construcción social del conocimiento, y así, atender a la exclusión que provoca el dME actual y poder considerar las propuestas que de la investigación surgen.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. (2003). La aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa: una mirada emergente [CD–ROM]. *XI Conferencia Interamericana de Educação Matemática* (tema Educación Matemática & Desafíos y Perspectivas). Blumenau, Brazil: Universidad Regional de Blumenau.

Cantoral, R. (2011). *Fundamentos y Métodos de la Socioepistemología*. Simposio en Matemática Educativa, 22-26 agosto. Distrito Federal, México: CICATA-IPN.

Howe, A. C. & Stubbs, H. S. (1998).Empowering Science Teachers: A Model for Professional Development.*Journal of Science Teacher Education 8* (3), 167-182.

Lezama, J. (2005). Una mirada socioepistemológica al fenómeno de la reproducibilidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 8*(3), 339-362.

Lezama, J. y Mariscal E. (2008). Docencia en matemáticas: hacia un modelo del profesor desde la perspectiva Socioepistemológica. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21*,889-900. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Montero, M. (2006). *Teoría y práctica de la psicología comunitaria. La tensión entre comunidad y sociedad* (3era ed.). Buenos Aires: Paidós.

Montiel, G. (2010). Hacia el rediseño del discurso: formación docente en línea centrada en la resignificación de la matemática escolar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 13* (4), 69-84.

Nemiña, R. E.; García Ruso, H. y Montero Mesa, L. (2009). Desarrollo profesional y profesionalización docente. Perspectivas y problemas. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación de Profesorado 13* (2), 1-13.

Reyes-Gasperini, D. (2010). Reflexiones acerca del aula actual, como desafío para el profesor de matemática. *Premisa 12*(44), 44-50.

Soto, D. (2010). *El Discurso Matemático Escolar y la Exclusión. Una Visión Socioepistemológica*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Soto, D. y Cantoral, R. (2010) ¿Fracaso o exclusión en el campo de la matemática?. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 23*, 839-847. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Soto, D. y Reyes-Gasperini, D. (2011). En búsqueda de la exclusión en el discurso matemático escolar. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 24*, 873-880. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Wikipedia.(2011). Recuperado el 27 de agosto de 2011, de http://es.wikipedia.org/wiki/Principio

USOS DEL CONOCIMIENTO MATEMATICO EN UNA COMUNIDAD INDIGENA OTOMI

Teresa Gpe. Parra Fuentes, Francisco Cordero Osorio
Cinvestav-IPN México
parra.tere@gmail.com

Resumen. México es uno de los países Latinoamericanos con mayor número de indígenas, los cuales viven en un fuerte rezago educativo. Con respecto a la educación indígena, Ramírez (2006) señala que siempre se ha referido a aquello que se considera que los indígenas deben saber, y no a la instrucción o enseñanza que los indios mismos imparten o impartieron. Desde su perspectiva hablar de educación indígena supone una apreciación externa de sus culturas. Esta investigación trata de considerar al indígena "desde" su comunidad, en específico nos referiremos a una comunidad otomí del Estado de Puebla, México, que radica en la Ciudad de México. Nos interesa identificar los Usos de la matemática que emplean en su quehacer cotidiano, de esta manera brindar pautas para intervenciones educativas más apegadas a su realidad.

Palabras clave: usos del conocimiento matemático, comunidad, otomíes

Abstract. Mexico is a Latin American country whit the largest number of natives who live in a strong educational disadvantage. Whit regard to indigenous education, Ramirez (2006) indicates that this has always referred to what is considered the indigenes should know, and not to the instruction or teaching that the Indians teach or have taught among themselves. From his perspective, talking about Indigene education means taking an external assessment on their cultures. On this research we considered the Indigene "from" its own community; specifically we refer to the Otomi community of Puebla, Mexico, who live in Mexico City. We want to identify the uses of mathematics they have for their daily work, thus providing guidelines for educational interventions that are more in touch with their reality.

Key words: uses of mathematical knowledge, community, Otomi indigenous

Situación de la educación indígena en México

La imagen que prevalece en nuestra sociedad sobre el indígena es como atrasado, pobre e ignorante. A nivel político constituyen un problema constante y son considerados como motivo de atraso del país. Además son víctimas de racismo y de explotación.

La imagen que prevalece en nuestra sociedad sobre el indígena es como atrasado, pobre e ignorante. A nivel político constituyen un problema constante y son considerados como motivo de atraso del país. Además son víctimas de racismo y de explotación.

Navarrete (2008) refiere lo siguiente:

> La relación de identidad entre "ser indígena" y "ser pobre" corresponde en gran medida a la realidad de los pueblos indígenas de nuestro país, pues padecen de un grado de marginación social y económica muy alto, en muchos casos mayor al del resto de la población mexicana. Esta lacerante situación es resultado de siglos de explotación y discriminación, pero se ha acentuado y se ha hecho más visible en

> las últimas décadas, afectando, sin duda, a los grupos indígenas de nuestro país y dificultándoles el desarrollo y su florecimiento. (p. 11).

Según datos del Coneval (Consejo Nacional de Evaluación de la Política de Desarrollo Social) en México, por cada 100 indígenas, 24 no estudian; 25 no terminaron la primaria; 19.5 lograron acabar la primaria; mientras que 19.2% estudiaron hasta la secundaria. Sólo 11 de cada 100 indígenas cursaron educación media superior.

Estas cifras son alarmantes, a pesar de los esfuerzos que ha realizado el estado de establecer diferentes programas sobre la educación indígena, el rezago es fuerte. Son constantes las demandas de diferentes organizaciones que señalan que la educación indígena debe considerar al indígena en su educación.

La SEP ha implementado programas y capacitado a maestros bilingües, así como publicado libros de texto en diferentes lenguas indígenas. Dentro de las demandas de los indígenas está no sólo que se les imparta una educación en su idioma, sino que se incluyan contenidos e ideas propias de sus pueblos.

Soslayar la cultura e identidad indígena en su educación, desde nuestra perspectiva hace referencia a una educación pensada "para" el indígena con la finalidad de incorporarlos a la sociedad, haciéndolos iguales a ella.

Desde nuestra perspectiva tal vez esta visión externa del indígena, favorece el poco impacto que tienen los programas dirigidos a ellos. Creemos que una perspectiva "desde" el indígena podría beneficiar una mejor comprensión e interés de su parte, que considere y valore sus conocimientos, su cultura, que les dé la oportunidad de reconocerse como constructores de conocimiento. Esto es, partir de sus conocimientos como base para posibles propuestas educativas enfocadas a ellos.

Usos del Conocimientos Matemático

Este aspecto "desde" el indígena, en el caso del conocimiento matemático, nos invita a reconocerlos como constructores de dicho conocimiento. Que en sus actividades cotidianas "*usan*" el conocimiento matemático. Nos referimos a *usos* en contraparte a los conceptos matemáticos. Ya que dan lugar al humano, a su cultura, a sus actividades cotidianas. No responde a conceptos acabados y determinados. Responden a epistemologías sobre el conocimiento diferentes:

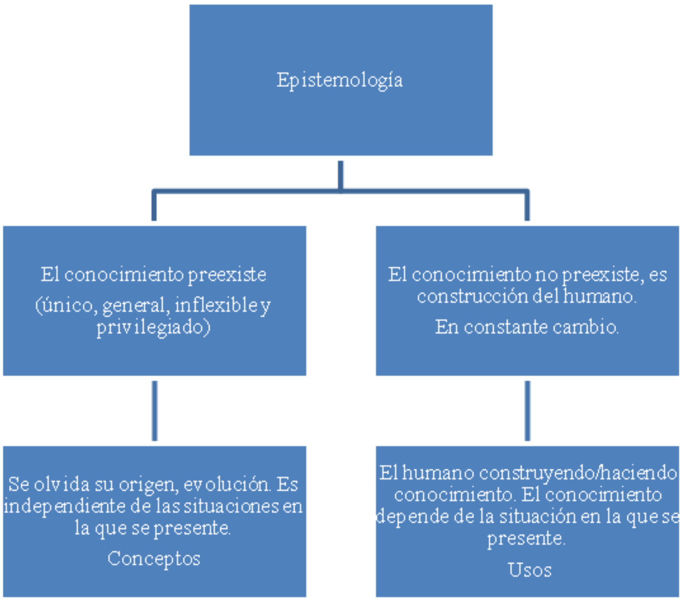


Figura 1. Perspectivas epistemológicas

Hablar de "usos del conocimiento matemático" permite considerar al humano, a la situación, la cultura, la identidad. Es partir del humano haciendo y entenderlo.

Socioepistemología

El marco teórico con el cual realizamos esta investigación es la socioepistemología (Cantoral y Farfán, 2004). La postura epistemológica de la socioepistemología es que el conocimiento se construye, es producto del humano. Al ser resultado del humano es cambiante, no es estático. El conocimiento es resultado de la organización humana, ante esta tesis, decimos que las comunidades indígenas son constructoras de conocimiento matemático. Resultado de sus prácticas cotidianas, de su sobrevivencia. Este conocimiento no responde a conceptos matemáticos acabados, sino a usos del conocimiento matemático. Al considerar que el conocimiento es producto de la organización humana, que responde a necesidades, a un contexto histórico, político y social, lo hace situacional. Por lo que los elementos anteriores juegan un papel fundamental en la construcción del conocimiento, los cuales son olvidados en la educación.

Comunidad de conocimiento

La educación en México es estandarizada, a pesar de ser un país multiétnico. Diversas Asociaciones y Organizaciones han hecho críticas sobre este proceder, ya que elementos como el lenguaje y el contexto no son considerados en el momento de elaborar pruebas nacionales. Por lo que muchas veces los indígenas están en desventaja ante este tipo de pruebas.

Un planteamiento teórico que comparte nuestra preocupación es la socioepistemología, en donde se considera que el conocimiento es situacional, es decir que deben darse los elementos contextuales, como económico, cultural, social para que un conocimiento sea construido. De esta manera el contexto tiene un papel fundamental en la construcción del conocimiento matemático, por lo que no se da de manera generalizada. Es por ello que históricamente como lo muestra Espinoza (2009) existe un racionalismo contextual, la forma de pensamiento y por lo tanto la construcción de conocimiento está ligada a una época, a una situación que lo permite.

La socioepistemología es una aproximación epistemológica relativista, es decir, no existe una epistemología única, por lo que es necesario hablar de comunidades en donde las condiciones para cada persona son similares, y entonces sus producciones también lo serán.

El conocimiento no es único de una persona sino es una construcción social de un grupo de personas a las cuales nombramos comunidad de conocimiento. Lo que nos interesa de estas comunidades es entender la construcción del conocimiento matemático. Cómo se constituye, qué hace que se mantenga, cuáles son los conocimientos propios de una comunidad de acuerdo a sus características, de qué manera interviene la cultura. Para ello estamos intentando caracterizar a lo que llamaremos comunidad de conocimiento. Entre los elementos que hemos identificado se encuentran: la reciprocidad, intimidad y localidad. Los cuales están influenciados por la identidad y la institucionalización.

En este trabajo nos referiremos a una comunidad otomí, específicamente del Estado de Puebla. Quienes viven en la Ciudad de México, dedicados a la elaboración y venta de artesanías en el Centro de Coyoacán. La mayoría de ellos son analfabetos. Una de las características que identifican a esta comunidad es el trabajo que hacen con la chaquira, como collares, aretes, diademas, llaveros, bolsitas, anillos, entre otros

Dentro de la elaboración de sus artesanías se pueden observar usos de la matemática, como lo veremos en el análisis del siguiente diseño de artesanía con chaquira:

Figura 2. Diseño hecho con chaquira

Para mayor claridad en cuadrícula se observa así

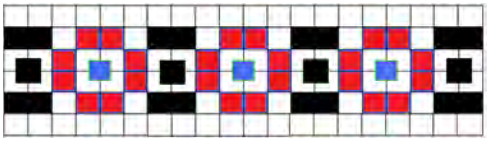


Figura 3. Diseño de chaquira hecho en cuadrícula

Los materiales requeridos para elaborar este diseño son: una aguja para chaquiras, hilo transparente y chaquiras de diferentes colores.

El tiempo de elaboración de un anillo es de 10 min. aproximadamente para las personas que tienen práctica.

Presencia del conteo y la medición:

Primero, haremos distinción de 3 elementos en la elaboración, las chaquiras del color de las flores (rojas), las del color del centro (azules) y las de la separación entre las flores (negras).

Para iniciar se mide el hilo que se utilizará, para ello se extiende un brazo y se toma como unidad de medida la distancia de la mano del brazo extendido hasta el hombro del otro brazo. Se enhila la aguja y se hace un nudo con las puntas del hilo.

Lo primero que se hará es una flor para ello se insertan en la aguja 5 chaquiras del color de la flor y 1 del color del centro, se introduce la aguja entre los hilos que quedan en el extremo junto al nudo y se jala el hilo a manera de que quede teso el hilo que une las chaquiras. Se forma una figura como ésta:

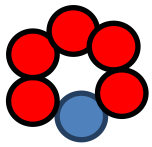


Figura 4. Inicio de la construcción de la primera flor

Luego se introduce en la aguja 3 chaquiras del color de la flor, y se introduce la aguja en la chaquira que sigue a la del centro de la flor, como se muestra en la figura:

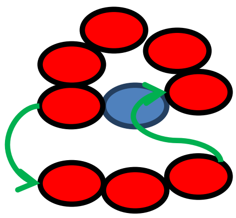


Figura 5. Posición para meter la aguja

Se jala el hilo de manera que quede teso el hilo que une las chaquiras y se forma la flor:

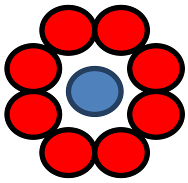


Figura 6. Flor completa

Después se construye la separación entre las flores, que aparece en negro en la cuadrícula. Para ello se introducen en el siguiente orden: 2 chaquiras del color de la separación, 1 del color de la flor, y 1 del color de la separación y se introduce la aguja en una chaquira específica de la flor formada, y se laja el hilo, como se muestra en la figura:

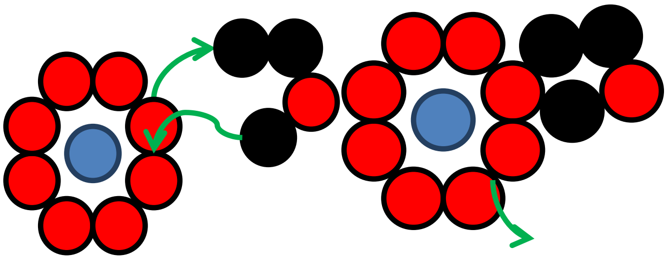


Figura 7. Inicio de la construcción de separación entre las flores

Luego se saca la aguja de la misma chaquira y se introducen chaquiras en la aguja en el siguiente orden: 2 del color de la separación y 1 del color de la flor. Y se introduce la aguja en la chaquira del color de la flor que queda entre las chaquiras del color de la separación y se jala el hilo, como se muestra:

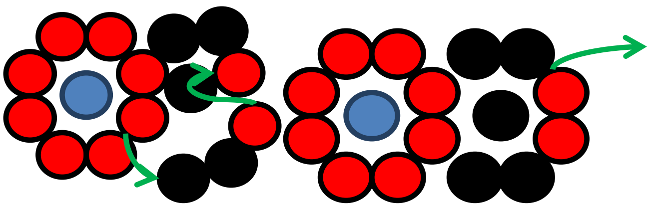


Figura 8. Término de la construcción de la separación entre las flores

Luego se forma otra flor que ya se inició su formación por lo cual sólo se completará. Para ello se introducirán 3 chaquiras del color de la flor y una del centro, y se introduce la aguja en una chaquira específica, se jala el hilo, como se muestra:

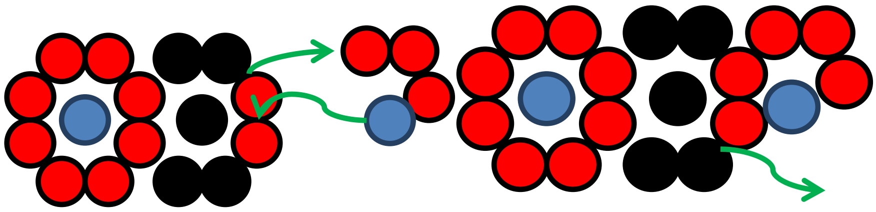


Figura 9. Inicio de la construcción de la segunda flor

Ahora se tiene que completar la flor se tienen 5 chaquiras por lo que falta 3, las cuales se introducen en la aguja y se introduce la aguja en una chaquira específica y se jala el hilo:

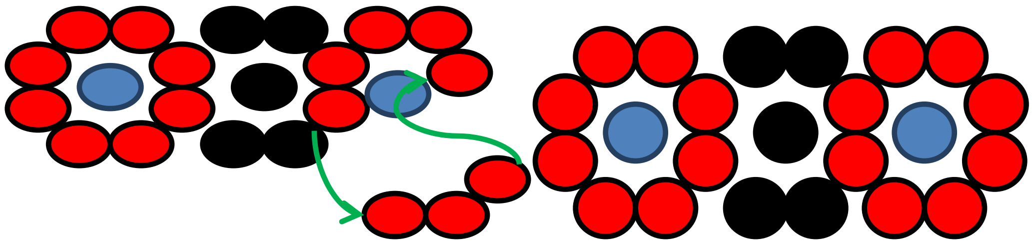


Figura 10. Término de la construcción de la segunda flor

Luego se repite el procedimiento de formar la separación. Expresan los que lo realizan que para el caso de hacer anillos con este diseño, para una persona de dedos gruesos se hará un anillo con 7 flores y para una persona de dedos delgados se requerirá de 6 flores.

De esta manera podemos observar que requieren del conteo para formar las flores y la separación entre ellas, así como usan la noción de la medición para determinar el tamaño del hilo que usarán y el tamaño del anillo, el cual depende de la persona que lo use.

Además de la elaboración de artesanías, también se dedican al comercio, en donde hay usos de la matemática. Realizan sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, aun sin ir a la escuela, pero como producto de sus actividades cotidianas. Los procedimientos empleados son diferentes a los realizados en la escuela, los cuales les causan ciertas dificultades.

Comentarios Finales

Nos encontramos en la fase de observación para identificar los usos de la matemática que se presentan de manera natural en la comunidad, con el objetivo de que sirvan como una referencia para hacer próximas intervenciones educativas, así como para evidenciar el papel de la cultura en las producciones de conocimiento matemático.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. & Farfán, R. (2004). La sensibilité à la contradiction: Logarithmes de nombres négatifs et origine de la variable complexe. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 24 (2-3), 137-168.

Espinoza, L. (2009) *Una evolución de la analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un estudio socioepistemológico*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Llegan a 5.4 millones los indígenas pobres: Coneval, (2011) Recuperado el 9 de agosto de 2011. http://www.proceso.com.mx/?p=278195

Navarrete, F. (2008). *Los pueblos indígenas de México*, México, CDI.

Ramírez, E. (2006). *La Educación indígena en México*, México D.F., UNAM

EL USO DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES Y LA INGENIERÍA COMO COMUNIDAD

Edith Johanna Mendoza Higuera, Francisco Cordero Osorio
CINVESTAV- IPN Colombia, México
ejmendoza@cinvestav.mx, fcordero@cinvestav.mx

Resumen. El interés por el estudio de las matemáticas para la ingeniería se ha incrementado en los últimos años, de hecho, la propia ingeniería se ha interesado por estudiar aspectos para su enseñanza. En este artículo se reporta un avance de investigación que estudia los usos de las ecuaciones diferenciales y de la modelación en una comunidad de conocimiento: los ingenieros en formación. Se presenta la problemática de investigación donde se logra evidenciar la ausencia de un marco de referencia que articule los usos del conocimiento matemático, su funcionalidad y la comunidad de conocimiento. También se da a conocer el marco teórico en el cual se enmarca la investigación.

Palabras clave: ecuaciones diferenciales, comunidad de conocimiento, socioepistemología, Ingenieros en formación, modelación

Abstract. The interest in the study of mathematics for engineering has increased in recent years; in fact, engineering itself has been interested in studying aspects of its own formation. In this article we report the advances of a research about the study of uses of differential equations and modeling in a knowledge community: engineer students. We show the research problem where we had the possibility to recognize the absence of a framework that articulates the uses of mathematical knowledge, its functionality and the knowledge community. We also present the theoretical framework in which this research is framed.

Key words: differential equations, knowledge community, socioepistemology, training engineers, modeling

Introducción

Los sistemas educativos surgieron para responder a las demandas de sus sociedades. Para ello, estas sociedades deben organizarse con el objetivo de institucionalizar su saber y de procurar que el conocimiento que se adquiere en la escuela sea funcional, es decir, que se integre y resignifique permanentemente en su vida (fuera de la escuela) para transformarla. Desafortunadamente, incluso en la matemática escolar, no se ha logrado tal cometido. Diferentes circunstancias han provocado que el conocimiento matemático transite en la escuela desde un nivel utilitario y tal vez por ello, los modelos educativos se han preocupado por saber el conocimiento de un estudiante y, en el mejor de los casos, el saber de su construcción, centrando sus estudios en el objeto matemático, en lo que saben los estudiantes de matemáticas, pero no en cómo usan la matemática. (Cordero, 2001, 2008)

Así, no se ha logrado que el conocimiento matemático sea funcional, en tanto que se busca explicar a la matemática desde la matemática misma, soslayando otros campos científicos que le permitieron su desarrollo e incluso, desconociendo las prácticas de referencia que hicieron surgir el conocimiento matemático. Entonces, se observa que hay ausencia de marcos de referencia para hacer funcional este conocimiento.

Al asumir que el conocimiento matemático se construye socialmente, se rompe la centración en los conceptos del discurso matemático escolar y se desborda a la búsqueda de prácticas. Con la adopción de esta premisa se robustece la problemática de la enseñanza y aprendizaje de la matemática, en tanto que nos provee de categorías del conocimiento que dan cuenta de su funcionalidad y que al ponerlas en juego en situaciones intencionales resignifican la matemática. Además, esta construcción social genera epistemologías de prácticas, de usos, de funcionalidad del conocimiento matemático.

Lo anterior, ofrece una panorámica de la problemática de la enseñanza y aprendizaje de la matemática, y de los posibles acercamientos para estudiarla. A continuación se presenta la problemática, que enmarcada en lo anterior, se aborda en esta investigación, al igual que el marco teórico que se acuña para su realización.

Problemática de investigación

La Matemática Educativa, como disciplina, reconoce una confrontación entre la obra matemática y la matemática escolar, la cual asume como la problemática fundamental de la enseñanza de la matemática. Según Cordero (2001) la segunda debe reorganizar e interpretar a la primera para luego ser llevada al sistema escolar. Tradicionalmente se ha pensado que en el aula se enseña la obra matemática y en ese sentido gran parte del problema se ha reducido a secuenciar y temporalizar los contenidos del currículo. En la matemática escolar no se toman en cuenta factores que, en conjunto, son los que posibilitan la creación de significados matemáticos: la forma como este conocimiento se ha constituido en saber, la existencia de un grupo humano que se organiza y que origina dicho conocimiento.

Dicha confrontación genera fenómenos educativos como el discurso matemático escolar, el cual, según Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez (2006) no se reduce a la organización o secuenciación de los conceptos matemáticos, sino que va más allá, al llegar al establecimiento de bases de comunicación para la formación de consensos y la construcción de significados. Entonces el discurso matemático escolar afecta a todos los niveles del sistema educativo, es decir, al nivel básico, medio y superior. Consecuencia de ello, este discurso, también se encuentra presente en la formación de ingenieros. Se evidencia en el carácter utilitario y no funcional con el que las escuelas de formación de ingenieros presentan a la matemática, donde soslayan el hecho de que la Matemática responde a otras disciplinas, como la ingeniería, donde encuentra la posibilidad de resignificarse.

En la formación de ingenieros, según Cajas (2007) la ingeniería es vista en algunos casos como una ciencia aplicada, lo cual lleva a generar programas lineales que inician con Ciencias Básicas, particularmente Física y Matemática, seguidos luego de Ciencias de las ingenierías para concluir con Materias Profesionales. Otra forma de ver la ingeniería en la educación, que también lleva a construir programas lineales, es el paradigma de ingeniería como conocimiento, desde donde "se suele interpretar que los fundamentos de la ingeniería yacen en las ciencias básicas, particularmente en la física y la matemática y que la lógica de la profesión es una lógica científica" (Cajas, 2007, p. 18). Además, estos paradigmas y sus consecuencias son reforzados por los profesores que tienen a cargo las ciencias básicas, por ejemplo la matemática, quienes suelen ser matemáticos o profesores-ingenieros que no han tenido experiencia con la práctica de la ingeniería y que abordan las temáticas desde el mismo campo de conocimiento es decir, desde la matemática y no desde la ingeniería, generando un discurso matemático escolar desde la dimensión matemática *para* el ingeniero en formación.

Por ello, la matemática presentada al ingeniero en formación es acabada. Las ecuaciones que modelan los fenómenos que estudia la ingeniería ya están institucionalizados y difícilmente se pueden modificar para provocar otras variantes en los fenómenos. Es así, como el discurso matemático escolar no provee a los estudiantes de ingeniería de una matemática funcional que se resignifica desde la ingeniería.

Conviene tener en cuenta que la Matemática y la Ingeniería como campos de conocimiento, que se encuentran involucrados en esta problemática, tienen objetos de estudio diferentes. La Matemática estudia los números, la estructura, el espacio, el cambio, objetos que no son propios de la Ingeniería. Además, se considera a la Ingeniería como una disciplina con conocimiento propio que usa la matemática, no como una ciencia aplicada.

> Los ingenieros utilizan el conocimiento matemático y científico para resolver sus problemas, pero lo hacen de una manera totalmente diferente de las formas en que los matemáticos y los científicos resuelven sus problemas. Los ingenieros utilizan el conocimiento matemático y científico en forma análoga al uso de las matemáticas y la tecnología de los científicos en la resolución de sus problemas científicos, es decir, en sus propios términos. […] con respecto al uso de las teorías científicas y técnicas matemáticas por los ingenieros. Estas sirven como herramientas conceptuales y técnicas utilizadas de manera oportunista por los ingenieros en términos de ingeniería. Además, cuando los ingenieros utilizan materiales de la ciencia y las matemáticas, el carácter universal de estos materiales deben ser adaptados a las particularidades de los problemas de

ingeniería. (Goldman, 2004, 166)

Desde nuestra perspectiva, los usos dados por la ingeniería, al conocimiento matemático, dan cuenta de la existencia de prácticas de referencia que expresan una funcionalidad de la matemática. Es clave hacer notar, que la matemática es usada desde la ingeniería, para resolver problemas propios de su campo y en sus términos. Es decir, en sus prácticas suceden usos del conocimiento matemático, que expresan funcionamientos y formas específicas de éste (Cordero, 2008). Entonces, el discurso matemático escolar que permea la formación de ingenieros deberá rediseñarse con base en los usos que da la ingeniería a la matemática, al igual, que los usos del conocimiento matemático del que dan cuenta los ingenieros en formación.

El asumir a la ingeniería como una ciencia aplicada ha llevado a profesores, estudiantes y programas de formación a afirmar que la ingeniería se fundamenta básicamente en la aplicación de la matemática y de otras ciencias. Por ello, la mayoría de escuelas de ingeniería forman a sus estudiantes con un programa lineal, donde primero se estudian conceptos de las ciencias básicas para después ser aplicados en las ciencias de la ingeniería. Entonces, esta visión ha provocado que ciertos usos continuos en las prácticas de la ingeniería, como la modelación, sean entendidas como una aplicación del conocimiento matemático. Así, las ecuaciones diferenciales son enseñadas para después ser aplicadas en la solución de problemas físicos, químicos, de crecimiento de población, etc. Así, la modelación es otro aspecto presente en la problemática de esta investigación y se considera como una práctica social que construye conocimiento y que expresa una funcionalidad del conocimiento matemático.

El marco anterior conlleva enfocar la atención a las ecuaciones diferenciales (ED), en la problemática. Su enseñanza en las facultades de ingeniería ha estado privilegiada por los métodos analíticos-algebraicos. Se ha enfatizadoen mostrar trucos para buscar una función o un conjunto de funciones que satisfagan una ecuación diferencial, y finalmente aplicar estos métodos a las ED que resuelvan problemas matemáticos escolares típicos en contextos de la Física, la Química, la Economía, entre otras. Al ser conscientes del uso privilegiado de los métodos analíticos-algebraicos para resolver las ED se ha buscado implementar otros métodos como el gráfico y el numérico, en algunas ocasiones, con la utilización de la tecnología. En estos acercamientos, el centro de atención es el objeto matemático, y se ha desconocido que ED como las lineales con coeficientes constantes modelan fenómenos de estabilidad, que pueden ser estudiados a través de la modelación y el uso de gráficas como argumentos, así como caracterizar las soluciones usando como argumento el comportamiento tendencial de las funciones (Cordero, 2001).

En este sentido, las ecuaciones diferenciales lineales de primero y segundo orden no son resignificadas, por los estudiantes, como modelos de fenómenos estables. Difícilmente relacionan la ecuación que modela cierto fenómeno y la forma de solucionarla.

En lo planteado anteriormente, no se vislumbran marcos de referencia que articulen los usos del conocimiento matemático, la matemática funcional y la comunidad de conocimiento, es decir, un marco de referencia que de cuenta de la construcción del conocimiento (Modelación, ED lineales y estabilidad), a través de su uso, en la organización de un grupo humano (ingenieros en formación) normado por aspectos de carácter institucional y cultural. Así, esta investigación se planteará formular un modelo que ayude a analizar los usos del conocimiento matemático desde la comunidad de ingenieros en formación.

Marco teórico

Teoría Socioepistemológica

Para atender la problemática anterior, que busca articular los usos del conocimiento matemático y la funcionalidad de la matemática, reconociendo a los ingenieros en formación como una comunidad de conocimiento, se considerará como marco teórico a la Teoría Socioepistemológica (TS), en tanto que estudia la construcción social del conocimiento matemático y propone una reformulación epistemológica, que consiste en considerar primeramente al humano haciendo matemáticas, en lugar de considerar la producción matemática hecha por el humano. Se asume esta aproximación puesto ha precisado fijarse en los usos de la matemática, prestando atención a su funcionalidad, alejándose del utilitarismo que se encuentra presente en el ámbito escolar.

La TS busca resignificar el conocimiento matemático en el ámbito de la educación. Cordero plantea cuestionamientos como los siguientes: "¿qué es el conocimiento matemático? ¿cuáles son las formas de conocer propias de la matemática? ¿cómo se construye? ¿cuáles son las diversas formas de construcción? ¿cuál es la actividad matemática? ¿cuáles son las prácticas institucionales que permiten y han permitido el desarrollo del conocimiento matemático?" (Cordero, 2008, p. 269) En este sentido, se ha identificado relaciones entre la actividad humana y la actividad matemática a las que llama categorías del conocimiento matemático.

Este acercamiento, ha precisado dos puntos principales. En primer lugar, que lo socioepistemológico es el reflejo de cualquier actividad humana. En segundo lugar, que el funcionamiento mental que atañe a una aproximación sociocultural, debe estar en correspondencia con la modelación y el uso de la matemática, es decir, con el lenguaje de las herramientas que resulta de la actividad humana. La relación entre estas dos componentes es la esencia que posibilita la reorganización de la obra matemática. Una relación de este tipo es nombrada categoría del conocimiento matemático y dichas categorías son el núcleo de la reconstrucción de la obra matemática.

Algunas de las categorías, tales como la predicción, la graficación y la analiticidad son, como ya se dijo, parte esencial en la construcción del conocimiento y están basadas en el lenguaje de las herramientas matemáticas. Esto último significa que los procesos que se derivan de este lenguaje quedan plasmados en representaciones que no son reflejo de una realidad preexistente, más bien, lo son de un sistema de recursos que sirven para construir significados en el contexto de la interacción. Según Cordero (2001), los estudiantes, mediante estas categorías, logran establecer relaciones entre procesos y objetos a través de significados.

Modelación – graficación

El binomio modelación – graficación, es una categoría de la matemática escolar que proporciona un marco de referencia para entender cómo los estudiantes logran resignificar sus conocimientos matemáticos en una situación de movimiento (Suárez, 2008). La modelación y la graficación han sido consideradas como actividades que desarrollan habilidades de aplicación y visualización de los conceptos matemáticos. Desde la socioepistemología, es otro el status de la modelación y la graficación. Para la socioepistemología la modelación en si misma es una construcción y producción del conocimiento matemático, que cambia y transforma, es decir que permite desarrollar argumentos (Cordero, 2006) de ciertas situaciones del Cálculo. La modelación es una actividad que va a estar anclada en la graficación en situaciones de movimiento. Es decir, las situaciones de movimiento serán modeladas a través de una gráfica.

Comunidad de conocimiento

En esta investigación es importante resaltar, que se tendrá en cuenta a los ingenieros en formación como una comunidad de conocimiento, es decir, no se considerará este estudio para cualquier comunidad, se atenderá a un grupo humano específico. Por tanto se precisa lo que se debe entender por comunidad de conocimiento, esto es, sustentar una especificidad que distinga lo que es comunidad, de lo que no es, así como distinguir, también una comunidad de otra.

Por ejemplo, distinguir lo individual, lo público y lo cosmopolita de lo que pudiera ser comunidad. Para hacer esto, nos valemos de una triada *C(reciprocidad, intimidad, localidad).* Estos tres elementos caracterizan lo propio de una comunidad de conocimiento, los ingenieros en formación.

Otro aspecto más, consiste en el uso del conocimiento matemático, en este caso, de las ecuaciones diferenciales y la modelación. Para apreciar el uso se requiere de un referente que señale su tradición, su cultura y su historia, al seno de su comunidad. Por ello, importa la continuidad del conocimiento, es decir, *la institucionalización* como un eje transversal. En ese sentido se enfocará la atención a la categoría comportamiento tendencial de lo estable que lo modela las ecuaciones diferenciales lineales (Cordero, 2008; Zaldivar, 2009).

Pero una comunidad con adjetivo las distingue de otras, entonces se requiere demomentos de identidad que distingan a la ingeniería, con su propia jerga disciplinar. Así *la identidad,* con sus momentos, a saber: legitimación, resistencia y proyecto (Silva, 2010), será otro eje transversal.

Para finalizar

Actualmente la presente investigación se encuentra en proceso. En esta primera fase se ha logrado identificar la problemática de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales y el uso de la modelación en la formación de ingenieros, donde se desconoce los usos de la matemática en la ingeniería como herramienta para construir conocimiento y por el contrario se asume como una ciencia al servicio de la ingeniería que no se resignifica.

Principalmente, se quiere encontrar evidencias de que la modelación escolar debe ser la categoría que articule la construcción de conocimientos matemáticos para los programas de ingeniería, puesto que ella expresará un uso ante una situación específica, donde se resignifica el conocimiento matemático.

Para el desarrollo de la investigación, se formulará una epistemología del uso de las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, basados en categorías del conocimiento como el comportamiento tendencial de las funciones y la modelación graficación. Mismas, que para la TS, son parte esencial de la construcción del conocimiento y que se basan en el lenguaje de herramientas matemáticas que sirven para construir significaciones en el contexto de la interacción. Con esta epistemología, se elaboraran diseños de situación específicas, que serán aplicados a estudiantes de ingeniería; y se realizaran observaciones y entrevistas a ingenieros en su práctica profesional. Con ello, buscamos caracterizar la matemática funcional desde los escenarios donde se hace uso del conocimiento matemático.

Referencias bibliográficas

Cajas, F. (2007). De parvulitos a las ingenierías: alfabetización científico tecnológica. En Argueta, B y España, O. (Eds.) *Democracia y educación: ensayos,* 239-258, Guatemala: Editorial de la Universidad de San Carlos.

Cantoral, R., Farfán, R. M., Lezama, J. y Martínez-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* Número especial, pp. 83-92.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 4(2), 103-128.

Cordero, F. (2006).La modellazione e la rappresentazione grafica nella matematica scolastica. *La Matemática* e *la sua Didattica,* 20, 1, 59-79.

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.). *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte iberoamericano* (pp. 265-286). México, D.F.: Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

Goldman, S. (2004). Why we need a philosophy of engineering: a work in progress. *Interdisciplinary Science Reviews 29*(2), 163 – 176

Suárez, L. (2008). *Modelación - Graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Silva, H. (2010). *Matemática Educativa, Identidad y Latinoamérica: el quehacer y la usanza del conocimiento disciplinar*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Zaldívar, D. (2009). *Una caracterización de la función de un escenario de difusión de la ciencia desde una visión socioepistemológica*. *El caso de la resignificación de lo estable*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

EL PAPEL DE LA NOCIÓN DE CONSERVACIÓN DEL ÁREA EN LA RESIGNIFICACIÓN DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Guadalupe Cabañas-Sánchez, Ricardo Cantoral
Universidad Autónoma de Guerrero México
Cinvestav-IPN
gcabanas.sanchez@gmail.com, rcantor@cinvestav.mx

Resumen. El artículo analiza desde las prácticas del salón de clases, una resignificación del concepto de integral definida –visto como área bajo una curva– con estudiantes de una licenciatura en matemáticas, desde una perspectiva que articula usos, contextos y procedimientos del área con la conservación del área de regiones planas. Los usos del área evolucionan en las explicaciones de los estudiantes al conservar una medida de área a través de transformaciones geométricas y analíticas. Se reconocen en este proceso, atributos de las regiones de áreas objeto de estudio, como su forma, tamaño y posición relativa, al representar la medida de área de ciertas regiones. Se estudió el papel de la conservación del área en el contexto de polígonos convexos y no convexos, así como en regiones limitadas por la gráfica de una función polinómica, continua y positiva en un intervalo cerrado.

Palabras clave: integral definida, resignificación, práctica social y conservación del área

Abstract. This paper analyzes from classroom´s practices, how the concept of definite integral –as a area under the curve– is re-meaning by university students, from a perspective that links the uses, contexts and procedures of the area with the conservation of the area on plane regions. The uses of the area evolve in students explanations when they conserve the measurement of the area through of geometrical and analytical transformations. It is recognized in this process, attributes of the regions of the studied area, as form, size and relative position, when the measurement of the area of some type of regions is represented. We studied the role of the conservation area in the context of convex and non convex polygons, and in limited regions by the graph of a polynomial function, continuous and positive on a closed interval.

Key words: definite integral, re-meaning, social practice and conservation of the area

Introducción

El artículo analiza desde las interacciones en el salón de clases de matemáticas, una *resignificación* del concepto de integral definida. Esta resignificación se establece a través de una manifestación de desarrollo de usos del área, que emergen de *conservar una medida del área* relativa a regiones planas. Este desarrollo de usos evoluciona al transitar de transformaciones realizadas sobre objetos geométricos y analíticos. Como consecuencia de las acciones que se llevan a cabo en ese proceso, emergen explicaciones en torno a la *conservación del área*. Es así que esta noción se instaura en función *normativa* de la actividad matemática del aula, al ubicar las explicaciones de los estudiantes y su profesor en aspectos como: *forma*, *tamaño* y *posiciones relativas* de las regiones de área involucradas, en lugar de situar su discurso únicamente hacia conceptos, proposiciones, procedimientos, símbolos y fórmulas matemáticas, importantes sin duda; aunque en este trabajo, el centro está en la significación a partir de ello. La pregunta que guía este trabajo es la siguiente: ¿Con base en qué condiciones se resignifica el concepto de integral definida por estudiantes universitarios, desde una perspectiva que articula usos, contextos y procedimientos del área en la matemática, con la conservación del área en transformaciones geométricas y analíticas?

El estudio se estableció a dos niveles, teórico y de experiencia de aula. En ambos, el rol del profesor devino protagónico. En el primero, durante la concepción de la experiencia, que radicó en el diseño de una situación de aprendizaje, y en el segundo, durante la gestión que hizo de la construcción de conocimiento matemático, la cual se instituyó por medio de una relación funcional en el salón de clases.

Aspectos metodológicos

Orientación teórica

El estudio se aborda desde la *Socioepistemología*, teoría que se interesa por explicar de manera sistémica los fenómenos didácticos en el campo de las matemáticas desde una perspectiva múltiple, incorporando el estudio de la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural y los procesos cognitivos. Desde esta teoría, el énfasis se pone en modelar el papel de la práctica social en la producción de conocimiento, con el fin de crear otro tipo de discurso, y con ello a su vez, "romper" con la centración de los conceptos que normalmente se evidencia en el discurso matemático escolar. La noción de conservación del área en este trabajo desempeñó ese rol, al *normar* las acciones de un profesor y sus estudiantes en diversas etapas de la explicación de la integral definida; en consecuencia, el centro del discurso en ese proceso.

Una epistemología de la integral definida

La resignificación de la integral definida se sustenta en un análisis *a priori* que consiste de un estudio didáctico, cognitivo y epistemológico acerca del área e integral (véase Cabañas-Sánchez, 2011a). Asimismo, de las aportaciones derivadas de los estudios de Piaget, Inhelder y Szeminska (1970), Freudenthal (1983), Kordaki & Potari (1998) respecto de la existencia de una particular relación entre el área y la medición; de la medición y la comparación, y de todas estas con la conservación. Otros elementos, se retoman de Stewart (2006), así como las nociones de uso, contextos y procedimientos provenientes de la socioepistemología. A nivel de experiencia de aula, nos apoyamos en un modelo estratégico propuesto en Cabañas-Sánchez (2011a, 2011b) que consiste de tres niveles: *macro*, *meso* y *micro*. En el primero ubica las prácticas a nivel proyecto de una lección, en el segundo, la configuración de una situación de aprendizaje,lasformas de organización, comunicación e interacción en el aula, y; en el nivel *micro* se ubica la gestión que el profesor hace del conocimiento matemático.

La resignificación se estableció en un contexto estático. La trayectoria que sigue el desarrollo de usos transita por la Geometría y la medición, hasta los Principios del Análisis. En una primera etapa se exploraron sobre polígonos convexos y no convexos. Las etapas que siguieron mediante transformaciones analíticas, donde el objeto función, la noción de continuidad, partición del intervalo, sucesión, límite, límite de una sucesión y sumas de Riemann devinieron protagónicos. Este desarrollo de usos fue gradual, transitó por el análisis de casos particulares, que los situó a probar de forma empírica, como un primer movimiento validativo, a determinar una medida de área aproximada, para dar paso a procesos deductivos formales y con ello construir la definición de integral. Comprendió elementos como los contextos y procedimientos en que se presenta el concepto de área en la geometría y la medición y funciones polinómicas. En este sentido, la resignificación de la integral definida siguió una trayectoria que conjugó a la percepción, a la prueba y a los procesos deductivos.

La noción de resignificación

Es claro que la humanidad le ha asignado determinados significados a los objetos matemáticos. Asimismo, que en el contexto escolar, los estudiantes asocian significados propios a dichos objetos. La socioepistemología le ha llamado a este proceso, significación. La resignificación por el contrario, es el proceso en el que se modifica el significado que han construido. Así, una significación por los estudiantes sobre la integral definida podría estar asociada a los procedimientos, porque aprendieron una regla. La resignificación en esta investigación se interesó porque los estudiantes modificaran este tipo de significaciones, al conservar la medida del área de ciertas regiones planas, contribuyendo a explicaciones sobre la forma, el tamaño (medida) del área y la posición relativa con respecto del plano.

Usos, contextos y procedimientos

Entendemos por *contextos* a los entornos situacionales en los que se considera un hecho, y a los *procedimientos* como las formas de organización de una situación (Cordero, 2003). La connotación que se le da a la noción *uso* en esta investigación es en el sentido de Cabañas-Sánchez (2011a, 2011b), quien la caracteriza desde la teoría pragmática, como *las formas en que es empleada o adoptada determinada noción en un contexto específico.*

Práctica y práctica social

a) La noción de práctica

La noción de práctica se asume desde la teoría Socioepistemología. Se entiende como un conjunto organizado de actividades o acciones objetivas e intencionales para resolver un problema dado (Tuyub, 2008). Estas prácticas, como señala Cabañas-Sánchez (2011a), están normadas por prácticas sociales y son inherentes tanto a las acciones específicas llevadas a cabo por los actores del sistema didáctico *in actu*, como a las que tienen lugar en la socialización del saber. La investigadora sostiene a su vez, la práctica conlleva una relación funcional entre grupos humanos y el conocimiento mismo. En consecuencia, se atribuye a actividades o acciones objetivas, y se evidencian en comportamientos observables por los seres humanos. Excluye por tanto, los actos mentales, internos y los estados disposicionales del sujeto (Cabañas-Sánchez, 2011b). Estos comportamientos, dicho sea de paso, representan roles de los individuos, y éstos a su vez, a las instituciones. Un esquema operativo de la práctica (Tuyub, 2008) se presenta mediante la figura siguiente.

Figura 1. Esquema operativo de la práctica, donde un conjunto de actividades organizadas con cierta intencionalidad la caracterizan (Figura 2.3.1. en Tuyub, 2008, p. 23).

Situados en el contexto de una situación de aprendizaje, estas actividades se enlazan a las del profesor y los estudiantes, cuyo fin es la construcción de conocimiento.

b) La noción de práctica social

La noción de práctica social se entiende en el sentido de Covián (2005), quien sostiene que "la práctica social no es lo que hace en sí el individuo o el grupo, sino aquello que les hace hacer lo que hacen(Covián, 2005, p.70)".

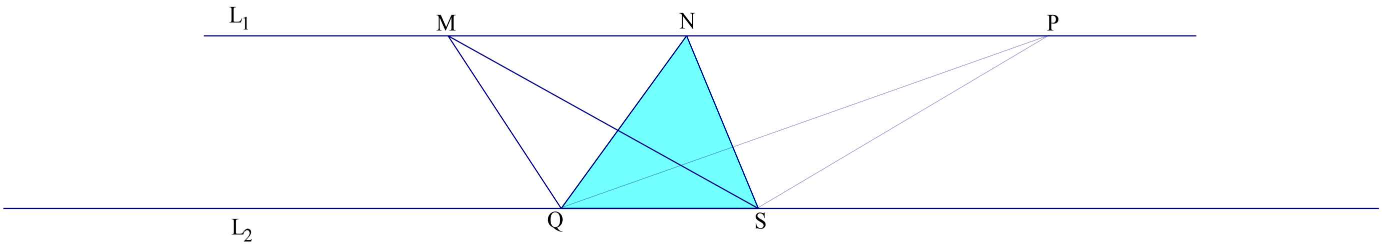
Cabañas-Sánchez (2011 b, 2011c) distingue tres funciones de la práctica social, la *normativa* (que regula), es la razón oculta; la *pragmática* (praxis o práctica), es la razón explícita, y la *discursiva* (que comunica), razón declarativa. Los estudios socioepistemológicos atienden a estas tres funciones de la práctica social. En el marco de esta investigación, el conservar el área de ciertas regiones planas, *norma* la actividad relacional que se establece en el salón de clases. La noción de conservación del área es a la vez, el medio por el cual emergen usos del área; en consecuencia, se establece como el centro del *discurso*; por ende, es la *razón explícita* de la resignificación de la integral definida.

Actividad matemática en el salón de clases

Durante las interacciones estudiante-profesor el discurso aparece regulado por el representante legal del currículo, contrario a la actividad en equipo, donde los jóvenes tienden a confrontar y evaluar argumentos de sus colegas y hacia el consenso. La discusión en equipo, favoreció además, la evolución de significados alrededor de los usos del área, así como los procedimientos y los contextos, sin ser estos dos últimos el centro.

Veamos tres ejemplos, uno asociado a polígonos transformaciones geométricas (Actividad I.2) y dos a las analíticas (Actividades II.4 y V.2.)

Actividad I. 2. Los triángulos MQS, NQS y PQS están construidos sobre las rectas paralelas L1 y L_2. ¿Qué relación encuentras entre las áreas de los tres triángulos? Argumenta tu respuesta.



En esta actividad los argumentos emergieron de las acciones realizadas sobre transformaciones geométricas establecidas, en la que se pidió esclarecer qué garantiza el que la medida del área de tres polígonos convexos construidos entre dos rectas paralelas (triángulos), permanezca invariante (se conserve). En ese proceso, se comparó e incluso se determinó la medida del áreas. Otro aspecto a explorar fueron las relaciones que establecieron entre la *forma* de los polígonos, el *tamaño* del área (o medida) y las *posiciones relativas* que guardan las figuras.

Los estudiantes pocas veces aceptan el *cambio* en la *posición* de los polígonos. Por ejemplo que el triángulo MQS se transforma en el triángulo NQS o en el PQS, al mover el vértice Q o bien que el triángulo PQS se transforma en el MNQ o en el NQS. El cambio de posición lo aceptan siempre que *se mueva* toda la figura. Con relación a los usos del área, aparecieron con frecuencia en las explicaciones tanto del profesor como de los estudiantes en la *comparación,* al momento de explorar relaciones entre las áreas de los polígonos. La *medición*, en argumentos que se apoyan de la fórmula para calcular el área de los triángulos, por ejemplo al afirma: "…como tienen misma base y misma altura…por la fórmula… base por altura sobre dos… las áreas son iguales…". Respecto de la *representación* del área, al construir otros triángulos con la misma medida de área a los originales.

Actividad II. 4. En la tabla siguiente se muestran los resultados del cálculo de aproximaciones del área bajo la curva $f(x)=x^2$ cuando se divide al intervalo [0, 1] en 4, 10, 20, 30, 50, 100 y 1000 subintervalos. Analiza los datos.

□

No. Rectángulos	Aproximación inferior	Aproximación superior
4	0.21875	0.46875
10	0.2850000	0.3850000
20	0.3087500	0.3587500
50	0.3234000	0.3434000-
100	0.3283500	0.3383500
1000	0.3328335	0.3338335

¿A qué valor se aproxima el área de la región R al aumentar el número de rectángulos?

Los estudiantes observan que los datos de la primera columna "*crecen*" y los de la segunda "*decrecen*". Una mayoría, relacionó el comportamiento de estos datos con el límite superior y el inferior del intervalo, por ello es que el "crecimiento", en sus propias palabras, es que se aproxima a uno y el decrecimiento, a cero. Veamos la discusión que tuvieron Elena y Carlos durante la actividad en equipo, una de las formas de organización de la actividad en el aula.

[829] Elena: Se aproxima a uno porque va aumentando entonces va a llegar un momento que va llegar a ser… se va a aproximar a uno.

[830] Carlos: Nooo … no puede aproximarse a uno el área… porque se supone… que tienes esto … **no va a tender a uno** el área… y tienes algo así (representa el cuadrado que se forma de la intersección entre las rectas que traza desde el eje *x* e *y* tomando como base al intervalo)… tienes aquí un triángulo rectángulo (sombreó el triángulo curvilíneo que se forma por encima de $y = \sqrt{x}$ en el intervalo [0,1])... y este es 0.5 (región de área por encima de $y = \sqrt{x}$)…y tienes aquí 0.5, tiene que ser menor que 0.5 de hecho ni a 0.5 puede llegar, porque es ilógico… lo más lógico es 0.333333 333….. Pero si ya tenemos así… podemos observar así 100, 10000 100000 podemos observar su comportamiento… de manera…. Porque aquí van a llevar un orden… ya es constante la diferencia…si los tendemos hasta… infinito podemos llegar a 33333 pueden llegar a un tercio… a lo más pueden llegar a un tercio.

Apoyándose de argumentos visuales, así como analíticos, Carlos "convence" a Elena de que la medida aproximada del área objeto de estudio es menor que uno (ver figura 2).

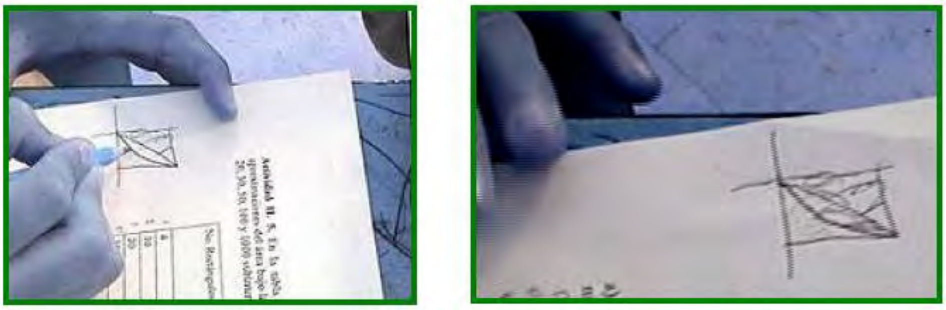


Figura 2. Argumentos visuales

[831] Carlos: … Pero si ya tenemos así… podemos observar así 100, 10000, 100000 podemos observar su comportamiento… de manera…. Porque aquí van a llevar un orden… ya es constante la diferencia…si los tendemos hasta… infinito podemos llegar a 33333 pueden llegar a un tercio… a lo más pueden llegar a un tercio.

*Actividad V.2.*Interpreta gráficamente, los resultados de las integrales siguientes.

$$1.\ \int_0^3 \frac{1}{2}\sqrt{x+1}\,dx \qquad 2.\ \int_1^2 m^2\,dm \qquad 3.\ \int_1^4 \frac{1}{2}\sqrt{n}\,dn$$

Aun cuando el centro de las explicaciones se orientaron hacia los usos del área, se observó que algunos estudiantes significan a la integral definida por medio de la resta; se reconoció por expresiones como la siguiente: "*no estoy seguro de cómo expresar la resta*". Es decir:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Es claro que este tipo de significados están asociados a las explicaciones del profesor, las involucraron a la técnicas de integración. Por cuanto a los usos del área que emergieron de los argumentos de los estudiantes fueron la medición, la comparación, conservación y representación. Ello, al representar y comparar las regiones de área involucradas en ese proceso. En sus explicaciones, aludieron además, a aspectos como *forma* y la *medida del área*. Ante preguntas expresas del profesor sobre la *forma* de las regiones, las respuestas de los jóvenes se enfocaron a las gráficas de las funciones, más que a la región de área que las limitan.

[1745]	Profesor:	¿En qué se parecen?
[1746]	Luis:	Solamente en el área
[1747]	Profesor:	¿Y las regiones?
[1748]	Luis	Son diferentes
[…]		
[1755]	Profesor:	¿Cómo es la forma de las regiones?
[1756]	Israel:	Su forma es diferente… las únicas que son casi similares son la última y la primera.
[1757]	Profesor:	¿La primera y la última?
[1758]	Israel:	La primera y segunda gráfica … éstas…

Reflexiones finales

La conservación del área de regiones planas, favoreció el que una mayoría de los argumentos de los estudiantes estuviesen centrados en los usos, contextos y procedimientos en que se presenta en concepto de área, así como a su evolución, contribuyendo con ello a la resignificación de la integral definida. Sus explicaciones y argumentos se enfocaron en aspectos como: *forma,tamaño* y *posicionesrelativas,* resultado de conservar la medida de un área en regiones planas. Durante las interacciones en el salón de clases, algunos momentos de la actividad del profesor muestran que su discurso orienta las acciones de los estudiantes hacia los procedimientos algorítmicos más que hacia los significados; el que las dificultades y errores se comprendan como un obstáculo en el aprendizaje en lugar de usarlos de forma constructiva.

a) El desarrollo de usos, contextos y procedimientos

En las transformaciones geométricas los estudiantes transitaron por los usos del área sin dificultades, en un principio apoyados por su profesor a fin de que centraran su atención en aspectos como *forma*, *tamaño* y *posición relativa* respecto del plano cartesiano. Su experiencia con la matemática en tópicos de Geometría era fuerte, aunque a nivel algorítmico. Se exhibió por ejemplo, que además de usar sus propios recursos, exploraron diversos métodos, que compartieron en la fase de trabajo grupal. Un obstáculo de tipo epistemológico fue la palabra "transformación". Una mayoría de jóvenes acepta sin discutir que toda transformación conduce a cambio de forma de los objetos geométricos, su experiencia previa así los indicaba. Lo asociaban a las acciones: descomponer y recomponer o en la construcción de figuras geométricas a partir de una dada. Otro obstáculo, de tipo didáctico, surgió por en su interacción con los polígonos no convexos. El estudio contribuyó a que modificaran este tipo de obstáculos.

a.1) Usos, contextos y procedimientos del área en transformaciones geométricas

Por cuanto a la evolución de los usos del área, las actividades del diseño contribuyeron a que:

- El centro de las explicaciones de los estudiantes estuviesen más que en los procedimientos en los significados. Apareció de modo más natural en las transformaciones geométricas. En las analíticas, un cambio de dio en la explicación de la integral definida, al momento de su definición, cuyo centro fueron conceptos, teoremas y procedimientos, aun cuando midieron, aproximaron, compararon y representaron una región de área.
- Posterior a la definición de la integral definida, los argumentos de los estudiantes estuviesen enfocados a medir, conservar, comparar y representar el área de regiones limitadas por la gráfica de una función continua y positiva en un intervalo cerrado.
- Los estudiantes establecieran relaciones de equivalencia entre representaciones geométricas con entidades analíticas y geométricas mediante diversos procedimientos.

Tales relaciones las establecieron o por medio de fórmulas o relaciones algebraicas o bien, mediante la relación de congruencia.

- Los estudiantes reconocieran comportamientos a partir de las transformaciones analíticas que llevaron a cabo, contribuyendo además, a que establecieran "generalizaciones" en donde aparecen familias de funciones, al comparar resultados que correspondían a una medida de área que conservaron.

a.2) Usos, contextos y procedimientos del área en transformaciones analíticas

Los usos del área que pusieron en juego en las transformaciones analíticas por medio de sus argumentos, fueron: las medición, comparación, estimación y representación del área. El contexto: las funciones polinómicas continuas y positivas, un intervalo cerrado y la partición del intervalo. Los procedimientos se sustentaron en: a) métodos de aproximación por exceso y por defecto, b) sumas de Riemman, y: c) métodos y técnicas de integración principalmente. Se observó una tendencia por describir la definición de la integral definida mediante la "resta":

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Incluso, que algunos "olvidaron" cómo escribirla. Surgió así, otra dificultad para resolver integrales.

b) La situación de aprendizaje

Respecto del diseño, se percibió por el profesor que algunas actividades concebidas básicas en el estudio, contribuyeron al uso de procedimientos algorítmicos laboriosos. Particularmente las que exploran el valor aproximado de la medida del área de una región limitada por una función siempre continua y positiva, la cuadrática. Nuestra tesis es que el uso de la tecnología evitaría en gran medida la aparición de este tipo de fenómenos.

Esta investigación evidencia que la noción de conservación del área contribuye a que el centro de los argumentos de los estudiantes se orienten hacia la medición, comparación, conservación y representación del área, donde los procedimientos también son importantes, sin ser el fin último.

Referencias bibliográficas

Cabañas-Sánchez, G. (2011c). Prácticas matemáticas asociadas al desarrollo de usos del área en el estudio de la integral definida. *Memoria de la XIV Escuela de Invierno de Matemática Educativa*, 183-190.

Cabañas-Sánchez, G. (2011b). *El papel de la noción de conservación del área en la resignificación de la integral definida. Un estudio socioepistemológico.* Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.México.

Cabañas-Sánchez, G. (2011a). Prácticas asociadas a la situación del salón de clases de matemáticas. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 24*, 787-792

Cordero, F. (2003). *Reconstrucción de significados del Cálculo Integral: La noción de acumulación como una argumentación*. México: Editorial Iberoamérica.

Covián, O.N. (2005). *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional. El caso de la Cultura Maya.* Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.México

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Holland: D. Riedel Publishing Company.

Kordaki, M. & Potari, D. (1998). Children´s Approaches to Area Measurement Through different Contexts. *Journal of Mathematical Behaviour*, *17*(3), 303-316.

Lezama, J. (2005). Una Mirada socioepistemológica al estudio de la reproducibilidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *8*(3), 339-362.

Piaget, J., Inhelder, B., Szeminska, A. (1970). *The Child´s conception of geometry*. New York: U.S.A.: Basic books, Inc., Publishers.

Stewart, J. (2006). *Cálculo Multivariable*. México: Thomson.

Tuyub, I. (2008). *Estudio socioepistemológico de la práctica toxicológica: un modela de la construcción social del conocimiento*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.México.

EXCLUSIÓN, COTIDIANO E IDENTIDAD: UNA PROBLEMÁTICA FUNDAMENTAL DEL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA

Daniela Soto, Karla Gómez, Héctor Silva, Francisco Cordero
Departamento de Matemática Educativa – Cinvestav IPN Chile, México
dsoto@cinvestav.mx, kmgomez@cinvestav.mx, hsilva@cinvestav.mx,
fcordero@cinvestav.mx
mail

Resumen. Se consideran tres constructos de la construcción social del conocimiento matemático: la exclusión, el cotidiano y la identidad. Cada uno expresa la esencia fundamental de la problemática del aprendizaje de la matemática. El primero identifica el hecho de que el *discurso matemático escolar* (*dME*) excluye a los actores de la construcción del conocimiento matemático; el segundo plantea que para abatir la exclusión habrá que generar marcos de referencia de la matemática funcional; y el tercero formula que el *rediseño del discurso matemático escolar* (R*dME)* obligadamente necesita de un proyecto de comunidad. El desarrollo de estos constructos conlleva plantear una problemática fundamental del aprendizaje de la matemática. Los constructos mencionados nutren la teoría socioepistemológica, pero también componen ejes para innovar prácticas que mejoren la enseñanza y reformular el concepto de aula.

Palabras clave: exclusión, cotidiano, identidad

Abstract. We consider three constructs of the social construction of mathematical knowledge: exclusion, the day to day and identity. Each one expresses the fundamental essence of the problem of learning mathematics. The first identifies the fact that school mathematical discourse (*dME*) excludes those involved inconstruction of mathematical knowledge, the second argues that to bring down the exclusion be generated frame works functional mathematics and the third formula that *dME* redesign necessarily need a community project. The development of these constructs leads pose afundamental problem of mathematics learning. The constructs mentioned socioepistemológica nurture theory, but also make axesto innovate practices that improve teaching and reformulate the concept of class.

Key words: exclusion, day to day, identity

Introducción

Se consideran tres constructos de la construcción social del conocimiento matemático, a saber: la exclusión, el cotidiano y la identidad. Cada uno de éstos son productos de investigaciones realizadas con la teoría socioepistemológica (*TS*): *El discurso matemático escolar y la exclusión. Una visión socioepistemológica* (Soto, 2010), *Los procesos de difusión del conocimiento matemático en el cotidiano. Un estudio socioepistemológico* (Gómez, 2009) y *Matemática Educativa, Identidad y Latinoamérica: el quehacer y la usanza del conocimiento disciplinar* (Silva, 2010).

A continuación ofrecemos una interpretación de la problemática del aprendizaje y enseñanza de la matemática, considerando los constructos mencionados. Y en consecuencia se trastocarán las prácticas de enseñanza, así como el concepto de aula. Para ello se revisa el *discurso matemático escolar* (*dME*), como objeto de estudio de la Teoría Socioepistemológica

(*TS*), y los elementos que deberían considerarse, tanto en la difusión del conocimiento matemático, como en la formación de matemáticos educativos.

La exclusión que produce el dME

¿Por qué los estudiantes fracasan en la tarea de aprender matemática? Frente a esto la misma comunidad ha intentado dar explicación de esta problemática desde diferentes perspectivas. Algunos responden a las dimensiones cognitivas del aprendizaje: alusivos a las representaciones o construcciones mentales de los conceptos, mientras que otros asumen la problemática en términos de las interacciones entre el saber, el alumno y el profesor, haciendo énfasis en las situaciones específicas con una secuenciación para construir los conceptos matemáticos asociados. Si bien estos enfoques teóricos constituyen enormes contribuciones a la disciplina, la centración principal recae en los objetos matemáticos, es decir, las explicaciones se desarrollan sin cuestionar los fundamentos de la matemática escolar.

La socioepistemológia, por su parte, ha tomado como objetos de estudio el *dME* y su rediseño a partir de la *construcción social del conocimiento matemático* (*CSCM*). Por un lado nos hemos preocupado de dar visibilidad a las características del *dME,* con lo cual hemos replanteado la problemática: no es el estudiante quien fracasa en su tarea de aprender, sino que el *dME* los excluye de la construcción del conocimiento matemático (Soto & Cantoral, 2010). Por otro lado, con el fin de intervenir sobre el *dME*, hemos buscado nuevos marcos de referencia en la *CSCM* que resignifiquen el conocimiento matemático. En este apartado explicaremos el fenómeno de exclusión que produce el *dME*. Diferentes investigaciones han evidenciado una serie de características del *dME*, las cuales nos han permitido conformar un "mapa" (figura1) .

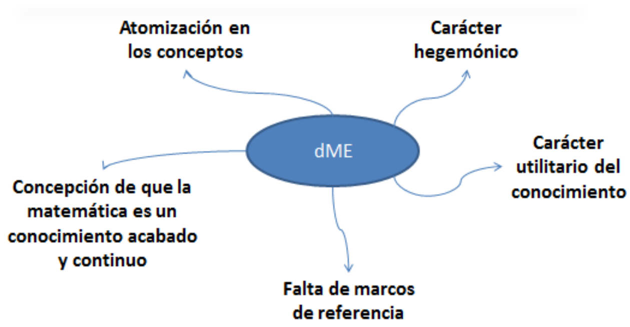


Figura 1. Mapa del dME (Soto, 2010)

Cada una de estas características nos habla distintamente de la *exclusión* hacia el individuo en la construcción del conocimiento y hacia la actividad humana en general. Al atomizarse los conceptos se dejan al margen los contextos sociales y culturales en los cuales emerge el conocimiento, con ello se despersonaliza y por ende se omiten argumentaciones que pudieran dar diferentes significados a la matemática. El carácter hegemónico no permite considerar otras argumentaciones dentro de la matemática escolar. Consideraremos a la argumentación como el "hilo conductor" de situaciones específicas, de la cual nacen significados y procedimientos asociados a los conceptos y procesos matemáticos. El carácter utilitario, hace ver a la matemática como una herramienta para resolver problemas que pueden situarse dentro de la matemática o de otros contexto, pero no permite la visión de que el conocimiento se construye para transformar la realidad. De esta forma lo importante de aprender matemáticas es su utilidad, es decir, la aplicación de ella y no, la funcionalidad del conocimiento para plantear y resolver nuevas problemáticas. La concepción de que la matemática es un conocimiento acabado y continuo no permite que los individuos lo trastoquen. Es decir, los actores del sistema didáctico quedan al margen de la construcción del conocimiento matemático, ya que no se "permite" replantear argumentaciones, procedimientos ni significados asociados a los objetos. Por último, la falta de marcos de referencia, no permite identificar otros contextos de significados para la matemática. Con lo cual deja al margen la funcionalidad del conocimiento y por ende las prácticas de los diferentes grupos e individuos.

Este mapa hace entender al *dME* como un *sistema de razón*, es decir como un conocimiento que norma la reflexión y la acción de los actores del sistema educativo. Además que conforma categorías y fabrica identidades, por ejemplo: de éxito o de fracaso. Pero este sistema de razón ha gozado de una legitimidad social, lo cual ha hecho invisible el fenómeno de exclusión. Las comunidades no se atreverían a cuestionar el conocimiento matemático que la matemática escolar ha promulgado. Con esto se oculta el carácter impositivo del *dME*. Nos ha impuesto argumentaciones, significados y procedimientos centrados en los objetos matemáticos, así no permite que los actores del sistema didáctico puedan incluirse en la construcción del conocimiento matemático. De esta forma reconocemos un fenómeno típicamente social en la educación matemática, creemos que la segunda tarea de la socioepistemológia podría ayudar a evitar este fenómeno tan complejo: el rediseño del *dME* a partir de la construcción social del conocimiento matemático.

La función de la difusión del conocimiento matemático

Con la caracterización del *dME*, se hace imprescindible el estudio de la construcción y difusión del conocimiento matemático. Ponemos atención en la forma en que los grupos humanos se organizan para difundir su conocimiento y con ello robustecer el papel de la resignificación en el *RdME*. Así, abordar el estudio de los procesos de difusión del conocimiento requiere entender al conocimiento matemático como una construcción social, lo que conlleva cuestionar no en sí a la matemática, sino su función social. Entonces, ¿qué se debe entender como difusión del conocimiento matemático en el marco de la construcción social del conocimiento?

Un aspecto a considerar es la relación estrecha entre construcción y difusión del conocimiento. Cómo imaginarse un conocimiento socialmente establecido sino es por el resultado de su difusión. Es más, una construcción de conocimiento no podría ser reconocida sin su difusión. En ese sentido estos dos elementos no pueden estar disociadas, incluso habrá que decir que la difusión es un "proceso natural" o "intrínseco" de la construcción del conocimiento. Por eso mismo, para conformar un estatus epistemológico de los procesos de la difusión del conocimiento matemático se requiere ubicar una dimensión social que problematice la relación de los dominios de la ciencia y de la vida cotidiana.

Cotidiano. Introducción y contextualización

Importa caracterizar los elementos necesarios para lograr la función principal de la difusión, para ello tenemos que ir a escenarios donde en un *a priori* no se tiene la intención de generar conocimiento disciplinar, es decir, escenarios cotidianos donde pueda verse expresado cómo vive el conocimiento matemático, cómo usan, argumentan y construyen su conocimiento, (Gómez, 2009). El dominio cotidiano será el constructo teórico que nos permita expresar ese lado humano (necesidades, intuiciones, actividades, prácticas, características) que influye en la construcción del conocimiento. En este encuadre el cotidiano será la fuente para observar esa función de la difusión. El cotidiano tendrá que alcanzar mayor robustez y ser entendido en los procesos de socialización del conocimiento, así como en las actividades que condicionan al humano: el trabajo, la labor y la acción (Arendt, 2005). Analizados estos elementos sistemáticamente, permiten un estudio donde se reconoce un escenario diferente, normado por razonamientos diferentes a los de la ciencia y son en estos elementos donde se evidencia el cambio de un cotidiano conforme el tiempo, ya que expresan procesos de conservación y de cambio a saber: proceso funcional, proceso institucional y proceso historial (Gómez, 2009).

El eje de la funcionalidad: una nueva práctica educativa

Estos elementos del cotidiano dan luz al papel de la funcionalidad, la cual proporciona explicaciones que permiten romper con la idea típica de estudiante, y acercarse más a una idea de ciudadano para poner atención a la resignificación del conocimiento matemático.

Esta visión pone en el escenario de la Matemática Educativa el rol de la justificación funcional, la cual presume de interactuar, de manera natural, con las realidades que construye el ciudadano. La justificación funcional hace énfasis en el desarrollo de los usos del conocimiento matemático, dejando espacio para el papel de la construcción social del conocimiento, es decir, reconoce que la evolución del conocimiento depende de las necesidades propias de la época, de las características de las situaciones, del humano, de sus condiciones y sus limitaciones. Nos permite apreciar la importancia de lograr que los ciudadanos incorporen nuevo conocimiento a su vida para transformarla. Reconstruir permanentemente significados para la vida. Esto no quiere decir que todo ciudadano se convierta en científico, sino que el conocimiento sea parte del cotidiano, que logre ser revalorado, distinguido, discutido, y en su caso, empleado. En ese sentido, la estreches entre la funcionalidad del conocimiento y lo que sucede en el cotidiano es innegable.

Por tanto, al hablar de los procesos de difusión del conocimiento matemático se necesita poner en juego dos aspectos: *a)* el estatus epistemológico de la funcionalidad del conocimiento en una situación específica y *b)* la expresión o manifestación de ese conocimiento con una intencionalidad no necesariamente científica: el cotidiano. Así, un enfoque que concibe al conocimiento construyéndose a la par de la experiencia del humano, permite entender que el conocimiento se construye cuando es empleado, cuando tiene una función específica situacional. Por lo cual este enfoque se preocupa por fomentar las prácticas sociales que generan el conocimiento matemático, en el sistema educativo. De ahí la necesidad de establecer marcos de referencia para resignificar el conocimiento matemático. En ese sentido la injerencia en el sistema educativo está en el *RdME*.

El proyecto de comunidad

El tercer constructo que consideramos de la construcción social del conocimiento matemático es la identidad. Formula que el rediseño del *dME* obligadamente necesita de un proyecto de comunidad. Ello expresa una parte de la esencia fundamental de la problemática del aprendizaje de la matemática, en Latinoamérica, desde la formación de los matemáticos educativos.

En general, se ha destacado que el conocimiento juega un rol importante en las sociedades. Sin embrago, en Latinoamérica se ha generado una especie de dependencia y adherencia al conocimiento teórico configurado en, y pensado para problemáticas de, otras regiones. Obviando con ello que nuestra disciplina interpreta y estudia fenómenos sociales. Esta idea de "*adherencia*" es clave, ya que alude al quehacer disciplinar y a la usanza de los constructos teóricos los cuales necesitan una constante resignificación. Pero, ¿por qué la necesidad de resignificar? Por ejemplo, tiene sentido preguntarse si un grupo de investigación que trabaja en un escenario, como el de Francia, donde el docente francés lo máximo que trabaja frente a alumnos son dieciocho horas semanales, tiene un reconocimiento social por su labor en la preparación de sus clases, por sus evaluaciones y por la atención de los alumnos en las veintisiete horas restantes, además de recibir una buena remuneración salarial (Espinoza, 2007), obtendrá los mismos resultados de sus investigaciones en un escenario como lo es Latinoamérica, donde las condiciones en que laboran los profesores son en general precarias. Los marcos de referencia educativos, culturales, históricos y económicos son definitivamente diferentes y contrastantes, por lo tanto un quehacer disciplinar que interprete y atienda esas problemáticas debe saber resignificar los constructos teóricos que, en el mejor de los casos, responderán a realidades distintas (Cordero & Silva, enviado para su publicación). Lo anterior nos exige reflexionar, como comunidad, ante el conocimiento teórico de nuestra disciplina. Sobre la base de la realidad de su construcción y su sentido. Para tal fin, proponemos a la identidad como una categoría conceptual válida para la reflexión de este tópico a través de la comunidad de socioepistemólogos como un ejemplo específico. Por medio de esta categoría, caracterizaremos una aproximación al *sentido* que conlleva a reconocer acciones específicas de dicha comunidad.

De acuerdo con Castells (2001), la identidad es el proceso de construcción de sentido atendiendo a un conjunto de atributos culturales, el cual tendrá prioridad sobre el resto de las fuentes de sentido. Pero *sentido* es la identificación que hace un sujeto de los objetivos de su acción. Por ejemplo, un atributo de la comunidad socioepistemológica, en cuanto a posición disciplinar, es el buscar y evidenciar el cambio de centración de las epistemologías en las investigaciones para ofrecer un *RdME* de los objetos matemáticos, a las prácticas sociales que han hecho emerger dichos objetos.

Ahora bien, lo esencial es ¿cómo, desde qué, por quién y para qué se construyen identidades? Para la construcción de las identidades se utilizan materiales de la historia, la geografía, la memoria colectiva, la cultura, los aparatos de poder, entre otros. Pero los grupos y las sociedades procesan esos materiales y los reordenan en su sentido, de acuerdo a la determinación de sus programas. Con lo cual determinan en gran medida su sentido para quienes se identifican con ella o se colocan fuera de ella.Entendido de esta manera, la identidad resulta ser un concepto que, por una parte, une a la comunidad socioepistemológica con comunidades de otras regiones, pues comparten la intención de estudiar y predecir fenómenos vinculados a la problemática del aprendizaje de la matemática. Pero por otra, los separa en cuanto a un quehacer disciplinar y teórico diferente, pues tienen distintos marcos de referencias a los cuales deben responder. Basándose en este antecedente, se propone tres formas y orígenes de la construcción de la identidad que conducen a diferentes constituciones en la sociedad, los cuales están articulados de manera sistémica: a) *Identidad legitimadora:* La cual permite extender y legitimar el sentido al seno de la comunidad; b) *Identidad de resistencia:*

Si bien, es necesario que el sentido se legitime al seno de la comunidad, también lo es que éste se institucionalice, se reconozca y sea aceptado por las comunidades de otras regiones. Para ello, es necesario debatir con comunidades de otras regiones; y c) *Identidad de proyecto*: La importancia del conocimiento y quehacer disciplinar de identidad latinoamericana, además de los beneficios que trae a la región en materia científica, radica en que permite tomar decisiones en la intervención de los sistemas educativos, con base en nuestra realidad cultural y social, respecto al estudio e interpretación de los fenómenos vinculados con la problemática de aprender y poner en juego un saber matemático, para así lograr democratizar su aprendizaje entre la sociedad nuestra (Silva & Cordero, 2010).

A manera de conclusión

Para lograr un *RdME* se debe vigilar permanentemente su sistema de razón para no caer en una forma de exclusión, para ello se debe responder a la funcionalidad del conocimiento del ciudadano, pero ambas aspectos no se podrían lograr si no hay un proyecto de comunidad, donde la identidad jugaría un rol normativo que sostenga la vigilancia y la funcionalidad del *dME*. Con ello los actores del sistema eductivo trastocarían al *dME* y lograrían la resignificación del mismo en forma intencional y de acuerdo a sus usanzas culturales y necesidades regionales. Las práctias de enseñanza y las nociones de alua ya no serán las mismas, habrá que encontrar los nuevos significados.

Referencias bibliográficas

Arendt, H. (2005). *La condición humana*. Paidós, España.

Castells, M. (2001). *La era de la información. Economía sociedad y cultura. El poder de la identidad.* Volumen II. Tercera edición. Siglo veintiuno editores, México.

Cordero, F. & Silva, H. Matemática Educativa, identidad y Latinoamérica: el quehacer y la usanza del conocimiento disciplinar. Enviado para su publicación.

Espinoza, L. (2007). La diversidad de aspectos influyentes en el aprendizaje de la matemática; reflexión causada por la participación en la pasantía Toulouse-Francia en el periodo de febrero a junio de 2007. *Documento Interno*. Manuscrito no publicado, Ministerio de Educación, Chile.

Gómez, K. (2009). *Los procesos de difusión del conocimiento matemático en el cotidiano. Un estudio socioepistemológico.* Tesis de Maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Silva, H. & Cordero, F. (2010). La identidad y la adherencia en la formación del Matemático Educativo en Latinoamérica. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 23*, 968-976, México.

Silva, H. (2010). *Matemática Educativa, Identidad y Latinoamérica: el quehacer y la usanza del conocimiento disciplinar.*Tesis de Maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Soto, D. (2010). *El Discurso Matemático Escolar y la exclusión. Una visión socioepistemológica*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Soto D. & Cantoral, R. (2010) ¿Fracaso o exclusión en el campo de la matemática? *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *23*, 839-847, México.

AMBIVALENCIAS DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

Cecilia Crespo Crespo, Liliana Homilka, Patricia Lestón
Instituto Superior del Profesorado "*Dr. Joaquín V. González*" Argentina
Centro de Investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. CICATA-IPN México
crccrespo@gmail.com, lhomilka@yahoo.com.ar, patricialeston@yahoo.com.ar

Resumen. El presente trabajo propone una discusión acerca de las situaciones que surgen en la clase de matemática a causa de las incoherencias del discurso matemático escolar, que pueden encontrarse en todas las áreas de esta disciplina. Desde cuestiones relativas al cálculo, al análisis matemático o a la geometría, pueden verse discursos "partidos" entre lo que se define y lo que luego se hace y evalúa. Los docentes fomentan esa división, y los alumnos las asumen como parte del contrato didáctico.

Palabras clave: discurso matemático escolar, inconsistencia, profesor

Abstract. The following research presents an argument about the situations that emerge within mathematics lessons, that are caused by the incoherencies in the mathematics scholar discourse, in all the topics included in our science. From calculus to geometry, split arguments can be seen between what is defined, what is done and what is tested. Teachers embrace this division and students expect it and assume it as part of the didactic contract.

Key words: schoolmathematical discourse, inconsistency, professor

Introducción

La presente investigación está centrada en el análisis del discurso matemático que está presente en el aula de escuela secundaria y el aula de las Instituciones Formadoras de Profesores. Desde hace algún tiempo, se ha observado en las clases de matemática un discurso que, con la intención de parecer polisémico, resulta contradictorio. En diversas oportunidades, tanto en las clases, como en los libros de texto y material de las cátedras, pueden observarse una coexistencia de propuestas y explicaciones que van de lo intuitivo a lo formal, pero que en definitiva, terminan apuntando en las evaluaciones, a los ejercicios tradicionales y clásicos que son los que los alumnos esperan en sus exámenes. El contrato didáctico construido a lo largo de toda la escolaridad hace que los estudiantes y los profesores sepan de antemano que lo que se evalúa debe responder a una resolución algorítmica, aún cuando el discurso con que se inicia la enseñanza apunta a una construcción diferente. Es llamativo que los docentes, al ser entrevistados en relación a esta práctica habitual, no sólo se manifiesten conscientes de esta modalidad, sino que la justifiquen desde diversas causas que se presentan en las conclusiones de este reporte.

En este caso, se presentan una serie de actividades documentadas en distintos niveles educativos, con el mismo estilo en el diseño de la unidad didáctica: una introducción informal, cercana a lo cotidiano, con lenguaje natural, alejado de formalismo y que recurre a diversas representaciones; que con el tiempo deviene en la ejercitación tradicional, que es finalmente, lo que se considera en los exámenes.

Los ejemplos considerados en esta oportunidad están relacionados con el concepto de función, el cálculo de límites y el trazado de la mediatriz de un segmento.

El aula de matemática desde la socioepistemología

El aula de matemática es el escenario en el que usualmente se construye conocimiento matemático de forma intencional. La matemática educativa tiene por finalidad influir en la escuela facilitando dicha construcción. Dentro de esta disciplina, son los resultados de las investigaciones, los que se espera impacten en el sistema educativo en todos sus niveles. El modo en que las investigaciones se orientan a tal fin es a través de aportes al discurso matemático escolar. Estos aportes pueden distinguirse de acuerdo a las esferas en las cuales se propone la intervención: aula, currículum e institución. (Espinoza, 2009).

La socioepistemología como marco teórico permite a un investigador orientar su trabajo hacia cualquiera de estas tres esferas: las investigaciones centradas en cuestiones propias de una institución o del modelo docente de una escuela, permiten realizar aportes a las propias instituciones; aquellas investigaciones involucradas con la construcción de conocimiento se orientan al rediseño del discurso matemático escolar, y por lo tanto impactan al sistema al nivel del currículum. Y por último, han surgido en los últimos tiempos, investigaciones que miran con detenimiento el aula y los fenómenos que en ella ocurren. Éstas últimas son las que van a intervenir de modo directo en el aula, ya que están pensadas en función de la resignificación de la práctica del docente. Es en esta última categoría donde se enmarca la presente propuesta.

La matemática presente en el aula no es la que corresponde al discurso erudito, sino que ha sufrido transformaciones y modificaciones que resultan necesarias para su entrada a la clase, y que se nutre de diversos factores hasta llegar a constituir el discurso matemático escolar. En él se integran con el conocimiento elementos que lo trascienden y cuyo análisis va más allá del saber despersonalizado que se desea enseñar. Estos elementos reflejan características de índole social, epistemológica y didáctica, como por ejemplo, el orden en que se presentan los contenidos, la importancia que se da a algunos por encima de otros, la jerarquización de contenidos, lo discursivo, lo gestual, los vínculos, la jerarquización de roles de las componentes del sistema didáctico, entre otros (Crespo Crespo, 2007).

Como dice Castañeda, el discurso matemático escolar “es aquel que atiende formación de consensos enla noosfera en torno a un saber escolar y a aspectos relativos a su tratamiento y características, incluyendo aspectos de organizacióntemática y profanidad expositiva" (Castañeda, 2006, p. 255). No debe entenderse el discurso matemático escolar como un bien dado, sino como una construcción social que se manifiesta en distintos ámbitos, como pueden ser los libros de texto y los currículos, pero que finalmente está afectado y es sintetizado por un docente en su curso (Castañeda, 2009), y que es modificado por cada alumno que está presente en esa situación de enseñanza, y las interacciones que se dan entre ellos. Las propuestas didácticas que surgen de las investigaciones con intención del rediseño del discurso deben llegar a las instituciones de la mano de los docentes, y si los docentes no hacen propias esas propuestas, entonces no hay impacto posible.

Debería esperarse, entonces, la coherencia de este discurso, sin embargo, es posible detectar en el aula la existencia de inconsistencias entre la manera en que se presentan y construyen ciertos contenidos matemáticos y la forma en que se los aplica y evalúa posteriormente. De este tipo de inconsistencias pueden extraerse algunas ideas preliminares, relacionadas con lo que se mencionaba anteriormente: los docentes conocen algunas propuestas didácticas que pretenden la modificación del discurso, y hasta se animan a implementarlas y a acercarlas al aula, pero finalmente recaen en las viejas costumbres, la evaluación debe ser tradicional, formal y rigurosa, porque eso garantiza que lo que se está haciendo en clase es *matemática*. Son numerosos los ejemplos que ponen de manifiesto esta situación en los distintos niveles educativos. En este trabajo se ha realizado una selección de algunos, que si bien han sido estudiados exhaustivamente desde distintos marcos teóricos, realizando diversas propuestas didácticas; en su tratamiento en el aula siguen apareciendo inconsistencias que exceden la naturaleza del conocimiento.

Algunos ejemplos analizados

Primer caso: el concepto de función

El siguiente ejemplo surge de la observación de una serie de clases de 2° año (14-15 años) de escuela secundaria en la Ciudad Autónoma de Buenos Aires (Crespo Crespo, Homilka y Lestón, 2009). El docente a cargo del curso permitió que se accediera a una práctica introductoria de la noción de función, al libro de texto en el cual se apoya para definirla y a una evaluación que se tomó al finalizar la unidad.

La actividad introductoria es la siguiente:

> *Se arroja hacia arriba una pelota y la distancia desde el punto de partida hasta que vuelve a caer en función del tiempo transcurrido es la que se presenta a continuación.*

Figura 1. Desplazamiento de una pelota en función de tiempo

a. ¿Durante cuánto tiempo sube la pelota?

b. ¿Qué ocurre en t=2,5?

c. ¿Qué ocurre en t=5?

d. ¿Qué relación puedes encontrar entre el tiempo que demora la pelota en subir y el tiempo que demora en bajar?

e. ¿Puedes decir algo sobre la velocidad con la que asciende la pelota y la velocidad con la que desciende?

Esta actividad apela a la idea de una función como una representación dinámica de una situación de movimiento. Las condiciones de existencia y unicidad se discuten en base a una situación real, el significado de máximo y de raíces de una función tienen su construcción en una experiencia que los alumnos pueden compartir y comprender.

Sin embargo, al momento de escribir una definición de función, se recurre a la formalización tomada del libro de texto, que es la siguiente:

> *Se dice que f es una función definida en un conjunto S de números reales si a cada punto x de S se le asocia un único número real que denotamos por f(x)*. (Durán, 1996, p. 43)

Esta definición poco tiene que ver con lo que se propone en la primera actividad. La idea de conjuntos lleva a una presentación estática de las funciones y las condiciones de existencia y unicidad están vaciadas de significado, y hasta resultan caprichosas (Lestón, 2011). Sin embargo, es este tipo de representación, formalizada y carente de contexto, la que aparece en la evaluación del tema. Uno de los ejercicios del examen posterior de esta unidad es el siguiente:

> *Dada la relación y=4x-3, se pide:*
>
> *a. Armar una tabla de valores de x entre -3 y 3, y calcular los valores de y correspondientes*
>
> *b. Graficar la información de la tabla*
>
> *c. Hallar el valor de x que hace que y sea igual a 0.*

Esta actividad está absolutamente descontextualizada, no permite evaluar el significado de función, raíz, existencia o unicidad que se introdujo con la primera actividad, y la gráfica que inicialmente era fuente de información, se reduce a lo que permite cerrar la actividad, en la cual se pasa de la fórmula a la tabla y por último, a la gráfica.

Segundo caso: determinación de límites de funciones

En este apartado se presentan actividades que comparten tres profesores de un Instituto de Formación Docente de la carrera de Profesorado en Informática de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires. Los tres profesores, que conocen los resultados de diversas investigaciones de matemática educativa, han diseñado, en conjunto, un plan de trabajo con ejercicios que se proponen a los estudiantes de Matemática I. Debido a que estos alumnos no tienen grandes conocimientos matemáticos, han decidido no recurrir a la formalización, y en cambio se intenta trabajar desde un marco de conceptualización basada en el análisis de las gráficas, según lo que reportaron en una entrevista posterior. Una de las primeras actividades que se presenta es la siguiente:

> *Use la gráfica de f(x) para determinar el valor de cada cantidad, si existe. Si no existe, explique por qué.*

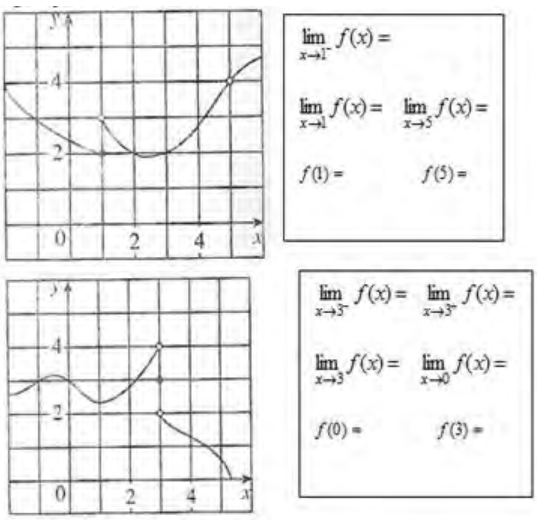


Figura 2. Límites de funciones

En esta actividad, se evidencia el tratamiento informal y visual que se da a este contenido. No hay fórmula, no hay tabla de valores, sino simplemente una gráfica que representa funciones desconocidas por los alumnos. De estos ejercicios, que no abundan en el práctico ni en los libros que estos docentes sugieren a sus alumnos, se avanza rápidamente a una serie de actividades de resolución algebraica, pocas veces acompañadas de gráficas ni de otro tipo de representación excepto la fórmula de la función. Y es ese tipo de actividad la que los alumnos enfrentan en el primer examen parcial que tienen para acreditar la cursada, ejercicios que apelan a la resolución algorítmica de límites, como en el caso siguiente:

2. Calcule los siguientes límites:

$$a)\lim_{x\to\infty}\frac{9x^2-5x+15}{12x^3-4x-40} \qquad b)\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{x^2+4}-2}$$

A pesar de este tipo de actividades, los alumnos fracasan en sus exámenes, debido por un lado a las falencias con que ingresan a la carrera, y por otro a los propios obstáculos epistemológicos del concepto en cuestión. Teniendo en cuenta estas dificultades, los docentes intentan en el examen final de la materia recuperar algunas nociones de las más básicas del estudio de límites, con la intención de evitarles la repetición mecánica de un algoritmo. El siguiente ejercicio es parte de uno de los exámenes de fin de curso:

Hallar el siguiente límite

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+5x+2}{x^2-4} =$$

Frente a este límite, que resulta determinado, algunos alumnos intentan una resolución algorítmica, que no les permite llegar a lo que están acostumbrados: un factor común de numerador y denominador que puedan simplificar, con lo cual terminan recurriendo a cualquier estrategia, aún cuando no es aplicable en este caso. Uno de los alumnos propuso la siguiente resolución:

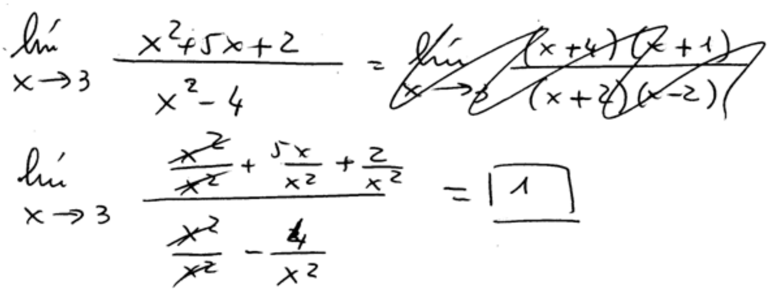


Figura 3. Ejemplo de resolución

Evidentemente, la conceptualización de esta noción de límite no se ha logrado. La ida y vuelta de lo informal a lo algorítmico, y de nuevo a lo informal no hace más que confundir a los estudiantes, que esperan lo que el contrato didáctico los ha hecho esperar: el ejercicio que responda al mecanismo que han repetido y aprendido en la cursada.

Tercer caso: mediatriz de un segmento

El que sigue a continuación es una actividad tomada de una clase de 1° año de escuela secundaria (13-14 años) de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires. Habiendo trabajado con distintas nociones de geometría (mediatriz, bisectriz, rectas paralelas y perpendiculares, entre otras), se propone a los estudiantes una actividad que tiene por objetivo que comprendan los usos de estas nociones. El ejemplo que se eligió en esta ocasión se refiere a la mediatriz de un segmento.

5. La banda municipal tocará en dos actos escolares. La Escuela n.° 1 y la Escuela n.° 2 se encuentran construidas sobre una ruta, pero muy cercanas entre sí. El intendente desea que la banda municipal toque para el inicio de clases, pero ambas escuelas desean hacer el acto a la misma hora, por lo que la banda no puede estar en ambos actos al mismo tiempo. El intendente tuvo una idea: cortar la ruta durante los actos y que la banda se ubique en la ruta sobre un punto equidistante a ambas escuelas, de manera que la música llegue a los dos actos. Como el trozo de ruta que une a las escuelas no es recto, la ubicación de la banda no le resultó tan sencilla al intendente.

   a. ¿Podés ayudarlo?
   b. Realizá un dibujo que explique por qué tu propuesta es correcta.

Figura 4. Aplicación de la mediatriz

Puede observarse que los estudiantes deberán decidir por ellos mismos qué es lo que deben hacer, demostrando así la significación que han dado a las nociones estudiadas. No hay ninguna pauta en el enunciado que anticipe lo que se espera de la estrategia de resolución. Sin embargo, de este tipo de actividad, que promueve la reflexión, se vuelve a caer en el ejercicio clásico, como el que se presenta a continuación y que ha sido utilizado en la evaluación del tema:

> *Ubica tres puntos no alineados de manera tal que se formen dos segmentos consecutivos BA y AC. Construye usando compás y regla las dos mediatrices de los segmentos formados. Deja todos los arcos de construcción.*

Una vez más, puede verse que lo que se hace en la clase, que resulta posibilitador de construcción, es lo que el alumno entiende como menos importante, ya que no es lo que acredita conocimiento. Al ser consultado, el docente del curso, justifica sus acciones en base a que los estudiantes no siempre pueden depender de su creatividad y sus estrategias al momento de resolver una evaluación.

Conclusiones

De las evidencias presentadas, se puede concluir que existe una lucha de poderes entre lo que se hace en clase, lo que se evalúa y lo que el alumno espera. Pueden detectarse en estos relatos que las clases introductorias intentas ser de carácter constructivista, apelando a la conceptualización y al manejo de diversos significados y representaciones de las nociones en juego. Existe una intencionalidad didáctica de aproximación del conocimiento a los estudiantes por parte de los docentes, que luego de unas pocas clases, se pierde, junto con la secuenciación pensada para la construcción del conocimiento. Los exámenes por lo general están compuestos de actividades fuertemente algorítmicas, con la intencionalidad de que el alumno pueda enfrentarlas y no fracase. La formalización también resulta jugar un papel importante, ya que los docentes sienten que de eso depende el hacer matemática en el aula, ya que en parte, es ese tipo de actividad la que luego se espera que los estudiantes conozcan al ingresar a la vida académica del nivel superior.

Por otro lado, los alumnos saben lo que deben esperar en un examen: años de escolaridad los han llevado a construir una serie de estrategias para enfrentar sus evaluaciones y poder aprobarlas. De hecho, en los casos donde los docentes hacen propuestas distintas, el fracaso es notable: las reglas no pueden cambiarse sin un acuerdo previo entre docente y alumnos. El desconcierto que les genera no poder resolver algorítmicamente hace que recurran a cualquier estrategia.

Finalmente, lo que se propone hasta aquí es solamente una reflexión sobre el estado actual de las cosas: las investigaciones se están haciendo, muchas de ellas con resultados más que interesantes. Hay gran cantidad de propuestas para acercar al aula el conocimiento de otra manera, pero esto no está ocurriendo. Es necesario trabajar con los docentes para poder llegar efectivamente al rediseño del discurso matemático escolar y con la comunidad toda para poder cambiar un contrato didáctico que no responde a las necesidades formativas de la escuela actual.

Referencias bibliográficas

Castañeda, A. (2006). Formación de un discurso escolar: el caso del máximo de una función en la obra de L'Hospital y María G. Agnesi. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(2), 253-265.

Castañeda, A. (2009). Aspectos que fundamentan el análisis del discurso matemático escolar. P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 22, 1379 - 1387. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Castañeda, A. Rosas, A. y Molina, G. (2010). El discurso matemático escolar de los logaritmos en los libros de texto. *Premisa*, 12(44), 3-18

Crespo Crespo, C. (2007).*Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología.* Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, México.

Crespo Crespo, C. (2010). Los diálogos entre estudiantes en el aula de matemática. Su riqueza para el análisis del discurso matemático escolar. P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 23. (829-838). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Crespo Crespo C., Homilka L. y Lestón, P. (2009). *Una introducción al concepto de función y sus propiedades. Observaciones de la clase de una practicante.* Ponencia presentada en el VII Congreso Virtual de Enseñanza de la Matemática. Guadalajara (México).

Durán, A. (1996). *Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo.* Madrid: Alianza.

Espinoza Ramírez, L. (2009). *Una evolución de la analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un estudio socioepistemológico*. Tesis de maestría no publicada. CINVESTAV del IPN, México.

Lestón, P. (2011).*El infinito en el aula de matemática. Un estudio de sus representaciones sociales desde la socioepistemología.* Tesis de doctorado no publicada. CICATA- IPN, México

CLAVES DE CONTEXTUALIZACIÓN Y USO DE TECNOLOGÍA: DOS FACTORES DETERMINANTES A LA HORA DE RESIGNIFICAR EL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR EN EL AULA

Nora Inés Lerman, Cecilia Rita Crespo Crespo
Instituto Superior del Profesorado "Joaquín V. González" Argentina
nlerman@infovia.com.ar, crccrespo@gmail.com

Resumen. Este trabajo surge de la preocupación acerca de la resignificación del discurso matemático escolar (DME) en enunciados con sentido para los alumnos, teniendo en cuenta ciertas formas de argumentación no verbales que utilizan. Da cuenta de los momentos preactivos de la clase en los que se depende de la estrategia planteada por el profesor al diseñar sus materiales didácticos; y durante la interacción, donde despliega tácticas y habilidades comunicacionales que ponen en evidencia las claves de contextualización emergentes y las consecuencias del uso de medios tecnológicos. En su práctica cotidiana el docente resignifica el DME ante la necesidad de implementar un acto de comunicación efectivo y eficiente en el traspaso de conocimiento desde una perspectiva pragmática. Por lo tanto, considera el contexto (situacional o cotexto, lingüístico y sociocultural), su intencionalidad didáctica y toma una serie de decisiones en un ámbito social de comunicación complejo, único, dinámico, incierto y condicionado por aspectos objetivos y subjetivos.

Palabras clave: resignificación, discurso matemático escolar, sociolingüística

Abstract. This work began from the question of how to reinterpret the school mathematical speech (DME) taking into account certain non-verbal argumentative forms which the students generally use. This report gives an account of the previous moments of the class, depending on the strategy set by the teacher when he designs their materials, and during the interaction, where his communication skills and his tactics show us the emerging contextualization cues and the consequences of the use of technological resources. In his daily practice teaching re-defines the DME because he needs to implement an effective and efficient act of communication for the transfer of knowledge from a pragmatic perspective. Therefore, he makes considerations of the context (situational or co-text linguistic and cultural), their educational intentions and then he takes decisions in a social media complex, unique, dynamic, uncertain, with influence of objective and subjective aspects.

Key words: resignification, school mathematical speech, sociolinguistics

Introducción

A partir del entendimiento de que el DME es resultante de la comprensión, uso y comunicación del saber matemático generado por consenso en el lugar donde se piensan los saberes y que Chevallard (1997) ha nominado como la noosfera; en este trabajo nos preguntamos cómo resignificar el DME teniendo en cuenta las formas de argumentación no verbales de los alumnos para que los enunciados del profesor tuvieran sentido para ellos. La resignificación es entendida como en Cordero y Flores (2007), o sea, como la categoría que permite mostrar la función de la práctica social y el desarrollo del uso de un conocimiento en situaciones específicas. Para entender esta cuestión, nos centramos en la práctica docente caracterizándola como un acto de habla intencional, reflexivo y continuo de resignificación del DME, puesto que involucra un acto de comunicación efectivo y eficiente que se genera mucho antes de la clase y no acaba al finalizar la misma. Es así que nos hemos posicionado desde la socioepistemología como marco teórico en consonancia con la construcción social del conocimiento como línea de investigación.

Entendida la comunicación efectiva con todas sus implicancias y elementos desde el punto de vista de la dimensión pragmática del lenguaje que estudia la relación signo-contexto de uso por parte de los interlocutores; nuestro marco conceptual es provisto por la sociolingüística que brinda explicaciones acerca de las razones por las cuales todo texto, oral o escrito, pudiendo ser sencillo gramaticalmente, aún así posee ambigüedad semántica que debe interpretarse a la luz de aspectos socioculturales puestos en interrelación. Vale aclarar que, aún con un silencio del emisor es imposible no comunicarse. (*Figura 1*)

Figura 1 – Comunicación efectiva según la dimensión pragmática

Este trabajo intenta explicar cómo se resignifica el DME en momentos preactivos de la clase; según la estrategia planteada por el profesor al elegir y diseñar sus materiales didácticos y también, durante la interacción, en la que el docente despliega tácticas y habilidades comunicacionales que llegan a incluir verdaderas improvisaciones sobre la marcha que ponen en evidencia las claves de contextualización emergentes del uso de recursos tecnológicos, las suposiciones e implicaturas (sobrentendidos) que se desatan y los acuerdos tácitos que se generan entre los interlocutores, según el contexto y las variables lingüísticas subyacentes en la situación comunicativa.

La praxis cotidiana del docente

Como ya se ha mencionado, en su práctica cotidiana el docente resignifica el DME ante la necesidad de implementar un acto de comunicación efectivo y eficiente desde una perspectiva pragmática en el traspaso de conocimiento. Considera, entonces, el contexto (situacional o cotexto, lingüístico y sociocultural), su intencionalidad didáctica (de la cual es el responsable) y toma una serie de decisiones en un ámbito social de comunicación complejo, único, dinámico, incierto y condicionado por una multiplicidad de componentes: objetivas (políticas, económicas, culturales, tecnológicas, institucionales, curriculares) y subjetivas (trayectoria académica y profesional, ambiciones, representaciones sociales).

Coincidiendo con Jackson (1991) esta práctica es un acto reflexivo continuo realizado en tres instancias: preactiva, interactiva y postactiva (antes, durante y después de la clase, respectivamente).

Explicaremos qué sucede en la acción reflexiva previa en la que toma decisiones sobre su metodología de enseñanza en función de los destinatarios y el contenido; y la acción reflexiva sobre/en la acción que realiza durante las situaciones propias del intercambio con los alumnos. Asimismo, aclararemos algunas cuestionesque tienen que ver con el texto instruccional como herramienta discursiva generada *ex profeso* para facilitar la construcción de conocimiento matemático en las aulas.

En la instancia preactiva el docente se avoca a modelar su clase según el diseño curricular vigente, los medios y fuentes a su alcance y sus intenciones formativas. Entendemos que se maneja en un plano macrogrupal, pensando en alumnos/situación ideales y de modo estratégico. Para ello, su análisis se dirige hacia el sujeto genérico en situación como sujeto activo de aprendizaje y selecciona aquellos contenidos e instrumentos que delinearán su propuesta en la práctica. Se trata de su acción como posibilidad y en un plano técnico del currículum.

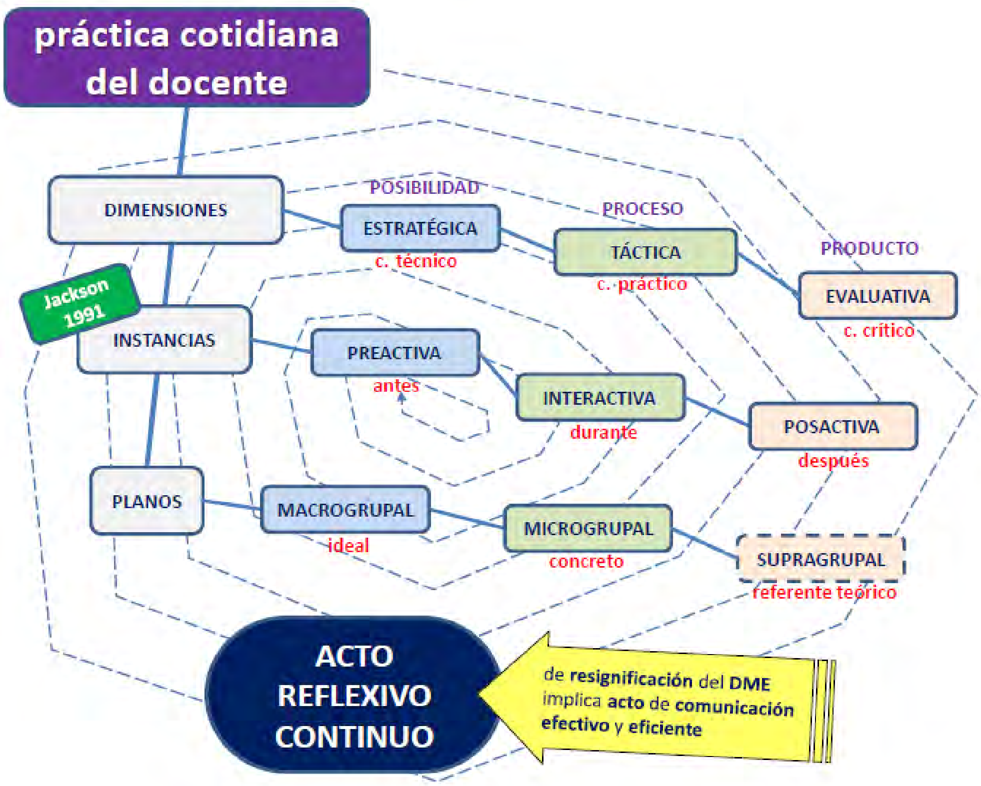


Figura 2- Análisis de la práctica docente

En la etapa o momento interactivo reflexiona sobre estos procesos en "tiempo real", revisa y redirige las acciones *in situ* o para intervenciones futuras, es decir, actúa a nivel microgrupal, con alumnos y medios determinados y de modo táctico. Su acción está llevada a cabo durante el proceso y se halla en un plano práctico del currículum. ***(****Figura 2)*

En ambos momentos del acto didáctico, como acto de habla, están presentes ciertas fuerzas: la ilocutiva (lo intencional) y la perlocutiva (los alcances, efectos). La primera de estas fuerzas enmarca el contenido discursivo y la segunda, lo contextualiza, reelabora, y resignifica en la acción. Todo lo planificadoy actuado en estas instancias implica una reconstrucción teórico-práctica con fines pedagógicos y nos proponemos hacer foco en la resignificación del DME implícito en ella.

En Lerman (2011) se explica que en los escenarios escolares, los lectos (lo que se transmite por lo que se "es") y registros (lo que se transmite por lo que "sucede") no deben ser considerados a priori de manera estereotipada y estática porque no lo son; van siendo reinterpretados a medida que la interacción avanza modificando las presuposiciones e implicaturas que desatan nuevas inferencias compartidas según los signos verbales y no verbales correspondientes a las claves de contextualización, como por ejemplo: identidad del emisor, dónde, cuándo y por qué se está desarrollando la comunicación, con qué medios, argumentaciones, etc.

Estas formas de interacción se realizan de manera multimodal-analógica en el aula (ritmo y tonos de voz, relación de cercanía, disposición del mobiliario y los objetos, expresión corporal y facial, gestos, miradas, gráficos, dibujos, expresiones simbólicas, diagramas, etc.) y el docente debe utilizar herramientas que propicien la construcción de conocimiento significativo para el alumnado porque el lenguaje literal e inferido también se va reelaborando a partir de los enunciados con claro propósito instruccional siempre y cuando las metáforas y analogías implícitas se hayan elegido "felizmente" para no obstaculizar los aprendizajes.

Algunos ejemplos de aspectos de contextualización e instruccionales del DME

Para aclarar con un ejemplo qué son las pistas de contextualización, en la*Figura 3*se puede apreciarla imagen de un vendedor ambulante que posee un cartel en su pecho con el texto "1 x 3". El cartel sólo no alcanza, se debe ir más allá desentrañando las pistas de contextualización (por ejemplo: las tres lapiceras que tiene en sus manos, su pregón y actitud, el valor de este producto en los negocios, la calidad de las mismas, las formas habituales de redacción de ofertas publicitarias en los medios gráficos, etc.), los interlocutores desatarán una serie de inferencias a partir de sobreentendidos y suposiciones debido a la polisemia del mensaje.

Esas posibles interpretaciones serían, por ejemplo: una lapicera al precio de tres (lo cual quedaría descartado), lleva tres y paga una, tres lapiceras por $1, o bien, una lapicera por $3.

En el aula, todas estas acciones necesitan el desarrollo de nuevas técnicas y destrezas comunicativas equivalentes o más efectivas que los recursos que brindan el lenguaje oral y el escrito para la comprensión de esos conceptos, también necesitan de consensos porque habrá que ir estableciendo nuevas convenciones para interpretar los enunciados mediante su uso extendido y sostenido en ambientes escolares. (Lerman, 2011).

En relación al DME, de acuerdo con lo afirmado en Castañeda (2005), no solamente el libro de texto determina la manera de abordar la planificación/intervención didáctica. También son fundamentales para esta tarea las herramientas que medien en ella junto con sus respectivas técnicas. Es decir, se pueden ir construyendo consensos sobre el tratamiento y la naturaleza del saber escolar a partir de los nuevos símbolos -cosas- con los cuales se piensa y opera en los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

Pensando en la tarea del profesor, la transposición didáctica del saber también se lleva a cabo en una dimensión tecnológica que regula el discurso con sus formas de interacción verbal y no verbal y brindando soporte a las argumentaciones.

Además de la transposición didáctica a realizar, se puede notar la existencia de una nueva actividad de reelaboración que podría llamarse transposición comunicativo-tecnológica del saber, que nace a partir de los nuevos símbolos, es decir los nuevos medios con los cuales se piensa y se "habla".

Los tipos de lenguaje utilizado en el discurso influyen en las producciones de los alumnos y tienen sus particularidades en los pasos a seguir para aprender el concepto […] estas formas de discurso no siempre se presentan aisladamente en el aula, sino que se combinan para obtener una mejor transmisión del conocimiento matemático (Crespo Crespo, 2007).

Con la inclusión de las TIC's se propician nuevas formas de reconocer categorías, construir saberes, reconceptualizar objetos, recontextualizar situaciones y resignificar el discurso matemático en el aula.

Figura 3 – Pistas de contextualización como resignificantes del DME

En la figura 4 hemos representado esquemáticamente una síntesis, a modo de ejemplo, de este proceso de resignificación del discurso matemático del profesor en una clase con estudiantes de la carrera de profesorado de matemática, donde, se partió de un enunciado típico para la construcción del "caracol de Pascal", y se pudo observar cómo fue evolucionando para adquirir mayor sentido para los alumnos.

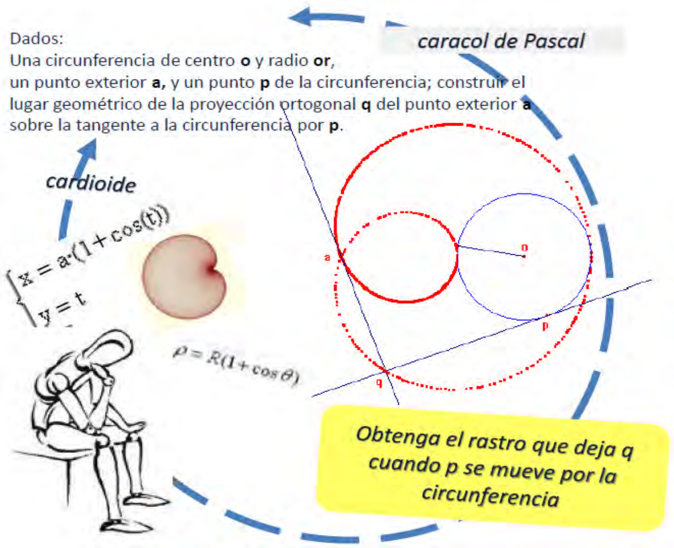


Figura 4 – Ejemplo de resignificación del DME con TIC's teniendo en cuenta las pistas de contextualización

Podemos apreciar que se trata de un enunciado o texto instruccional propio del aula de matemática (parte superior izquierda de la figura). No podría confundírselo con una noticia periodística o un cuento literario. En el ejemplo es posible inferir todo lo que habrá movilizado el docente en las instancias preactivas e interactivas de la clase descriptas anteriormente.

La clase fue preparada para que se llegara a entender qué es una cardioide y arribar a sus expresiones (figura geométrica, ecuaciones en coordenadas polares y paramétricas). Para ello el profesor diseñó una actividad con un entorno geométrico dinámico (DGE) mediacional en la resignificación de algunos aspectos del DME para ayudar a su comprensión por parte del alumnado. En otro registro (gráfico, geométrico) y a través de otro concepto (lugar geométrico), las consignas se transformaron en otras más sencillas a partir de la manipulación del DGE que, en la acción, operaron como nexo entre el lenguaje técnico y el coloquial habitual de los alumnos ayudando a la comprensión y construcción de conocimiento.

El DME, como todo discurso, es un constructo social que mayormente se presenta como texto instruccional, es decir con consignas. Por lo tanto el DME es una herramienta para comunicar información, crear y sostener relaciones sociales en los procesos de enseñanza y de aprendizaje y para expresar ideas, conceptos, intenciones o actitudes.

El DME es una herramienta discursiva mediada por enunciados que organizan la acción mental y facilitan la puesta en acción de diferentes funciones cognitivas para, por ejemplo: exponer (comprender con la ayuda de conceptos), narrar (ordenar sucesos cronológicamente), describir (diferenciar relaciones) y argumentar (juzgar, convencer, justificar). Asimismo, como herramienta discursiva, permite acceder a técnicas, labores, instrumentos, razonamientos, métodos, etc. (ver *Figura 5*)

Figura 5 – DME como herramienta discursiva instruccional

A partir de modelos básicos de interacción el DME se presenta como convenciones negociadas más improvisaciones espontáneas y como sostiene Barnes (1976) debe entenderse más como proceso que como producto.

Para entender más acabadamente esta idea debemos remitirnos a dos cuestiones: por un lado, los grupos de jazz que, a partir de unos primeros compases y una serie de convenciones compartidas improvisa el resto del tema musical y por el otro, al tener una estructura sólida pero flexible con tipos de actividades con formatos textuales determinados (tanto orales como escritos, verbales y no verbales, mediados por las TIC's) puede prestarse más atención al contenido que a la forma, aceptar y aprovechar lo imprevisto y permitir entrar en debate para cambiar el marco de referencia por uno superador, nuevo.

Algunas conclusiones

La praxis docente es un acto de habla reflexivo, intencional y continuo donde la explicitación de enunciados y procedimientos dependen del carácter de los símbolos, el modo de operar con ellos, el contexto, los actores y la cultura institucional.

El DME es una herramienta y un proceso (más que un producto) que puede ser resignificado si se comprenden las claves de contextualización y se presta especial atención a los aspectos que inciden en el manejo recursos tecnológicos actuando como mediadores en la comprensión y construcción de conocimiento y objetos matemáticos por parte de alumnos y profesores.

Nos hemos enfocado en una parte constituyente de ese DME, donde actualmente el profesor realiza su transposición didáctica-comunicativo-tecnológica, entendida como comunicación efectiva desde la perspectiva pragmática, en donde es fundamental el contexto porque otorga organización y significatividad a ese aspecto del DME. Es así que con su actividad, el profesor enmarca y resignifica el contenido discursivo mediante el texto instruccional que emerge según el medio empleado y con el aporte de todos los sujetos que interactúan en el transcurso de las clases.

Referencias bibliográficas

Barnes, D.(1976). *From communication to curriculum.* Londres: Penguin.

Castañeda, A.(2005). Mecanismos para la Difusión del discurso Matemático Escolar. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18, 469-476*. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cazden, C.(1991). *El discurso en el aula: El lenguaje de la enseñanza y del aprendizaje.* Buenos Aires: Paidós.

Chevallard, Yves (1997). *La transposición didáctica. Del Saber Sabio al Saber Enseñado*. Buenos Aires: AIQUE.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, marzo, 7-38.

Crespo Crespo, C.(2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología*. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Gimeno Sacristán, J. (1988). *El Currículum: una reflexión sobre la práctica*. Madrid: Morata.

Jackson, P.(1991). *La vida en las aulas*. Madrid: Morata.

Lerman, N.(2011). *Argumentaciones gestuales y visuales en escenarios escolares: su aprovechamiento en la construcción del conocimiento matemático*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Silvestri, A. (1995). *Discurso Instruccional.* Buenos Aires: Ciclo Básico Común de la UBA.

EL INFINITO COMO EVIDENCIA DE CONFLICTOS EN DISCURSO DE LOS DOCENTES

Patricia Lestón
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González" Argentina
patricialeston@gmail.com

Resumen. El infinito ha sido estudiado a lo largo de los años y desde diversos marcos teóricos, con múltiples objetivos: el acercamiento de esta noción al aula, la identificación de obstáculos, la evolución del concepto, sólo por mencionar algunos. En nuestro caso, la búsqueda estuvo guiada por la necesidad de comprender los motivos por los cuales existen tantas dificultades en la construcción de nociones asociadas al cálculo, que entendemos, descansan sobre la noción de infinito, desde una visión socioepistemológica. En este estudio, hemos encontrado que el discurso matemático escolar, y los docentes, como representantes de ese discurso, plantean en las aulas situaciones y lenguajes que generan conflictos: el discurso se mueve en dos campos, uno analítico y uno algebraico, tanto para las funciones como para el infinito, que hacen que el alumno se sienta enfrentado continuamente entre lo que se dice, lo que se define y lo que se hace.

Palabras clave: infinito, contradicciones, práctica social

Abstract. The concept of infinite has been studied through centuries from different theoretical perspectives, with many different purposes: how to take this idea to school, what obstacles emerge from its study, the historical evolution of the concept, among others. In this case, our quest, from a socioepistemological point of view, was based on the need to understand the reasons that make calculus so hard for students, with the strong belief that is the infinite hiding beneath that makes this happen. In this research, we have detected that teachers as representatives of the mathematical scholastic discourse present their students with actions, words and ideas that contradict each other, mixing algebraic and analytical references, both for infinite and functions. That behavior causes students to get lost in a scene where they are faced with contradiction between what is said and done.

Key words: infinite, contradictions, social practice

Introducción

El infinito es un concepto que a lo largo de la historia atrajo a pensadores de diversas áreas del conocimiento por las dificultades en su tratamiento y abordaje científico y didáctico. Al incluirlo en la ciencia provocó numerosas paradojas y contradicciones que hicieron que durante siglos no fuera posible un tratamiento formal del mismo Sin embargo, difícilmente podríamos en la actualidad trabajar ciertos contenidos en el aula de los distintos niveles educativos, si no habláramos de este concepto.

La escuela actual responde a las necesidades de una comunidad de la que es parte, que determina qué conocimientos deben construirse al seno de ella y qué otros conocimientos pueden ser relegados o dejados de lado. El discurso matemático escolar predominante de la escuela media en la Argentina, tiene como uno de sus contenidos más relevantes a las funciones. Se incluyen en el estudio y tratamiento de las funciones gran cantidad de elementos, uno que es central en la comprensión y análisis de las funciones es la noción de infinito. Y sin embargo esa noción no es parte de ninguno de los currículos de la escuela media. ¿Por qué? Se parte del supuesto que la familiaridad del término en escenarios no escolares hace que los docentes y los investigadores que diseñan los contenidos de la escuela asuman que no es una necesidad. También se puede considerar que la complejidad propia del concepto sea una de las razones por las cuales esto ocurre.

Lo que se desea es reconocer el concepto de infinito factible de ser construido en las aulas de matemáticas. Si bien se parte del supuesto que no ocurre la construcción de esta noción en la escuela media, sí la hay en los cursos de Álgebra superior de la carrera de Profesorado en Matemática. Los futuros docentes transitan por una institución que incluye en sus diseños curriculares el estudio del trabajo de Cantor en los conjuntos infinitos y números transfinitos, lográndose así que los estudiantes de Profesorado enfrenten a sus cursos de escuela media con un constructo teórico que les permite enfrentar en el aula las situaciones que llevan a la discusión en relación al infinito.

Sin embargo, no se vislumbran en las escuelas medias propuestas de su construcción, o de discusión al menos, de lo que es el infinito. Se sigue aceptando, como se concluyera en Lestón (2008), que es lo que los estudiantes traen de los escenarios no escolares, aquello con lo que se cuenta en las aulas de escuela media. Y es sabido que eso no es suficiente ni funcional respecto a lo que el discurso matemático escolar precisa.

La investigación con ese objetivo planteado se realiza desde una aproximación socioepistemológica, que mediante un estudio sistémico y situado del conocimiento permite, a través del reconocimiento de las prácticas sociales, comprender cómo es que el infinito ha aparecido a lo largo de la evolución del conocimiento científico y se ha constituido en concepto matemático (Cordero, Cen Che y Suárez Téllez, 2010).

La socioepistemología como marco teórico de esta investigación

Creemos que es la socioepistemología el marco teórico que nos ha dejado crecer en su seno, ver las realidades de nuestras aulas de la manera en que lo hacemos, y preguntarnos las cosas que nos permite esta aproximación sistémica, que pone el foco en los procesos de construcción que se dan al seno de una comunidad.

> Las investigaciones que hemos desarrollado a fin de “hacer ver” la postura descrita, han seguido una aproximación sistémica que permite tratar con las cuatro componentes fundamentales de la construcción social del conocimiento, a saber; su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, el plano cognitivo

> y los modos de transmisión vía la enseñanza. Esta aproximación múltiple ha sido nombrada como el acercamiento socioepistemológico (Cantoral, 2001, p. 65)

La construcción social de ese conocimiento es el foco de la mirada: entender que todo conocimiento es producto de una necesidad y una serie de acciones que están sustentadas por una idea que las provoca y en un escenario sociocultural particular que permite que acontezcan.

> El dominio matemático obliga a explicar la matemática desde la matemática misma y, en consecuencia, soslaya a lo humano y a los sentidos de todo el saber matemático. Se trata, entonces, de identificar o construir aquellos marcos o prácticas de referencia en los que se manifieste el uso del conocimiento matemático; es decir, donde sucede su funcionamiento y su forma orgánica en la situación específica. Ahí aparecerán elementos que no corresponden a las justificaciones razonadas que norman alguna estructura lógica, sino que atañen a la utilidad del participante en la situación específica. Es por eso que no nos importa el estudio del conocimiento matemático, sino el estudio de la función del conocimiento matemático. (Cordero, Cen Che y Suárez Téllez, 2010, p. 189)

Hay entonces una realidad socialmente compartida, una necesidad o pregunta que nace de esa realidad y una serie de acciones que ocurren al seno de una comunidad en la búsqueda de encontrar respuesta a lo que se preguntan. Sin una necesidad no hay construcción, sin uso no hay acción. La socioepistemología proclama estas ideas, declara que es ese tipo de situaciones las que debemos acercar al aula. Y propone para ello una mirada global, sistémica, compleja, que incorpora todo aquello que interviene en los momentos de construcción de conocimiento. Como eje rector de la mirada que propone el marco, se define dentro de esta aproximación teórica una noción que ha sido eje de muchas investigaciones, la de práctica social. Consideramos como definición de esta noción la propuesta por Cantoral, Farfán, Lezama, Martínez Sierra (2006).

> La *práctica social* la entendemos como <u>normativa</u> de la actividad, más que como actividad humana reflexiva o reflexión sobre la práctica [...]En sus investigaciones, los socioepistemólogos reportan más bien caracterizaciones del ejercicio de las prácticas que anteceden a la producción o construcción de conceptos y al desarrollo del saber. (Cantoral, Farfán, Lezama, Martínez Sierra, 2006, p. 85)

Compartimos esta idea que sustenta el espíritu de esta mirada que nos ha adoptado y que nosotros hemos aprendido a ver desde adentro. Cordero et al (2010) presentan sin dejar lugar a dudas los motivos por los cuales resulta de relevancia identificar las prácticas sociales que norman las acciones que llevan a la construcción de conocimiento matemático.

> Una vez identificadas las prácticas sociales que dieron y dan cuenta del conocimiento matemático necesitan ser reinterpretadas para integrarse al sistema didáctico, donde precisan de la intencionalidad (de producción, en el sistema didáctico) para que se desarrollen en las condiciones del sistema. (Cordero, Cen Che y Suárez Téllez, 2010, p. 190)

Ahora sí, sabemos cómo mirar nuestra realidad, cómo identificar lo que es importante (prácticas en lugar de objetos), y qué debemos hacer con eso que encontramos. Sin embargo, las prácticas sociales, como definen Cantoral et al (2006), no son acciones sino normativas, o sea, no son visibles. Sin embargo, otros investigadores de este campo y de esta aproximación teórica han ido desarrollando elementos que dan pautas de qué debemos tener en cuenta para ver aquello que es invisible.

Por un lado, una noción que permite situar a las prácticas sociales es la de escenariosociocultural, que define Crespo Crespo (2007), tomando como base elementos de la psicología ecológica.

> Escenario sociocultural: son los ámbitos en los que actúan los grupos sociales. Están definidos por prácticas culturales específicas que manifiestan necesidades de tipo ideológico, psicológico, fisiológico o ambiental de los individuos que constituyen las sociedades específicas. En estos escenarios se explicitan peculiaridades históricas y cotidianas, de carácter filosófico, epistemológico, ideológico, o podemos decir más generalmente: culturales (Crespo Crespo, 2007, p. 7)

Los escenarios sí son visibles, podemos entender de manera directa que cada grupo actúa de acuerdo a uno de esos escenarios. Todos esos escenarios hacen aportes a la manera en que las personas piensan y entienden al conocimiento matemático. Y si bien no todas las personas son parte de todos esos escenarios, sí ocurre que por lo general, se transita por más de un escenario. Y esos contextos en los cuales se vive y se construye conocimiento e identidad, no son entes estáticos ni estancos: se superponen, se modifican unos a otros, se influyen de manera en que cada uno aporta continuamente cosas a los otros en las mentes y las manos de quienes por ellos transitan. Espinoza (2009), aporta a la comunidad y a la teoría otro elemento que construye sobre la idea de escenario sociocultural, y es la noción de contexto de significación.

> El contexto de significación de cierto conocimiento es el ámbito en el cual cierta persona o colectivo sitúa la significación de cierto conocimiento en cierto escenario sociocultural. Estos contextos nos permitieron acercarnos a la mirada de los autores respecto a sus obras, de manera de entender las intencionalidades subyacentes y las ideas germinales de las obras. Los contextos de significación de ciertos conocimientos tiene tres dimensiones: la situacional, la sociocultural y la de la racionalidad, en las cuales se sitúa la significación del conocimiento matemático. (Espinoza, 2009, p. 150)

El escenario sociocultural se transforma entonces en un ámbito de interacción sociocultural que, además de estar vivo y siendo modificado continuamente por sus actores, permite construir significados propios de una comunidad a un conocimiento de acuerdo a las necesidades y cultura propia de esa comunidad. Podemos decir que de esta manera, la comunidad que construía conocimiento en base a las prácticas sociales que normaban las acciones, tiene un ámbito que hace que esas normas estén sujetas a otras, más generales y que norman no sólo la manera de hacer las cosas sino de entender sus necesidades y proponerse preguntas que harán que aparezcan prácticas que normen acciones. La práctica social de una comunidad estará entonces sujeta a un contexto de significación que, como escenario sociocultural, hará que el problema que surge de esa realidad se aborde en función de un bagaje cultural y cuya construcción de conocimiento se dé asociada a un significado que es el necesario para los requerimientos de esa comunidad.

Identificación de las prácticas sociales asociadas al infinito

Se pueden identificar a lo largo de la historia dos procesos que van apareciendo alternadamente y que buscan dar respuesta a la misma necesidad: definir cuál es la extensión del espacio, o mejor dicho, modelizar el universo. Esa necesidad fue abordada desde Oriente y Occidente, y finalmente se llegó a esclarecer dicha extensión desde esas dos culturas, con el paso de los siglos. El Universo es infinito, pero el cómo es lo que da sentido a la diferencia que aún hoy encontramos en las aulas de matemática.

Se puede asegurar que es Newton el que primero llega a la afirmación de un universo infinito, a partir de la distinción que hace entre espacio absoluto y espacio relativo. Ese infinito del que Newton habla es el infinito físico, que existe en el espacio absoluto para que el otro espacio, el relativo, pueda existir. Lo que logra Newton con esto último es la matematización del espacio desde la geometría, es decir, se construye la geometrización del espacio, logrando así que ese infinito de la física presente en la extensión real del universo, se transforme en el infinito de la matemática, vinculado al tamaño, lugar o extensión (Koyré, 2008).

Ese infinito relacionado con el movimiento, con la posibilidad de variar de posición un objeto a lo largo del tiempo sin que nunca llegue a un lugar donde deba detenerse, es el que puede asociarse con el infinito de la geometría y el estudio de las curvas al modo que Newton las concebía, y con el infinito del análisis, al modo en que está presente en el discurso matemático escolar actual. El contexto de significación en el cual se dan estas caracterizaciones del infinito, es el contexto del análisis, reconocido como una de las producciones en las cuales Newton tuvo más protagonismo. Lo que Newton necesitaba hacer era concebir y explicar el movimiento, poder medirlo, y para eso necesitaba un marco que le quitara los límites. Eso se lo dio el universo infinito otorgando a la matemática un nuevo objeto científico. Es la medida de movimiento, en particular la "noción de cantidad" lo que hace que se dé en la historia de la matemática otra construcción del infinito, una que es concebida desde las cantidades y que es la que ha inundado al discurso matemático escolar del álgebra superior de las instituciones formadoras de docentes en la Argentina. Esa construcción es la que realizó Cantor (2006).

Cantor estaba también intentando realizar una tarea de modelización, no ya del universo sino de todo aquello que fuera conocimiento de las ciencias naturales a partir de un sistema conceptual formalmente matemático. Bajo esa idea, en la búsqueda de ese sistema, es que replantea la modelización del universo, pero no ya desde cuestiones relativas a la física, sino a las cantidades, noción que después de Newton se transforma en eje rector de muchos de los avances de la matemática (Camacho, 2004). Es en la matematización de esas cantidades, relacionadas con la extensión del espacio, que Cantor logra la definición de su infinito, el infinito de la matemática. Las cantidades de las que Cantor se ocupa se vinculan de manera directa con los números y con la acción de contar.

En ese contar, se pueden clasificar a las cantidades en contables, incontables, y aquellas que no pueden contarse por su propia naturaleza ontológica y no por la imposibilidad humana de llegar al final antes de que se le acabe el propio tiempo. Así como se dice en el párrafo anterior que Newton logra la geometrización del espacio, puede afirmarse que Cantor logra la aritmetización de las cantidades infinitas, construyendo así un infinito que responde a la noción de cardinalidad y a lo que se entiende es el infinito del álgebra, que se desarrolla dentro de ese contexto de significación.

Estos dos infinitos, el del álgebra y el del análisis, son parte del discurso matemático escolar, aunque sólo uno de ellos es parte de lo que el discurso quiere construir, aquel que Cantor logró formalizar a través de su aritmética transfinita. El otro, el de Newton, aquel que permite entender las nociones de cálculo, aparece pero es ignorado, aún cuando es evidente que su presencia no transparentada es uno de los grandes problemas de la educación media actual.

Resultado de las indagaciones realizadas

Resulta evidente que el estudio de funciones que se logra tanto en la escuela media como en el Profesorado, está determinado por el lenguaje y tratamiento conjuntista. Las funciones son así entes estáticos, que no permiten manifestaciones de variación ni representaciones de lo que cambia. Esa visión hace que quede oculto el sentido potencial del infinito que interviene en el discurso del cálculo.

Los alumnos de Álgebra III que han construido ideas asociadas a la teoría de transfinitos de Cantor, tampoco puede ver en las funciones representaciones del discurso variacional, con lo cual la seguridad que les da el conocimiento de una teoría que fundamenta el tratamiento del infinito se transforma en obstáculo para reconocer las limitaciones que ese infinito, propio y actual de Cantor, tiene frente al tratamiento de funciones.

El objetivo de la presente investigación fue planteado en dos sentidos, y es de ese modo que se pretenden analizar los resultados: por un lado, detectar las características que tienen el infinito que está presente en el discurso matemático escolar de la escuela media; y por otro, analizar cuáles son las construcciones que del infinito se hacen en la formación docente. Desde el conocimiento personal de la carrera de Profesor de Matemática, se sabe que el infinito como objeto a ser construido (al menos en una de sus manifestaciones) es parte del discurso matemático escolar del Profesorado. Y por otro lado, desde el conocimiento de lo que ocurre en la escuela media en la Argentina, se sabe que el infinito no es ni siquiera discutido tangencialmente en ese nivel educativo. El problema que se detectó tiene que ver, entonces, con las causas que hacen que esa noción, que sí es parte de lo que el futuro docente construye, no llegue a las aulas de escuela media.

Los alumnos que respondieron a cuestionarios han construido un discurso conjuntista para las funciones, pueden explicar los procesos de cálculo de límites y velocidad de cambio. Sin embargo, no pueden darle sentido a lo que significa lo que hacen o los resultados a los cuales llegan. No pueden presentar un discurso coherente en relación a lo que representa una gráfica, que pueden construir sin ningún problema cuando se les haya dado una fórmula que la representa. Resulta ser que el análisis, que es el contexto de significación del infinito de la variación, no es contexto de significación para ninguna de las nociones del análisis: ni las funciones, límites y derivadas, tienen significado, no hay un contexto de significación para ellas, sino una serie de algoritmos que se reproducen a la perfección para lograr superar lo que el contrato didáctico demanda.

Aun cuando los alumnos del Profesorado pueden ver los problemas de la educación secundaria, no tienen forma de enfrentarlos. En toda su formación no hay espacios en que se les enseñe a cuestionar lo que se hace en la escuela. Y la realidad es que cuando son puestos en evidencia, la sensación de vacío que sufren es mayor que lo que pueden manejar. No pueden aceptar que el infinito que han construido no alcance, no sea suficiente para algo que, peor aún, ya han estudiado y aprobado en los primeros cursos de su formación. Es necesario darles herramientas para poder enfrentar los cursos en los cuales van a trabajar, porque los próximos treinta años de educación de escuela media van a estar sujetos a lo que los egresados logren construir. No alcanza modificar lo que ocurre en una clase o en una escuela, es necesario llegar a los institutos de formación docente y cambiar esa formación, anquilosada y enquistada en viejas prácticas, que colocan al conocimiento en una posición donde el alumno no puede más que *comprarlo*, y a la ciencia en un lugar donde lo que importa es que sea formal y rigurosa, aun cuando eso no permita comprender lo que realmente se está haciendo.

Conclusiones

El infinito que se detectó es necesario para la escuela secundaria, resulta ser entonces el que nace de la visión dinámica de lo que se mueve, el que se construye en la búsqueda de los límites del espacio, el que llega a Newton habiendo nacido de la contemplación de los pueblos más antiguos. Ese infinito, que está más próximo que cualquier otro al que todos construimos desde la intuición, es el que los alumnos precisan para entender lo que sustenta a las funciones. Sin embargo, el infinito sólo no alcanza. El discurso matemático escolar hace uso de una forma de entender las funciones que están enfrentado con ese infinito. Si el infinito que tiene sentido para el análisis es dinámico, entonces el registro en que presentan las funciones debería también ser dinámico. Mantener a las funciones en un registro estático e intentar construir un infinito dinámico sería introducir otro objeto de conflicto en la escuela. Es tan profundo el cambio que se necesita, que sólo la identificación del tipo de infinito involucrado resulta insuficiente.

El rediseño que se hace necesario es muy complejo, profundo, y lamentablemente en el sistema educativo argentino los cambios se hacen alejados de la investigación educativa, ya que quiénes los hacen lejos están de la tarea educativa. Creemos que el lugar donde podemos impactar es en el Profesorado y cambiar las nociones que los futuros docentes construyen en esa institución; porque de esa manera ellos cambiarán el discurso de las aulas cuando estén desenvolviéndose como docentes. El impacto será entonces en las mentes y manos de los docentes y no en los papeles, que para los que están inmersos en el sistema, poco importan.

Referencias bibliográficas

Cantor, G. (2006). *Fundamentos para una teoría general de conjuntos. Escritos y correspondencia selecta*. J. Ferreirós (Ed.), Barcelona: Crítica.

Cantoral, R. (2001) Sobre la articulación del Discurso matemático escolar y sus Efectos Didácticos. En G. Beitía (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 14*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R., Farfán, R.; Lezama, J. y Martínez Sierra, G. (2006). Sociología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Número especial*, 83-102.

Cordero, F., Cen Che, C. y Suárez Téllez, L. (2010). Los funcionamientos y las formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa13 (2),* 187-214

Crespo Crespo, C. (2009). El aula de matemática, hoy: una mirada desde la docencia y la investigación en Matemática Educativa. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22*, 1145-1153. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Espinoza Ramírez, L. (2009). *Una evolución de la analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un estudio socioepistemológico*. Tesis de maestría no publicada. CINVESTAV del IPN, México.

Koyré, A. (2008). *Del mundo cerrado al universo infinito.* Buenos Aires: Siglo XXI editores.

Lestón, P. (2008). *Ideas previas a la construcción del infinito de escenarios no escolares*. Tesis de Maestría no publicada. CICATA del IPN, México.

Lestón, P. (2011). *El infinito en el aula de matemática. Un estudio de sus representaciones sociales desde la socioepistemología*. Tesis de Doctorado no publicada. CICATA del IPN, México.

CATEGORÍA 4

EL PENSAMIENTO DEL PROFESOR, SUS PRÁCTICAS Y ELEMENTOS PARA SU FORMACIÓN PROFESIONAL

Introducción al Capítulo de El pensamiento del profesor, sus prácticas y elementos para su formación profesional

Claudia María Lara

Universidad Panamericana. (Guatemala)
claudialaragalo@gmail.com

Los resultados de investigación y la experiencia muestran que la calidad de la educación recae, antes que en los insumos, materiales, libros de "texto", uso de tecnología, metodología o formas de evaluación, en los profesores, en su preparación y en su actuación. Por ejemplo el estudio de SERCE expone que "El clima escolar es el que mayor influencia ejerce sobre el rendimiento de los estudiantes y éste se genera por las actitudes de los docentes hacia el aprendizaje y hacia el alumno" (SERCE 2008, p.45). De ahí que cualquier esfuerzo dirigido a aumentar sus conocimientos (tanto en cantidad como en profundidad) y a mejorar su prácticas en el aula, estará apuntando al blanco correcto. Sin embargo, cabe cuestionarse ¿qué priorizar? ¿Qué acciones serán más efectivas? Los trabajos que se realizan en torno a este tema pueden dar respuestas a dichas interrogantes y brindar orientaciones precisas. Existen modelos de formación de profesores que atienden a sus necesidades reconocidas y a las expectativas que la sociedad tiene de ellos. Falta implementar en forma eficiente y generalizada, de acuerdo a los resultados y atendiendo a las sugerencias de las investigaciones.

Algunos elementos que proponemos considerar a la hora de revisar los trabajos de este capítulo, son los siguientes: Comenzar por establecer un perfil muy detallado tanto del estudiante de magisterio como del profesor en servicio. El perfil debería incluir diferentes elementos. Dice Zambrano (2006) que "(…) el profesor es poseedor de tres tipos de saber. El de la disciplina, cuya característica fundamental es la reflexión que él lleva a cabo sobre el conocimiento que se produce en su campo disciplinar; el pedagógico a través del cual comunica las reflexiones sobre la disciplina, y el académico, caracterizado por el ejercicio de escritura resultado de los dos anteriores." (Zambrano, 2006, p226). Desde las motivaciones para seguir la carrera, hasta las expectativas del profesor respecto a cómo se va a desempeñar, cuál es su rol social y cómo cree que debería ser reconocido su trabajo, pasando por sus percepciones acerca de la matemática, de la matemática educativa y de la educación en general, todo debe incluirse en el perfil inicial. Las prácticas dentro del aula –y fuera de ella tanto en su relación con los alumnos como en el tiempo que dedica a su formación, por ejemplo- se pueden listar y clasificar para posteriormente contrastar con las ideas que el profesor enuncia. ¡Qué diferente lo que un profesor dice basándose en la teoría que ha estudiado y lo que hace! Sencillamente, a la hora de actuar, prevalecen en él los hábitos, las percepciones y las realidades que vivió por lo que reproduce, sin darse cuenta, la clase de matemática que él ha recibido a lo largo de los años: una clase enfocada a la memorización algorítmica, con poco espacio para el diálogo y el trabajo en equipo, que apenas dedica tiempo a la reflexión, a la construcción de conceptos y al diálogo entre pares.

Establecido el perfil general, es el momento de revisar la actitud ¿qué cree el profesor acerca de su trabajo? ¿Ve la posible trascendencia y el impacto de su desempeño en la vida de los niños? ¿Lo ve más allá del aula? ¿Cree que puede trabajar de forma diferente, ayudando a los niños a acercarse a la matemática en lugar de huir de ella? ¿Cómo organiza sus sesiones de clase? ¿Cómo construye el ambiente en el aula, tanto el físico como el emocional? ¿Qué está dispuesto a hacer por mejorar?

Entramos ahora a la fase de la formación. Esta es quizás la parte más compleja del análisis. Involucra desde la construcción de modelos de formación inicial y continua, hasta la forma de implementarlos y evaluar su impacto. Una combinación de modelaje, acompañamiento y registro de experiencias exitosas parece ser la mejor forma de cambiar las prácticas del docente en el aula para lograr los cambios necesarios. El cambio en el aula es el único que tiene un impacto duradero y la única posibilidad de mejorar la calidad del aprendizaje. Los cambios curriculares en papel y las reformas que se originan en las instancias oficiales, así como las propuestas que los libros de texto más interesados en la venta que en la oferta de calidad, no cambiarán el aula. El profesor lo hará. Por eso importante ayudarlo a mejorar su actitud, acostumbrarlo al continuo cuestionamiento de sus prácticas, ofrecerle oportunidades de cuestionar y ampliar sus conocimientos, ayudarlo a establecer formas de registrar sus logros y dificultades y lograr que desee mantenerse en un camino de formación constante. El docente que logre generar procesos de investigación-acción dentro de su aula será el que se mantendrá actualizado y el que podrá generar cambios auténticos en la educación. Restrepo (2004) encuentra que "Los resultados positivos de la validación de la práctica nueva confirman los conocimientos incorporados en la estructura de la nueva práctica bien sea que se hayan tomado de la teoría pedagógica o que sean producto de la indagación e interpretación personales del docente, al enfrentar la aceptación de la teoría". (Restrepo, 2004, p53). El papel de la investigación en la formación docente tendrá entonces un significado más profundo. Además de obtener resultados, podrá generar reflexiones que lleven a mejores prácticas y mejor aprendizaje de la matemática, que es el fruto esperado de la docencia.

Referencias bibliográficas

Laboratorio Latinoamericano de Evaluación de la Calidad de la Educación (LLECE) con respaldo de UNESCO (2008). *Segundo Estudio Regional Comparativo y Explicativo SERCE. Los* *aprendizajes de los estudiantes de América Latina y el Caribe*. (Resumen ejecutivo, 2008). Chile: Salesianos Impresiones.

Morales, L. (2009). *Competencias docentes para el ciclo primario guatemalteco*. Guatemala: USAID.

Proyecto Tuning-América Latina. (2007). *Reflexiones y perspectiva de la Educación Superior en América Latina.* Informe final. España: Publicaciones de la Universidad de Deusto.

Restrepo, B. (2006). La investigación-acción educativa y la construcción de saber pedagógico. *Educación y educadores 7,* 40-55.

Zambrano Leal, A. (2007). Tres tipos de saber del profesor y competencias: una relación compleja. *Educere*. Colombia. Universidad Santiago de Cali. Año 10, No. 33. Abril a junio de 2007. 225 a 232.

COMPETENCIA DE LOS FUTUROS PROFESORES EN EL RENOCIMIENTO DE PROCESOS MATEMATICOS

Norma Rubio, Vicenç Font, Anton Aubanell, Antoni Benseny, Susana Ferreres.
Universidad Pontificia Universidad Católica del Perú, Universitat de Barcelona Perú y España
nrubio@pucp.edu.pe, vfont@ub.edu, aaubanell@ub.edu, abenseny@ub.edu, sferreres@ub.edu

Resumen. Se presenta un aspecto parcial de la investigación realizada en el marco de dos proyectos cuyo objetivo es investigar cómo el desarrollo de la competencia en el análisis de procesos y objetos matemáticos, activados en las prácticas matemáticas, es un paso necesario para desarrollar la competencia profesional del profesorado que permita la evaluación de las competencias matemáticas de los alumnos. En concreto, nos hemos preguntado — en el marco de un experimento de enseñanza cuyo objetivo es desarrollar la competencia en el análisis de procesos y objetos matemáticos activados en las prácticas matemáticas — si la inferencia de procesos propuesta en el enfoque ontosemiótico (Font, Rubio y Contreras, 2008) es similar a la que realiza un grupo de futuros profesores de secundaria de matemáticas cuando se les proponen las mismas tareas.

Palabras clave: competencia, procesos matemáticos, formación inicial

Abstract. This paper describes part of the research carried out within the framework of two projects. The aim of these projects is to investigate how competence in the analysis of the mathematical processes and objects that are activated within mathematical practices is a necessary step that teachers must first develop if they are to evaluate the mathematical competences of their pupils. The focus here was on a teaching experiment that sought to develop teachers' competence in the analysis of these processes and objects, and the specific question addressed was whether the inference of processes proposed by the onto-semiotic approach (Font, Rubio & Contreras, 2008) is similar to that observed among a group of prospective secondary school mathematics teachers when asked to perform the same tasks.

Key words: mathematical processes, initial training, competence

Introducción

La tendencia actual en los currícula que organizan la educación secundaria es un enfoque competencial en el que se considera que saber matemáticas conlleva saber aplicarlas a situaciones no matemáticas de la vida real. Esta tendencia, en algunos países, como es el caso de España, se ha concretado en el diseño de currícula que entienden la competencia matemática de los alumnos de manera similar a como se entiende en el informe PISA 2003. En el estado español, cada comunidad autónoma elabora su propio curriculum a partir de unas orientaciones generales válidas para todo el estado. En el caso de Catalunya, comunidad autónoma del estado español en la que se desarrolla la investigación que presentamos, el currículum de secundaria contempla, además del desarrollo de la competencia matemática, el aprendizaje de procesos matemáticos.

La tendencia a una convergencia internacional en el diseño de los planes de estudio universitarios, y en particular los que se refieren a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria, han impulsado un conjunto de reformas que, en el caso de España, han dado lugar a la implantación de un título de máster. Este máster habilita para el ejercicio de la profesión de Profesor de Educación Secundaria de Matemáticas y su currículum, siguiendo las tendencias internacionales, se organiza por competencias profesionales. Este tipo de currículum conlleva el problema de cómo conseguir que los profesores tengan la competencia profesional que les permita la evaluación de las competencias matemáticas señaladas en el currículo de secundaria.

Dada la estrecha relación existente entre “procesos matemáticos” y “competencias matemáticas” estamos desarrollando dos proyectos de investigación sobre esta relación en el contexto de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Ambos tienen, entre otros, el objetivo de investigar cómo el desarrollo de la competencia del profesorado en el análisis de procesos y objetos matemáticos, activados en las prácticas matemáticas, es un paso necesario para desarrollar la competencia profesional que permita la evaluación de las competencias matemáticas de los alumnos. Se trata de desarrollar aspectos parciales relevantes de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores de secundaria de matemáticas. En términos del modelo de Ball y colaboradores (Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Hill, Ball y Schilling, 2008) se trata de desarrollar, sobre todo, aspectos del *conocimiento especializado* y también del *conocimiento ampliado.*

En este reporte presentaremos un aspecto parcial de la investigación realizada en el marco de los dos proyectos de investigación comentados anteriormente. En concreto nos hemos preguntado si la inferencia de procesos propuesta en Font, Rubio y Contreras (2008) es similar a la que realizan los alumnos del Máster de Formación Inicial de Profesores de Secundaria de Matemáticas (MFPSM) de la Universitat de Barcelona (UB) en el marco de un proceso formativo realizado en el marco de un experimento de enseñanza cuyo objetivo es desarrollar su competencia en el análisis de procesos y objetos matemáticos, activados en las prácticas matemáticas.

En Font et al (2008) se presenta un desarrollo del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (Godino, Batanero y Font, 2007) afrontando la problemática del encaje de los “procesos matemáticos” dentro de dicho marco teórico. Primero se ilustran, con ejemplos, los 16 procesos asociados a las configuraciones de objetos y a las facetas duales considerados en dicho enfoque teórico. A continuación se propone considerar a la resolución de problemas o a la modelización como mega procesos y se reflexiona sobre la relación entre estos últimos y el grupo de procesos considerado inicialmente. Font et al (2008) utilizan los lentes que les ofrece su marco teórico para reflexionar sobre los procesos matemáticos y para proponer una clasificación de procesos, que es consecuencia de dicha aproximación teórica.

Dicha propuesta se ilustra con ejemplos de tareas y episodios de aulas en los que, según los autores, se pueden inferir los procesos considerados en su aproximación teórica. Se trata de un artículo teórico que no se sustenta en datos empíricos.

La pregunta correspondiente a la parte de la investigación que presentamos en este reporte es si la interpretación que se hace en Font et al (2008) sobre la inferencia de procesos, a partir de en una lista de ítems (llamados ejemplos) en los que se da una tarea como entrada y una respuesta del alumno como salida, es la que también hacen los alumnos del Máster de FPSM de la UB. Nuestra hipótesis de partida era que, a pesar de la ambigüedad que presenta la inferencia de procesos, (1) la moda de las respuestas de los alumnos en cada ítem de la evaluación diagnóstica inicial coincidiría con la inferencia de procesos que se realiza en Font et al (2008) y que, después de haber dedicado 4 horas al estudio de procesos en el ciclo formativo, (2) la moda de las respuestas de los alumnos a los ítems del mismo cuestionario volvería a coincidir con la inferencia de procesos que se realiza en Font et al (2008) y, además, sería en general mayor.

Metodología y recogida de datos

Se observaron dos sesiones de clase, de 2 horas cada una, de la asignatura de Didáctica de Matemáticas impartida en el Máster de FPSM de la UB correspondientes al contenido "procesos matemáticos" del tema 1 de dicha asignatura.

Las modalidades de trabajo fueron, en orden temporal: 1) explicación del profesor a todo el grupo, 2) trabajo individual de los alumnos en el que tuvieron que contestar, a partir de una lista de 16 ítems (llamados ejemplos), un cuestionario en el que en cada ítem tenían que inferir un proceso seleccionándolo de una lista de procesos agrupados en familias, 3) explicación del profesor a todo el grupo, 4) trabajo individual de los alumnos en el que tuvieron que contestar por segunda vez el cuestionario inicial, 5) comentario y reflexión en gran grupo sobre las respuestas de los alumnos a los dos cuestionarios.

El objetivo del tema 1 de la asignatura, en el que estaba incluido el estudio de los procesos matemáticos, era conseguir primero una reflexión de los futuros profesores sobre procesos matemáticos en general para profundizar después en tres procesos: resolución de problema, modelización y argumentación.

En las dos sesiones de clases participaron los 22 alumnos matriculados la asignatura. La mayoría de estos alumnos tienen unos estudios de grado que no aseguran una competencia matemática de base, debido a que han cursado pocos créditos de matemáticas en los estudios que les han permitido acceder al Máster de FPSM de la UB.

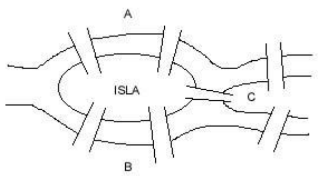
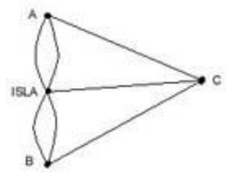
El registro de la información fue la grabación en video de las 4 horas de clase, los documentos repartidos por el profesor y las dos respuestas de los asistentes al cuestionario.

Se ha realizado una triangulación de datos y de expertos. La triangulación de datos ha consistido en el uso del mismo cuestionario dos veces seguidas. Mientras que la triangulación de expertos ha consistido en una opinión de un experto sobre la pertinencia del agrupamiento en familias de procesos realizado por los investigadores y sobre el uso de la moda en este caso.

Breve descripción de la implementación

En este apartado, por cuestiones de espacio, describiremos muy brevemente la parte del ciclo formativo implementado en el Máster de FPSM de la UB durante el curso 2010-2011 relacionada con la presentación y respuesta del cuestionario comentado anteriormente. .

En la primera sesión el profesor presentó una lista de 16 ítems (llamados ejemplos) en el que para cada ítem se presenta una entrada y una salida y se debe inferir una única familia de procesos. Estos 16 ítems se tomaron de Font et al (2008). Siete de los 16 ítems que se pasaron a los futuros profesores estaban resueltos — por cuestiones de espacio en la tabla 1 sólo se pone uno de estos 7 ítems, el número 6 — y 9 debían de ser resueltos por los futuros profesores — también por cuestiones de espacio en la tabla 1 sólo se ponen dos de estos 9 ítems, los números 1 y 14 —

<table>
<tr><th>Punto de Partida</th><th>Procesos</th><th>Punto de llegada</th></tr>
<tr><td>1) Dos islas en el río Pregel que cruza Königsberg se unen entre ellas y con la tierra firme mediante siete puentes. ¿Es posible dar un paseo empezando por una cualquiera de las cuatro partes de tierra firme, cruzando cada puente una sola vez y volviendo al punto de partida?

</td><td>?????</td><td>El problema anterior se puede trasladar a la siguiente pregunta: ¿se puede recorrer el dibujo terminando en el punto de partida sin repetir las líneas?

</td></tr>
<tr><td>6)
$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$</td><td>Desencapsulación / Descomposición / Análisis</td><td>Interpretamos el límite como el valor al cual se aproximan las tasas medias de variación $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ cuando $h\to 0$</td></tr>
</table>

14) La mediatriz de un segmento es la perpendicular que pasa por el punto medio de dicho segmento. ¿Halla una definición equivalente?	**?????????**	Todos los puntos que están a igual distancia de los extremos del segmento

1. Selección Tabla de ítems

El profesor justifico brevemente la selección de la familia de procesos de los 7 ejemplos resueltos y les animó a que contestaran los 9 ítems no resueltos seleccionando una familia de la lista de familias de procesos que sigue a continuación:

- Algoritmitzación / Mecanización / Práctica (en el sentido de repetición) / Trabajo de técnica / . . .
- Generalización
- Idealización / Esquematización / Abstracción
- Materialización / Representación externa (gráfica, fórmula simbólica, etc., realizada en papel, pizarra, ordenador, etc.)
- Significación/ Comprensión/Interpretación
- Síntesis/ Reificación/ Unificación/Encapsulación
- Análisis/ Descomposición/ Desencapsulación
- Personalización / Construcción/Representación interna
- Institucionalización
- Enunciación (expresar conjeturas, propiedades, dar definiciones, ...)
- Problematización
- Argumentación/Justificación/ Demostración/ Explicación
- Procesos de conexión (Procesos de analogía, procesos metafóricos, procesos de comparación, procesos de relación, ...)
- Resolución de problemas
- Comunicación
- Modelización

El profesor comentó que se habían agrupado algunos procesos por parecido de familia (Wittgenstein, 1953). Es decir, todos los procesos agrupados en una familia tienen alguna característica en común (un aire de familia) si los comparamos dos a dos, pero no hay ninguna característica en común a todos ellos. Después comentó que los procesos que se habían agrupado por aire de familia se podían clasificar en procesos y mega procesos (por ejemplo, el proceso de resolución de problemas o el de modelización serían mega procesos) y que todos los de la lista se habían seleccionado entre los procesos que aparecen en el currículum de secundaria obligatoria de Catalunya y/o en artículos de investigación en didáctica de las matemáticas. El objetivo del profesor era que las respuestas de los alumnos sirvieran como evaluación diagnóstica de los procesos que los estudiantes conocen y pueden inferir.

Ante esta actividad los alumnos tuvieron algunas inquietudes. Algunas de ellas fueron, si en cada ítem solo debería ir una sola familia de procesos o bien podían ir varias. El profesor insistió en que en cada ítem debía ir una sola familia de procesos. Se trataba de considerar el proceso (o familia) más representativo que se podía inferir. La primera sesión terminó con la recogida de las hojas de respuestas de los estudiantes.

En las dos horas de la segunda sesión, el profesor consideró pertinente, tomar quince minutos de su clase para recordar las principales reflexiones sobre procesos realizadas en la sesión anterior y después pasó a comentar los resultados de la evaluación diagnóstica. En los siguientes veinte minutos el profesor realizó comentarios sobre la lista de familias de procesos, en especial sobre aquellos procesos que a los alumnos no les parecieron familiares como, por ejemplo, el proceso de reificación (síntesis, encapsulación), para cuya explicación, el profesor utilizó la metáfora del paquete turístico.

Después de explicar con más detalle algunos de los procesos que resultaban más desconocidos, el profesor entregó nuevamente el cuestionario con el objetivo de observar los cambios que se producían en las respuestas de los futuros profesores con respecto a la evaluación diagnóstica.

Análisis de los datos

Mostramos en la Tabla 2, los resultados de las coincidencias con respecto a la inferencia de procesos realizada en Font et al (2008), tanto de la primera evaluación (diagnóstica) como de la segunda (evaluación final). En ambas evaluaciones participaron los 22 matriculados en la asignatura antes mencionada.

Ejemplos / Evaluaciones	Ejemplo1	Ejemplo 3	Ejemplo 4	Ejemplo 5	Ejemplo 9	Ejemplo 10	Ejemplo 11	Ejemplo 13	Ejemplo 14
Evaluación diagnóstica	11	6	15	8	13	18	16	7	9
Evaluación final	10	12	18	12	19	20	18	13	10

Tabla 2. Resultados de coincidencias en la selección de procesos

En el caso de los Puentes de Königsberg (ítem 1), por ejemplo, cuyo punto de partida es el enunciado del problema y cuyo punto de salida es un grafo de esta situación, el proceso de idealización es el considerado en Font et al (2008). En la evaluación diagnóstica, 11 de los 22 alumnos indican que el proceso activado es el de idealización. Los restantes seleccionan como procesos activados: Particularización (2), generalización (1), materialización (1), representación interna (1), significación (3), desencapsulación (1), procesos de conexión (1) y resolución de problemas (1). En la evaluación final 10 de los 22 alumnos indican como proceso el de idealización. Los restantes señalan: Particularización (3), generalización (1), materialización (2), significación (2), desencapsulación (2), procesos de conexión (1) y modelización (1).

Conclusiones

La pregunta correspondiente a la parte de la investigación que presentamos en este reporte es si la interpretación que se hace en Font et al (2008) sobre la inferencia de procesos, a partir de en una lista de ítems en los que se da una tarea como entrada y una respuesta del alumno como salida, es coherente, o al menos no contradictoria, con la que hacen los alumnos del Máster de FPSM de la UB. El resultado obtenido es que, a pesar de la ambigüedad que se produce al inferir procesos, (1) la moda de las respuestas de los alumnos en cada ítem de la evaluación diagnóstica coincide con la inferencia de procesos que se realiza en Font et al (2008) y (2) que en la evaluación final la moda de las respuestas de los alumnos al mismo cuestionario vuelve a coincidir con la inferencia de procesos que se realiza en Font et al (2008) y, además, dicha moda se incrementa en casi todos los ítems.

Agradecimiento

Trabajo realizado en el marco de los siguientes proyectos de investigación: 1) REDICE-10-1001-13 "Una perspectiva competencial sobre el Master de Formación de Profesor de Secundaria de Matemáticas". 2) EDU2009-08120 "Evaluación y desarrollo de competencias profesionales en matemáticas y su didáctica en la formación inicial de profesores de secundaria/bachillerato". Por otra parte, esta investigación también ha sido posible mediante la ayuda del ARCE (Agrupació de Recerca en Ciències de l'Educació) 2010.

Referencias bibliográficas

Ball, D. L., Lubienski, S. T., y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4th ed., pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.

Hill, H. C., Ball, D. L., y Schlling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education 39*, 372-400.

Font, V., Rubio, N y Contreras, A. (2008). Procesos en matemáticas. Una perspectiva ontosemiótica. En Lestón P. (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21,* 706-715. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The Onto-Semiotic Approach to Research in Mathematics Education. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education 39 (1-2)*, 127-135.

Wittgenstein, L. (1953). *Philosophical investigations*. New York: The MacMillan Company.

HISTORIA DE LA FORMACIÓN DE LOS PROFESORES DE MATEMÁTICAS EN LA UFOP

Marger da Conceição Ventura Viana, Márcia Nunes dos Santos

Universidade Federal de Ouro Preto Brasil

margerv@terra.com.br, marcimatica@yahoo.com.br

Resumen. El trabajo refleja los resultados de una investigación realizada por las autoras de este artículo para conocer cómo ocurrió el proceso de formación de profesores de Matemáticas en el Departamento de Matemática (DEMAT) de la Universidad Federal de Ouro Preto (UFOP) MG, Brasil. Se utilizaron los documentos legales de creación y de implementación de los programas de formación inicial y formación continuada y también la historia contada por miembros del propio Departamento. La metodología incluyó la utilización de la historia oral y la documentación localizada. El estudio se inserta en la Historia de las Instituciones, los datos iníciales se remontan al 1947. La primera formación continuada se registró en 1983 y la segunda, en 1992; luego se sucedieron el Curso de Matemáticas creado en 1993 pero iniciado en 1998, el de Especialización en Educación Matemática (2002); la Licenciatura en Matemáticas (2007) en la modalidad a distancia en el Centro de Educación Abierta y a la Distancia (CEAD) y la Maestría Profesional en Educación Matemática (2008). El artículo contribuye al rescate de la Historia de la Educación Matemática en la UFOP y al reconocimiento de sus protagonistas.

Palabras clave: historia oral; formación de profesores, historia de instituciones

Abstract. This work reflects the results of an investigation by the authors of this article to know how it happened, the process of training teachers of mathematics in the Mathematics Department (DEMAT) of the Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP) in the state of Minas Gerais, Brasil. As well as anecdotal data gleaned from interviews of members of the department itself, legal documents were used for the creation and implementation of programs of initial training and continued education. The research methodology outlined in this paper, included the use of oral history and documentation. The study uses historical data from of the institution going back to its founding in 1947. This paper charts the development of mathematics education at UFOP with its first continuing education was recorded in 1983 and the second in 1992, then followed the Course of Mathematics established in 1993 but fully implemented in 1998, Specialization in Mathematics Education (2002), and the Bachelor of Mathematics (2007) in the Centro de Educação Aberta e a Distância (CEAD) and the masters in Mathematics Education (2008). The article contributes to the documentation of the history of mathematics education at UFOP, Minas Gerais and Brasil

Key words: oral history, teacher education, history of institutions

Introducción

El contenido del presente artículo ha sido extraído de la investigación realizada por las autoras con el propósito de rescatar la historia del proceso de formación de los profesores de Matemáticas en la UFOP, institución ubicada en la histórica ciudad de Ouro Preto, Minas Gerais, Brasil. Gracias a ese estudio se han podido conocer las ideas iníciales, las necesidades, las motivaciones y luchas principales que dieron lugar a la creación de los diferentes cursos y además, establecer la secuencia de los hechos principales que tuvieron lugar para elevar el nivel profesional de los docentes hasta lograr la implementación de la Maestría Profesional en Educación Matemática.

Como se aprecia, la investigación buscó dar respuesta a la pregunta: ¿cómo ocurrió el proceso de formación de los profesores de Matemáticas en el Departamento de Matemáticas de la Universidad Federal de Ouro Preto UFOP? Consecuentemente, el objetivo de investigar la historia de esa formación se pudo cumplir a través de los programas de formación inicial y de formación continuada, además de la historia del propio DEMAT contada por sus protagonistas.

Metodología

La metodología utilizada fue la historia oral, que se incluye entre los métodos cualitativos de investigación. Es una metodología de investigación que consiste en realizar entrevistas grabadas a personas han sido testigos de hechos, instituciones, modos de vida u otros aspectos de la historia. Para Alberti (1989), “Es en la realización de entrevistas que se sitúa efectivamente el quehacer de la historia oral; es para allí que convergen los investimentos iniciales de implantación del proyecto de investigación, y es de allá que parten los esfuerzos de tratamiento del acervo” (Alberti, 1989, p.79, traducción nuestra).

De hecho, las entrevistas son fuentes para la comprensión del pasado, al lado de documentos escritos, imágenes y otros tipos de registro. Son producidas a partir de un estímulo, pues el investigador procura al entrevistado y le hace preguntas, generalmente después de consumado el hecho o la coyuntura que se pretende investigar (Alberti, 2005).

Además, es necesario un conjunto de documentos que permiten comprender como individuos experimentan e interpretan hechos, situaciones y modos de vida de un grupo o de la sociedad en general, facilitando la aprensión del pasado por las generaciones futuras y la comprensión de las experiencias vividas por otros. Así, comprende todo un conjunto de actividades anteriores y posteriores a la grabación de las entrevistas. Como actividad previa, se exige la investigación y el descubrimiento de datos para la preparación de los guiones de las entrevistas, de ahí que se considere la investigación documental (Lo que es la historia oral, sf).

Ante las dificultades para localizar los documentos referentes a la creación e implementación de los cursos ofrecidos por el DEMAT y a otros hechos importantes, la historia oral posibilitó el desarrollo del trabajo.

En la investigación, se aplicaron entrevistas semiestructuradas, a partir de una guía previamente estructurada sobre la base de los documentos, a diez profesores y funcionarios que formaron o forman parte del Departamento de Matemáticas. La selección se hizo tomando en consideración sus relevantes contribuciones a la creación e implementación de los cursos de formación de los profesores de Matemáticas. Las entrevistas se encontraron en los apéndices del trabajo de Santos (2009).

Desarrollo

El Departamento de Matemáticas, se originó en la Escuela de Minas (EM) que funcionó en el centro histórico de Ouro Preto hasta 1982, aunque solo alcanzó el status de Departamento después de la Reforma Universitaria de 1968, que preveía la departamentalización de las Universidades y la extinción de la cátedra, estableciendo la profesionalización del profesor mediante la dedicación exclusiva (Salum, 2004). Esta Reforma fusionó la centenaria EM con la Escuela de Farmacia (EF): así quedó constituida la Universidad Federal de Ouro Preto. El objetivo inicial del DEMAT era atender los cursos de ingeniería de la EM que incluían muchas asignaturas del área de las Matemáticas.

Debe destacarse la participación de un grupo de antiguos catedráticos, estudiosos de las Matemáticas, ya fallecidos, que se consideran pioneros en la formación de profesores dentro de la propia EM: los doctores Altamiro Tibiriçá Dias, uno de los primeros autores brasileños de libros de Cálculo Diferencial e Integral y otros títulos relevantes; Antônio Moreira Calaes, catedrático de Geometría Analítica y Cálculo Vectorial, también autor de libros, Nicodemus de Macedo Filho, catedrático en Dibujo, Geometría Descriptiva y Topografía. Todos esos profesores (hoy ya fallecidos) impartieron clases a los docentes cuya formación académica era, mayormente, en el área de Ingeniería: no había selección pública y la mayoría de ellos eran ex alumnos de la propia Escuela de Minas. Esa realidad fue confirmada en la entrevista a la primera secretaria del DEMAT Haydé Celestino Belloni: "El personal terminaba la carrera e iba a impartir clases en la Escuela de Minas, la mayoría de los profesores [de Matemática] eran ex-alumnos de la Escuela de Minas, porque la idea era poner en el Departamento sólo ex-alumnos" (Santos, 2009, apéndice X).

La investigación de campo permitió localizar las primeras Actas del Departamento y, como primer registro, el Acta de la 1ª reunión realizada el siete de marzo de 1947 donde consta la solicitud de un curso extrauniversitario de Matemática Superior, sobre Geometría Moderna, Topología y otros, impartido por el profesor italiano Achille Bassi, en la ciudad de Belo Horizonte (Santos, 2009).

Ese mismo año se realizaron tres reuniones más del DEMAT donde trataron temas como la reedición del libro "Cálculo Vectorial", del profesor Cristóvão Colombo dos Santos (discutido en la segunda reunión), la solicitud de producir nuevas apostillas para los cursos de ingeniería y del curso extrauniversitario de Matemática Superior, Geometría Moderna, Topología, impartido por el profesor ya mencionado, Achille Bassi, así como otros, que se realizaron en la ciudad de Belo Horizonte (Santos, 2009).

En 1982 se fundó el Instituto de Ciencias Exactas y Biológicas (ICEB) de la UFOP, y ese mismo año, el DEMAT fue transferido para ese Instituto. En 1983, el director del ICEB y profesor del DEMAT, Jaime Mendes Pereira Pinto, desarrolló el proyecto de extensión universitaria llamado "Perfeccionamiento de Metodologías de Enseñanza y de Capacitación de Profesores en las áreas de Ciencias y Matemática", que fue propuesto, aprobado y financiado por la Secretaría de Enseñanza Superior del MEC (SESu/MEC). El proyecto estaba incluido en el Programa de Integración de la Universidad con la Enseñanza de 1° Grado, de la SESu/MEC y abarcaba las áreas de Ciencias (Física, Química y Biología) y Matemática (Santos, 2009, apéndice X). Por su formación en Matemática, el DEMAT nombró para dirigirlo a la profesora Marger da Conceicão Ventura Viana que fue la primera en ingresar al DEMAT mediante selección pública, después de obtener el primer lugar en febrero de 1980; fue nombrada el 17 de junio del mismo año y orientó la investigación de Santos (2009).

En 1983, la profesora Viana, junto a otros coordinadores del Proyecto, realizó un Seminario para profesores de la enseñanza fundamental de la región de Ouro Preto. En el área de matemática, se discutieron las grandes insuficiencias constatadas por los profesores en los alumnos de la 5ª Serie, en lo referido al conocimiento de las cuatro operaciones.

A partir de esa constatación, la profesora Viana elaboró el Proyecto Matemática en el 1° Grau, aprobado y financiado primero por la Secretaria de Enseñanza Superior del Ministerio de Educación (SESu/MEC) y después por el Subprograma Educación para la Ciencia (SPEC) del Programa de Apoyo al Desarrollo Científico y Tecnológico (PADCT) de la Comisión de Perfeccionamiento del Personal de la Enseñanza Superior (CAPES).

Ese Proyecto, implantado y coordinado por la Profesora Viana ofreció formación continuada a profesores de la Educación Básica de Ouro Preto y sus alrededores por más de una década (1983-1999). La propuesta educativa adoptada, Actividades Matemáticas que Educan (AME), posibilitaba a los alumnos la autonomía para construir los conceptos matemáticos, además de desarrollar la capacidad y habilidad de resolver problemas y la creatividad. Sus autores, los entonces profesores de la Universidad Federal de Minas Gerais (UFMG) Reginaldo Naves de Souza Lima y Maria do Carmo Vila cedieron todo el material y ofrecieron asesoría pedagógica gratuita a la coordinación, a profesores y a monitores.

En enero de 1993, la profesora Viana asumió la Coordinación Académica de la Dirección de Enseñanza de la UFOP (hoy Pro-Rectoría de Graduación) y la coordinación del Proyecto fue atendida sucesivamente por el profesor Renato Machado Aquino, hasta el final de ese año, el profesor Dimas Belarmino de Souza (ya fallecido) en 1994, y el profesor Frederico da Silva

Reis desde enero de 1995 hasta diciembre de 1996 cuando quedó bajo la responsabilidad de dos profesores sustitutos del DEMAT (Santos, 2009, apéndice VII).

En el año 1999, el Proyecto tuvo su última coordinadora, la profesora Roseli de Alvarenga Corrêa (ya jubilada) que creó el Proyecto Matemática en la Escuela y posteriormente el Núcleo Interdisciplinar de Estudios e Investigaciones en Educación Matemática (NIEPEM), que ha proporcionado clases de formación continuada a profesores de Matemática y atendido a alumnos del Curso de Licenciatura en Matemática, principalmente en lo que se refiere a la práctica de la enseñanza.

A pesar de la expansión de la UFOP y el buen desenvolvimiento del Proyecto Matemática en el 1° grado, las propuestas de nuevos proyectos y de cursos para formación continuada de profesores de Matemática eran impedidas muchas veces por la resistencia de algunos profesores del propio DEMAT que no comprendían el alcance de la Educación Matemática, lo que se evidencia en el hecho de que la consolidación de una propuesta para ofrecer un curso regular por el Departamento solamente tuvo lugar en 1992. Este curso fue el de Especialización en Matemática:

> En 1992, por iniciativa del profesor Dimas Belarmino de Souza, el DEMAT resolvió ofrecer cursos, de modo formal, a los profesores de Matemática, ya que los ofrecidos por el Proyecto Matemática en el 1° Grado eran de extensión y no contemplaban profesores de Enseñanza de 2° Grado. Verdaderamente, había ideas de ofrecer cursos no solo para profesores del 1° y 2° Grado, sino también para profesores de nivel superior. [En 1992] (...) fue aprobada la implantación del Curso de Especialización en Matemática (Santos, 2009, p.47).

Ese curso tuvo dos ediciones, los alumnos eran profesores enviados por la Secretaria de Estado de la Educación de Minas Gerais, excepto el segundo grupo, en que participaron tres profesores de la Escuela Técnica Federal de Ouro Preto, actual Instituto Federal de Minas Gerais (IFMG) Campus Ouro Preto.

No obstante, era evidente y urgente la formación de profesores para enseñar Matemática en la ciudad de Ouro Preto y su entorno. Así, la propuesta de creación del Curso de Licenciatura en Matemática, realizada en 1993, que se basaba en la constatación de la necesidad de profesores de Matemática en la región de Ouro Preto, fue presentada por el DEMAT al Consejo de Enseñanza Investigación y Extensión (CEPE) de la UFOP que creó, por Resolución CEPE N° 0491, el Curso de Licenciatura en Matemática (UFOP, 1993). Esto estaba justificado, pues en los levantamientos realizados sobre la formación de los profesores de Matemática de las ciudades que componen la 15ª Delegación Regional de Enseñanza de Ouro Preto (15ª.DRE) se constató que:

> En 1983, en Ouro Preto solo había tres profesores con Licenciatura Plena en Matemática. En 1990, en un Seminario se registraron los siguientes datos: 1. No había ningún profesor con Licenciatura en Matemática en las escuelas estatales DRE. 2. En Ouro Preto, solo había un profesor licenciado en Matemática, en una escuela particular. 3. De los ocho profesores de Matemática de la Escuela Técnica Federal de Ouro Preto, había apenas un licenciado en Matemática. En 1992, cuando la Prefectura Municipal de Ouro Preto realizó un Concurso Público para profesores no hubo candidato formado en Matemática (Viana e Brolezzi, 1998, p.4-traducción nuestra).

Aunque existía la necesidad de la creación del Curso de Matemáticas, entre el proceso de aprobación del Proyecto de creación del curso y su implementación, hubo un período de cinco años. De hecho, tal implementación, a pesar de haberse comprobado su necesidad para la región, no fue fácil ni rápida, parecía que la política interna de la UFOP no veía la importancia de implementar ese Curso.

Con la salida del Ministro de Educación (de Brasil) de esa época, Murílio Hingel, la política de plazas de docentes para crear cursos nocturnos fue abandonada; y el proyecto era de un curso nocturno para atender a los profesores legos y a otras personas que laboraban durante el día. Sin materializarse la promesa de plazas, el curso no fue implementado: fue pospuesto en favor de los cursos de Derecho y de Filosofía que, aunque tampoco recibieron las plazas, comenzaron a funcionar.

En medio de esa situación, el Curso de Matemática no fue implementado hasta el año 1998. En eso año, gracias a la creación de los cursos de Ingeniería de Producción, Ciencias Biológicas y Artes Escénicas, que fueron creados e implementados en el mismo año, el Curso de Matemáticas fue finalmente implementado.

Avanzando un poco más en la historia del DEMAT, en 2002, el pequeño grupo de apenas cuatro docentes del área de Educación Matemática, presentó al Departamento la propuesta de crear el Curso de Especialización en Educación Matemática, ideado por el profesor Frederico da Silva Reis que declaró, en una entrevista concedida a Santos (2009) que, aunque los alumnos del primer grupo que concluyó el Curso de Matemáticas le solicitaron continuar los estudios en una maestría, les respondió no sería posible pues no había número suficiente de docentes para implementar esa maestría y les habló así: "Miren, gente, ustedes quieren continuar estudiando, no? entonces vean lo siguiente, maestría en Educación Matemática nosotros no tenemos condiciones en este momento, pero lo que yo puedo intentar es crear una Especialización, les interesa?" (Santos, 2009, apéndice IV).

Según el profesor Silva,

> El sí fue unánime y fui a reunir al grupo con algunas ideas, conversé un poco con uno, un poco con otro e hice un proyecto prácticamente solo (...) además fui yo mismo quien condujo ese proceso de creación del proyecto del Curso, de la estructura del Curso y después el que realmente creó el proyecto Pedagógico que es el que se tiene hoy. (Santos, 2009, apéndice IV).

Ese curso de Especialización en Educación Matemática terminó después de seis ediciones pues en el 2008 comenzaría el curso de Maestría Profesional en Educación Matemática. Para el DEMAT no era posible ofrecer dos cursos de posgrado por el reducido número de docentes del área de Educación Matemática frente a las múltiples actividades de los cursos de graduación, las orientaciones del Curso de Especialización, clases, investigaciones y orientación a alumnos de la graduación.

En 2003, se propuso al DEMAT el Curso de Licenciatura en Matemática en la modalidad a distancia pero solo fue ofrecido en el 2007 por el Centro de Educación Abierta y a la Distancia (CEAD) de la UFOP, con la participación de profesores del DEMAT. La profesora Maria do Carmo Vila, afirmó en su entrevista a Santos (2009) que el profesor João Luiz Martins, actual rector de la UFOP, quien era el jefe del DEMAT, convocó a los profesores para asistir a una presentación del Curso de Matemática en la modalidad a distancia. Habló habló la profesora Vila de que en Brasil ya existía el Curso de Matemática a distancia, mostró el nivel en que estaba la EaD en la UFOP. Ella refiere que algunos profesores se interesaron, entre ellos estaba el profesor Felipe Rogério Pimentel.

Según la profesora Vila:

> Se nombró una comisión para elaborar el Proyecto Pedagógico del curso. Esa comisión estaba formada por el profesor Pimentel, por mi, las profesoras Viana, Ana Cristina Ferreira, y otros nombres que no recuerdo, pero están en el Proyecto. Entretanto, cuando ya estaba listo el Proyecto, y había sido aprobado, yo salí de la Universidad, o sea, no vi cuando ocurrió la implementación del Curso (Santos, 2009, apéndice IX).

Ese curso fue implementado en 2007 con financiamiento de la Universidad Abierta de Brasil (UAB), el órgano que cuida de ese tipo de Educación en Brasil. Otro curso ofrecido por el DEMAT fue el de Especialización en Matemática, en 2004, también diseñado por el profesor Frederico da Silva Reis pero tuvo una única edición, no fue divulgado y las clases fueron impartidas en Belo Horizonte para un grupo específico de alumnos (Santos, 2009, apéndice IV).

Con los cursos regulares de formación de profesores, los docentes impartían cursos de extensión a profesores de la región de Ouro Preto por medio del NIEPEM, eventos que fortalecieron el desarrollo de investigaciones en Educación Matemática en la UFOP.

El buen desempeño del Curso de Especialización en Educación Matemática, con la elaboración de proyectos y la orientación de monografías, proporcionó a los docentes la madurez que les posibilitó elaborar la propuesta del Curso de Maestría Profesional en Educación Matemática que se expuso a los órganos competentes de la UFOP y a la Coordinación de Perfeccionamiento del Personal de Nivel Superior (CAPES). La Maestría se implementó en el 2008 y en marzo de 2011 comenzó la cuarta edición del Curso, cuando habían defendido sus disertaciones los 30 alumnos de las primeras dos ediciones.

El estudio realizado permite establecer la siguiente secuencia: La primera incursión del DEMAT en la formación de profesores ocurre en 1947 cuando los profesores solicitan un curso extrauniversitario de Matemática Superior. En 1969, el Departamento ofrece disciplinas aisladas a profesores del DEMAT; hasta 1983 no aparece la primera propuesta de curso regular de formación continua con el Proyecto Matemática en el 1er Grado, que permanece 16 años; después, se crea el NIEPEM; la segunda propuesta de curso regular comienza en 1992 con el Curso de Especialización en Matemática y tiene dos ediciones. A continuación se suceden el Curso de Licenciatura en Matemática, creado en 1993 pero iniciado en 1998 y el Curso de Especialización en Educación Matemática (2002) con seis ediciones. El DEMAT ofrece un Curso de Especialización en Matemática con una única edición (2004) en Belo Horizonte; posteriormente, en 2007, el CEAD de la UFOP comienza el Curso de Licenciatura en Matemática, en la modalidad a distancia y en el 2008 el Curso de Estadística. Actualmente se imparte el curso de Maestría Profesional en Educación Matemática iniciado una década después de la implementación del Curso de Licenciatura en Matemática.

Consideraciones finales

Los resultados de la investigación realizada en el DEMAT/ UFOP han permitido establecer, con sus avances y dificultades, el curso del proceso que elevó el nivel de los docentes de ese Departamento hasta alcanzar la Maestría.

Se puede afirmar que el DEMAT está hoy consolidado, integrado por profesores con maestría y/o doctorado sus respectivas áreas. Además, hay un considerable interés por la capacitación de los profesores para la enseñanza y la investigación, ya sea en Matemáticas, en Matemática Educativa o en Estadística.

El rescate de la historia del Departamento de Matemáticas promueve la valoración y la reflexión de los docentes y funcionarios que forman o formaron parte de él y también de sus alumnos pues, por primera vez, se han develado hechos significativos desconocidos para muchos, gracias a los investigadores y, en particular, a las memorias ofrecidas por los entrevistados. Además, el estudio contribuye en gran medida a la propia Historia de la Educación Matemática en la UFOP y en el Brasil.

Referencias bibliográficas

Alberti, V. (1989). *História oral: a experiência do CPDOC*. Rio de Janeiro: Centro de Pesquisa e Documentação de História Contemporânea do Brasil.

Alberti, Verena.(2005). Manual de história oral. Rio de Janeiro: FGV Editora. *O que é história oral*. (sf) Recuperado el 27 de agosto de 2008 de http://cpdoc.fgv.br/acervo/historiaoral

Salum, M. J. G. (2004). *O ensino de Engenharia no Brasil.* I Encontro Nacional de Engenheiros de Minas. Ouro Preto: UFOP.

Santos, M. N. (2009). *O Departamento de Matemática da UFOP* e *sua inserção na formação de professores de Matemática*. Monografia (Especialização em Educação Matemática). Instituto de Ciências Exatas da UFOP. Ouro Preto. 209 f.

UFOP. (1993). Resolução CEPE Nº 0491/1993. Recuperado el 08 de diciembre de 2008 de http://www.cead.ufop.br/index.php?option=com_content&view=article&id=4&Item id=3.

Viana, M. C. V. y Brolezzi, A. C. (1998). *Projeto Pedagógico do Curso de Matemática*. Ouro Preto: Universidade Federal de Ouro Preto.

LA EFECTIVIDAD EN LAS CLASES DE MATEMÁTICAS IMPARTIDAS POR PROFESORES EN FORMACIÓN

Ana María Martínez Blancarte
CINVESTAV-IPN. México
anismaba@hotmail.com

Resumen. La investigación muestra un acercamiento a la efectividad de los profesores en formación en sus prácticas docentes, por medio de cuatro parámetros (herramientas, tareas, relaciones y normas, además de las conversaciones) que se establecen en un salón de clase en el momento de la enseñanza-aprendizaje, en nuestro caso de la asignatura de matemáticas. Lo anterior, reflejó el dominio de los futuros profesores sobre los tres niveles de pedagogías (genéricas, de dominio y técnicas), de las cuales reconocieron poner más en práctica la genérica por no conocer a profundidad los otros dos niveles.

Palabras clave: Efectividad en clases de matemáticas, profesores en formación, pedagogía.

Abstract. Research shows an effective approach to training teachers in their teaching practices using four parameters: tools; tasks; relationships and norms; and discussions (i.e. classroom teaching about mathematics). This reflected the dominance of future teachers in pedagogy for three levels (generic, domain and technical), who seemed to practice more generically because they were not aware of the other two levels.

Key words: Effectiveness in math classes, trainee teachers, pedagogy.

Introducción

Diversos investigadores como Cooper, Baturo & Grant (2006) llevaron a cabo un estudio donde promovieron fundamentalmente, que los participantes colaboraran entre sí para mejorar su aprendizaje matemático (llamándolo pedagogía a tres niveles), porque detectaron que existía una carencia de programas de aprendizaje profesional que se dedicara al aspecto de cómo enseñar los conceptos y procesos matemáticos de una manera efectiva. Estos investigadores encontraron que debe existir una relación entre los profesores e investigadores sobre el aspecto pedagógico, mediante una pedagogía a tres niveles, llamada también pedagogía en contexto. Los tres niveles son los siguientes: 1. Pedagogías genéricas, 2. Pedagogías de dominio y 3. Pedagogías técnicas. Pero solo definimos las del segundo nivel dando que es en lo que se enfocó nuestro trabajo, las pedagogías de domino que son aquellas estrategias o métodos de enseñanza y aprendizaje apropiados para desarrollar un tópico matemático. Retoman los cuatro parámetros de Askew, Brown, Denvir & Rhodes (2000), los cuales son tareas, conversación, herramientas, además, de las relaciones y normas.: son los consejos y sugerencias prácticos que ayudan a que una lección en particular funcione. Como se observa, estas pedagogías en contexto definen el conocimiento pedagógico de la asignatura que impartirá un profesor en el aula. En el caso particular de las matemáticas, estos tres niveles de pedagogías conforman lo que llamamos Conocimiento Pedagógico en Matemáticas.

Otros investigadores preocupados por la situación pedagógica en las clases de matemáticas son McDonough & Clarke (2003) quienes, en su investigación sobre la descripción de la práctica de maestros efectivos en matemáticas nos mencionan que los responsables de la educación de los docentes deben ayudar a estos a desarrollar su conocimiento y habilidades que les permitan incrementar la efectividad de su labor educativa y como resultado de su estudio indican diez categorías que nos ayudarían a identificar a un profesor efectivo; las cuales son: foco matemático, características de las tareas, materiales y representaciones, adaptaciones y conexiones, estilos de organización, aproximaciones de enseñanza, comunidad de aprendizaje e interacción en el salón, expectativas, reflexión, métodos de evaluación y atributos personales del profesor.

Metodología

La investigación fue de carácter cualitativo y estuvo enfocada en averiguar y reflexionar el conocimiento pedagógico el cual se encuentra conformado por las diez categorías que aportan McDonough & Clarke (2003) y los cuatro parámetros que Askew *et al.* (2000) mencionan como elementos importantes para que un profesor desarrolle una clase matemática efectiva que conforman los tres tipos de pedagogías que se deben considerar al momento de planear una clase de matemáticas.

Si bien, el trabajo se llevó a cabo mediante un taller de apoyo educativo**,** y la aplicación de otros instrumentos metodológicos como lo fueron observaciones de clase (inicial y final), además de la aplicación de cuestionarios a los futuros profesores del sexto semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la Normal Superior de México, en esta ocasión solo presentaremos los resultados obtenidos en los cuestionarios sobre efectividad que se aplicaron y las preguntas fueron las siguientes:

I) Cuestionario sobre efectividad matemática:

Este cuestionarios se diseñó utilizando las diez categorías que McDounogh & Clarke (2003) consideran que un maestro efectivo debe conocer y poner en práctica en una clase de matemáticas. El propósito del instrumento fue conocer la eficacia de los futuros docentes sobre la asignatura de matemáticas. El cuestionario consta de veintidós preguntas divididas en diez apartados: el primero se dedicó a cuestiones generales y los siguientes se distribuyeron de acuerdo con las categorías que se mencionaron anteriormente y que se describen a continuación:

Preguntas generales

Este apartado tuvo como fin conocer las concepciones de los futuros docentes acerca de la asignatura de matemáticas (6. ¿Crees que es importante aprender matemáticas? y 7. ¿Prefieres explicar el porqué de algo, o prefieres que los alumnos digan e indaguen cómo hacerlo?), además mostrar las ideas de cómo debe ser un docente de matemáticas (pregunta 1.Describe lo que es para ti un buen profesor de matemáticas) y si consideran importante la enseñanza-aprendizaje de dicha asignatura (reactivos 2. Describe algunas cosas que te parece a ti que hacen mal en clase los profesores de matemáticas, 3. ¿Te agrada la asignatura de matemáticas?, 4. ¿Qué te agrada de las matemáticas? y 5. ¿Qué te desagrada de las matemáticas?

- *Foco matemático*: La pregunta 8. ¿Qué consideras que debe ser importante al dar tu clase?, indagó la categoría de foco matemático y tuvo como objetivo conocer las ideas sobre el Conocimiento Pedagógico que los profesores en formación ponen en juego y consideran importantes, al dar una clase de matemáticas.
- *Características de las tareas*: El reactivo 9. ¿Cómo crees que deben ser las actividades que propongas en tus clases? inspeccionó las características de las tareas con el fin de saber cómo consideran o diseñan sus actividades los futuros docentes:
- *Materiales y representaciones*: Este aspecto se analizaron (mediante los reactivos 10. ¿Crees que es importante que se utilicen materiales en clase?, 11. ¿Crees que es importante que se den ejemplos de la vida real en clase? y 12. Menciona algo que te gustaría utilizar en tu clase de matemáticas) los argumentos que los estudiantes a profesor tienen sobre el uso de materiales en sus clases de matemáticas, así como las creencias que tanto el estudiantado de secundaria y los docentes en formación poseen sobre la vinculación de ejemplos de la vida real con temas matemáticos.
- *Estilos de organización, aproximaciones de enseñanza*: Dicho aspecto tuvo (por medio de las preguntas 13. ¿Cómo te gusta organizar al grupo cuando das tus clases? a) en equipos b) todo el grupo c) individualmente y 14. Escribe abajo lo que creas que es bueno y es malo de cada una de estas tres maneras) un acercamiento sobre cómo los estudiantes normalistas organizan a sus grupos durante la clase.
- *Comunidad de aprendizaje e interacción en el salón*: Este apartado tuvo como propósito conocer si los docentes en formación permiten en su clase la participación del alumnado (pregunta 15. Te gusta que los alumnos participen en tu clase dando sus ideas); además de evidenciar cómo motivan a sus estudiantes a participar (ítem 16. ¿Qué podría motivar a tus alumnos para participar más en clase?) y si consideran conveniente escuchar las

opiniones de sus educandos (reactivo 17. ¿Tú crees que es bueno escuchar en clase los procedimientos correctos e incorrectos de tus alumnos?)

❖ *Expectativas e investigación*: El propósito de este rubro fue conocer las ideas de los estudiantes a profesor y del estudiantado de secundaria sobre sus expectativas acerca de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (preguntas 18. Te consideras un profesor, muy exigente, poco exigente…Explica y 19. ¿Consideras que debes tomar en cuenta, el esfuerzo del alumno o solo su conocimiento?)

❖ *Reflexión*: Este aspecto llevó como objetivo conocer lo que un normalista puede hacer para aclarar las ideas y dudas de sus educandos, así como el agrado del estudiantado con respecto a si su docente, les aclarara sus dudas (ítem 20. ¿Qué puedes hacer durante la clase para aclarar las ideas y dudas de tus alumnos?)

❖ *Método de evaluación:* La pregunta 21. ¿Cómo evalúas a tus estudiantes? indagó qué aspectos consideran los futuros profesores al evaluar a sus estudiantes y la opinión del estudiantado sobre cómo los evalúa su profesor.

❖ *Atributos personales del profesor:* El siguiente reactivo tuvo la intención de conocer las cualidades que forman parte de los estudiantes a profesor al momento de ejercer su profesión. 22. ¿Qué cualidades personales de un profesor crees que son importantes?

II) Cuestionario de aspectos pedagógicos

El segundo cuestionario sobre elementos pedagógicos se diseñó de acuerdo a cuatro parámetros que Askew *et al.* (2000) utilizan para describir lecciones de matemáticas observadas en la educación básica. El objetivo fue indagar los aspectos pedagógicos que conocen y emplean los docentes en formación, en sus clases de matemáticas.

Dicho instrumento estuvo conformado por nueve reactivos, distribuidos de acuerdo con los cuatro criterios que Askew *et al.* (2000) consideran que un profesor debe tomar en cuenta al momento de planear, desarrollar y evaluar una clase. La distribución de las preguntas se muestra a continuación:

❖ *Actividades:* Este apartado indagó cómo estructuran y ponen en práctica una actividad matemática los estudiantes a profesor (1. ¿Qué tomas en cuenta para estructurar y llevar a cabo actividades en el salón de clase en lo que se refiere a su contenido?), qué tipo de actividad es la que más utilizan (2. ¿Qué tipo de actividades realizas? ¿Cuál es la más recurrente? ¿Por qué?) y como diseñan las tareas que dejan para el hogar (3. ¿Qué tomas en cuenta para estructurar las tareas que les dejas a tus alumnos para la casa?)

- *Conversación:* Las siguientes dos preguntas indicaron las ventajas o desventajas que los futuros docentes consideran sobre las diversas comunicaciones que se establecen en el salón de clase (4. Dentro del aula existen varios tipos de interacciones de comunicación: a) Del maestro hacia los alumnos b) Entre maestros y alumnos
- c) Entre alumnos. Describe las ventajas y desventajas de cada tipo); además de conocer la comunicación que más establecen con sus alumnos y cómo la desarrollan (5. ¿Qué tipo de comunicaciones se dan en tu clase? y ¿Cómo las motivas y las manejas?)
- *Herramientas:* El propósito de este apartado fue conocer los modelos de enseñanza y aprendizaje que considera un normalista para desarrollar un tópico matemático (6. ¿Qué modelos de enseñanza conoces para impartir algún tema?) e indagar los argumentos sobre el empleo y manejo de materiales que apoyen al proceso de enseñanza-aprendizaje en matemáticas (7.Consideras que es importante manejar diversos materiales de apoyo para enseñar un contenido).
- *Relaciones y normas:* Con las siguientes preguntas (8. ¿Qué normas estableces en tu salón de clase con tus alumnos? y 9. ¿Cómo te relacionas con tus alumnos dentro y fuera del salón de clase?) se buscó conocer las ideas de los normalistas sobre las relaciones y normas que deben establecer con sus estudiantes durante la clase de matemáticas.

Resultados

Primer cuestionario

Algunas de las opiniones de los estudiantes de secundaria fueron: en su mayoría consideran que lo más importante para un profesor de matemáticas debe ser que sus alumnos; es decir, que los educandos entiendan y dominen los tema. Para llevar a cabo lo anterior, los docentes deben utilizar diversos materiales (láminas, audiovisuales, entre otros) y diseñar actividades fáciles considerando varios aspectos, como el uso de ejemplos, explicaciones, etc. Dichas actividades deben ser resueltas en equipo.

Como conclusión a lo anterior se tiene que el discurso escrito tanto de los docentes en formación como el de los alumnos, coincide en que debe haber un conocimiento de estudiantes y para la instrucción que guie la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

En contraste con lo anterior, miramos que para dos alumnos (CRI y LF) lo más importante para un profesor debe ser la explicación que dan en clase. Para dos estudiantes (IS y LF), no es necesario que los profesores utilicen materiales en su clase. Lo anterior muestra que para los estudiantes, no es muy importante que sus docentes cuenten con un conocimiento pedagógico sobre la asignatura de matemáticas. Esto, resulta contrastante con la petición que hacen los educandos (que los maestros cambien su forma de enseñanza) cuando se les preguntó qué les gustaría que el profesor utilizara en sus clases de matemáticas.

En cuanto a la forma de trabajar, los alumnos mencionan que les agrada hacerlo en equipo (no mencionaron las razones de dicha preferencia). Aquí se encuentra una coincidencia con la forma de trabajo que más ponen en práctica los docentes en formación (en equipos y todo el grupo) al desarrollar un tópico matemático.

El 85% de los educandos consideran que los maestros deben ser exigentes y poseer cualidades intelectuales y valores para impartir la clase de matemáticas. Los alumnos concuerdan con los futuros profesores, en que es necesario que sean exigentes, pero a su vez diferencian, en que los estudiantes consideran más importantes las cualidades cognitivas que las sociales y físicas que mencionan los normalistas. Esto nos lleva a decir, que para los educandos de secundaria es preferible que su profesor posea un conocimiento matemático que uno pedagógico.

El 90 % de los estudiantes prefieren que el profesor sea el que de la explicación de la clase. Sin embargo, creen que es bueno participar en clase para observar, evaluar y corregir sus errores, enriqueciendo así, su aprendizaje. Para los educandos RI y JOR es difícil participar en clase por nervios y porque no le gusta hablar. Los alumnos de secundaria (al contrario de los profesores en formación) prefieren que la explicación sea dada por el docente. Esto no concuerda con lo que mencionaron en el conocimiento para la instrucción, donde reconocieron que lo más importante debe ser el alumno, las actividades y el uso de materiales en las clases de matemáticas.

Para cuatro de los estudiantes es necesario recibir una recompensa o felicitación para participar en clase. Otros cinco dijeron que lo que puede motivarlos es que el docente enseñe temas interesantes y que sean entendibles. Al igual que los docentes en formación, los alumnos se inclinan más por la condición (calificación) para que puedan participar en clase.

Los párrafos descritos anteriormente, muestran que el docente tiene carencias en el conocimiento de las expectativas realista de su grupo y casi no promueven el esfuerzo y participación de sus alumnos (McDoungh & Clarke, 2003).

Casi la totalidad del grupo se muestra a favor del uso de varios instrumentos o aspectos (participaciones, exámenes, ejercicios, entre otros) para ser evaluados. Solicitan que el docente considere el esfuerzo y conocimiento de los educandos al evaluarlos. Lo anterior, fue otra coincidencia que se encontró entre los docentes en formación y sus estudiantes. Ambos consideran relevante el ser evaluados, en lugar de calificados y que se tomen en cuenta sus esfuerzos y conocimientos. Sin embargo, olvidan que el profesor debe autoevaluarse y modificar su planeación como lo recomiendan McDough & Clarke, 2003.

Sólo siete estudiantes creen que es importante aprender matemáticas. A cuatro de ellos, les agrada mucho la asignatura pues les ayuda a desarrollar su pensamiento y sus habilidades. Esta creencia de los estudiantes es compatible con la de los profesores en formación, para quienes dicha asignatura también es importante y agradable.

Cabe destacar que para tres alumnos, las matemáticas son poco o nada agradables debido a lo complicado de los problemas y temas; además, de la poca utilidad de los contenidos matemáticos en la vida diaria. Les ha sido difícil hacerles agradables las matemáticas a sus alumnos. Lo anterior refleja la creencia de que las técnicas de resolución de problemas que se ven en la escuela, no tienen relación con las que se necesitan para resolver los problemas reales.

La mayoría de los alumnos creen que lo más importante en una clase debe ser que ellos (los estudiantes) entiendan y dominen los temas. Para lo cual, es importante que el docente utilice materiales y desarrolle actividades fáciles que tengan ejemplos, explicaciones y utilidad en la vida cotidiana. Esta creencia es compatible con la creencia que expresaron los profesores en formación, con lo cual confirmamos que el docente al tomar la decisión de emplear cierto recurso, actividad o material ha involucrado sus creencias al seleccionar lo que utilizará en su clase.

Resulta conveniente destacar que para dos alumnos (IS y LF) no es necesario que el profesor utilice material en su clase. Para la estudiante CAR, el uso de ejemplos de la vida diaria no es útil. Estas creencias podrían influir en la decisión de que un profesor no ponga en juego sus conocimientos de instrucción y de estudiantes en el proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Segundo cuestionario

Los estudiantes a profesor estructuran sus actividades considerando varios elementos (tiempo, complejidad, además de la organización del grupo), como lo mencionan McDonough & Clarke, 2003. Sin embargo, este aspecto no concuerda con que la actividad que más realizan los futuros profesores, es el planteamiento y resolución de problemas donde se evidencia un desconocimiento de los componentes del Conocimiento Pedagógico necesarios para la enseñanza de las matemáticas.

En cuanto a las tareas que dejan para casa, suelen ser las actividades que no se concluyen en clase o que sean continuidad de los visto en la sesión. Como conclusión, se puede decir que si las actividades son difíciles solo frustrarán a los educandos y si son demasiado fáciles los llevarán al aburrimiento

Cabe señalar que sólo un docente en formación (JA) mencionó que las actividades deben estar basadas en los errores de los alumnos. Lo que demuestra un acercamiento al conocimiento de estudiantes que debe considerarse en la enseñanza de las matemáticas

El 90 % de los futuros docentes consideran importante el uso de materiales para enseñar un contenido, debido a que les ayudan a motivar al alumno y a desarrollar el tema. Lo que hace notar una parte del conocimiento para la instrucción, en especial la selección de ilustraciones, materiales, entre otros, que apoyen la enseñanza de un tópico matemático (Ball, Thames & Phelps, 2008).

Sólo para el estudiante a profesor JO no todos los temas matemáticos permiten el uso de material, lo que nos hace ver un desconocimiento sobre el empleo de diversos materiales, representaciones o contextos para hacer claro un concepto matemático (McDonough & Clarke, 2003).

Los modelos de enseñanza que más conocen los normalistas, pertenecen a la pedagogía general (los basados en las teorías del tradicionalismo, el conductismo y el constructivismo). Sólo un docente en formación mencionó modelos de la pedagogía de dominio (el reparto del pastel y el uso de la recta numérica para la enseñanza de fracciones) para desarrollar contenidos matemáticos.

Los futuros profesores en su mayoría mencionaron que las comunicaciones que se establecen en su salón de clase son la del profesor-alumno y la que se da entre alumnos. La primera les permite interactuar con sus alumnos aclarándoles sus dudas, y la segunda brinda la oportunidad de entrelazar relaciones personales, el apoyo (entre alumnos) y compartir ideas en el trabajo. Lo anteriormente mencionado, muestra un conocimiento amplio sobre los estudiantes que es un aspecto muy importante del Conocimiento Pedagógico en la asignatura de matemáticas.

Sólo el normalista JA dijo que la comunicación que se establece en su salón de clase, es la que se establece entre los alumnos y el profesor; lo que muestra que de acuerdo con Jacobs & Ambrose (2003), el normalista suele ser un docente directivo en sus sesiones; es decir, controla las interacciones de sus alumnos prefiriendo así, que aparezca más su razonamiento.

Dentro de las normas y relaciones que los profesores en formación establecen en su salón al dar la clase de matemáticas, se encuentra el respeto, la confianza (para aclarar las dudas de los educandos), la disciplina y el tiempo destinado a las actividades. Esto, para los normalistas conformaría un ambiente propicio (Askew *et al*., 2000) para llevar a cabo el proceso enseñanza-aprendizaje de un tópico matemático.

Otra de las categorías que se hizo presente a lo largo del trabajo son las ideas (creencias) que los docentes en formación tienen acerca de las matemáticas como ciencia, de la enseñanza de las matemáticas y de su papel como profesor. Si bien, en el presente instrumento no se encuentran reactivos que en exclusivo indaguen dichas creencias, podemos observar entre líneas la presencia de algunas de ellas como lo son:

El profesor debe tener el control y el alumno debe poner atención (normalista MB), con lo cual se promueve que el papel del alumno en la clase de matemáticas es el de recibir conocimientos y demostrar que los ha adquirido.

El profesor da todo el contenido a sus alumnos (estudiante a profesora MT) con lo cual se ratifica la creencia de que el papel del profesor de matemáticas es transmitir conocimientos matemáticos.

No todos los temas permiten el uso de material (estudiante a profesor JO). Lo que denota un conocimiento pobre sobre la gama y selección de materiales que pueden apoyar el proceso de enseñanza de un tópico matemático.

Las actividades deben ser el planteamiento y resolución de ejercicios. Lo que coincide con que la resolución de problemas implica conocimientos matemáticos, pero se frena la selección de otras actividades que pueden incluirse al planear, desarrollar y evaluar una clase de matemáticas.

Conclusiones

Con respecto a las actividades, los futuros docentes mostraron deficiencias en las características que dichas actividades deben cubrir como lo son: tener un objetivo, un grado de complejidad, variedad en los ejercicios, entre otros.

La actividad que más ponían en práctica los futuros docentes, era la resolución de problemas, o las que involucran el uso de pizarrón y la solución de ejercicios.

La forma en que los docentes en formación motivan a sus alumnos para que participen en clase, es por medio del otorgamiento de una calificación o punto extra.

De acuerdo con su discurso escrito, los docentes en formación consideran al alumno como lo más importante a la hora de llevar a cabo una sesión (conocimiento de estudiantes).

Martínez (2010) menciona que a los normalistas se les dificulta llevar a cabo un proceso de autoevaluación, donde analicen sus errores y aciertos al dar la clase; además, de evaluar la funcionalidad de actividades y materiales que se utilizaron en el desarrollo de la sesión de matemáticas.

Con respecto a la efectividad de las clases de los docentes en formación, podemos mencionar que aún están siendo trabajos diversos aspectos como lo es el escuchar a los alumnos al momento de desempeñar una clase.

Los futuros profesores se dieron cuenta que una clase efectiva debe considerar diversos aspectos como los que mencionan Askew *et al*. (2000) y no solo llegar al aula y pasar lista a los alumnos.

Referencias bibliográficas

Askew, M., Brown, M., Denvir, H. y Rhodes, V. (2000). Describing primary mathematics lessons observed in the Leverhulme Numeracy Research Programme: A qualitative framework. *Proceeding Psychology of Mathematics Education 24*(2), 17-24.

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education,* 59(5), 387-407.

Cooper, T., Baturo, A. & Grant, E. (2006). Collaboration with teachers to improve mathematics learning: Pedagogy at three levels. *Procceding Psychology of Mathematics Education* 30(2), 361-368.

Jacobs, V. R. & Ambrose, R. C. (2003, Abril.22). *Individual interviews as a window into teachers' practice: A framework for understanding teacher-student interactions during mathematical problem solving*. Paper presented at American Educational Research Association Annual Meeting, Chicago. IL.

Martínez, A. (2010) *Un estudio con profesores en formación sobre su conocimiento pedagógico.* Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.México.

McDonough, A. & Clarke, D. (2003). Describing the practice of effective teachers of mathematics in the early years. *Procceding Psychology of Mathematics Education 27*(3), 261-268.

INVESTIGACIÓN SOBRE EL USO DEL PORTAFOLIOS EN UN MODELO DE FORMACIÓN UNICIAL DE PROFESORES

Ma. Luisa Oliveras Contreras, Noelia Agudo Navío, Ma. Elena Gavarrete Villaverde
Universidad de Granada. (España). Universidad Nacional Costa Rica
oliveras@ugr.es, noelian@correo.ugr.es, marielgavarrete@gmail.com

Resumen: Una materia de la titulación de Magisterio de Educación Infantil de la Universidad de Granada es el escenario de puesta en práctica de un modelo de formación de profesores denominado MED, que combina el Constructivismo Social con el enfoque de las Etnomatemáticas, cuyos fundamentos son una metodología flexible, interacción social y relación de contenidos con la vida cotidiana y profesional.

A lo largo de los cursos académicos, los alumnos/as han sido los destinatarios de esta dinámica, es por ello, que nos planteamos si las capacidades pretendidas se han logrado desarrollar y en qué medida. Para responder este interrogante utilizaremos el instrumento del portafolio, cuyas aportaciones nos servirán de base para actualizar dicho modelo y adecuarlo a las exigencias docentes actuales del Espacio Europeo Educación Superior.

Palabras clave: Formación inicial de profesores, aprendizaje cooperativo, etnomatemáticas, portafolios, investigación-acción.

Abstract: A course of University studies of children's education of the University of Granada is the stage of implementation of a teacher training model called the MED, which combines social constructivism with the Ethnomathematics research, whose foundations are a flexible methodology, social interaction and content relationship with professional and daily life. Throughout the academic courses students have been recipients of this dynamic, it is therefore that is why we wonder if the students have developed and in which measure, the alleged capabilities. To answer this question, we will use the portfolio, whose contributions will serve us base to update the model and adapt it to the current educational requirements of the European higher education area.

Key words: Preservice teacher education, cooperative learning, ethnomathematics, portfolios, action research.

Introducción

El reporte de investigación que se presenta es un avance del trabajo que se está realizando en un grupo de investigación de la Universidad de Granada, cuyo producto final será la tesis doctoral de una de las autoras del presente trabajo. Nuestro interés de investigación se centra en el Programa de Formación Lógico-matemática del Profesorado de Educación Infantil, dentro del nuevo enfoque del EEES (Espacio Europeo de Educación Superior)

En este sentido, el objeto de estudio que nos planteamos está constituido por:

- La capacitación en competencias del área de matemáticas de un grupo de profesores en formación
- Caracterizar un modelo ya existente de formación de profesorado de educación infantil y analizar su adecuación a las necesidades actuales de las nuevas titulaciones de Grado;
- Estudiar la utilidad del portafolio docente en una metodología del citado modelo de formación del profesorado.

Para la realización del estudio utilizaremos el Modelo Didáctico Emergente de Formación de Profesores, en adelante MED, establecido por Oliveras (1996) y ya utilizado en España y en proyectos internacionales de formación de profesores en didáctica de la matemática (Oliveras, 1996, 2005, 2008)

Los principales fundamentos teóricos del MED son los siguientes:

- El *Enfoque epistemológico Etnomatemático*: las etnomatemáticas han sido acuñadas por D'Ambrosio (1990, 2008) quién las concibe como las prácticas matemáticas prototípicas de grupos culturales, ya que son las producidas de forma genuina por dichos grupos culturales. Bishop, (1988, 2000) por su parte, también considera que todas las culturas hacen matemáticas y que un proceso matemático genérico como contar, el cual se pone en práctica en cualquier lugar, tiene una forma específica para cada cultura. Junto a ellos, Oliveras (1996, 2006),define las etnomatemáticas como la trilogía formada por: "Una ciencia formal, un modo personal de pensar y un producto social y cultural"
- *Constructivismo Social:* en la adquisición del conocimiento entra en juego la interacción del sujeto con el contexto social y cultural, ya Vygotsky (1983) expresa la importancia de los otros para que el aprendizaje sea significativo. Dentro de este componente teórico, Ernest (1990), afirma que una de las fuentes del conocimiento matemático es la interacción material y grupal del individuo.

La concepción del rol del docente que se plantea en el MED exige una actitud investigadora. La metodología a emplear para el aprendizaje profesional a adquirir se fundamenta en la participación del alumnado para ir aprendiendo de forma cooperativa.

En este sentido, tenemos que el modelo MED presta especial atención a lo siguiente:

- Relación entre alumnos
- Relación alumno-profesor
- Relación del grupo humano con materias de aprendizaje, de forma imnterdisciplinar
- Metodología abierta-flexible

Este modelo será estudiado desde la perspectiva de adecuación a las necesidades actuales, en relación con las competencias que desarrolla en el profesorado en fase de formación, y en este reporte, abordaremos especialmente el estudio de la relación entre alumnos y la relación del grupo con las materias de aprendizaje.

Objetivos de investigación

Una vez planteado el campo de investigación, exponemos algunos de los objetivos de investigación que nos proponemos alcanzar:

O1: Evaluar el modelo de formación, mediante recursos empleados y elaborados por un grupo de profesores en formación,

O2: Constatar las competencias docentes que se desprenden de dicho modelo, en su aplicación práctica a un grupo de profesores de educación infantil

O3: Establecer relaciones entre los aspectos claves de dicho modelo y las funciones docentes requeridas dentro del marco del EEES.

La finalidad pretendida es analizar las competencias que el grupo de profesores adquiere con la experiencia formativa, para llegar a perfeccionar el modelo actual Se aplican diferentes técnicas metodológicas, pero en este reporte solamente comentaremos la de portafolios. El estudio y su metodología se ubican en el paradigma cualitativo, según Goetz & Lecompte (1988), Miles & Huberman (1994,2000).

Procedimientos e instrumentos

Esta parte del estudio se ha desarrollado en el curso académico 2010-2011, con un grupo de alumnos/as de la Universidad de Granada de la Facultad de Ciencias de la Educación en la asignatura denominada Desarrollo del Pensamiento Matemático y su Didáctica, que se imparte en la titulación de Educación Infantil, en la cual la Dra. Oliveras es la profesora. Para esta asignatura y curso académico se utilizó como instrumento metodológico *el Portafolio*, que incluye una serie de fichas para la reflexión del alumnado.

Existen gran variedad de conceptualizaciones y modelos de portafolios, Cano (2005), Gracia Morán y Y Pinar (2009), Klenowski, (2004), Lyons (1999), Shores y Grace (1998), Valero (2007), que hemos analizado y adoptado el concepto y modelo de portafolios que tiene un carácter flexible e innovador para ofrecernos una aproximación a la formación del alumnado y optimizar esta práctica.

En lugar de una concepción del aprendizaje en términos cuantitativos de calificación numérica, se pretende promover una concepción desde la perspectiva cualitativa, en la que el alumno/a aprende tanto en el seno académico como fuera de él y ambos polos se complementan, siendo el portafolios un recurso en la investigación de esta vertiente de la relación teórico-práctica, donde cada discente entiende el conocimiento de una forma y posee autonomía en la construcción del mismo, decidiendo qué procesos poner en marcha o no.

En este entramado, el Portafolios favorece la reflexión del aprendiz sobre qué conoce, cómo ha llegado a esos conocimientos y cómo puede avanzar en los mismos, de ahí su carácter innovador como herramienta para la mejora y el perfeccionamiento profesional.

Hasta aquí se ha argumentado en qué consiste este instrumento, ahora explicamos cómo lo concebimos en nuestra investigación. El Portafolio diseñado para el curso 2010-2011 está en plena conexión con lo que se pretende estudiar en el MED.

Se han diseñado diferentes fichas de un cuestionario de reflexión, que llamamos "Cuestionario del Portafolios", para la asignatura, que consta de tres tipos de fichas que permiten la recogida de datos vinculados con las relaciones entre:

- Teoría y práctica en la materia
- La materia con la vida profesional y cotidiana
- Con otras materias
- Alumno-alumno

Relaciones que son propias del modelo a evaluar. Los tres tipos de fichas son: una "ficha teórica" relativa a la concepción sobre la teoría, una "ficha práctica"sobre las actividades prácticas de la materia, y el "diario de grupo" en el que se consignan las relaciones entre los alumnos.

Las tres primeras relaciones se estudiarán con las fichas teórica y práctica, mientras que el último punto se acotará con la ficha del diario de grupo, la coherencia entre relaciones a estudiar e instrumento de estudio la mostramos en la siguiente Tabla I:

Tabla I. Coherencia entre objeto de estudios e instrumento de investigación

Objeto de estudio MED	**Objeto de estudio Portafolios**	**Ficha del Portafolios para su estudio**
Relación entre Alumnos/as	Relación alumno-alumno	Diario de Grupo
Relación del grupo con materias de aprendizaje	Relación teoría-práctica de la materia, relación materia con contexto cotidiano y profesional y relación con otras materias	Ficha para las clases de teoría y Ficha para las clases de Prácticas

La coherencia que especificamos en la tabla también se mantiene en la redacción de las cuestiones del *Cuestionario del Portafolios* para la parte de teoría y para la parte práctica. En la teoría, los ítems, a grandes rasgos, giran en torno a la relación del contenido con otro contenido de la propia materia, de otras materias de la titulación y de la realidad circundante, o de su experiencia vital, entendiendo por ello, no solo experiencia como profesorado de educación infantil, sino como personas insertas en una sociedad plural y cambiante.

Por su parte, el cuestionario del portafolio de práctica se divide en dos, una primera ficha en la que existe gran similitud con la anterior, esto es, relaciones de las prácticas con: ejemplos de la vida cotidiana, relación con la teoría de la materia. Lo parte novedosa aquí consiste en la elaboración de un segundo instrumento de registro en forma de: *Diario de Grupo* de cada práctica. Éstas se realizan en pequeños grupos de unos tres a cinco alumnos/as, grupos de trabajo que colaboran durante todo el curso, quienes deben expresar qué valoración darían al trabajo realizado en ese día de clase práctica, cómo han colaborado, qué es lo que han aprendido todos de todos.

En lo que se refiere al procedimiento, tenemos que, una vez cumplimentado el Cuestionario del Portafolio por el alumnado, los datos son caracterizados y analizados como indicamos a continuación.

Para cada parte del *Cuestionario del Portafolios* se elaboran unas categorías de análisis cualitativo y unos índices de respuesta.

Para el análisis cualitativo de los datos se tomarán como referentes dos *metacategorías* con un conjunto de subcategorías respectivamente.

El análisis cualitativo se concentra en la definición y discusión de las categorías, y la clasificación de las respuestas con respecto de ellas.

El análisis cuantitativo consiste en lo siguiente:

- ❖ En una tabla cuantitativa del *Índice de respuesta*, en la que aparece el total de alumnos de la materia y los que han contestado a las cuestiones. Tanto para el alumnado que se ha identificado en el cuestionario como para los que no. Se especifican frecuencias de citas de temas concretos.
- ❖ Las categorías y sub categorías específicas, definidas para cada parte del Cuestionario del Portafolios, Teoría, Práctica y Diario, se representan en tablas de frecuencias absolutas, (que omitimos por falta de espacio) y en sus correspondientes *Gráficos de frecuencias relativas*, utilizando para ello el programa informático Excel, que nos servirán para la contabilización de las categorías y su comentario posterior.

Se exponen a continuación las categorías y su conceptualización.

Cuestionario portafolios teoría

Consta de las siguientes metacategorías y subcategorías:

METACATEGORÍA T1: ELLOS *Y SU PROFESIÓN.*

Subcategorías de 1:

1. *Relación de la teoría vida profesional* : en esta categoría se engloba todo aquello que los alumnos y alumnas consideran que han aprendido para su práctica profesional o, todas aquellas experiencias profesionales que le han ayudado para comprender mejor la materia.
2. *Relación vida cotidiana* : se considera por relación con la vida cotidiana como todas aquellas experiencias del día a día en las que se pueden aplicar el contenido de la materia, o que te han ayudado a comprender mejor la materia

METACATEGORÍA T2: *PROFESOR-PROGRAMACIÓN.*

Subcategorías de 2:

1. *Relación con otras materias (relaciones externas)*: con esta categoría los alumnos y alumnas plantean ejemplos o casos en los que la materia sobre la que se realiza el estudio se puede relacionar con los contenidos o prácticas de otras materias
2. *Relación con la materia (relaciones teórico-práctica)*: con esta categorías el alumnado establece relaciones entre el contenido teórico y el-práctico de la propia materia.

Cuestionario portafolios prácticas

Este Cuestionario del Portafolio Prácticas, comparte las mismas dos metacategorías y subcategorías con el Cuestionario del Portafolio Teoría, salvo que añade una subcategoría más, es decir que consta de las siguientes metacategorías y subcategorías:

METACATEGORÍA P1: "*ELLOS Y SU PROFESIÓN*" que es la siguiente:

Relación compañeros: la presencia de esta categoría muestra la relación positiva entre los compañeros, es decir, todas aquellas relaciones en las que se considera que la ayuda prestada entre compañeros ha sido positiva.

Las otras subcategorías, son iguales a las del Cuestionario Portafolios Teoría, -METACATEGORÍA P2: *PROFESOR-PROGRAMACIÓN.*

Subcategorías de 2:

1. *Relación con otras materias (relaciones externas)*
2. *Relación con la materia (relaciones teórico-práctica)*

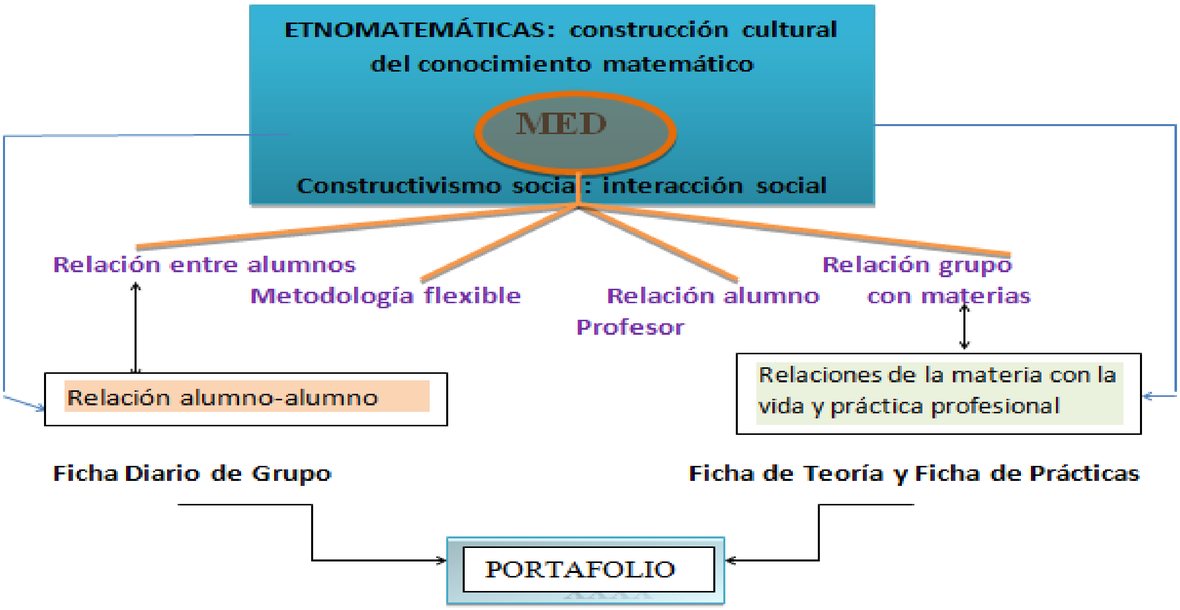
Cuestionario portafolios diario

Consta de dos categorías, que consideramos Metacategorías:

- METACATEGORÍA D1: *IMPORTANCIA Y NECESIDAD DEL APRENDIZAJE COOPERATIVO*: con esta categoría los alumnos y las alumnas expresan la positividad y la importancia que ellos le conceden al aprendizaje cooperativo como una forma más de aprendizaje, en la que a través del propio grupo se resuelven las dudas, se ayudan mutuamente, se realizan las tareas prácticas que se encomiendan cada día, se construye conocimiento en espiral, aceptando y apoyándose en lo ya construido por los otros.
- METACATEGORÍA D1: *CARACTERIZACIÓN DEL APRENDIZAJE COOPERATIVO*: cada vez que aparezca esta categoría significa que los alumnos y alumnas están expresando cualidades o características del aprendizaje cooperativo que se aplicaba en la metodología de clase. En su caracterización se utilizarán los conceptos y términos empleados por la muestra.

Algunas conclusiones

Con objeto de evidenciar las relaciones entre los fundamentos teóricos, el objeto de estudio y el instrumento seleccionado adjuntamos el siguiente esquema aclarativo:



Esquema 1 de Relaciones

Se adjuntan algunas de las cuestiones incluidas en las fichas de reflexión del portafolios de este curso y que los alumnos/as han ido cumplimentando en paralelo al transcurso de la materia citada anteriormente.

Como cuestiones del portafolio para la parte teórica podemos mencionar las siguientes:

- ¿Podrías enlazar el contenido de la clase de hoy con otro contenido de la materia? Cita algunos ejemplos. (Mayoritariamente positivo, ejemplos pocos)
- Algún contenido de otra materia te ha ayudado a comprender mejor el contenido de hoy, (Casi ninguno).
- ¿Podrías enlazar el contenido de la clase de hoy con un aspecto de la vida cotidiana? Cita los ejemplos que se te ocurran. (Algunos, poco explicados).

Como cuestiones del portafolio para la parte práctica, destacamos las siguientes:

- En general, ¿qué has aprendido hoy nuevo y crees que te puede servir en tu formación para la materia y/o la educación infantil y/o la vida? (Bastantes reconocimientos)
- ¿Podrías enlazar el contenido de estas prácticas con otro contenido de la materia? Cita algunos.(Depende mucho del tema)
- Valoración del grupo: sobre la práctica/s de referencia y sobre la actuación del grupo en dichas práctica/s, (Valoran el trabajo del grupo)

Como cuestiones del portafolio incluidas en el diario de grupo destacamos las siguientes:

- ¿Qué he aprendido de los compañeros/as?
- ¿Qué han aprendido de mí, qué les he enseñado?
- ¿Cómo resolvemos los problemas o diferencias en la realización de los trabajos en grupo?
- Valoración del grupo: sobre la práctica/s de referencia y sobre la actuación del grupo en dichas práctica/s

Los datos continúan en proceso de análisis, los ya analizados conducen a conclusiones optimistas cuyas aportaciones serán clave en el proceso de investigación que nos ocupa, y darán base a nuevas publicaciones.

Como producto del proceso total de la investigación, esperamos extraer una recopilación de hallazgos sobre las competencias docentes favorecidas por el MED y lograr dar respuesta a los objetivos marcados, que conduzcan a validar el modelo, para seguir actualizando la formación docente según las necesidades que plantea el panorama educativo actual.

Referencias bibliográficas

Bishop, A. (1988). Aspectos sociales y culturales de la matemática. *Enseñanza de las Ciencias,* 6, 10-14.

Bishop, (2000) Enseñanza de las matemáticas: ¿cómo beneficiar a los alumnos? En Gorgorió y otros (Eds.), *Matemáticas y Educación* (pp.35-56). Barcelona, España: Graó.

Cano, E. (2005). *El portafolios del profesorado universitario. Un instrumento para la evaluación y para el desarrollo profesional*. Barcelona: Ediciones Octaedro.

D'Ambrosio, U. (1990). *Etnomatemática.* São Paulo: Ática.

D'Ambrosio, U. (2008). *Etnomatemática: Eslabón entre las tradiciones y la modernidad*. México: Limusa.

Ernest, P. (1990). *Social constructivism as a philosophy of Mathematics: radical constructivism rehabilited?* Proceedings of PME 14 Conference: México.29-48.

Goetz, J.P. & Lecompte, M.D. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Ediciones Morata.

Gracia Morán, J. y Pinar, M. A. (2009). Una experiencia práctica de evaluación por competencias mediante el uso del portafolio del estudiante y su impacto temporal. *Revista de innovación y formación educativa universitaria*, 2, 2, 210-220.

Klenowski, V. (2004). *Desarrollo del portafolio.* Madrid: Narcea.

Lyons, N. (1999). *El uso del Portafolios*. Buenos Aires: Amorrortu Ediciones

Oliveras, M. L. (1996). *Etnomatemáticas. Formación de profesores e innovación curricular*. Granada: Comares.

Oliveras, M.L. (2005). Microproyectos para la educación intercultural en Europa. *Revista UNO, 38*, 70-81.

Oliveras, M. L. (2006). Etnomatemáticas de la multiculturalidad al mestizaje. En J. Goñi (Eds.), *Matemáticas e interculturalidad* (pp.117-149). Barcelona, España: Graó.

Oliveras, M.L. (2008). The IDMAMIM Project is "Innovation in Didactics for Mathematics in Multicultural contexts, with Immigrant and Minority pupils". En M.L.Oliveras y N. de Bengoechea (Chairs), *Mathematics education in a multilingual and multicultural environment*. ICME 11, Topic Study Group 33, Monterrey, México.

Shores, E. F. y Grace, C. (1998). *El Portafolio, paso a paso.* Barcelona: Graó.

Valero, M. (2007). Introducción de un portafolio para fomentar competencias transversales de los estudiantes universitarios. *Educación Médica,* 10(4): 244-251 50.

Vygotsky, L. S. (1983). *Pensamiento y lenguaje.* La Pléyade: Buenos Aires.

REFLEXIONES SOBRE UN PROCESO DE INVESTIGACIÓN EN ETNOMATEMÁTICAS Y FORMACIÓN DE PROFESORES

Ma. Elena Gavarrete V., Ma. Luisa Oliveras C, Noelia Agudo N.
Universidad Nacional y Universidad de Granada Costa Rica y España
marielgavarrete@gmail.com; oliveras@ugr.es; noelian@correo.ugr.es

Resumen: Este documento presenta las descripciones de tres investigaciones que están enlazadas, mostrando los objetos de estudio, objetivos, metodología empleada y algunos hallazgos obtenidos. El campo de estas investigaciones es el de las Etnomatemáticas y, dentro de él, la formación de profesores. Correlativamente se describe, de manera panorámica, la trayectoria que una de las investigadoras, en formación doctoral, que ha recorrido hasta llegar al momento actual y cómo cada uno de los trabajos de investigación que ha desarrollado, han contribuido a su madurez profesional en la tarea investigativa Creemos que el proceso formativo-investigador permite al investigador, adquirir una comprensión genuina que incide en diversos ámbitos de su vida: en el científico, en el social e incluso en el emocional.

Palabras clave: Investigación en etnomatemáticas, estudios socioculturales, formación de profesores.

Abstract: This document presents descriptions of three investigations that are linked together, showing the objects of study, objectives, methodology and some findings. The scope of these investigations is that of Ethnomathematics and, within it, the training of teachers. Described sequentially, so panoramic, the path that one of the researchers, doctoral training, has come up to the present time and how each of the research that has developed, have contributed to professional maturity in the research task We believe that the process training-research allows the researcher to acquire a genuine understanding that affects many areas of life: the scientific, the social and even emotional.

Key words: Ethnomathematics research, sociocultural studies, teacher training.

Introducción

Creemos que los estudios socioculturales y las investigaciones que se realizan acerca de entornos específicos, como los trabajos en etnomatemáticas, impactan en la capacidad de cuestionar y relativizar las concepciones teóricas y en los procesos de sensibilización ante la diversidad de contextos y de pensamientos en que se enmarcan este tipo de estudios.

La investigación en etnomatemáticas permite adquirir una comprensión genuina que incide en diversos ámbitos de la vida del investigador, tanto en el científico como en el social e incluso, en el emocional; consideramos que la percepción del investigador cambia ante su forma de interpretar la realidad, en un proceso de evolución y madurez académica, profesional y personal.

Desde nuestra perspectiva, las reflexiones que realiza el investigador en etnomatemáticas sobre sus propias tareas prácticas y experiencias, le permite valorar ese crisol de distintas miradas con las que otros contemplan o entienden el mundo, la vida y sus relaciones, y se comienza a asimilar las diferentes posturas desde una posición relativista.

Consideramos que este proceso de sensibilización ante la diversidad de contextos y de pensamientos contribuye a generar en el investigador una competencia para cuestionar y relativizar lo que observa en relación con las distintas concepciones teóricas que ha estudiado. En este sentido ponemos de manifiesto el hecho de que los procesos de investigación inciden integralmente en la evolución personal, profesional y académica de quienes la realizan.

Comentamos de manera panorámica la trayectoria de investigación que una de las autoras (Gavarrete, M.E.), en formación doctoral, ha recorrido hasta llegar al momento actual y cómo cada uno de los trabajos de investigación que ha desarrollado, han contribuido a su madurez profesional en la tarea investigativa.

Inquietudes como insumos para un proceso investigativo

De manera cronológica, podemos describir que la investigadora en cuestión tuvo una secuencia de inquietudes que han generado sus distintos trabajos investigativos.

La inquietud inicial se generó a partir de reflexionar sobre la formación universitaria recibida y los distintos entornos de enseñanza que se deben enfrentar en la práctica profesional. En concreto, indagar acerca de los dilemas relacionados con la falta de uniformidad en la formación de profesores en Costa Rica, condujo a la realización del primer trabajo investigativo a cual haremos referencia más adelante.

La segunda inquietud surge a partir de las reflexiones sobre la propia práctica de la docencia. Consiste en una preocupación sobre cómo enseñar las matemáticas en entornos de aprendizaje específicos que requieren preparación académica especial; y por otra parte cómo el conocimiento cultural ancestral puede ser dado a conocer y respetar. Estas preocupaciones generaron el segundo trabajo de investigación, que trata de las etnomatemáticas de un grupo étnico de Costa Rica.

Los cuestionamientos para el tercer trabajo de investigación están relacionados con: un proceso de formación profesional para la enseñanza de las matemáticas que tome en cuenta los entornos socio-culturales, así como también el conocimiento matemático específico de sociedades ancestrales americanas.

A partir de estas inquietudes se genera una estructura circular, que parte de una preocupación por la formación profesional de los profesores de matemáticas para contextos específicos, y que se culmina con la generación de un modelo de curso de etnomatemáticas para formar profesores en entornos indígenas, que está en proceso de validación.

En la figura 1 mostramos, un esquema, de las inquietudes manifestadas anteriormente.

Figura 1. Esquema secuencial y cíclico de las inquietudes de investigación

La secuencia del proceso investigativo

A continuación mostramos el proceso secuencial de tres investigaciones concluidas en diferentes etapas y de la cuarta investigación que está en proceso de gestación.

Iniciando la investigación en educación

La primera de las investigaciones corresponde al trabajo final de grado que permitió acceder a la titulación de Licenciatura en Ciencias de la Educación, expedido por la Universidad Nacional de Costa Rica, en el año 2002.

Se analizaron en este estudio (Araya y Gavarrete, 2001) las actuaciones de cuatro profesores que trabajaban con dos modalidades de currículum: el presencial y a distancia, y el estudio tuvo una duración de 18 meses, algunas características se resumen en la tabla 1.

Tabla1. Síntesis de la primera investigación realizada

Modelo Didáctico en Educación Abierta y Formal como reflejo de dos realidades
(Araya y Gavarrete, 2001)

Objeto de Estudio	Objetivo Principal	Metodología y Técnicas Aplicadas	Hallazgos principales
Modelos didácticos y creencias de los profesores que trabajan con planes de educación secundaria abierta (semi-presencial y a distancia) y formal (presencial).	Analizar los criterios docentes y creencias de los profesores de un liceo nocturno al aplicar su modelo didáctico, en el subsistema de educación abierta o en el subsistema de educación formal.	Cualitativa. Estudio de casos: Observación no participante, entrevistas a profundidad, cuestionario.	Criterios y creencias de los docentes al aplicar el modelo didáctico. Diferencias individuales, según la realidad experimentada. Cada docente construye de acuerdo con sus experiencias previas y a la realidad de su entorno: a)metodologías para los subsistemas de educación abierta o formal, b) un paradigma educativo, c) una forma de pensamiento

El desarrollar esta investigación permitió a la investigadora cuestionarse su ideal de educación y de docencia, conocer algunos fenómenos, como el currículo oculto que la política educativa ejerce en el entorno áulico y los efectos del modelo didáctico que ejerce el docente sobre el estudiantado.

La aportación de esta primera experiencia en investigación educativa al acervo personal y profesional de la autora, según su propia opinión, es la adquisición de la consciencia acerca de la estandarización en la formación del profesorado que no tiene en cuenta las complejidades y singularidades de los subsistemas educativos.

Esta inquietud que “germina” desde esta etapa, conduce a la investigadora a buscar caminos para que la macro-estructura educativa considere las diversidades contextuales y culturales.

Descubriendo las etnomatemáticas y su importancia educativa en contextos multiculturales

Los hallazgos del segundo estudio, consistente en una etnografía del conocimiento matemático de la cultura Bribri (Gavarrete y Vásquez, 2005), generaron inquietudes sobre cómo descubrir conocimientos de etnomatemáticas y llevarlos a las tareas en los salones de clase. Este trabajo permitió acceder a la titulación de Licenciatura en Enseñanza de las Matemáticas, por la Universidad Nacional de Costa Rica, en el año 2005.

Este trabajo de investigación es pionero en los estudios de Etnomatemáticas en Costa Rica. Para llevarlo a cabo se tuvo que recurrir a estudiar temáticas de distintas áreas como historia, geografía, toponimia, lingüística, sociología y antropología.

Algunas características de la segunda investigación realizada se resumen en la tabla 2.

Tabla 2. Síntesis de la segunda investigación realizada

Etnomatemática en el Territorio Talamanca-Bribri (Gavarrete y Vásquez, 2005)			
Objeto de Estudio	Objetivo Principal	Metodología y Técnicas Aplicadas	Hallazgos principales
Etnomatemática del pueblo indígena bribri del Territorio Talamanca - Bribri, en Costa Rica.	Conocer los principales conceptos matemáticos utilizados por los habitantes del Territorio Indígena Talamanca - Bribri.	Cualitativa. Etnografía: obser-vación, e inmersión en el territorio. Entrevistas semi-estructuradas y en serie, a informantes y analistas locales	Cultura Bribri existe: a) un “número mágico ritual, para albergar informa-ción ancestral, b) clasificadores numerales para organizar los conteos y la visión general del mundo, c) tejidos en edificaciones y de cestas, representan parte de simbolización mítica y de su cosmovisión.

Uno de los aspectos que más se valoran con respecto a esta investigación fue el contacto humano realizado durante su estancia de campo con las comunidades indígenas. Esta le permitió lograr las condiciones necesarias para una adecuada negociación de entrada con los informantes, aprender su lengua para favorecer la comunicación, aprender de sus tradiciones asociadas a la historia mítica y participar de ellas, adentrarse en la cosmovisión de la cultura y otros aspectos relacionados con la experiencia propiamente etnográfica, en la cual cruzar ríos, perderse en la montaña y sufrir enfermedades o sentir miedo eran experiencias muy frecuentes.

Las dificultades y gratificaciones producto de esta experiencia permitieron a la investigadora percibir las diferencias de la cultura estudiada con su propia cultura de origen, y comprender que sus maneras de percibir y entender el mundo son diferentes, y a partir de ahí, desear descubrir elementos de sus etnomatemáticas.

Consultando los expertos sobre matemáticas en las culturas costarricenses

Las inquietudes que han dirigido las acciones investigativas se concentraron en buscar teorías y métodos para lograr conducir el conocimiento matemático asociado al conocimiento cultural para aplicarlo en los salones de clase. Sin embargo, antes de esto, se requiere generar una preparación profesional adecuada que sensibilice a los futuros docentes sobre la existencia de contextos específicos y la importancia de la mediación intercultural en la educación.

El tercer estudio realizado consistió en una consulta a especialistas de Costa Rica sobre la formación del profesorado de matemáticas. Se realizó para acceder a la titulación de Máster en Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Granada-España, en el año 2009 y algunas de sus características se sintetizan en la tabla 3.

Tabla 3. Síntesis de la tercera investigación realizada

Matemáticas, Culturas y Formación de Profesores en Costa Rica (Gavarrete,2009)			
Objeto de Estudio	Objetivo Principal	Metodología y Técnicas Aplicadas	Hallazgos principales
Opinión de expertos costarricenses en cultura y educación, sobre la formación didáctica-matemática de profesores, incluyendo Etnomatemáticas	Caracterizar la visión del grupo sobre: a) la relación entre cultura y matemáticas y, b) la formación de profesores aplicando aspectos culturales de las matemáticas.	Metodología cuan-titativa y cualitativa Cuestionario diseñado, aplicado y analizado con análisis de contenido e interpretativo	Los expertos consultados: a) vinculan matemáticas y culturas, b) consideran que existen carencias en la prepa-ración profesional de los profesores de matemáticas respecto de Etnoma-temáticas, c) el 90% aceptan un programa formativo con esta orientación, dentro del currículo de formación inicial de profesores.

Uno de los aspectos más importantes que se generaron durante la elaboración de esta tercera investigación, es la importancia de valorar la experiencia de otros: los expertos, como un fundamento de la investigación, y sobre todo el enriquecimiento teórico y la evolución en la manera de pensar, fraguada en las confrontaciones del debate del grupo.

Elaborando un modelo de formación de profesores para contextos indígenas

Las inquietudes y reflexiones que se han gestado y mencionado hasta ahora siguen recreándose y orientando de nuevo el proceso investigativo doctoral, que pretende lograr la caracterización, del conocimiento matemático de los grupos autóctonos, y su aplicación a la formación de profesores en etnomatemáticas y educación intercultural; y, posteriormente su difusión y uso en las aulas de matemáticas.

Para lograr lo anterior, es necesario promover una formación especial de los profesores. A partir de una extensa revisión bibliográfica, centrada en los estudios de D'Ambrosio (1990, 1999, 2005, 2007, 2008), Bishop (1988a, 1988b, 1999, 2000), Oliveras (1996, 1997, 2002, 2004, 2005, 2006, 2008) y Domite (2009), así como los hallazgos del trabajo previo (etnográfico, entrevistas, observaciones y consulta a especialistas, realizada en la tercera investigación, Gavarrete, 2009) se genera un Modelo de "Curso de Etnomatemáticas para formar Maestros de Entornos Indígenas" (MOCEMEI). Este curso incluye elementos de Etnomatemáticas (D'Ambrosio, Bishop y Oliveras) y Etnodidáctica (Oliveras), que fundamentan ciertos recursos elaborados para su implementación en concurrencia con un curso más amplio de formación.

La elaboración y puesta en acción del modelo del curso MOCEMEI constituye un desafío pues quien lo diseña no es indígena, lo que plantea serias reflexiones (Domite, 2009) y los aspectos relacionados con el conocimiento indígena no son conocidos por los profesores en formación, ya que no son de dominio público en Costa Rica (UNICEF, 2007). Sin embargo, se trata de mediatizar un proceso de alfabetización matemática (Oliveras, 2006; Rosa y Orey, 2004), promoviendo los principios de literacia, materacia y tecnocracia, propuestos en el Programa de Etnomatemáticas (D'Ambrosio, 2005, 2008) y en el cual la cultura y la tradición son ampliamente valorados.

Este modelo se encuentra actualmente en proceso de implementación y validación con un grupo de estudiantes de la etnia Cabécar de Costa Rica y contempla una secuencia metodológica de acciones en la cual se promueven: (a) la reflexión sobre las matemáticas (b) el diálogo y la cooperación en el aprendizaje y (c) la aplicación del uso del portafolio auto-inter-evaluativo (Shores y Grace, 1998).

El modelo MOCEMEI se aplica en una estructura de clases semi-presenciales, en las cuales los estudiantes, a partir de tareas plasmadas en fichas de trabajo para la clase y de trabajo a distancia, aprenden acerca de las etnomatemáticas de su propia cultura (D'Ambrosio, 1990, 2008), caracterizan sus etnomatemáticas cabécares, a partir de reflexiones en torno a las seis actividades matemáticas universales (Bishop, 1988a, 1999) y aprenden a desarrollar microproyectos interculturales basados en etnomatemáticas (Oliveras 2004, 2005).

En las sesiones de trabajo presencial del grupo se hace una verdadera interculturalidad, valorando todas las culturas presentes y los aspectos matemáticos del pensamiento de la comunidad y haciendo que se consideren las "necesidades particulares de las comunidades indígenas" (Solano, 2004), que según Araya y Villena (2006) "han sufrido marginación o discriminación" en cuanto a educación, favoreciendo frente a otras técnicas didácticas, las discusiones en la lengua nativa de los estudiantes indígenas, puesto que, su manera de transmisión del conocimiento.es a través de la tradición oral.

Conclusiones

El proceso de reflexión de la investigadora, que ha acompañado a la investigación en etnomatemáticas, ha sido transversal y secuencial, en el cual se han vivenciado cambios en su manera de comprender y relacionar la presencia de las matemáticas en diferentes contextos. Se ha hecho una profundización en el conocimiento de diferentes marcos teóricos, especialmente del Programa de Etnomatemáticas y de su importancia e impacto a nivel socio-educativo. Ha realizado una revisión sobre la situación actual en la educación y la formación de profesores de matemáticas costarricenses, (Gavarrete y Oliveras, 2010), que le ha conferido una visión profunda de su entorno, en cuanto a su objeto de su estudio.

Este proceso de de evolución se hace explícito en la elaboración y aplicación del modelo MOCEMEI que constituye un modelo innovador para el currículo de Costa Rica, por varios aspectos: (a) constituye una innovación didáctica en la formación de profesores indígenas , al ser un modelo específico dirigido a un grupo de futuros maestros, que no han tenido antes la oportunidad de reflexionar y debatir acerca de las matemáticas de su cultura, se les guía a establecer la relación entre el conocimiento matemático y el conocimiento cultural, (b) en la educación multicultural, evidencia las dificultades de la diferencia cultural entre los formadores y los profesores en formación, y entre estos y los estudiantes, y la necesidad de preparación para la interculturalidad y, (c) pone de manifiesto la posibilidad de realizar programas específicos para la formación didáctica-matemática de profesores que atiendan entornos de aprendizaje singulares, como es el caso de los entornos indígenas.

En el año 2011 se inició el proceso de implementación y validación del modelo, cuyos datos están en elaboración y se han obtenido manifestaciones de aceptación por parte de los expertos, por los formadores de maestros y por los propios maestros en formación, avalando la continuidad de esta investigación hasta su culmen.

Referencias bibliográficas

Araya, D.A. y Gavarrete, M.E. (2001). *El modelo didáctico en educación abierta y formal como reflejo de dos realidades*. Tesis de Licenciatura no publicada, Centro de Investigación y Docencia en Educación de la Universidad Nacional. Costa Rica.

Araya, M. y Villena, S. (2006). *Hacia una pedagogía del encuentro cultural: discriminación y racismo.* San José, Costa Rica: Editorial UCR.

Bishop, A. (1988a). Aspectos sociales y culturales de la Educación Matemática. *Enseñanza de las Ciencias, 6* (2), 121-125

Bishop, A. (1988b). Mathematics Education in its Cultural Context. *Educational Studies in Mathematics, 19*, 179-191

Bishop, A. J. (1999). *Enculturación matemática, la educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidós.

Bishop, A. (2000). Enseñanza de las matemáticas: ¿cómo beneficiar a todos los alumnos? *Revista UNO, 154*, 35-56.

D'Ambrosio, U. (1990). *Etnomatemática.* São Paulo: Ática.

D'Ambrosio, U. (1999). *Educação para uma sociedade em transição*. Campinas: Papirus Editora.

D'Ambrosio, U. (2005). Sociedade, cultura, matemática e seu ensino. *Educação e Pesquisa, 31*(1), 99-120.

D'Ambrosio, U. (2007). La matemática como ciencia de la sociedad. En J. Giménez, J. Diez-Palomar, M. Civil (Eds.), *Educación Matemática y Exclusión* (pp.83-102). España: Graó.

D'Ambrosio, U. (2008). *Etnomatemática: Eslabón entre las tradiciones y la modernidad*. México: Limusa.

Domite, M.C.S. (2009). Perspectivas e desafios da formação do professor indígena: O formador externo à cultura no centro das atenções. En M.Fantinato (Eds.), *Etnomatemática. Novos desafios teóricos y pedagógicos* (pp.181-192). Niterói: Editora da Universidade Federal Fluminense.

Gavarrete, M.E. y Vásquez, A.P. (2005). *Etnomatemáticas en el Territorio Talamanca Bribri*. Tesis de Licenciatura no publicada, Escuela de Matemáticas y Centro de Investigación y Docencia en Educación de la Universidad Nacional. Costa Rica.

Gavarrete, M.E. (2009). *Matemáticas, Culturas y Formación de Profesores en Costa Rica.* Tesis de Master no publicada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Granada, España.

Gavarrete, M.E. y Oliveras, M.L. (2010). Etnomatemáticas y Formación de Profesores: una propuesta para Costa Rica, a la luz del Segundo Informe del Estado de la Educación. En Y. Morales (Ed.), *Segundo Congreso Internacional de Enseñanza de la Matemática* (pp.111-119). Costa Rica: Universidad Nacional.

Oliveras, M.L. (1996). *Etnomatemáticas. Formación de profesores e innovación curricular*. Granada: Comares.

Oliveras, M. L. (1997) Reflexiones sobre el perfil del profesor de Matemáticas del próximo siglo. En: R. Olfos (Ed.).*Alternativa para la Formación de Profesores de Matemáticas*, (pp.49-74).Santiago. Chile

Oliveras, M.L., Favili, F. y Cesar, M. (2002). Teacher training for Intercultural Education based on Ethnomathematics. . En P.P. Scanducci & E. Sebastian, E. *Proceedings of Second International Conference on Ethnomathematics*, Ouro Preto, Brasil. [Cd ROM support]

Oliveras, M.L., Favili, F. y Cesar, M. (2004) *Progetto IDMAMIM*, [CD-ROM]. Dirección General de Educación y Cultura de la Unión Europea, Università di Pisa.

Oliveras, M.L. (2005). Microproyectos para la educación intercultural en Europa. *Revista UNO, 38*, 70-81.

Oliveras, M. L. (2006). Etnomatemáticas de la multiculturalidad al mestizaje. En J. Goñi (Eds.), *Matemáticas e interculturalidad* (pp.117-149). Barcelona, España: Grao.

Oliveras, M.L. (2008, July). Model for research on Multiculturality in Mathematics Education. . En M.L. Oliveras y N. de Bengoechea (Chairs), *Mathematics education in a multilingual and multicultural environment.* ICME 11, Topic Study Group 33, Monterrey, México.

Rosa M. y Orey, D.C. (2004). Etnomatemática como ação pedagógica. En B.B. Morey (Ed.), *Coleção Introdução à Etnomatemática*. Brasil: Natal-RN.

Shores, E. F. y Grace, C. (1998). *El Portafolio, paso a paso.* Barcelona: Graó

Solano, E. (2004). La población indígena en Costa Rica según el Censo 2000. En L. R. Bixby (Ed.), *Costa Rica a la luz del Censo 2000* (pp.217-258). San José, Costa Rica: Centro Centroamericano de Población.

UNICEF (2007). *Conocimientos y percepciones de la población sobre los pueblos indígenas en Costa Rica*. Recuperado el 18 de marzo de 2009 de: http://www.uniceforg/lac/Documento_PR_Costa_RIca(1).pdf

MODELO QUE RELACIONA LOS CONTENIDOS DE LA MATEMÁTICA ENTRE EL NIVEL BÁSICO, MEDIO Y SUPERIOR PARA ENFRENTAR LAS ASIGNATURAS MATEMÁTICA I Y II EN LA UCI

Niurys Lázaro Alvarez
Universidad de las Ciencias Informáticas. Cuba
nlazaro@uci.cu

Resumen: Esta investigación surge por la necesidad de elevar el dominio, por parte de los alumnos de nuevo ingreso, de los contenidos básicos requeridos en la Matemática para enfrentar con éxito las asignaturas Matemática I y II. En tal sentido se ofrece un modelo que relaciona los contenidos de la Matemática desde el nivel medio hasta el nivel superior para enfrentar el cálculo diferencial e integral, contiene además orientaciones de bibliografía y medios para encontrar el desarrollo del contenido necesario. Con el modelo se pretende aportar una guía a profesores de la educación Secundaria Básica y Preuniversitaria así como a estudiantes de primer año y profesores de la disciplina Matemática en la Universidad de las Ciencias Informáticas (UCI), que sirva a los primeros para motivar el estudio por la asignatura y a la formación vocacional, y a los segundos para asegurar los conocimientos previos necesarios para enfrentarse a los diferentes temas de las asignaturas Matemática I y II en la UCI.

Palabras clave: Contenidos básicos, modelo de relación

Abstract: This investigation arises due to the need of increasing freshmen´s knowledge about basic contents of Mathematics, so they can successfully face the subjects Mathematics I and II. It is offered a model that relates Mathematical contents since high school till the university level, to face differential and integral calculus. It also contains bibliographic orientations and ways to find the necessary content. This model aims at giving a guide to teachers from Junior High and High Schools as well as to freshmen and teachers from the University of Informatics Sciences. The first group will use it to motivate studies on this subject and to form students vocationally. The second group is meant to be award of the previous knowledge needed, to deal with the different topics of Mathematics I and II subjects in the University of Informatics Sciences.

Key words: Basic contents, model of relating.

Introducción

La enseñanza de la Matemática como asignatura priorizada que está presente en todo lo que se realiza diariamente, y que tiene un gran peso en el desarrollo de la formación general y en particular en el pensamiento lógico de los niños, adolescentes y jóvenes a lo largo de todas las etapas de estudio, debe ser un proceso sistemático, continuo e interdisciplinario, donde además de utilizar las bibliografías tradicionales, el profesor debe aprovechar las potencialidades que brindan las nuevas tecnologías de la informática con el objetivo de elevar el aprendizaje de los alumnos.

En la Universidad de las Ciencias Informáticas (UCI) anualmente se aplica un diagnóstico inicial de Matemática a los alumnos que ingresan en primer año, donde se han detectado dificultades en el desarrollo de habilidades en la Matemática Básica. En los informes semestrales de las asignaturas de la disciplina Matemática y de Física se plantean, entre las dificultades detectadas en las pruebas parciales y finales, habilidades que deben ser dominadas por los estudiantes en enseñanzas precedentes.

¿Conocen todos los profesores desde qué enseñanza y grado el alumno debe dominar este contenido, cómo se trabajó determinado contenido básico en los diferentes niveles y qué bibliografía orientar al alumno para que lo estudie, recuerde y consolide?

Hasta el curso 2009-2010 se impartió en la UCI un Curso Introductorio de Matemática Básica donde se trabajaban temas como: Conjuntos y funciones, Trabajo con variables, El plano (secciones cónicas), Áreas y volúmenes en el plano y el espacio y Trigonometría. A partir del curso 2010-2011 no se imparte este Curso Introductorio, otra razón por la que se considera necesaria la presente propuesta.

El trabajo tiene por *objetivo* ofrecer un modelo que relaciona los contenidos de la Matemática entre el nivel medio y superior para enfrentar el cálculo diferencial e integral que se estudia en Matemática I y II que contribuya a elevar el aprendizaje de los alumnos.

Se trata de una propuesta para que los estudiantes de primer año estén mejor preparados para la búsqueda activa del conocimiento y para integrar el aprendizaje en su aspecto cognitivo y afectivo, lo que le permite crecer, instruirse, educarse y por ende desarrollarse; asimismo su profesor sea capaz de orientarlo correctamente.

En tal sentido el modelo pretende aportar una guía a profesores de la educación Secundaria Básica y Preuniversitaria que permita motivar el estudio por la asignatura y contribuir a la formación vocacional. Así como a estudiantes de primer año y profesores de la disciplina Matemática para asegurar los conocimientos previos necesarios para enfrentarse a los diferentes temas de las asignaturas Matemática I y II.

Estudios del aprendizaje de la Matemática

Al estudiar la efectividad del proceso de enseñanza aprendizaje, investigadores del Instituto Central de Ciencias Pedagógicas (ICCP) 1991, así como los resultados del Primer Estudio Internacional Comparativo realizado por el Laboratorio Latinoamericano de Evaluación de la Calidad de la Educación (1998), reflejaron deficiencias en el aprendizaje de las asignaturas concluyendo que:

En cuanto a la calidad, las dos grandes dificultades identificadas están relacionadas con la adquisición de los procedimientos lógicos del pensamiento, de un pensamiento reflexivo y la posibilidad de aplicar el conocimiento a nuevas situaciones.

Desde el punto de vista psicopedagógico el diagnóstico se realiza para poder dirigir más eficientemente el aprendizaje, y en sentido más amplio, la formación de la personalidad del educando, para poder intervenir de acuerdo a sus necesidades educativas, sean especiales o no.

Se presenta en el evento Pedagogía 2003 por Aleida Márquez Rodríguez un estudio que relaciona el diagnóstico con el pronóstico que plantea como exigencias del diagnóstico para su articulación sistémica con el pronóstico los referentes teóricos a diagnosticar, precisados y jerarquizados. Refiere que "Todo lo que acontece durante y como resultado del diagnóstico es información valiosa para que el docente pueda intervenir, pero se requiere desarrollar otras acciones importantes antes de trazar estrategias para transformar (corregir, compensar, potenciar y en algunos casos prevenir) las manifestaciones detectadas, es decir para la dirección eficiente del aprendizaje." (Márquez, 2003, p.5)

En tal sentido se propone el modelo de relación de los contenidos de Matemática entre el nivel medio y superior para enfrentar el estudio del cálculo diferencial e integral. Por otra parte el presente siglo exige de las instituciones educacionales la lucha por la formación de jóvenes generaciones que sean capaces de asimilar activa y críticamente los contenidos de la cultura de forma sistémica, o sea, aprendizajes desarrolladores.

> No todo aprendizaje es desarrollador. Cualquier tipo de aprendizaje (cualquiera que sea su contenido, mecanismo, nivel de complejidad, etc.) produce cambios en determinados procesos y estructuras psicológicas internas y/o conductuales, que pueden ser observables o no externamente a través de nuevas adquisiciones y logros, y que perduran por períodos más o menos largos de la vida. Sin embargo, sólo en el caso de que esas nuevas adquisiciones encierren en sí mismas el potencial para promover nuevas transformaciones y por lo tanto para impulsar el tránsito del sujeto hacia niveles superiores de desarrollo, afirmamos que están ocurriendo aprendizajes verdaderamente *desarrolladores.* (Castellanos Simons, 2003, p.3).

En Cuba como en otros países se estudia el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática y se proyectan acciones para mejorarlo.

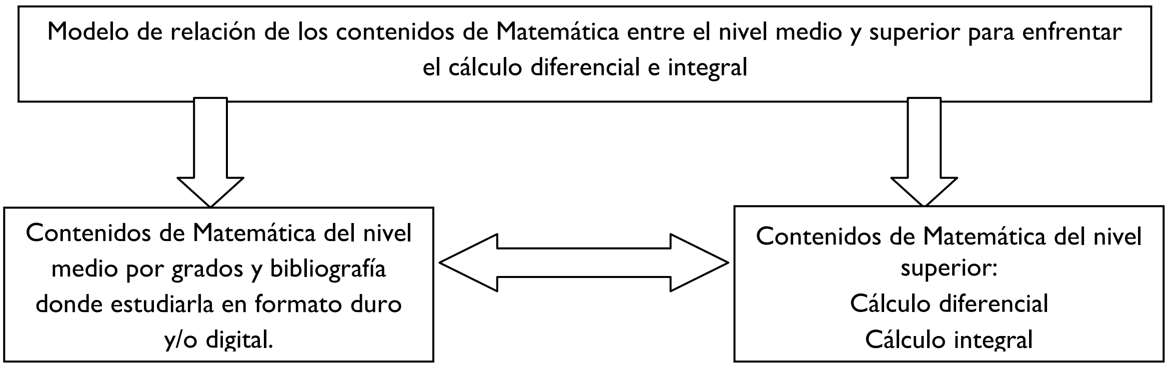
> La Matemática es considerada, como una de las asignaturas más "difíciles" en los programas escolares [...], lo que ha suscitado una preocupación constante, casi desde el surgimiento mismo de la enseñanza formal. Por ello en Cuba se realizó un análisis de las funciones y tareas de la Enseñanza de la Matemática, precisados por el MINED en 1987 y se elaboró, 10 años después el Programa Director de Matemática, el que con algunas modificaciones sigue vigente y en el que se declara

> que la escuela tiene que priorizar y garantizar que los alumnos adquieran gradual y sistemáticamente una formación matemática para que los alumnos con creciente independencia y creatividad aprendan. Sin embargo a juicio de esta autora esta formación matemática aún no es suficiente, lo que ha podido corroborar en su trabajo por más de 25 años en su enseñanza, en el que al recibir los estudiantes de los niveles precedentes, éstos presentan dificultades en la aplicación de los contenidos matemáticos necesarios para el desarrollo del Cálculo Diferencial e Integral, lo que demuestra insuficiencias en la solidez de los conocimientos matemáticos abordados anteriormente. (Rodríguez Jara, 2011, p.2)

En consecuencia los alumnos en el primer año de la educación superior, al enfrentar el estudio del cálculo diferencial e integral, uno de los elementos necesarios para que el aprendizaje sea desarrollador es que el alumno no lo vea como algo separado de lo que ya conoce de enseñanzas precedentes en el estudio de la Matemática sino como una ampliación, continuación y profundización de los *contenidos básicos* que debe dominar para enfrentarse a lo nuevo como es: el estudio de las funciones que comienza desde noveno grado con las funciones lineales, pasando por el preuniversitario con las funciones cuadráticas, cúbicas, racionales, con radicales, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas.

Presentación del modelo

El modelo que se presenta propone la estructura que debe seguir una clase de las asignaturas Matemática I y Matemática II para que el alumno asimile el nuevo contenido como una continuidad de contenidos recibidos en enseñanzas precedentes. El modelo tiene la siguiente representación:



El modelo de relación de los contenidos de Matemática entre el nivel básico, medio y superior para enfrentar el cálculo diferencial e integral concibe el tratamiento del nuevo contenido en la clase de Matemática en el nivel superior a partir de los contenidos del nivel precedente y que sirven de base, de soporte y fundamento para el tratamiento de lo nuevo; a partir de *orientaciones que* *realiza el profesor* a sus alumnos como trabajo independiente para actualizarlos en los contenidos necesarios para enfrentar lo nuevo.

Se debe realizar un *diagnóstico previo*, al inicio de cada asignatura, tema o temática (a decisión del profesor) donde se evalúen *los contenidos básicos que se definen* previamente por el profesor para enfrentar cada tema de la asignatura. Los resultados de este diagnóstico se recogen en un documento que contiene el nombre de todos los estudiantes con los elementos del conocimiento afectados identificados por estudiante, detectados en el diagnóstico. Este documento se utiliza al realizar las orientaciones mencionadas de forma diferenciada, según los resultados del diagnóstico.

Para hacer uso del modelo se utiliza como apoyo una tabla que organiza los contenidos matemáticos que se abordan desde el nivel básico y medio por año de estudio y sirven de base para enfrentar el contenido de las asignaturas Matemática I y II. La relación de los contenidos básicos esenciales para enfrentar el cálculo diferencial e integral tiene como base el estudio de las funciones, que se inicia en el nivel básico en Cuba, y se establece en la tabla**.** Donde se incluye, además, la bibliografía básica que se utiliza en cada nivel de educación, que para el estudio de los contenidos de Matemática I y II, la que se utiliza en la UCI, es el texto Cálculo con Trascendentes Tempranas de James Stewart (Stewart, 2008) en cuatro tomos; y en la enseñanza básica y media Libros de Texto (Muñoz, Agüero, Montes de Oca, Arias, y López, 1990) en el de octavo grado, (Campistrous, Miyar, Naredo, Rivero, Montes de Oca, y Durán, 1989) en el de décimo y (Campistrous, Conrado, Rivero, Naredo, Durán, Palacios, y Rizo, 1990) en onceno. Se plantea también como bibliografía para la enseñanza básica el software educativo Elementos Matemáticos (Lázaro Alvarez, 2008). A continuación se muestra una parte de la tabla:

Tabla que relaciona contenidos de Matemática entre el nivel básico, medio y superior

NIVEL BÁSICO Y MEDIO			**NIVEL SUPERIOR**		
Grado	**Unidad y Contenido**	**Bibliografía**	**Año**	**Contenido**	**Bibliografía**
9no	Unidad 2: Proporcionalidad, función y ecuación.		1ro	Matemática I Tema I: Funciones reales de una variable real.	Cálculo con Trascendente s Tempranas. Parte I Páginas 11-77
	La función lineal. La función como correspondencia entre dos conjuntos. Distintas formas de representar. Cálculo de valores funcionales. Representación gráfica de funciones lineales. Ceros, pendiente. Representación	LT de 8vo p.100-130. Software Elementos Matemáticos (SEM) Módulo Contenidos 3.4.2. Módulo Ejercicios: 129-131, 236-241, 242-251,			

	gráfica de fenómenos naturales y sociales.	262-271, 252-261, 231-235.			
	Trabajo con variables. Conceptos de término, variable, valor numérico de expresiones, monomios, polinomios, operaciones con polinomios. Productos notables. Descomposición factorial.	LT de 9no p.83-103 LT de 10mo p. 22-31 SEM: Módulo Contenidos 3.4.3 al 3.4.5. Módulo ejercicios: 156, 158-162, 289-292, 96- 98, 107-109, 114-116, 163-166, 168, 272-288, 293-306.		Matemática I Tema II: Límite y continuidad de funciones reales de una variable real.	Cálculo con Trascendentes Tempranas. Parte I p. 85-147
	La ecuación de segundo grado. Resolución de ecuaciones cuadráticas. Problemas que conducen al planteamiento y resolución de ecuaciones de 2do. Grado.	LT 9no p.141-157 LT 10mo p. 45-59. SEM: Módulo Contenidos 3.4.6. Módulo ejercicios: 307-328.		Matemática I Tema III: Cálculo diferencial de funciones reales de una variable real.	Cálculo con Trascendentes Tempranas. Parte I p. 156-196
	Cálculo de áreas y volúmenes de figuras planas y cuerpos	LT 8vo p.156-206		Matemática II Aplicaciones de la integral definida al cálculo de área y volumen.	Cálculo con Trascendentes Tempranas. Parte 2 Páginas 433-451
11no	Las funciones exponenciales y logarítmicas	LT 11 p. 1 a la 57		Matemática I Tema I: Funciones reales de una variable real.	Cálculo con Trascendentes Tempranas. Parte 1 p. 11-77
	Secciones cónicas	LT 11 p. 112 a la 167		Matemática II Cilindros y superficies cuadráticas	Cálculo con Trascendentes Tempranas. Parte 3 p. 821-826

Esta tabla sirve de guía a estudiantes y profesores de la educación superior para crear las bases desde las propias clases de las asignaturas Matemática I y II para que el alumno se apropie de los contenidos necesarios para enfrentar lo nuevo a aprender a partir de orientaciones precisas para el estudio independiente como:

1. En la asignatura Matemática I se estudian 3 temas, el primer tema "Funciones reales de una variable real" es un tema de reafirmación y profundización. En el se aborda la descomposición de fracciones racionales en suma de fracciones simples.

Antes de enfrentar el estudio de la descomposición de funciones racionales en suma de fracciones simples se debe orientar a los alumnos el estudio de los contenidos básicos definidos para esta temática:

- la descomposición factorial de polinomios,
- la resolución de sistemas de ecuaciones lineales,
- la resolución de sistemas de ecuaciones cuadráticas.

Estas orientaciones se realizan según los resultados del diagnóstico con el tiempo suficiente para que el alumno consulte la bibliografía orientada y con apoyo de la tecnología, de sus compañeros y del profesor el alumno logre nivelar sus conocimientos.

2. En la asignatura Matemática II el tema 2 es "Geometría analítica del espacio. Superficies cuádricas" para el que se identifica como contenidos básicos.

- la representación de puntos y rectas en el plano.
- la representación de puntos, rectas y planos en el espacio.
- las expresiones analíticas de rectas y planos.
- Las secciones cónicas, sus representaciones y ecuaciones.

3. En Matemática II el primer tema es "Integración de funciones de una variable real" Cuando se introduce la definición de integral definida o el tema de las aplicaciones de la integral definida al cálculo de área de regiones bajo una curva o limitadas por curvas de funciones en el plano, se inicia por algo conocido por los alumnos como es el cálculo de áreas de figuras planas. El planteo de regiones del plano que no tienen las formas conocidas por ellos sirve de motivación hacia el nuevo contenido.

Con el uso sistemático del modelo y el conocimiento de los contenidos básicos definidos por el profesor para enfrentar cada tema, los alumnos llegan a tomar iniciativas sin que sea obligatoria la orientación del profesor pues lo ven como una necesidad para enfrentar lo nuevo.

El modelo se puede utilizar además desde la educación básica y media para motivar a los alumnos por el estudio de carreras de ciencias, establecer relaciones intradisciplinaria con niveles superiores de enseñanza.

Conclusiones

Con el estudio realizado se pudo corroborar que es interés de directivos y profesores garantizar una sólida formación y dominio del contenido en los alumnos que ingresan a la educación superior para su mejor asimilación y tránsito por la carrera.

En la disciplina Matemática se puede garantizar una continuidad lógica y coherente mediante un modelo que relaciona los contenidos de la Matemática entre el nivel medio y superior que permita motivar a los estudiantes por el estudio del cálculo diferencial e integral en las asignaturas Matemática I y II respectivamente en la UCI, y en consecuencia, elevar el aprendizaje de los estudiantes.

Referencias bibliográficas

Campistrous, L., Conrado, Z., Rivero, H, Naredo, Durán, A., Palacios, J. y Rizo, C. (1990) *Libro de Texto de onceno grado.* La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación.

Campistrous, L., Miyar, O., Naredo, R., Rivero, H, Montes de Oca, E y Durán, A. (1989) *Libro de Texto de décimo grado.* La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación.

Castellanos Simons, D. (2003) Estrategias para promover el aprendizaje desarrollador en el contexto escolar. *Memorias Pedagogía 2003, día 1, curso 10*. p. 3. La Habana: MINED.

Lázaro Alvarez, N. (2008) *Estrategia Metodológica para potenciar el uso del Software Elementos Matemáticos en la Secundaria Básica*. Tesis de maestría. Instituto Superior Pedagógico "Rafael María de Mendive". Pinar del Río. Cuba. Recuperado el 31 de marzo de 2011 de http://bibliodoc.uci.cu/TM/Tdig_0002_08.pdf

Márquez Rodríguez, A. (2003). El sistema diagnóstico-pronóstico como instrumento para lograr la dirección eficiente del aprendizaje. *Memorias Pedagogía 2003, día 1, curso 10*. p. 5. La Habana: MINED.

MINED (1987). *Proyecto. Matemática*. Concepción general de la asignatura en el subsistema de la educación general politécnica y laboral. Folleto.

Muñoz, F., Agüero, J., Montes de Oca, E., Arias, D. y López, E. (1990) *Libro de Texto de octavo grado.* La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación.

Rodríguez Jara, A.M. (2011). *La enseñanza de las matemáticas en Cuba*. Recuperado el 31 de marzo de 2011 de http://www.rmm.cl/index_sub3.php?id_contenido=8405&id-_seccion =4241&id_portal=635

Stewart, J. (2008). *Cálculo con Trascendentes Tempranas.* La Habana, Cuba: Editorial Félix Varela.

UN ESTUDIO SOBRE LA PRÁCTICA DE UN PROFESOR DE MATEMÁTICAS AL DESARROLLAR EL CONCEPTO DE SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES BAJO EL ENFOQUE DE COMPETENCIAS

Martha Iris Rivera, Javier García, Guadalupe Cabañas-Sánchez
Universidad Autónoma de Guerrero. México
caneiris_037@hotmail.com; gagj_87@hotmail.com; gcabanas.sanchez@gmail.com

Resumen: Este artículo describe los resultados de un estudio que analiza la práctica de un profesor de matemáticas durante la explicación escolar del concepto de sistemas de ecuaciones lineales, bajo el enfoque de competencias. El estudio de la práctica del profesor se sustenta en la posición teórica de Jackson (1975) quien distingue las tres fases siguientes: a) Preactiva, b) Interactiva, y; c) Postactiva. Para nuestro estudio nos centramos en las dos primeras. La primera se caracteriza por la manifestación de las relaciones entre el profesor y el currículum oficial (contenidos, objetivos a alcanzar, tiempo escolar, etc.), mientras que la segunda es la relación funcional que se establece entre la actividad del profesor y el estudiante en torno al saber. Los resultados indican que el profesor contribuye fundamentalmente al desarrollo de competencias genéricas, importantes sin duda, sin embargo, también es importante el desarrollo de las específicas.

Palabras clave: Práctica, práctica del profesor, sistemas de ecuaciones lineales, competencias.

Abstract: This paper describes the results of a study that analyzes mathematics teacher's practice during school explanation of the system of linear equations under the competencies approach. The study of teacher practice is based on Jackson (1975) theoretical position; who distinguishes the three following phases: a) Proactive, b) Interactive and; c) Post-active. We focused on the first two. The first one is characterized by the relationship between teacher and syllabus (content, objectives to be achieved, school time, etc.). While the second phase is the functional relationship that is established both teacher and student's activity around the knowledge. The results say, that the professor contributes to the development of generic competencies, basics we know it. However, it is always important to develop specific competencies

Key words: Practice, teacher practice, system of linear equations, competencies.

Introducción

Esta investigación se desarrolla en el contexto del movimiento de reforma en que actualmente se encuentran inmersos los sistemas educativos de nuestro país, México. Particularmente en la que compete al Nivel Medio Superior (NMS), denominada la Reforma Integral del Nivel Medio Superior (RIEMS). El estudio se interesa por comprender desde las prácticas del salón de clases, cómo un profesor de matemáticas contribuye al desarrollo de competencias matemáticas, tal como se establece en el curriculum oficial de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAG), institución en donde se llevó a cabo este trabajo. El marco para el análisis de la práctica del profesor se sustenta en: a) el concepto de competencia matemática, b) la revisión del programa de Matemáticas II del bachillerato de la UAG, y; c) en la posición teórica de Jackson (1975), quien distingue las tres fases en la práctica del profesor: *i*) Preactiva, *ii*) Interactiva, y; *iii*) Postactiva. Para nuestro estudio nos centramos en las dos primeras. La primera se distingue por la manifestación de las relaciones entre el profesor y el currículum oficial (contenidos, objetivos a alcanzar, tiempo escolar, etc.), mientras que la segunda es la relación funcional que se establece entre la actividad del profesor y el estudiante en torno al saber.

En la investigación participaron 45 estudiantes (15-17 años), quienes cursaban el segundo semestre de bachillerato. El análisis de la práctica del profesor se sustenta de observaciones hechas durante seis sesiones de 50 minutos cada una, al tiempo que el concepto matemático en cuestión era objeto de enseñanza. Las sesiones fueron videograbadas y transcritas para su posterior análisis. Nos apoyamos además, en los argumentos escritos de los estudiantes (notas de sus cuadernos), en el material del profesor y en las notas de campo del primer investigador.

Momentos en los que se desarrollan las actividades del profesor

La práctica profesional del profesor involucra un conjunto de actividades que van desde el análisis del curriculum, de la gestión que hace del objeto de saber por medio de las interacciones con sus estudiantes, hasta los procesos de evaluación. El currículo escolar desempeña un papel fundamental en la enseñanza, en razón de que regula el comportamiento del profesor y los estudiantes en el salón de clases, es el profesor como representante institucional, quien lo interpreta, lo pone en funcionamiento y encara dificultades (Cabañas, 2011). De ahí que las prácticas que tienen lugar en el salón de clases, se conciben como el medio institucionalizado más evidente a través del cual las políticas del sistema educativo de una nación se ponen en funcionamiento (Clarke, Emanuelsson, Jablonka & Mok, 2006).

La práctica del profesor, como bien señala Llinares (1999), no está inscrita únicamente en lo que sucede en el aula, sino que se conceptualiza desde una perspectiva más amplia, como una comunidad de práctica profesional en la que se incluyen tareas como tutorías, reuniones de seminario-departamento, asistencia a actividades de formación, etc. En este contexto, Jackson (1975) reconoce que los profesores realizan diversos tipos de actividades. Distingue un determinado proceso de pensamiento al momento en que planifican el trabajo que llevarán a cabo en el salón de clases, que como es bien sabido, tiene lugar en una etapa distinta a la gestión del objeto de saber en el aula durante las interacciones. Es así que identifica tres fases en la actividad de un profesor, como parte de su práctica: Fase preactiva, fase interactiva y fase postactiva. Nuestro estudio se sustenta de las dos primeras, y consisten de lo siguiente:

Fase preactiva: Se distingue por la manifestación de las *relaciones entre el profesor y el currículum oficial* (contenidos, objetivos a alcanzar, tiempo escolar, etc.). En esta fase se planifican y organizan los conceptos matemáticos a estudiar, donde las tareas del profesor son el diseño, elección o modificación de los problemas que se proponen a los alumnos, la determinación de las formas de organización del contenido y problemas durante el curso y en las lecciones particulares y de los aspectos de evaluación, etc. Estas tareas del profesor están condicionadas por su reconstrucción subjetiva de las nociones matemáticas (currículum) como objetos de enseñanza-aprendizaje y de la definición de los objetivos de enseñanza (referencias personales e institucionales). Estos procesos de reconstrucción del contenido matemático que realiza vienen determinados por su experiencia previa (la historia del profesor) y por el contexto curricular en el que se encuentran.

Fase interactiva: Tiene que ver con la relación funcional que se establece entre la actividad del profesor y el estudiante en torno al saber. Esta es la fase de *gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje*, es decir la relación entre el problema propuesto y los estudiantes en el contexto del aula. Algunas de las tareas se remiten a la gestión de los distintos segmentos de enseñanza que constituyen la lección de matemáticas, la presentación de la información, la gestión del trabajo en grupo, interpretar y responder a las ideas de los estudiantes, la gestión de la discusión en grupo, la construcción y uso de representaciones instruccionales, la introducción de material didáctico o de entornos informáticos, la gestión de la construcción del nuevo conocimiento matemático desde la interacción profesor- alumno-tarea.

Práctica

La práctica profesional del docente constituye un proceso complejo, en el que confluyen múltiples factores que inciden en el logro de los fines educativos. El análisis de la práctica del profesor es fundamental, ya que contribuye en la comprensión de lo que ocurre en un espacio social tan complejo como lo es el salón de clases, a partir del estudio de las interacciones que ahí tienen lugar.

La noción de práctica en este trabajo se comprende en el sentido de Villoro (1982), quien la caracteriza como una actividad dirigida por fines conscientes. Se articula a la construcción de conocimiento y se entiende como acción objetiva e intencional, mediada por el uso de signos y herramientas. Además se asocia con:

- La preparación y desarrollo profesional del profesor, y;
- La actividad que se desarrolla en el salón de clases o fuera de éstos, mediada por un saber (acciones, más que pensamiento o ideas).

Es claro que no todas las acciones que suceden en un aula son conscientes e intencionadas, ya que muchas de ellas se dan como un proceso mecánico.

Sistema de Ecuaciones Lineales

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de *m* ecuaciones lineales con *n* incógnitas.

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\
&\vdots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned}
$$

Donde a_{ij} son números reales que denominan coeficientes y los x_i se denominan incógnitas y b_j se denominan términos independientes. En su conjunto tenemos un sistema de *m* ecuaciones con *n* incógnitas

En este trabajo, el análisis de la práctica del profesor está centrada en las explicaciones del concepto de sistemas de ecuaciones lineales a partir de un sistema de 2x2, que se representa de la siguiente manera:

Un sistema de ecuaciones lineales de tiene la forma:

$$
\begin{aligned}
&ax + by = c \\
&dx + ey = f
\end{aligned}
$$

Donde son números reales tales que: son coeficientes, son términos independientes y son las incógnitas.

En el estudio de este concepto, el profesor se apoya del planteamiento y resolución de problemas, como un medio para representar e interpretar modelos matemáticos, una de las competencias específicas de la matemática a desarrollar, según el programa de estudios.

Competencia matemática

El uso del término *competencia* ha penetrado fuertemente en el discurso matemático escolar, tanto en el ámbito curricular, como en la práctica de la enseñanza y de la evaluación, y en ese sentido, con la RIEMS, se busca la construcción de un Marco Curricular Común bajo el enfoque de competencias. Mediante el planteamiento de este nuevo enfoque, se busca el carácter funcional del conocimiento matemático y la posibilidad de aplicarlo de forma variada, reflexiva y perspicaz a una multiplicidad de situaciones de los más diversos tipos, es decir, se busca que el conocimiento matemático que se construye en el aula, sea aplicable en situaciones de la vida cotidiana. Tobón, Pimienta y García (2010), sostienen que en el estudio por competencias los maestros y las maestras deben orientar sus acciones a formar competencias y no a enseñar contenidos, los cuales deben ser sólo los medios. Asimismo, que las competencias son actuaciones o desempeños ante actividades o situaciones cotidianas que articulan y movilizan recursos personales y del contexto externo. De modo que un concepto fundamental en este enfoque, es el de competencia, que se entenderá en este trabajo en el sentido de PISA (2006) quien se remite a las competencias matemáticas como:

> "…la capacidad que tiene un individuo de identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios bien fundados y utilizar e implicarse en las matemáticas de una manera que satisfaga sus necesidades vitales como un ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo… (p.74)"

De acuerdo a la RIEMS, la enseñanza basada en este nuevo enfoque ofrece las siguientes ventajas:

- Preparar a los alumnos para desarrollarse plenamente en contextos diversos a lo largo de la vida,
- Privilegia el aprendizaje sobre la memorización,
- Termina con la dispersión existente en el bachillerato al articular los subsistemas, para favorecer, entre otras cosas, el tránsito de los alumnos, y
- Permite planes y programas de estudio flexibles que se adapten a necesidades específicas, en un marco nacional de diversidad.

Discusión de los resultados

Para comprender mejor la relación que se establece entre lo que se declara en el curriculum oficial con la práctica del profesor al momento que explica el concepto de sistemas de ecuaciones lineales, se revisó el programa de Matemáticas II del bachillerato en que se llevó a cabo este trabajo. Resultado de esta revisión, se encontró que el programa declara que los estudiantes deben:

- Construir e interpretar modelos matemáticos deterministas mediante la aplicación de procedimientos algebraicos y geométricos, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.
- Proponer, formular, definir y resolver diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques.
- Proponer explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y contrastar con modelos establecidos o situaciones reales.

- Argumentar la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos y analíticos, mediante el lenguaje verbal y matemático.

a) *Análisis a la práctica del profesor en la fase preactiva*

Al establecer una correspondencia entre lo oficialmente establecido en el programa de matemáticas (currículo pretendido), las notas del profesor y la relación funcional que se establece para el salón de clases con fines de aprendizaje, se observó que el currículo oficial es el punto de partida.

El profesor también hace uso de notas de clases, en las que se ha apoyado por varios años. Las explicaciones en este material están centradas en la resolución de problemas, cuya solución se sustenta en un sistema de ecuaciones lineales. Enfatiza en la explicación de métodos de solución, por ejemplo, el de sustitución, así como la comprobación.

b) *Análisis a la práctica del profesor en la fase interactiva*

El análisis de la relación funcional que establecen el profesor y los estudiantes durante las interacciones en el salón de clases, da cuenta que es el representante legal del currículum quien tiene el control de la situación, con intervenciones diferenciadas de los estudiantes, a pregunta expresa del profesor o bien, durante las actividades en equipo.

El profesor introdujo el concepto de sistemas de ecuaciones lineales mediante un problema, que resolvió en la pizarra a modo de ejemplo. Si bien omitió definir el concepto, éste aparece como un medio para resolver un problema. Explicó el procedimiento mediante el cual se pasa de una situación a un modelo matemático, así como el método para resolver el sistema de ecuaciones. Un primer método que explicó fue el de sustitución, acompañado de la comprobación, al sustituir los valores que determina, en las variables que introduce, generalmente x e y. A partir de ello, plantea una nueva situación, es el momento en que involucra a los estudiantes, mediante preguntas directas. Sus explicaciones las apoyó en el uso de la pizarra.

A continuación presentamos episodios de las interacciones del profesor con sus estudiantes durante la solución de un problema que presentó posterior a la introducción del concepto de sistemas de ecuaciones lineales:

El problema:

> *Un comerciante empleo $ 19100 en comprar 50 trajes de $400 y de $350 ¿Cuántos trajes de cada precio compró?*

Acto seguido, invitó a los estudiantes a reflexionar en torno a ella. Una estrategia general en la que se apoyó, consistió en pedirles que leyeran el problema para que lo comprendieran. Una vez hecho esto, inició una reflexión con ellos:

[1] Profesor: *Entonces tenemos trajes de dos precios… ¡Opinando!* (con esta expresión

Esperaba que los estudiantes formularan un sistema de ecuaciones)

Dígame….¿Cuántos trajes son?

[2] Estudiante 1: *Es 400 más 50 trajes es igual a…* (El profesor interviene sin permitir

que el estudiante concluya su explicación).

[3] Profesor: *¿Qué tienen que ver los parámetros?* (refiriéndose a la palabra: trajes...

Enseguida escribió en el pizarrón 50… y preguntó: *¿De cuántos?*

[4] Estudiante 2: *De 400 y 350.*

[5] Profesor: *Entonces le ponemos una x… y ¿a la otra?*

[6] Grupo: *y*

[7] Profesor: *¿Es una suma no?* Y escribe en el pizarrón la primera ecuación

$$x + y = 50$$

El episodio muestra una situación típica de enseñanza, donde el profesor plantea un problema, presenta el método de solución y enseguida propone otra, que puede resolverse de modo similar a una previa. A su vez, que el profesor de ningún modo contribuye a que el estudiante se responsabilice de su propio aprendizaje, como se plantea en el enfoque por competencias. Por cuanto a la participación del estudiante, se da a partir de preguntas explícitas.

En el proceso de solución del problema, se propuso el siguiente sistema:

$$x + y = 50$$
$$400x + 350y = 19100$$

Enseguida, pidió a algunos estudiantes que lo resolvieran en la pizarra. En el proceso de solución, intervino en más de una ocasión, a fin de orientar el uso del método de sustitución, sin decirles el nombre en un principio, sólo el procedimiento a seguir. Posterior a ello, planteo otra situación, cuya estrategia de solución era la misma, mediante un sistema de ecuaciones lineales.

Es en la tercera sesión en que se observó un cambio en la práctica del profesor, ya que permitió que los estudiantes interactuaran en equipo para resolver problemas. En ocasiones recurrieron al profesor (Figura 1), a fin de validar sus procedimientos o el sistema de ecuaciones que plantearon para resolver el problema. Lo expresaron con frases como la siguiente: "*profe… ¿estamos bien?*".

Figura 1. Interacciones en el aula

Nuestras observaciones indican que las explicaciones del profesor así como sus intervenciones en la actividad de los estudiantes, contribuyen fundamentalmente al desarrollo de competencias genéricas, importantes sin duda, sin embargo, soslayó el desarrollo de las específicas. En general, durante la gestión de enseñanza-aprendizaje se percibió que las competencias que se pretenden desarrollar son:

- ❖ El planteamiento o uso de modelos algebraicos sencillos de diversas situaciones asumiendo en el estudiante una actitud constructiva y participativa.
- ❖ Aportar puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.

Resolver problemas aritméticos o algebraicos proponiendo la manera de solucionar dicho problema.

Por otra parte, podemos notar que la labor docente propicia:

- ❖ El desarrollo de un clima escolar favorable, afectivo, que favorezca la confianza, seguridad y autoestima del alumnado,
- ❖ El trabajo colaborativo de los estudiantes, estimulando la participación activa de los alumnos en la clase.

Reflexiones finales

El análisis de los procesos de comunicación en el aula evidencia que en general, el profesor orienta sus explicaciones a enseñar contenidos, en lugar de orientarlas hacia la formación de competencias, como lo señalan Tobón, Pimienta y García (2010). Sus acciones evidencian además, que no favorece que los estudiantes movilicen recursos personales y del contexto externo en el proceso de solución de situaciones o actividades cotidianas.

En cuanto al material del trabajo en que basa sus explicaciones, fue creado con base en la experiencia del profesor, quien lo ha utilizado desde hace varios años, previo a la reforma del plan de estudios del bachillerato. Es claro que la discusión respecto de este tipo de materiales, es sobre el uso de algoritmos, más que en favorecer el desarrollo de competencias.

Referencias bibliográficas

Cabañas-Sánchez, G. (2011). *El papel de la noción de conservación del área en la resignificación de la integral definida. Un estudio socioepistemológico*. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Clarke, D., Emanuelsson, J., Javlonka, E. & Mok, I.A.C. (2006). The Learner´s Perspective Study and International Comparison of Classroom Practice. En D. Clarke, J. Emanuelsson, E. Javlonka & I. A.C. Mok (Eds.), *Making Connections: Comparing mathematics classrooms around the world* (pp.1-22). Netherlands: Sense Publishers.

Jackson, P. (1975). *La vida en las aulas*. Madrid. Morova

Llinares, S. (1999). *Intentando comprender la práctica del profesor de matemáticas*. Recuperado de: http://www.cimm.ucr.ac.cr/ciaemIngles/articulos/universitario/conocimiento/Intentando%C2%A0comprender%C2%A0la%C2%A0pr%C3%A1ctica%C2%A0del%C2%A0profesor%C2%A0de%C2%A0matem%C3%A1ticas*Llinares,%20Salvador%20*9900Llinares.pdf

PISA (2006). *Marco de la evaluación. Conocimientos y habilidades en ciencias, matemáticas y lectura*. Recuperado el 30 de Septiembre de 2010 desde: http://www.oecd.org/dataoecd/59/2/39732471.pdf

Tobón, S. Pimienta, J.H. y García, J.A. (2010). Secuencias didácticas: aprendizaje y evaluación de competencias. México: Pearson

Villoro, L. (1982). *Conocer, saber y creer*. México: Siglo XXI.

CONOCIMIENTO DEL PROFESOR PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS. CONTRIBUCIÓN TEÓRICA AL CONOCIMIENTO DEL CONTENIDO Y ESTUDIANTES

Leticia Sosa Guerrro
Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas México
lsosa19@hotmail.com

Resumen: En esta investigación pretendemos obtener una mayor información relativa al conocimiento de los profesores de matemáticas, en particular, al conocimiento del contenido y estudiantes (KCS, por sus siglas en inglés –*Knowledge of Content and Student*) mientras éstos se encuentran inmersos en su propia práctica. Nos enfocamos en un modelo del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT, por sus siglas en inglés –*Mathematical Knowledge for Teaching*). Es un estudio de 2 casos, los instrumentos de recogida de información son: observación de aula, cuestionarios y entrevistas a los dos casos. Finalmente, aportamos distintos indicadores del KCS que pueden ser considerados para identificar y comprender el KCS, éstos pueden ayudar a analizar a otros profesores o ser considerados en la formación del profesorado de bachillerato.

Palabras clave: Conocimiento matemático para la enseñanza, conocimiento del contenido y estudiantes.

Abstract: In this research we intend to increase our information about mathematics teachers knowledge, especially their Knowledge of Content and Students (KCS) when the teachers are immersed in their own practice. We focused on a model of Mathematical Knowledge for Teaching (MKT). It is a study of 2 cases, the instruments of information collection are: classroom observation, questionnaires and interviews. Finally, we provide different KCS indicators devised to identify and understand KCS, they can also help to analyze other teachers or be taken into account on high school teacher training.

Key words: Mathematical knowledge for teaching (MKT), knowledge of content and student (KCS).

Introducción

Hoy en día, de acuerdo con Sosa (2011), podemos observar que se subestima muchas de las veces el proceso de enseñanza-aprendizaje, sin tomar en cuenta que el proceso no es sencillo porque en él se combinan diversos factores complejos (sociales, culturales, científicos, cognitivos, individuales, grupales, afectivos, contextuales, institucionales, económicos, etc.). En esta investigación asumimos que para enseñar matemáticas, saber el contenido es una condición necesaria para explicarlas pero no es una condición suficiente, pues existen casos en los que el profesor cuenta con un buen dominio de la matemática pero no es capaz de desarrollar un proceso adecuado de enseñanza. Además consideramos que los subdominios del MKT, constituyen un elemento clave en el conocimiento profesional del profesor y en la profesionalización en sí del profesor para desarrollar su actividad. En particular, nuestro objetivo es conocer y comprender el subdominio KCS cuando dos profesoras imparten Álgebra en bachillerato.

Fundamentos teóricos

Marcadamente desde los años ochenta, y cada vez más, se ha venido discutiendo y profundizando el estudio del conocimiento profesional de los profesores, emergiendo recientemente distintas perspectivas sobre el conocimiento profesional, en particular sobre qué conocimiento matemático posee el profesor y qué conocimiento matemático debería poseer para el ejercicio de su función docente.

Ball y sus colegas (Ball, Thames y Phelps, 2008) proponen el *Mathematical knowledge for Teaching* (MKT). Sus investigaciones se centran en el conocimiento matemático para la enseñanza, en particular en el nivel de primaria, estudiando dicho conocimiento a partir de la práctica del profesor. Ellos proponen un modelo multi-dimensional adaptado a las matemáticas, en el que hacen un refinamiento a las dimensiones del conocimiento del contenido y didáctico del contenido propuesto por Shulman (1986). Ball y su grupo de investigación incluyen el conocimiento curricular planteado por Shulman, en el conocimiento didáctico del contenido, obteniendo así sólo dos grandes dominios que se encuentran, por su parte, cada uno de ellos subdivididos en tres subdominios, como se muestra en la Figura 1. El conocimiento del contenido queda subdividido en tres subdominios: Conocimiento común del contenido (CCK), Conocimiento especializado del contenido (SCK) y Horizonte matemático (HCK). Y el conocimiento didáctico del contenido en: Conocimiento del contenido y estudiantes (KCS), Conocimiento del Contenido y Enseñanza (KCT) y Conocimiento Curricular (KCC).

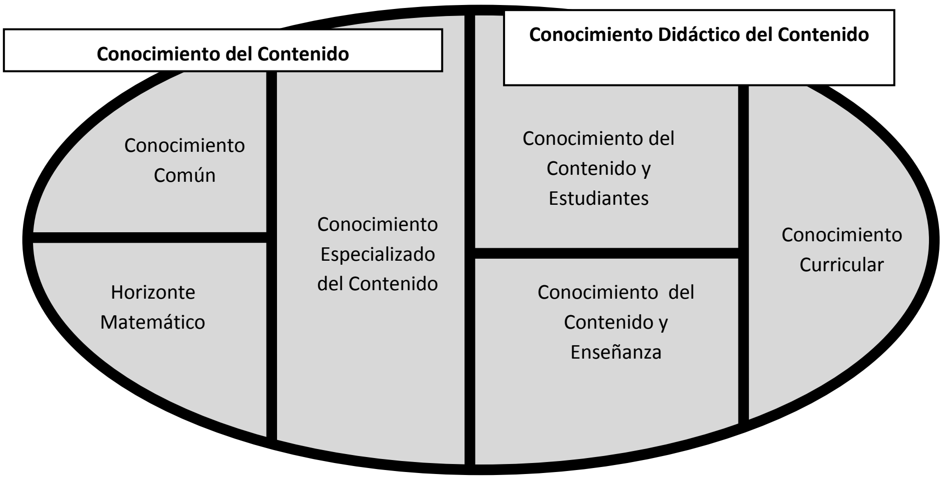


Figura 1. Dominios del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT). (Ball et al., 2008)

A continuación expresaremos brevemente la idea central de cada uno de los subdominios del modelo, pero cabe remarcar que en este documento nos centraremos en el KCS.

CCK se refiere al conocimiento matemático y a las habilidades necesarias para resolver las tareas que los estudiantes están realizando, los profesores *necesitan ser capaces de hacer las tareas que ellos están asignando a sus estudiantes* (Ball et al., 2008, p.399).

SCK: Conocimiento constituido por el conocimiento matemático y las habilidades que son propias de la profesión de los profesores, el SCK incluye el conocimiento que permite a los profesores conocer la naturaleza matemática de los errores que cometen los alumnos y razonar si alguna de las soluciones inesperadas que dan sus alumnos podrían funcionar matemáticamente en general o no.

HCK: Es considerado como el conocimiento de la trayectoria de un contenido matemático a lo largo de las diversas etapas educativas, así como las conexiones intra y extramatemáticas.

KCS: Se refiere a la conjunción del entendimiento del contenido y saber lo que los alumnos pueden pensar o hacer matemáticamente, el KCS incluye las habilidades que tienen los profesores para predecir lo que a los alumnos les parecerá interesante, motivante, fácil, difícil, aburrido o agobiante.

Los profesores se hacen una imagen de lo que posiblemente harán los alumnos en las tareas matemáticas que les asignen, en este tipo de conocimiento se considera también la capacidad que tienen los profesores para escuchar e interpretar el pensamiento que expresan los alumnos en su lenguaje usual.

El KCS también incluye las habilidades de los profesores para identificar los conceptos previos, las dificultades de aprendizaje y concepciones erróneas que traen los estudiantes acerca de un contenido matemático particular.

KCT: Se refiere a la conjunción del entendimiento del contenido y su enseñanza, al entendimiento del contenido matemático y su familiaridad con los principios pedagógicos para enseñar ese contenido.

KCC: Está *"representado por el conjunto de programas diseñados para la enseñanza de temas específicos y temas a un nivel determinado, la variedad de materiales educativos disponibles en relación con los programas, y el conjunto de características que sirven tanto como las indicaciones y contraindicaciones para el uso del plan de estudios particulares o los materiales del programa en determinadas circunstancias"* (Shulman, 1986, p.10)

Hay que hacer notar que el contenido del conocimiento profesional del profesor, la forma en que se organiza y sus características están siendo ampliamente estudiadas en la Educación Matemática y que en nuestras investigaciones nos centraremos en el estudio de las características de una parte del conocimiento profesional, en particular en el estudio de los descriptores que distinguen el contenido del MKT propuesto por Ball y su equipo de investigación en su modelo del MKT. En este documento presentamos sólo una parte de uno de sus subdominios (KCS).

Metodología

Se trata de una investigación inscrita en el paradigma interpretativo (Latorre, Del Rincon y Arnal, 1997) porque nuestro objetivo es comprender e interpretar el MKT en bachillerato, de tal forma que nos enfocamos en un aspecto cognitivo, por lo cual el investigador juega un papel importante en dicha interpretación, característica distintiva de ese paradigma (Bogdan & Biklen, 1994).

Participantes

Esta investigación trata de un estudio de 2 casos. Son 2 profesoras (Emi y Aly) de distintos institutos de nivel bachillerato en España, seleccionadas intencionalmente para que aportaran información a los objetivos de la investigación, es decir, nos interesaba que fueran dos profesionales identificadas con su profesión y reconocidas como excelentes profesionales tanto por sus pares como por sus estudiantes y sus autoridades. Las profesoras son licenciadas en Matemáticas, ellas imparten Matemáticas en el último año de bachillerato. Al hacer el estudio, ambas poseen varios años de experiencia en la enseñanza de las matemáticas (Emi 21 y Aly 13).

Instrumentos para la colección de datos y análisis

Los instrumentos de recogida de información son: observación de aula, notas de campo tomadas por la investigadora, cuestionarios y entrevistas a las profesoras participantes. El equipo de investigación asistió simultáneamente durante tres meses a las clases de Emi y Aly respectivamente, de ellas se filmaron 15 de cada una, con una duración aproximada de 50 minutos por clase, la cámara fue enfocada a la profesora y colocada detrás de los estudiantes tratando de alterar la observación lo menos posible. La observación no participante se complementó con notas de campo por parte de la investigadora, cuestionarios y entrevistas (instrumentos utilizados para triangular los resultados). Los datos que presentamos en este documento provienen de las transcripciones de las 15 clases filmadas de cada una de las profesoras.

En cuanto a los instrumentos para realizar el análisis de la información tomamos dos, uno para organizar la información de las transcripciones y poder analizarlas (adaptamos el modelo cimentado en las ideas de otros anteriores para modelar la enseñanza –el modelo presentado por Schoenfeld (2000), y por Ribeiro (2008) a la matemática en temas de primaria), y otro para identificar los subdominios del MKT (Ball et al. 2008), en particular aquí sólo presentamos lo referente al subdominio KCS.

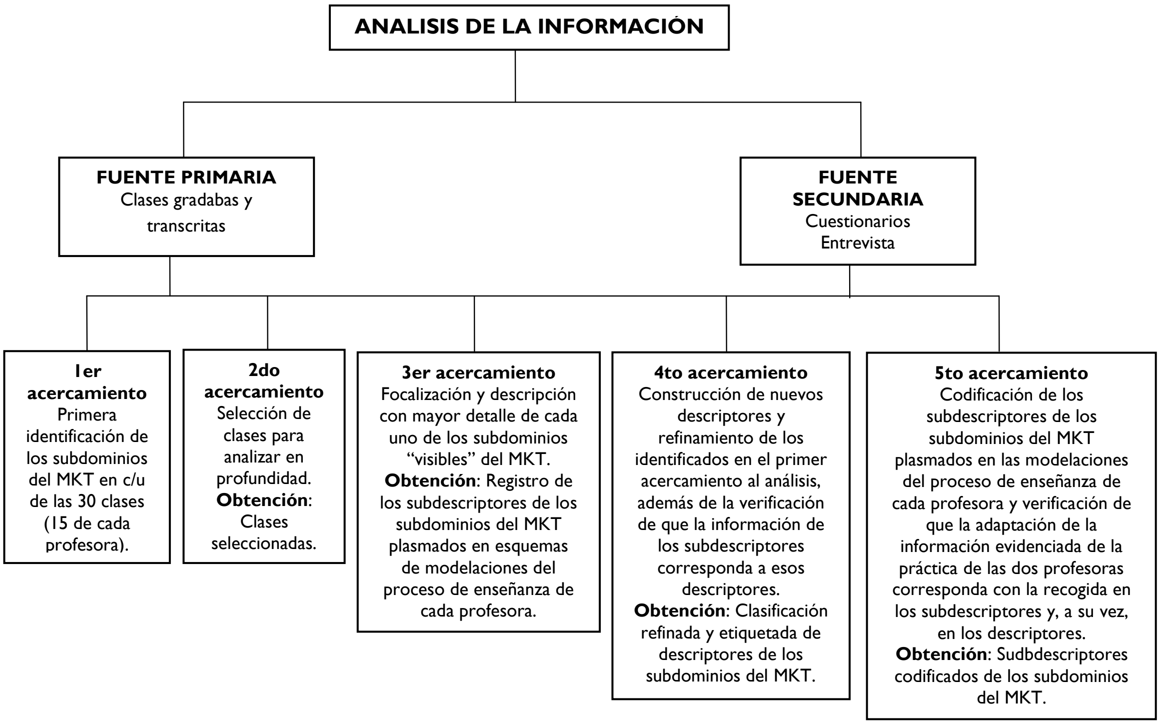
Análisis de la información

El análisis de las clases grabadas es realizado a partir de cinco acercamientos. Para analizar dichas clases, basados en las transcripciones de éstas, y utilizando la adaptación hecha al modelo de Ribeiro (2008) para organizar la información de las transcripciones y proceder a identificar los distintos subdominios del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) propuesto por Ball et al. (2008) (y estando atentos por si aparecían nuevos subdominios), en cada clase se hizo una división de episodios fenomenológicamente coherentes de manera recurrente, identificando los eventos iniciales y finales, después de haber identificado el objetivo declarado por el profesor o interpretado por la investigadora, respecto al contenido matemático que la profesora pretende enseñar en esa clase, y usando una metodología de revisión/comparación constante entre las divisiones anteriores y posteriores para garantizar una consistencia interna de esa división. Después de tener la división de los episodios, en los episodios que se requiera, se divide cada episodio en sub-episodios, siguiendo la misma metodología.

Consideramos necesarios cinco acercamientos para el análisis de la información porque si bien es cierto que como expresa Kagan (1990), estudiar el conocimiento del profesor requiere de varias fuentes de información, pensamos que también es necesario realizar varios acercamientos al análisis de la información para revisar, comprobar y validar constantemente lo que se va obteniendo de dicho análisis, y a su vez, refinar y pulir continuamente los distintos acercamientos para contrastar y confrontar la información analizada. Defendemos que en este tipo de estudios cualitativos es muy importante exigirnos rigor en el análisis de la información para robustecer la credibilidad de los resultados de la investigación.

Queremos hacer notar que en este caso no estamos hablando de triangular con distintas técnicas de análisis en sí, sino de un refinamiento y validación interna entre varios acercamientos al análisis de la información dentro de una sola técnica.

A continuación un esquema donde mostramos de manera sintética cada uno de los cinco acercamientos al análisis de la información.



El análisis a través de los cinco acercamientos lo hicimos para el caso de Emi y luego para el caso de Aly.

En las fuentes secundarias identificamos elementos que nos dieran indicio de alguno de los distintos subdominios del MKT o aspectos que nos ayudaran a comprender alguno(s) de los descriptores que obtuvimos para cada subdominio y a su vez a entender los propios subdominios. Además, estos instrumentos de recogida de información nos aportan información a la hora de triangular los resultados.

Resultados

Finalmente, aportamos distintos descriptores o indicadores del KCS que pueden ser considerados como indicadores para identificar y comprender el KCS, éstos fungen como una base de dimensiones para ayudar a analizar a otros profesores, así como a tener en cuenta en la formación inicial y continua del profesorado de bachillerato. Por cuestión de espacio sólo mencionamos los correspondientes a tres categorías: "necesidades y dificultades", "confusiones y/o equivocaciones" y "quedarse con una imagen inadecuada", pero reportamos más categorías de este subdominio (KCS) y de los otros mencionados anteriormente (en los fundamentos teóricos), en Sosa (2011).

Necesidades y dificultades • Saber las necesidades y dificultades de los estudiantes sobre el contenido matemático.
Confusiones y/o equivocaciones • Prever la confusión que pudiera tener el alumno con algún aspecto específico del contenido que se esté viendo en clase. • Saber que los estudiantes pueden equivocarse al hacer determinado cálculo de un número o de un signo (más leve), provocado por un despiste al hacer una(s) operación(es) o transformación(es), o por no dominar el contenido que se les está presentando. • Saber que los estudiantes deben proceder ordenadamente respetando las convenciones matemáticas, para evitar confusiones y errores. • Saber que los estudiantes podrían hacer cálculos mecánicamente sin saber realmente lo que están haciendo.
Quedarse con una imagen inadecuada • Prever (anticipar) que los estudiantes se pueden quedar con una imagen o idea inadecuada del contenido.

El descriptor que proponemos en la categoría "*necesidades y dificultades*" pudiera ser uno de los descriptores más generales, debido a que consiste en saber las necesidades y dificultades de los estudiantes sobre un contenido matemático. Nuestra intención es destacar ese conocimiento, a sabiendas de que podríamos debatir si alguno o algunos de los demás descriptores que proponemos para el KCS pudieran quedar incluidos en éste. Sin embargo, consideramos conveniente dejar este descriptor general porque tal como está posiblemente dé luz sobre distintos matices en estudios posteriores.

En los descriptores correspondientes a la categoría "*confusiones y/o equivocaciones*" queremos hacer notar el conocimiento matemático que le permite al profesor prever la confusión que pudiera tener un estudiante con algún aspecto específico del contenido que se esté viendo en clase, de tal forma que, con el propósito de evitar que los estudiantes cometan un error a causa de su confusión, el profesor normalmente hace un comentario para prevenirlos. Además, queremos destacar el conocimiento que le permite saber que los estudiantes pueden equivocarse al hacer determinado cálculo de un número o de signo (más leve), provocado por un despiste al hacer una(s) operación(es) o transformación(es), o por no dominar el contenido que se les está presentando. Así como el descriptor referente a saber que los estudiantes deben proceder ordenadamente respetando las convenciones matemáticas, para evitar confusiones y errores. Por ejemplo, en la clase 7 de Emi (líneas 184-186, 221-225), saber que los estudiantes se pueden equivocar al escribir el sistema en forma matricial, que no pongan las equis debajo de las equis, las y's debajo de las y's y las z's debajo de las z's; o prever que algún estudiante pudiera escribir la solución del sistema sin seguir la convención matemática de que siempre se anota el valor de las incógnitas en el orden en que aparecen dadas (x, y, z). Nuevamente, cuando el profesor distingue esto último, hace una aclaración o comentario haciéndoles notar que deben poner atención en el orden establecido en las convenciones matemáticas, no sólo para no confundirse o equivocarse sino también para darse a entender en lenguaje matemático. Proponemos también el descriptor correspondiente al a saber las equivocaciones que pueden tener los estudiantes por hacer cálculos mecánicamente sin tener conciencia de lo que están realizando, a continuación mostramos un segmento de clase que dio pie a ese descriptor, el cual sucedió en la clase 8 de Emi de las líneas 137 a la 148, al resolver un sistema de tres ecuaciones por Gauss.

137	Emi:	¿Cuántas soluciones nos han salido en el problema?
138	E10:	Tres
139	Emi:	Cuando ponemos x=, y=, z=, ¿cuántas soluciones estamos dando?
140	E10:	Tres.
141	Emi:	Por ejemplo x=10, y= 50 y z=30, ¿cuántas soluciones?
142	E3:	Una.
143	Emi:	Es una solución, es decir, son tres incógnitas, pero es una solución.
144		Porque el sistema está formado por varias ecuaciones y en este caso
145		tenemos nosotros tres incógnitas,
146		hallar la solución es hallar el valor para cada una de las incógnitas,
147		si tenemos un valor para cada una de las incógnitas,
148		pues tenemos sólo una solución, de acuerdo.

Remarcamos que en Sosa (2011) se explicitan más evidencias de los descriptores del KCS y de los otros subdominios del MKT.

Por último, en el descriptor propuesto en la categoría "*quedarse con una imagen inadecuada*" respecto a prever que los estudiantes se pueden quedar con una imagen o idea inadecuada del contenido, cuando el profesor anticipa ese hecho, interviene y hace una aclaración o comentario como medida preventiva para evitar que los estudiantes se queden con una imagen o idea incorrecta del contenido que afecte el aprendizaje de los estudiantes.

Conclusiones

Concordamos con Godino (2009) en el sentido de que "*Se suele reconocer que el conocimiento disciplinar no es suficiente para asegurar competencia profesional, siendo necesarios otros conocimientos de índole psicológica (cómo aprenden los estudiantes, conocer los afectos, dificultades y errores característicos,…)*" (p. 14). Por lo que en la medida en que los profesores de bachillerato pongan más énfasis en el Contenido del Conocimiento y Estudiantes (KCS), les puede permitir anticiparse a las necesidades, dificultades, confusiones, equivocaciones que estos presenten y de igual manera podrían anticiparse a que los estudiantes tengan ideas o imágenes inadecuadas de los contenidos que se estén manejando, inclusive podrían tener la habilidad de diseñar actividades de aprendizaje adecuadas, saber usar los recursos y comprender los factores que condicionan la enseñanza y aprendizaje de los estudiantes.

Podemos decir, además, que con base en lo que establece Llinares, Valls y Roig (2008) en el sentido de que la implicación de los profesores en la dinámica de analizar los aspectos del pensamiento matemático de los estudiantes les puede permitir establecer planeaciones más adecuadas a la forma de aprendizaje de los estudiantes. Así, el conocimiento sobre el pensamiento matemático de los estudiantes (dificultades, nivel de estrategias utilizadas, etc.) puede utilizarse para valorar y seleccionar las tareas, ejemplos y representaciones apropiados para que puedan ser usadas en contextos idóneos.

Referencias bibliográficas

Ball D.L., Thames, M.H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59* (5), 389-407.

Bogdan, R. y Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto editora.

Godino, J.D. (2009). *Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas*. Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática. Núm. 20, pp. 13-31.

Kagan, D.M. (1990). Ways of evaluating teacher cognition: Inferences concerning the Goldilocks Principle. *Review of Educational Research*, 60 (3), 419-469.

Latorre, A., Del Rincón, D., y Arnal, J. (1996). *Bases metodológicas de la investigación educativa.* Barcelona: Hurtado ediciones.

Llinares, S., Valls, J. y Roig, A.I. (2008). *Aprendizaje y diseño de entornos de aprendizaje basado en videos en los programas de formación de profesores de matemáticas.* Educación Matemática: Santillana. Vol. 20, Núm. 3, pp. 59-82.

Ribeiro, C.M. (2008). From modeling the teacher practice to the establishment of relations between the teacher actions and cognitions. In M. Joubert (Ed.) *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics November 2008*, 28(3), (pp. 102-107) Londres**:** British Society for Research into Learning Mathematics.

Schoenfeld, A.H. (2000). Models of the teaching process. *Journal of Mathematical Behaviour, 18*(3), 243 - 261.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *American Educational Research Association,* 15(2), 4-14.

Sosa, L. (2011).*Conocimiento Matemático para la enseñanza en bachillerato. Un estudio de dos casos*. Tesis doctoral publicada en http://hdl.handle.net/10272/4509

UNA PERSPECTIVA COMPETENCIAL SOBRE LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE SECUNDARIA DE MATEMÁTICAS

Vicenç Font*, Norma Rubio **, Yuly Vanegas*, Susana Ferreres*, Joan Gómez***, Víctor Larios****
Universitat de Barcelona, Universitat Politécnica de Catalunya España
Pontificia Universidad Católica del Perú Perú
Universidad Autónoma de Querétaro. México.
vfont@ub.edu, nrubio@pucp.edu.pe , ymvanegas@ub.edu, sferreres@ub.edu, joang@ma4.upc.edu, vil@uaq.mx

Resumen: En este trabajo se presenta primero una propuesta de competencias profesionales en matemáticas ysu didáctica en la formación inicial de profesores de secundaria. A continuación se explica cómo se ha desarrollado uno de los componentes de la macro competencia en análisis didáctico (identificación de potenciales mejoras de un proceso de estudio en nuevas implementaciones) en el máster de profesor de secundaria de matemáticas de la Universitat de Barcelona durante el curso 2009-2010 y 2010-2011.

Palabras clave: Educación matemática, formación inicial, competencias profesionales, análisis didáctico.

Abstract: In this paper we present first a proposal of professional competencies in mathematics education for pre-service teacher training for Secondary School. Next we explain how one of the components of the macro competence in didactic analysis it has been developed (identification of potentials improvements of a study process in new implementations) in the “master for pre-service mathematics teacher training for Secondary School” of the University of Barcelona along the courses 2009-2010 and 2010-2011.

Key words: Mathematics education, pre-service teachers, professional competency, didactic analysis.

Introducción

En los currículos que organizan la educación secundaria, la tendencia es considerar un diseño basado en competencias y a considerar que “saber matemáticas” incluye la competencia para aplicarlas a situaciones de la vida real. Esta tendencia, en algunos países, como es el caso de España, se ha concretado en el diseño de currículos que entienden la competencia matemática de los alumnos de manera similar a como se entiende en el informe PISA 2003.

La tendencia a una convergencia internacional en el diseño de los planes de estudio universitarios, y en particular los que se refieren a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria, han impulsado un conjunto de reformas en diferentes países en las que domina un modelo secuencial: primero formación disciplinar y después formación profesionalizadora, que, además, se organiza por competencias profesionales. Este es, por ejemplo, el caso de España, donde para ser profesor, además de un grado que asegure conocimientos matemáticos, es necesario cursar un máster que habilita para el ejercicio de la profesión de Profesor de Educación Secundaria de Matemáticas y su currículum, siguiendo las tendencias internacionales, se organiza por competencias profesionales.

Los currículos de secundaria por competencias conllevan el problema de cómo conseguir que los profesores tengan la competencia profesional que les permita el desarrollo y la evaluación de las competencias matemáticas señaladas en el currículo. Dicho problema lleva a la siguiente pregunta: ¿Cuáles son las competencias profesionales que permiten a los profesores desarrollar y evaluar las competencias, generales y específicas de matemáticas, prescritas en el currículum de secundaria? La respuesta a la cual, a su vez, depende de cómo se conteste a la pregunta previa: ¿Cuál es el conocimiento didáctico-matemático que necesita el profesorado para enseñar matemáticas?

Una de las problemáticas que más ha interesado en el área de educación matemática es la de determinar cuál es el conocimiento didáctico-matemático del profesorado requerido para enseñar matemáticas. Diversos autores coinciden al considerar como una de las competencias profesionales que debe tener un profesor aquella que le permite describir, explicar, valorar y mejorar procesos de enseñanza-aprendizaje (análisis didáctico), pero difieren, entre otros aspectos, en cuáles son las herramientas necesarias para realizar este tipo de análisis didáctico.

En el marco de dos proyectos de investigación sobre el desarrollo de competencias profesionales en matemáticas y su didáctica en la formación inicial de profesores de secundaria, hemos reflexionado sobre las preguntas anteriores y hemos llegado a la conclusión de que la competencia profesional que permite evaluar y desarrollar la competencia matemática se puede considerar compuesta por dos macro competencias que, a su vez, se pueden descomponer en otras: 1) La competencia matemático-epistemológica y 2) La competencia en análisis didáctico de procesos de instrucción matemática. Además, nuestra posición es que, en un contexto curricular de tipo secuencial para la formación inicial de los futuros profesores de matemáticas de secundaria, el núcleo de la competencia profesional del futuro profesor de secundaria debería de ser la competencia en el análisis didáctico. De manera secundaria se debería mejorar la competencia matemática-epistemológica.

Marco de referencia e hipótesis

Para el desarrollo de la competencia en análisis didáctico, hemos optado por el modelo de análisis propuesto por un enfoque de investigación integrativo en el área de didáctica de las matemáticas: el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS). Este enfoque (Font, Planas y Godino, 2010) propone un análisis didáctico de procesos de instrucción que considera los siguientes cinco niveles o tipos de análisis: 1) Identificación de prácticas matemáticas. 2) Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos. 3) Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas. 4) Identificación del sistema de normas y metanormas. 5) Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción.

En este trabajo se explica un experimento de enseñanza en el que se ha implementado un ciclo formativo para contribuir a desarrollar la competencia en análisis didáctico en los futuros profesores de secundaria.

Nuestra hipótesis es que hay un núcleo de la competencia en análisis didáctico que entendemos como: "*Diseñar, aplicar y valorar secuencias de aprendizaje, mediante técnicas de análisis didáctico y criterios de calidad, para establecer ciclos de planificación, implementación, valoración y plantear propuestas de mejora.* Y suponemos que podemos encontrar criterios e indicios del desarrollo de esta competencia y de cómo se relaciona con las otra competencias profesionales del futuro profesor de matemáticas de secundaria.

La competencia en análisis didáctico se caracterizó a priori de la manera siguiente, donde N1, N2 y N3 indican grados de desarrollo:

Competencia en análisis de secuencias didácticas

Diseñar, aplicar y valorar secuencias de aprendizaje, mediante técnicas de análisis didáctico y criterios de calidad, para establecer ciclos de planificación, implementación, valoración y plantear propuestas de mejora.		
N1: Muestra conocimiento del currículum de matemáticas como elementos fundamentales para comprender su práctica pedagógica.	N2: Integra teorías, metodologías y currículum, en la planificación de los procesos de enseñanza y reconoce las implicancias en su práctica considerando los contextos institucionales.	N3: Implementa la planificación de los procesos de enseñanza en sus prácticas y emite juicios argumentados y reflexivos acerca de las teorías, metodologías y el currículum.
N1: Aplica herramientas para describir las prácticas, objetos y procesos matemáticos presentes en un proceso de enseñanza aprendizaje. y muy en especial en su propia práctica.	N2: Conoce y aplica herramientas socioculturales para conocer la interacción y las normas que condicionan un proceso de enseñanza aprendizaje y muy en especial en su propia práctica.	N3: Explica los fenómenos didácticos observados en los procesos de enseñanza aprendizaje y muy en especial en su propia práctica
N1: Conoce criterios de calidad y los tiene presentes en la planificación de una secuencia didáctica de matemática	N2: Utiliza criterios de calidad para valorar procesos ya realizados de enseñanza y aprendizaje de la matemática	N3: Aplica criterios de calidad para valorar su propia práctica y realizar innovaciones con el objetivo de mejorarla

Tabla1. Grados de desarrollo de la competencia en análisis didáctico

Metodología

La investigación es primordialmente cualitativa, puesto que estamos interesados en describir el desarrollo de la competencia en análisis didáctico de los futuros profesores. Las muestras han sido intencionales. El experimento de enseñanza para el desarrollo de la competencia en análisis didáctico se ha desarrollado con futuros profesores de secundaria/bachillerato de la Universidad de Barcelona (España) durante los cursos 2009-2010 y 2010-2011. Como grupo de contraste en tareas específicas se ha trabajado con estudiantes del máster de profesor de secundaria de matemáticas de Universidad Politécnica de Catalunya (España), con estudiantes del grado de Matemáticas de la Maestría en Docencia de las Matemáticas de la Universidad Autónoma de Querétaro (México) y de la Maestría en Enseñanza de las matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú. También, se trabaja con estudiantes de la Universidad de Pamplona (Colombia). En general, son alumnos con un conocimiento variado sobre matemáticas y concepciones sesgadas sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

El registro de la información fue la grabación en video de las clases impartidas, la documentación grabada en la plataforma moodle (powerspoints, lecturas, tareas y respuestas de los alumnos a las tareas, cuestionarios y respuestas de los alumnos a los cuestionarios) y material impreso.

Ciclo formativo

El desarrollo de la competencia en análisis didáctico corresponde a todas las asignaturas del máster de profesor de secundaria de matemáticas de la Universitat de Barcelona. A continuación comentamos brevemente la secuencia que se ha seguido en tres asignaturas del máster para contribuir al desarrollo de dicha competencia durante los cursos 2009-2010 y 2010-2011. Este ciclo formativo se ha focalizado en el desarrollo de herramientas que permitan valorar la idoneidad didáctica de procesos de instrucción.

En la asignatura de innovación e investigación sobre su propia práctica se ha seguido la siguiente secuencia:

1) Análisis de casos (sin teoría). Se propuso a los alumnos la lectura y análisis del episodio descrito en Font, Planas y Godino (2010), dicho análisis se debía realizar a partir de sus conocimientos previos sobre análisis didáctico. El proceso seguido fue el siguiente: 1) Lectura individual del contexto del problema y de la transcripción. 2) Formación de grupos de 3-4 personas. 3) Análisis didáctico del episodio de clase en grupo. 4) Elaboración de conclusiones. 5) Presentación a los otros grupos de las conclusiones.

2) Emergencia de los niveles de análisis didáctico propuestos por el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS). La puesta en común de los análisis realizada por los diferentes grupos, completada con la técnica de "otras voces" si es necesario, permite observar como el gran grupo ha contemplado los cinco niveles de análisis que siguen, aunque cada grupo sólo ha contemplado alguno de ellos: 1) Análisis de las prácticas matemáticas. 2) Análisis de objetos y procesos matemáticos activados y emergentes de las prácticas matemáticas. 3) Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas y de conflictos semióticos. 4) Identificación del sistema de normas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio (dimensión normativa). 5) Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio.

Los niveles de análisis 1-4 son herramientas para una didáctica descriptiva explicativa (para comprender) que permite responder a la pregunta ¿Qué está pasando (y por qué) aquí? El nivel de análisis 5 pretende ser una herramienta para una didáctica prescriptiva (para evaluar y para indicar el camino a seguir) que permite responder a la pregunta ¿Qué se debería hacer?

3) Teoría (criterios de idoneidad). De los cinco niveles anteriores en la asignatura de innovación e investigación sobre su propia práctica se focaliza la atención en el quinto, para ello se dan elementos teóricos a los alumnos, en concreto se les explican los criterios de idoneidad propuestos en el EOS mediante la lectura de algunas páginas del capítulo "Inicio a la investigación en la enseñanza de las matemáticas en secundaria y bachillerato", del libro "Matemáticas: Investigación, innovación y buenas prácticas" (Font y Godino, 2011). Dicho enfoque (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006; Godino, Font, Wilhelmi y De Castro, 2009) propone los siguientes criterios de idoneidad:

Idoneidad epistémica, se refiere a que las matemáticas enseñadas sean unas "buenas matemáticas". Para ello, además de tomar como referencia el currículo prescrito, se trata de tomar como referencia a las matemáticas institucionales que se han transpuesto en el currículo.

Se puede aumentar su grado presentando a los alumnos una muestra representativa y articulada de problemas de diversos tipos (contextualizados, con diferentes niveles de dificultad, etc.); procurando el uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico...), y traducciones y conversiones entre los mismos; procurando que el nivel del lenguaje matemático utilizado sea adecuado y que las definiciones y procedimientos estén clara y correctamente enunciados y adaptados al nivel educativo a que se dirigen; asegurando que se presentan los enunciados y procedimientos básicos del tema y adecuando asimismo las explicaciones, comprobaciones, demostraciones al nivel educativo a que se dirigen; estableciendo relaciones y conexiones significativas entre las definiciones, propiedades, problemas del tema estudiado, etc.

Idoneidad cognitiva, expresa el grado en que los aprendizajes pretendidos/ implementados están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los aprendizajes logrados a los pretendidos/implementados.

Se puede aumentar su grado asegurándonos, por una parte, que los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema y, por otra parte, que los contenidos que se pretenden enseñar se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable); procurando incluir actividades de ampliación y de refuerzo; realizando una evaluación formativa durante el proceso de enseñanza-aprendizaje que nos asegure que los alumnos se han apropiado de los contenidos enseñados.

Idoneidad interaccional, grado en que los modos de interacción permiten identificar y resolver conflictos de significado y favorecen la autonomía en el aprendizaje.

Se puede aumentar su grado asegurándonos que el profesor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, ¿se le entiende cuando habla?, haciendo un uso correcto de la pizarra, poniendo suficiente énfasis en los conceptos clave del tema, etc.); procurando reconocer y resolver los conflictos de significado de los alumnos (interpretando correctamente los silencios de los alumnos, sus expresiones faciales, sus preguntas, etc.); utilizando diversos recursos retóricos argumentativos para captar, implicar, etc. a los alumnos; procurando facilitar la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase y no la exclusión; favoreciendo el diálogo y comunicación entre los estudiantes; contemplando momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (exploración, formulación y validación) etc.

Idoneidad mediacional, grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje. Se puede aumentar su grado usando materiales manipulativos e informáticos; procurando que las definiciones y propiedades sean contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones; procurando invertir el tiempo en los contenidos más importantes o nucleares del tema e invirtiendo el tiempo en los contenidos que presentan más dificultad de comprensión.

Idoneidad afectiva, grado de implicación (interés, motivación) del alumnado en el proceso de estudio. Se puede aumentar su grado seleccionando tareas de interés para los alumnos, promoviendo la valoración de la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional; promoviendo la implicación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc.; favoreciendo la argumentación en situaciones de igualdad de manera que el argumento se valore en sí mismo y no por quién lo dice; promoviendo la autoestima evitando el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas, etc.

Idoneidad ecológica, grado de adaptación del proceso de estudio al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social, etc.

Se puede aumentar su grado asegurando que los contenidos enseñados se corresponden con las directrices curriculares; asegurando que dichos contenidos contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes; procurando que los contenidos que se enseñan se relacionan con otros contenidos matemáticos y de otras disciplinas, etc.

4) Análisis de una clase completa sobre ecuaciones utilizando los criterios de idoneidad.

5) Lectura y comentario de partes de algunos trabajos final de máster de cursos anteriores, en los que los futuros profesores de cursos anteriores utilizaron los criterios de idoneidad para valorar la unidad didáctica que implementaron en el prácticum II (este punto sólo es posible a partir de la segunda edición del máster)

6) En las asignaturas *Prácticum II* y *Trabajo Final de Máster* los alumnos han de utilizar los criterios de idoneidad para diseñar y valorar su propia práctica, en concreto la unidad que han diseñado e implementado en el Prácticum II.

Consideraciones finales

La evaluación inicial diagnóstica sobre la competencia de análisis didáctico de los futuros profesores nos ha permitido concluir que estos utilizan algunos de los cinco niveles de análisis didáctico propuesto por el EOS. Además la puesta en común de los análisis realizada por los diferentes grupos de alumnos permite observar como el gran grupo ha contemplado estos cinco niveles de análisis, aunque cada grupo sólo ha contemplado alguno de ellos.

Con relación a la valoración de procesos de instrucción identificamos una mayor profundidad en el análisis y valoración de la práctica *propia* en relación al análisis y valoración de la práctica *ajena*.

Los criterios de idoneidad han resultado una herramienta útil para organizar la reflexión sobre su propia práctica, aunque se han tenido poco en cuenta en la primera fase de planificación. Dicho de otra manera, los alumnos no fueron conscientes de su potencia come herramienta a priori para diseñar una secuencia didáctica. En su planificación de la secuencia didáctica que tuvieron que implementar no los consideraron como criterios que indican cómo se deben de hacer las cosas. En cambio les fueron muy útiles para organizar la reflexión sobre su práctica una vez realizada. Volvieron a ser muy útiles cuando los futuros profesores tuvieron que justificar una secuencia didáctica que mejoraría la implementación realizada en su período de prácticas.

Por cuestiones de espacio no especificaremos la problemática relacionada con cada uno de los criterios de idoneidad, nos limitaremos a comentar brevemente el caso del criterio epistémico. Los futuros profesores inicialmente consideraban la idoneidad epistémica como "la falta de errores del profesor o libro de texto". Después surgió el criterio "coherencia", por ejemplo este criterio no se podía aplicar a un profesor que definía la mediatriz como la perpendicular que pasa por el punto medio del segmento y a continuación explicaba un procedimiento de construcción de la mediatriz en el que se utilizaba que la mediatriz era el lugar geométrico de los puntos que están a igual distancia de los extremos del segmento. Por último fue apareciendo el criterio "representatividad", en el sentido de que la secuencia didáctica debía ser, dentro de lo posible, representativa de la complejidad del objeto matemático que se quería explicar.

Agradecimientos

Trabajo realizado en el marco de los siguientes proyectos de investigación: 1) REDICE-10-1001-13 "Una perspectiva competencial sobre el Master de Formación de Profesor de Secundaria de Matemáticas". 2) EDU2009-08120 "Evaluación y desarrollo de competencias profesionales en matemáticas y su didáctica en la formación inicial de profesores de secundaria/bachillerato". Por otra parte, esta investigación también ha sido posible mediante la ayuda del ARCE (Agrupació de Recerca en Ciències de l'Educació) 2010.

Referencias bibliográfica

Font, V. y Godino, J. D. (2011). Inicio a la investigación en la enseñanza de las matemáticas en secundaria y bachillerato. En J.M. Goñi (Ed.), *Matemáticas: Investigación, innovación y buenas prácticas* (9-55). Barcelona: Graó.

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje 33(1)*, 89-105.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma XXVII, (2)*, 221-252.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Castro, C. de (2009). Una aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, *27(1)*, 59-76.

EL FENÓMENO DE LA REPRODUCIBILIDAD EN LOS PROCESOS DE FORMACIÓN DE PROFESORES EN SERVICIO. UN CASO DE LA GEOMETRÍA ESCOLAR

María Soledad Montoya, Javier Lezama
PUCV , CICATA Chile, México.
soledad.montoya@ucv.cl, jlezamaipn@gmail.com

Resumen: El siguiente escrito presenta la descripción de un proyecto de investigación que está en curso. Este pretende hacer un estudio con profesores en formación continua, en particular con aquellos que han realizado un curso de perfeccionamiento y que hacen clases de matemáticas a estudiantes de 12 a 14 años. Estos docentes, actualizan saberes: matemáticos, didácticos y pedagógicos, diseñan situaciones de aprendizaje fundamentadas en marcos teóricos de la didáctica de la matemática o matemática educativa. Además, desarrollan la metodología de Estudio de Clases para reflexionar sobre su propia práctica entre pares. En este contexto, se pretende investigar sobre el "fenómeno de reproducibilidad". Para ello se proyecta provocar una reflexión de tipo didáctica con elementos teóricos que emergen en la didáctica de la matemática como es el caso de la reproducibilidad. Nos proponemos observar qué elementos aportan al quehacer del profesor dicha reflexión para que los diseños didácticos sean aplicados en diferentes escenarios

Palabras clave: Reproducibilidad, reflexión, formación continua, estudio de clases.

Abstract: The following paper presents the description of an ongoing research project. This aims to make a study with teachers in continuous training, in particular with those who have made a training program and that make math classes to students from 12 to 14 years. These teachers actualize knowledge: mathematicians, didactic and pedagogical, they design learning situations based on theoretical frameworks of the didactics of mathematics or mathematics education. In addition, they develop the methodology of Lesson Study to reflect on their own practice among them. In this context, the purpose is to investigate the "phenomenon of reproducibility". This is projected to cause a reflection of didactic type with theoretical elements that emerge in the didactics of mathematics as it is the case of reproducibility. We propose to observe what elements contribute to the work of Professor such reflection so the teaching designs are implemented in different scenarios.

Key words: Reproducibility, continuous training, reflection, didactical situations, lesson study.

Introducción

Este escrito, muestra una investigación que está en proceso, lo que se plantea es antecedentes de la investigación, construcción de la pregunta y marco teórico en el que ésta se fundamenta y por ende la investigación misma. Busca aportar conocimiento en el proceso de formación continua de profesores a partir de la reflexión de la teoría

El contexto, donde surge el cuestionamiento que conduce a plantearse la pregunta de investigación, corresponde a un grupo de profesores que están en servicio y que asisten a cursos de perfeccionamiento para reactualizar saberes de índole: matemático, didáctico y pedagógico. Estos docentes en formación continua, tienen que diseñar secuencias de aprendizaje, que tienen en vista un propósito didáctico. Dichas secuencias, se busca que estén fundamentadas en marcos teóricos de la didáctica de la matemática o matemática educativa, y por tanto son inducidas y posteriormente analizadas y retroalimentadas por expertos; esta actividad busca provocar en particular una reflexión tanto en el diseño como en la puesta en escena -es decir, en estos cursos se introducen elementos teóricos que modelan el quehacer cotidiano y práctico del profesor- y se provoca una reflexión sobre su propia práctica.

Antecedentes

A continuación, se presentan algunos antecedentes que permiten comprender la conceptualización de la reproducibilidad.

Uno de los primeros estudios de reproducibilidad es de Artigue (1986), quién presenta una investigación sobre la reproducibilidad de situaciones didácticas, en la que expone el estudio de la dinámica de clase de una situación didáctica particular, con el objetivo de determinar características que las hacen reproductibles. Además, expone el diseño de un modelo que le permite analizar la reproducibilidad de situaciones didácticas; este modelo lo define con base a historias de clase, órbitas y trayectorias. Una historia de clase está constituida por un grupo de órbitas (que son como pequeñas metas conceptuales a lo largo de la secuencia) que tienen relación con el logro de los aprendizajes de cada estudiante –se espera que el estudiante pase por cada una de ellas- y esto permite describir trayectorias de los estudiantes a lo largo de la situación didáctica.

Artigue, concluye esta parte señalando la importancia de desarrollar estudios sobre las concepciones del sujeto y que los métodos para investigarlas están inspirados en el campo de la sicología social. Plantea también, que por una parte hay que tratar de entender el sistema didáctico en un sentido más global y por otra afirma que el rol de la investigación no es solamente efectuar constataciones sobre la enseñanza, sino también construir herramientas que permitan un cierto sentido de optimización.

La segunda parte del escrito, muestra el estudio de la dinámica de una situación de aprendizaje de círculos. Describe la metodología utilizada, que consiste en construir un modelo (ingenuo), usar el modelo al máximo realizando las simulaciones e interpretar los resultados obtenidos en términos de reproducibilidad.

En la conclusión global del estudio se destacan las preguntas que se plantea a partir del estudio de reproducibilidad y que dicen: ¿cuáles son los fenómenos observados y cuáles son las variables que los determinan?¿cuáles son los reportes que existen entre la historia de la clase y las historias individuales de los alumnos? ¿se puede pasar de un discurso descriptivo y llegar a un discurso explicativo o predictivo de la clase?

También, concluye sobre dos hechos importantes; uno que tiene relación con las historias de clase, la cual la constituye la historia personal de cada alumno frente a la resolución del problema, y la otra con el rol del profesor dentro del aula, pues afirma que el profesor juega un rol decisivo en la reproducibilidad de la situación. Lo relevante de este artículo es, que el modelo que plantea de reproducibilidad que elabora la investigadora, lo declara ingenuo, pues no le permite evidenciar la reproducibilidad como tal y en sus conclusiones plantea interrogantes que orientan la reflexión en la dirección a dos subsistemas del sistema didáctico, los constituidos por el profesor y el alumno.

Otro antecedente relevante, es Lezama (2005), pues aborda el fenómeno de reproducibilidad, estableciendo que la reproducibilidad de una situación didáctica o situación de aprendizaje necesariamente hace establecer los factores que posibilitan el logro de los propósitos didácticos de una misma clase, al repetirse en escenario distintos. Sin embargo, da a conocer otros estudios en los que se señala que la reproducibilidad en estricto rigor no se puede asegurar en didáctica, pero que se puede predecir reagrupando historias de clases en vecindades de historias y en distinguir trayectorias y órbitas propias de cada situación didáctica. Además, agrega que la reproducibilidad no depende únicamente de los elementos del diseño, sino que hay que considerar factores exógenos a él.

En Artigue (1995), se señala que Brousseau fue el primero en enfrentarse al problema de la reproducibilidad de su ingeniería didáctica sobre la enseñanza de los decimales. A partir de esto, Brousseau escribe sobre los fenómenos de obsolecencia y relaciona el hecho de que un profesor de un año a otro reproduce condiciones para que sus alumnos tengan los mismos resultados en la comprensión de un concepto; sin embargo, en lugar de reproducir las condiciones, deja libre las trayectorias y reproducen una "historia" similar a la de años anteriores pero que desnaturaliza las condiciones didácticas que garantizan una significación correcta de los estudiantes.

También, en este antecedente se consideran los problemas de transmisión y de representación metacognitivas y desarrollan la idea a partir de dos trabajos, uno de ellos es la investigación de Arsac (1989), quién realiza un estudio de reproducibilidad en el marco de un problema abierto; sus hallazgos le permitieron poner en evidencia la desproporción entre el carácter aparentemente anodino de algunas intervenciones del maestro y sus efectos reales. Arsac, además, define un concepto para la caracterización del fenómeno llamado "escogencia didáctica", el cual lo describe como una decisión situacional que toma el profesor y produce un cambio cognitivo en el estudiante, pues cambia "el sentido y la función" del conocimiento.

Es relevante que el fenómeno "obsolocencia" enmarcado posteriormente por Brousseau en los fenómenos ligados al control de la transposición didáctica y en donde define, entre otros, el envejecimiento de situaciones de enseñanza. Este fenómeno lo relaciona con las dificultades que tiene un profesor para reproducir una misma lección, pues plantea que la reproducción exacta de lo que ha dicho o hecho anteriormente no tiene el mismo efecto y tiene la necesidad de cambiar: la formulación de la exposición o las instrucciones o los ejemplos o los ejercicios y si es posible la estructura misma de la clase.

Problemática

La enseñanza aprendizaje de la matemática ha sido discutida en diversos escenarios, principalmente por los resultados que arrojan algunas evaluaciones estandarizadas de nivel internacional, como la prueba PISA. Los resultados de esta medición, en especial la del año 2009, en la parte matemática, pone en evidencia que hay una gran cantidad de países - 41 de 65 – que obtienen un puntaje bajo el promedio que establece OCDE. Chile y México, son dos países que obtuvieron un puntaje similar y bajo el promedio, pero sin duda lo más interesante es que devela que en Chile el 22% de los estudiantes que se sometieron a estas pruebas se ubican en el nivel de desempeño 1, es decir, no dominan las competencias elementales. Por su parte, en México el 28,9% de los estudiantes se localiza en el nivel 1. Dados estos datos, se puede señalar que algunos estudiantes del sistema escolar no aprenden matemáticas, pues la definición del área de matemática en esta prueba tiene estrecha relación, entre otras, con la capacidad del individuo para analizar, razonar y comunicar de forma eficaz resolver e interpretar problemas matemáticos.

Por otra parte, la intención de que los estudiantes aprendan matemática se fundamenta en la idea de instalar un proceso social de culturización científica, que ayuda al reconocimiento de la necesidad de implementar modificaciones educativas en el campo particular de las matemáticas (Cantoral y Farfán, 2003). Desde esta mirada, surge la necesidad de investigar en el campo de la matemática educativa y a su vez se convierte en un desafío, puesto que, las aportaciones que se realizan en este ámbito, entre otras; definen, estudian, detectan fenómenos didácticos, por ende podrían aclarar algunos de estos fenómenos y evidenciar problemáticas qué se están generando, contribuyendo con esto al conocimiento disciplinar que alimenta el cuerpo teórico del campo de la matemática educativa y que después pueda usarse en beneficio de la escuela.

Además, de lo presentado en los párrafos anteriores, se tiene que mencionar que en la enseñanza - aprendizaje de la matemática en los últimos años, ha sufrido algunos cambios. Estos cambios, obedecen a los procesos que se han producido en la educación a nivel mundial, como los cambios tecnológicos y sociales.

Esto conlleva a plantear reformas educacionales, pues de un modelo tradicional de enseñanza se propone un nuevo enfoque que está orientado al desarrollo del pensamiento matemático del estudiante y no sólo a la comunicación de información.

Algunos de estos nuevos enfoques de enseñanza son, por ejemplo; aquel que se basa en la resolución de problema, aquel que está centrado en la modelación matemática o bien aquel que se fundamenta en la matemáticas en contexto. En este proceso de adaptación y aceptación de los modelos que surgen en las reformas educacionales, se proponen diversos cursos de actualización para los docentes que están en servicio y que consideran por igual los saberes matemáticos, didácticos y pedagógicos. Asimismo, las políticas públicas de algunos estados tienen institucionalizada la formación continua de docentes, a través de diversas estrategias como: postítulo (también conocidos como diplomados), cursos de perfeccionamiento docentes, entre otros. En esta formación continua, se fortalecen conocimientos en diversos ámbitos, con el propósito de que el docente pueda readecuar y cambiar un modelo de enseñanza – aprendizaje de la matemática y reflexionar de manera ilustrada con teoría y práctica.

La experiencia de trabajar con docentes en diferentes cursos de reactualización, permite señalar que el cambio de enfoque en el proceso enseñanza aprendizaje de la matemática, para el profesor no es "natural", sobre todo para docentes que llevan 10, 15 hasta 20 años de servicios. Da Ponte & Champan (2006) citan un estudio de Rossouw & Smith (1998) sobre el conocimiento pedagógico del contenido (PCK) a maestros de primaria en geometría, que dos años después de haber completado el curso de instrucción interno, los maestros finalmente desarrollaron su propio conocimiento pedagógico del contenido que se formó por su propia experiencia. Esto conduce a presentar que cada profesor que tiene la necesidad de cambiar el enfoque en la enseñanza de la matemática, tiene una historia propia, constituida también por creencias que se han instalado en su quehacer profesional. Parte de la historia del profesor de matemática es la experiencia formativa, situada en una época y en una tradición regional, de la enseñanza –aprendizaje. Se agrega a ésta historia, los cambios sociales y tecnológicos que eran más lentos si se compara con los cambios que se producen actualmente. Por lo cual, hay profesores que en el proceso de actualización de saberes, logran con dificultad poner en acción dichos saberes al servicio de su profesión y diseñar sesiones de clases con un nuevo enfoque, dado las observaciones que se han realizado en el trabajar con distintos docentes de diferentes edades en cursos de reactualización. En este caso, se podría señalar, que algunos docentes han provocado una ruptura con su quehacer pedagógico tradicional y están abiertos a cambios de enfoques. Sin embargo, no se sabe con certeza qué aprende, cómo aprende y cómo valida lo que aprende.

Estos hechos, conducen a reflexionar sobre la práctica pedagógica de un profesor de matemática en servicio, pues con o sin perfeccionamiento, el profesor desea provocar aprendizajes de matemática en sus alumnos, independiente del modelo que él seleccionó o aprendió para diseñar y realizar sus clases.

En concordancia con los antecedentes y frente a la reflexión plasmada en los párrafos anteriores, surge la inquietud de vincular el fenómeno de la reproducibilidad que está asociado al diseño de las Ingenierías Didácticas con el quehacer de un docente que asiste a un programa de reactualización de saberes, pues en esos cursos tiene posibilidad de apropiarse o al menos conocer elementos de la didáctica de la matemática. Estos elementos, pueden convertirse en herramientas para el diseño y ejecución de propuestas de enseñanza y aprendizaje fundamentada en marcos teóricos como la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD), la cual es una teoría de aprendizaje en donde subyace un modelo constructivista.

La reproducibilidad como fenómeno, surge precisamente en la Teoría de Situaciones Didácticas, específicamente en los fenómenos ligados a la transposición didáctica y en particular al envejecimiento de situaciones de enseñanza (Brousseau, 1986).

Asociando, la idea de reproducibilidad que es un elemento teórico de la didáctica de la matemática con cursos de reactualización de saberes matemáticos, didácticos y pedagógicos se formula la siguiente pregunta de investigación:

¿La reflexión sobre reproducibilidad en el proceso de formación continua, agrega elementos al docente para que sus diseños de situaciones de aprendizajes sean instalados en distintos escenarios?

Marco conceptual

La investigación que se propone considera aspectos conceptuales de diversa índole, como reproducibilidad, reflexión, situaciones de aprendizajes y constructos teóricos como la Ingeniería Didáctica y Estudios de Clases. Asimismo la fundamentación es la Teoría de Situaciones Didácticas y Teoría Antropológica de lo Didáctico.

Precisaremos algunas ideas en relación al sentido del término reproducibilidad para comprender la característica esencial de la investigación. Se comprenderá por reproducibilidad a la forma en que una situación de aprendizaje puede ser instalada en distintos escenarios y extrapolar los elementos, que permiten que la situación en sí misma no pierda su esencia relacionado con el logro del objetivo didáctico. Algunos ejemplos en donde se puede observar la reproducibilidad: un profesor que diseña una clase para un grupo determinado de estudiantes y luego tiene que aplicar clase con otro grupo de estudiantes; un profesor que tiene que aplicar situaciones de enseñanza aprendizaje en su quehacer cotidiano y a lo largo de su carrera; dos profesores que diseñan una clase y tienen que aplicarla en dos cursos distintos.

Por otra parte la reflexión que se desea provocar es de tipo didáctico. Esto nos conduce a plantear lo que se entenderá primeramente por reflexión, el significado de esta palabra depende desde que punto de vista se sitúa. A partir de la lingüística según RAE (Diccionario de la Real Academia Española) es la acción de reflexionar (del latín reflexio-onis) y reflexionar a su vez, es considerar nueva o detenidamente algo. Desde el punto de vista filosófico, reflexión es el proceso de meditar o de considerar algo en forma detenida.

La definición de reflexión que se adoptará para este estudio es la de Sánchez (2010) quien la precisa como una actividad de tipo cognitiva y la considera un proceso mental por el cual las acciones creencias, conocimientos o sentimientos son conscientemente considerado y examinado. Además, define como reflexión didáctica al proceso en el cual el profesor conscientemente considera su propia práctica de profesor, sus valores y acciones asociadas con la práctica y por reflexión matemática aquella que se relaciona con la matemática misma que examina conscientemente la interpretación de conceptos matemáticos.

Cabe señalar que es posible identificar un tercer tipo de reflexión denominada pedagógica, ésta es transversal en los procesos educativos y tienen relación con las metodologías y paradigmas de enseñanza.

En este escrito se están presentando las primeras ideas de marco conceptual, en la investigación se están precisando cada uno de los constructos mencionados en los párrafos anteriores con mayor profundidad. Se han señalando ideas generales de dos conceptos para comprender mejor las características de la investigación.

Metodología experimental

La metodología experimental es la fase en que se recogen datos y se tienen que buscar la forma de recoger los datos, enseguida se analizan bajo el marco teórico y a partir de eso se pueden formular conclusiones y responder a la pregunta de investigación.

Desde esta perspectiva, la metodología de la presente investigación es de tipo cualitativa y considera a un grupo de profesores que está realizando un curso de perfeccionamiento y que están en vías de apropiación de saberes matemáticos, didácticos y pedagógicos.

El grupo de profesores está constituido por 8 integrantes, estos profesores hacen clases de matemáticas en el segundo ciclo básico del sistema escolar chileno, es decir, a niños entre 12 a 14 años. Los docentes asisten a un curso de postitulo de especialización en matemáticas y el programa de dicho curso considera entre sus módulos uno denominado "Taller de reflexión pedagógica y seguimiento al aula". En el taller los profesores diseñarán situaciones de aprendizajes y las aplicarán en sus respectivas clases. Los diseños didácticos son discutidos por el grupo de docentes y se instala una reflexión permanente desde el inicio del trabajo en el taller. Cada docente realizará un Estudio de Clases, lo que implica necesariamente: discusión, análisis, aplicación de las situaciones de aprendizajes para posteriormente evaluar las clases. Esto permitirá provocar la reflexión de tipo didáctica en relación a la reproducibilidad.

Se está en una fase de recolección de datos para poder interpretar, analizar y poder responder a la pregunta de investigación.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1986). Étude de la dynamique d'une situation de classe: Une approche de la reproductibilité. *Recherches en Didactiques des Mathématiques,* 7(1), 5-62.

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gómez (Eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 33-59).México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Arsac, G. (1989) Le rôle del professeur- aspects pratiques et théoriques, reproductibilité. Cahiers du Séminaire de Didactique des mathématques et de l'informatique. Grenoble: IMAG-LSD.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherche en Didactique des Mathématiques,* 7(2), 33-112.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 6(1)* 27-40

Da Ponte J. & Chapman O. (2006) Mathematics Teachers' Knowledge and Practices. En Gutiérrez y Bolero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future* (pp.461-492). Estados Unidos, Sense Publishers.

Información sobre México en PISA 2009. (*sf*). Recuperado el 16 de septiembre de 2011 de http://www.inee.edu.mx/archivosbuscador/2011/02/INEE-201102297-informacion_ pisa2009.pdf

Lezama J. (2005). Una mirada socioepistemológica al fenómeno de reproducibilidad, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8(3)* 339-362

Resumen de resultados PISA 2009 Chile. (*s.f.*). Recuperado el 16 de septiembre de 2011 de http://www.simce.cl/fileadmin/Documentos_y_archivos_SIMCE/evaluaciones_inter/pisa_2009/Resumen_Resultados_PISA_2009_Chile.pdf

Rossouw, L. & Smith, E. (1998) Teachers' Pedagogical Content Knowledge of Geometry. In Olivier, A. & Newstead, K. (Eds) *Proceedings of PME22, 4*, 57-64.

Sánchez (2010). *How to stimulate rich interactions and reflections in online mathematics teacher education?* Tesis de Doctorado, IMFUFA tekst nr. 472 - 2010. Universidad de Roskilde: Dinamarca.

LA PRÁCTICA DE PROFESORES DE BACHILLERATO RELACIONADA CON LAS REFORMAS CURRICULARES EN MÉXICO

Ma. De Lourdes Miranda Quintero, Ana Isabel Sacristán Rock
CINVESTAV – IPN. México
mmiranda2002@hotmail.com, asacrist@cinvestav.mx

Resumen: En México, durante la década de los 90s,se llevó a cabo unprocesogeneralizado de reforma curricularcon el fin de superar los rezagos y las limitaciones educativas detectadas en la educación nacional,y como consecuencia de las necesidades y problemáticas observadas en foros internacionales a finales del siglo pasado. En particular, el paradigma constructivista ha permeado las propuestas de reforma en el país, así como el uso de las tecnologías digitales (TD) como apoyo didáctico. Consideramos importante estudiar qué tan informados estánlos docentesde bachillerato de estos cambios educativos en el mundo, en el país y en su escuela; para ello se encuestaron a 157 profesores y se observaron a 20 de ellos en su práctica, para indagar sobre la manera en que están, o no, implementando dichos cambios.

Palabras clave: Cambios educativos, reforma curricular, didáctica, tecnologías digitales.

Abstract: In Mexico, during the 90s, a generalized process of curriculum reform was carried out,with the aim ofovercomingeducational deficiencies and limitations that have been identified in the national education, and as a result of the needs and problems observed,in international forums, at the end of the last century. In particular, the constructivist paradigm has permeated reform proposals in the country, as hasthe use of digital technologies (DT) as educationalaids. We consider important to researchhow informed high-school teachers are of these educational changes in the world, in the country and at their schools; thus, we surveyed 157 high-school teachers and observed 20of them during their teaching practice, in order to get insights intohow they are implementing these changes.

Key words: Educational changes, curricular reform, didactic, digital technologies.

Introducción

Como consecuencia de la globalización ylos avances tecnológicos en el mundo, los cambios educativos no se han hecho esperar. En gran cantidad de foros y espacios internacionales se han generado propuestas y acuerdospara impulsar a la educación hacia la vanguardia de estos procesos cambiantes y mejorar la calidad educativa.Por ejemplo,en 1996, durante la 45ªConferencia Internacional de Educación,conla inminente llegada del nuevo milenio, se mostró el interés en identificar las necesidades de la época moderna, teniendo entre sus temáticas principales el "Fortalecimiento de la función del personal docente en un mundo cambiante".

Asimismo, en el marco de la VIII Conferencia Iberoamericana de Educación que se llevó a cabo en Portugal en 1998, se propusieron líneas de cooperación en la educación y para el análisis de lo relacionado con el tema "Globalización, Sociedad del Conocimiento y Educación". Dos de los acuerdos tomados allí fueron: "Privilegiar en las reformas educativas el cambio pedagógico orientado a una transformación en el aula y en la organización de la escuela…" y "favorecer el conocimiento y aprovechamiento de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación, así como su aplicación pedagógica, eficiente y crítica,…” (pp. 3-4).

De igual manera, en el Foro Mundial de la Educación de la UNESCO,realizado en Dakar en el año 2000 – y donde se observó la participación de México– los representantes de los países participantes se comprometieron a“mejorar todos los aspectos cualitativos de la educación garantizando los parámetros más elevados, para conseguir resultados de aprendizajes reconocidos y mesurables” (p.21).

De esta forma, las propuestas generadas en estos foros, así como la participación en competencias internacionales tales como el *Program for International Student Assessment* (PISA), han acelerado los procesos de reforma e incrementado la produccciónde innovaciones educativas a nivel mundial.

En México, se realizó una reforma educativa a principios de la década de los 90s en el nivel medio superior. Fullan (2006) señala que la palabra reforma se utiliza cuando se pretende provocar cambios a gran escala, como fue el caso en este proceso de reforma, en el cual se realizaron cambios educativos notorios en diferentes áreas de interés. Aunque en el 2008 se realizó otra reforma curricular, se señaló que ésta se ciñe a la reforma anterior y que solamente se definen y se complementa algunos aspectos. Ahora bien, los cambios curricularesrealizados en los 90s han tenido diferentes alcances en cada una de las instituciones educativas del país, debido a diversas problemáticas tales como la autonomía, la filosofía escolar o las autoridadesque las dirigen. Sin embargo, de forma general se puede decir que los programas son equivalente en todas las escuelas de ese nivel.

En particular, muchas de las propuestas realizadas recientemente por organismos internacionales, apuntana las teorías y paradigmas constructivistas del aprendizaje y de la ciencia cognoscitiva, así como a la implementación del uso de tecnologías digitales (TD). La reforma curricular en el país tiene clara influencia de ellas.

En este documento se presenta una investigación en donde se hace un análisis curricular en algunas de las escuelas públicas, de nivel medio superior, más conocidas de México. Dicho estudio se basa en procesos de investigación cualitativa, y utiliza elementos de teoría curricular, así como los propósitos que establecen las autoridades educativas, a fin de observar los posibles cambios sobre la didáctica de los profesores en el salón de clases a partir de su conocimiento y entendimiento de las implicaciones y necesidades educativas de la época actual. Kelly y Lesh (2000) sugieren que el profesor es el puente entre las exigencias de las políticas educativas gubernamentales, y la adecuada implementación de la reformas en el aula. Al coincidir con esta hipótesis nos interesa de manera primordial observar los conocimientos del profesor en cuanto a los diferentes aspectos constitutivos del proceso de reforma educativa.

En relación al conocimiento del profesor, estamos considerando el modelo propuesto por Ball, Thames y Phelps (2008) en el que retoman las categorías propuestas por Shulmanen 1986,para definir el conocimiento del contenido para la profesionalización del profesor a través de la línea de investigación sobre los orígenes del conocimiento del contenido pedagógico, *(Pedagogical Content Knowledge, PCK)*. Por su parte Llinares define y caracteriza la práctica del profesor a partir de actividades como: diseñar tareas, organizar el contenido matemático de las lecciones, interactuar con sus alumnos, evaluarlos, asistir a reuniones de academia, o cursos de formación entre otras y menciona que el conocimiento de las matemáticas tiene que ver con "el uso que el profesor hace de su conocimiento matemático para conseguir el aprendizaje de sus alumnos" (2000, p.115) caracterizando así el conocimiento del contenido pedagógico del profesor de matemáticas. Uno de los elementos importantes que se observó en esta investigación fue la relación entre el profesor y el currículo a través de la planificación, el diseño, y la organización de su práctica.

La investigación que aquí se presenta, es un estudio en curso que se está llevando a cabo en dos fases. Una de ellas es un trabajo documental para entender las propuestas curriculares en nuestro país y los cambios que éstas implican. La segunda fase es la indagación directa (mediante encuestas y observaciones en las aulas) de cómo los profesores entienden y ponen en práctica las propuestas curriculares. En este documentose resaltan algunos aspectos significativos derivados de la investigación documental y se describen algunos resultados de las encuestas y las grabaciones a profesores en el aula.

A través de un cuestionario de 14 preguntas de opción múltiple, se encuestó a 157 profesores de diferentes estados de la republica mexicana. Uno de los objetivos del cuestionario fue la de recabar información en forma general de los conocimientos que tienen los profesores acerca de los cambios en las propuestas educativas mundiales, relacionados con aspectos metodológicos, pedagógicos, curriculares y del uso de las herramientas tecnológicas. El otro objetivo del cuestionario fue identificar a aquellos profesores que mencionaron que: sabían que han habido cambios mundiales, conocen el proceso de reforma curricular en el país y algunas propuestas, y, sobre todo, que dicen utilizar las TD como apoyo en su práctica. Así se seleccionaron y entrevistaron a 20 profesores de cuatro escuelas públicas del Distrito Federal (Colegio de Ciencias y Humanidades, Escuela Nacional preparatoria, Colegio de bachilleres y el Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos) y una particular (Bachillerato ICEL) para observar su didáctica en el salón de clases.

Cambios requeridos después de las reformas

Al realizar un análisis de los programas de las diferentes instituciones se observaron propuestas comunes, tales como: programas de formación para dotar al académico de enfoques, conocimientos y metodologías; el fomento del trabajo colaborativo entre estudiantes; la integración a la didáctica de paradigmas basados en el constructivismo; implementación de actividades a partir del uso responsable de las TD; entre otros.

Para llevar a cabo estas propuestas es necesario realizar algunas modificaciones. Por ejemplo, colocar el mobiliario adecuado para que los estudiantes puedan trabajar colaborativamente y para poder realizar actividades más "constructivistas"; proporcionar a los profesores herramientas necesarias para que puedan implementar a su didáctica actividades utilizando la TD, desde la capacitación para que ellos conozcan y sepan utilizarlas, hasta el equipamiento en los planteles de suficientes computadoras, cañones y otros aditamentos necesarios para ese fin. Sin embargo, en las visitas a los diferentes planteles se observó que solamente una institución ha cambiado los pupitres individuales, por mesas que facilitan las actividades colaborativas. Cuatro de las cinco instituciones observadas han adaptado espacios para la creación de centros de cómputo; pero sólo en una de ellas, los profesores de matemáticas tienen acceso para trabajar con sus alumnos actividades relacionadas a esta área.

Conocimientos del profesor relacionado a los cambios

El cuestionario que se aplicó responde a cinco áreas de interés de los conocimientos del profesor: a) conocimiento de los cambios mundiales; b) si considera que ha habido impacto de los cambios mundiales en la educación en el país; c) conocimientos de las propuestas de reforma; d) si considera que ha realizado cambios en su didáctica como consecuencia de la reforma; e) conocimiento y uso de las TD como apoyo a su didáctica. Las categorías generadas a partir de esta información arrojaron los siguientes resultados:

El 91% de los profesores menciona estar enterado de los cambios educativos mundiales que se han dado en los últimos años. La siguiente tabla muestra los porcentajes y las áreas en que ellos mencionaron han sido más notorios los cambios.

CAMBIOS MUNDIALES CONSIDERADOS POR LOS PROFESORES		
TIPO DE CAMBIO	PROFESORES	PORCENTAJE
Metodológicos	169	48%
Curriculares	33	10%
Tecnológicos	134	38%
Otros casos	14	4%

Observamos que el porcentaje más alto corresponde a los cambios metodológicos, con lo que se podría decir que por lo menos el 50% de los encuestados las conoce. De igual forma se les encuestó en relación a cuánto consideran que se han dado esos cambios en áreas específicas, obteniéndose los siguientes resultados.

Se observa que, en promedio, una tercera parte de la población encuestada considera que los cambios mundiales en estas áreas han sido significativos. Pero cuando se les pregunta qué tanto ha sido el impacto de estos cambios en los procesos de enseñanza - aprendizaje en el país, los porcentajes que se obtienen son de la siguiente manera, observándose que la respuesta mayoritaria (40%) de los profesores es que se considera que los cambios han tenido "poco" impacto en el país:

Nada	Poco	Medianamente	Mucho
6%	40%	35%	19%

En cuanto al conocimiento del profesor en relación a las reformas educativas, el resultado es asombroso, ya que a pesar de que los cambios correspondientes a las reformas se ubican en su mayoría en los programas y documentos oficiales publicados, la mayoría de los profesores (49%) no conocen más que algunas de las reformas, y otra cantidad significativa (34%) no conoce ninguna:

En la década de los noventas se realizaron reformas curriculares en las escuelas del país ¿Conoce las propuestas de esta reforma?			
Ninguna	Algunas	Casi todas	Todas
34%	49%	14%	3%

Al preguntarles si0 utilizan algunas propuestas de la reforma curricular al planear sus cursos de matemáticas, el 57% de los profesores menciona que medianamente, mientras que sólo 5% dicen no utilizarlas nada, aún cuando el 34% había mencionado no conocer ninguna, lo que representa respuestas contradictorias. En relación a cuánto han modificado su práctica a raíz de la reformas se obtiene que el 58% de los profesores la han modificado medianamente y el 20% la han modificado mucho.

Finalmente, la siguiente tabla muestra el tipo de herramienta tecnológica que dicen utilizar como apoyo en su didáctica:

Calculadora	Computadora	Internet	Applets	Video	Calculadora graficadora
140	116	102	22	54	31

Ahora bien, de entre los profesores que mencionaron que conocen las reformas curriculares, que han modificado su práctica a partir de la reforma, y que utilizan las TD como apoyo en su práctica, se seleccionó a dos profesores de cada escuela. En esta parte de la investigación se realizó una entrevista a cada profesor y posteriormente se videograbó su clase.

Se tenía considerando que se grabaría a cada profesor en dos sesiones diferentes, una en el aula observando los cambios realizados a su didáctica, y la otra con el uso de las herramientas tecnológicas. Sin embargo de catorce profesores que se habían seleccionado, solamente se pudo observar a un único profesor utilizando la computadora en su salón de clase. Lo que este profesor hizo con la computadora fue mostrarles a sus estudiantes un video de congruencia y semejanza que obtuvo de una página de internet. Las condiciones en las que se llevó a cabo esta actividad fueron muy malas: el video no tenía sonido, debido a que el profesor no llevó bocinas; y el salón no contaba con enchufes de toma corriente por lo que tuvo que conectar la computadora y el cañón directamente de la lámpara ubicada en el techo del salón.

Los otros 6 profesores que formaron parte de la investigación se eligieron indagando en las instituciones, en torno a quienes utilizaban TD en sus clases; de entre estos profesores solamente se pudo grabar a tres haciendo uso de éstas como, por ejemplo, a una profesora que llevó a sus estudiantes al Centro de Cómputo del plantel a observar características que presentan las funciones cuadráticas. Los otros dos llevaron su computadora y un cañón al salón de clases y también realizaron actividades utilizando graficadores, pero en sólo uno de ellos se identificó un diseño de actividades significativas.

A pesar de que todos los profesores seleccionados decían utilizar las TD, no pudimos observar a ninguno de los demás utilizándolas. Dieron entonces argumentos como que:

- Sólo una vez al semestre, o al año, traían su computadora o llevaban a sus alumnos a los laboratorios de cómputo para enseñarles a utilizar los paquetes para graficar y luego nada más dejaban tarea.

- Que la escuela no tenía los recursos, ni siquiera un cable para acercarse ala toma corriente.
- Y un profesor comentó que a él no le importaba dónde, o cómo, el estudiante hiciera las actividades; que él dejaba tareas con el uso de la computadora.

Por otro lado, en relación a las prácticas constructivistas propuestas en las reformas, en la entrevista realizada a los profesores, la mayoría mencionó que conocían los principios de la teoría constructivista y entre los cambios que algunos de ellos señalaron habían realizado a su didáctica, dieron afirmaciones como las siguientes:

> *"Con mis alumnos trabajo la enseñanza directa que sea cooperativa, no en equipo. No confundir en equipo, con cooperatividad; podemos ver aprendizaje guiado, basado en proyectos"*
>
> *"He procurado, el que los chavos razonen, el que a los chavos yo no les dicte fórmulas, sino que ellos empiecen a construir y deconstruir formulas y que no se basen en fórmulas ni en mecanizaciones tanto"*
>
> *"Trato de utilizar lo más que pueda las tecnologías de información y comunicación, o sea las Tics; trato de dar lo más frecuentemente que puedo"*

La mayoría de los profesores expresó que ha realizado cambios como los mencionados, pero, al observar sus clases, se detectó que mantienen un formato que se podría llamar de tipo expositivo, con procedimientos algorítmicos, de ejemplo y repetición.

Se infiere, a través de la observación de sus clases que algunos de los profesores consideran que utilizan principios constructivistas porque preguntan constantemente al estudiante el procedimiento que sigue en algún algoritmo realizado en el pizarrón; porque los pasan al frente a que ellos resuelvan un ejercicio semejante al que se planteó como ejemplo; porque los colocan a trabajar en grupos de 3 o 4 para resolver una serie de ejercicios; o porque los dejan investigar cuestiones relacionadas en Internet.

Conclusiones

- Aunque las propuestas de reforma han estado plasmadas durante más de una década en los documentos oficiales de los gobiernos, de las instancias y de las instituciones educativas, el proceso se percibe lento, poco atendido y algunas veces obligado.
- Las instituciones educativas no se observan preparadas para adaptarse a los cambios en cuanto a la infraestructura que se requiere.

- Los profesores conocen someramente los objetivos que persigue la reforma educativa y es claro que no están conscientes de las implicaciones y necesidades de la época actual.Aquellos que mencionan conocer los principios de la teoría constructivista, no muestran una comprensión de fondo, a pesar de considerarse abiertamente constructivistas en su práctica.

Podemos decir que en la investigación que se lleva a cabo, se ha observado que las características de la cultura escolar y los maestros del nivel medio superior en el México de hoy, no favorecen la incorporación de los cambios propuestos en las reformas, en cuanto a metodologías y de uso de las TD en el aula. Y aunque las instituciones sí contemplan objetivos comunes de cambios, no sólo de contenido, sino pedagógicos, con enfoques que consideramos de corte constructivista, los profesores que dicen estar al tanto de esos cambios, en la práctica no dan evidencias de haber asimilado dichos cambios.

Referencias bibliográficas

Ball, D., Thames, M., y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of TeacherEducation. 59(5)*, 389 - 407

Fullan, M. (2006). *Las fuerzas del cambio. Explorando las profundidades de la reforma educativa*. Madrid: Akal.

Kelly. A. y Lesh R. (2000). Trends and Shifts on Research Methods. En A. E. Kelly & R.A. Lesh (Eds.) *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*. Mahwa, NJ: Laurence Erlbaum Associates, Inc. Publishers. pp 35-44

Llinares, S. (2000). Comprendiendo la práctica del profesor de Matemáticas. En J. P. Da Ponte y Serrazina, L. (Org.) *Educaçao Matemática em Portugal, Espanha* e *Italia*. Editorial: Secçao de Educaçao Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciencias de Educaçao. (109 – 132).Lisboa, Portugal.

OCDE (2000). *Sample Tasks for the Assessment of Mathematical Literacy in PISA 2000*.

OEI (1998). VIII Conferencia Iberoamericana de Educación. Organización de Estados Iberoamericanos.

Plan Nacional de Desarrollo 2001- 2006. Extraído el 8 de abril de 2010 http://dgpp.sep.gob.mx /planeacion/pdf%20inf/PND.pdf

Programa de Desarrollo Educativo 1995-2000 Educación Media Superior y Superior. ANUIES. Extraído el 23 de febrero de 2010 http://www.anuies.mx/servicios/p_anuies/ publicaciones/revsup/res097/txt7.htm#1

SEP (2009). Boletín 038. Se instala comité para el establecimiento de un nuevo plan de estudios en el nivel bachillerato. Extraído el 18 de mayo de 2011 http://www.sep.gob.mx/es/sep1/bol0380209

Shulman, L. S. (1986). Paradigms and research programs for the study of teaching. En M. C. Wittrock (Ed). *Handbook of Research on Teaching*. 3rd Ed. Nueva York: Macmillan, 3-36. [ed. cast.: Paradigmas y programas de investigación en el estudio de la enseñanza: una perspectiva contemporánea, en M.C. Wittrock (ed.), La investigación de la enseñanza, I: Enfoques, teorías y métodos. Barcelona: Paidós-MEC, 1989, 8-90].

UNESCO (1996). Conclusiones procedentes de la 45a reunión de la Conferencia Internacional de Educación (CIE) y Propuestas de Acción.

LA FORMACIÓN DOCENTE DE PREESCOLAR EN ESTOCÁSTICOS

Adriana Ramos Córdova, Ana María Ojeda Salazar
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav. México.
aramosc@cinvestav.mx, amojeda@cinvestav.mx

Resumen: Esta investigación se orienta, e*pistemológicamente,* por las ideas fundamentales de estocásticos para el currículum (Heitele, 1975) y el origen de la idea de azar en el niño (Piaget e Inhelder, 1951); *cognitivamente,* por el rol de la intuición en las ideas de estocásticos (Fischbein, 1975); y *socialmente* por el papel de la interacción en el aula en la adquisición de nociones de probabilidad y de estadística (Steinbring, 1991). De forma cualitativa se caracterizó la comprensión de ideas de estocásticos de dos docentes en ejercicio y 25 en formación y su enseñanza en el aula real de preescolar, durante la impartición de un estudio dirigido a estocásticos para su enseñanza. De la experienciación desarrollada, de las bitácoras y de la aplicación de cuestionarios, resultó la necesidad de formar a la docencia en probabilidad y en estadística para desarraigar la prevalencia del determinismo en su enseñanza y posibilitar así la introducción de nociones de estocásticos como vía hacia la construcción del pensamiento matemático del niño preescolar.

Palabras clave: Educación preescolar, estocásticos, docencia.

Abstract: This research is epistemologically rooted in the fundamental ideas of stochastics for the curriculum (Heitele, 1975) and in the origin of the idea of chance in children (Piaget and Inhelder, 1951); cognitively, in the role of intuition to acquire the ideas of stochastics (Fischbein, 1975); and socially, in the role of classroom interaction to acquire the notions of probability and statistics (Steinbring, 1991). During a course of stochastics and its teaching we characterized, qualitatively, the understanding of ideas of stochastics of two in service teachers and 25 in training teachers, as well as their teaching in the preschool classroom in real conditions. The results of experiencing during the teaching training course, of the logs and of nine questionnaires applied to the teachers point to the need of training teachers in probability and statistics for their teaching, in order to eradicate the determinism that prevails in their practice, so to introduce the notions of stochastics as a pathway to construct the preschool child's mathematical thinking

Key words: Preschool, stochastics, teaching.

Introducción

Este informe presenta parte de los resultados de la segunda de tres fases que conforman la investigación, realizada en México, para proponer la introducción de nociones de probabilidad y de estadística en el nivel de preescolar, como una vía hacia la construcción del pensamiento matemático. Esta segunda fase se refiere a la formación de docentes en estocásticos y pretende caracterizar la forma de introducir nociones de probabilidad y de estadística en la enseñanza a niños de entre tres y medio y seis años de edad.

La investigación va dirigida a todos los actores involucrados en la educación interesados en que los niños preescolares incursionen en los estocásticos como parte de su formación matemática, al tiempo que se replantea la práctica docente como un proceso de enseñanza dinámico para estimular el aprendizaje.

Perspectiva teórica

La investigación se rige por tres ejes teóricos.

Eje Epistemológico. Se consideran las ideas fundamentales de estocásticos propuestas por Heitele (1975), principalmente en cuanto a que son necesarias como guía en un currículum en espiral, desde los niveles iniciales de la educación hasta los niveles superiores, de forma que se garantice su continuidad a lo largo de los diferentes niveles cognoscitivos, para desarrollar su comprensión desde lo intuitivo hasta lo formal. Las ideas fundamentales de estocásticos que el autor propone son: medida de probabilidad, espacio muestra, combinación de probabilidades mediante la regla de la adición y la regla del producto e independencia, equidistribución y simetría, combinatoria, modelo de urna y simulación, variable estocástica, ley de los grandes números y muestra.

Piaget e Inhelder (1951) establecen que la evolución de la inteligencia infantil se caracteriza por la construcción de estructuras lógicas que posibilitan el pensamiento matemático y, por medio de la deducción, emerge gradualmente la idea de azar. Las operaciones combinatorias son el origen de las nociones de azar y de probabilidad. Éste es un resultado de interrogatorios en entrevistas clínicas aplicadas por esos autores, a niños de entre 4 y 16 años de edad. Específicamente, para la etapa preoperacional son precoces las intuiciones de frecuencia en los niños (entre los cuatro y seis años de edad), sin llegar a una estimación de la probabilidad o a la comprensión de las combinaciones. Para los niños, cada ensayo de los experimentos realizados se relaciona causalmente con su predecesor y su sucesor. Por lo tanto, su concepción de causalidad es irreversible sin que el infante note el factor causal específico. Al mismo tiempo, los autores identificaron el fenomenalismo, cuando se acepta con facilidad la apariencia y la realidad.

Eje Cognitivo. En la investigación realizada por Fischbein (1975), la intuición se define como una parte integral del funcionamiento de la inteligencia. Es una adquisición cognitiva que interviene directamente en la práctica de la acción mental, por su característica de inmediatez, globalidad, capacidad exploratoria, estructuralidad y por ser evidente en sí misma. Las intuiciones pueden ser de afirmación, que subyacen al conocimiento del mundo externo y pueden ser aceptadas como evidencias; y de anticipación, que son las construcciones mentales que anticipan en forma global la solución a un problema antes de conocer en detalle la solución. El autor también clasifica a las intuiciones en "primarias" si se derivan de la experiencia individual, sin enseñanza sistemática alguna; y en "secundarias" si surgen de la enseñanza. Para Fischbein, el niño de nivel preescolar puede distinguir lo aleatorio en el sentido de lo impredecible, lo reduce a lo deducible; y resalta el rol de la experiencia en la formación de la noción de frecuencia relativa, al señalar que un niño pequeño, al igual que un adulto, es capaz de predecir y anticipar el evento más frecuente y hace uso de esa condición experimental. Descubre que en los niños preescolares existe la intuición primaria de la idea de azar, que responde correctamente a preguntas relativas a ella, por lo que comprende el problema y sus respuestas expresan juicios probabilísticos (p. 120).

Eje social. Se considera la constitución del conocimiento derivado de las relaciones de los individuos con su entorno, particularmente las relativas a cómo se reconstruye "el significado del conocimiento matemático [ya] construido en el salón de clases, y así entender la relación entre las condiciones sociales y las convenciones de enseñanza y aprendizaje" (Steinbring, 1991, p. 508) en el aula, con el fin de no dejar el estudio y desarrollo de estocásticos en el proceso de enseñanza como una mera reproducción informativa de la aplicación de un fenómeno aleatorio y reducir así ese proceso a sólo una convención metódica. El autor sostiene que el desarrollo del conocimiento requiere de una estructura de retroalimentación interactiva para verificar, mejorar y modificar la comprensión que los individuos tienen de los conceptos matemáticos, que transgreda a la subjetividad reducida de los conocimientos. De esta manera, afirma, se reducen los errores en la comprensión del concepto matemático y se establece un balance entre los aspectos objetivos y subjetivos en la enseñanza, el aprendizaje y la comprensión.

Lógica de la investigación y sus métodos

La investigación, cualitativa y *en curso,* responde a la dialéctica que se establece entre el escenario empírico, sus resultados y los referentes teóricos consecuentes; sus preguntas y objetivos se precisan y consolidan conforme se le desarrolla.

Escenarios y participantes. Para este reporte consideramos dos escenarios: el *estudio dirigido* y el *aula normal.* Conducido por la investigadora, el estudio dirigido a la docencia en ejercicio y en formación tuvo el objetivo de proporcionarle elementos de probabilidad y de estadística para posibilitarle: a) el diseño de estrategias de enseñanza de estocásticos y ejercerlas en el escenario de *aula normal*; y b) la reflexión y discusión entre pares y con la investigadora de lo resultante de la enseñanza en esa aula. El estudio dirigido se impartió como seminario en el Programa de Licenciatura de Educación Preescolar, durante el quinto semestre en sesiones semanales de dos horas. La Tabla 1 resume el contenido tratado.

Tabla 1. El contenido del estudio dirigido a estocásticos para la docencia de preescolar.

Tema	Situaciones planteadas
Exploración de nociones de estocásticos.	Contestación del cuestionario antecedente.
1. Elementos de estadística descriptiva.	Descripción y presentación de datos. Análisis de la lección 25 del libro de 1° de primaria (SEP, 2008). *Cuestionario*$_1$.
2. Medidas de tendencia central y rango.	Descripción y presentación de datos. Análisis de la lección 25 del libro de 1° de primaria (SEP, 2008). *Cuestionario*$_2$.
3. Permutación, combinación y arreglos.	Elementos de combinatoria (Piaget e Inhelder, 1951; Varga, 1975). Análisis de la lección Vistiendo a Pedro del libro de 1° de primaria (SEP, 2010). *Cuestionario*$_3$.
4. Enfoque frecuencial, medida de probabilidad, espacio muestra, variable aleatoria y adición de probabilidades.	Elementos de probabilidad (Heitele, 1975; Varga, 1975). Análisis de la actividad "La carrera de dados" (Glaymann y Varga, 1975). *Cuestionario*$_4$.
5. Urnas y decisión.	Decisión y medida de probabilidad: diez casos (Piaget e Inhelder, 1951). *Cuestionario*$_5$.
6. Urnas y cuantificación.	Apuestas y medida de probabilidad (Steinbring, 1991). Análisis de las actividades propuestas sobre cuantificación de la probabilidad. *Cuestionario*$_6$.
7. Mezcla aleatoria.	Permutaciones y la idea de azar (Piaget e Inhelder, 1975). *Cuestionario*$_7$.
8. Distribución simétrica y asimétrica.	Distribuciones centradas (Piaget e Inhelder, 1975). Tablero de Galton. *Cuestionario*$_8$. Diseño de actividades de enseñanza.

Participaron en el estudio dirigido dos docentes en ejercicio y 25 en formación, quienes se organizaron en ocho equipos (uno por tema tratado en el seminario), para diseñar, ante la observación de la investigadora, actividades relativas a estocásticos que pusieron en juego, también ante la investigadora, en ocho *aulas normales* de ocho jardines de niños (sistema educativo público) con grupos de entre 20 y 25 niños de entre 3 y medio y cinco años de edad, durante sus sesiones de prácticas de intervención, programadas para dos semanas por semestre. Las estrategias de enseñanza se materializaron como *actividades de enseñanza*, a las que nos referiremos aquí con dos ejemplos (actividades 3 y 6) de nuestra investigación.

Métodos, instrumentos y técnicas. La experienciación (Maturana, 1995) desarrollada por la investigadora, tanto del estudio dirigido como de la observación de la enseñanza en el aula normal, se sometió al análisis y se le complementó con *la bitácora*. Ésta, así como las estrategias de enseñanza, tuvieron un doble carácter: de investigación según un guión para conducir cada sesión de estudio dirigido, y de indagación, en la que se inició a las docentes, a quienes en el estudio dirigido se les proporcionó el guión respectivo general para las ocho actividades que diseñaron.

*Guión de investigación y de indagación***.** Este guión fue el siguiente: a) Contenido de estocásticos a tratar, b) objetivo, c) materiales y d) procedimiento de enseñanza que tomara en cuenta: que los niños anticiparan los resultados del fenómeno propuesto, motivarlos a que identificaran todos los posibles resultados, a que confrontaran lo anticipado con lo resultante de la realización del fenómeno, que se realizaran tantas repeticiones del fenómeno como se considerara pertinente y permitir que los niños registraran a su manera los resultados de cada realización de los fenómenos.

Cuestionario antecedente. Este instrumento se aplicó antes de iniciar el estudio dirigido. Contuvo ocho preguntad abiertas y se presento impreso en papel para su contestación (véase la Tabla 2). Su objetivo fue identificar las ideas de estocásticos de las docentes y el papel que advierten de esas ideas.

Cuestionarios$_i$. Por tema, se aplicó un cuestionario$_i$ (i= 1, …, 8) con cinco preguntas abiertas concernientes a los contenidos de estocásticos tratados, aplicando al termino de la sesión de estudio dirigió respectiva, para identificar las nociones de estocásticos adquiridas por las docentes antes de diseñar la actividad para el aula de preescolar. Estos instrumentos, impresos para contestarlos individualmente, se rigieron por el planteamiento general siguiente: 1) ¿A qué se refiere (el tema tratado en la sesión; véanse en la columna izquierda de la Tabla 1)? 2) ¿Qué contenido matemático referente a estocásticos se trata en específico? 3) ¿Cuál es el objetivo que se pretende lograr con los niños al plantearles una actividad referente a este tema? 4) ¿Qué preguntas se harían a los niños para guiar su atención hacia el logro del objetivo en una actividad referente a este tema? 5) ¿Qué términos de estocásticos se utilizarían para guiar la actividad en este tema? 6) Resolver un ejercicio referente al tema tratado (véanse ejemplos en la Tabla 4).

Las sesiones de estudio dirigido se audiograbaron y las actividades realizadas por las docentes en formación con los niños se videograbaron y transcribieron. Las bitácoras fueron notas escritas y en hojas de control, en papel, se asentaron dibujos de los niños.

Criterios de análisis. A los datos obtenidos con los instrumentos se aplicó la célula de análisis de la enseñanza (Ojeda, 2006), es decir, se identificó en ellos: ideas fundamentales de estocásticos, otros conceptos matemáticos, recursos semióticos (figuras, gráficas y diagramas, símbolos matemáticos y lengua escrita), situaciones (a las que se refirieron las actividades) y términos empleados acerca de estocásticos.

Resultados

En este apartado se presentan los resultados primordiales obtenidos en el estudio dirigido, cuestionarios y actividades aplicadas por las estudiantes de licenciatura en el aula de preescolar.

Cuestionario antecedente. La Tabla 2 resume las respuestas principales obtenidas de las 25 docentes en formación. Para este cuestionario las respuestas principales fueron dadas de manera parecida por en el cien por ciento de las docentes.

Tabla 2. Resultados del cuestionario antecedente.

Preguntas	***Respuesta principal***
Qué es probabilidad	No se pudo definir.
Qué es estadística.	Lo que se hace con una gráfica de barras para conocer los resultados de una consulta o estudio.
Etapa de su formación en que tuvo contacto con estocásticos.	Bachillerato.
Especificar en su formación docente algún aprendizaje de estocásticos.	Ninguno en la licenciatura, sólo vemos pensamiento matemático infantil.
Inclusión de estocásticos en su práctica.	No que se recuerde.
Identificación de estocásticos en el programa de preescolar.	Sólo se ve número, forma, medida y cantidad.
Identificación de contenidos de estocásticos en libros de texto para preescolar.	No hay libro de texto oficial, y en los de editorial se privilegia el número.
Pertinencia de introducción de contenidos de estocásticos en preescolar.	Sí es pertinente para tener más elementos.

De las 25 docentes en formación, todas desconocían las competencias o actividades referentes a estocásticos porque éstas no son explícitas en el Programa de Preescolar, ni en su programa de estudios de licenciatura. Su práctica no ha incluido a los estocásticos como parte de las matemáticas. Las docentes asociaron la estadística sólo con los histogramas, como parte del conteo y del concepto de cantidad y fue difícil que expresaran la definición de la probabilidad e identificaran en su práctica un ejemplo de su aplicación.

Estudio dirigido. Las respuestas a cada *Cuestionario*$_i$ y las bitácoras de investigación, mostraron un cambio en la perspectiva de las docentes (por ejemplo, D_i en la transcripción siguiente) en cuanto a las nociones de estocásticos, pues contestaban a las preguntas basándose en los fundamentos teóricos y en las lecturas que les proporcionó la investigadora (I):

D_1: …Entonces lo más importante es saber qué contenido de probabilidad y [de] estadística se va a aplicar, ¿verdad? Y saber qué palabras vamos a ocupar porque por ejemplo la lectura dice que en la permutación es importante el orden y en la combinación no. [Esto] es más fácil de entender con el diagrama que hice con el ejemplo de Pedro…

D2: Sí, además en este tema lo importante es `preguntar a los niños ¿de cuántas maneras diferentes podemos hacer las cosas?, [como] por ejemplo un helado y ayudarlos con preguntas a que encuentren todas las combinaciones. ¿Si es así, maestra, o ya nos perdimos?

I: Si así es. No olviden su contenido matemático de estocásticos y su objetivo.

D3: Pensándolo bien, maestra, creo que sí hemos hecho alguna vez algo de esto, por ejemplo frecuencia cuando pasamos lista…

Diseño de actividades. Las situaciones empleadas para tratar los temas del programa de estudio dirigido (véase la Tabla 1) fueron la fuente para el diseño de las actividades aplicadas en el aula normal (véase la Tabla 3).

Tabla 3. Temas de actividades diseñadas por los equipos de docentes para aula normal.

	Actividad	**Ideas de estocásticos a tratar**
1	Adaptación de lección 25 del libro de 1° de primaria	Enfoque frecuencial, espacio muestra, variable aleatoria y muestra.
2	Adaptación de lección 48 del libro de 1° primaria	Enfoque frecuencial, espacio muestra, variable aleatoria y muestra.
3	Actividades de arreglos y principios de conteo	Combinación y permutación
4	Dados (Glaymann y Varga, 1975)	Variable aleatoria, equidistribución y simetría, espacio muestra.
5	Urnas y decisión (Piaget, 1951)	Variable estocástica, probabilidad, espacio muestra, adición de probabilidad.
6	Urnas y cuantificación (Steinbring, 1991)	Medida de probabilidad, espacio muestra, ley de los grandes números.
7	Mezcla aleatoria (Piaget, 1951)	Permutación y arreglos
8	Tablero de Galton (Piaget, 1951)	Variable aleatoria, equidistribución y simetría, espacio muestra.

Al finalizar el estudio dirigido parecía que las docentes habían comprendido las ideas de estocásticos, lo que se evidencia con el diseño de las actividades para el aula realizado por escrito por cada uno de los equipos de acuerdo a los temas elegidos. Sin embargo, al término del estudio dirigido, 10 de las 25 docentes en formación continuaron privilegiando al histograma en la estadística, mientras que a los elementos de probabilidad sólo les otorgaron finalidades aritméticas y de cardinalidad.

Cuestionarios$_i$. En general las respuestas proporcionadas correspondieron a las situaciones planteadas en cada sesión de estudio dirigido y las estudiantes mostraron una aparente comprensión de los contenidos de estocásticos tratados en las sesiones; los términos usados en sus respuestas también fueron apropiados y se basaron en los fundamentos dados en las lecturas de estudio dirigido y en los ejemplos expuestos. Del mismo modo, para solucionar los ejercicios al final del cuestionario; recurrieron a sus notas; y, en algunos casos, para solucionar los ejercicios de combinatoria utilizaron diagramas de árbol.

Por restricción de espacio, nos referiremos sólo a lo resultante del tratamiento de los temas 3 (combinatoria) y 6 (urnas y cuantificación) (véase la Tabla1) en cada uno de los escenarios considerados, mediante los datos de los instrumentos aplicados. Participaron en el desarrollo de estos temas tres docentes. Aquí, por respuesta principal se entiende a aquella respuesta común dada en las preguntas de la mayoría de los cuestionarios, acertada o no.

Tabla 4. Preguntas y respuestas a cuestionarios C3 y C6.

Cuestionario C_3 (combinatoria)		**Cuestionario C_6** (urnas y cuantificación)	
Preguntas	*Respuesta principal*	*Preguntas*	*Respuesta principal*
Qué es combinatoria.	Todas las formas posibles de arreglar conjuntos de n elementos de r.	Elementos de estocásticos que se tratan en el ejemplo de Steinbring.	Medida de probabilidad, espacio muestra, urnas.
Diferencia entre combinación y permutación.	En la combinación no importa el orden y en la permutación sí.	Objetivo de la actividad propuesta en este ejemplo.	Cuantificar la probabilidad de sacar una pelota de un color dado.
Términos a emplear en una actividad de combinación con los niños.	Cuantas formas posibles hay para combinar...	Preguntas que se harían a los niños al respecto, para guiar la actividad.	Si meto la mano, ¿qué puede salir?, ¿qué es más posible que salga?, ¿qué es lo que más se repite?
Objetivo a lograr con una actividad de combinación para niños.	Encontrar todos los arreglos posibles de los materiales.	Términos a emplear en la actividad de urnas y cuantificación.	Es más posible, es menos posible, probabilidad.
Ejercicio: vistiendo a Pedro, (libro de texto 1° de primaria) 3 pantalones y dos camisas diferentes.	Hay seis formas diferentes de vestir a Pedro.	Cuál es el Espacio muestra, probabilidad de extracción de cada color de pelota, probabilidad de ganar en la actividad.	… todos los posibles resultados a obtener en la extracción de pelotas de colores como espacio muestra. 3/6 azules, 2/6 rojas y 1/6 blanca. La probabilidad de ganar es de ½ pues son seis pelotas y 3 de seis ganan.
Ejercicio: encontrar los arreglos lineales de cinco personas para una foto.	120 maneras.		

Aula normal. Los equipos de docentes en formación que desarrollaron las actividades de permutaciones y combinaciones (actividad 3), estadística descriptiva (actividades 1, 2), la carrera de dados (actividad 4), distribución simétrica (actividad 8), mezcla aleatoria (actividad 7) y urnas y decisión (actividad 5), mostraron un buen desempeño en el desarrollo de las actividades y permitieron a los niños registrar sus experiencias en hojas de control. En cambio, la aplicación de la actividad de urnas y cuantificación (6) se desarrolló con dificultades y su objetivo (introducir con los niños la noción de medida de probabilidad) no se logró. La Tabla 5 muestra la caracterización de las actividades 3 y 6 aplicadas en aula normal por las docentes en formación.

Tabla 5. Caracterización de las actividades 3 y 6 diseñadas para el aula normal de preescolar.

Criterios de análisis	**Actividad 3: combinación**	**Actividad 6: urnas y cuantificación**
Ideas fundamentales de estocásticos	Combinación, permutación y arreglos.	Medida de probabilidad, equidistribución, ley de los grandes números, espacio muestra.
Otros conceptos matemáticos	Cantidad, número.	Números racionales, cantidad, proporción.
Recursos semióticos	Registros de los niños en papel y lápiz	Figuras trazadas
Situaciones	Encontrar las diez combinaciones de tres objetos a elegir de entre cinco diferentes posibles, sin tomar en cuenta el orden.	Apuesta a uno de los seis elementos distintos, igualmente posibles y en diferentes proporciones, contenidos en una urna, extraídos al azar con reposición.
Términos empleados	… hacer todas las brochetas posibles diferentes con tres bombones…, sólo escoger tres de entre cinco diferentes… ¿Cuántos bombones diferentes hay?	…tengo dos paletas… tengo tres dulces…, vamos a ir registrando …¿cuántas paletas van saliendo?, ¿cuántos vamos?

A pesar de que las estudiantes tenían su guion de actividad y de haber participado en el seminario de estudio dirigido, en el aula con los niños confundieron el contenido de estocásticos con el contenido de número al poner en práctica en el aula la actividad 6 " Urnas y cuantificación". La situación original planteada en el guion respectivo se adaptó de la propuesta de Steinbring (1991): apostar a uno de los elementos distintos, igualmente posibles y en diferentes proporciones, contenidos en una urna, extraídos al azar con reposición (véase la Tabla 1).

La docente (D) planteó a los niños (Ns) lo siguiente:

D: …Éste es un juego que vamos a hacer y después vamos a ir registrando cuántas paletas tengo aquí adentro… ¿Cuántas paletas creen que tengo?....

Ns: ¡Tres!

D: ¡No!, sólo tengo…(señala con los dedos la cantidad de dos) dos!!...

D: Y tengo… ¿cuántos dulces creen que tengo?

Ns: ¡Cuatro… tres!!...

D: Tengo tres dulces. Voy a decirle a un niño que tome un dulce y vamos a ir anotando cuántos dulces y cuántas paletas nos salen, ¿si? (los niños la observan). Pero yo voy a decir qué niño.

Para esto me van a tener que pagar dos monedas, vamos a hacer como que me pagan (hace señas con sus manos), ¿ok?

A ver, yo digo (camina hacia los niños)… Daniel, págueme dos monedas (el niño hace como si pagara a la maestra), ahora entonces Daniel va a meter la mano en la bolsa (el resto de niños sólo observa).

¿Qué sacó?

Comentarios

La formación de las docentes es de suma importancia, pues de los conocimientos, conceptos y dominio en las actividades y formas de acercamiento a los estocásticos que ellas posean, dependerá el éxito de la apropiación de las ideas de estocásticos por los niños, para que las actividades no queden sólo como reproducciones metódicas (Steinbring, 1991) sino que la docente promueva el logro de un ambiente social rico en aprendizajes.

Con el estudio dirigido a estocásticos se pretendía, precisamente, dotar a las docentes en formación de los elementos necesarios para empezar a considerar a la probabilidad y a la estadística como una alternativa para el desarrollo del pensamiento matemático infantil. Sin embargo, los resultados sugieren que es difícil romper esquemas deterministas ya arraigados en las estudiantes por su educación básica carente de estocásticos, por lo que es necesario continuar el fortalecimiento del pensamiento probabilístico desde toda la formación docente, para promoverlo en el aula con los niños. Para el logro de este objetivo la estrategia de monitorear los resultados del estudio dirigido por la práctica de enseñanza en el aula, para su análisis y reflexión de vuelta al estudio dirigido, es una vía favorable.

Referencias bibliográficas

Fischbein, E. (1975). *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children*. Holanda: Reidel.

Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematics* 6, 187-205

Maturana, H. (1995). *Desde la Biología a la Psicología*. Buenos Aires: Lumen.

Ojeda, A.M. (2006). Estrategia para un perfil nuevo de docencia: un ensayo en la enseñanza de estocásticos. *Matemática Educativa, treinta años*. (pp. 257-281). México: Santillana.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1951). *La génése de l'idée de hasard chez l'enfant*. Paris: PUF.

Steinbring, H. (1991). The Concept of Chance in Everyday Teaching: Aspects of a Social Epistemology of Mathematical Knowledge. *Educational Studies in Mathematics*. 22, pp. 503-522.

DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA Y PRÁCTICAS EFECTIVA DOCENTES: UN EJEMPLO AL INICIO DE LA ENSEÑANZA DE LA PROPORCIONALIDAD

Alicia Iturbe, Maria Elena Ruiz
Universidad Nacional del Comahue. Universidad Nacional de Río Negro. Argentina
aliciaitu@gmail.com, ruiz.melena@gmail.com

Resumen: Este artículo constituye un análisis de una de las situaciones surgidas en el contexto de una capacitación con docentes de nivel medio para estudiar la enseñanza de la proporcionalidad. Dicha capacitación se llevó a cabo con una metodología de investigación sobre la práctica. Esto permitió identificar distintas situaciones que ameritan ser analizadas, con el objeto de contribuir a la comprensión de la práctica docente, tanto en lo referente a producir el aprendizaje de sus alumnos como en lo que se refiere a las características que adquiere su trabajo profesional. En esta oportunidad nos centraremos en el caso de dos profesoras experimentadas que seleccionaron la misma actividad, "ampliación del rompecabezas", para iniciar la enseñanza de la proporcionalidad en segundo año del nivel medio, actividad que fue construida y muy estudiada por la "didáctica de la matemática".

Palabras clave: Proporcionalidad, prácticas de enseñanza, condicionamientos.

Abstract: This work analyzes a situation arising in the context of a teacher training for secondary school teachers. This teacher training was about teaching proportionality and we used a practice research methodology, which makes possible identified different situations for their analysis and made contributions to understand teacher's practice. In this text, we will focus in the case of two experimented teachers who work with the same activity: "broadening the puzzle". This one is an initiation at proportionality teaching activity for second year in secondary school, which was designed and extensively studied by "Mathematics Education".

Key words: Proportionality, teaching practices, conditioning.

Introducción

Constituyen antecedentes de este trabajo, investigaciones en didáctica de la matemática que ponen el acento en los docentes, como son, entre otras, las de Thompson (1992) que refieren a las concepciones de los docentes, otras que aluden a sus modos de acción y decisión, como las de Margolinas & Perrin (1997), o a sus conocimientos, como el caso de las investigaciones de Elbaz (1993) o Steffe (1990) o a sus prácticas como las de Roditi (2001) o Robert (2001). Varias investigaciones muestran preocupación por la utilización de los resultados de las investigaciones en didáctica de la matemática y su incidencia sobre las prácticas docentes, como es el caso de algunas ingenierías didácticas que a pesar de "su gran robustez", no son adoptadas, en general, por los docentes (Robert, 2005).

También son antecedentes de ese estudio, trabajos que hemos realizado anteriormente en formación inicial y continua de docentes, y en investigaciones alrededor de esta temática (Ruiz, 2005), (Iturbe- Ruiz, 2010).

En el año 2009 hemos realizado una capacitación con docentes de nivel medio cuyo objeto fue estudiar la enseñanza de la proporcionalidad. Dicha capacitación se desarrolló con una metodología de aula taller con la finalidad que los docentes elaboraran su proyecto de enseñanza, lo llevaran a la práctica y realizaran el análisis a posteriori. Las particularidades de esta instancia de Formación continua dieron lugar a que surgieran diferentes episodios, que hemos identificado y analizado con la intención de contribuir a la comprensión del funcionamiento de la tarea de enseñanza, de las decisiones que toman los docentes en sus clases y fuera de ella y de las razones de estas decisiones.

El Proyecto de investigación que enmarca la identificación y el análisis de estos episodios, estudia en líneas generales, la relación de los docentes o futuros docentes de Matemática con el saber matemático, dentro de las instituciones educativas, como así también la repercusión de ciertos condicionamientos en la toma de decisiones de los docentes.

La metodología empleada en dicha investigación, corresponde a un enfoque cualitativo, para el que se utilizaron, en la recolección de datos, observaciones de diferentes momentos del curso-taller (a través de registros escritos, grabaciones y/o filmaciones) y entrevistas semiestructuradas.

Descripción y análisis de un episodio

Un análisis de uno de los episodios seleccionados fue presentado en la RELME 24 bajo el título "Modos de acción y decisiones de los docentes. Un ejemplo en la enseñanza de la proporcionalidad" y publicado en ALME 24 (Iturbe y Ruiz, 2010, p.1047).

Para este artículo seleccionamos el caso de dos profesoras experimentadas que eligieron la misma actividad, "la ampliación del rompecabezas", para iniciar la enseñanza de la proporcionalidad en 2° año del nivel medio, en dos escuelas públicas.

Esta actividad, la "ampliación del rompecabezas", ha sido construida y muy estudiada por la "didáctica de la matemática". Fue elaborada por Brousseau (1981), con el objetivo de trabajar problemas de la didáctica de los decimales. Más tarde Regine Douady en su trabajo realizado con M.J.Perrin: "Los decimales" propone una actividad similar con el objetivo de reconocer y utilizar un modelo de proporcionalidad.

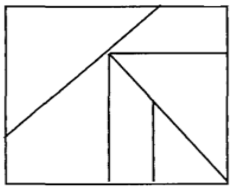
Las profesoras, en cuestión, convencidas de la potencia de esta actividad, la estudiaron y seleccionaron la siguiente versión, como primera actividad en su proyecto de enseñanza:

La ampliación del rompecabezas

"Deben recortar el rompecabezas que entregué a cada grupo, y cada uno de Uds. debe ampliar o reducir al menos una pieza, es decir, en un primer momento deberán trabajar en forma individual. Luego en forma conjunta, uniendo las piezas, arman el nuevo rompecabezas que deberá tener la misma forma que el modelo dado, pero de distinto tamaño."

El lado que mide 12,5 cm. en el modelo, en el nuevo rompecabezas debe medir:

Grupo1	Grupo2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5
15cm	25cm	20cm	10 cm.	6,25 cm.



En la planificación de la actividad, anticiparon y cuidaron los diferentes momentos: consigna, trabajo grupal, puesta en común e institucionalización. Durante este proceso fueron acompañadas en las reflexiones didácticas por los profesores del curso-taller.

En la puesta en obra de su proyecto de enseñanza, realizan intervenciones cuidadosas y los alumnos se involucran con la actividad, trabajan, discuten, lo cual es altamente valorado por ambas profesoras, según las palabras de una de las profesoras: *"…lo que sí me gustó fue que cada grupo intentó al menos dos o tres estrategias por más que no llegaban, yo los veía con carita de cansados y siguieron hasta el final,…"*. Más adelante la otra profesora señala *"después hice un análisis de cómo ellos eran honestos porque no escondían información, el cooperativismo que hubo, la solidaridad…"*.

A pesar que esta actividad fue preparada con mucho cuidado y que los alumnos se involucraron activamente en su resolución, una de las profesoras manifiesta un sentimiento de angustia y que ella percibe como "fracaso". Esta angustia surge porque después de dos clases con esta actividad no surge por parte de los alumnos la resolución del problema. Ella manifiesta en ese momento *"los veo muy cerrados en que hay que sumar, eso sí. Y mañana no sé, que caiga piedra o algo, que pase algo y se haga la luz…"*

Esta situación fue abordada en conjunto con los profesores del curso-taller, cuando la profesora asiste a un encuentro de consulta, en el que manifiesta que esta sensación de angustia la paraliza y no percibe cuál sería la forma para lograr, según ella misma lo expresa, *"el avance de los alumnos"*. En este encuentro se discute si no se podría considerar como un avance las diferentes estrategias que los alumnos utilizaron y la conclusión que esos procedimientos (aditivos) no resuelven el problema, por lo tanto son procedimientos a descartar en un problema de ampliación del rompecabezas. Esta mirada contribuye a que la profesora resignifique la secuencia planificada y pueda tomar decisiones a partir de ello.

Este episodio es el que hemos seleccionado para su análisis: a pesar que están dadas buenas condiciones, como ya lo hemos señalado, para llevar una actividad potente al aula, se produce una situación como la descripta que crea angustia y sensación de fracaso en una de las docentes. Ella describe esto cuando se realiza el análisis a posteriori de la puesta en obra del plan, durante el curso-taller: *"primer módulo, bárbaro, de acuerdo a lo que decía el material* [se refiere al material teórico estudiado en el curso (Ruiz y Detzel, 2000)] *los chicos iban a sumar, eso fue lo que ocurrió,… me quedé con que ese módulo terminó con el fracaso"*. Luego agrega *"en el segundo módulo, al día siguiente, siguieron con otras estrategias, pero terminó la clase y un solo grupo estuvo cerca de resolverlo pero tampoco lo resolvió. Entonces mi sensación fue, después de esos dos módulos, del fracaso al fracaso, del fracaso al fracaso* [haciendo alusión al título del material teórico referido anteriormente]. *Ahí sentí eso y yo me quería ir".*

Para el análisis de esta situación centramos nuestra atención en el momento que el profesor propone a sus alumnos un problema con el fin de introducir un nuevo concepto. Este momento ha sido particularmente trabajado en didáctica de la matemática desde teorías como la dialéctica herramienta-objeto (Douady, 1986) o en la Teoría de las situaciones (Brousseau, 1993).

A. Robert (2003) se refiere a los problemas seleccionados para tal fin momento como "problemas de introducción". Con relación a la puesta en clase de estos problemas aclara que el docente debe dejar que los alumnos se involucren en la investigación del problema, que debe hacer una síntesis del trabajo realizado y apoyarse sobre esta síntesis para exponer él mismo los conocimientos descontextualizados. Agrega, además, que esto requiere una parte de improvisación puesto que no se puede prever exactamente lo que los alumnos van a producir, lo que exige al docente, una preparación precisa de la clase, una vigilancia y una tensión permanente durante el desarrollo de la clase. Por otro lado, agrega que no es seguro que se perciba en forma inmediata los resultados en términos de aprendizaje, ya que aunque los alumnos muestren satisfacción con el trabajo que realizan, generalmente en grupos, cada sesión de ese tipo es siempre muy larga, toma tiempo de aprendizaje. En general, el primer obstáculo evocado unánimemente por los docentes, para rechazar actividades de introducción es el tiempo. Finalmente, Robert (2003) puntualiza que los docentes no se pueden permitir usar toda su energía constantemente así y distingue a secuencias con estas características como "desarrollos bajo tensión".

Otro aporte teórico que es útil para este análisis es el de los "determinantes de las prácticas de los docentes en las clases" (Robert & Rogalski, 2002, en Robert, A, 2003, p.105), que pueden ser analizados desde las dimensiones institucional, social y personal. En este sentido y en relación al caso que nos ocupa, uno de los determinantes o condicionamientos sociales que creemos podría explicarlo es cuando los autores señalan que, para los docentes, es necesario que el tiempo didáctico, se refieren al curso, avance según la percepción de los alumnos, que haya algo de nuevo y que suficientes alumnos tengan éxito (Robert y Rogalski, 2002).

Por otro lado, Roditi (2001), en su tesis doctoral, mostró más precisamente, que en las clases funcionan especies de principios que tienen fuerza de ley, por ejemplo el principio de clausura (cierre), hace alusión a que "algo" debe poder ser identificado como habiendo sido obtenido en una hora de trabajo.

Regine Douady (1986) aborda también el tema de la incertidumbre del enseñante al llevar a cabo situaciones a-didácticas, ya que las mismas plantean dudas sobre los contenidos que se podrán institucionalizar y sobre el momento de institucionalizar. Estas situaciones exigen prever otro ordenamiento del tiempo escolar, pues requieren una prolongación del tiempo de trabajo del alumno a corto plazo y a mediano plazo (que preocupa al maestro) la trayectoria real global de la clase peligra con desviarse notablemente de la trayectoria prevista. Podríamos considerar que la situación vivida por la profesora, cuando siente un gran alivio ante la tensión, luego de identificar que desterrar el procedimiento de suma ya era un gran avance para los alumnos en términos de aprendizaje, es un buen ejemplo de esto.

Detzel y Ruiz (2000) al trabajar sobre el funcionamiento de esta actividad (ampliación del rompecabezas) en el aula aclaran que generalmente los docentes, por una cuestión de tiempo, priorizan el tratamiento de nociones matemáticas que son soluciones para determinados problemas, pero rara vez destinan clases para desterrar un procedimiento. Sin embargo, para este problema, esto representa un avance muy importante en los alumnos para poder comenzar el estudio de la proporcionalidad. Se estaría priorizando, así, el aprendizaje, pero es necesario reflexionar sobre esto para que desde el punto de vista de la enseñanza no quede en el docente la sensación que no enseñó nada.

Conclusiones

El estado de la investigación planteada, nos permite expresar algunas conclusiones en relación a la formación continuación y a la investigación educativa:

- En la formación continua no se trataría solo de hacer adquirir conocimientos matemáticos o pedagógicos, sino que habría que trabajar las prácticas efectivas de los docentes y articular los aportes que surgen de esas prácticas con los aportes teóricos de la didáctica. Pensar en una formación "en las prácticas", partiendo de las prácticas, y que el aporte "teórico" sea necesariamente abordado en referencia al terreno. Así, si se trabaja sobre lo "cognitivo" (enunciado de un ejercicio, por ejemplo), tratar al mismo tiempo lo meditativo, es decir lo que pasa en la clase, como por ejemplo los condicionamientos que impiden proponer tal modo de desarrollo y trabajar en la gestión de las fases idealmente a-didácticas.

- En cuanto a la investigación, se trataría de identificar a la vez lo que es necesario en las proposiciones didácticas y lo que juega como obstáculo para su adopción. De esta manera se podría pensar en modificar las secuencias o producir materiales, estrategias didácticas, que puedan influir explícitamente sobre los hábitos de los docentes. Consideramos también, que una familiaridad mayor de muchos docentes, con algunos de los análisis del tipo de los que presentamos en este trabajo (análisis de sus propias prácticas, de sus elecciones, de las decisiones que toma, etc. a la hora de organizar su tarea de enseñanza) podría favorecer la adopción de las propuestas producidas por investigaciones realizada en el campo de la enseñanza y aprendizaje de la matemática.

Referencias bibliográficas

Brousseau, G. (1981). Problémes de didactique des décimaux, *Recherches en Didactique des mathématiques* 2(001), 11-59.

Brousseau, G. (1993). Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática, *Trabajos de Matemática.* Serie B, 19. Fa.M.A.F. U.N. Córdoba. Argentina.

Detzel, P. y Ruiz, M. (2000). El éxito del fracaso o fracaso del éxito: análisis de una actividad de enseñanza de la matemática. *Boletín de la Sociedad Argentina de Educación Matemática*, 7, 31-38.

Douady, R. (1986). Jeux des cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en Didactique des mathématiques* 7(002), 5-31.

Elbaz, F. (1993). La recherche sur le savoir des enseignants: l´enseignante experte et l´enseignante 'ordinaire'. En G. Clermont, M. Melloudi y M. Tardiff (com), *Le Savoir des enseignants. Que savent-ils?* (pp.101-114). Canadá: Les Éditions LOGIQUES.

Margolinas, C. & Perrin-Glorian, M. J. (1997). Des Recherches visant à modéliser le rôle de l`enseignant. *Recherches en Didactiques des Mathématiques 17*(3), 7-15.

Robert, A. & Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques: une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies 2(4)*, 505-528.

Robert, A. (2003). De l`idéal didactique aux déroulements réels en classe de mathématiques: le didactiquement correct, un enjeu de la formation des (futurs) enseignants (en collège et lycée). *Didaskalia 22*, 99-116.

Robert, A. y Pouyanne, N. (2005). Formar Formadores de Maestros de Matemáticas de Educación Media: ¿Por qué y cómo? *Educación Matemática* 17(002), 35-58.

Roditi, E. (2001). *L'enseignement de la multiplication des décimaux en sixième : étude de pratiques ordinaires.* Thèse de doctorat, Université Paris 7.

Steffe, L. (1990). On the knowledge of mathematics teachers. En R. B. Davis, C. A. Maher y N. Noddings (eds). *Constructivist Views on the Teaching and Learning of Mathematics* (pp 167-184), Virginia: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Thompson, A. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: a synthesis of the research. En D.A. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.127-146), New York: Macmillan.

ESTUDIO DEL TRABAJO GEOMÉTRICO: UNA MIRADA AL PROFESOR

Romina Menares, Elizabeth Montoya
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile
menares.romina@gmail.com, emontoya@ucv.cl

Resumen: El presente estudio atiende fundamentalmente a las concepciones que tienen los docentes sobre las demostraciones, específicamente en Geometría.

La investigación tuvo como objetivo fundamental estudiar la epistemología del profesor frente al trabajo geométrico; conocer cuáles argumentaciones constituyen para él una demostración.

El análisis realizado se sustenta en un marco en el cual se articulan dos teorías: la de Paradigmas Geométricos y Espacio de Trabajo Geométrico, de Houdement y Kuzniak, y la teoría de Razonamiento de Duval, y se llevó a cabo mediante un cuestionario a profesores de enseñanza básica y media en ejercicio.

Palabras clave: Epistemología del profesor, paradigmas geométricos.

Abstract: The present study attends fundamentally to the conceptions that the teachers have on the demonstrations, specifically in Geometry.

The investigation had as fundamental aim the study of the epistemology of the teacher in the geometric work; to know which argumentation constitutes for them a demonstration.

The analysis we have done is sustained in a frame in which two theories are articulated: Geometric Paradigms and Geometric Working Space, of Houdement and Kuzniak, and the theory of Duval's Reasoning, and they were carried out by means of a questionnaire applied to a total of 50 teachers of basic and average education currently working.

Key words: Teacher epistemology, geometric paradigms.

Introducción

El presente escrito se enmarca en mi trabajo de tesis de magíster: *"Estudio del Trabajo Geométrico, Tipos de Argumentaciones y Demostración en Geometría: La Mirada al Profesor"*. El estudio atiende fundamentalmente a las concepciones de los docentes sobre las demostraciones en el eje Geometría.

El actual marco curricular chileno propone que:

> La formación matemática debe enfatizar el desarrollo del pensamiento creativo y crítico para la formulación de conjeturas (...) resolver, formular conjeturas, verificar la validez de procedimientos y relaciones; para casos particulares o en forma general-en cuyo caso se usará el verbo demostrar-está en el núcleo de las experiencias de aprendizaje deseables. (MINEDUC, 2009, p. 146)

Sin embargo, en nuestra experiencia como docentes en postítulos para profesores de enseñanza básica y media y observaciones de clases, hemos evidenciado que las tareas que proponen a sus estudiantes tienen objetivos muy distintos a los de demostrar, e incluso escasamente se pide argumentar, validar, comprobar o formular conjeturas.

Por otro lado, en diversos estudios sobre los resultados de los estudiantes chilenos en pruebas nacionales e internacionales, como SIMCE y TIMSS 2003, se han detectado dificultades en Matemática, específicamente, en el área de Geometría, además se hace referencia a la poca confianza que sienten algunos profesores a la hora de enseñar Geometría (MINEDUC, 2004, 2009).

La investigación tiene como objetivo general estudiar la epistemología del profesor frente al trabajo geométrico; si el docente da lugar a las construcciones en geometría, si realiza manipulaciones con material concreto, conocer cuáles son los argumentos que considera válidos, y cuáles constituyen para él una demostración en este eje.

Problemática

En la enseñanza de la Matemática es incuestionable que el profesor es una pieza fundamental. Informes de la OCDE afirman que para mejorar la calidad de la educación se debe mejorar la formación de los docentes, pues lo que suceda en una situación de enseñanza depende directamente de sus propias decisiones.

En el colectivo escolar chileno, un discurso usual es que los profesores suelen dejar de lado la geometría (Montoya, 2009), el trabajo geométrico es desplazado y se tiende a dejar para el final del curso o simplemente no se trata.

Diversas evaluaciones nacionales, entre ellas el SIMCE 2003, han revelado que de los contenidos evaluados en cuarto año de enseñanza básica (estudiantes de 9 a 10 años) y en segundo año de enseñanza media (estudiantes de 15 a 16 años), el 68% de los profesores de cuarto año básico se sienten "muy bien preparados" para enseñar matemática. Cuando se pregunta por los contenidos de manera detallada, en cuarto año se observa que el contenido más débil es orientaciones en el espacio, versus el más alto con 86%, correspondiente a adición y sustracción, (MINEDUC, 2003).

Según el mismo estudio, en cuarto básico la formación de figuras a partir de triángulos y cuadriláteros fue trabajado completamente solo por un 29% de los docentes, lo mismo ocurre con la construcción combinando cuerpos. En el caso de los profesores de segundo Año Medio, un 33% declaró no haber enseñado geometría y probabilidades. Los porcentajes fueron los siguientes para algunos contenidos de geometría: criterios de semejanza en figuras planas: 31%, reconocimiento de figuras semejantes: 38%, resolución de problemas aplicando el Teorema de Thales: 36% y ángulos en la circunferencia: 29%. Además estas unidades, que son las que los profesores enseñan menos, coinciden con aquellas que declaran sentirse menos preparados, (MINEDUC, 2003).

Según el actual estudio de evaluación de aula en enseñanza básica y media realizado por el Ministerio de Educación, "los contenidos asociados con Geometría reciben una menor atención, especialmente en 2° y 4° básico. Desde 6° básico a 2° medio reciben una dedicación algo mayor, para ser luego evaluado de manera prácticamente nula en 4° medio" (MINEDUC, 2009, p. 8).

En relación a lo anterior, algunas de las conclusiones de la participación de Chile en el TIMSS 2003 señalan que los propios docentes chilenos aseveran que su énfasis en el proceso de enseñanza está en la ejercitación numérica, privándose a los alumnos del estudio de aspectos importantes del currículum, como Álgebra y Geometría. Este estudio revela que en Chile, el 73% de los maestros afirma que privilegia la enseñanza de las 4 operaciones matemáticas básicas sin calculadora, mientras que el promedio internacional es de 62%.

Por otro lado, el actual marco curricular chileno propone que resolver, formular conjeturas, verificar la validez de procedimientos y relaciones para casos particulares o en forma general debe ser central en la enseñanza; incluso ya desde Tercer Año Básico aparecen habilidades como "Formular y verificar conjeturas, acerca de la relación entre la adición y la multiplicación (...)", y específicamente en Geometría: "(...) acerca de la posibilidad de construirlos (los cuerpos geométricos) a partir de ellas (de las redes)"(Ibíd, p.156) , sin embargo, en nuestra experiencia como docentes en postítulos para profesores de enseñanza básica y media y observaciones de clases, hemos evidenciado que las tareas que los profesores proponen a sus estudiantes tienen objetivos muy distintos a los de demostrar, e incluso escasamente se pide argumentar, validar, comprobar o formular conjeturas.

Creemos que la estrecha relación que tiene la Geometría que se trata a nivel escolar con la realidad, hace que las representaciones de los objetos se ajusten muy cercanamente al objeto en cuestión, entonces surge el problema de confundir demostraciones con las comprobaciones mediante mediciones o el uso de otro tipo de instrumentos, en casos particulares.

La investigación tiene como objetivo fundamental estudiar la epistemología del profesor frente al trabajo geométrico; conocer cuáles son los argumentos que considera válidos, y las concepciones de los docentes sobre las demostraciones. En este último aspecto investigaciones dan cuenta de que esta noción no es única entre matemáticos. (Dreyfus, 2000, Barra, 2010)

El estudio realizado por Araya (2008), evidencia que en no se realizan demostraciones matemáticas ni razonamiento deductivo en las clases. En este trabajo, se caracterizaron los saberes pedagógicos y el conocimiento de la disciplina en profesores de Enseñanza Básica y de Enseñanza Media en Chile. En el estudio se analizaron 720 videos (autorizados voluntariamente) de clases de matemáticas de profesores que se sometieron a la evaluación docente en el año 2005.

Por otro lado, problemáticas asociadas a la argumentación y demostración han sido objeto de estudio por diferentes grupos de investigación (Duval 1995, Balacheff 1987) con perspectivas cognitivas, lingüísticas como también epistemológicas. La revista en línea “La letra de la prueba” y tesis doctorales muestran el interés en esta temática. Por otro lado, el congreso ICMI Study 19: Proof and Proving in Mathematics Education, fue totalmente consagrado al estudio de las demostración y las pruebas en Matemáticas. Se aprecia en este congreso una variedad de trabajos en cuanto a la enseñanza de la demostración en el curriculum escolar, y en desarrollar una cultura frente a la demostración en el aula en todos los niveles educativos.

Para dar las directrices a nuestra investigación, planteamos las siguientes preguntas: ¿Cuáles son los argumentos considerados válidos por el profesor?, ¿qué tipo de argumento es considerado como una demostración por el profesor?, ¿existe un tránsito en el trabajo geométrico del profesor por distintas formas de argumentar, pasando desde la manipulación con material concreto, el uso de otro tipo de instrumento geométrico, hasta el razonamiento matemático? A continuación presentaremos el marco teórico que sustenta nuestro estudio y la metodología usada para llevarlo a cabo.

Marco Teórico

El análisis realizado se sustenta en un marco en el cual se articulan dos teorías: La primera es la de “Paradigmas Geométricos y Espacio de Trabajo Geométrico” de C. Houdement y A. Kuzniak (1996, 1999, 2000, 2006), que se refiere a los paradigmas como una forma de desarrollar el conocimiento de la geometría en una comunidad escolar, caracterizando los problemas y ejemplos que se entregan a los estudiantes, reconociendo tres Geometrías: Geometría Natural GI, Geometría Axiomática Natural GII, y Geometría Axiomática Formal GIII. Kuzniak (2004, 2011) propone que ser geómetra es no confudir una evidencia nacida de la intuición con una información nacida de la experimentación, y el resultado de una experimentación con la conclusión de un razonamiento.

La segunda teoría que sustenta la investigación es la de Razonamiento de R. Duval (1995), donde el estudio se centró en cuáles son para el profesor argumentaciones válidas y cuáles considera demostración.

El concepto de paradigma geométrico se compone de tres ejes, inspirados por distintas corrientes; por un lado la de Kuhn, que apunta a una mirada filosófica, por otro lado la epistemológica, tanto de la matemática como de la organización de esta en el sistema escolar, y finalmente la de Gonseth, enfocada a lo cognitivo.

Estos tres ejes nos permitirán definir tres paradigmas geométricos que de igual modo co-existen en el sistema escolar. Centrándonos en el ambiente didáctico, la teoría propone que se reconozca la existencia de diversos paradigmas geométricos, y que los estudiantes transiten intencionadamente entre estos. (Kuzniak, 2004, 2011)

Paradigmas geométricos

a) *Geometría natural (GI):*

Permite la relación con el mundo real y sensible como fuente de validación. En esta Geometría los argumentos que apoyan una afirmación se basan en la experimentación y la deducción. Existe poca distinción entre el modelo y la realidad y se permiten todos los argumentos para justificar una afirmación o convencer a otros de lo contrario. Las afirmaciones son probadas mediante un ir y venir entre el modelo y la realidad; lo más importante aquí es desarrollar argumentos convincentes. Las pruebas pueden apoyarse en dibujos o en observaciones realizadas con el uso de instrumentos de medición, tales como regla, compás o transportador. Los dobleces o cortes de dibujos también son permitidos como pruebas visuales. El desarrollo de esta geometría fue motivado históricamente por problemas prácticos y la perspectiva de esta geometría es de carácter tecnológico.

b) *Geometría axiomática natural (GII):*

La Geometría II, cuyo arquetipo es la Geometría euclidiana clásica, es construida sobre un modelo cercano a la realidad. Una vez que los axiomas se establecen, las pruebas deben ser desarrolladas dentro del sistema de axiomas para ser válidas, pero el sistema de axiomas puede ser incompleto y parcial: el proceso axiomático es un trabajo en curso. En esta Geometría, objetos como figuras existen solo mediante su definición, incluso si esta definición está basada en algunas características de objetos verdaderos y existentes. Al igual que la Geometría I, tiene un vínculo estrecho con el mundo real, pero de diferente forma.

c) *Geometría axiomática formal (GIII):*

Para la Geometría III es central el sistema de axiomas; la desconexión con la realidad. El sistema de axiomas es completo e indiferente a cualquier uso posible en el mundo real. Está más preocupado de problemas lógicos y tiende a completar axiomas "intuitivos" sin ninguna "llamada" a evidencias perceptivas. Además, los axiomas son organizados en familias que estructuran propiedades geométricas: afín, euclidiano, descriptivo, etc.

Cada una de estas geometrías manifiesta diferentes formas de abordar el problema geométrico, lo que genera un ambiente o espacio de trabajo geométrico (ETG), que se define como un ambiente organizado por y para el geómetra mediante la articulación de tres componentes, a saber: el modelo geométrico, el espacio local y real y los artefactos, que son descritas a continuación:

- *Espacio local y real*: relacionado con la intuición y la abstracción que se hace del objeto.
- *Espacio referencial teórico:* conjunto de propiedades y definiciones articuladas por los axiomas, lo que determina el modelo geométrico.
- *Artefactos:* todo lo que el geómetra utilice para manipular los objetos.

Las componentes solas no son suficientes para comprender el espacio de trabajo ya que va a depender de la concepción que el utilizador le atribuya. Este espacio depende fuertemente de una dimensión cognitiva (plano cognitivo), estructurado en términos de tres procesos: *Visualización, prueba y construcción.*

Dependiendo de la relación que el geómetra tenga con la geometría y la función de su reflexión cuando se enfrenta a un problema, se distinguirán tres diferentes espacios de trabajo geométricos.

- *ETG de referencia:* entorno a la relación con el saber. Es considerado como el ETG de la comunidad de matemáticos. (Montoya, 2010)
- *ETG idóneo*: espacio definido en términos didácticos, el utilizador natural de este es el profesor. Este ETG se relaciona básicamente con la organización didáctica que hace la institución o bien el profesor a nivel micro. (Montoya, 2010).

ETG personal: espacio fruto de la reflexión entre lo aprendido previamente y la puesta en práctica de ello de acuerdo a sus conocimientos matemáticos y sus capacidades cognitivas. (Montoya, 2010)

Como ya se mencionó, articulamos la teoría de Houdement y Kuzniak con la de Razonamiento de Duval para enriquecer el estudio del plano cognitivo.

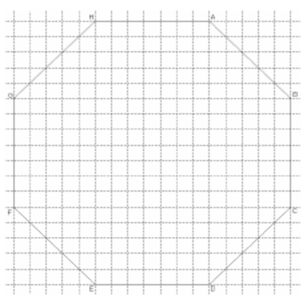
Duval reconoce dos tipos de razonamiento: inferencia explícita y actos de exploración. Las actividades de razonamiento de inferencia explícita, están ligadas al lenguaje; permiten redactar información, rechazar o aceptar una proposición, por otro lado se encuentran los actos de exploración los cuales no están ligados al lenguaje, son acciones, manipulaciones y operaciones concretas. Una de las formas de razonamientos ligadas al lenguaje es la argumentación, que tiene como característica esencial no tener restricciones de organización que les sean inherentes en toda práctica espontánea del discurso. La organización discursiva de una argumentación obedece a criterios de pertinencia y no a criterios de validez. Hay una ruptura cognitiva profunda entre los razonamientos argumentativos que tratan de convencer, y los razonamientos demostrativos que prueban; aquellos que tiene un funcionamiento lógico y un razonar válido, es decir existe deducción que no está ligada al valor epistémico del enunciado. (Duval, 1995)

Metodología

Para recopilar información, se elaboró una encuesta que fue aplicada el mes de mayo de 2009 a 48 profesores de Enseñanza Básica y Media que dictan o han dictado el curso de Matemática y que cursaban un Postítulo de Matemática del Programa de Educación Continua para el Magisterio, de la Universidad de Chile. Cada pregunta apuntaba a conocer: la relevancia que el profesor otorga al estudio de la unidad de Geometría frente a las otras unidades en Matemática y la importancia que le da el profesor a la demostración en Geometría a nivel escolar, qué tipos de argumentos el profesor considera válidos en preguntas genéricas; si permite el uso de instrumentos y de cuáles, si privilegia el uso de propiedades y teoremas. En la última pregunta el profesor fue enfrentado a una demostración, para conocer su propio trabajo geométrico. A continuación se presentará una de las preguntas planteadas en este cuestionario, donde se les pide a los profesores que evaluaran estas respuestas y señalaran cuáles de ellas las catalogaría como demostración.

En una clase se presentó el siguiente problema:

La figura se ha dibujado sobre un papel cuadriculado. El octógono ABCDEFGH, ¿es regular?



Las respuestas de tres estudiantes fueron las siguientes:

1. Julia
   Con el compás, se constata que GH = HA = AB = BC = CD = DE = EF = FG donde los lados del 8 lados del octógono tienen el mismo largo. Trazamos 4 diámetros de círculo: $\overline{HD}$, $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$. Sea O el punto de intersección de estos diámetros. Trazamos el círculo de centro 0 y radio OH y podemos ver que todos los puntos, H, A, B, C, D, E, F están sobre el círculo. Entonces el octógono está inscrito en el círculo.

2. Carlos
   Utiliza en un primer momento el teorema de Pitágoras y llega a la conclusión que $5\sqrt{2} \approx 7$ y entonces AB = CB
   Después borra esta demostración y propone una demostración que pasa por la construcción de las diagonales y el centro del circulo circunscrito

3. Silvia
   En la figura 2 el octógono es regular. En efecto, sus 8 vértices tienen el mismo ángulo de 135° y sus lados la misma medida 2,1 cm. Además, está inscrito en un círculo, donde el centro es la intersección de los segmentos que unen todos los vértices opuestos.

Extraído de Seminario de Graduación. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

A priori pensamos que el profesor no considerará distintos tipos de argumentaciones y que no haría la diferencia entre prueba y demostración. Además pensamos que el profesor seleccionará como demostración un argumento donde exista un buen uso de los instrumentos, como que si se tratase, que una buena construcción valida y conforma una demostración. También pensamos que podían existir casos en los que el docente solo considerará como argumento válido el encadenamiento de axiomas, propiedades y definiciones.

Resultados

Respecto a los resultados obtenidos, se pudo concluir que la mayoría de los profesores no hace la distinción entre una argumentación y una demostración, sino más bien para ellos un buen uso de los instrumentos de medición conformará una demostración. De los profesores encuestados, alrededor del 16% hace una diferencia entre usar solo regla y compás y utilizar el transportador; la primera la aceptan como demostración, mientras que rechazan la segunda como medio para demostrar. Por ejemplo, el profesor P17 señala sobre una producción donde solo se utiliza compás: *"es una demostración pues comprueba con Pitágoras y demuestra con construcciones"*, o el profesor P10 afirma: *"es demostración, pues ha utilizado compás y regla no graduada"*. Un grupo de aproximadamente el 22% de los profesores encuestados, califican los argumentos según el buen o mal uso de propiedades; validan el argumento, y lo consideran demostración, cuando se han verificado las hipótesis de las propiedades y teoremas y se concluye con ellos, sin importar el instrumento utilizado. Por ejemplo, el profesor P19 afirma que la producción de Julia *"es demostración porque está fundamentada en propiedades de un polígono regular"*, mientras que de la producción de Carlos señala que *"no está claro cuál o cuáles son los fundamentos requeridos"*. El profesor P18 afirma que la producción de Carlos no es una demostración pues *"faltan antecedentes para el uso de propiedades",* mientras que para él, la producción de Julia sí es una demostración.

De los 48 profesores encuestados, solo el 18% aproximadamente, señala que las producciones que usan instrumentos geométricos no son demostraciones, más bien las califican como "comprobaciones" o "verificaciones". Por ejemplo, El profesor P25 afirma sobre la producción de Julia: *"no es una demostración, es una verificación porque llega a la conclusión luego de tomar medidas y verificar con los elementos que posee".* Cabe aclarar que a los profesores solo se les pregunta si se trata o no de demostraciones, por lo tanto, explícitamente no sabemos si estas argumentaciones las consideran válida o no.

Solo 33 de los 48 profesores encuestados respondieron a la pregunta que apuntaba a su propio trabajo geométrico. Dentro de los resultados se observan frecuentemente dificultades en el reconocimiento de las hipótesis y la tesis; existen confusiones en "lo que se tiene" y "lo que se quiere demostrar". Aproximadamente el 20 % de los 33 profesores responden la pregunta por medio de la visualización, se observan respuestas como: "*las rectas son paralelas porque jamás se cortarán*", y alrededor del 15% profesores responden a la pregunta midiendo con instrumentos. Otro 15% aproximadamente, realiza una demostración, y lo hacen por reducción a lo absurdo. Además existe un grupo que intenta demostrar utilizando teoremas y propiedades pero fracasan, sin embargo esto nos dice que al parecer los docentes, en su propio trabajo geométrico, reconocen la diferencia entre un razonamiento "pragmático" y una demostración, pero la exigencia no es la misma para sus alumnos. Se podría decir entonces que la mayoría de los profesores trabaja en el paradigma GI, mientras que solo el 15% lo hace en el paradigma GII.

A nivel de las pruebas, la concepción de demostración no es única y es influenciado por la visualización y el empleo de artefactos. Los docentes conforman un espacio de trabajo geométrico donde distintos paradigmas cohabitan (conscientes o no de ello) lo que permitiría que sus propios estudiantes no logren un tránsito intencionado y profundidad del trabajo geométrico.

Conclusiones

Luego de realizado el trabajo podemos reflexionar acerca del aporte de clasificar los problemas planteados en geometría. La intención de transitar por los distintos paradigmas posiciona al trabajo geométrico en distintos ambientes; por un lado, reconoce la relación de la geometría tratada a nivel escolar con la realidad, promoviendo el uso de artefactos manipulables y formas de argumentar a través de la experiencia y permite además tratar a la geometría como parte de la matemática.

Referencias bibliográficas

Araya, R. (2008). *Saber Pedagógico y Conocimiento de la Disciplina Matemática en Profesores de Educación General Básica. Proyecto FONIDE.* Santiago: Departamento de Estudios y Desarrollo. Ministerio de Educación.

Balacheff, N. (1987), Processus de preuve et situations de validation, *Educational studies in mathematics, 18,* n°2,147-176.

Barra, M. (2010). *El rol que cumple la demostración en el aula, desde la mirada del profesor que imparte cursos de matemática, en las carreras de Ingeniería, Pedagogía en Matemática y Licenciatura en Matemática.* Tesis de maestría no publicada, Instituto de Matemática de la PUCV. Chile.

Dreyfus, T. (2000). La demostración como contenido a lo largo del curriculum. En Gorgorió, N., Deulofeu, A. y Bishop, A. (Coords.). *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional.* Barcelona: Graó, S. L., 125-133.

Duval, R. (1995). *Semiosis y Pensamiento Humano*. Paris: PeterLang S.A. Editions scientifiques européennes.

Houdement C., Kuzniak A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives. 11.* 175-193. IREM de Strasbourg.

Houdement C., Kuzniak A. (1999). Géométrie et paradigmes géométriques. *Petit x. 51*. 5-21. Ed. IREM de Grenoble.

Houdement, C. Kuzniak A. (1996). Autours des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques, *Recherches en didactique des mathématique*, *16*(3), 289-321.

Kuzniak, A. (2004). *Paradigmes et espaces de travail géométriques. Note pourl'habilitation à diriger des recherches*. Paris: IREM Paris 7.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 16,* 9-24.

Kuzniak, A. (2011). Understanding geometric work through its development and its transformations. *Laboratoire de Didactique André Revuz, University Paris-Diderot, Paris, France.*

MINEDUC (2003; 2007; 2009), *Presentación Sistema de Medición de la Calidad de la Educación*. Santiago: SIMCE por la Unidad de Currículo y Evaluación. Ministerio de Educación.

MINEDUC (2004). Resultados de los estudiantes chilenos de Octavo Básico en el TIMSS 2003, Santiago de Chile.

Menares, R. (2009). *Estudio del Trabajo Geométrico, Tipos de Argumentaciones y Demostración en Geometría: La Mirada al Profesor.* Tesis de Maestría no publicada, Instituto de Matemática de la PUCV. Chile.

Montoya E. (2010). *Etude de la transformation des connaissances géométriques dans la formation universitaire des professeurs de lycée de mathématiques au Chili*. Tesis de Doctorado no publicada, Université París Diderot-Paris 7.

OCDE. (2003). *Informe de las políticas educacionales en Chile*. Recuperado el 01 de marzo de 2009 de http://www.mineduc.cl/biblio/documento/Texto_Libro_OCDE1.pdf

CONCEPCIONES DE LOS PROFESORES ACERCA DE LAS ACTITUDES QUE PRODUCEN LOS PROBLEMAS PLANTEADOS EN LOS LIBROS DE TEXTOS DE MATEMÁTICAS DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Santiago Ramiro Velázquez, Josip Slisko Ignjatov, Hermes Nolasco Hesiquio
Universidad Autónoma de Guerrero, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. México.
sramiro@prodigy.net.mx, jslisko@fcfm.buap,nolascohh.@hotmail.com

Resumen: En este artículo reportamos los primeros resultados de un estudio de las concepciones de los profesores sobre los problemas y ejercicios planteados en los libros de texto de matemáticas en educación secundaria, en términos de las actitudes positivas o negativas que pueden producir en los alumnos. Hemos analizado distintos trabajos que abordan esta problemática, en el sentido de que los problemas propuestos en los libros de texto generan gusto o rechazo a las matemáticas, en dependencia de los contextos en los que están inmersos. También se reporta el reconocimiento que hacen a estos problemas ocho profesores de este nivel educativo quienes describen las razones por las que un problema genera uno u otro tipo de actitud. En el futuro próximo, se plantea que los problemas discutidos serán resueltos por los alumnos, constatando las conjeturas de los profesores.

Palabras clave: Concepciones, actitudes matemáticas, contextos.

Abstract: In this paper we report first results of a study related to the teachers' conceptions about the problems and exercises outlined in textbooks of mathematics in secondary education in terms of positive or negative attitudes that can result in students. We analyzed different works that address this issue, in the sense that the problems posed in the books generate liking or rejection of mathematics, depending on the contexts in which problems are immersed. Recognition is also reported that make these problems, eight teachers at this level who will describe the reasons why a problem generates one or another type of attitude. In near future, discussed problems will be solved by the students, verifying the assumptions of teachers.

Key words: Conceptions, attitudes toward mathematics, contexts.

Introducción

Las concepciones de los maestros y profesores sobre diferentes elementos de la enseñanza y del aprendizaje de las matemáticas forman últimamente una importante línea de investigación. Los temas abordados son muy diversos y van desde los conocimientos matemáticos específicos (Ribeiro, Monteiro y Carrillo, 2010) y el uso del software dinámico para demostraciones matemáticas (Torregrosa, Haro, Penalva y Linares, 2010) hasta las concepciones sobre el papel de la evaluación (Coll y Remesal, 2009) y de la resolución de problemas en la educación matemática (Contreras, 1999).

En este trabajo se dan a conocer los primeros resultados de un estudio en el que algunos profesores reconocen problemas o ejercicios de los libros de texto de educación secundaria, que producen actitudes positivas o negativas en los alumnos. El estudio se enfoca a las explicaciones de los profesores donde expresan las razones, por las que esos problemas o ejercicios producen las referidas actitudes.

De acuerdo al Diccionario Ilustrado Trillas, una actitud es postura, situación y disposición de los diferentes estados anímicos de una persona. Alsina, Fortuny y Pérez (1997) consideran que las actitudes se refieren a la apreciación de las matemáticas y a la organización y hábitos de trabajo en esta asignatura.

Por su parte, en la secuencia y organización de contenidos (SEP, 1994) se sostiene que el aprendizaje de las matemáticas está encaminado a la apropiación de conocimientos, desarrollo de habilidades y formación de actitudes como el respeto, la perseverancia y la autonomía. En tanto, en los programas de estudio de matemáticas de educación secundaria se expresa que "mediante el estudio de las matemáticas se busca que los niños y jóvenes asuman una actitud positiva hacia el estudio de esta disciplina" (SEP, 2006, p. 7). Nosotros sostenemos que el interés de los alumnos por construir, aplicar y difundir saberes matemáticos, la búsqueda permanente del conocimiento y asumir la responsabilidad de sus acciones en el ámbito de las matemáticas, constituyen actitudes positivas. Al contrario, la indiferencia, la escolarización, el rechazo y la imposición de criterios dan cuenta de actitudes negativas. Postulamos, además, que los saberes conceptuales, procedimentales y actitudinales se construyen conjuntamente y conforman conocimientos en movimiento que devienen en competencias matemáticas.

El objetivo de la investigación en proceso, cuyos resultados iniciales se reportan en este escrito, consiste en la exploración de las concepciones de los profesores acerca de las actitudes que producen en los alumnos algunos problemas y ejercicios de los libros de texto. Para lograrlo se propone a ocho profesores de escuelas secundarias de Acapulco, Guerreo, que reconozcan en los libros de texto autorizados por la SEP problemas o ejercicios que, a su juicio, pueden producir este tipo de actitudes en los alumnos, y que argumenten sus respuestas. Posteriormente se propondrán para ser resueltos por los alumnos de esas escuelas, para evidenciar experimentalmente las actitudes que se producen.

Antecedentes

La importancia del libro de texto, en general, y el de matemáticas en particular, como recurso básico para el profesor y los alumnos, queda de manifiesto en las diversas y cuantiosas investigaciones que se han desarrollado en los últimos años, que explican la relevancia de estos materiales escolares en la actividad que se desarrolla en el aula (Serrano, 2010; Gómez, 2011; Monterrubio y Ortega, 2011). De manera que las limitaciones o errores que tengan pueden ser reproducidos por miles de alumnos y profesores, quienes son los principales usuarios. De ahí la trascendencia de leerlos con mirada crítica a fin de no hacer la referida reproducción y contribuir a su perfeccionamiento. Los ejercicios y problemas propuestos en los libros de texto conforman una de sus partes principales, por tal razón el presente trabajo se enfoca al análisis de dicha parte considerando las actitudes que producen.

Santanero (2011) hace una amplia investigación sobre la contextualización de los problemas en los libros de texto de educación secundaria, en donde documenta dos grandes contextos, los auténticos y los artificiales. A su vez en los contextos auténticos se incluyen los contextos reales inmersos en las prácticas sociales, de manera que los ejercicios y problemas deben enmarcarse en estas prácticas. De lo contrario sucederá en el mejor de los casos, que los alumnos tengan éxito en la escuela pero no necesariamente en la vida. “En la vida diaria los problemas son concretos y sólo se pueden resolver si las personas los consideran como problemas cuya solución es importante” (Santanero, 2011, p. 11).

Por nuestra parte sostenemos que las concepciones de los profesores que participan en la investigación, comparten las ideas anteriores ya que afirman que los problemas enmarcados en contextos auténticos producen actitudes positivas, en tanto que los de contextos artificiales dan lugar a actitudes negativas.

Santanero y Slisko (2010) constatan que lo artificial está presente en los libros de texto y es de dos tipos. El primero consiste en que los problemas se enmarcan en una situación posible, pero los números o datos que contienen y las relaciones entre ellos son irreales, imposibles o improbables en el mundo real. En el segundo tipo se plantean problemas que consideran escenarios y actuaciones que las personas jamás imaginarían o llevarían a cabo.

Consideramos que estas situaciones, números, datos y relaciones entre ellos que conforman problemas planteados a los alumnos, por una parte hacen que se formen ideas distorsionadas de lo que son las matemáticas y por otra que se excluyan situaciones históricosociales que muestran las condiciones de surgimiento y usos de los conocimientos matemáticos. En las que algunas veces surgieron a partir de los usos para luego hacer las respectivas explicaciones teóricas, y otras veces a la inversa. El reconocimiento de estos tipos de contextos artificiales todavía no son del dominio de los profesores que participan en esta investigación, pero está previsto que lo hagan a medida que avance. Conjeturamos que habrán de producirse explicaciones interesantes y fundamentadas que incidan en el perfeccionamiento de los referidos libros.

Plam (2006) hace una clasificación de los problemas contextualizados y explica una teoría de las situaciones de tareas auténticas, de tal forma que se revelan las maneras de cómo la situación real debe estar inmersa en el problema propuesto. Es decir una concordancia entre el problema y las situaciones de la vida real, que se consideran. Las referidas situaciones deben ser interesantes y de importancia para las personas a quienes se proponga el problema y por supuesto para la sociedad. En estos términos afirmamos que un problema está en un contexto auténtico, cuando se da esta concordancia. Un ejemplo donde se concretan estas tesis es el planteamiento de un problema cuyo evento central es la prueba de los 100 m cuando se le considera en el marco del movimiento uniformemente acelerado, es inmediato reconocer que dicha prueba no se representa con el modelo analítico de este movimiento.

Ibáñez (2011) constata que los libros de cálculo para el nivel medio superior no se corresponden con los programas respectivos, ya que en estos últimos se propone la activación de diversos niveles cognitivos, desde los elementales hasta los de mayor complejidad. Sin embargo, los textos solo plantean actividades para los niveles cognitivos elementales. Esta afirmación nos permite conjeturar que en educación secundaria, los problemas y ejercicios que producen actitudes negativas, no son coherentes con los propósitos planteados. En estos términos cuando los propósitos se enfocan a la argumentación los problemas y ejercicios lo hacen hacia el cálculo y la solución de problemas rutinarios.

Gálvez (1982), Fuenlabrada y Nemirovsky (1988), León y Venegas (1990) y Fuenlabrada, 1994) han diseñado talleres de actualización donde los maestros son enfrentados a situaciones que les permitan experimentar procesos de construcción de conocimientos y cobrar conciencia de la importancia que tiene para éstos la interacción con el objeto de conocimiento y con el entorno social. Estas experiencias, en las que el docente interactúa con los objetos y con otros colegas, buscan que el maestro replantee a nivel teórico-práctico su papel como profesor dentro del aula. En nuestro caso ya se ve que los profesores de matemáticas de educación secundaria que participan en este trabajo cuestionan sus funciones al incorporarse al análisis de los libros de texto.

Flores (1995) reporta una investigación encaminada a determinar los contenidos de las concepciones y creencias sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje de los estudiantes para profesor de matemáticas del bachillerato, y examina cómo evolucionan estas concepciones y creencias tras el primer encuentro con la práctica docente. Por nuestra parte, nos referimos a las concepciones de los profesores acerca de las actitudes que producen en los alumnos, los problemas o ejercicios planteados en los libros de texto oficiales de educación secundaria. Consideramos que este reconocimiento por parte de los profesores y su difusión, contribuyen a mejorar los textos de este nivel educativo.

Johnston (1994) estudia las características personales e institucionales y los presentes e históricos de tres profesores canadienses de clases elementales, durante un curso de formación permanente de dos años. La autora se sitúa en el paradigma del profesor reflexivo, y se pregunta: ¿cómo se hacen más reflexivos los profesores?, ¿cómo interactúa el aumento en la reflexión de los profesores y los cambios en las creencias y las prácticas de enseñanza de los profesores?. En forma análoga, los profesores de educación secundaria pueden hacer evolucionar sus saberes y prácticas, al participar en estudios como el que ahora se describe, en el que hacen un reconocimiento de los ejercicios y problemas de los textos, clasificándolos en aquellos que producen actitudes positivas y en los dan lugar a actitudes negativas en los alumnos. Los hallazgos de este estudio preliminar evidencian que los profesores valoran la relevancia de los contextos en los que se ubican los ejercicios y problemas, tomando partido por los contextos auténticos y las prácticas donde dichos ejercicios y problemas reflejan usos y significados de los conocimientos matemáticos.

Un escenario de investigación

Las explicaciones de los profesores en lo referente a los problemas o ejercicios que pueden producir actitudes negativas muestran tres tendencias. En la primera, afirman que los problemas o ejercicios están en contextos artificiales, como el siguiente:

> Pedro y Lupita fueron a visitar a su abuela, cada uno de ellos por caminos distintos: Pedro salió de su casa, pasó a la mercería a comprar unos botones que le encargó su mamá, recogió a su hermanita en el jardín de niños, se desvió para visitar a su amigo Fernando, compró unos helados en la nevería la Michoacana y finalmente llegó a su destino. Lupita salió de la escuela, fue a la casa de Fabiola por un libro que le iba a prestar, regresó a la escuela para recoger su mochila, y de ahí se fue directamente a la casa de su abuela.
>
> En la tabla aparecen las distancias entre los lugares que visitaron los dos hermanos, compara las distancias recorridas por ambos y di ¿quién recorrió mayor distancia para llegar a la casa de la abuela? (Waldegg, Villaseñor y García, 2008, p. 30).

Como se puede ver, este problema es irreal, ya que resulta imposible que Lupita salga de la escuela a realizar algunas gestiones y regrese por su mochila, para finalmente encaminarse a la casa. Suponemos que al poner en escena este tipo de problemas con los alumnos, afirmarán que se trata de situaciones aburridas y de demasiado texto.

En la segunda, sostienen que los problemas o ejercicios son repetitivos. Por ejemplo, en un problema sobre congruencia en el tercer grado de educación secundaria, en su primera parte se da un triángulo rectángulo y tres polígonos que se forman uniendo dos o más de estos triángulos, se pide dar el nombre de los polígonos obtenidos y las propiedades que de ellos se pueden aprender. En la segunda parte se da un triángulo que no es rectángulo y se pide formar tres polígonos con dos o más de estos triángulos y otra vez sus nombres y propiedades que se pueden aprender.

Consideramos que este tipo de situaciones da una falsa idea de lo que son las prácticas matemáticas, porque muestran una acción repetitiva contraria a lo que se hace con las tareas y problemas matemáticos, donde hay que buscar el conocimiento planteando conjeturas y asegurarlo con argumentos. En esta última manera el alumno activa procesos cognitivos, sociales y emocionales, encaminados al desarrollo de su pensamiento, cuando los alumnos resuelven problemas de este corte afirman que trabajan con el cerebro.

En la tercera tendencia, señalan que se dan pistas para resolver los problemas o ejercicios, es decir, se dice cómo resolver la situación, dando una imagen que no corresponde a las matemáticas. Los profesores ejemplifican esta tendencia con situaciones de conteo o de combinatoria en los que se dan pistas para resolverlos, casi les dicen que utilicen un diagrama de árbol. Por su parte, cuando se les plantea a los alumnos, sostienen que hay texto innecesario.

Los profesores sostienen que estas situaciones pueden generar actitudes negativas hacia las matemáticas, porque son tediosas, aburridas y no contribuyen a que la escuela dirija la construcción de los saberes matemáticos que requiere la sociedad. Compartimos estas posiciones, ya que los ejercicios y problemas ubicados en estas tendencias, no promueven la negociación de significados y el reconocimiento de los usos de estos conocimientos, en las diversas prácticas sociales. Por otra parte los profesores consideran en los problemas o ejercicios que pueden producir actitudes positivas, aquellos que se ubican en contextos auténticos:

(1) Problemas o ejercicios que plantean distintas opciones de pago para adquirir un producto, seleccionando aquella que sea más ventajosa para el cliente.

Por ejemplo, La familia Montes necesita comprar un colchón nuevo para su casa. En la tienda de colchones eligen los tres que más les gustan. Deciden comprar el más barato, pero no es tan sencillo como esperaban, estas son las opciones.

A. $570.40 (IVA incluido).

B. $490.00 (más IVA).

C. $620.00 (pague solo el 75 % + IVA).

¿Cuál de los tres colchones es el más barato?, ¿Cuál es el valor de los tres colchones antes de aumentar el impuesto?, ¿ Cómo calculas cuánto costará un colchón, después de aumentar el impuesto? ¿Cómo calculas el descuento en el colchón C?.

Según los maestros, sobre estos contextos los alumnos opinan que son interesantes y que los recomiendan porque permiten realizar cálculos que están presentes en diversas prácticas.

(2) Situaciones que corresponden al movimiento rectilíneo o de caída libre de los cuerpos, cuando se abordan las relaciones funcionales.

Los profesores afirman que este tipo de problemas son interesantes porque revelan usos y significados de las literales, en el ámbito del pensamiento algebraico.

Reflexiones finales

Estas concepciones de los profesores revelan la necesidad de un rediseño del discurso matemático escolar (Velázquez y Nolasco, 2009), tomando en cuenta y elaborando aún más las posiciones que en este trabajo se mencionan y sostienen.

De igual forma la actualización permanente de los libros de texto de los alumnos, sobre la base de las propuestas de los usuarios principales, es decir, profesores y alumnos. El mayor cambio debe ocurrir en la contextualización de los problemas, eliminando aquellos contextos artificiales que provocan las actitudes negativas en los alumnos. Su lugar debería ser ocupado por los "problemas auténticos" cuyas características principales deben estar en concordancia con la taxonomía elaborada por Palm sobre esta problemática, (Palm, 2006).

Postulamos que es tarea de las futuras investigaciones, descubrir cuáles actitudes hacia las matemáticas y su aprendizaje estarán afectadas positivamente por los problemas auténticos.

Referencias bibliográficas

Alsina, C. Fortuny, J. y Pérez, R. (1997). *¿Por qué geometría?. Propuestas didácticas para la ESO*. Madrid, España: Síntesis.

Coll, C. y Remesal, A. (2009). Concepciones del profesorado de matemáticas acerca de las funciones de la evaluación del aprendizaje en la educación obligatoria. *Infancia y Aprendizaje* 32 (3), 391-404.

Contreras, L. (1999). *Concepciones de los profesores sobre la resolución de problemas*. Huelva, España: Servicio de publicaciones de la Universidad de Huelva.

Flores, P. (1995). *Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. Investigación durante las prácticas de enseñanza*. Tesis de Doctorado no publicada. Granada, España.

Fuenlabrada, I. (1994). Estudio de una propuesta de actualización en matemáticas, para profesores de educación primaria en servicio. Proyecto de investigación. D.F. México: DIE-CIVESTAV-IPN.

Fuenlabrada, I. y Nemirovsky, M. (1988). Experiencias didácticas con maestros. Formación de maestros e innovación didáctica. *Memorias DIE-CINVESTAV*. México.

Gálvez, G. (1982). *Enseñanza de la matemática en la escuela primaria*. Documento interno del Laboratorio de Psicomatemáticas del Departamento de Investigaciones Educativas. D. F, México.

Gómez, B. (2011). El análisis de manuales y la identificación de problemas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. *PNA* 5(2), 49-65.

Ibáñez, G. (2011). *Relación entre el currículum oficial y el currículum potencial. El caso de los textos de preparator*ia. Tesis de Maestría no publicada. Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Johnston, M. (1994). Contrast and similarities in case studies of teacher reflection and change. *Curriculum inquiry 24*(1), 9-26.

León A. y Venegas, N. (1990). El maestro, la reflexión sobre su práctica y la construcción de estrategias didácticas. *En primer encuentro de innovaciones en educación básica*. México.

Monterrubio, M. y Ortega, T. (2011). Diseño y aplicación de instrumentos de análisis y valoración de textos escolares de matemáticas. *PNA 5*(3), 105-127.

Palm, T. (2006). Word problems as simulation of real-world situations. A proposed framework. *For the Learning of Mathematics 26* (1), 42 – 47.

Ribeiro, C., Monteiro, R. y Carrillo, J. (2010). ¿Es el conocimiento matemático del profesorado específico de su profesión? *Discusión de la práctica de una maestra. Educación Matemática* 22 (2), 123-138

Santanero, J. y Slisko, J. (2010). Contextualización de los problemas en los libros de texto de matemáticas para secundaria. Cartel presentado en el 43 Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, realizado en Tuxtla-Gutiérrez.

Santanero, J. (2011). *Contextualización de los problemas en los libros de texto de matemáticas para secundaria*. Tesis de Licenciatura no publicada. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México.

SEP. (2006). *Programas de estudio de matemáticas en educación secundaria*. D.F., México: Secretaría de Educación Pública.

SEP. (1994). *Secuencia y organización de contenidos*. D. F, México: Secretaría de Educación Pública.

Serrano, G. (2010). Las actividades matemáticas y los libros de texto desde una perspectiva sociocultural. *Paradigma 31* (1), 183 – 196.

Thompson, A. (1984). The relationship of teacher´s conceptions of mathematics teaching to instructional practice. *Educational Studies in Mathematics 15*, 105-127.

Torregrosa, G., Haro, D., Penalva, M., y Linares, C. (2010). Concepciones del profesor sobre la prueba y software dinámico. Desarrollo en un entorno virtual de aprendizaje. *Revista de Educación 352*, 379-404.

Velázquez, S. y Nolasco, H. (2009). Rediseño del discurso matemático escolar en la educación secundaria. *Sinergia 1 (2),* 26-31.

Waldegg, G. Villaseñor, R. y García, V. (2008). *Matemáticas en contexto 1*. D.F., México: Esfinge.

CURIOSIDADES, ANECDOTAS Y CONTRIBUCIONES DE LOS MATEMATICOS A TRAVES DEL TIEMPO

Ricardo Valles
Universidad Simón Bolívar. Venezuela
prfricardovalles@gmail.com

Resumen: Esta investigación es de carácter no experimental y tiene como objetivo obtener elementos que permitan diagnosticar cuánto saben de la historia de las matemáticas los profesores adscritos al departamento de la Universidad Simón Bolívar (USB). Su implementación obedece a la posibilidad que la historia brinda a los profesores de llevar a sus estudiantes al reconocimiento del origen de los conceptos y pertenencias de la disciplina, así como en la necesidad de los profesores de contar con herramientas que permitan desarrollar la dimensión epistémica propuesta por Godino, Bencomo, Font, & Wilhelmi (2006). Dicha investigación se llevó a cabo con docentes de matemáticas I y II en las carreras largas de la USB. Se utilizó la estadística descriptiva. Los resultados revelan que la mayoría de los profesores desconoce las etapas de la historia de las matemáticas, aportaciones y principales exponentes.

Palabras clave: Historia, matemáticas, profesores.

Abstract: This research is not experimental in nature and has the objective to get items to diagnose how much mathematics professors assigned to the department of Universidad Simón Bolívar (USB) know about mathematics history. Its implementation obeys to the possibility that history lets professors take their students to recognize the origin of the concepts and properties of the discipline, as well as in the need of professors to rely on tools that can develop the epistemic dimension proposed by Godino, Bencomo, Font, & Wilhelmi (2006). This research was conducted by professors of mathematics I and II in the long careers of USB. The descriptive statistics was used. The results reveal that most professors don`t know the stages in the history of mathematics, contributions and main exponents.

Key words: History, mathematics, professors.

Introducción

El modelo de enseñanza actual de la Universidad Simón Bolívar (USB), demanda que el profesor sea un creador y generador de estrategias que posibiliten y faciliten al estudiante aprendizajes significativos y una visión general de su campo profesional y de los problemas reales a los que se enfrentará. De acuerdo con Grattan-Guinness (2006), donde afirma que el desagrado por las matemáticas (que alcanza a la mayoría de historiadores de la ciencia) procede de la experiencia adquirida en las escuelas, donde se enseña como una materia aburrida y difícil. Y considerando que la historia de las matemáticas proporciona al joven universitario herramientas para contextualizar objetos matemáticos, así como la identificación de relación de esta ciencia con toda actividad social e incluso cognitiva, se consideró trascendental determinar el conocimiento de los profesores del Departamento de Matemáticas de la USB, sobre la historia de las matemáticas, sus exponentes, anécdotas y aportes de los mismos a través del tiempo. A su vez Gil y De Guzman (1993), afirman que la historia presenta una perspectiva dinámica en el desarrollo de la matemática. Por consiguiente se vuelve de fundamental importancia, que nuestros docentes posean un conocimiento amplio de la historia, sus exponentes, obras y anécdotas en el campo de la matemática.

> Por otra parte el conocimiento de la historia de la matemática y de la biografía de sus creadores más importantes nos hace plenamente conscientes del carácter profundamente histórico, es decir dependiente del momento y de las circunstancias sociales, ambientales, prejuicios del momento,… así como de los mutuos y fuertes impactos de la cultura general, la filosofía, la matemática, la tecnología, las diversas ciencias han ejercido unas sobre otras. Aspecto este último del que los mismos matemáticos enfrascados en su quehacer técnico no suelen ser muy conscientes, por la forma misma en que la matemática suele ser presentada, como si fuera inmune a los avatares de la historia. (Gil y De Guzmán, 1993, p. 71).

Justificación

El Departamento de Matemáticas de la USB, consideró relevante la posibilidad de incorporar a la unidad programática de matemática I y II algunos tópicos históricos que contribuyan a un mayor conocimiento de los procesos matemáticos. Según Gil y De Guzmán (op.cit), “un cierto conocimiento de la historia de la matemática, debería formar parte indispensable del bagaje de conocimientos del matemático en general y del profesor de cualquier nivel; primario, secundario o terciario, en particular” (p. 70). Y, en el caso de este último, no sólo con la intención de que lo pueda utilizar como instrumento en su propia enseñanza, sino primariamente porque la historia le puede proporcionar una visión verdaderamente humana de la ciencia y de la matemática, de lo cual suele estar también el matemático muy necesitado. No obstante como parte del proceso se requiere obtener elementos que nos permitan probar las habilidades y limitantes que tienen los profesores del departamento en la materia.

Basamento teórico

Continuando con las ideas de Gil y Guzmán (op. cit), desde el punto de vista del conocimiento más profundo de la propia matemática, los elementos aparecen de una manera realista siempre que se le presente mediante su historia, donde se benefician aquellos que hacen matemática, entre ellos el que la emplea como una aplicación (matemático técnico) y aquel que la enseña (profesor de matemática). Es por ello que se considera propicio realizar esta investigación, de la cual obtendremos el nivel de conocimiento que de la historia, anécdotas y curiosidades de los matemáticos poseen los docentes de nuestra universidad.

> El objetivo de la enseñanza es promover el aprendizaje. Sin embargo la enseñanza se produce a veces sin que de ella resulte un aprendizaje y es conveniente considerar si puede mejorarse y lograr optimizar el aprendizaje como consecuencia de una mejor utilización de cuanto se sabe al respecto a su proceso. (Orton, 2003, p. 209).

Si bien no poseemos un mecanismo exacto para hacerlo, contamos con heterogéneas teorías que proponen características de un proceso de enseñanza-exitoso, tal es el caso de la Idoneidad Didáctica de Godino et al. (2006).

Dicha teoría busca la articulación coherente y eficaz de las dimensiones implicadas en los procesos de estudio matemático: epistémico (naturaleza relacional de las matemáticas; las matemáticas como actividad humana; las matemáticas como proceso, antes que como producto), cognitiva (adaptación consistente de los nuevos conocimientos a los previamente establecidos; interacción social y comunicación como motores del aprendizaje; complejidad del aprendizaje), mediacional (disponibilidad de recursos materiales y temporales), ecológica (relativa a la institución de referencia, al contexto social, a las directrices en política educativa, a las limitaciones económicas, etc.), emocional (el aprendizaje como proceso de participación e integración en una comunidad, para la aceptación en la misma) e interaccional.

Considerando esta perspectiva, la historia de las matemáticas toma especial relevancia en la dimensión epistémica ya que muestra la forma en que surgen, se sistematizan y se desarrollas los métodos, conceptos y teorías de sí misma, de igual manera permite identificar y analizar las relaciones de la matemática con toda actividad social, sus limitaciones y avances. Sumado a esto Hernández (2004), señala que el estudio de la historia amplía el universo cultural del profesor, desarrolla hábitos de lectura, perfecciona habilidades investigativas y aumenta su vocabulario de la asignatura, lo que posibilita al docente para reconstruir situaciones históricas de objetos matemáticos para su estudio. Además, según Godino (2009), en el "conocimiento didáctico-matemático del profesor" afirma que el control de las transformaciones que se deben aplicar al contenido matemático para su difusión y comunicación en los distintos niveles escolares debe ser también una competencia del profesor de matemáticas.

Como cada ciencia la historia de las matemáticas tiene un objeto de estudio, no obstante a diferencia de otras cuenta con diversas metodologías; por ejemplo, por culturas: egipcia, mesopotámica, china e india (Gheverghese, 1996); áreas del conocimiento: algebra y aritmética, análisis matemático y geometría; y de manera cronológica.

Bajo la orientación cronológica, la historia de las matemáticas se divide en cuatro bloques según la periodicidad establecida por A.N. Kolmogorov:

Nacimiento de las matemáticas: Este periodo se prolonga hasta los siglos VI-V a.C. cuando las matemáticas se conviertes en una ciencia independiente con objeto y metodología propios. También conocido como matemáticas antiguas o prehelénicas y en ella encontramos las matemáticas de las antiguas civilizaciones de Egipto, Mesopotamia, China e India.

Periodo de las matemáticas elementales: se prolonga desde los siglos VI-V a.C. hasta finales del siglo XVI. Durante este periodo se obtuvieron grandes logros en el estudio de las matemáticas constantes, comenzando a desarrollarse la geometría analítica y el análisis infinitesimal.

Periodo de formación de las matemáticas de magnitudes variables: El comienzo de este periodo está representado por la introducción de las magnitudes variables en la geometría analítica de Descartes y la creación del cálculo diferencial e integral en los trabajos de I. Newton y G.V. Leibniz. En el transcurso de este periodo se formaron casi todas las disciplinas conocidas actualmente, así como los fundamentos clásicos de las matemáticas contemporáneas. Este periodo se extendería aproximadamente hasta mediados del siglo XIX.

Periodo de las matemáticas contemporáneas: en creación desde mediados del siglo XIX. En este periodo el volumen de las formas espaciales y relaciones cuantitativas abarcadas por los métodos de las matemáticas han aumentado espectacularmente (PNTIC, 2000). Y de esta última forma, es como se ha abordado la investigación.

Metodología

La investigación se concibió bajo una perspectiva cuantitativa con un diseño no experimental, mismo que se desarrolló de manera transversal; la población que sirvió de estudio fue constituida por los docentes de Matemática, específicamente los que trabajan con Matemática I y II, de los cuales se obtuvo una muestra no probabilística y cuya participación estuvo en dar respuesta puntual a un cuestionario. Dicho cuestionario fue de rendimiento óptimo y se construyó considerando: 1) Las etapas de la historia 2) Nacimiento de las matemáticas, 3) Surgimiento de las matemáticas elementales, 4) Formulación de las matemáticas de magnitudes variables y 5) Matemáticas contemporáneas. Sus principales exponentes, aportaciones y anécdotas, de tal forma que permitiera diagnosticar el estado que guardan los profesores con respecto al conocimiento de las matemáticas y su historia. Se calcularon índices de dificultad y homogeneidad, así mismo se obtuvieron estadísticos de tendencia central, variabilidad y se construyeron intervalos de confianza.

Resultados y conclusiones

Entre los resultados del análisis estadístico que se obtuvieron, se consideraron resaltar los siguientes gráficos, donde se arroja como resultado, que la mayoría de los docentes estudiados desconocen el objeto de estudio.

Figura 1: Dominio de la Historia de las Matemáticas.

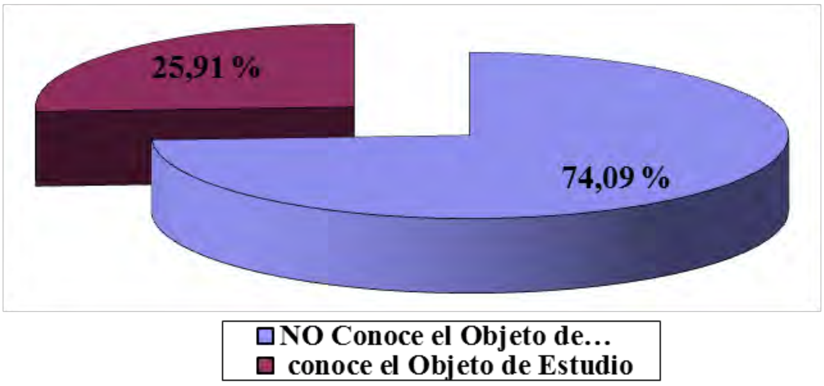


Gráfico 1. Porcentaje de los resultados arrojados donde se evidencia el conocimiento o "no" conocimiento que poseen los docentes sobre el objeto de estudio. Donde un 74,09% tienen desconocimiento del objeto de estudio y un 25,91% conocen del objeto de estudio.

Figura 2: Influencia de los principales exponentes a las matemáticas.

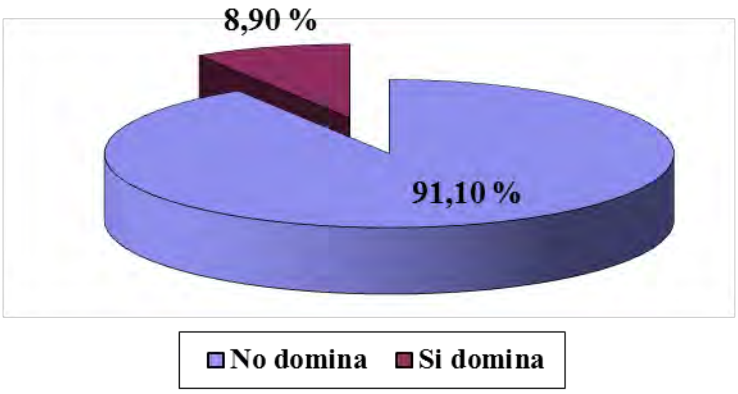


Gráfico 2. Porcentaje del dominio del tema por parte de los docentes, referido a la influencia que tuvieron los exponentes de la matemática en la historia. Donde se puede evidenciar que un 91,10% no dominan el tema u objeto de estudio y por el contrario un 8,90% si dominan el objeto de estudio.

La presente investigación alcanzó determinar el conocimiento que guardan los profesores de matemáticas con respecto al objeto de estudio, pues en base al soporte estadístico, se evidenció que los docentes tienen un conocimiento insuficiente de las matemáticas y su historia; así mismo deja en claro la necesidad de buscar estrategias como talleres, diplomados, entre otros; para generar el interés y difusión de la misma, dada su contribución al desarrollo de la dimensión epistémica por cuanto desarrolla en el profesor habilidades para la contextualización de objetos matemáticos. Igualmente ha de hacerse notar que uno de los objetivos de añadir, en las clases de matemática, su historia es afirmar su presencia en la vida de nuestra especie a través del tiempo. De este modo se la humaniza, exponiéndola como una actividad humana que se ha realizado, creado y edificado a través de siglos y milenios.

Comentarios finales

Grattan-Guinness (2006), asegura que se ha creado un círculo vicioso con generaciones y comunidades de matemáticos y educadores practicando su disciplina como si hubiese sido creada en su totalidad por ellos mismos y siendo completamente ignorantes de su trasfondo histórico y cultural. Es por ello que el objetivo que se busca con incluir la enseñanza de la historia en los contenidos de matemática I y II, es la de humanizar la matemática, de contextualizarla, de mostrar a nuestros alumnos que es un producto más de la actividad humana y se ha ido gestando a través de milenios de civilización. Del mismo modo se compartieron las principales valoraciones y comentarios en relación al impacto de la investigación con un grupo de educadores matemáticos (mexicanos, venezolanos, cubanos y dominicanos) que asistieron a la ponencia de este trabajo, en el marco de la XXV Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, entre los cuales surgió la idea de llevar a cabo actividades en el aula como dramatizaciones de algunos matemáticos celebres con ambientaciones e indumentaria de la época y exponer sus experimentos y aportes en las épocas de su existencia. Por lo tanto se busca evitar presentar la historia de la matemática de una forma “sola y desnuda”, sino más bien, vestirla con las mejores ropas y exhibirla acompañada de sus mejores actores. La propuesta es llevar al ambiente académico estos trajes y estos actores y, también, salir del ambiente de clases para buscar la matemática, y encontrarla, en otras disciplinas. Dicho concisamente, se trata de contextualizar la Matemática.

Para finalizar, cabe destacar que no hay mejor enseñanza que en la cual podamos contextualizar y ponerla en práctica, el simple hecho de abordar la historia de la matemática (sus principales exponentes, descubrimientos, vivencias y anécdotas de la época) de una manera práctica por medio de la dramatización por parte del estudiantado o personal docente involucrado generará un aprendizaje significativo, ya que se están logrando varias cosas: estudiar él o los personajes de la época, sus aportes a la matemática, sus anécdotas por consiguiente el individuo (docente o alumno) se estará involucrando con la historia y a su vez estará descubriendo la importancia y relación que esta tiene con los tópicos matemáticos que se encuentran en los programas de matemática I y II de su pensum de estudio.

Referencias bibliográficas

De Guzmán, M. (1992). *Tendencias innovadoras en Educación Matemática*. Buenos Aires: Olimpiadas Matemáticas Argentinas.

Enciclopedia de Grandes Personajes. (2001). *Ediciones Náutica*. Bogotá. Colombia.

Enciclopedia del estudiante. (2006). Tomo 8. *Geografía General* 1era Edición. Buenos Aires: Santillana.

Gheverghese, G. (1996). *La cresta del pavo real: las matemáticas y sus raíces no europeas*. Pirámide: Madrid.

Gil, D. y De Guzmán, O. (1993). *Enseñanza de las Ciencias y la Matemática Tendencias e Innovaciones*. Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura. Recuperado el 28 de julio de 2011 de http://www.oei.es/oeivirt/ciencias.htm

Godino, Font y Wilhelmi (2006). Análisis ontosemiótico de una lección sobre suma y resta. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Edición especial,* 131-155.

Godino, J. (2009). Categorías de Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática 20(3),* 13-31.

Grattan- Guinnes, I. (2006). *¿Cómo hacer Historia de las Matemáticas?* Universidad de Barcelona. Recuperado el 28 de julio de 2011 de http://personal.telefonica.terra.es/web/mir /ferran/ivor.pdf

Hernández, O. (2004). *Sobre la importancia del conocimiento de la Historia de las Matemáticas.* Recuperado el 28 de julio de 2011 de http://www.matematica.ciens.ucv.ve/ matematicos/.

Historias de las Matemáticas. (2007). *Fondo de cultura Económica.* Recuperado el 12 de julio de 2011 de http:// www.matematica.ciens.ucv.ve/matematicos/

Orton, A. (2003). *Didáctica de las Matemáticas*. Madrid: Morata.

PNTIC (2000). *Historia de las matemáticas*. Recuperado el 28 de julio de 2011 de http://almez. pntic.mec.es/~agos0000/.

EL RECONOCIMIENTO DE LA MATEMÁTICA EDUCATIVA COMO CAMPO ACADÉMICO. EL CASO DE LA ESTRUCTURA INSTITUCIONAL

Crisólogo Dolores, Judith Hernández
Universidad Autónoma de Guerrero México
Universidad Autónoma de Zacatecas
cdolores2@gmail.com, judith700@hotmail.com

Resumen: Para la formación del profesional de la Matemática Educativa se tienen que abordar varios factores dentro de la teoría curricular, sin embargo la caracterización de cada uno tendrán que ser construidos sobre la disciplina misma. Un primer elemento unificador es el reconocimiento del campo académico constituido por tres etapas: modelo fundacional, estructura institucional y agentes del cambio. La primera consiste en las tendencias que fortalecen la disciplina, la segunda en el reconocimiento de las instituciones educativas donde se produce o reproduce la disciplina y la tercera son los investigadores del área. En este trabajo se aborda la estructura institucional, misma que habrá de sostener la formación de estos profesionales en México..

Palabras clave: campo académico, matemático educativo, formación

Abstract: In the professional instruction of Mathematics Education a discussion of several factors is necessary in curriculum theory, but the characterization of each one will be built on the discipline itself. The first unifying element is the recognition of academic field consists of three stages: foundation model, institutional structure and change agents. The first is to strengthen the discipline trends, the second in the recognition of educational institutions that produce and reproduce the discipline and third are researchers in the field. This paper discusses the institutional structure itself to be ongoing instruction of these professionals in Mexico.

Key words: academic field, mathematics Educator, instruction

Introducción

En las diferentes definiciones de curriculum Grigouri (2005), Socas, Afonso, Hernández & Palarea (1994), Howson, Keitel y Kilpatrick (1982), se rescatan las principales dimensiones que determinan las tendencias principales en el estudio del currículum, la social, la institucional y la didáctica. Estas diferentes visiones están explicadas según Fuentes, Pérez y Mestre (1995) por la concepción filosófica y la visión de la problemática educativa. Sin embargo todos aceptan su alcance organizativo y evaluativo con un sentido más complejo y completo de lo que debe entenderse por currículum. De esta manera se presenta la necesidad expresada por varios autores (Artigue, 2003; Horruitiner, 2006; Socas et al., 1994) sobre la importancia de fortalecer una visión unificada y articulada del currículum en el nivel superior, utilizando como herramienta central la investigación educativa.

Centraremos nuestro estudio en la dimensión institucional con la finalidad de identificar el estado actual de los programas educativos que se encargan de la formación de profesionales de la Matemática Educativa en el nivel licenciatura y maestría en México. Tomando como referencia al currículo oficial "que viene dado por el conjunto de documentos que oficializan las autoridades educativas o asociaciones de un lugar y que fijan o proponen los programas de las asignaturas, contenidos mínimos, objetivos que deben superarse, etc..." (Alsina, 2000, p. 14). La razón nuestra es coincidente con la de Fuentes (1998), los programas de enseñanza e investigación representan una dimensión básica de la institucionalización del campo académico. El reconocimiento del campo académico, según Fuentes (1998), es inseparable en la profesionalización de aquellos que se dedicarán al fortalecimiento del campo mediante el ejercicio de las prácticas académicas y la articulación de la producción académica mediante la toma de decisiones. Consideramos que esto nos brindará información relevante en la constitución del Campo Académico de la Matemática Educativa mediante la estructura institucional que ha de ser el seno de los programas que formaran a aquellos profesionales de la Matemática Educativa tanto en las prácticas como en la producción académica en México.

Estructura Institucional

Para el reconocimiento y estudio del campo académico, Fuentes (1998) propone dividirlo en tres etapas: el Modelo Fundacional, Estructura institucional y Agentes de la Estructuración. Cómo un primer avance se presenta el segundo de ellos consistente en el reconocimiento de las instituciones o centros académicos donde se realiza la producción y reproducción de la disciplina, tratando de determinar la situación actual y el nivel de articulación que existe entre los posgrados y las licenciaturas relacionadas con la Matemática Educativa. En particular sostenemos que ésta articulación es débil debido a la escasa cantidad de licenciaturas que forman profesionales de la Matemática Educativa y aunque se reconoce según Godino (2010) la fortaleza del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav en el ámbito de la investigación en Latinoamérica, esto no ha podido permear aún hacia los programas de formación de profesionales de la Matemática Educativa en el nivel licenciatura.

Licenciaturas que forman profesionales de la Matemática Educativa

Después de un estudio con el apoyo del Catálogo de carreras de licenciatura para el 2007 de la Asociación Nacional de Universidades e Instituciones de Educación Superior (ANUIES), así como un análisis de la información curricular disponible en internet, se encontró que las licenciaturas relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática se pueden clasificar en tres grandes grupos:

1. Licenciaturas en Educación en el área de la Matemática (Especializándose en un nivel educativo en particular, secundaria primordialmente)
2. Licenciaturas en Matemáticas con un enfoque hacia la Matemática Educativa.

3. Licenciaturas en Matemática Educativa

La diferencia principal entre estos tres grandes grupos es la cantidad de materias propuestas en su plan curricular dedicadas al conocimiento disciplinar y aquellas que consideran en sus contenidos conocimiento didáctico de la matemática. Por ejemplo, el primer grupo mantienen una fuerte tendencia hacia la pedagogía con un contenido en matemáticas relacionado con el nivel educativo que se propone atenderán los egresados. En el segundo grupo incluyen materias con contenido matemático necesario para formar matemáticos olvidándose de aquel contenido matemático para la enseñanza relacionado con el nivel educativo que se propone atenderán los egresados de éstas licenciaturas, las materias respectivas al conocimiento didáctico matemático se presentan en el mejor de los casos como optativas y no representan un porcentaje significativo a comparación de las que abordan contenido disciplinar. Por último el tercer caso son licenciaturas que persiguen un equilibrio entre las materias del conocimiento disciplinar del contenido y el conocimiento didáctico del contenido. Consideramos que éstas últimas son las más próximas a lo que se requiere en la formación de un profesional de la Matemática Educativa en el nivel Licenciatura.

Enseguida se muestra la clasificación resultante del análisis de su currículo oficial.

Tabla1. Clasificación de Licenciaturas relacionadas con la Matemática Educativa

Tipo	Licenciatura y Universidad
Licenciaturas en Educación en el área de Matemáticas	1. Licenciatura en ciencias de la educación en: Físico Matemáticas. Universidad Valle de Grijalva 2. Licenciatura en Docencia de las Matemáticas. Universidad Autónoma de Baja California. 3. Licenciatura en Educación Media en: Matemáticas. Universidad de Colima. 4. Licenciatura en Educación Media en: Matemáticas. Centro de Actualización del Magisterio en Nezahualcóyotl. 5. Licenciatura en Educación Secundaria en: Matemáticas. Centro de Actualización del Magisterio en Nezahualcóyotl.
Licenciaturas en Matemáticas con especialidad en Matemática Educativa	6. Licenciatura en Matemáticas. Universidad Autónoma de Ciudad Juárez 7. Licenciatura en Física y Matemáticas. Instituto Politécnico Nacional. 8. Licenciatura en Matemáticas. Universidad Autónoma de Nayarit. 9. Licenciatura en Matemáticas. Universidad Autónoma de Zacatecas. 10. Licenciatura en Matemáticas. Universidad Autónoma de Guerrero
Licenciaturas en Matemática Educativa	11. Licenciatura en Enseñanza de las Matemáticas. Universidad Autónoma de Yucatán. 12. Licenciatura en Matemática Educativa. Universidad Autónoma de San Luis Potosí. 13. Licenciatura en Matemática Educativa. Universidad Autónoma de Guerrero

En el estudio de Hernández y Dolores (2011) existe un cuarto tipo de programas educativos, aquellas Licenciaturas en Matemáticas que aún sin abordar ningún conocimiento didáctico del contenido matemático incluyen en su perfil de egreso actividades relacionadas con la educación matemática, ellos aseguran que sus egresados o estudiantes (a partir de cierto semestre) podrán desempeñarse como profesores de matemáticas del nivel bachillerato, se concluye en estos casos que existe poca congruencia entre su mapa curricular y su perfil de egreso o bien se considera que persiste la falsa creencia que para dar clases sólo basta saber matemáticas.

Maestrías que forman profesionales de la Matemática Educativa

Mediante la consulta del Catalogo de Posgrado del ANUIES (2006) y la información encontrada en internet después de un análisis de los currículos oficiales, se proponen tres grupos:

1. Maestrías en el área de la Matemática Educativa enfocados a la práctica profesional (didáctica o tecnológica)
2. Maestrías en el área de la Matemática Educativa enfocados a la investigación.
3. Maestrías en el área de la Matemática Educativa enfocados a la formación disciplinar.

Los primeros tienen un sentido claramente profesionalizante y mantienen una presencia importante de elementos relacionados con el desarrollo profesional asociado a la docencia de la matemática. Los segundos marcan una clara tendencia a la formación de investigadores, manteniendo un vínculo con la práctica profesional pero dando un énfasis especial a las teorías de la Matemática Educativa. Por último los del tercer grupo son programas educativos que se enfocan en el conocimiento del contenido disciplinar proponiéndolo como parte primordial en la formación de Matemáticos Educativos en el nivel posgrado y que consideran algunos matices en la formación en investigación o práctica docente.

Si observamos la tabla 2, los casos establecidos en los dos primeros grupos (profesionalizantes o en investigación) casi en su totalidad pertenecen al Programa Nacional de Posgrados de Calidad (PNPC), vigentes al 2010, reconocimiento otorgado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CoNaCyT). Esto habla del gran desarrollo que han tenido en el país los posgrados en el área de la Matemática Educativa en comparación con las Licenciaturas. También podemos observar que todas las maestrías profesionalizantes con reconocimiento en el PNPC son de reciente creación, esto indica una nueva tendencia que se enfoca en el campo propio del profesor de matemáticas y la mejora de su práctica profesional. Para el caso de las maestrías clasificadas como de investigación y reconocidas por el PNPC encontramos que están en vías de desarrollo o consolidadas, esto habla de la gran tradición de la Matemática Educativa como una disciplina centrada en la Investigación.

Tabla2. Clasificación de Maestrías relacionadas con la Matemática Educativa

Tipo	Licenciatura y Universidad
Profesionalizante	1. Maestría en Matemáticas Aplicadas con especialidad en Docencia de las Matemáticas. Universidad Autónoma de Querétaro. 2. Maestría en Educación, Especialidad Matemáticas. DME, Cinvestav **PNPC- Reciente Creación** **3.** Maestría en Enseñanza de las Matemáticas. Universidad Autónoma de Guadalajara**. PNPC-Reciente Creación** **4.** Maestría en Docencia de la Matemática. Universidad Autónoma de Guerrero. **PNPC-Reciente Creación** 5. Maestría Profesionalizante en Matemática Educativa - Universidad Autónoma de Coahuila. **PNPC Reciente creación**
En Investigación	6. Maestría en Ciencias en Matemática Educativa. Cicata del IPN **7.** Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa. Cinvestav. **PNPC-Consolidada** **8.** Maestría en Matemática Educativa. Universidad Autónoma de Guerrero. **PNPC-Consolidada** 9. Maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa. Universidad de Sonora. **PNPC- En desarrollo** 10. Maestría en Ciencias en Educación Matemática. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
En Conocimiento Matemático Disciplinar	11. Maestría en Matemática Educativa. Universidad Autónoma de Ciudad Juárez **(Investigación)** 12. Maestría En Matemática Educativa. Universidad Autónoma de Zacatecas **(Profesionalizante)** 13. Maestría en Matemática Educativa. Centro de Investigación y Desarrollo del edo. De Michoacán **(Investigación).**

Conclusiones

En el proceso del reconocimiento de la estructura institucional se establece que las licenciaturas y maestrías que forman Matemáticos Educativos se encuentran principalmente en las Facultades o Unidades Académicas que forman Matemáticos, es decir la formación de los profesionales de la Matemática Educativa está supeditada considerablemente a la formación de Matemáticos. Este hecho puede ser indicador de que, en el plano institucional, el campo de la Matemática Educativa aún no es considerado como un campo profesional específico con su propio objeto de la profesión, métodos y marcos teóricos también propios. Sin embargo es necesario reconocer que esta supeditación también tiene razones históricas, los pioneros de la Matemática Educativa en México, fueron justamente matemáticos con sensibilidad hacia los problemas de la enseñanza y aprendizaje de la matemática. La relación de adhesión entre estas dos esferas del conocimiento se empezó a desvanecer desde finales de la década de los 70 con la creación de la Maestría en Matemática Educativa en el Cinvestav. Dando inicio a la creación de las maestrías de este tipo en el país siguiendo prácticamente el mismo concepto creado en el Cinvestav, ya que existía (y sigue habiendo) una mayoría abrumadora de docentes de la matemática que no tenían una formación de Matemáticos Educativos. El posgrado en un principio se pensaba, llenaría ese vacío en la formación de esos docentes, entre otras cosas. Por lo que sólo se atendió al posgrado, dejando casi intactas a las licenciaturas y de ésta manera olvidándose de la formación inicial de los profesionales de la Matemática Educativa.

Hoy día, dadas las exigencias tanto del sistema educativo como de la sociedad mexicana (y sobre todo derivado de los resultados de las evaluaciones internacionales obtenidos en el desempeño de los estudiantes en matemáticas) se hace necesario, para hacer frente a esta problemática de manera institucional, la formación inicial de profesionales de la Matemática Educativa. Algunos programas del Centro de Actualización del Magisterio (CAM), de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN), y ahora del Programa de Formación Continua han intervenido en este nivel, sin embargo su incidencia sólo ha afectado principalmente al nivel básico, dejando en la orfandad al nivel medio superior y superior.

Todo lo anterior dio como resultado un desarrollo diferenciado de los programas educativos del nivel licenciatura y maestría, los primeros están en plena creación o pudiera decirse en un estado incipiente de desarrollo, mientras que los segundos han logrado ya establecer una presencia seria en la comunidad académica. De hecho la cantidad de programas vigentes de posgrado son superiores en cantidad a los correspondientes del nivel licenciatura.

Referencias bibliográficas

Alsina, C. (2000). Mañana será otro día: un reto matemático llamado futuro. En J. Ma. Goñi (coord.), C. Alsina, D. Ávila, C. Burgués, J. Comellas, F. Corbalán, M. A. García Delgado, C. Hahn, J. Serra (Eds). *El currículum de matemáticas en los inicios del siglo XXI* (pp. 13-21). España: Graó, de IRIF, S.L

ANUIES (2006). *Catálogo de Posgrados en Universidades e Instituciones Tecnológicos 2006.* Recuperado el 13 de junio de 2010 de http://www.anuies.mx/servicios/c_licenciatura/index2.php

ANUIES (2007). *Catálogo de carreras de Licenciatura en Universidades e Instituciones Tecnológicos 2007.* Recuperado el 13 de junio de 2010 de http://www.anuies.mx/servicios/c_licenciatura/index2.php

Artigue, M. (2003). ¿Qué Se Puede Aprender de la Investigación Educativa en el Nivel Superior? *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, X(2),* 117-133.

Fuentes, H., Pérez, L. & Mestre, U. (1995). *Conferencias de Diseño Curricular*. Universidad de Oriente. Centro de Estudios de Educación Superior "Manuel F. Gran"

Fuentes, R. (1998). *La emergencia de un campo académico: continuidad utópica y estructuración científica de la investigación de la comunicación en México.* México: ITESO. Universidad de Guadalajara

Godino, J. D. (2006). Presente y Futuro de la Investigación en Didáctica de las Matemáticas. Ponencia invitada en la 29ª *Reunión Anual de la Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação (ANPEd)*, Caxambu, Minas Gerais, 15-18 Octubre, 2006. Recuperada de http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo.../docs.../presente.pdf

Grigoriu, B. (2005). La Educación Matemática en Bolivia. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, Marzo (1),* 55-88.

Hernández J. y Dolores C. (2011). La Matemática Educativa en los currículos oficiales de profesores de matemáticas del nivel bachillerato en México. *Memorias de la XIII Conferencia Interamericano de Educación Matemática*. Brasil: ANAIS CIAEM.

Horruitiner, P. (2006). El reto de la transformación curricular. *Revista Iberoaméricana de Educación*, *40(3),* 1-13.

Howson, G., Keitel, C., Kilpatrick, J. (1981). *Curriculum development in mathematics*. United States of America: Cambridge.

Instituto Politécnico Nacional. Recuperado el 05 de mayo de 2010 de http://pruebawww.esfm.ipn.mx/licenciaturas/licenciatura/info-lfismat.php

Socas, M., Afonso, C., Hernández, J. & Palarea, M. (1994). Un modelo de investigación convergente en educación matemática desde una perspectiva curricular. *Revista interuniversitaria de Formación del Profesorado, Septiembre-Diciembre (21),* 45-58

Universidad Autónoma de Baja California. Recuperado el 14 de abril de 2010 de http://www.uabc.mx/

Universidad Autónoma de Ciudad Juárez. Recuperado el 21 de abril de 2010 de http://www2.uacj.mx/IIT/CBE/Matematicas/default.htm

Universidad Autónoma de Nayarit. Recuperado el 26 de abril de 2010 de http://www.uan.edu.mx/oferta/programa/LME/

Universidad de Colima. Recuperado el 21 de abril de 2010 de http://www.ucol.mx/docencia /facultades/fciencias/

Universidad de Sonora. Recuperado el 21 de abril de 2010 de http://www.uson.mx/oferta_educativa/pe/licmatematicas.htm

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Recuperado el 05 de febrero de 2009 de http://fismat.umich.mx/web/

ACEPTACIÓN Y/O RECHAZO AL USO DE LAS TECNOLOGÍAS EN EL AULA. CASO: PROFESOR DE MATEMÁTICAS

Ricardo Valles
Universidad Simón Bolívar Venezuela
prfricardovalles@gmail.com

Resumen: El objetivo principal de este trabajo surge por la inquietud de estudiantes y profesores de Institutos de Educación Universitaria en Venezuela (Universidad Simón Bolívar, Universidad Nacional Abierta, Universidad Nacional Experimental de las Fuerzas Armadas, Universidad Pedagógica, entre otras); así como también los comentarios de algunos colegas de Universidades en Costa Rica y República Dominicana, donde se observa con gran preocupación el rechazo que presentan y plantean muchos profesores en el área de las matemáticas al uso e implementación de las tecnologías en sus programas y contenidos programáticos. Luego de realizar los estudios y corroborar el grado de analfabetismo tecnológico existente en los profesores de matemática, se consideraron elaborar cursos, diplomados y talleres para involucrar a nuestros docentes en el uso de las tecnologías.

Palabras clave: tecnologías, analfabetismo, programas, profesores

Abstract: The primary purpose of this work arises by the anxiety of students and professors from Institutes of University Education in Venezuela (Universidad Simón Bolívar, Universidad Nacional Abierta, Universidad Nacional Experimental de las Fuerzas Armadas, Universidad Pedagógica, among others); as well as the comments of some colleagues of Universities in Costa Rica and Dominican Republic, where they observe with great preoccupation the rejection that many professors of the area of mathematics show and present to the use and implementation of technologies in their programs and programmatic contents. After performing the studies and corroborating the degree of existing technological illiteracy in professors of mathematics, it was considered to design courses, diplomas and workshops to involve our professors in the use of technologies.

Key words: technologies, illiteracy, programs, professors

Introducción

Existe en la actualidad una controversia en el ámbito educativo específicamente entre los profesores de matemática en relación al uso didáctico de las nuevas tecnologías. Windchitl y Sahl (2002) señalan que la incorporación de las TICS a la práctica educativa de los profesores está condicionada, fundamentalmente, por tres factores: a) el conocimiento que poseen a nivel de usuario, b) las actitudes que presentan ante las TICS y ante el desarrollo tecnológico en general y, c) la percepción que tengan de la utilidad y potencial pedagógico de las TICS. A estas tres condiciones, podríamos añadirle una cuarta, la compatibilidad, es decir, la convicción que tengan los docentes acerca de la posibilidad y viabilidad de emplear conjunta o complementariamente medios tecnológicos con otros medios didácticos más tradicionales. En relación a los conocimientos que los profesores tienen de las TICS como medio didáctico, algunos estudios indican que aunque se muestran convencidos de las ventajas y beneficios que sobre el aprendizaje del alumno obtendrían al emplearlas, su escasa experiencia y conocimiento sobre sus aplicaciones educativas les genera inseguridad, que se traduce en un rechazo de las mismas e incluso en la emergencia de sentimientos de tecnofobia (Rosen y Weil, 1995; Finlayson y Perry, 1995; Francis-Pelton y Pelton, (1996). En este sentido, numerosos informes internacionales advierten que el profesorado no se siente suficientemente formado para trabajar con las TICs en el aula e incorporarlas a su práctica instruccional (CEO Forum, 2001; OECD, 2001; ISTE, 2002; Comisión Europea, 2002). Esta falta de formación no recae exclusivamente en profesores con una dilatada experiencia docente, sino que también se detecta en las nuevas generaciones de enseñantes (Watson, 1997; Strudler, McKinney, Jones, y Quinn, 1999). En uno de los estudios más recientes, Albirini (2006) señala que el 82.8% de los docentes no manifiesta ningún tipo de competencia para trabajar con las TICS en el aula; el 16.6% demuestra tener un nivel de competencia medio y que sólo el 0.6% poseen un alto nivel de competencia en este ámbito. Para Wall (2005), como para nosotros, el factor más importante de puesta en funcionamiento es el cambio de comportamiento y reacciones de los profesores. Por lo antes expuesto la siguiente propuesta busca de alguna manera dar respuesta a las diferentes inquietudes de los docentes de matemática en el uso de la tecnología, así como también proponer soluciones viables en el ámbito académico.

Desarrollo y metodología

El objetivo principal de este trabajo surge por la inquietud de estudiantes y docentes de Institutos de Educación Universitaria en Venezuela (Universidad Simón Bolívar, Universidad Nacional Abierta, Universidad Nacional Experimental de las Fuerzas Armadas, Universidad Pedagógica, entre otras); así como también los comentarios de algunos colegas de Universidades en Costa Rica y Republica Dominicana; donde observan con gran preocupación el rechazo que presentan y plantean muchos profesores en el área de las matemáticas al uso e implementación de las tecnologías en sus programas y contenidos programáticos. En este orden de ideas, nos propusimos un trabajo de campo en diferentes Universidades de nuestro País, empleando como instrumento de recolección de datos, encuestas dirigidas a una muestra de quince estudiantes y diez profesores en el área de las matemáticas en cinco universidades experimentales; las preguntas se centraron en los siguientes aspectos; ¿Por qué crees que los docentes utilizan muy poco las tecnologías en los programas de matemáticas?, ¿Crees que los contenidos matemáticos, podrían ser más significativos, si los docentes emplearan con mayor frecuencias las tecnologías?, ¿Los contenidos matemáticos, no necesitan de los aportes de las tecnologías?, ¿Consideras que el uso de las tecnologías generarían una motivación para el abordaje de los estudios en los contenidos matemáticos?.

Resultados

Los resultados obtenidos giraron en torno a diversas opiniones, en su mayor proporción hay quienes piensan que los docentes muestran rechazo al uso de las tecnologías por que la mayoría tienen avanzada edad, y poseen muchos años trabajando con el mismo programa didáctico. Otros opinan que su negación a la implementación de la tecnología se debe a que deberían dedicar mayor tiempo para el aprendizaje y preparación de sus contenidos didácticos con el uso de la tecnología. Hay quienes expresan que el rechazo manifestado por los docentes se debe a inexperiencia y/o falta de seguridad en la utilización de las nuevas tecnologías, sin embargo, existen docentes con pocos años en las universidades y de menor edad a los cuales, simplemente, no les gusta utilizar las nuevas tecnologías aunque sepan manejarlas. Otros están de acuerdo que los contenidos matemáticos se tornarían más dinámicos y amigables con el uso de las tecnologías (software, programas y paquetes matemáticos entre otros), y por consiguiente su aprendizaje sería muy significativo. También consideran que muchos de los contenidos matemáticos se podrían abordar con software, y videos didácticos, ya que muchas de las universidades seleccionadas poseen el equipamiento tecnológico en sus ambientes de clases. Muchos no se explican cómo es posible que teniendo el soporte y equipamiento necesario en sus casas de estudios, aun siguen viendo los contenidos matemáticos de una manera tradicional y abstracta. Los docentes alegan que el solo hecho de sentarse frente al computador les genera cansancio en la vista, dolor de espalda o simplemente no se sienten preparados para afrontarse con estos recursos actualizados. Por estos motivos prefieren seguir aplicando las mismas estrategias tradicionales que se conocen hasta ahora; también obtuvimos como respuestas: resistencia al cambio, deficiencias de formación en cuanto al uso de las tecnologías, entre otras.

Análisis

Estas afirmaciones obtenidas en las encuestas realizadas, comprueban que el porcentaje de analfabetismo tecnológico entre los docentes universitarios es alto, y sugiere una serie de propuestas para solucionar la misma o darle algunas opciones de ayuda para ir mejorando esta situación. En tal sentido, se considera que el reto primordial de la innovación tecnológica consiste en un cambio en la mentalidad del docente tanto en su área laboral como en su ámbito personal, de acuerdo a las exigencias de la sociedad.

Conclusiones

Entre las conclusiones y propuestas de soluciones, Barroso (2003) señala que las actitudes de los profesores hacia los medios tecnológicos se pueden analizar desde una doble perspectiva, una se refiere a las actitudes que los profesores suelen tener hacia los medios audiovisuales, informáticos y las nuevas tecnologías de la información en los centros educativos y otra a la importancia que las actitudes pueden tener para facilitar o dificultar la interacción con los medios; Calderón (2004), cita a Sancho (1994) para señalar que

> Las actitudes de los docentes se sitúan entre dos polos de un continuo: entre la tecnofobia y la tecnofilia, es decir, por un lado están las personas que rechazan el uso de las máquinas y que incluso utilizándolas sienten desagrado, puesto que prefieren trabajar sin ellas. En el otro extremo se encuentran los que se sienten plenamente incorporados al mundo de la tecnología, los que siguen con entusiasmo su evolución e innovación, los que están al día de los últimos productos, de las últimas versiones y, sobre todo, los que están convencidos de que la tecnología equivale a evolución y progreso y son de la idea de que si las escuelas estuvieran adecuadamente dotadas y los profesores adecuadamente formados, los alumnos aprenderían de forma mágica. (p. 3)

Sin embargo, nosotras añadiríamos un tercer agrupamiento de docentes, que se referiría a todos aquellos que comprenden la importancia de la incorporación de las tecnologías al aula pero que desconocen su uso y se ven desbordados por los avances tecnológicos, docentes que, aunque muy interesados en el tema, naufragan porque no conocen ni siquiera por donde deben empezar o donde deben informarse, y que agobiados contemplan como el asunto se les escapa de las manos. Entre los aportes para futuras soluciones que se generaron del trabajo tenemos: elaborar un grupo de trabajo con docentes especialistas en el área de tecnologías educativas, así como también colegas de las Universidades que tengas un grueso conocimiento en el área; para planificar talleres, cursos y diplomados de los diferentes paquetes y programas educativos, por otro lado, también el manejo de diferentes plataformas educativas. Elaborar los cursos y diplomados por fases o etapas de un nivel inicial hasta un nivel avanzado o superior, para que así todos nuestros colegas puedan tener acceso y desenvolverse en las actividades de una manera agradable y flexible. Recordemos que nosotros como docentes debemos constantemente estar actualizándonos tanto en nuestra área educativa como en las nuevas tecnologías, con información actualizada y relevante que enriquezca las perspectivas de nuestros estudiantes y así lograr un mejor desarrollo de los contenidos matemáticos.

Referencias bibliográficas

Albirini, A. (2006). Teachers' attitudes toward information and communication technologies: the case of Syrian EFL teachers. *Computers & Education*, 47, 373-398.

Barroso, J. (2003). La formación del profesorado universitario en Nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación. En Francisco Martínez Sánchez y María Torrico Ferrel (coord). *Las Nuevas Tecnologías de la información y la comunicación en la aplicación educativa.* Universidad Nur.

Calderón, F. P. (2004). *Actitudes de los docentes ante el uso de las tecnologías educativas. Implicaciones afectivas*. Recuperado el 08 de marzo de 2011 de http://www.ilustrados.com/publicaciones/Ep2

Ceo Forum. (2001). *Key Building Blocks for student achievement in the 21st century.* Four Year. Recuperado el 04 de marzo de 2011 de http://www.ceoforum.org/downloads/report4.pdf

Comisión Misión Europea-Eos Gallup Europe. (2002). *Les enseignants et la societé de l'information.* FLASH EB-119, (Bruselas, Comisión Europea). Recuperado el 04 de abril de 2011 http://europa.eu.int/comm/public_opinion/flash/fl119_fr.pdf

Finlayson, H. M. y Perry, A. (1995). Turning skeptics into missionaries: the case for compulsory information technology courses. *Journal of Information Technology for Teacher Education*, 4(3), 351-361.

Francis-Pelton, L. y Pelton, T. (1996). *Building attitudes: how a technology course affects pre-service teachers' attitudes about technology*. Recuperado el 09 de abril de 2011 de http://web.uvic.ca/educ/lfrancis/web/attitudesite.html

Iste. (2002). *Educational Computing and Technology Standards for Technology Facilitation, Technology Leadership and Secondary Computer Science Education*. Recuperado el 04 de marzo de 2011 de http://www.iste.org

Oecd. (2001). Learning to change: Ict in schools. Paris.

Rosen, L. y Weil, M. (1995). Computer availability, computer experience and technophobia among public school teachers. *Computers in Human Behavior*, 11(1), 9-31.

Strudler, N., McKinney, M., Jones, P. y Quinn, L. (1999). First-year teachers' use of technology: preparation, expectations and realities. *Journal of Technology and Teacher Education*, 7(2), 115-129.

Wall, D. (2005). *The impact of highstakes examinations on classroom teaching: A case study using insights from testing and innovation theory,* Cambridge: Cambridge University Press.

Watson, G. (1997). Pre-service teachers' views on their information technology education. *Journal of Information Technology for Teacher Education*, 6(3), 255-269.

Windchitl, M. y Sahl, K. (2002). Tracing Teachers' Use of Technology in a Laptop Computer School: The Interplay of Teacher Beliefs, Social Dynamics, and Institutional Culture. *American Educational Research Journal*, 39(1), 165-205

EVALUACIÓN DE LA PRÁCTICA DOCENTE FRENTE A GRUPO. EL CASO DE LA FACULTAD DE MATEMÁTICAS DE LA UADY

María Rosado Ocaña, Genny Uicab Ballote, Brenda Gamboa Marrufo
Universidad Autónoma de Yucatán México
rocana@uady.mx, uballote@uady.mx, bgamboa@uady.mx

Resumen: Se presenta una experiencia institucional con relación a la evaluación del desempeño de los profesores en el aula, que se realiza cada período escolar en la Facultad de Matemáticas de la UADY. La evaluación del desempeño docente resulta una herramienta útil para el profesor respecto a su práctica en el aula, siendo la principal fuente de información los alumnos; quienes al responder de forma crítica un instrumento diseñado en años anteriores, pero actualizado y organizado en dimensiones o categorías del trabajo docente, ofrecen orientación al profesor para mejorar su labor docente frente a grupo.

Palabras clave: evaluación, práctica docente, sistema en línea.

Abstract: An institutional experience is presented with relation to the evaluation of the performance of the professors in the classroom that each school period in the Faculty of mathematics of the UADY is carried out. The evaluation of the educational performance results an useful tool for the professor with respect to its practice in the classroom, being the main source of information the students; who upon responding of critical form an instrument designed in previous years, but brought up to date and organized in dimensions or categories of the educational work, they offer orientation to the professor to improve their educational work set against group.

Key words: evaluation, educational practice, system on line

Introducción

La evaluación como proceso cognitivo, es inherente al ser humano. Se considera que, evaluar es uno de los procesos psicológicos superiores más importantes, se relaciona con la capacidad de juicio que toda persona desarrolla a lo largo de su vida, y se inicia en las últimas etapas de la infancia extendiéndose hasta la adolescencia casi al mismo tiempo que el pensamiento lógico. Cuando los procesos de evaluación se trasladan hacia *objetos de evaluación* o hacia *sujetos de evaluación* la situación se torna compleja y requiere de tiempo y esfuerzo, sobretodo porque en ese caso se necesita de una sistematización más o menos convencional de ciertos pasos metodológicos para realizar tales evaluaciones fuera de nuestra psique (Frola, 2008).

La evaluación docente es una actividad que se ha realizado de manera continua en la Facultad de Matemáticas desde el año 1985, el proceso de desarrollo del mismo ha ido modificándose y actualizándose en muchos aspectos. En el año 2000, la Facultad de matemáticas inicia una actividad de actualización y mejoramiento de la docencia y se crea un comité conformado por el secretario académico de la facultad y como asesor del comité a un doctor en educación con amplia experiencia en el tema de la evaluación docente. Se da inicio mediante un taller dirigido a profesores que de manera voluntaria y a invitación de la Dirección, estuvieran interesados en mejorar su actividad docente. En esa ocasión, participaron 6 profesores. En los años subsiguientes se realizaron pequeños cursos y talleres de inducción a la docencia con profesores de nuevo ingreso. El asesor de esas actividades fue el mismo doctor en Educación, asesor del Comité. Sin embargo, no hubo un seguimiento sistemático de tales acciones. Luego, de acuerdo con Fernández, 1998, considerando que:

- La función administrativa de una IES es promover, propiciar, facilitar y apoyar de manera eficaz y eficiente las funciones académicas: docencia, investigación y extensión o servicio;
- La función fundamental y prioritaria de una IES es la docencia y
- El crecimiento, el desarrollo y la mejora de los programas educativos y el desempeño de los docentes requiere una atención más específica, pertinente y oportuna.

La Secretaría Académica estableció la Coordinación de Desarrollo y Mejoramiento Docente, actualmente nombrado *Comité de Evaluación, Desarrollo y Mejora de la Docencia* (CEDyMD, 2011).

Cuyas funciones son:

A. Promover el desarrollo y mejora del proceso enseñanza-aprendizaje en cada una de las asignaturas de las licenciaturas.
B. Promover y facilitar las funciones y actividades docentes.
C. Propiciar, facilitar y apoyar a los docentes, individual y grupalmente, en la mejora de su práctica docente a partir de la reflexión y evaluación permanente, sistemática y organizada de la misma.
D. Promover la integración de la docencia con la investigación (disciplinaria y educativa) y con la extensión o servicio.
E. Diseñar, proponer y coordinar la implementación y realización de programas, estrategias y actividades de evaluación del desempeño docente.
F. Diseñar, proponer y coordinar la implementación y realización de planes, programas, estrategias y actividades para el desarrollo y mejora de la función docente, sustentados en los resultados de la evaluación del desempeño de los docentes.

Posteriormente, en el año 2003, se crea de manera formal el *Programa de Desarrollo y Mejoramiento Docente,* siendo nombrado un profesor del área de Enseñanza de las matemáticas como coordinador y como asesor al mismo doctor del área de Educación. Tres años después se integra un Comité conformado por dos profesoras del área de Enseñanza de las

Matemáticas y el mismo asesor del comité. De enero de 2007 a la fecha actual, el comité se ha reestructurado como *Comité de Evaluación, Desarrollo y Mejora de la Docencia (CEDyMD)*, y está integrado por dos profesoras de Enseñanza de las Matemáticas, un profesor de Matemáticas, el asesor del comité y un profesor del área de computación, encargado del soporte técnico; ya que ahora se cuenta con el Sistema de Evaluación Docente (SED) en línea. Dicho comité confiere atención a los dos proyectos establecidos desde sus inicios en el Programa de Evaluación de la Práctica Docente de la facultad:

1. Evaluación del desempeño docente
2. Capacitación y actualización de la práctica educativa

El presente trabajo, reporta la experiencia de profesoras que han estado presentes en la conformación y desarrollo del CEDyMD como integrantes del mismo y a la vez, como experiencia de profesoras que han sido evaluadas a través del SED en línea, con la convicción de que el proceso de evaluación tiene la principal función de retroalimentar nuestra práctica docente frente a grupo para identificar nuestras áreas de oportunidad y mejorar en beneficio de una mejor calidad en la enseñanza y el aprendizaje de nuestros estudiantes, con lo cual estamos seguras de compartir ideas afines a muchos docentes de nuestro país y más aún de América Latina.

Problemática

La problemática que atiende el Programa de Evaluación de la Práctica Docente en la Facultad de Matemáticas de la UADY, es la posible falta de formación didáctica de profesores que imparten clases en los seis programas de licenciatura que se ofrecen en la Facultad.

Propósito

El propósito del Programa de Evaluación de la Práctica Docente en la Facultad de Matemáticas es evaluar y retroalimentar la práctica docente frente agrupo y para ello se trabaja al interior del Comité de Evaluación, Desarrollo y Mejora de la Docencia (CEDyMD).

Evaluación del desempeño docente

En el proceso de evaluar se pueden distinguir siete fases: 1) Planeación del proceso, 2) Elaboración del instrumento, 3) Preparación, 4) Aplicación, 5) Calificación, 6) Resultados y 7) Información resultante y acompañamiento hacia la mejora (Frola, 2008).

Como se ha mencionado, la evaluación del desempeño docente resulta una herramienta útil para el profesor respecto a su práctica en el aula, siendo la principal fuente de información los alumnos; quienes al responder de forma crítica un instrumento organizado en dimensiones o categorías del trabajo docente, ofrecen orientación al profesor para mejorar su labor docente frente a grupo.

Actualmente, en la Facultad de Matemáticas de la UADY, se cuenta con el Sistema de Evaluación Docente (SED) en línea (Figura 1).

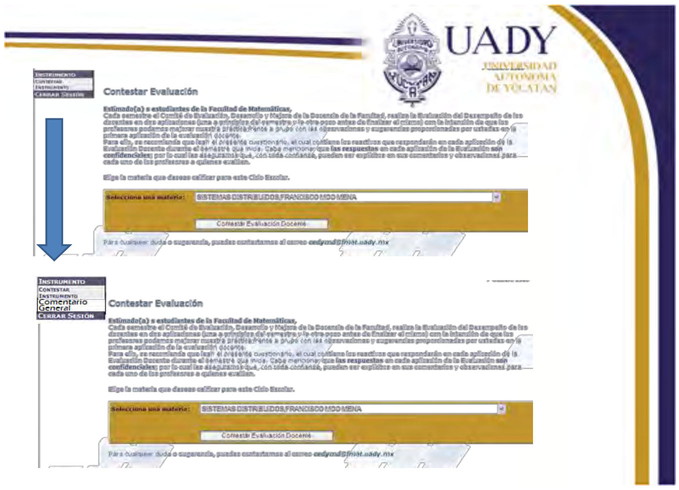


Figura 1. Sistema de Evaluación Docente en línea

Dicho Sistema, se ha ido modificando desde su creación e implementación, durante el período de septiembre de 2007 a enero de 2008, hasta la fecha actual y se ha ampliado de tal forma que permite obtener mayor información como la siguiente:

1. Categorización de las respuestas según la clasificación considerada en el diseño del instrumento, dando como resultado información del trabajo del profesor como planificador, organizador, facilitador, motivador, comunicador-expositor, responsabilidad, evaluador-calificador (Figura 2).

2. Comparativos de profesores que imparten la misma asignatura, comparativos entre las diferentes asignaturas que ofrece un mismo profesor, comparativos entre los profesores de una misma asignatura, comparativos entre todos los profesores de un mismo semestre, entre otros

3. Emisión de los reportes para los profesores, de forma digital (reporte general y por categorías, de cada asignatura), mismos que puede consultar de manera directa cada profesor, ingresando al SED en línea (Figura 3).

Pregunta	
1. Explicó, al inicio del curso, de manera clara cómo se desarrollaría todo el curso.	
2. Especifica en cada sesión las actividades que se realizarán.	
3. Define con claridad los criterios de evaluación de cada actividad durante el curso.	
4. Demuestra conocimiento de la asignatura.	
5. Relaciona los temas de la asignatura con la práctica profesional.	
6. Relaciona los temas de la asignatura con otras asignaturas.	
7. Comunica con claridad sus exposiciones, instrucciones, explicaciones, etc.	
8. Asigna calificaciones de acuerdo a los criterios establecidos para las tareas, actividades, exámenes, proyectos, etc.).	
9. Propone realizar actividades que contribuyen para que aprendamos bien.	
10. Evalúa nuestras actividades de aprendizaje según los requisitos establecidos para las mismas.	
11. Proporciona retroalimentación de las tareas, proyectos y exámenes.	
12. La retroalimentación en relación a tareas, proyectos y exámenes me ayudó a mejorar mi aprendizaje.	
13. Es respetuoso con los alumnos.	
14. Asiste con puntualidad a dar sus clases.	
15. Recomendaría este docente a otros estudiantes.	
16. Cómo consideras las cargas de trabajo de las actividades extra clase.	
17. Cómo calificas el desempeño del docente.	
18. Mi desempeño como alumno ha sido.	

Figura 2. Reactivos del instrumento de Evaluación Docente

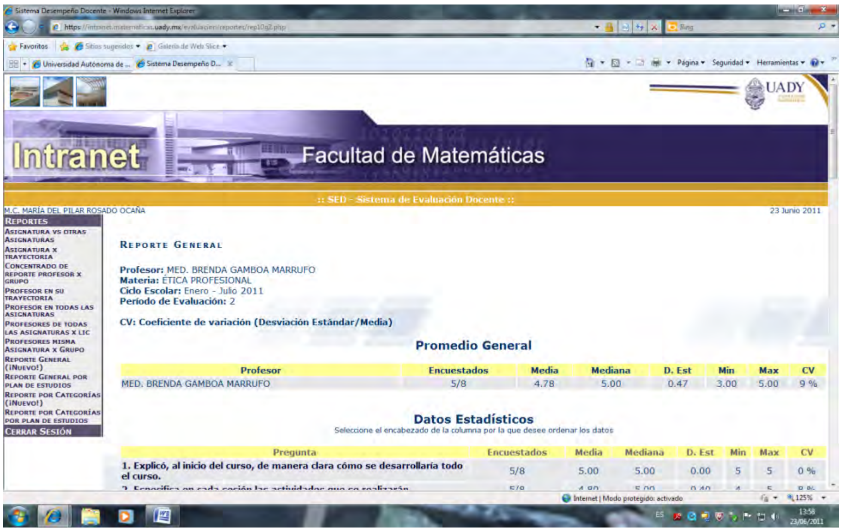


Figura 3. Reporte general por profesor-asignatura que genera el SED en línea.

Desarrollo del Proceso de Evaluación Docente

Aunado a lo anterior, el CEDyMD tiene a su cargo el desarrollo del proceso de aplicación del SED en línea durante cada período escolar, para lo cual estructura una calendarización de los grupos de alumnos que deberán pasar al centro de cómputo para evaluar el desempeño de sus profesores. Al principio, se programaban a los grupos de todos los semestres por cada licenciatura para que evaluaran a cada uno de los profesores que les impartían alguna

asignatura; sin embargo, dado que la mayoría de los estudiantes cursaba entre 5 y 6 asignaturas por período escolar y en vista de que el instrumento les parecía demasiado extenso, les resultaba cansado evaluar a cada uno de sus profesores y la evaluación perdía objetividad cuando los estudiantes, después de evaluar a tres o cuatro de sus profesores, evaluaban a los últimos profesores de manera arbitraria, sin mucha reflexión, por lo que se procedió a analizar cada reactivo de dicho instrumento, con lo cual se eliminaron algunos reactivos y otros se reestructuraron. Por otra parte, desde el período escolar agosto-diciembre 2010, se ha trabajado seleccionando muestras aleatorias de estudiantes para que evalúen a cada profesor-asignatura, con lo cual se disminuyó el tiempo que requieren los estudiantes para evaluar a sus profesores, ya que de esta manera, la mayoría de los estudiantes evalúan de uno a tres de sus profesores y no a todos los que les imparten clases en cada semestre.

A pesar de lo anterior, el porcentaje de participación de los estudiantes no ha sido el esperado en los dos últimos períodos escolares, ya que muchos estudiantes no asisten a las clases de los profesores (de los grupos seleccionados que se llevan al centro de cómputo para contestar la evaluación docente) y aunque el SED en línea permanece abierto durante un período de tres a cuatro semanas, la mayoría de los alumnos no ingresan al sistema de manera voluntaria para contestar la evaluación de los docentes que les corresponde, aun cuando en la actualidad ya no tienen que evaluar a todos sus profesores (Figura 4).

Entre las justificaciones que los alumnos suelen dar ante dicha situación se encuentran que "no tuvieron tiempo de responder la evaluación docente", "se les olvidó y cuando lo intentaron ya se había cerrado el sistema" ó simplemente que "no ven la utilidad" del mismo, dado que en ocasiones anteriores han externado inconformidad acerca de algún profesor y no han visto algún cambio favorable.

Porcentaje de grupos	Porcentaje de alumnos	Grupos Evaluados
4%	0%	6
6%	20%	9
1%	34%	1
15%	40%	23
20%	60%	30
1%	67%	1
2%	75%	3
28%	80%	42
24%	100%	36
Total de grupos evaluados:		**151**

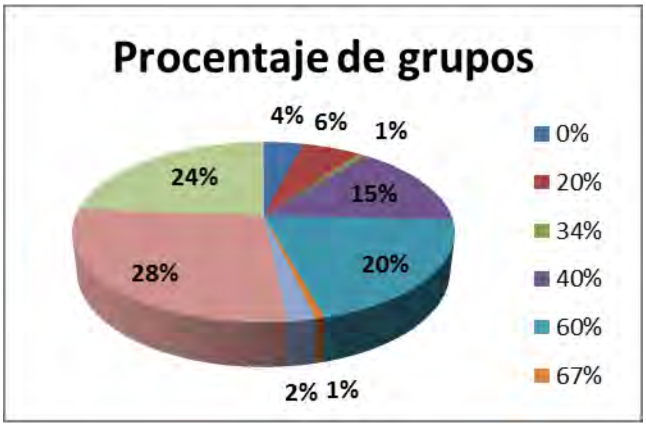


Figura 4. Resultados de la aplicación del SED en línea en el período enero-junio 2011

Difusión del Programa de Evaluación Docente

Con el objetivo de familiarizar a los estudiantes de nuevo ingreso con este proceso de evaluación, los integrantes del CEDyMD trabajamos con los estudiantes de nuevo ingreso en una sesión, durante las actividades de inducción a la Facultad de Matemáticas, para darles a conocer el programa y en especial el instrumento que se emplea durante la evaluación docente. Entre las actividades de dicha sesión, se solicita a los estudiantes reportar por escrito su interpretación a cada uno de los reactivos que integran el instrumento de evaluación para su posterior análisis.

En consecuencia de lo anterior, los integrantes del CEDyMD realizamos el análisis de las respuestas de los estudiantes y resumimos dicha información para presentar propuestas de modificación del instrumento de evaluación docente, cuando se considera pertinente.

Al iniciar cada período de aplicación del SED en línea, se solicitan al departamento de control escolar, los datos necesarios para la administración del sistema y se realiza la programación de los grupos de estudiantes que evaluarán a sus profesores en el centro de cómputo, tratando de abarcar a la mayor cantidad de alumnos posible, dado que la flexibilidad de los planes de estudio dificulta el que se cubra la cien por ciento de los estudiantes con esta selección de grupos, se realiza la difusión del período de evaluación docente, con el apoyo de mantas de promoción (Figura 5), mensajes al inicio de las computadoras del centro de cómputo y se solicita el apoyo de los profesores para promover en sus grupos la participación de los estudiantes en el proceso de evaluación docente.

Posteriormente al período de aplicación del SED en línea, se les exhorta a los profesores a revisar sus reportes a través del sistema en línea, a reflexionar acerca de sus fortalezas y áreas de oportunidad para mejorar su práctica docente frente a grupo y a realizar la retroalimentación correspondiente con cada uno de los grupos a su cargo. Además, se les solicita realizar una actividad de retroalimentación de sus resultados de la evaluación docente al interior de los cuerpos académicos y entregar a secretaría académica un reporte de dicha actividad. Todo lo anterior, con la intención de promover la realización, de alguna manera, de los tres tipos básicos de evaluación: autoevaluación, coevaluación y la evaluación mutua, de acuerdo a los lineamientos que establece la evaluación formativa (Díaz-Barriga y Hernández, 2002).

Figura 5. Cartel de promoción de la Evaluación Docente en línea

Capacitación y actualización de la práctica educativa

Entre las acciones propuestas por el CEDyMD como resultado del proceso de la Evaluación Docente, se han impartido *Talleres de Inducción a la Docencia* a grupos de profesores (por lo general, de nuevo ingreso a la Facultad) desde el año 2003 al 2009 y recientemente, se impartió el diplomado *"Profesionalización de la Práctica Docente en el nivel superior"* impartidos por el asesor del comité con la colaboración de una Dra. Experta en el área de Educación a un grupo de profesores, en su mayoría, en período de estabilidad laboral. Ambos cursos de actualización, se han basado en promover las estrategias de la enseñanza centrada en el aprendizaje del estudiante y en fomentar la evaluación sumativa como base para propiciar aprendizajes significativos en los estudiantes y el desarrollo de habilidades y actitudes como la comunicación verbal y escrita, y el trabajo colaborativo, entre los estudiantes.

Referencias bibliográficas

CEDyMD, (2011). *Programa de Desarrollo y Mejora de la Docencia.* Documento no publicado. Facultad de Matemáticas, UADY.

Díaz-Barriga, F. y Hernández, G. (2002). *Estrategias Docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista*. México: McGraw-Hill/Interamericana.

Fernández, V. (1998). *Surgimiento, Evolución y Perspectivas de la Evaluación del Desempeño del Personal Académico en la Universidad Autónoma de Yucatán (Contribución a su Análisis y Desarrollo*). México: Ediciones de la Universidad Autónoma de Yucatán.

Frola, P. (2008). *Competencias Docentes para la Evaluación: diseño de reactivos para evaluar el aprendizaje*. México: Trillas.

DOCENCIA EN MATEMÁTICAS. UNA RED PARA EL APRENDIZAJE DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Elizabeth Mariscal, Javier Lezama.
CICATA-IPN. México
elimariscal@gmail.com, jlezamaipn@gmail.com

Resumen: En el marco de la formación y desarrollo de los profesores de matemáticas se plantea la construcción de un espacio virtual que busca congregar a profesores de matemáticas de distintos niveles educativos, con el fin de que a través de interacciones se produzca un efecto formativo que redunde en su actividad profesional, que es la docencia en matemáticas

Palabras clave: Redes sociales virtuales, formación, profesores.

Abstract: In the context of professional education and development of mathematics teachers are raised to build a virtual space that seeks to bring together mathematics teachers from different educational levels, to produce a formative effect that it reflects their professional activity.

Key words: Virtual social networks, professional development, mathematics teachers.

Introducción

Un análisis de la literatura internacional en Matemática Educativa en relación al profesor de matemáticas, señala la aparición y consolidación de un campo específico para el profesor de matemáticas, en el ICME 10 (2004), en la plenaria denominada "Professional Development of Mathematics Teachers", que después fue publicada en (Adler, Ball, Krainer, Lin & Novotna, 2005). Llama la atención la emergencia de un amplio número de investigaciones que giran alrededor de lo que se puede denominar el "campo de investigaciones sobre la formación y desarrollo de los profesores de matemáticas".

En el 15th ICMI study sobre *The professional education and development of teachers of mathematics* (Even & Ball, 2009) se coloca como premisa de partida del estudio que, "los profesores son la clave de oportunidad de aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes". Qué elementos, condiciones, actitudes son los que los convierten en dicha clave, eso es lo que se pretende responder con dicha publicación.

Los editores declaran tres factores que justifican un diálogo intercultural sobre la formación profesional de los profesores de matemáticas en el mundo. El primer factor se basa en el reconocimiento del rol fundamental del profesor en el proceso de aprendizaje de las matemáticas de los alumnos, dicho rol traducido en demandas específicas al trabajo del profesor, a lo que sabe y lo que es capaz de hacer. El segundo factor, se señala que todo esfuerzo de mejora en las oportunidades de aprendizaje de las matemáticas de los alumnos en los distintos niveles educativos, va a la par con las oportunidades de aprendizaje y formación de los profesores. La formación profesional de los profesores de matemáticas es crucial en el proyecto de una mejora en la educación matemática de la sociedad. Finalmente afirman que la formación del profesor "Teacher education" es un proyecto amplio y constituye un área específica de estudio, de reciente reconocimiento pero de rápida expansión. Chapman (2011) afirma que el campo de investigación sobre el profesor de matemáticas ha tenido un crecimiento sustancial ejemplo de ello es la aparición del Journal of Mathematics Teacher

Education [JMTE] y la respuesta que tuvo a su convocatoria para publicar su número especial sobre Mathematics Teacher and Mathematics Teacher Educator Change. Algunos de esos artículos hacen mención de la necesidad para el campo de crear métodos de investigación idóneos para indagar situaciones en el campo profesional de la formación de profesores de matemáticas que involucren al formador en la investigación. En un capítulo denominado "Research methods in mathematics teacher education" Gellert, Chapman & Becerra, 2012) en el Third International Handbook of Mathematics Education (Springer), próximo por aparecer, se discute una versión de *participatory action research* como un ejemplo de una manera diferente de aproximarse a la investigación pertinente para el campo. De la misma forma señalan que la importancia del campo es relevante porque por primera vez en el International Congress on Mathematical Education a realizarse en el 2012 se incluyen grupos de trabajo sobre *inservice education*, *professional development of mathematics teachers* y uno más sobre *preservice mathematical education of teachers*.

En México y en América Latina, no hemos estado ajenos al surgimiento a dicho interés de investigación y se han dado respuestas variadas, tal es el caso del Posgrado en Matemática Educativa que se imparte en el Cicata del IPN, México, el cual se dirige a profesores de matemáticas y constituye una respuesta formulada por un grupo de investigadores del campo de la Matemática Educativa a la demanda social de una mayor y mejor formación matemática de los individuos en la sociedad actual y el reconocimiento del papel primordial del profesor de matemáticas en el logro en dicha formación (Even & Ball, 2009) El Posgrado, ha logrado congregar a profesores de México, Centro y Sudamérica (Mariscal, Rosas & Sánchez, 2008). El proyecto de formación se dirige a docentes en servicio de los niveles educativos preuniversitarios y universitarios.

El objetivo formativo del Posgrado se orienta a incorporar al profesor al campo Académico de la Matemática Educativa, acercándolo a su objeto de estudio (los procesos de adquisición del saber matemático en la escuela), a que conozca las teorías que dan nombre y explican los fenómenos en los procesos de aprendizaje, al acervo de hallazgos producto de la investigación que en el campo se realizan, a las fuentes de difusión de dichos productos, a grupos de trabajo e investigación, a metodologías de investigación y a la problematización y análisis de los hechos didácticos. Los estudios que se realizan en el posgrado se imparten manera formal en el marco de una institución, y en ese contexto es que nos preguntamos si es posible crear espacios de formación no estructurados que permitan formación al profesor. Es decir, construir escenarios que le permitan al profesor encontrarse con una comunidad, discutir los asuntos propios de la profesión, obtener información especializada para realizar su tarea como profesor. Es en este contexto en que se erige el presente proyecto.

Se plantea la construcción de un espacio virtual que busca congregar a profesores de matemáticas de distintos niveles educativos con el fin de que a través de interacciones se produzca un efecto formativo que redunde en su actividad profesional "La docencia en matemáticas". Una propuesta de esta índole requiere de una justificación teórica y práctica. Cómo construir un escenario que permita interacciones libres entre profesores y como resultado de esas interacciones podamos establecer un avance en el conocimiento del profesor, de qué conocimiento se está hablando. Esto sólo ya se constituye como un problema, por tal razón en esta parte del proyecto, nos abocamos a esbozar elementos teóricos y metodológicos que permitan poner a un colectivo en movimiento y a partir de ello estructurar un marco teórico que nos permita analizar y explicar lo que sucede en ese colectivo.

El supuesto básico sobre el *efecto,* es que éste se produce cuando en los profesores participantes hay un reconocimiento e identificación con un Campo Académico que afirmamos les es propio. Los participantes se ocupan de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, todos ellos realizan esa tarea, hay en ellos experiencia y habilidad en realizarla, se podría decir que saben lo que tienen que hacer, pero nosotros decimos que se incorporan al campo cuando reconocen al colectivo y problematizan la tarea. Se reconocen en el colectivo al haber intereses sociales e intelectuales compartidos. Entonces afirmamos que incorporarse al Campo Académico, es reconocer el carácter profesional de su actividad, su objeto específico de estudio, las problemáticas asociadas a dicho quehacer y la necesidad de dilucidarlas investigando, así como, las prácticas específicas, los criterios éticos de conducta de la profesión, y el reconocimiento e incorporación libre a la comunidad, adquiriendo un lenguaje académico especializado, reconociendo las fuentes de resguardo y de difusión del saber acumulado. Dicho en otro contexto, en el de la formación universitaria de los profesores Chevallard afirma:

> … digámoslo claramente: una educación que no se conciba en esta u otra forma, con una alta prioridad a la investigación y a analizar las cuestiones del "cordón umbilical" de la profesión, no parece ofrecer las garantías de la ética que se requiere en la formación profesional. Así que repito: en toda formación profesional primero hay que preguntarse sobre el origen de las preguntas y las cuestiones que pretende trabajar (Chevallard & Cirade, 2009).

Se ejemplifica el modelo de campo académico con el esquema de Fuentes y se señala

Con un círculo punteado el polo de la aplicación, que es el lugar donde ubicamos al profesor en cumplimiento de su tarea; aunque lo consideramos en muchos casos ajeno a lo que se denomina matriz disciplinaria, ésta propuesta busca incorporarlo a dicha matriz. El supuesto de este modelo es que cada una de estas modalidades (Investigación, Reproducción, Aplicación), está sujeta a determinaciones, tanto "internas" como "externas" diversas, y que deberán estar articuladas entre sí mediante un núcleo común de sentido básico compartido, que constituiría lo que podría llamarse "matriz disciplinaria" (Kuhn, 1982).

Imagen 1. Modelo

Redes sociales: una elección metodológica

Metodológicamente se hecho la elección de un formato de red social ya que en ella encontramos los elementos que favorecen interacciones sin nuestra directividad.

El empleo de redes sociales se ha remontan a 30 o 40 años pero algunos pensarían que se remontan a más y las piensan como un cuerpo teórico pues ha recibido influencias de la antropología, la sociología y la matemática recientemente, debido a que se ha podido hacer un análisis formal de sus estructuras. Otros piensan que el análisis metodológico y empírico de las redes sociales ha sido mayor que el teórico, por tal motivo no se le considera como una teoría.

Hacia una definición de redes sociales

Las definición de redes sociales ha estado sujeta a la interpretación e intereses teóricos y metodológicos de quienes las han estudiado, tales es el caso de John Arundel & Nadel Siegfried, citados por (Wellman, 2000). (Lozares, 1995); (Freeman, 2000) y C. James Mitchel, citados por Lozares y Dabas en (Crovi, López & López González, 2009), pero de tales definiciones podemos distinguir tres elementos básicos que encontramos en todas ellas, tales como: ¿A quiénes vinculan? A miembros o personas del sistema social, individuos, grupos, organizaciones, comunidades, sociedades globales, etc. ¿Cómo es que vinculan? A través de relaciones sociales, lazos amplios o específicos. ¿Qué caracterizan a estos vínculos? Que permiten superar categorías sociales y grupos cerrados y además algunos de los estudiosos afirman que el análisis de los lazos que se establecen permite interpretar comportamientos sociales que los distinguen. Finalmente por la amplitud de su definición y porque consideramos que abarca de manera amplia y clara el propósito de la red social que estudiamos, damos la definición de red social de Dabas.

> La red social implica un proceso de construcción permanente, tanto singular como colectivo, que acontece en múltiples espacios y (a) sincrónicamente. Podemos pensarla como un sistema abierto, multicéntrico y heterárquico, a través de la interacción permanente, el intercambio dinámico y diverso entre los actores de un colectivo… y con otros integrantes de otros colectivos, posibilita la potencialización de los recursos que poseen y la creación de alternativas novedosas para fortalecer la trama de la vida. Cada miembro del colectivo se enriquece a través delas múltiples relaciones que cada uno de los otros desarrolla, optimizando los aprendizajes al ser éstos socialmente compartidos (Dabas, 2002).

Señala asimismo que el estudio de las redes sociales no son un objetivo en sí mismos sino parte de una metodología para la acción, ya que permite a los integrantes de la organización ir más allá de su ejercicio individual mediante la reflexión colectiva a partir de objetivos y soluciones comunes. Éste constituye un elemento fundamental que provee una red social y que nos proponemos estudiar. Lo relevante del análisis de una red social radica que el interés no radica en las causas de lo que pasa en la red sino los *efectos* producto de su estructura y operación. Metodológicamente es aquí donde radica la singularidad de la red, al abrirla no se sabe con exactitud hasta donde llegará el resultado de su dinámica.

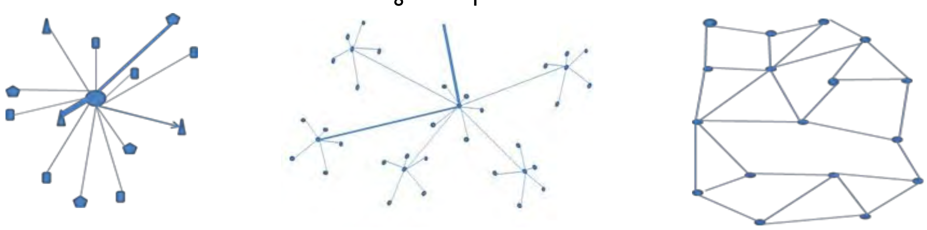
Cabe señalar que el espacio electrónico está montado sobre una tecnología denominada NING (2005), que es una plataforma en línea para usuarios que permite crear sitios web sociales y redes sociales. Es importante hablar de Internet por su capacidad de movilizar las relaciones sociales, así como para establecer entramados que impactan en el capital social y cultural de sus usuarios.

Ejemplo de lo anterior es lo que reporta EDUTEKA (2011), del Congreso anual de la Sociedad Internacional de Tecnología en Educación (ISTE, por su nombre en inglés), comentando, como una curiosidad, lo que David Thornburg refiere sobre el significado de lo que llama *el siguiente nivel de aprendizaje móvil*, en el que mostró lo que pasa en Internet en 60 segundos en un breve video sobre la revolución social de Internet en 2011 (Thornburg, 2011).

Imagen 2. Internet en 60 segundos

Se pretende construir una red social con múltiples nodos, que intenta crear un espacio de encuentro humano. La red constituye una metáfora para describir una especie de sociedad orgánica, un conjunto de lazos que vinculan a los miembros del sistema social a través y más allá de categorías sociales y grupos cerrados.

Imagen 3. Tipos de redes



Red centralizada Red descentralizada Red distribuida

Las redes de aprendizaje siempre han existido y han servido como espacios de encuentro para la acción conjunta; actualmente, al montar estas redes de aprendizaje dan un giro conceptual y se les denomina espacios de aprendizaje en red. Esta realidad se ve favorecida por las tecnologías de la información y la comunicación, conocidas en internet como redes sociales.

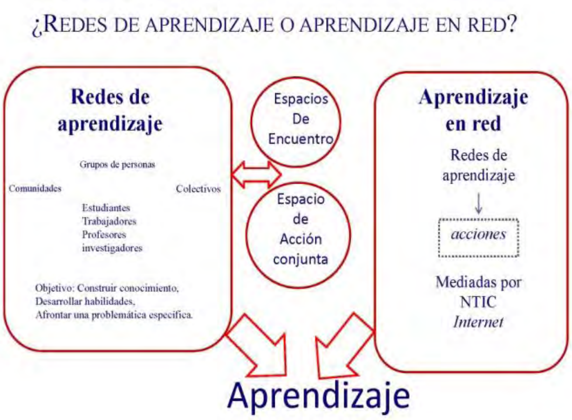


Imagen 4. Aprendizaje-Red

Con la presencia de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación (NTIC) en el proceso educativo, hoy en día se puede hablar más de un aprendizaje en red (Internet) que de una red (relaciones) de aprendizaje. Sin embargo desde un punto de vista pedagógico, se debe advertir que el principal recurso para el aprendizaje no es necesariamente la interconexión a una red, sino, sobre todo la calidad de las interrelaciones que se puedan desarrollar entre los diferentes agentes educativos a través de sus hilos (Suárez, 2003).

Esta propuesta formativa descansa sobre tales tecnologías pero siendo cuidadosos de la calidad de las interrelaciones. Dentro de las multiples posibilidades de trabajo en red mostramos un ejemplo de ello, en el cual basamos nuestro diseño formativo. Los grupos sociales que conforman la red pueden ser congregados por niveles educativos, intereses temáticos y por actividades a desarrollar.

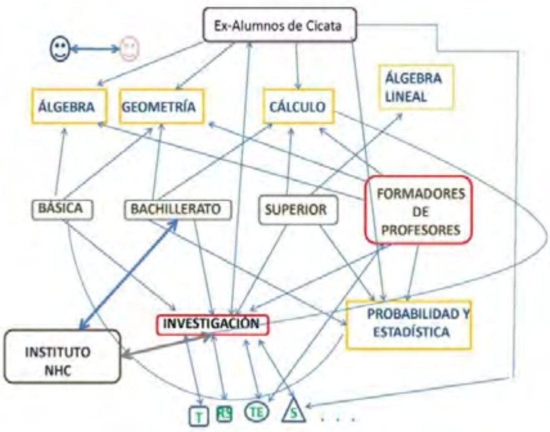


Imagen 5. Ejemplo de relaciones

Por ejemplo, un profesor que por nivel educativo se encuentra en bachillerato puede simultáneamente pertenecer al grupo de cálculo y al grupo de probabilidad y estadística y participar asimismo en el grupo de investigación y en este grupo específicamente en el grupo de las Representaciones Sociales.

Esto nos da idea de espectro de posibilidades que se presentan a un profesor sin necesidad de desplazamientos y salidas de su lugar de trabajo.

La pregunta de investigación asociada a esta actividad en red es ¿cuáles son los indicadores que ponen de manifiesto los resultados formativos en un profesor al participar en una red con estas características?

La formación de los profesores de matemáticas está determinada por la región o el país donde ésta se produce, responde a condicionamientos sociales, políticos y culturales así como a tradiciones institucionales. Las prácticas de los profesores de matemáticas responden en muchos casos a sistemas de representación sobre dicha labor, construidos en largos y complicados procesos de naturaleza cultural.

Por ahora podemos decir que tenemos los siguientes avances. A la Red que hemos denominado *DocenMat*, sólo se puede entrar por invitación de cualquier miembro de la red, fue abierta en el mes de marzo del año 2011 y hasta septiembre cuenta con 216 miembros.

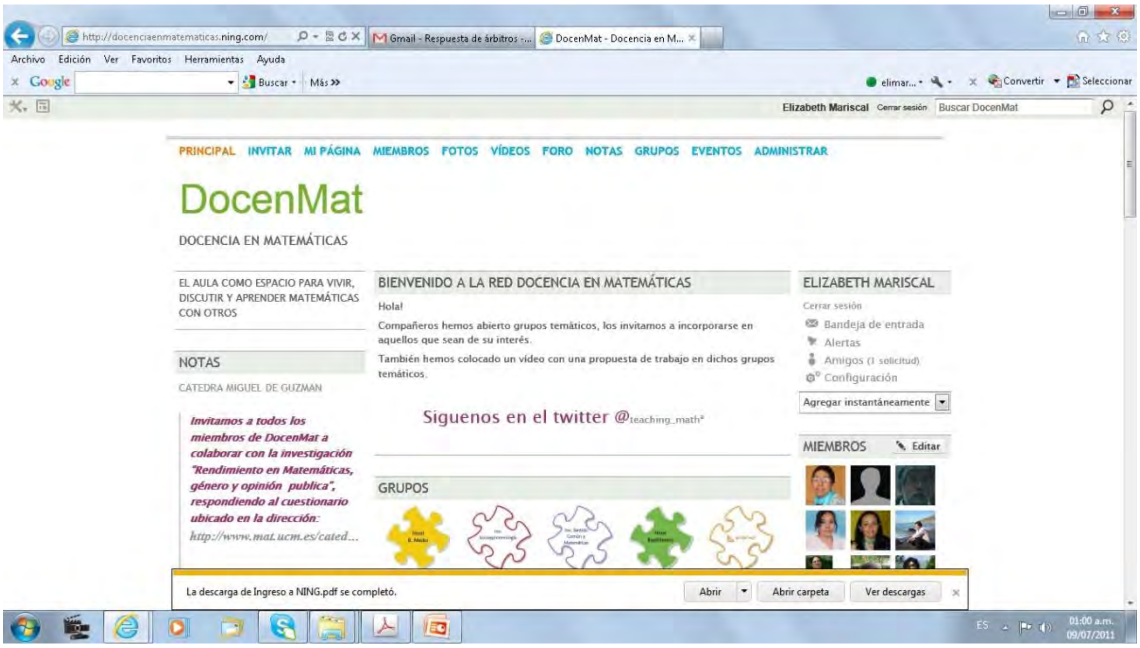


Imagen 6. Página principal de la red DocenMat

Hay 123 miembros que pertenecen a algún grupo, 34 profesores pertenecen a algún Grupo de Investigación, 35 profesores a algún Grupo de Docencia y 21 a alguno de un nivel educativo específico, así como 33 miembros pertenecen al grupo de exalumnos del Prome.

Imagen 7. Página principal de grupos

Imagen 8. Página personal de cada miembro

Se han abierto 12 foros. El foro dedicado a la primer actividad de "El aula" tuvo 45 respuestas y 15 personas subieron sus fotografías. El avance de la red, se ha detenido, contradiciendo, nuestra idea de que tendría un desarrollo constante. Estamos explorado qué es lo que entorpece su desarrollo. Los análisis a futuro se centrarán en la dinámica de la red y a la "calidad" de las interacciones a fin de ir construyendo un marco conceptual que nos permita un análisis formal.

Referencias bibliográficas

Adler, J.; Ball, D.; Krainer, K.; Lin, F.; Novotna, J. (2005). Reflections on an emerging field: Researching mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics*. 60 (3), 359-381.

Crovi, D.; López, M. A.; López González, R. (2009). *Redes sociales: Análisis y aplicaciones.* México: UNAM - Plaza y Valdés.

Chapman, O. (2011). The field of research in mathematics teacher education. *J Math Teacher Educ* 14 (4), 247–249.

Chevallard, Y. & Cirade, G. (2009). Pour une formation professionnelle d'université : éléments d'une problématique de ruptura. *Recherche et formation pour les professions de l'éducation*. 60, 51-62. Recuperado de Yves Chevallard textes et publications, 25 de septiembre de 2011: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=149

Dabas, E. (2002). Mapeando una historia. *Redes sociales y restitución de recursos comunitarios*. Disponible en: http://revista-redes.rediris.es/webredes/ivmesahis/ MAPEANDOUNAHISTORIA.PDF

Eduteka. (n.d.). *Eduteka estuvo en ISTE 2011 tendencias actuales a nivel mundial con educación y tic*. Disponible en: http://www.eduteka.org/ISTE2011.php

R. Even, D. L. Ball (eds.) (2009). The professional Education and Development of teachers of Mathematics. *The 15th ICMI Study*, 11. New York: Springer.

Freeman, L. (2000). La centralidad en las redes sociales. Clarificación conceptual. *Revista política y Sociedad,* 33. Universidad Complutense de Madrid.

Fuentes; R. (1998). *La emergencia de un campo académico: continuidad utópica y estructuración científica de la investigación de la comunicación en México*. México: ITESO.

Gellert, U., Chapman, O., & Becerra, R. (2012). Research methods in mathematics teacher education. In A. Bishop, M. Clements, C. Kietel, J. Kilpatrick, & F. Leung (Eds.), *Third international handbook of mathematics education*. New York: Springer (forthcoming).

ICME 10 (2004). Consultado el 03 de abril de 2012 de http://www.icme10.dk/ proceedings/ pages/side01main.htm

Lozares, C. (1995). La teoría de las redes sociales. *Revista de Sociología,* 48. Universidad Autónoma de Barcelona.

Mariscal, E.; Rosas A. y Sánchez, M. (2008). Programa de matemática educativa en línea del CICATA-IPN en P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 21, 517-526. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

NING (2005). Disponible en http://about.ning.com/

Suárez, C. (2003). Del aprendizaje en red a una red de aprendizaje. *El tintero*, 3 (10). Universidad Virtual del Tecnológico de Monterrey, ITESM México.

Thomas S. Kuhn (1982). La Tensión Esencial. México: Fondo de Cultura Económica.

Thornburg, D. (2011). Disponible en: http://www.youtube.com/watch?v=3SuNx0UrnEo

Wellman, B. (2000). El análisis estructural: del método y la metáfora a la teoría y la sustancia. *Revista Política y Sociedad*, 33, 11-40. Universidad Complutense de Madrid.

UN ESTUDIO DEL DISCURSO DE LOS PROFESORES DEL NIVEL MEDIO SUPERIOR. LA SEMEJANZA COMO OBJETO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE

Hermes Nolasco Hesiquio, Santiago R. Velázquez Bustamante
Universidad Autónoma de Guerrero, Secretaría de Educación Guerrero. México
nolascohh@hotmail.com,sramiro@prodigy.net.mx

Resumen: Este reporte de investigación centra la atención al discurso del profesor en el aula de matemáticas en la Educación Media Superior, cuando se pretende enseñar conceptos y procesos matemáticos ligados a la noción de semejanza. Considerando que uno de los obstáculos en la evolución de este concepto ha sido la relación entre los aspectos figurativo y numérico. Nos preguntamos en qué medida el discurso del aula de matemáticas facilita las interpretaciones de las normas sociomatemáticas. Nuestro objetivo es presentar una aproximación a la noción del discurso en el aula para la identificación de normas sociomatemáticas que deberán regular las actuaciones y las formas de actuación que han de ser válidas para la construcción de consensos en el aula. El marco teórico en el que se sitúa la investigación es el enfoque interaccionista y análisis del discurso. Consideraremos un modelo de investigación cualitativa, basado en el método etnográfico, en donde los episodios que en este reporte se presentan forman parte del trabajo interpretativo en general

Palabras clave: Normas sociomatemáticas, interaccionismo, análisis del discurso.

Abstract: This research report focuses on the discourse of teachers in mathematic classrooms of high school when they teach mathematical concepts and processes linked to the notion of likeness, taking into consideration the fact that one of the obstacles in the evolution of this concept has been the relationship between figurative and numerical aspects. We wonder to what extent discourse in the mathematics classroom facilitates interpretations of sociomathematical norms. Our objective is to present an approach to the notion of discourse in the classroom for the identification of sociomathematical norms that are needed to regulate performances and ways of behaving which are valid for the construction of consensuses in the classroom. The theoretical framework for this research is focused on the interactionism and on the analysis of discourse. We will take into consideration a qualitative research model, based on the ethnographical method, in which the episodes that are presented in this report form part of the interpretative work in general.

Key words: Sociomathematical norms, interactionism, analysis of discourse

Introducción

En los últimos años, se ha incrementado notablemente el número de investigaciones que se han ocupado de comprender la práctica del profesor de matemáticas. Algunos trabajos están orientados a identificar la influencia de los diferentes dominios del conocimiento del profesor en relación con la práctica (Aubrey, 1996; Escudero y Sánchez, 1999). Otros trabajos adoptan un carácter más sociocultural, partiendo de una perspectiva de la enseñanza que "implica comprender y negociar significado a través de la comunicación" (Herbst, 2006). Estas investigaciones han tratado de describir e interpretar la actividad de los profesores, buscando regularidades en las interacciones que desarrollan profesores y alumnos en la práctica cotidiana. También desde la teoría de situaciones didácticas algunos investigadores (Hersant & Perrin-Glorian, 2005) analizan las prácticas del profesor en clases ordinarias. Otras perspectivas se apoyan en el análisis empírico de la interacción en el aula y del complejo conjunto de relaciones que se genera entre profesor-alumno-contenido, colocando el énfasis en la relación profesor contenido (Steinbring, 2005). Diversos estudios desde la perspectiva interaccionista y la etnografía (Bauersfeld, 1995; Krummheuer, 1995) han definido formatos o patrones de interacción del profesor y sus estudiantes, en el que por medio del discurso los significados matemáticos son construidos interactivamente en el salón de clases.

En este ámbito, algunos autores con distintas orientaciones teóricas coinciden al reconocer que el discurso que se produce en el aula y los patrones de interacción que se presentan en ese espacio pueden influir en las oportunidades que tengan los alumnos para aprender (Mercer, 2001; Lemke, 1997; Edwards & Mercer, 1987). Se podría decir que éstas se presentan en función de actos de apertura o de cierre respecto a la participación significativa del alumno durante el proceso de construcción en el aula. Si los alumnos no participan como interlocutores, como compañeros en el diálogo, si no confrontan puntos de vista y emiten juicios sobre la validez de lo propuesto en clase, no podrán hacer suyos los argumentos a los que se enfrentan. Es plausible de destacarse que en diferentes países se han hecho investigaciones sobre la interacción que existe entre maestros y alumnos en clases de matemáticas en situaciones cotidianas (Pimm, 1999; Voigt, 1995; Bartolini Bussi, 1998; Yackel & Cobb, 1996; Cobb & Bauersfeld, 1995, Planas & Civil, 2002).

En este artículo se aborda el siguiente problema de investigación: ¿De qué forma el discurso que se presenta en el aula de matemáticas influye en la construcción compartida de la noción «semejanza» en la Educación Media Superior? Nuestro doble objetivo es presentar una aproximación a la noción de discurso: a) explorar la práctica educativa considerando los cambios en el discurso del profesor que tienen lugar durante las interacciones entre él y los alumnos cuando aborda la noción de "semejanza" y b) describir y analizar las normas reguladoras de las prácticas matemáticas en el discurso docente durante la enseñanza-aprendizaje.

El marco teórico en el que se sitúa nuestra investigación es el enfoque interaccionista y el análisis del discurso. De acuerdo al enfoque interaccionista, la construcción individual de los significados tiene lugar en la interacción con la cultura de la clase mientras que al mismo tiempo contribuye a la constitución de esta cultura (Cobb & Bauersfeld, 1995).

La noción de *práctica matemática* y *normas sociomatemáticas* son referentes primordiales en nuestra investigación. Godino y Batanero (1994) conciben como *práctica matemática* a cualquier acción o manifestación que lleva a cabo un sujeto para resolver problemas matemáticos, comunicar la solución a otros sujetos, así como validar y generalizar la solución a otros contextos y problemas. Las *normas sociomatemáticas* se refiere a las obligaciones que rigen las interacciones entre profesor y alumnos en la actividad matemática (Voigt, 1995).

Construir conocimiento en interacción requiere del lenguaje usado socialmente, que en este trabajo describimos como discurso. El discurso incluye tanto la comunicación oral o escrita entre los participantes (Candela, 1999). Así, el estudio de la forma en la que maestro y alumnos participan en la interacción nos ayuda a entender cuáles son las condiciones de significación que se crean en una clase ordinaria cuando se pretende enseñar la noción de semejanza.

La investigación está enmarcada en el paradigma cualitativo, basado en el método etnográfico (Erickson, 1986). El enfoque etnográfico, permite obtener información relevante del contexto de la clase, que es importante para nuestra interpretación. Esta metodología permite realizar un estudio secuencial de las situaciones de enseñanza. La perspectiva etnográfica que consiste en describir y reconstruir analíticamente los escenarios y grupos que protagonizan y participan en las prácticas educativas, poniéndolas en un registro lingüístico que permita a sus lectores representárselos tal como apareció ante la mirada del investigador.

Para ejemplificar, partimos de una transcripción de aula que se obtuvo a partir de los registros etnográficos. Los participantes formaban un grupo de 30 alumnos (con edades de 15 y 16 años) que pertenecían a una escuela pública de Educación Media Superior ubicada en la ciudad de Acapulco, Guerrero, México. Se grabaron sesiones de 50 minutos similares a las que cotidianamente se desarrollan en el aula.

El profesor Alfonso, participante en el episodio que a continuación se presenta. Participó de manera voluntaria y consintió la intromisión en sus tareas docentes. Cabe mencionar que no se dio ninguna consigna de actuación, de modo que la selección y gestión de la tarea formaron parte de una planificación prevista sin nuestra intervención.

El profesor inicia la clase planteando una pregunta abierta para introducir al tema "semejanza" ([13-14] "¿Cómo logramos conocer el valor de "*x*" de este punto a este otro?"). Menciona qué información le dio los elementos necesarios para resolver el problema (se refiere a la información proporcionada en las hojas de trabajo facilitada a los alumnos la sesión anterior).

Episodio 6.1. «Cómo llegamos a conocer el valor de "x"»

El profesor dibuja en el pizarrón un triángulo de la siguiente manera:

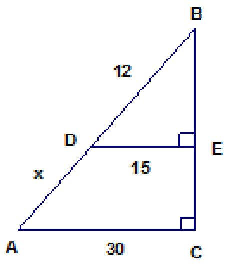


Figura 18

Maestro: ¿Cómo logramos conocer el valor de "x" de este punto a este otro (*señala el segmento AD del triángulo ABC*)? Necesitamos conocer este segmento. Les di los elementos necesarios la última sesión, la información la tienen en las hojas de trabajo, para que puedan resolverlo; de lo contrario, lo haremos entre todos. Tienen tres minutos para resolver el cuestionamiento de manera individual, en caso de que no lo logren pueden consultarlo con su compañero de butaca. Se le firmará a los primeros diez alumnos que encuentren el valor de "x".

El triángulo tiene medidas, no vayas a estar equivocado (*le comenta a un alumno que ya resolvió el problema*).

Alumno: Sí.

Maestro: Transcribe lo que hiciste al pizarrón (*el alumno hace lo que se le ha indicado*). Jonathan ¿todavía no?, ¿y el equipo de la esquina?

$$\frac{15}{12}=\frac{30}{x}$$

$$x=\frac{(12)(30)}{15}$$

$$x=24$$

(*mientras, el alumno que pasa al pizarrón escribe:*)

Maestro: Bien, ¿por qué no explicas a tus compañeros cómo hiciste para resolverlo? Por favor, guarde silencio quien venga llegando porque Moisés nos dirá cómo hizo para obtener el valor de "x".

Alumno: Yo tomé los ejemplos que nos había dado y que se parecen mucho a éste, me di cuenta que dos lados se multiplican y uno se divide.

Maestro: ¡Ah! correcto, muy bien. Se puede decir que él obtuvo el valor de "x" a través de un ejemplo anterior. Sin embargo, quisiera que fuéramos a algo más profundo, que comprendiéramos este ejemplo, así como los anteriores. Estamos hablando de proporciones y de magnitudes ¿no?, ¿estamos bien?, observamos que el resultado es correcto ¿no compañeros?

Alumnos: Sí (*en coro*).

Maestro: Bueno, pero ¿cómo podemos demostrar que efectivamente es el resultado correcto? Pasa compañero (*se dirige a un alumno en específico*), ¿pasarías a demostrarnos por qué el resultado es correcto? o ¿no consideramos que ese resultado es correcto? porque se cumplirá con la igualdad de las razones.

Alumnos: Sí maestro, sí es correcto.

Maestro: A ver, alguien más que lo diga, a ver aquí (*se dirige a Moisés y le indica que pase a explicar al frente*). ¿Por qué dividimos 15 entre 12 y 30 entre 24? ¿Y qué nos da? Nos da la igualdad ¿verdad?, muy bien. ¿Quién trae el borrador? o ¿dónde está el borrador del grupo?...

A(Grupo-1)

En este episodio, el profesor plantea preguntas abiertas y presiona a varios alumnos para que respondan ([26] "Jonathan ¿todavía no?, ¿y el equipo de la esquina?") sin encontrar respuestas. Posteriormente, un alumno responde a los requerimientos y exigencias del profesor; hace uso de la cuarta proporcional sin reflexionar sobre la proporcionalidad de los lados de los triángulos. Por su parte, el profesor evalúa positivamente la explicación del alumno, ([42] "¡Ah! correcto, muy bien") y valida las respuestas por consenso a través de la respuesta coreada del alumnado [48]. Lo anterior implica que cuando una *respuesta a coro* equivale a la participación de toda o de casi toda la clase.

En estos casos el profesor generalmente acepta la respuesta con una afirmación y se dirige a algún alumno en especial y le solicita demostraciones y explicaciones ([49-50] "Bueno, pero ¿cómo podemos demostrar que efectivamente es el resultado correcto?"). y continúa instando al alumnado con insistencia: ([51-52] "… ¿pasarías a demostrarnos por qué el resultado es correcto?, ¿no consideramos que ese resultado es correcto?") Los alumnos responden nuevamente con una afirmación ([54] "sí maestro, sí es correcto"). El profesor intenta que los alumnos den el porqué de su declaración sin tener éxito y, finalmente, a través un discurso retórico evalúa la actividad [55-59].

La tabla I muestra las principales prácticas matemáticas públicamente identificadas a lo largo del episodio anterior.

Tabla 1. Identificación de prácticas matemáticas en la interacción

Prácticas matemáticas del profesor	Prácticas matemáticas del estudiante
❖ Plantea preguntas abiertas ❖ Interroga a los alumnos ❖ Demanda explicaciones ❖ Valida las respuestas por consenso. ❖ Solicita demostraciones ❖ Utiliza un discurso retórico y evalúa la actividad	❖ Responde a los requerimientos y exigencias del profesor ❖ Provee justificaciones ❖ Respuesta en coro ❖ Reafirman con un "sí"

El planteamiento de preguntas abiertas es un rasgo peculiar de muchas de las actividades que se llevan a cabo en las clases de matemáticas. El profesor inicia con una pregunta y luego sigue una serie de instrucciones para realizar la actividad [13-23]. A este tipo de preguntas le llamamos *preguntas de continuidad* puesto que son enunciados interrogativos generalmente breves que tienen la función de asegurar una continuidad del discurso y apelar la atención de los interlocutores.

En este episodio, el profesor Alfonso se aproxima al concepto de semejanza dentro de la relación *intrafigural*, pues la idea de transformar una figura en otra está ausente, considerando el *aspecto de proyección* (ver figura 18). Aunque el profesor no hace explícito que se trata de una configuración de Thales, se dirige directamente al modo de representación gráfico por medio de la identificación de datos *numéricos/algebraicos* con los correspondientes segmentos de la configuración y solicita el cálculo del valor numérico.

Los fenómenos matemáticos del discurso refieren aspectos que indican el desarrollo o el logro de una comprensión matemática. El intento del alumnado por justificar su asentimiento no fue el más idóneo como demostración en el contexto de este salón de clase. Una demostración formal requeriría de una cadena de razonamientos lógicos con el uso de definiciones, teoremas y axiomas.

La transcripción realizada a la clase del profesor Alfonso, está formada por fragmentos que facilitan la identificación de prácticas matemáticas y que a partir de las cuales se infieren las normas sociomatemáticas (ver tabla 2).

Tabla 2. Descripción de prácticas para la inferencia de normas

Prácticas matemáticas	Normas sociomatemáticas
Profesor ❖ Plantea preguntas abiertas ❖ Interroga a los alumnos ❖ Demanda explicaciones y demostraciones Alumnos ❖ Responde a los requerimientos y exigencias del profesor ❖ Provee justificaciones	N1. Para que los conocimientos sean válidos, deben demostrarse.
Profesor ❖ Valida las respuestas por consenso ❖ Utiliza un discurso retórico ❖ Evalúa la actividad Alumnos ❖ Respuesta en coro ❖ Reafirman con un "sí"	N2. La validación del saber se apega al criterio del consenso

En virtud de la asimetría propia de la relación didáctica que vincula a quien domina un saber con quién debe aprenderlo, el profesor es el responsable de la validez generada en clase. Esto significa que en la fase dedicada a la valoración de resultados de la actividad, el docente tiene que emitir un juicio directo sobre la validez del trabajo de los estudiantes. "Si bien haciendo uso de su lugar privilegiado en la relación él puede juzgar sin derechos de réplica, también puede poner en marcha otros mecanismos para hacer saber la veracidad (validez) del fruto de la actividad matemática a sus alumnos" (Storer, 2006).

Las normas de validación se establece a partir de los interrogatorios a los alumnos. Entonces, las contribuciones de los alumnos son incorporadas como contenidos del debate y, con frecuencia, se producen situaciones de habla al unísono. Tanto los alumnos como el maestro interrogan y contestan; el profesor conoce de antemano las respuestas, pero no se espera de él una retroalimentación evaluativa.

Reflexiones finales

Finalizamos nuestro artículo con reflexiones en torno a que el discurso en el aula, facilita las interpretaciones de las normas sociomatemáticas en detrimento de otras por medio de procesos de valoración sobre las prácticas y las personas que las sustentan. Podemos afirmar que el discurso del aula es un espacio de contacto y confrontación de significados, en donde se redefinen las interpretaciones de las normas que deberán regular las actuaciones en el aula, así como las formas de conocimiento que habrán de ser válidas.

Encontramos en nuestros análisis que la elección de las nociones teóricas como: prácticas matemáticas, norma sociomatemática son adecuados para la aproximación de los fenómenos que ocurren en el aula de matemáticas. Es razonable pensar que en un aula de matemáticas coexisten diferentes interpretaciones de una misma norma; de ahí que podamos iniciar un estudio sobre la variedad de significados partiendo de las normas.

Todo este bagaje puede visualizarse como un posible punto de partida para otros estudios que intenten involucrarse en el discurso matemático escolar y en su relación con la actividad docente. Esta relación permitirá comprender, con profundidad, los diversos procesos existentes en la enseñanza de las matemáticas, mismos que se construyen y reconstruyen día a día en las escuelas de este nivel educativo.

Referencias bibliográficas

Aubrey, C. (1996). An investigation of teacher mathematical subject knowledge and the processes of instruction in reception classes, *British Educational Research Journal,* 22(2), 181-197.

Bartolini Bussi, M. G. (1998). Joint activity in the mathematics classroom: Vygotskian analysis. In F. Seeger, J. Voigt & U. Waschescio (Eds). *The culture of the mathematics classroom: Analyses and changes* (pp.13-49). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Bauersfeld, H. (1995). 'Language Games' in mathematics classroom: Their function and their effects. En P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.).*The emergence of Mathematical Learning: Interaction in Classroom Cultures* (pp. 211–292) Hilldale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Cobb, P. & Bauersfeld, H. (1995). *The emergence of mathematical meaning, interaction in classroom culture.* Hillsdale, NJ, USA: Lawence Erlbaum Associates, Publishers.

Edwards, D. & Mercer, N. (1987). *El conocimiento compartido: El desarrollo de la comprensión en el aula*. España: Editorial Paidós.

Erickson, F. (1986). Métodos cualitativos en investigación sobre la enseñanza, in M. Wittrock, (Eds.), *La investigación de la enseñanza II*,(pp. 195-301) Barcelona: Paidós.

Escudero, I. y Sánchez, V. (1999). Una aproximación al conocimiento profesional del profesor de matemáticas en la práctica: la semejanza como objeto de enseñanza-aprendizaje, *Quadrante*, 8 (1-2), 85-110.

Godino, J. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 725-355.

Herbst, P. (2006). Teaching geometry with problems: Negotiating instructional situations and mathematical tasks, *Journal for Research in Mathematics Education* 37(4), 313-347.

Hersan, M. & Perrin-Glorian, M. (2005). Characterization of and ordinary teaching practice with the help of the theory of didactic situations, *Educational Studies in Mathematics* 59, 113-15.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. En P. Cobb y H. Bauersfeld (eds.), *The emergence of mathematical meaning, interaction in classroom culture* (pp. 229-269) Hillsdale, NJ, USA: Lawence Erlbaum Associates, Publishers.

Lemke, J. (1997). *Aprender a hablar ciencia. Lenguaje, aprendizaje y valores*. España: Paidós.

Mercer, N. (2001). *Palabras y mentes. Cómo usamos el lenguaje para pensar juntos.* España: Paidós.

Pimm, D. (1999). *El lenguaje matemático en el aula.* España: Ediciones Morata.

Planas, N. & Civil, N. (2002). Understanding interruptions in the mathematics classroom: Implications for equity. *Mathematics Education Research Journal.* 14(3), 169-189.

Steinbring, H. (2005). Analyzing mathematical teaching-learning situations the interplay of communicational and epistemological constraints, *Educational Studies in Mathematics 59* (3), 313-324.

Storer, A. (2006). *Transformaciones y costumbres en la matemática escolar*. México: Paidós Educador.

Voigt, J. (1995). Thematic Patterns of interaction and sociomathematical norms. En P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds).*The emergence of mathematical meaning, interaction in classroom culture* (pp. 163-201) Hillsdale, NJ: Lawence Erlbaum Associates.

Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 458-477.

LA GEOMETRÍA DEL ESPACIO CON UN ENFOQUE DESARROLLADOR EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Osvaldo Jesús Rojas Velázquez, Celia Rizo Cabrera, Luís Campistrous Pérez, Miguel Cruz Ramírez, Mario Estrada Doallo, Elpidio López Árias
Universidad de Ciencias Pedagógica "José de la Luz y Caballero Cuba
scmc@ucp.ho.rimed.cu

Resumen: En la investigación se elaboran situaciones de aprendizaje que favorecen el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio con un enfoque desarrollador, para la formación de profesores de Matemática. Se valoran las premisas que debe considerar un profesor para la elaboración de las situaciones y se expone su tratamiento a través de tres acciones, desde el punto de vista didáctico: la exploración, la conjeturación y la validación. Con esta investigación se favorece el desarrollo de las formas lógicas del pensamiento, la imaginación espacial, y de la elaboración, formulación y argumentación de conjeturas, para la resolución de problemas geométricos intramatemático o extramatemático.

Palabras clave: Geometría del espacio, situaciones de aprendizaje, formación de profesores.

Abstract: In this investigation, learning situations are presented in order to favor the teaching-learning process of space geometry with a development approach in the training of Mathematics teachers. There is a valoration of the foundations that a teacher must consider to elaborate situations and it is exposed its treatment through three didactic actions: the exploration, the generating of conjectures and the validation. This research, favors the development of logical thought, the space imagination, the conjectures formulation and argument to solve geometric type of problems both intra as extra mathematical.

Key words: Space geometry, learning situations, teacher formation.

Introducción

La enseñanza-aprendizaje de la geometría ha ocupado a muchos investigadores en el área del aprendizaje de la Matemática, tanto nacional como internacionalmente y ha sido tratada en numerosos eventos, tales como los congresos internacionales de Educación Matemática (ICME 1995 y 2008), las conferencias interamericanas de Educación Matemática (1961, 1987 y 1995), las reuniones latinoamericanas de Matemática Educativa (RELME), los congresos iberoamericanos de Cabri (IBEROCABRI) y los congresos de la Sociedad Cubana de Matemática y Computación (COMPUMAT 1991-2009). En la actualidad, su enseñanza-aprendizaje, a pesar de que se aplica en algunos países los asistentes matemáticos, conocidos como software de geometría dinámica (SGD), persisten aún dificultades.

En un análisis realizado acerca de la enseñanza-aprendizaje de la geometría, en particular la del espacio, en los currículos de la formación de los profesores de Matemática de diferentes países se corroboró las siguientes regularidades: escaso vínculo con los problemas que a diario se enfrentan los alumnos en la vida cotidiana, es limitada la vinculación del contenido a los intereses y motivaciones de los estudiantes; escaso uso de los medios visuales y otros materiales manipulables; en la mayoría de los países la enseñanza no propicia que el profesor en formación sea partícipe y busque el conocimiento; así como pobre desarrollo de habilidades para representar cuerpos geométricos en el plano y para la transferencia del plano al espacio.

Por tales motivos se necesita buscar métodos y procedimientos más activos, nuevas actividades y formas de organizar el proceso que permitan una participación activa del profesor en formación en la búsqueda del conocimiento geométrico, su cuestionamiento, y que a la vez le favorezcan el planteamiento y la resolución de problemas geométricos aplicados a fenómenos y hechos de la vida cotidiana; los cuales pueda convertir en modo de actuación de su profesión. En este trabajo se ofrecen las premisas y tres momentos esenciales desde el punto de vista didáctico a tener en cuenta en la elaboración de situaciones de aprendizaje para favorecer la enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio con un enfoque desarrollador, en la formación de profesores de Matemática.

Desarrollo

Sobre la base de los presupuestos teóricos de la Escuela Histórico-Cultural, con lo mejor de las tradiciones pedagógicas nacionales y a partir del pensamiento de ilustres pedagogos cubanos, desde finales del siglo pasado investigadores del Instituto Central de Ciencias Pedagógicas (ICCP) elaboran una concepción desarrolladora para el proceso de enseñanza-aprendizaje en la escuela cubana. Sobre la base de estas ideas, debe conceptuarse el proceso de enseñanza-aprendizaje con enfoque desarrollador, como aquel que promueve un aprendizaje desarrollador bajo la conducción del maestro. Incluso aceptando la idea retadora de que este desarrollo se extienda también al maestro, pues las exigencias que imponen los métodos activos requieren de una constante innovación y superación pedagógica: un desarrollo profesional. Diversas son las investigaciones realizadas sobre este enfoque, entre ellas están las de Zilberstein y Silvestre (1999, 2000 y 2004); Castellanos, Castellanos, Llivina, y Silverio (2001).

La enseñanza-aprendizaje de la geometría, en particular la del espacio, en la formación de profesores de Matemáticas, bajo un enfoque desarrollador, es el proceso sistémico de transmisión y apropiación activa y creadora del contenido geométrico espacial mediante la utilización de métodos y procedimientos adecuados, el empleo de las TICs y medios activos que le permitan al alumno explorar, conjeturar, refutar, reformular y explicar, de manera que se sienta partícipe en la obtención del conocimiento. El proceso se debe organizar en función del encargo social, donde se tiene en cuenta el diagnóstico, las intenciones profesionales y el nivel de desarrollo actual y potencial de los alumnos. Todo esto permite el tránsito continuo hacia niveles superiores de desarrollo, con el objetivo de formar una personalidad integral; capaz de aplicar los conocimientos geométricos espaciales en la solución de problemas vinculados a la vida cotidiana, para transformar la realidad y convertirlo en modo de actuación profesional.

Los cambios en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio en el preuniversitario, conllevan a reestructurar el tratamiento de esta temática en la formación de profesores de matemáticas (a partir de aquí se le llamará alumnos) en las universidades pedagógicas y además deben de estar dirigidos hacia una nueva forma de trabajar los contenidos afines, donde se puedan explotar más y mejor los medios visuales y tecnológicos actuales y poner a los alumnos en situaciones activas para su aprendizaje geométrico. De esta forma se logrará que los alumnos se enfrenten continuamente a procesos de búsqueda, exploración, planteo de conjeturas, comprobación experimental, entre otras formas de actuación.

Con respecto a lo anterior, un medio adecuado para trabajar en la escuela con este enfoque es el diseño de situaciones de aprendizaje (Rizo y Campistrous, 2007a). Las situaciones de aprendizaje, tal como se conciben en este trabajo, son actividades de exploración para el alumno, que en el caso de la geometría del espacio se concretan en un conjunto de tareas sobre figuras geométricas, que representan una situación lo suficientemente abierta para no inhibir la búsqueda por parte del mismo. Donde es posible realizar transformaciones, con el fin de explorar cómo cambian dichas figuras y sus propiedades, de forma tal que les permite analizar el nuevo objeto de aprendizaje.

Por otra parte las situaciones de aprendizaje desarrolladoras se caracterizan por su carácter consciente, reflexivo, problematizador, significativo y contextualizado (Castellanos, Castellanos, Llivina y Silverio, 2001). Para la elaboración de situaciones de aprendizaje sobre la geometría del espacio el docente debe considerar las siguientes premisas:

- Determinar los elementos del conocimiento geométrico espacial, indicaciones y procedimientos didácticos y heurísticos necesarios, que permitan conducir al profesor en formación a una búsqueda activa, dinámica y reflexiva, donde tenga la oportunidad de explorar, conjeturar, refutar, reformular y explicar.
- Determinar las operaciones lógicas del pensamiento que se necesitan estimular en cada situación de aprendizaje sobre el contenido geométrico espacial.
- Conjugar la variedad de situaciones de forma tal que faciliten la búsqueda y utilización del conocimiento geométrico y estimulen el desarrollo del intelecto.
- Prever, a través de las situaciones, el incremento de las exigencias cognoscitivas geométrico-espaciales, intelectuales y formativas en el profesor en formación.

- Elaborar situaciones necesarias y suficientes que propicien la adquisición de los conocimientos geométricos espaciales, donde se considere la atención diferenciada, que se conduzca al resultado esperado en cada alumno de acuerdo a su zona de desarrollo próximo (ZDP).
- Determinar los medios visuales disponibles para el tratamiento a las diferentes situaciones.

Estas situaciones propician que el alumno actúe, participe, explore, experimente, construya, descubra y redescubra el contenido geométrico espacial mediante la manipulación geométrica, en su interacción con los medios visuales; de modo que se favorezca el aprendizaje y desarrolle un pensamiento lógico, creativo y geométrico espacial a través del trabajo, tanto individual como colectivo.

Para desarrollar un proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio con un enfoque dinámico, mediante situaciones de aprendizaje, es importante el desarrollo en los alumnos de la capacidad de emplear procedimientos de búsqueda y exploración. En este sentido son muy útiles, en primer lugar, los denominados procedimientos heurísticos o estrategias heurísticas: mover en una figura o cuerpo (manipular y variar las condiciones dadas), mover figuras o cuerpos sobre otros, considerar casos particulares o especiales, considerar casos límite, medir y comparar, buscar relaciones y dependencias, hacer conjeturas, realizar analogías, reducir el problema nuevo a un problema conocido. En este proceso tiene un papel esencial el principio heurístico de la visualización (Rojas, 2009). En segundo lugar, los procedimientos didácticos desarrolladores: aprender a observar y describir, observar y dibujar lo que rodea, plantear semejanzas y diferencias, establecer suposiciones o hipótesis, buscar contraejemplos, escribir o dibujar mientras se aprende, así como buscar las características e identificar propiedades y conceptos.

Para cumplimentar el enfoque dinámico de la geometría del espacio se trabaja fundamentalmente con el Cabri 3D, el cual es interactivo; permite la manipulación de las figuras geométricas; ofrece la posibilidad de dibujar, construir y animar figuras geométricas, ver los elementos de las figuras en forma precisa y rápida y, que el resultado se presente inmediatamente en la pantalla de la computadora. También el empleo en las clases del medio visual *Stix & balls magnetic*, el cual se basa en varillas de diferentes colores, imantadas en cada extremo, para las aristas y pequeñas esferas para los vértices. Con este medio se puede construir cualquier tipo de prismas y pirámides, mediante su utilización, se favorece el desarrollo de la imaginación espacial de un cuerpo del espacio hasta su representación en el plano. Por otra parte estos medios constituyen un soporte adecuado para el planteamiento de situaciones de aprendizaje que promuevan la actividad y la reflexión, para la búsqueda del conocimiento geométrico.

El papel del profesor es dirigir el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio, de modo que pueda garantizar la actividad protagónica de sus alumnos. Esto se realizará, inicialmente, de forma individual y luego en dúos o tríos de discusión, permitiendo socializar las primeras ideas y de arribar en colectivo a nuevas conjeturas geométricas, después de un proceso de análisis y discusión. En este sentido, la didáctica a utilizar requiere un carácter desarrollador, pues debe propiciar el desarrollo integral de la personalidad del alumno.

Para la resolución de las situaciones de aprendizaje geométricas, es necesario considerar que el alumno que aprende tiene que poner en relación los nuevos conocimientos geométricos con los que ya posee, es decir, con los conocimientos precedentes que ya aprendió. Esto permitirá la reestructuración y el surgimiento de un nuevo nivel en el conocimiento geométrico espacial, así como las relaciones que se pueden establecer entre los conocimientos aprendidos y las motivaciones, las vivencias afectivas, las relaciones con la vida y con los diferentes contextos sociales que le rodean.

Estas situaciones de aprendizaje deben adaptarse a las características de los alumnos y al tratamiento del contenido geométrico espacial. Es importante para el trabajo con el contenido geométrico espacial determinar qué saben los alumnos como condiciones previas para desarrollar estas situaciones, qué deben aprender según el currículo y qué es posible que aprendan a través del proceso de búsqueda, manipulación y exploración. Para propiciar una enseñanza que permite estimular la ZDP, se deben proponer situaciones de aprendizaje sobre el contenido, vinculadas a la vida cotidiana y a contenidos profesionales.

En el trabajo con las situaciones de aprendizaje se proponen tres momentos esenciales o acciones fundamentales, desde el punto de vista didáctico: la exploración, la conjeturación y la validación, las cuales se concretan de forma general en la geometría plana (Rizo y Campistrous, 2007b). Estos tres momentos esenciales de la didáctica del tratamiento de situaciones de aprendizaje no es posible llevarlos a cabo con todo el rigor en la geometría del espacio, pues pasar algo del plano al espacio tiene sus dificultades propias. Por ende en esta parte inicial, aparecen propiedades que hay que asumir sin demostración y a partir de ellas demostrar otras. En el trabajo con las situaciones de aprendizaje geométrico-espaciales que se proponen, no siempre se valoran las tres etapas, en su mayoría solo se propone llegar hasta la conjeturación.

La exploración es una etapa inicial, en la cual el alumno de manera individual o en colaboración con otros, mediante la utilización de los medios adecuados para la visualización geométrica de cada situación y de los impulsos que el profesor le da (si fuera necesario), comienza a realizar un proceso de búsqueda de relaciones en una actividad en la cual experimenta, mediante la manipulación geométrica, de manera variada.

Esta experimentación debe hacerse de forma tal que permita un proceder sistemático de búsqueda de nuevas relaciones geométricas del espacio, o de relaciones ya conocidas de situaciones anteriores y que pudieran ser de alguna manera transferidas a la nueva situación geométrica. La exploración, siempre que sea posible, debe realizarse de una manera organizada; pero a la vez es un proceso sin una planificación totalmente preconcebida, pues no siempre es posible planificar este tipo de actividad de búsqueda. Por tanto, se exige del profesor una preparación previa ante cada situación de aprendizaje geométrica en el contenido a trabajar con cada situación, en los medios para la visualización geométrica, en los impulsos necesarios y en haber explorado antes la situación (o sea, conocer todos los casos posibles que serán abordados mediante esa situación).

La conjeturación es el conjunto de relaciones que se derivan de la manipulación de los medios utilizados, las cuales se socializan con el resto de los alumnos, hasta llegar a una lista de relaciones posibles que se convierten en conjeturas. La conjeturación está frecuentemente ligada al proceso de argumentación y tiene su origen en la etapa de exploración. Las conjeturaciones van a desarrollar la necesidad y la suficiencia de las proposiciones geométricas. En esta etapa el principio heurístico de la visualización juega un papel determinante, pues las conjeturas se apoyan en la visualización, conformando conjeturas geométricas. O sea, la interpretación geométrica de los objetos y las interrelaciones que se obtienen como resultado de la manipulación geométrica en la etapa de exploración derivan en conjeturas geométricas, constituyendo éstas el contenido geométrico espacial. El pensamiento geométrico espacial favorece y dinamiza la formación de conjeturas y, a la vez, esas conjeturas desarrollan y profundizan este pensamiento. A través de los métodos y procedimientos activos, los medios visuales y mediante la manipulación geométrica, el alumno obtiene las relaciones que se dan entre los objetos matemáticos de la situación, a los cuales llama conjeturas.

En esta etapa es importante el papel del profesor en la orientación al alumno, sobre cuáles conjeturas constituyen axiomas, proposiciones y teoremas y dentro de éstas cuáles deben ser demostradas en el aula. Aquí también el profesor puede activar la ZDP a través de impulsos o preguntas heurísticas de forma tal que, mediante una atención diferenciada, el alumno llegue a plantear las conjeturas.

La validación es el procesamiento de las conjeturas hechas, donde se analiza su posible rechazo de inmediato, mediante un contraejemplo, o su veracidad, en este caso deben ser argumentadas con otras afirmaciones ya aceptadas y conocidas por el alumno o demostradas siguiendo un proceso deductivo que lo permita. En esta etapa es importante el uso de las simbologías adecuadas para cada conjetura, de forma tal que propicie comprender el proceso de demostración de cada una de ellas.

En las situaciones de aprendizaje geométricas-espaciales, en las que la actividad del alumno es determinante y juega un papel protagónico en la búsqueda del conocimiento, es muy importante establecer una situación inicial. Esta situación debe estar claramente formulada y acompañada de las indicaciones necesarias, de forma tal que le facilite al alumno comprender la tarea que se le está planteando. Así, él comprenderá que se trata de actividades de exploración y experimentación que le permiten analizar el nuevo contenido geométrico espacial, así como sistematizar el aprendido. Además, son actividades donde él puede realizar transformaciones que le faciliten identificar los diferentes casos que se pueden presentar ante una misma orden y visualizarlos, así como formular hipótesis sobre el comportamiento de los elementos nuevos que pueden aparecer. Es muy importante que el profesor en formación reconozca la situación inicial y a qué propiedades debe dirigir su atención, de forma tal que pueda decidir las manipulaciones y variaciones que van a realizar.

Como se ha planteado antes, si es necesario, el profesor les dará a los alumnos impulsos que constituyen sugerencias, ayudas que van a favorecer la resolución de las situaciones de aprendizaje. Al alumno desarrollar métodos propios de exploración, demostrado en la medida que ha sido capaz de resolver las situaciones de aprendizaje, necesita cada vez de menos impulsos por parte del profesor, pues los que le ha ido dando inicialmente se convierten en un proceder generalizado de actuación para la búsqueda y obtención del conocimiento geométrico del espacio.

Debido a la naturaleza de la geometría del espacio y sus aplicaciones en la vida cotidiana; así como a la necesidad de buscar una nueva forma de organizar y dirigir el proceso de enseñanza-aprendizaje, donde se utilicen métodos y procedimientos activos, medios visuales que permitan la participación activa, dinámica y conciente del alumno en el aprendizaje de la geometría del espacio, se propone una tipología de situaciones de aprendizaje. En la investigación se clasifican las situaciones de aprendizaje geométricas espaciales en dos tipos:

- Un primer tipo de situaciones de aprendizaje dirigidas hacia la búsqueda de nuevos conocimientos y habilidades geométricas que pueden ser: situaciones de aprendizaje para la formación (definición) de conceptos geométricos espaciales, situaciones de aprendizaje para la búsqueda de proposiciones (teoremas) geométricas, situaciones de aprendizaje para la búsqueda de procedimientos de solución.
- Un segundo tipo de situaciones de aprendizaje para la aplicación creadora de los

conocimientos y habilidades geométricas adquiridas, las cuales pueden ser: situaciones de aprendizaje para buscar soluciones a nuevos problemas geométricos, situaciones de aprendizaje para buscar soluciones a problemas vinculados con la vida y a contenidos profesionales.

Las situaciones de aprendizaje que se proponen constituyen "situaciones elementales" en el aprendizaje del contenido de la geometría del espacio, para entonces dar paso a situaciones más complejas. La solución de estas se realiza valiéndose de las situaciones elementales (reglas heurística "reducir un problema a otro ya resuelto"). Esta tipología comprende todo el sistema de conocimientos y habilidades del programa. En algunas situaciones solamente se propone llegar hasta la conjeturación. Un ejemplo de estas situaciones de aprendizaje compleja es el siguiente: Construya una pirámide recta, regular, de base cuadrada, si la longitud de uno de los lados de la base mida 7,0 cm.

a) Determine las relaciones de posición entre las rectas que contienen sus aristas y entre los planos que contienen sus caras.

b) Determine el volumen de la pirámide si la longitud de la altura de una de sus caras es 7,0 cm y el ángulo que forma dicha altura con la altura de la pirámide es de 300. ¿Cuántos litros de agua contendrá un prisma de igual base y altura?

En el desarrollo de esta situación el profesor expone el contenido geométrico asociado, un conjunto de impulsos heurísticos o preguntas heurísticas que permiten activar la ZDP, algunos medios visuales adecuados y se esclarece cómo tiene lugar la exploración, la conjeturación y la validación, con el objetivo de lograr modo de actuación de los profesores en formación en la resolución de otras situaciones. El tratamiento didáctico a estas situaciones de aprendizaje, mediante la utilización de métodos y procedimientos activos y medios visuales, favorece el aprendizaje del contenido geométrico espacial, lo cual le permite comprender y resolver problemas geométricos espaciales vinculados a la vida.

También, esta forma es fértil para abordar el tratamiento de las situaciones típicas de la enseñanza de la Matemática que con más frecuencia se presentan en la geometría del espacio. La graduación de los impulsos heurísticos en la solución de las situaciones de aprendizaje permite brindar una atención diferenciada a los alumnos, acorde con el desarrollo alcanzado por cada uno.

Conclusiones

Los resultados obtenidos sobre la enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio a través de situaciones de aprendizaje, permite destacar algunos elementos que resultan determinantes en el logro del objetivo que se persigue. Ellos son:

- Las situaciones de aprendizaje en las cuales se consideran tres momentos esenciales, la exploración, la conjeturación y la validación, son propicia para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio, en la formación de profesores de matemática de las universidades pedagógicas, lo cual les permite desarrollar modos de actuación en el tratamiento de esta temática en el preuniversitario.
- Las situaciones de aprendizaje geométricas espaciales se clasifican en dos: las que son dirigidas hacia la búsqueda de nuevos conocimientos y habilidades geométricas y las que se orientan a la aplicación creadora de los conocimientos y habilidades geométricas adquiridas.
- El tratamiento de las definiciones y proposiciones a través de situaciones de aprendizaje favorece el desarrollo en los alumnos de formas lógicas del pensamiento, de la imaginación espacial, de la visión espacial, así como de la elaboración, formulación y argumentación de conjeturas.

Referencias bibliográficas

Castellanos, D., Castellanos, B., Llivina, M. y Silverio, M. (2001). *Hacia una concepción del aprendizaje desarrollador.* La Habana: Pueblo y Educación.

Rizo C. y Campistrous, L. (2007a). Geometría Dinámica en la escuela, ¿mito o realidad? *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 45, 61-79.

Rizo C. y Campistrous, L. (2007b). Una didáctica para el tratamiento de las situaciones de aprendizaje de la Geometría con un enfoque dinámico en la escuela. En O. Coloma (Ed). *Memoria del Taller científico metodológico sobre las Ciencias Exactas* (2), (pp. 3-15). Holguín: Educación Cubana.

Rojas, O. (2009). *Modelo didáctico para favorecer la enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio con un enfoque desarrollador.* Tesis de Doctorado no publicada. Universidad de Ciencias Pedagógicas “José de la Luz y Caballero”. Holguín, Cuba.

Zilberstein, J. y Silvestre, M. (1999). *Hacia una didáctica desarrolladora.* La Habana: Pueblo y Educación.

Zilberstein, J. y Silvestre, M. (2000). *¿Cómo hacer más eficiente el aprendizaje?* La Habana: Pueblo y Educación.

Zilberstein, J. y Silvestre, M. (2004). *Didáctica desarrolladora desde el enfoque Histórico Cultural.* México: CEIDE.

COMPETENCIAS MATEMÁTICAS Y PEDAGÓGICAS EN LOS PROGRAMAS DE FORMACIÓN DE DOCENTES PARA LA ENSEÑANZA MEDIA

Edison De Faria Campos
Universidad de Costa Rica Costa Rica
edison.defaria@ucr.ac.cr

Resumen: Esta conferencia analiza la importancia de competencias matemáticas y pedagógicas en los programas de formación docente para los futuros profesores de matemática para la enseñanza media. También se describe algunas competencias encontradas en programas de universidades públicas costarricenses para la formación de docentes de matemática para la enseñanza media.

Palabras clave: Competencias, currículo, formación docente.

Abstract: This lecture discusses the importance of the mathematics and pedagogical competences in teacher training programs for prospective teachers of mathematics for high school. It also describes some competences found in Costa Rican public university programs to train mathematics teachers for high school.

Key words: Competences, curriculum, teacher formation.

Introducción

El planteamiento del currículo basado en competencias puede ser una oportunidad para repensar el sentido educativo de la enseñanza como periodo que tiene como función principal la preparación de los jóvenes para la vida y para el aprendizaje a lo largo de toda la vida; para repensar el rol del docente como educador, en coherencia con el sentido educativo de enseñanza obligatoria; para plantear un modelo de escuela más abierto a la comunidad educativa y a la sociedad; para plantear un sistema de evaluación más participativo; para hacer un planteamiento de aprendizaje más abierto a la interacción y al contexto. La historia ha dado testimonio de grandes cambios curriculares en matemáticas, motivados por distintos planteamientos: la introducción de matemáticas modernas; las evaluaciones y estudios internacionales en 1980; los estudios y evaluaciones de PISA, OCDE en 1997 y el estudio DeSeCo de la OCDE acerca de las competencias en 1999.

Particularmente estos últimos cambios se orientan hacia un modelo curricular centrado en el estudiante que enfatizan las salidas, en contraposición al modelo centrado en el docente que enfatizan las entradas, pues en aquél se requiere que los conocimientos y habilidades más importantes que el estudiante debe de adquirir durante el proceso de aprendizaje sean los que determinen los contenidos del programa de estudios. Además, los resultados del aprendizaje y las competencias están centrados en los requerimientos de la disciplina y las necesidades sociales en términos de preparación para el trabajo y la ciudadanía. Se sugiere que en los programas de estudio basados en ciclos, cada ciclo debería contar con su propio grupo de resultados de aprendizaje, formulados en términos de competencias y orientados a un perfil de salida para el ciclo, un Currículo abierto a cambios permanentes, de carácter inter, multi y transdisciplinarios, que resalte ciertos principios como la ética profesional, el trabajo colaborativo, la capacidad de aprender y actualizarse, la capacidad de aplicar los conocimientos en la práctica y la capacidad para identificar, plantear y resolver problemas, entre otros (González J., Wagenaar R. y Beneitone P., 2004).

Shulman (1987, pp 10-11) señala los conocimientos mínimos que debe poseer un educador:

- *Conocimiento del contenido*;
- *Conocimiento didáctico general*, teniendo en cuenta especialmente aquellos principios y estrategias generales de manejo y organización de la clase que trascienden el ámbito de la asignatura;
- *Conocimiento del currículo*, con un especial dominio de los materiales y los programas que sirven como "herramientas para el oficio" del docente;
- *Conocimiento didáctico del contenido*: esa especial amalgama entre materia y pedagogía que constituye una esfera exclusiva de los maestros, su propia forma especial de comprensión profesional;
- *Conocimiento de los alumnos* y de sus características;
- *Conocimiento de los contextos educativos*, que abarcan desde el funcionamiento del grupo o de la clase, la gestión y financiación de los distritos escolares, hasta el carácter de las comunidades y culturas; y
- *Conocimiento de los objetivos, las finalidades y los valores educativos, y de sus fundamentos filosóficos e históricos*.

Además señala que entre estas categorías, el conocimiento didáctico del contenido adquiere particular interés porque identifica los cuerpos de conocimientos distintivos para la enseñanza, representa la mezcla entre materia y didáctica por la que se llega a una comprensión de cómo determinados temas y problemas se organizan, se representan y se adaptan a los diversos intereses y capacidades de los alumnos, y se exponen para su enseñanza Shulman apuntó algunas de las principales categorías que vamos a considerar aquí, pero dirigidas hacia las matemáticas.

El nuevo contexto apunta a una disciplina que parte de los conceptos y métodos matemáticos, realiza una conversión de los mismos en objetos educativos para la enseñanza y aprendizaje (transposición didáctica), y coloca sus objetivos colectivos en aprendizajes dentro de entornos sociales. Invoca matemáticas teóricas (que proporcionan objetos y métodos específicos), matemáticas para la enseñanza (matemáticas que han tenido un proceso de transposición didáctica), conocimientos de historia, filosofía, antropología y otras ciencias sobre las matemáticas, didáctica o pedagogía específica (asociada a las matemáticas), conocimiento de los aprendizajes matemáticos (cognitivo, social), y conocimiento de los procesos educativo generales (pedagogía, sociología). Existen otros conocimientos que se deben incorporar en la formación de un educador matemático que apelan a su formación integral, como las bellas artes, las humanidades y el uso de las tecnologías de la comunicación e información. Podemos integrar estos conocimientos en un modelo formado por esos elementos cognoscitivos de la siguiente manera:

Tabla 1: Estructura de conocimientos en la formación inicial del educador matemático

Elaborado por Ruíz en Ruiz, A.; Barrantes, H. y Gamboa, R. (2009).

Categoría	Subcategorías	Descripción
Conocimiento general		Aquel que no refiere a los procesos educativos pero que es relevante en la formación integral del educador y de todo profesional: estudios que sostienen una perspectiva humanista en la formación, conocimientos instrumentales (lenguajes y paquetes informáticos, etc.), otras lenguas.
Conocimiento matemático y meta-matemático	Conocimiento matemático	Las matemáticas que el educador necesita, una forma de matemática aplicada (subconjunto de las matemáticas, aunque no un subconjunto de las matemáticas para el matemático, del ingeniero, u otros): representaciones de conceptos y soluciones múltiples, útiles para construir situaciones problemas, generadoras de pensamiento matemático, interrelaciones teóricas dentro de las matemáticas, representación por medio de modelos y aplicaciones, etc.
	Conocimiento metamatemático	Los conocimientos sobre las matemáticas desde diferentes enfoques disciplinarios: historia, filosofía, estudios sociales de las matemáticas. No es toda la metamatemática sino aquella de interés para el educador (subconjunto de las metamatemáticas).
Conocimiento educativo general	Conocimiento pedagógico general	Refiere a los diferentes aspectos que participan directamente en la enseñanza y aprendizaje: currículo, evaluación, didáctica, psicología del aprendizaje y la enseñanza, cognición, sociología educativa.
	Conocimiento educativo general no pedagógico.	Intervienen en la educación pero no necesariamente para la acción pedagógica directa: normativas institucionales, sociología y antropología de grupos, etc.
Conocimiento pedagógico de las matemáticas y las metamatemáticas	Conocimiento pedagógico matemático	Refiere a las representaciones múltiples y mediaciones pedagógicas específicas de los contenidos matemáticos. En dos dimensiones generales: relativas a los estudiantes; relativas a la enseñanza.

	Conocimiento pedagógico metamatemático	Dimensiones pedagógicas de las metamatemáticas: conceptos y métodos cómo intervienen o se pueden usar historia, epistemología, antropología, etc. en el aula.

El conocimiento pedagógico matemático (y metamatemático) se refiere a conocimiento pedagógico de los diferentes tópicos de las matemáticas que se deben enseñar. Es decir, el conocimiento de las técnicas, principios, organización de situaciones y recursos en general para enseñar en el aula aquellas partes de las matemáticas que posee el currículo escolar. Incluye: orígenes cognoscitivos e históricos en las matemáticas, significado y perspectiva matemática de los conceptos o métodos a enseñar, estudio de los procedimientos de enseñanza posibles y una jerarquización de los mismos en función del aprendizaje, organización de la clase para el objetivo específico, estudio de dificultades u obstáculos didácticos. Se debe ver como una integración interactiva entre matemática y pedagogía orientada con precisión hacia el nivel educativo y a los contenidos matemáticos que se deben enseñar. Podemos incluir algunas subcategorías bajo el conocimiento pedagógico del contenido: Teorías del aprendizaje matemático; cognición y matemáticas; creencias en matemáticas; currículo matemático; didácticas y gestión de las matemáticas; evaluación matemática; investigación en Educación Matemática.

Para el conocimiento matemático (y metamatemático) Ruiz, Barrantes y Gamboa (2009) distinguen entre los conocimientos matemáticos (contenidos y métodos de las matemáticas) y los *conocimientos* meta-matemáticos (conocimientos filosóficos, históricos, sociológicos sobre las matemáticas, es decir contenidos de y sobre la disciplina). Sugieren las siguientes subcategorías: Conceptos y procedimientos; métodos de construcción, validación y comunicación; estructuras cognoscitivas; aplicaciones; historia, filosofía y estudios sociales de las matemáticas.

Según Brown y Borko (1992, p. 220), el dominio cuantitativo y cualitativo de conocimientos matemáticos ha demostrado ofrecer, entre otras cosas, mayores opciones para la enseñanza en el aula, así como mayor seguridad y confianza del docente en su labor. Por otro lado, Bass (2005) llegó a afirmar que la educación matemática no es matemática:

> Es un dominio de trabajo profesional que hace un uso fundamental altamente especializada de formas de conocimiento matemático y en ese sentido puede ser, sugiero, útilmente vista como una especie de matemática aplicada. Voy a argumentar que, como sucede en otros dominios de las "matemáticas aplicadas", la primera tarea del matemático que quiere contribuir en esta área es entender sensiblemente el dominio de aplicación, la naturaleza de sus problemas

> matemáticos, y las formas de conocimiento matemático que son útiles y usables en este dominio (p. 416).

Inferimos de lo anterior que el educador matemático requiere una forma particular de matemática que exige ser a su vez ser enseñada de forma específica. Para Bass (2005): "El conocimiento necesario para la enseñanza debe ser usable para la resolución de problemas especializadas y el razonamiento que los maestros tienen que hacer".

En el caso de la primaria, Heather Hill, Deborah Ball y Hyman Bass han desarrollado un proyecto que sigue esa perspectiva (Learning Mathematics for Teaching Project). Ellos han propuesto un modelo con 4 categorías:

> (1) *Conocimiento matemático común* (que se espera sea conocido por cualquier adulto educado), (2) *Conocimiento matemático especializado* (estrictamente conocimiento matemático que es particular para el trabajo de enseñanza, aunque no requerido o conocido en otras profesiones que usan intensamente las matemáticas (incluyendo la investigación matemática), (3) *Conocimiento de matemáticas y estudiantes* y (4) *Conocimiento de matemáticas y enseñanza* (citado en Bass, 2005, p. 429).

El conocimiento matemático especializado no es un "subconjunto" de lo que otros profesionales, incluso matemáticos, deben saber. El conocimiento matemático aplicado a la educación supone contenidos matemáticos propios pero ligados a objetivos en la acción educativa.

La escogencia de los contenidos a enseñar es una forma de aplicación matemática en la educación, y una vez que se convierten esos contenidos en objetos de enseñanza, mediante la transposición didáctica, se invoca conocimientos pedagógicos de los mismos. En la transposición didáctica, el saber a enseñar y el saber enseñado toman como punto de partida el saber de referencia, es decir, que las matemáticas determinan plenamente los objetos de enseñanza de la matemática. Esta visión es concordante con las ideas de Brousseau, que colocan la "didáctica de las matemáticas" dentro de la práctica matemática. La teoría de la transposición didáctica subraya los contenidos en la enseñanza y aprendizaje y no precisamente los procesos de la enseñanza aprendizaje que se encuentran al margen de los contenidos; se subraya la disciplina como fuente de una pedagogía específica (Ruiz, 2003). La estructura de momentos que establece la transposición son válidos de manera general, no obstante la clave en todo es cuáles son las matemáticas y sus procesos pedagógicos asociados. Todo apunta a la construcción de currículos con una fuerte participación de pedagogías específicas de las matemáticas, donde las competencias profesionales claramente establecidas pueden ser útiles. Esto supone cursos específicos de pedagogía matemática, y a la vez propósitos pedagógicos matemáticos específicos en todo el currículo.

Competencias matemáticas en el currículo de formación de docentes

En el proyecto de investigación "El currículo nacional en la formación de docentes para la enseñanza de la matemática: fundamentos y propuesta", estamos analizando los programas de estudio en universidades públicas formadoras de profesores para la enseñanza media, en cuánto a competencias matemáticas, didácticas y genéricas, para generar una propuesta curricular pertinente que contemple las reformas mencionadas anteriormente.

La incorporación de competencias en el currículo demanda la descripción de los conocimientos, habilidades y actitudes necesarias para llevar a cabo las acciones que demuestren las competencias, así como el diseño de los procesos de aprendizaje necesarios para la adquisición de tales competencias.

En el proyecto asumimos la definición de competencias dada por Mogens Niss, director del proyecto KOM (Competencies and the Learning of Mathematics). Para él una competencia matemática "es la habilidad de entender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en una variedad de situaciones y contextos internos y externos a las matemáticas en los cuales ellas juegan o podrían jugar un papel" (Niss, 2002).

Niss (2002, 2003a, 2003b) plantea 8 competencias matemáticas organizadas en dos grupos:

1. Competencias para preguntar y responder acerca de, dentro y por medio de las Matemáticas: Pensar matemáticamente; plantear y solucionar problemas matemáticos; modelar matemáticamente; razonar matemáticamente.
2. Competencias de comprensión y uso del lenguaje y los instrumentos matemáticos: Representar entidades matemáticas; manipular símbolos matemáticos y formalismos; comunicar dentro de, con, y sobre las Matemáticas; hacer uso de los soportes y de las herramientas (incluyendo TICs).

Este enfoque ha tenido una influencia muy grande en el proyecto PISA de la OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico), en particular en la prueba que se realizó en el año 2003, lo que se explica en parte por la presencia del mismo Niss en el equipo que la confeccionó. Es un punto de partida importante para orientar los currículos de la Educación Matemática con base en competencias.

Basados en las ocho competencias anteriores, procedimos a analizar los programas de estudio de formación de docentes de educación matemática, en las universidades públicas costarricenses: los cursos de matemática y los cursos de pedagogía. Adicionalmente entrevistamos a una muestra de profesores formadores en las universidades mencionadas para cuáles de las competencias planteadas por Niss estaban presentes en el currículum. Nuestros primeros hallazgos son:

- ❖ Las competencias propuestas en los programas de estudio de las cuatro universidades estatales que forman docentes en educación matemática no son específicas. Objetivos como generar criticidad, compromiso social, humanismo, aunque correctos, son muy generales.
- ❖ Se proponen objetivos y competencias que son de la educación general, a las cuales se les acompaña de referencias a las matemáticas, o sea, son propósitos generales aplicados a las matemáticas. Por lo tanto hay poca especificidad hacia la educación matemática como disciplina y profesión.
- ❖ Cuando se mencionan las matemáticas, no se incluyen competencias matemáticas específicas.
- ❖ Los programas de estudio no están basados en competencias, sino en objetivos. Pero, por iniciativa personal, algunos profesores decidieron incluir en sus cursos algunas de las competencias propuestas por Niss. En realidad son pocos los docentes que optaron por esta nueva visión que no ha sido institucionalizada.

Nos falta analizar las entrevistas mencionadas anteriormente para hacer una triangulación con la información obtenida en los programas de estudio.

Referencias bibliográficas

González J.; Wagenaar R. y Beneitone P., eds. (2004). *Tuning America Latina: un proyecto de las universidades*. Revista Iberoamericana de Educación, Número 35.

Bass, H. (2005). Mathematics, mathematicians, and Mathematics education, *Bulletin* (New Series) of the *American Mathematical Society*. Volume 42, Number 4, Pages 417–430, S 0273-0979(05)01072-4. Articulo publicado electrónicamente el 23 de junio del 2005

Brown, C. A., y Borko, H. (1992). Becoming a mathematics teacher. En D. A. Grouws, *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* New York: Macmillan.

Clarke, D; Emanuelsson, J.; Jablonka, E. & Mok, I. A. C. (2006) (Eds.). *Making Connections. Comparing Mathematics Classrooms Around The World.* The Netherlands: Sense Publishers.

Niss, M. (2002). *Mathematical competences and the learning of mathematics: the Danish KOM Proyect*. IMFUFA, Roskilde University, Dinamarca. Recuperado el 20 de junio de 2010 de http://www7.nationalacademies.org/mseb/Mathematical_Competencies_and_the_Learning_of_Mathematics.pdf

Niss, M. (2003a). *Quantitative Literacy and Mathematical Competencies*. Recuperado el 20 de junio de 2010 de http://www.maa.org/q1/pgs215_220.pdf

Niss, M. (2003b). The need for reform: Perspectives on the result of education students´competence in mathematics. En Carter, J. Eriksen K., Horst S., Troelsen R. (Eds.), *If reform of science education is the answer-what were the questions?* Copenhagen, Dinamarca: Centre for Science Education, University of Copenhagen.

Ruiz, A.; Barrantes, H. & Gamboa, R. (2009). *Encrucijada en la Enseñanza de las Matemáticas: la formación de educadores.* Cartago, Costa Rica: Editorial Tecnológica de Costa Rica.

Ruiz, A.; Chavarría, J. & Alpízar, M. (2003). Epistemología y construcción de una nueva disciplina científica: la *Didactique des Mathématiques.* Revista *UNICIENCIA*, Vol. 20 Número 2, 2003, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional. Heredia, Costa Rica.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review* (1), 163-196). La versión que usamos es una traducción española en *Profesorado. Revista de currículo y formación del profesorado*, 9, 2 (2005).

LOS PROFESORES, LOS FUTUROS PROFESORES Y SU ACERCAMIENTO A LA INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

Cecilia Crespo Crespo
Instituto Superior del Profesorado "*Dr. Joaquín V. González*" Argentina
Centro de Investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. CICATA-IPN México
crccrespo@gmail.com

Resumen: Este trabajo presenta una serie de reflexiones acerca de la manera en la que los profesores de matemática toman contacto con la matemática educativa y sus investigaciones. Este acercamiento que se ha ampliado en los últimos tiempos se debe a la necesidad de respuesta frente a la realidad actual del aula y a preocupaciones en las que no sólo lo disciplinar, sino también en lo social ocupan un papel central. Sin embargo, según algunas observaciones realizadas desde nuestra experiencia con estudiantes de profesorado y docentes en Argentina, no es siempre fácil la aproximación a las investigaciones en nuestra disciplina.

Palabras clave: Profesor, investigación, matemática educativa.

Abstract: This work presents some reflections about the way in which mathematics teachers take contact with educative mathematic. This approach which has being growing in recently trying to answer to current realities of the classroom and concerns not only what discipline, but also in the social occupy a central role. However, according to some observations from our experience with students of teaching and teachers in Argentina, it is not always easy the approximation to the research in our discipline.

Key words: Teacher, research, educational mathematic.

Introducción

Los estudiantes de profesorado de matemática se enfrentan en la actualidad durante sus últimos años de estudio con una realidad que por momentos los llevan, a veces, a replantearse su carrera. Existen problemáticas particulares sobre su inserción laboral, en la que son conscientes de que la asignatura cuya enseñanza será centro de sus tareas es aquella que genera mayor resistencia entre los alumnos de nivel medio y la que da origen a los mayores índices de fracaso escolar. Por otra parte, la carrera docente se caracteriza en nuestra sociedad por la falta de reconocimiento social y profesionalismo.

Ante la magnitud del fracaso escolar en esta disciplina, la sociedad demanda de los docentes una mayor calidad educativa y respuestas a los fenómenos sociales presentes en el aula, no faltando quiénes proponen soluciones mágicas sin basarlas en la investigación seria en el área de matemática educativa. Los futuros profesores no se sienten preparados para dar soluciones eficaces a estas demandas sociales. La escuela actual es, a veces, caracterizada como una institución en crisis. La falta de respuestas adecuadas a ciertas demandas sociales exige un replanteo de actividades y roles. Cada vez es más manifiesta la necesidad de no aislar al aula del exterior, asumiendo que los escenarios han cambiado en los últimos tiempos y los sistemas educativos se ven fuertemente interpelados por estas transformaciones. Como afirma Barbero "estamos pasado de una sociedad con sistema educativo a una sociedad educativa" (Barbero, 2008, p.66). En la actualidad, aunque cada vez se va haciendo más evidente la necesidad de un cambio, las instituciones educativas Se mantienen (o al menos intentan mantenerse) con características que les fueron propias hace años. Esto implica que un desafío para la formación de los profesores es preparar para esa realidad dinámica y ofrecer espacios que permitan resignificar formas abiertas de ver el mundo. Los estudiantes de profesorado de matemática demandan cada vez con mayor frecuencia a sus instituciones, espacios en los que puedan acceder a capacitación para poder comprender el escenario en el que se insertarán laboralmente. Por ello, el surgimiento de carreras de postítulos y postgrados destinados a profesores se reflexiona acerca del aula de matemática y se los introduce en la investigación en el área de matemática educativa.

En la realización de una investigación el investigador debe recorrer una serie de fases que son difíciles de transitar para quien recién se inicia en esta actividad. Aunque toda investigación posee características propias, hay un amplio consenso en señalar etapas generales que ocurren en toda investigación (Castro y Castro, 2001). A lo largo del tiempo y con la experiencia, el investigador ve como natural este proceso, pero para quien se inicia en esta tarea, su complejidad es realmente notable.

Acercando a los profesores a la matemática educativa

En el ámbito del Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González" se ha puesto en marcha una carrera de postítulo orientada a profesores de matemática: la Diplomatura Superior en Matemática Educativa. Esta carrera se desarrolla en dos años, permitiendo un acercamiento a la matemática educativa de profesores en servicio. Las asignaturas que componen la carrera son las siguientes:

Primer año:

- Perspectivas de la didáctica de la matemática
- Perspectivas epistemológicas de la matemática
- Recursos tecnológicos aplicados a la enseñanza de la matemática
- Análisis del discurso matemático escolar

Segundo año:

- Naturaleza del pensamiento geométrico
- Naturaleza del pensamiento algebraico y del pensamiento aleatorio

- Naturaleza del pensamiento analítico
- Introducción a la investigación en el aula de matemática

Presentamos en este trabajo la descripción del primer acercamiento que poseen estos profesores a la investigación en nuestra disciplina. En su formación de base, si bien han accedido a trabajos de matemática educativa, ninguno de los profesores que están cursando el primer año de este postítulo tienen experiencia en investigación, ni han realizado publicaciones. Su experiencia de aula oscila entre los dos y quince años, en nivel medio. En esta experiencia estuvieron organizados en 3 grupos de tres o cuatro integrantes. La asignatura en la que se llevó a cabo el trabajo que se reporta fue *Perspectivas epistemológicas de la matemática.*

Los temas abordados previamente fueron:

- Concepciones de la ciencia. Su evolución a través de la historia
- La ciencia actual. La posciencia
- Concepciones de la matemática
- Matemática pura, aplicada y educativa. Sus problemáticas y evolución

Descripción de las actividades realizadas

En la primera etapa, y para utilizar las respuestas como insumo del trabajo posterior, se les solicitó que respondieran de forma individual las siguientes preguntas:

1) ¿Qué es la matemática?
2) ¿Qué es hacer matemática?
3) ¿Qué es enseñar matemática?
4) Enumerar 5 palabras o expresiones que les surgieran ante la palabra matemática

En la segunda etapa, se les presentaron las siguientes actividades organizadas en dos trabajos prácticos:

Trabajo práctico 1:

- Lectura de: Crespo Crespo, C. y Ponteville, Ch. (2002). Pensar en matemática para enseñar matemática. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 15 (2), 1163-1168 México: Iberoamérica.
- Análisis de las concepciones que tienen los profesores y los estudiantes de profesorado de matemática acerca de la matemática, su enseñanza y aprendizaje y la investigación en matemática.

- Organización y análisis de las respuestas obtenidas en el curso
- Comparación de resultados y extracción de conclusiones

Trabajo práctico 2:

- Lectura de: Martínez Sierra, G. (2011). Representaciones sociales que poseen estudiantes de nivel medio superior acerca del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Perfiles Educativos XXXIII (132), 90-109
- Analiza las representaciones sociales de los estudiantes de escuela media acerca de la matemática.
- Descripción del marco teórico y metodología utilizados en esa investigación.
- Organización y análisis de las respuestas obtenidas en el curso
- Comparación de resultados y extracción de conclusiones

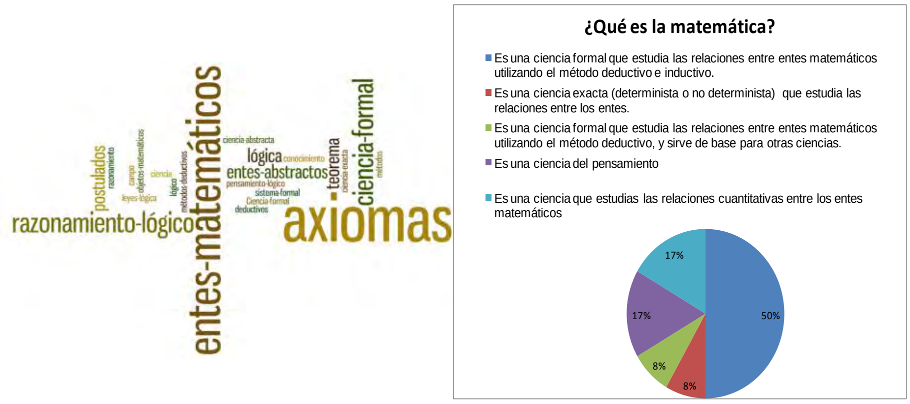
Durante cuatro semanas trabajaron en clase, si bien no se les indicó que no podían adelantar en casa, los estudiantes no avanzaron de manera individual, sino que esperaron al encuentro semanal en el horario de la materia para realizar las actividades propuestas. Durante ese tiempo, se observó a los estudiantes registrando sus actitudes, dificultades, formas de organización del grupo y de la información. En la quinta semana se hizo la puesta en común y análisis de lo realizado.

El objetivo de estos trabajos era lograr que los estudiantes realizaran de manera guiada un análisis de la información obtenida de manera similar a las investigaciones a las que tenían acceso y luego analizaran las diferencias o similitudes entre sus trabajos y las publicaciones presentadas. A continuación se analizan las distintas formas de organizar la información obtenida por parte de los estudiantes para cada uno de los casos.

Los resultados obtenidos a partir del análisis de las concepciones de la matemática

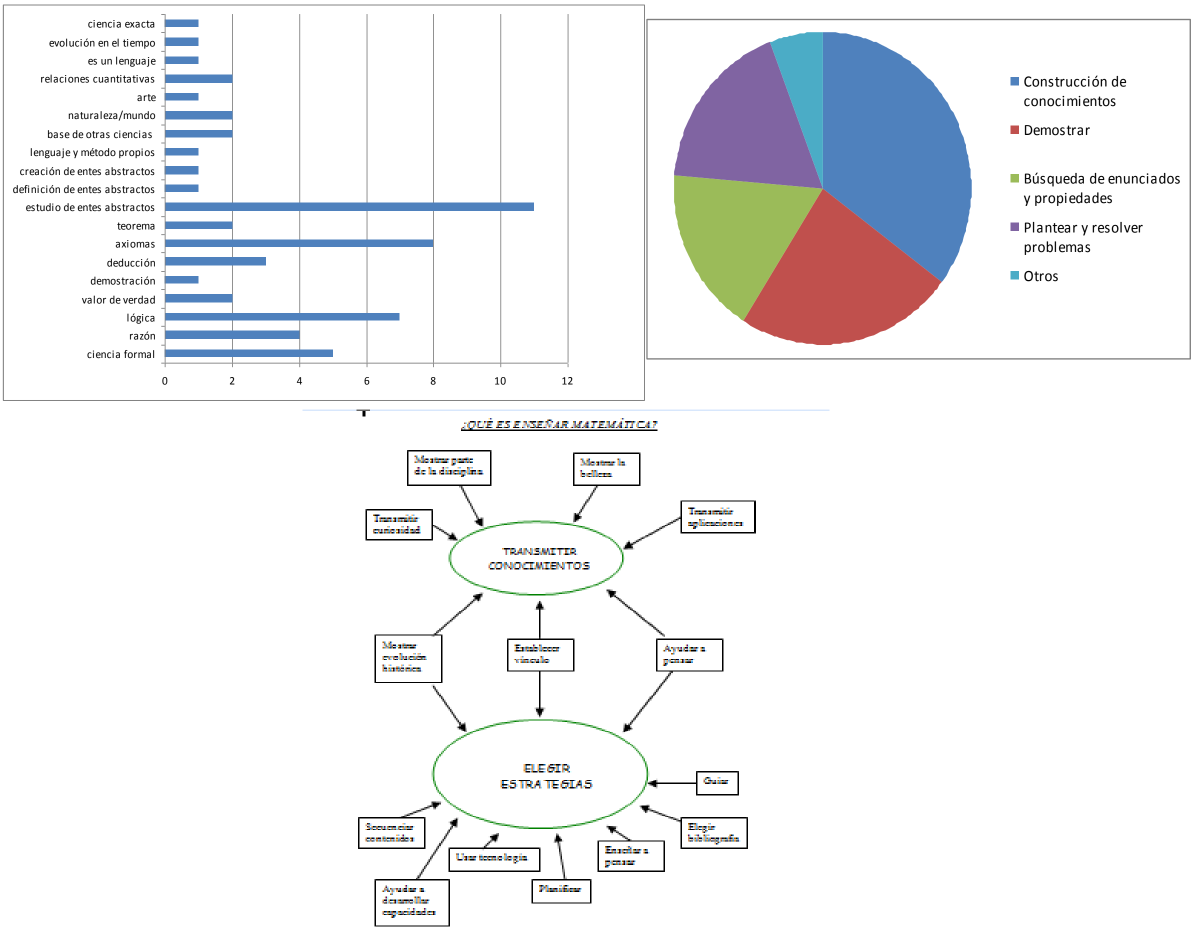
Uno de los grupos, que llamaremos Equipo 1, en lo que fue presentado como el primer trabajo práctico organizó la información según utilizando palabras clave y diagramas circulares. Para ello identificó en las respuestas de los profesores palabras que fueran representativas de las ideas expresadas y utilizó un programa que realiza nubes de palabras de acuerdo con los datos cargados (Figura 1). La herramienta de nubes de palabras había sido descubierta por uno de los integrantes del grupo en una búsqueda por Internet. El diagrama circular fue utilizado por analogía a la manera en la que había sido presentada la información en el artículo que leyeron inicialmente.

Figura 1. Gráficos presentados por el Equipo 1



El Equipo 2, identificó palabras clave en las respuestas que estaba procesando y para su presentación hizo uso de representaciones en diagramas de barras y circulares. Para el caso del significado de enseñar matemática, organizó una red conceptual en la que reflejó las respuestas de los docentes que estaban procesando (Figura 2).

Figura 2. Gráficos presentados por el Equipo 2



En el caso del Equipo 3, la organización de la información se llevó a cabo por medio de tablas, extrayendo las ideas principales y utilizando redes conceptuales (Figura 3).

¿Qué es?	¿Qué estudia?	¿Cómo lo estudia?	¿Dónde se aplica?
-Ciencia formal -Ciencia exacta -Ciencia abstracta	-Entes matemáticos (Números, figuras, símbolos, funciones, conjuntos)	-Definiciones -Enunciados -Teoremas -Propiedades -Axiomas -Métodos deductivos -Lógica	-En otra ciencias -En la vida cotidiana
100%	83%	100%	24,33%

2) ¿Qué es hacer matemática?

La mayoría de las respuestas que dimos hacen referencia al quehacer de los matemáticos como científicos:

- Búsqueda de patrones, comprobación, verificación de enunciados.
- Descubrimientos de nuevas conjeturas.
- Demostración de propiedades
- Investigar y establecer relaciones
- Trabajar con modelos matemáticos
- Alcanzar la verdad matemática
- Construir herramientas, estrategias para resolver problemas.

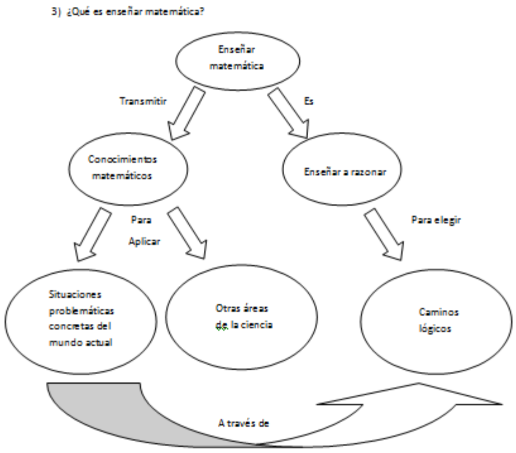


Figura 3. Gráficos presentados por el Equipo 3

A partir de los trabajos presentados, es posible notar que en la organización de la información buscaron primeramente copiar formas de organizarlo del artículo que leyeron, cuando no lo logran, buscan formas alternativas. Todos los equipos mostraron dificultades en la extracción de conclusiones y en el análisis de la información. En su análisis no utilizaron ningún marco teórico, sino que prefirieron apoyarse en un análisis cuantitativo y volcarse a mostrar conclusiones a partir de las respuestas agrupadas por similitudes.

Todos los grupos de estudiantes identificaron posteriormente la presencia de diferencias de resultados en relación a la investigación original, atribuidos a que en aquella, al ser de opción múltiple las respuestas eran más acotadas. No pudieron notar por sí mismos que se trata de una muestra sesgada en esta oportunidad, ya que los que habían respondido a las encuestas originales eran profesores que se encontraban realizando sus estudios de diplomatura y que ya habían estudiado ciertas temáticas que podían influir en las respuestas.

Los resultados obtenidos a partir del análisis de las representaciones sociales de la matemática

Se describen a continuación las maneras en las que cada uno de los grupos de estudiantes-profesores organizó la información en relación a las representaciones sociales de la matemática.

El Equipo 1 nuevamente organizó la información según utilizando palabras clave a través de nubes de palabras (Figura 4).

Figura 4. Gráficos presentados por el Equipo 1

El Equipo 2 en este caso hizo uso de una tabla para evidenciar las características de las representaciones que se manifestaron:

DIMENSIONES	FRECUENCIAS	%
Objetos Matemàticos	14	21,54
Acciones Matemàticas	4	6,15
Valoraciones	15	23,08
Formas de pensar	11	16,92
Caràcter práctico	5	7,69
Recursos didàcticos	5	7,69
Caracterìsticas de la Matem	3	4,62
Caracterizaciòn c/ciencia	8	12,31
total	65	100,00

Figura 5. Tabla presentada por el Equipo 2

Mientras, el Equipo 3 decidió esta vez organizar la información utilizando tablas y diagramas de barras según categorías y dicotomías identificadas:

Valoración:	Frecuencia	Porcentaje absoluto
Positiva	5	8,48%
Negativa	5	8,48%

Definición:	Frecuencia	Porcentaje absoluto
Subjetiva	3	5,08%
Objetiva	4	6,78%

Aplicación:	Frecuencia	Porcentaje absoluto
Práctica	3	5,08%
Abstracta	2	3,39%

Características:	Frecuencia	Porcentaje absoluto
Exactitud	5	8,48%
Modo de razonamiento	12	20,34%
Orden	3	5,08%
Lúdica	5	8,48%

Objetos matemáticos:	Frecuencia	Porcentaje absoluto
Números, símbolos, letras, figuras geométricas	9	15,25%

Recursos Metodológicos:	Frecuencia	Porcentaje absoluto
Libros, calculadora, computadora	3	5,08%

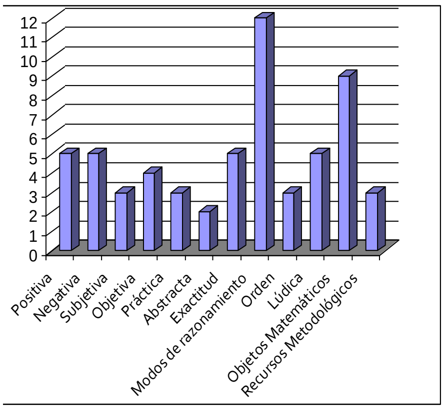


Figura 6. Herramientas de análisis presentadas por el Equipo 3

En todos los casos, los estudiantes manifestaron dificultades para describir marco teórico y se limitaron a realizar copia textual de lo que en el artículo que trabajaron manifestaba su autor. Por otra parte, tuvieron menos dificultades en organizar la información que en el trabajo anterior, ya que en este caso los datos fueron obtenidos a través de igual consigna.

En el análisis posterior, identificaron diferencias en relación a las respuestas que ellos procesaron, que provenían de profesores y las de los estudiantes. Pudieron detectar fácilmente que los estudiantes de escuela media se centran en contenidos y tienen apreciaciones afectivas y valoraciones más negativas. Sin embargo, no detectaron que sus respuestas, más allá de provenir de la visión de los profesores, pueden haber sido influidas por lo abordado previamente en la materia.

En todos los casos, reconocieron que este trabajo les resultó más sencillo que el anterior debido a que al trabajar sobre datos estaban organizados de manera similar, les fue posible realizar un análisis similar al del artículo base.

Algunos comentarios finales

Es cada vez más indispensable el reconocimiento de la necesidad de un profesor no pasivo frente a la realidad del aula, de fomentar la importancia del profesor-investigador que comprenda los resultados de la investigación en el aula y no vea a las investigaciones alejadas de él.

Los profesores que recién se están iniciando en la investigación, muestran dificultades en la lectura de investigaciones, en especial en la comprensión de marcos teóricos y de las formas de organización y análisis de la información. Les resulta difícil asumir que la matemática educativa es una ciencia social. Manifiestan su preferencia a realizar estudios cuantitativos que cualitativos, ya que en aquellos casos sienten que la estadística les da sustento y herramientas indispensables. Valoran más las investigaciones referidas al aula que tratamientos teóricos.

En la experiencia realizada con un grupo de profesores que poseen su primer acercamiento a la investigación en matemática educativa, se ponen de manifiesto las dificultades que tiene para ellos esta actividad. A los profesores que recién se están iniciando en la investigación, les resulta difícil diferenciar marcos teóricos de marcos conceptuales, organizar datos y analizarlos. Prefieren los análisis cuantitativos a los cualitativos. En sus primeros acercamientos a la investigación, se sienten más seguros imitando organizaciones de información de investigaciones de otros autores.

Referencias bibliográficas

Barbero, J. (2008). Reconfiguraciones de la comunicación entre escuela y sociedad. En E. Tenti Fanfani (Comp.), *Nuevos temas en la agenda de política educativa* (pp.65-99). Buenos Aires: Siglo XXI.

Castro, E. y Castro, E. (2001). El proceso de investigación. Un ejemplo. En P. Gómez y L. Rico (Comp.), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática*. (pp. 79-88). Universidad de Granada.

Crespo Crespo, C. y Ponteville, Ch. (2002). Pensar en matemática para enseñar matemática. C. Crespo Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 15 (2),* 1163-1168. México: Iberoamérica.

Martínez Sierra, G. (2011). Representaciones sociales que poseen estudiantes de nivel medio superior acerca del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. *Perfiles Educativos* XXXIII (132), 90-109.

CATEGORÍA 5

USO DE RECURSOS TECNOLÓGICOS EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Introducción al Capítulo de Uso de recursos tecnológicos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas

Carlos Oropeza, José Isaac Sánchez

Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán, UNAM. (México)
carlosoropezamx@gmail.com, joejade@hotmail.com

Actualmente, gracias al mundo de la informática y a la realidad virtual, un gran número de actividades y operaciones a nivel mundial se realizan a una velocidad vertiginosa. Ahora, las comunicaciones se han hecho más accesibles y en general el proceso de desarrollo de la sociedad se puede interpretar desde diversos ángulos. Recientemente hemos sido testigos de que los cambios en la economía mundial se pueden traducir en el hundimiento de un cierto país y dichos cambios son observados también a través de sistemas computarizados. Es decir, que si un país se ve afectado en su economía, de manera casi automática uno de los sectores que sufre profundamente el impacto es la educación y por ende el estudio de las matemáticas. En ese sentido, en muchos lugares de América Latina se tienen carencias para poder establecer el uso de la tecnología ya como un recurso alternativo.

Durante ya un tiempo considerable se ha y se sigue debatiendo sobre la importancia de incorporar la tecnología en la educación, pero lo que es un hecho es que, particularmente, el apoyo que brinda el uso de la tecnología en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas podría ser considerada como una estrategia complementaria, y en los últimos años se ha venido acentuando su uso. En forma inmediata podemos dar cuenta de que muchos de los cursos que se imparten en México a nivel bachillerato y aún más a nivel licenciatura, están acompañados del uso de la tecnología. La opinión de los estudiantes es privilegiar su uso y aplicación, es decir, parece ser que los estudiantes están convencidos de las ventajas que puede ofrecerles hacer un uso adecuado de la tecnología, a pesar de que esta situación no es generalizada por las condiciones y limitantes de carácter económico.

Sin embargo, mientras que los profesores invertimos tiempo en decidir qué tan buena resulta dicha práctica o las instituciones tratan de implementar espacios ex profesos para ello, la realidad indica que deberíamos en su lugar invertir tiempo suficiente en el diseño de actividades que nos conduzcan a la obtención de los objetivos que se plantean en los cursos. Por lo que se hace necesario centrar nuestra atención en los obstáculos que los estudiantes enfrentan en la comprensión de los conceptos abordados en sus cursos de matemáticas. Existen diversos enfoques y estrategias utilizadas, entre otras, los medios que promuevan el desarrollo de los estudiantes centrando su atención en temas específicos, generando una motivación para consolidar una responsabilidad de tipo cognitivo en donde ejecuten diversas exploraciones.

Por otra parte, existe una gran cantidad de información que se vierte de manera visual en los medios de comunicación, videojuegos, entre otros, y que el ser humano se ha venido apegando poco a poco a éstos. Por tanto, consideramos que hacer uso de la visualización como una estrategia alternativa de análisis puede servir de apoyo a los estudiantes en el área de las matemáticas, y es precisamente el software matemático quien permite que se desarrolle esta oportunidad.

Hoy día existe una amplia variedad de software matemático (licenciado y libre) del cual los estudiantes pueden recibir apoyo. Los cambios sociales han provocado que en general todos los adelantos en la ciencia se vean estrechamente relacionados con el uso de la tecnología y, en particular, la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas no se queda fuera de este rubro. Por ello se hace necesario pensar en una enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que pueda hacer uso de la tecnología y en su caso poder hacer comprobaciones en un laboratorio de matemáticas, a pesar de reconocer que algunas instituciones no cuenten con la infraestructura necesaria.

Es común observar en diversas instituciones que los profesores frecuentemente se resisten a la implementación de reformas. Para poder pensar en un diseño de una matemática acompañada de tecnología, es necesario que los profesores consideren que la profesionalización del docente está estrechamente relacionada con la calidad en la enseñanza, es decir, una buena enseñanza, una enseñanza de calidad, lo será en la medida en que favorezca que el alumno tenga más certeza de lo que aprende y sea más consciente, más responsable y más capaz de invertir recursos, de acuerdo con sus conocimientos y sus fines responsables, sobre sí mismo, sobre el entorno físico y el medio social que lo rodea.

METODOLOGÍA PARA EL DESARROLLO DE OBJETOS DE APRENDIZAJE EN LA DISCIPLINA MATEMÁTICA DE LA UNIVERSIDAD DE LAS CIENCIAS INFORMÁTICAS

Danilo Amaya Chávez, Isabel Lombillo Mora
Universidad de las Ciencias Informáticas Cuba
dach@uci.cu

Resumen: Se propone una metodología que favorece el diseño, desarrollo e implementación de Objetos de Aprendizaje (OA) por parte de los docentes, en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las asignaturas de la disciplina Matemática en la UCI. Se asumen las ventajas de los OA para la adquisición de habilidades y competencias matemáticas, a partir de las necesidades específicas de aprendizaje de los alumnos, se reconoce el papel de estos en el proceso de autogestión del contenido. El trabajo toma como referencia la experiencia devenida en el diseño de materiales educativos por un grupo de profesores de Matemática en la UCI, antes y después de la aplicación de la metodología de desarrollo propuesta.

Palabras clave: Objetos de aprendizaje, enseñanza aprendizaje, autogestión del contenido.

Abstract: A methodology is proposed to favor the design, development and implementation of Learning Objects (LO) by teachers in the teaching-learning process, within the subjects of the mathematics discipline at the University of Computer Sciences. The advantages of the OA are assumed for the acquisition of skills and mathematics competences, from the students´ specific learning needs, recognizing their role in the self-content process. The work takes as a reference the experience obtained in the design of educational materials by a group of teachers of mathematics at the University of Computer Sciences, before and after the application of the methodology of development proposed.

Key words: Learning objects, teaching and learning, self management content.

Introducción

Con una visión constructivista, los OA constituyen elementos facilitadores del aprendizaje, orientados a acentuar el nuevo rol del estudiante en tanto artífice de la construcción de su propio conocimiento. Así pues, los OA deben responder a una estructura determinada y a un modo de tratamiento de los contenidos de acuerdo con los diferentes tipos de información que contengan, así como de las especificaciones técnicas que sirvan para identificarlos, dotarlos de accesibilidad, reusabilidad y emplearlos sin especificaciones de hardware ni de software en cualquier plataforma de gestión del aprendizaje.

Según la concepción de la enseñanza centrada en el aprendizaje del estudiante, el concepto de Objeto de Aprendizaje desempeña un papel importante en la construcción y distribución personalizada de contenidos, así como la reutilización de los mismos en nuevos contextos.

Los OA deben diseñarse de acuerdo a los estándares actuales, que resultan necesarios para garantizar la reusabilidad en diversos contextos de aprendizaje, accesibilidad y empleo entre diferentes sistemas de gestión del aprendizaje (SGA) de los OA.

La UCI cuenta con un Centro de Desarrollo (FORTES) dedicado a la producción y gestión de materiales y recursos didácticos, diseñados para las diferentes disciplinas del Plan de estudios de la carrera Ingeniería en Ciencias Informáticas. Sin embargo, los materiales que se producen, y dentro de estos los OA, carecen de una metodología específica que contemple las características propias de la didáctica de cada disciplina, la cual debe considerar los diferentes estilos y ritmos de aprendizaje de los estudiantes, las competencias y habilidades específicas y las formas de representación del contenido. La disciplina Matemática en la institución antes mencionada, no está exenta de lo antes planteado, por lo que los autores se propusieron como ***objetivo*** diseñar una metodología para el diseño y desarrollo de OA en dicha Disciplina, que le sirviera de guía a los docentes, para desarrollar los materiales educativos a emplear en sus clases en correspondencia con el modelo de formación centrado en el aprendizaje.

Dependiendo de las características de cada institución universitaria y de la experiencia del personal docente involucrado en la elaboración de los materiales didácticos, será la metodología a seguir para la producción y desarrollo de los mismos. Si el modelo de formación puesto en práctica en la institución se centra en el aprendizaje de los estudiantes, los recursos diseñados harán énfasis en este. Por otra parte los conocimientos, habilidades y destrezas que posean los diseñadores de recursos didácticos disminuyen el riesgo de ejecutar acciones en las diferentes etapas que pudieran afectar el cumplimiento de los objetivos para los cuales se diseñó el material. Consecuentemente, la poca complejidad que muestran las estrategias estudiadas (Osorio, 2006; Aguilar, 2009) no implican demasiados riesgos cuando se cuenta con personal altamente calificado para desarrollar estos materiales.

Contenido

Después de efectuar el estudio y análisis de diversas metodologías para el diseño y desarrollo de OA, ya puestas en práctica en diferentes instituciones universitarias a escala mundial y fundamentalmente de América Latina, se propone una metodología que contempla los elementos teóricos, de diseño y estructurales más significativos que a criterio de los autores servirán como fundamento para la elaboración de OA en la disciplina Matemática en la UCI.

Metodología propuesta

La creación de recursos o materiales didácticos con el propósito de coadyuvar al logro de determinados objetivos, requiere como cualquier producto de una metodología para su ejecución a través de distintas fases o etapas.

La metodología que se presenta está dividida en las siguientes fases:

Investigación y Análisis

Esta primera etapa se puede considerar como la más importante debido a que los resultados que se obtienen constituyen la guía y el enfoque desde el punto de vista de la enseñanza y el aprendizaje de la Disciplina que se reflejará en toda la aplicación. El recurso humano más importante en esta fase es el experto en el tema a enseñar y el experto en técnicas de enseñanza.

Dentro de esta fase se identifican las siguientes etapas:

1. Identificación de los objetivos de aprendizaje de la aplicación.
2. Definición de la estrategia de aprendizaje a emplear.
3. Selección de las habilidades específicas a desarrollar según el contenido de la disciplina
4. Definición de las acciones para desarrollar las habilidades deseadas según la taxonomía de Bloom.
5. Identificación de los elementos, procesos y actividades relacionados con el tema que coadyuven al desarrollo de las habilidades analizadas.
6. Identificación de las tareas de aprendizaje que se desea evaluar.

Diseño y desarrollo

Asumiendo el criterio de Aguilar (2009) se considera que el OA debe contener 5 elementos: *Teoría, experimentación, evaluación, colaboración y relación*, todas a tenerse en cuenta en la fase de diseño. De manera individual algunos elementos poseen una estructura que tiene en cuenta diferentes estilos de aprendizaje de los educandos. En este artículo se asume la teoría propuesta por Kolb (1981), al plantear que para adquirir un conocimiento se debe trabajar o procesar la información que se recibe. La información se puede recibir de dos formas: i) *de una experiencia directa y concreta*, ésta se tiene cuando hacemos, visualizamos o experimentamos algo; ii) *de una experiencia abstracta*, ésta se tiene cuando leemos acerca de algo o cuando alguien nos lo cuenta. La experiencia que se tenga, concreta o abstracta se transforma en conocimiento cuando la procesamos de alguna de estas dos formas: i) *reflexionando y pensado sobre ellas*, ii) *experimentando de forma activa con la información recibida*. En concordancia con esto se considera que los OA deben incluir:

Teoría: Esta área contiene información sobre el tema del OA, además favorece a los usuarios que tenga un estilo de aprendizaje abstracto debido a que encontrarán conceptos teóricos sobre el tema abordado.

Experimentación: Esta área contiene animaciones, simulaciones entre otros, luego favorece a los usuarios que tengan un estilo de aprendizaje concreto. En esta área el usuario podrá experimentar y reflexionar los conceptos mostrados en el área de teoría y obtener una experiencia directa y concreta.

Evaluación: En esta área se evaluará el conocimiento adquirido en el área de teoría y experimentación.

Colaboración: En esta área se pueden hacer comentarios sobre el OA. Además, se pueden visualizar comentarios de otros usuarios. Mediante estos comentarios se hace una socialización del conocimiento.

Relación: Esta área contiene vínculos a otros OA relacionados con el tema. A través de ellas se pueden acceder otros OA.

Estos 5 elementos permiten la construcción de OA, en los cuales se considera el área pedagógica como parte fundamental para el proceso de aprendizaje.

En cuanto al modo de tratamiento y presentación del contenido en las diferentes partes de un OA, se desarrolla de acuerdo a los tipos de información, intentando sintetizarla de manera que el usuario pueda recorrerla de una mirada, en una pantalla, hasta una pantalla y media. El contenido se presenta de forma sintética y se establecen relaciones que complementan la información a un nivel superior a través de enlaces. Las explicaciones se apoyan en los mapas conceptuales, simulaciones, gráficos, animaciones y otros elementos multimedia.

Con los elementos descritos se propone la siguiente guía de desarrollo para el diseño del OA en esta fase.

1. El OA debe especificar un objetivo general mediante el cual se ubique el contexto de aprendizaje. Este objetivo se localizará en el área de texto.
2. El OA desarrollado debe ser visualizado preferentemente en un espacio que alcance totalmente en la pantalla, esto quiere decir que se debe evitar el uso de barras de desplazamiento.
3. La teoría debe ser escrita siguiendo algún método instruccional, por ejemplo: i) *pistas tipográficas y subrayados*.- Señalamientos que se hacen en un texto para enfatizar y

organizar ciertos elementos de contenido, ii) *ilustraciones*.- Representación visual de los conceptos expuestos en la teoría, iii) *preguntas intercaladas*.- Preguntas insertadas en un texto, a través de estas se mantiene la atención y retención del tópico estudiado. Se recomienda usar guías de colores para las fuentes y los fondos.

4. En el área de experimentación se deben colocar animaciones que pueden ser creadas a través de Flash o algún otro software que permita la animación, se pueden colocar applets que nos permitan la simulación o se pueden incluir videos.

5. El área de evaluación puede contener preguntas utilizando los siguientes tipos: i) *relación*.- Se presentan preguntas del lado izquierdo y sus respuestas del lado derecho (dentro del área de evaluación), el usuario hace una relación entre ellas, ii) *opción múltiple una sola opción válida*.- El usuario visualiza varias opciones para la respuesta de la pregunta y sólo una es verdadera, iii) *opción múltiple, múltiples opciones válidas*.- El usuario visualiza varias opciones para la respuesta de la pregunta y más de una son verdaderas, iv) *rellenar espacios*.- El usuario visualiza una pregunta y un espacio vacío en el cual debe escribir al complemento de la pregunta. Estas preguntas serán procesadas y retroalimentarán al usuario inmediatamente.

6. En el área de colaboración se visualizará un foro en el cual los usuarios puedan interactuar, también se puede agregar una herramienta que permita al usuario otorgar una calificación al OA.

7. En el área de relación el usuario encontrará ligas hacia otros OAs relacionados con el que se está estudiando, se recomienda no presentar más de 3 ligas con el objetivo de no ocasionar confusión y carga cognitiva.

Finalmente en esta fase se deberá pasar el OA por un software que permita generar su metadato con el fin de garantizar su reusabilidad, accesibilidad y adaptabilidad de los contenidos. En este caso se empleará la herramienta RELOAD que permite crear, editar y empaquetar el metadato según el estándar SCORM de ADL (www.adlnet.org), debido a que es el más usado actualmente.

Análisis de la Calidad del contenido del OA

Con relación a la calidad de la parte educacional del OA, tenemos que esta se cumplirá en mayor grado cuanto más se logre el objetivo de obtener un aprendizaje significativo en el alumno. Un aspecto medular para lograr lo anterior es asegurando la calidad de contenido del OA.

Para hacer el análisis de la calidad antes descrita, los autores asumen el criterio seguido por Velázquez y Muñoz (2005) de la Universidad Autónoma de Aguas Calientes, los cuales han trabajado en pos de unificar los criterios existentes internacionalmente para lograr un aseguramiento de la calidad en objetos de aprendizaje y a su vez proponen estrategias generales para determinar y asegurar la calidad de contenido en objetos de aprendizaje.

Evaluación

En esta fase el OA es evaluado por los actores principales del proceso de enseñanza y aprendizaje para así obtener una retroalimentación del mismo que permita mejorar el desarrollo de OA.

Resultados preliminares

La Metodología propuesta le permitió a un grupo de profesores encargados de llevar a cabo el diseño y desarrollo de materiales educativos, para potenciar el autoaprendizaje de los contenidos de las asignaturas de la disciplina Matemática, diseñar OA al efecto. Los mismos se emplearon en el tratamiento específico de determinados temas como son la Teoría de Conjuntos, las Relaciones Binarias y el Límite y Continuidad de funciones, todos objetos de estudio de las asignaturas Matemáticas Discretas I y Matemática I, respectivamente, del Plan de Estudios de la carrera Ingeniería en Ciencias Informáticas.

De un total de 87 estudiantes pertenecientes a 3 grupos docentes de primer año de la carrera antes mencionada, el 52% (45 estudiantes) manifestaron sentirse satisfechos con el diseño y presentación de los nuevos materiales presentados y los valoraron de muy útiles para su autopreparación, logrando una independencia aceptable para el estudio de estos temas, el 21% (19 estudiantes) manifestó sentirse satisfechos pero aún consideraron necesario el empleo de bibliografía impresa como complemento y los restantes estudiantes se mostraron escépticos en cuanto a la efectividad del material propuesto, manifestando una resistencia al cambio Hacia un modelo centrado en el aprendizaje, lo que demuestra la existencia de un pensamiento tradicionalista en los estudiantes.

Los resultados presentados devienen de una primera iteración realizada una vez desarrollados los OA y puestos en práctica. Sin embargo, los mismos están sujetos a transformaciones en pos de su perfeccionamiento, para las cuales se tiene en cuenta el criterio de los propios actores del proceso y de otros especialistas. Una vez obtenidos todos los criterios se pasa a una nueva iteración y se procede a comprobar la solidez del aprendizaje alcanzado a través de los materiales propuestos.

Conclusiones

La experiencia realizada en la producción y empleo de OA es promisoria en cuanto a la adquisición y desarrollo de habilidades en los estudiantes que responden a necesidades específicas de su aprendizaje, siendo estos responsables del mismo. Se sugiere seguir la metodología propuesta, para lograr de esta forma facilitar el proceso de desarrollo de OA en la disciplina Matemática y además producir los mismos con la calidad deseada en dependencia de las necesidades educativas de la asignatura o disciplina para los cuales se diseñen.

La metodología propuesta indica los pasos que se deben desarrollar en cada una de las fases, las cuales a criterio de los autores contribuyen a eliminar los riesgos en dicho proceso.

Aún queda mucho trabajo por realizar en lo referente a la automatización del proceso de desarrollo de los OA, por medio del uso de herramientas. También en cuanto a la introducción de estos con diferentes propósitos, de forma coherente, durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de las diferentes disciplinas y asignaturas. Sin embargo, existe la intención de la institución en desarrollar dicha tarea y se continúa investigando al respecto.

Referencias bibliográficas

Aguilar, C, J. (2009). *Guías de diseño para el desarrollo de objetos de aprendizaje.* México: D.R. © Universidad Tecnológica de Puebla.

García A, L. (2005). *Objetos de aprendizaje.* Murcia: BENED.

Henke, H. (2001). *Learning Theory: Applying Kolb´s Learning Style Inventory with computer based Training.* Recuperado el 23 de febrero de 2011 de http://hrast.pef.uni-lj.si/~joze/podiplomci/prs/clanki03/learningtheory.pdf

Kolb, D. A. (1981). *Learning styles and disciplinary differences*'. In A. W. Chickering (Ed.) The Modern American College, San Francisco: Jossey-Bass.

Osorio, B. (2006). *Metodología para el desarrollo de Objetos de Aprendizaje.* Tesis de Maestría no publicada, Departamento de Sistemas de Información, Centro de Ciencias Básicas, Universidad Autónoma de Aguascalientes, México.

Velázquez, C. y Muñoz, J. (2005). *La Importancia de la Definición de la Calidad del Contenido de un Objeto de Aprendizaje*. Trabajo presentado en el IV Congreso Internacional de Ciencias de la Computación, Septiembre, Puebla México

ANALIZANDO UNA SITUACIÓN DE VARIACIÓN EN UN SISTEMA DINÁMICO

Tulio Amaya de Armas[1y2], Natalia Sgreccia[3y4], Ricardo Valles Pereira[5], Albeiro López[6]
[1] Institución Educativa Madre Amalia de Sincelejo, [2] Corporación Universitaria de Caribe, Cecar, [6] Institución Educativa Normal Superior de Sincelejo — Colombia,
[5] Universidad Simón Bolívar de Caracas, — Venezuela
[3] Universidad Nacional de Rosario — Argentina
[4] Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas
tuama1@hotmail.com, nataliasgreccia@hotmail.com, rfricardovalles@hotmail.com, alocer8@hotmail.com

Resumen: Con la intención de contribuir de manera concreta a la formación de profesores en Matemática desde el uso pedagógico de las tecnologías, se propuso una actividad, cuyo contenido por lo general se trabaja hacia al final de los cursos de Cálculo Diferencial. *La situación inicial es: un alambre de longitud K se corta en dos partes. Una es doblada en forma de triángulo equilátero y la otra en forma de circunferencia. ¿Cómo deberá ser cortado el alambre para que la suma de las áreas del triángulo y del círculo sea mínima?* Se utilizó como recurso didáctico el software libre de geometría dinámica GeoGebra. Se efectuó la construcción geométrica, se representó la situación de manera gráfica y simbólica y se analizaron los equivalentes entre los sistemas de representación. Se comparten resultados de la implementación llevada a cabo con profesores latinoamericanos mediante la modalidad de taller.

Palabras clave: GeoGebra, tecnología, representación, situación de variación, optimización.

Abstract: In order to contribute by a concrete way to the training of Mathematics teachers from the pedagogical use of the technologies, we proposed to work on a task which is usually developed at the end of the Differential Calculus courses. The basic statement is: *a wire of length K is to be split in two parts. One of them is going to be bent so that it forms an equilateral triangle and the other one to form a circumference. How should the wire be cut in order to minimize the addition of the areas of the resulting triangle and circle figures?* As a didactic tool, we used GeoGebra, free software for dynamic geometry, to carry out the geometric construction, the representation of the situation in both a graphical and a symbolic manner, and the analysis of the equivalence between the systems of representation. Through a workshop we share the results of its implementation by Latin American teachers.

Key words: GeoGebra, technology, representation, variation situation, optimization.

Presentación

Con esta actividad se pretendía analizar las estrategias utilizadas por los docentes al hacer el paso entre los diferentes registros de representación de la situación planteada, tratando de indagar lo planteado por Duval (2004), al considerar que en muchas ocasiones, los alumnos no llegan a reconocer un mismo objeto matemático a través de sus diferentes representaciones semióticas posibles, y la conversión entre las distintas representaciones de un mismo objeto presenta graves dificultades. Además, las posibilidades del programa GeoGebra de realizar representaciones dinámicas de un objeto y poder analizarlas frente a otras de sus representaciones, creemos que es un atenuante significativo en este tipo de actividad.

Las comparaciones internacionales sobre capacidades matemáticas de estudiantes de secundaria ubican a la mayoría de los países latinoamericanos prácticamente al final de un conjunto considerable de naciones (Ministerio de Educación de España, 2009). Considerando además las Metas Educativas para el año 2021 en Iberoamérica (Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura, 2010), se requiere incorporar las TIC a los procesos de enseñanza y aprendizaje, ya que la inclusión social y el acceso al conocimiento se vinculan cada vez más al uso de las mismas. Para mejorar el panorama actual, un aspecto importante a tener en cuenta es la formación continua de los profesores en Matemática. Se necesita resignificar las formas de enseñar y aprender Matemática. Una forma concreta de hacerlo es a partir del diseño, implementación y evaluación de propuestas de actividades concretas que atiendan a las necesidades detectadas.

En Matemática, las TIC favorecen el desarrollo de habilidades cognitivas, como representar, identificar y explorar comportamientos de relaciones matemáticas (Moreno y Santos, 2002). Hegedus & Kaput (2004) conciben a las TIC como una infraestructura representacional que amplía las potencialidades del pensamiento humano, afirmando que estas nuevas herramientas conducen a nuevas maneras de pensar o razonar. Para Estrada (2005), un rasgo importante de las representaciones de los objetos matemáticos en un ambiente dinámico es poder operar con ellos y ver al mismo tiempo en una pantalla el efecto de estas acciones sobre dichas representaciones. El dinamismo propio de software matemático se constituye en una característica de un valor formativo muy importante, ya que transforman significativamente las experiencias de aprendizaje matemático de los aprendices (Rojano y Moreno, 2002).

A su vez, Cabero (2004) advierte que tampoco se debería depositar confianza absoluta a las TIC descuidando los otros aspectos importantes para llevar a cabo propuestas didácticas eficientemente. Por ello consideramos propicio compartir en detalle una actividad que emplea un software geométrico específico, comentando incluso algunos resultados de una implementación llevada a cabo con docentes. De acuerdo con Herrera (2010), el debate sobre el papel de las tecnologías electrónicas en la Educación Matemática ya no se centra en si debemos usarlas o no, sino en cómo emplearlas inteligentemente para que nuestros estudiantes aprendan mejor Matemática. Este autor le otorga valor a las herramientas tecnológicas justamente para fomentar la observación, la discusión y el pensamiento crítico en los estudiantes. Estas habilidades adquieren relevancia en el escenario actual, donde la cantidad y variedad de información aumenta y se transforma continuamente.

Actividades como la que aquí se comparte son ilustrativas de la capacidad que tienen estos instrumentos para incidir en la formación matemática de los alumnos, pues ofrecen representaciones y relaciones entre objetos matemáticos con las que a su vez pueden interactuar, dando una nueva dimensión a la construcción del conocimiento matemático (Lupiáñez y Moreno, 2002).

Propuesta de actividad

A continuación se detallan las etapas básicas o centrales de la actividad consistente en la siguiente situación:

Un alambre de longitud K se corta en dos partes. Una es doblada en forma de triángulo equilátero y la otra en forma de circunferencia. ¿Cómo deberá ser cortado el alambre para que la suma de las áreas del triángulo y del círculo sea mínima?

Realizando las construcciones:

1. Abre el programa GeoGebra y construye un segmento AB y un punto D sobre él. Construye un triángulo equilátero de perímetro AD. Mueve el punto D y verifica que la construcción es consistente. Construye una circunferencia cuyo perímetro sea DB. Encuentra el área del triángulo y el área del círculo.
2. ¿Qué observas cuando mueves el punto D? ¿Con qué crees que está asociado? ¿Esto sucede moviendo cualquier otro punto? ¿Por qué?

Pasando a otras representaciones:

1. Muestra los ejes, transfiere la suma de las áreas al eje *y* y la longitud del segmento AD al eje *x*. Marca el punto P, que resulta de la intersección entre la recta vertical que pasa por el transferido de AD en *x* y el transferido de la suma del área del triángulo y la del círculo en *y*. Oculta estas rectas y activa la traza del punto P. ¿Qué observas cuando mueves el punto D? ¿Con qué lugar geométrico asocias este comportamiento?
2. Desactiva la traza de P y encuentra el lugar geométrico de P cuando mueves D. Ubica cuatro puntos sobre el lugar geométrico y construye una cónica que pase por los cinco puntos que aparecen ahora sobre dicho lugar geométrico.
3. Con el comando ecuación y coordenadas, encuentra la ecuación de la cónica recientemente hallada. Mueve ahora el punto A hasta que la longitud del segmento AB sea un entero. Compara la longitud de AB con los coeficientes de la ecuación. ¿Qué observas cuando mueves A? ¿A qué crees que se debe?

Buscando un patrón:

1. Conjetura comportamientos asociados a la situación en estudio.

2. Propón una secuencia de actividades que nos permita, como docentes, encontrar un patrón (o modelo) a partir de la generalización de lo recientemente analizado.
3. ¿Qué ejemplos de actividades de este tipo les propondrías a tus alumnos de secundario? Ensaya algunas propuestas.

Método

A partir de un segmento AB de longitud *k*, se coloca un punto D sobre éste. Se hace AD = *c* y BD = *k-c*. Se obtienen los perímetros del triángulo equilátero y de la circunferencia, que la situación planteada solicita. Con estos perímetros como guía se construyen tanto el triángulo equilátero como la circunferencia. Se calculan sus áreas respectivas, A_t del triángulo y A_c del círculo, así como la suma de éstas. Al mover el punto D, se puede revisar la consistencia de la construcción. Al transferir la longitud de *c* sobre el eje *x* y la suma $A_t + A_c$ al eje *y*, construir una recta vertical que pase por el transferido de *c* y otra horizontal que pase por el transferido de $A_t + A_c$. Estas rectas se intersecan en un punto, que llamamos P. Al activar la traza del punto P y mover el punto D, se puede ver el lugar geométrico determinado que permite analizar gráficamente la relación entre el área del triángulo y del círculo con su suma, visualizándose qué tramo de la gráfica recibe mayor aportación de una u otra figura geométrica. A partir de esta gráfica, se encuentra, con la ayuda del programa, la ecuación del lugar geométrico, donde además se puede analizar la relación de la ecuación con los otros elementos de la construcción.

Para analizar la relación entre la longitud del segmento AB = *k* y los coeficientes de la expresión matemática del lugar geométrico que describe el punto P al mover D, y asignar sentido a cada representación de la situación, al asociarla con elementos de otra representación, se compara cada una de las representaciones que se obtienen, con la ventaja -que el programa permite- de verlas simultáneamente y así apreciar su constante variación al mover el punto D. A partir del análisis de las tres representaciones, y al comparar con la longitud *k* del segmento, se pueden encontrar algunos patrones, objeto de estudio aquí.

Se discute con los participantes la explicación matemática de este hecho, basados en la relación entre las áreas del triángulo y del círculo que se construyeron con cada trozo del alambre como referencia. Se visualiza, tanto en la gráfica como en los valores numéricos de las áreas, el punto mínimo que el problema solicita.

Resultados de la implementación

A continuación se comparten las principales apreciaciones, en relación al impacto de la propuesta, sobre la implementación de ésta con un grupo de educadores matemáticos latinoamericanos que asistieron al taller, en el marco de la XXV Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.

Se hicieron las construcciones geométricas, obteniéndose además una representación algebraica donde los coeficientes -a modo de ejemplo- son los que pueden apreciarse en la Figura 1.

Se discutió con los participantes la explicación matemática de esto, comparando los sistemas de representación entre sí y haciendo corresponder a otros sistemas cada elemento identificado en un cierto sistema de representación. El área del triángulo es $A_t = \frac{B \times h}{2}$ y la altura del triángulo de perímetro *c* es $h_1 = \sqrt{3}\frac{c}{2}$. Así que el área del triángulo equilátero en función de *x* es $A_t(x) = \frac{\sqrt{3}}{36}x^2$ y la del círculo es $A_c(x) = \pi\left(\frac{k-x}{2\pi}\right)^2$. La expresión algebraica correspondiente a la suma de las áreas es $A_s(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{9} + \frac{1}{\pi}\right)x^2 - \frac{2kx}{\pi} + \frac{k^2}{\pi}$, que es equivalente a la mostrada en la Figura 1 -para el ejemplo en estudio-, al remplazar el valor correspondiente de *k* y dividir por el coeficiente de *y*.

En relación a la implementación del taller, consideramos como urgente la alfabetización informática de los docentes en Matemática de nuestros países latinoamericanos. Los participantes del taller dejaron ver su casi nula familiarización con este tipo de medios tecnológico-didácticos. Sin embargo, se consideraron y discutieron aspectos centrados en la incidencia de las TIC en los procesos y resultados del aprendizaje. Resaltaron la fortaleza de programas como el GeoGebra al facilitar a los estudiantes conjeturar e inferir con relativa facilidad, además de permitir realizar procesos inductivos utilizando muchísimos datos, con alto nivel de confiabilidad. Se mencionaron las bondades del programa, al permitir visualizar simultáneamente diferentes sistemas semióticos de representación del mismo objeto matemático, permitiendo asignar significado a los diferentes elementos presentes en las representaciones, en relación con sus equivalentes en los otros sistemas.

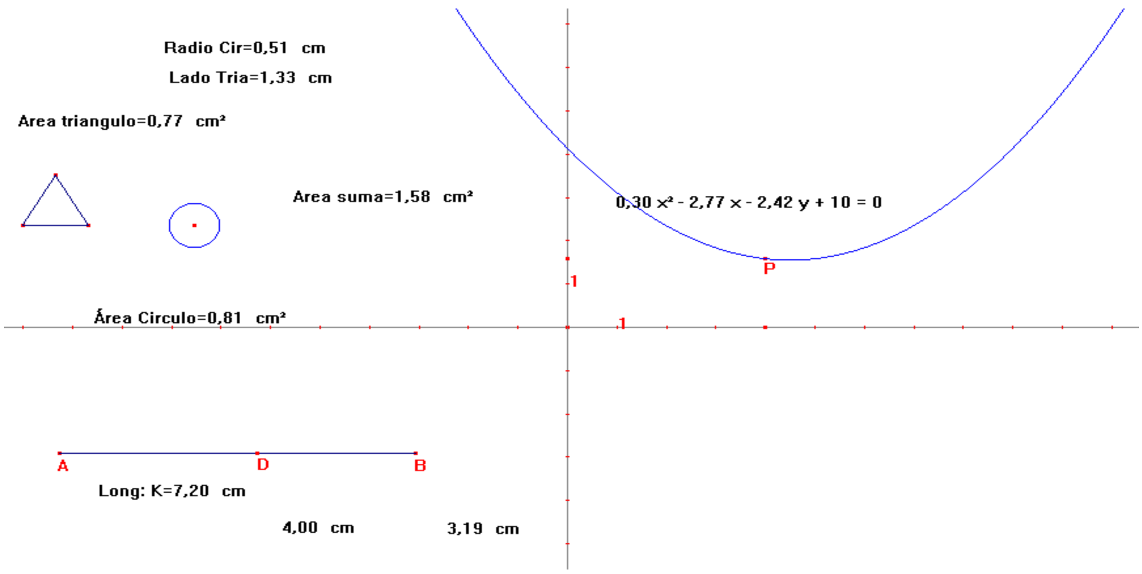


Figura 1. Construcción geométrica de la situación empleando GeoGebra

Tal es el caso de los puntos de la parábola de la construcción y su dependencia del tamaño de las figuras y la dependencia de toda la construcción del segmento AD. La mayoría de los participantes reconocieron en el programa su utilidad como herramienta y, cuando fueron llevados a utilizarlo, como instrumento (Moreno y Santos, 2002) y comenzaron a realizar comentarios muy favorables sobre sus potencialidades didácticas. Esto pone en evidencia que su falta de utilización en las aula es más por falta de interacción con este tipo de programas, que por apatía o temor a éstos. Hicieron dos tipos de comentarios, donde se puede evidenciar un acercamiento hacia la utilización del software como instrumento: 1) ofrece facilidades de innovación continua de las construcciones, lo cual es imposible de realizar con los medios tradicionales. Esta diferencia dinámica en velocidad y precisión hace factible una metodología de enseñanza de la geometría euclidiana que, si nos limitamos al papel y lápiz, es sólo posible desde el punto de vista teórico y con muchas limitaciones; 2) el uso del GeoGebra permite alcanzar los mismos resultados que los logrados con los medios convencionales en un tiempo significativamente menor, así como también tiene el poder de modificar dinámicamente las construcciones y observar lo que ocurre en los distintos casos, facilitando el estudio y análisis de propiedades.

Comentarios finales

Jiménez (2006) asegura que todo contenido del currículo que tenga relación con los procesos de Cálculo será necesariamente influenciado por los aportes de las TIC. Esto conlleva una necesaria redefinición de los énfasis en la enseñanza de algoritmos y conceptos. Incluso adquiere relevancia la reflexión docente sobre la intencionalidad en los usos de los materiales y recursos didácticos disponibles (Flores, 2006), entre ellos los software educativos matemáticos.

Estos programas se constituyen en soporte para el desarrollo innovador de las actividades en el aula de Matemática y que, sin la orientación del docente en las actividades académicas que involucran esta herramienta, difícilmente se lograrían los resultados esperados. Es por ello que siempre debemos tener presente que las herramientas tecnológicas surtirán efecto en el aprendizaje siempre y cuando el docente logre adecuar las mismas a las necesidades educativas existentes.

Para finalizar, cabe resaltar que actividades de este tipo, que involucran TIC, trascienden la mera acción técnica del uso de una herramienta, ya que contemplan el desarrollo de habilidades matemáticas, como por ejemplo: conjeturar, construir, comparar, describir, justificar, visualizar,… de suma importancia para la alfabetización matemática de las personas. De eso se trata: de potenciar los aprendizajes matemáticos de los estudiantes, presentándose aquí una actividad concreta con software para ello.

Referencias bibliográficas

Cabero, J. (2004). La transformación de los escenarios educativos como consecuencia de la aplicación de las TICs: estrategias educativas. En M.I. Vera y D. Pérez. (Eds.), *Formación de la ciudadanía. Las TICs y los nuevos problemas* (pp.17-43). Alicante: Asociación Universitaria del Profesorado de Didáctica de las Ciencias Sociales.

Duval, R. (2004). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del conocimiento*. Cali: Universidad del Valle.

Estrada, J. (2005). *Diseño de situaciones dinámicas en un ambiente computacional como un escenario para el aprendizaje de conceptos fundamentales del cálculo*. Recuperado el 11 de marzo de 2010 de http://polya.dme.umich.mx/ eventos/MemoriaXIII.pdf.

Flores, P. (2006). Los materiales y recursos didácticos en la formación de profesores de matemáticas. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *12*(41), 77-97.

Hegedus, S. & Kaput, J. (2004). An introduction to the profound potential of connected algebra activities: Issues of representation, engagement and pedagogy. En M. Hoines y A. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3 (pp.129-136). Bergen: Bergen University College.

Herrera, M. (2010). Introducción al Capítulo 5: Uso de recursos tecnológicos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 23,* 1149-1151. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Jiménez, L. (2006). *Enseñanza de la matemática dominada por algoritmos versus una enseñanza más conceptual*. Recuperado el 06 de marzo de 2010 de http://www.uned.ac.cr/memencmate/Ponencias/procesoensenanza/Enseñanza%20de%20la%20Matemática%20-%20Lilliana%20Jiménez%20Montero.pdf.

Lupiáñez, J. y Moreno, L. (2002). Tecnología y representaciones semióticas en el aprendizaje de las matemáticas. *Memorias del Seminario Nacional de formación de docentes sobre el uso de nuevas tecnologías en el aula de Matemáticas* (pp.248-256). Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Ministerio de Educación de España (2009). *Pisa 2009. Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos. OCDE. Informe español*. Recuperado el 25 de febrero de 2011 de http://www.educacion.gob.es/cesces/actualidad/pisa-2009-informe-espanol.pdf.

Moreno, L. y Santos, M. (2002). El proceso de transformación del uso de la tecnología en una herramienta para la solución de problemas de matemáticas por parte de los estudiantes. *Memorias del Seminario Nacional de formación de docentes sobre el uso de nuevas tecnologías en el aula de Matemáticas* (pp.263-268). Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (2010). *2021. Metas educativas. La educación que queremos para la generación de los Bicentenarios*. Recuperado el 25 de febrero de 2011 de http://www.oei.es/metas2021/todo.pdf.

Rojano, T. y Moreno, L. (2002). Educación matemática: investigación y tecnología en el nuevo siglo. *Memorias del Seminario Nacional de formación de docentes sobre el uso de nuevas tecnologías en el aula de Matemáticas* (pp.194-202). Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

LAS TECNOLOGIAS DE LA INFORMACIÓN Y LAS COMUNICACIONES EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA EN LA MODALIDAD DE LA UNIVERSALIZACIÓN

Osdeinys Suárez Torres, Milagros Gutiérrez Álvarez
Universidad de Camagüey. Cuba
milagros.gutierrez@reduc.edu.cu

Resumen: En el presente trabajo de investigación, se ofrece un análisis de la integración de las posibilidades y bondades que brindan las TIC en el PEA de la Matemática, en la modalidad semipresencial en una sede universitaria, especialmente con el uso de asistentes matemáticos. Se parte en el trabajo del diagnóstico que aborda las dificultades en el uso de estos medios, teniendo en cuenta, la unidad de la dinámica del PEA y el proceso de asimilación de los estudiantes, tomando como base las etapas de asimilación de la Teoría de Galperin (1982), así como los fundamentos teóricos de los medios de enseñanza como categorías del proceso de enseñanza aprendizaje. Se plantea una estrategia metodológica que favorece la organización y desarrollo del aprendizaje en esta modalidad, teniendo presente los principios pedagógicos del proceso de universalización planteados por la dirección del Ministerio de Educación Superior (MES) en Cuba. Se concluye con una valoración de la estrategia planteada.

Palabras clave: Semipresencial, asistente matemático, estrategia metodológica.

Abstract: In this investigation the author analyses the integration of the possibilities and kindness granted by the technology of information and communication in the teaching-learning process of Mathematics, in the modality of semipresential lessons in University, especially with the use of mathematical assistants. The starting point of the investigation is the diagnosis which deals with the difficulties in the implementation of the means already mentioned, taking into account the unity of the teaching-learning process dynamics and the process of assimilation of knowledge by students, taking as a basis the different stages of assimilation of Galperin's theory (1982), as well as the theoretical foundations of the teaching's means as categories of the teaching-learning process. The author proposes a methodological strategy which favors the organization and development of learning in the modality of semipresential lessons, bearing in mind the pedagogical principles of the process of universalization of studies developed by the Ministry of Higher Education in Cuba. The author concludes with an evaluation of the proposed strategy.

Key words: Semipresential, mathematical assistants, methodological strategy.

Introducción

El siglo XXI comenzó a la altura de los más altos adelantos científico-técnicos y la confrontación y manejo de las nuevas tecnologías que hoy se imponen. En este sentido la educación juega un papel fundamental, no obstante, la Educación Superior ha tenido cierta lentitud para aceptar los resultados de las ciencias y sobre todo de las ciencias pedagógicas, así como en sus tributos para la rápida asimilación de las nuevas tecnologías.

La universalización es la extensión de la universidad y de todos sus procesos sustantivos a toda la sociedad a través de su presencia en los territorios, permitiendo mayores niveles de equidad y de justicia social en la obtención de una elevada cultura general de los ciudadanos planteado por la dirección del MES en Cuba (MES, 2003). Para lograr esta importante tarea se necesita implementar un modelo pedagógico semipresencial, centrado en el estudiante y que integra las actividades presenciales , conducidas por profesores, tutores, no solo con el objetivo de instruir, sino de lograr una educación integral de los estudiantes, con ayudas pedagógicas, de libros de textos y complementarios, casetes con clases modelos, productos informáticos, literatura en formato digital, además de contar con instalaciones y recursos de los municipios. El peso fundamental lo han llevado los medios más tradicionales, pero ha sido necesario desplazarlo hacia el empleo de las Tecnologías de las Informaciones y las Comunicaciones (TIC).

El proceso de enseñanza- aprendizaje (PEA) de la Matemática, trae consigo en esta modalidad ciertas dificultades, máxime si se refiere al PEA en las ingenierías, pues es necesario que se desarrollen habilidades y capacidades matemáticas que contribuyan a la comprensión y el avance de las ciencias aplicadas.

Uno de los principales objetivos de la Matemática en las carreras de ingeniería es la de servir de apoyo por sus aplicaciones, pero para el logro de estos objetivos es necesario en la enseñanza de la misma, buscar un equilibrio entre fundamentalización y profesionalización de la propia disciplina, (Gutiérrez, 2003). En las más variadas situaciones, lograr que los educandos dominen el aparato matemático, que los haga capaces de modelar y analizar los procesos técnicos, económicos, productivos y científicos, utilizando tanto métodos analíticos como aproximados, haciendo uso eficiente de las técnicas de computación, no es tarea facial.

En ocasiones se abusa del estudio por notas de clases, y libro de texto, sin explotar al máximo, los magníficos materiales en soporte electrónicos, con que se poseen, así como las bondades que aportan los asistentes matemáticos en el PEA de la Matemática. A partir del diagnóstico realizado, se aprecia que las deficiencias estaban centradas en dos cuestiones fundamentales. La dirección del proceso no favorece el aprendizaje de la Matemática en relación con otras disciplinas y algunos de los aspectos adoptados en la modalidad semipresencial, no contribuye a que el contenido que se imparte por la propia disciplina, cumpla con las exigencias de la educación actual en nuestro país.

A través de los métodos empleados en el transcurso de la investigación se determino el empleo de una estrategia metodológica sobre la base de la teoría de la formación de las acciones mentales por etapas de P. Y. Galperin, que propicie el aprendizaje de la disciplina Matemática en los alumnos de las carreras de ingenierías, en una sede municipal, con una mejor utilización de las TIC.

Desarrollo

El proceso de universalizar de la Educación Superior tiene como principal objetivo el de universalizar el conocimiento, propiciando con ello el desarrollo económico y social del país, el amplio disfrute personal y el empleo culto del tiempo libre.

El modelo pedagógico en la universalización reúne las siguientes características: flexible, estructurado, centrado en el estudiante, con actividades presenciales sistemáticas y con un enfoque electivo en la selección de los medios, teniendo en cuenta cada necesidad educativa y la disposición de tecnología en un contexto dado. (Horruitiner, 2007), esto exige además de la capacitación y orientación continua de los profesionales incorporarlos como profesores en las aulas, no solo enfatizar que hay que hacer en esta modalidad para lograr en el PEA los objetivos trazados, sino cómo hacerlo, de manera que los estudiantes asimilen consecuentemente los conocimientos.

El proceso de enseñanza aprendizaje en la universalización

En esta modalidad se concibe el aprendizaje sobre la base de tres componentes principales: el sistema de actividades presenciales, el estudio independiente, utilizando los materiales didácticos concebidos para cada programa, que deben poseer cada estudiante y los servicios de información científico técnica y docente.

La Didáctica constituye un fundamento teórico y práctico del currículo, al brindar los principios, teorías y componentes de los procesos formativos de carácter sistémico y curricular, para cualquier modalidad curricular que se adopte, impactando tanto en el diseño como en la ejecución y validación curricular del proyecto curricular que se ejecute. En el modelo pedagógico de la enseñanza semipresencial se relacionan todos los componentes de estado del PEA. A partir de la relación entre los componentes problema-objeto-objetivo, el contenido se potencia en objeto de aprendizaje en tanto en la relación entre conocimientos, habilidades y valores se estructura un núcleo básico e invariante que es lo que el estudiante debe aprender. Es precisamente la tríada constituida por métodos, medios y formas lo que le da la particularidad al modelo semipresencial.

Según Díaz y Arroyo al tema se le llama unidad didáctica del objeto de aprendizaje, pues plantea que estructurado científicamente puede dar mayores posibilidades al estudiante, es opinión del autor que esto puede ocurrir en tanto algunos profesores pueden asociarlo a un plan temático conceptual, es decir estructurarlo solo desde los conocimientos, pero es preciso ver la relación entre los conocimientos y su secuencia con las habilidades que el estudiante debe aprender (Díaz & Arroyo, 2006). En la relación método-medio la estructuración de las formas en cada tema es vital en tanto ellas deben ser diseñadas para que el estudiante logre una habilidad, un conocimiento y cumpla el objetivo propuesto. Estas formas deben ser planificadas, tanto en espacio como en tiempo, evitando la espontaneidad, siguiendo una lógica que interrelacione el encuentro, con el estudio independiente y esto con la consulta y así sucesivamente.

La disciplina Matemática en la universalización

La disciplina Matemática está concebida dentro del plan de estudio de la ingenieras como contenido básico, dado su importancia y necesidad para el desarrollo de las disciplinas propias del objeto de la profesión.

Los aspectos específicos que la distinguen en la formación del futuro ingeniero, son los siguientes: Ampliar la madurez matemática y la capacidad de trabajo con la abstracción, desarrollar habilidades para la comunicación y comprensión de propiedades y características matemáticas de magnitudes y formas en las variantes formal, gráfica, numérica y verbal, identificar, interpretar, analizar y formular modelos matemáticos de procesos técnicos, económicos, productivos y científicos vinculados a la carrera, así como resolver los problemas de índole matemático a los que éstos conducen, utilizando para ello los contenidos matemáticos que se estudian en la disciplina, haciendo un uso eficiente de las técnicas modernas de cómputo y de los Asistentes Matemáticos, y aprender a pensar y actuar de forma creadora.

Al planificar las actividades docentes, debe buscarse un adecuado balance entre las conferencias y otras actividades participativas. Un elemento importante, es la posibilidad de incluir entre las formas de enseñanza el trabajo independiente, (trabajo investigativo, la autopreparación, etc.) elemento que refuerza las nuevas tendencias de que el estudiante se apropie por sí mismo de la mayor cantidad de conocimientos.

Empleo de las TIC en la modalidad semipresencial

Al valorar la incorporación de las TIC en los procesos educativos, debe tenerse presente que integrar la tecnología en el PEA no es una tarea simple. Este proceso implica un análisis riguroso de los objetivos educacionales, una compresión real del potencial de las tecnologías, una consideración de los prerrequisitos y estudio de la efectividad de las TIC para la Educación y las perspectivas de este proceso en la dinámica de los cambios que ocurren en la institución docente. Aún resulta algo más complejo, pero necesario la incorporación en la modalidad semipresencial.

En la modalidad semipresencial el empleo de las TIC para el aprendizaje se concibe sobre la base de tres componentes principales: estudio independiente, actividades presenciales y sistema de información.

Donde sobresale la importancia de la utilización de los asistentes para la enseñanza de la Matemática, en el trabajo desarrollado especialmente por las facilidades y bondades que brinda se utiliza preferentemente el asistente matemático DERIVE, ya que se perfila como una herramienta en la enseñanza de esta disciplina capaz de provocar los cauces que permitan organizar la actividad del alumnado. Es una herramienta experimental y auxiliar de fácil entorno y sencilla de manejar, con un ambiente gráfico de gran calidad para la representación de objetos matemáticos; al mismo tiempo la simplificación de las tareas frecuentes, su interactividad, dinamismo y el contexto de trabajo colaborativo que nos brinda, son algunas de las ideas que deben centrar el desarrollo de nuestra propuesta, circunstancia que configura los elementos centrales de las cuestiones objeto de la presente investigación.

Herrero, entre otras ideas, plantea que para asumir el empleo de las TIC en el PEA es clave considerar (Herrero, 2006):

- Las decisiones que se deban adoptar en el proceso atenderán primero los objetivos, roles del profesor y estudiantes antes que las decisiones acerca de la tecnología apropiada. Asumiendo el problema pedagógico como premisa.
- Para integrar las TIC en el PEA es imprescindible la capacitación pedagógica del profesorado.
- Para comprender el significado y la trascendencia de los cambios que se producen con la tecnología, es necesario tener presente que todo el potencial que encierran las TIC en la Educación, no significa una transformación equivalente en efectividad del proceso.
- La importancia que adquiere el uso de la tecnología en el PEA en la modalidad semipresencial, precisa tener una concepción de sistema, que tenga en cuenta: la función didáctica en el PEA de la asignatura, acciones del profesor con el medio, acciones del estudiante con el medio, relación con los restantes medios del sistema y estructura y forma de presentar la información.

Teniendo en cuenta lo analizado anteriormente en el trabajo se desarrolla una estrategia metodológica que propicia un mejoramiento en el PEA de la disciplina Matemática, asumiendo como presupuestos teóricos:

La unidad entre la dinámica del proceso docente educativo y el proceso de asimilación del estudiante

La dinámica del proceso docente educativo es el movimiento del proceso, es donde cobran vida los problemas, los objetivos, contenidos y métodos, por lo que se ha dado en llamar por muchos, el currículo vivido. Por una parte, es donde los sujetos implicados se entregan a la labor de enseñar unos y de aprender otros, poniendo en juego sus recursos personales, y por otra parte, es un complejo sistema de procesos de naturaleza consciente, contradictoria y holística, que incluye en franca interacción dialéctica momentos de motivación, comprensión y sistematización del contenido y que es retroalimentada por el control y la evaluación.

Portuondo (2005) expresa la necesidad de que la teoría sobre el proceso de asimilación de Galperin sirva como guía de planear la dinámica del proceso de asimilación. A través de ella se puede comprender que no es posible en una clase encuentro, poder transitar por todas las etapas de asimilación. Máxime cuando el número de horas de las asignaturas no permite de forma presencial realizar muchas actividades prácticas.

Una buena planeación puede ser aquella que conciba tres momentos diferentes en el estudio de un tema, que pueden ser: orientación, ejercitación y comprobación, por lo que ellos pueden aparecer como tipos de clases encuentro y así se tiene: Clase encuentro de orientación, Clase encuentro de ejercitación y Clase encuentro de comprobación. El contenido de dichos tipos de clases encuentros puede determinarse, a través de las etapas de la asimilación, de forma tal que la dinámica del proceso enseñanza aprendizaje esté en unidad con las etapas de la asimilación.

El tema como célula de la planeación del PEA. La cadena temática

La forma de enseñanza, es un componente del PEA, desde un estudio sistémico estructural funcional. Ésta caracteriza la organización externa de dicho proceso en una dimensión espacio-temporal. El tema es la célula de planeación del PEA.

En la dimensión temporal y de acuerdo con la complejidad de los niveles estructurales del proceso le corresponde el nivel, el año, el semestre, la semana; o disciplina, asignatura, tema, tarea.

Las clases según sus funciones pueden ser: de introducción de un nuevo contenido, de asimilación o de desarrollo del contenido, de sistematización del contenido y de evaluación del aprendizaje.

La lógica del proceso de enseñanza aprendizaje dirigido a formar egresados que resuelvan problemas presupone que los estudiantes, en cada tema, aprendan porque resuelven múltiples problemas. Los primeros problemas con la orientación del profesor, que les va indicando el modo de resolverlos, pero los siguientes por sí solo, con independencia.

La forma organizativa del PEA en este modelo es la CLASE, con sus diferentes tipos, que son: la clase encuentro (clase encuentro de orientación, clase encuentro de ejercitación, clase encuentro de comprobación y clase encuentro de evaluación), el taller de computación, la práctica de laboratorio, la consulta, la autopreparación y las tutorías, se ensamblan en una secuencia lógica (según las etapas de la asimilación) para permitir desarrollar los diferentes temas.

Este sistema recibe el nombre de cadena temática y su diseño en parte esencial de la preparación de las asignaturas (Jiménez, 1999). Se muestra una cadena temática de carácter particular, que contiene las clases encuentros mínimas.

CEO---→AP1----→CEE-→AP2---→CEC---→AP3----→CEE,

Donde:

- CEO.- Clase encuentro de orientación del tema.
- AP1.- La autopreparación posterior a la clase encuentro de orientación, prepara al estudiante en la etapa de las acciones externa materiales y en el lenguaje externo.
- CEE.- Clase encuentro de ejercitación, se desarrolla las etapas del lenguaje externo y se prepara para la etapa de lenguaje interno.
- AP2.- La auto preparación posterior a la clase encuentro de ejercitación, se dirige al lenguaje interno.
- CEC.- Clase encuentro de comprobación, el estudiante es capaz de producir. No se ocupa todo el tiempo de clase, está en dependencia de la complejidad del tema.
- AP3.- La autopreparación posterior a la etapa del lenguaje interno debe garantizar la generalización de los conocimientos, con actividades propias para esto.
- CEE:- Se dedicará a las evaluaciones de acuerdo a la planeación, se sugiere realizar consulta antes de cada evaluación.

La tarea docente, especialmente en esta modalidad es de suma importancia, considerando que es la célula del PEA, porque en ella se presentan todos los componentes y leyes del proceso, tiene un objetivo, condicionado por el nivel de los estudiantes, por sus motivaciones e intereses, hay un contenido a asimilar, una habilidad a desarrollar, un método, que es el modo en que lleva a cabo cada estudiantes la acción para apropiarse dl contenido.

La estrategia propuesta, se basa fundamentalmente en la aplicación de la teoría de la formación de las acciones mentales por etapas (Galperin, 1982). Con el apoyo de la utilización del asistente matemático (DERIVE), de forma tal que propicie un mejoramiento en el aprendizaje de la Matemática en los alumnos de las carreras de ingeniería en la modalidad semipresencial.

En tal sentido ha de lograrse un adecuado nivel de correspondencia con la experiencia anterior del alumno, de modo que el conocimiento sea de mayor aprovechamiento por parte del mismo, sobre la base de una adecuada estructuración metodológica de los temas objeto de estudio, por parte de los profesores, lo que por su tratamiento no siempre es logrado, a tal efecto y con la intención de mejorar el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática, el presente trabajo ofrece una estrategia metodológica, que consta de las etapas y acciones siguientes:

1. *Planificación*

- Estudio del programa de la asignatura (análisis de los objetivos, contenidos, sistema evaluativo), su relación con la disciplina y la carrera.
- Intercambio con especialistas (determinación de las estructuras estables).
- Estudio de las etapas asimilación.
- Determinación de los temas de la asignatura.
- Diseño de los objetivos y contenidos de cada tema, interrelación entre ambos.
- Se determina en cada tema su sistema de evaluación.
- Determinación del uso del DERIVE en cada tema.
- Se busca algún problema de la profesión que pueda ser resuelto, en parte o total, por los contenidos del tema.
- Se precisa la cadena temática de cada tema.
- Se determina el sistema de tareas a desarrollar en cada tipo de clase encuentro y autoprepración en correspondencia de las etapas de asimilación, que propicien la autoevaluación por el estudiante. Las tareas debe propiciar la generalización e integración de los diferentes temas. Se precisa correspondencia con el sistema evaluativo de la asignatura.

2. *Organización*

- Organización del uso del asistente en la cadena temática.
- Diseño del empleo del asistente en la cadena temática de manera que se transite por las etapas de asimilación de Galperin así como por los niveles de asimilación y se alcance las etapas de asimilación del contenido deseadas.

- Se precisa la ayuda en la forma de evaluación determinada.

3. *Ejecución*

- Utilización del asistente por parte de los profesores en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática en la sede.
- Análisis de cada momento de la cadena temática, las diferentes formas de utilización del asistente en las tareas orientadas, relación alumno-profesor-asistente-alumno.
- Desarrollo del sistema de evaluación concebido al planificar la utilización del asistente en cada tema.

4. *Control*

- Análisis de la propuesta en ejecución dentro de cada tema.
- Reajustar la estrategia acorde a las sugerencias que existan en cada análisis según corresponda.

Como premisas para aplicar la estrategia, deben considerarse:

- Consideración de los componentes no personales del proceso docente-educativo.
- Disposición favorable del docente.
- Participación activa de los estudiantes.

La cadena temática es la expresión de la dinámica del PEA, en ello resulta su unidad con el proceso de asimilación. Una forma de visualizar esquemáticamente la unidad del PEA y la asimilación del contenido, se muestra en la tabla No. 1.

<table>
<tr><td>Tipos de clase encuentro</td><td>CEO</td><td colspan="2">AP1</td><td>CEE</td><td>AP2</td><td>CEC</td><td>AP3</td><td colspan="2">CEE</td></tr>
<tr><td>Etapas de la asimilación</td><td>Motivación BOA</td><td colspan="2">Acciones materiales externas-lenguaje externo</td><td>Lenguaje externo y lenguaje interno</td><td colspan="2">Lenguaje interno</td><td>Generaliza ción</td><td colspan="2">Evaluación</td></tr>
<tr><td>Dinámica del proceso enseñanza aprendizaje</td><td colspan="3">Motivación y comprensión</td><td colspan="3">Sistematización</td><td colspan="3">Generalización</td></tr>
<tr><td>Nivel de asimilación</td><td colspan="2">Familiarización</td><td colspan="2">Reproducción</td><td colspan="4">Producción</td><td>Creación</td></tr>
</table>

Tabla No. 1: Unidad de la dinámica del PEA y la asimilación del contenido

Conclusiones

La realización de esta investigación, permitió conocer las dificultades y características principales de la enseñanza-aprendizaje de la Matemática en las carreras de ingeniería en la Universalización de la Educación Superior, especialmente los fundamentos teóricos en que se basa el empleo de las TIC en esta modalidad de estudio, a pesar de poseer materiales y medios de cómputos.

Para ello se tributó una estrategia metodológica sobre la base de la aplicación de la teoría de la formación de las acciones mentales por etapas de P. Y. Galperin, con el apoyo Asistente Matemático DERIVE, como herramienta computacional, a través de la cual se ha mostrado una aceptación favorable entre los profesores, además de constatar por los autores, avances significativos en la actividad educativa personalizada.

A través de la estrategia metodológica que incorpora armónicamente la modalidad de la universalización, en el PEA de la disciplina Matemática y el uso consecuente de las TIC.

Referencias bibliográficas

Díaz, T., y Arroyo, M. (2006). *Experiencias de la Aplicación del modelo semipresencial en la Universidad de Pinar del Río. La unidad didáctica.* La Habana: Félix Varela.

Galperin, Y. (1982). *Introducción a la Psicología*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Gutiérrez, M. (2003). *Metodología del diseño curricular desarrollador del Ciclo Básico de las carreras de ingeniería.* Tesis doctoral no publicada. Departamento de Matemática. Universidad de Camagüey.

Herrero, E. (2006). Análisis del papel de los medios y las TIC en el proceso de universalización de la enseñanza. En P. Horruitiner (Comp.) *La Nueva Universidad Cubana y su contribución a la universalización del conocimiento* (pp. 363-373). La Habana: Félix Varela.

Horruitiner, P. (2007). *El reto de la calidad en la Educación Superior Cubana.* Informe de Trabajo. Ministerio de Educación Superior, Departamento de Formación del Profesional, La Habana.

Jiménez, R. (1999). *Utilización de las Cadenas Temáticas en la Enseñanza del Cálculo Diferencial.* Tesis de Maestría no publicada. Departamento de Matemática. Universidad de Camagüey.

MES. (2003). *La Universalización en la Educación Superior Cubana*. La Habana: D. F. Ministerio de Educación Superiro, Ed.

Portuondo, R. (2005). *Trabajo docente con la modalidad semipresencial.* Orientaciones metodológicas. Vicerrectotía Docente. Universidad de Camagüey.

ESTRATEGIA METODOLÓGICA PARA DESARROLLAR LA INTERDISCIPLINARIEDAD DEL ÁLGEBRA LINEAL A TRAVÉS DE LAS TIC

Yeily Delgado Cruz, Mayra Durán Benejam, Luis Arza Valdés Yeily Delgado Cruz, Mayra Durán Benejam, Luis Arza Valdés

Universidad de las Ciencias Informáticas. México

yeily@uci.cu, mayra@uci.cu, arza@uci.cu

Resumen: El presente trabajo tiene como objetivo mostrar los resultados que hasta el momento se han identificado en la investigación dirigida a perfeccionar el Proceso de Enseñanza Aprendizaje del Álgebra Lineal en la Facultad 5, presentado las principales dificultades detectadas, junto a elementos fundamentales del marco teórico y las ideas iniciales de la propuesta para cumplir el objetivo de la investigación, el cual consiste en proponer una estrategia metodológica para desarrollar la interdisciplinariedad desde el PEA del Álgebra Lineal con la asignatura Gráficos por Computadoras a través de las TIC en la Facultad 5 de la UCI. La misma consta de 3 etapas, y se caracteriza por ser contextualizada, personalizada, dinámica, objetiva, operativa, preventiva, formativa, sistemática, sistémica, flexible, posee un carácter vivencial, práctico y un buen nivel de actualización.

Palabras clave: Aprendizaje, ingeniero informático, formación, interdisciplinaridad.

Abstract: This paper aims to show the results so far have been identified in research to improve the Teaching Learning Process (TLP) of Linear Algebra in the Faculty 5, presented the main insufficiency identified, along with key elements of the framework and initial ideas of the proposal to meet the target of the investigation, which is to propose a methodological strategy to develop interdisciplinarity from the TLP of Linear Algebra with the Computer Graphics course through ICT in School 5 in the ICU. It consists of 3 stages and is characterized by being contextualized, personalized, dynamic, objective, operational, preventive, training, systematic, systemic, flexible, possesses an experiential character, practical and a good level of upgrade.

Key words: Learning, software engineer, formation, interdisciplinary.

Introducción

El carácter dual «universidad-industria» que presenta la Universidad de Ciencias Informáticas (UCI), requiere que se conjuguen armónicamente todos los factores presentes en el proceso de enseñanza aprendizaje con una singularidad marcada: la especialización de las nuevas tecnologías en la formación integral del ingeniero informático.

Hacia la búsqueda de los fundamentos teóricos de la interdisciplinariedad se constató en la bibliografía que son muchos los autores, que preocupados por este asunto, dirigen su investigación hacia esta temática: (Follari, 1982), (Rassekh & Vaideanu, 1987); (Fiallo, 1996); (Piaget, 1997); (Fernández de Alaiza, 2000); (Perera, 2000); (Álvarez, 2002); entre otros. Estos autores han aportado teorías y modelos valiosos sobre la interdisciplinariedad, sin embargo, aún resulta insuficiente el abordaje de este contenido para ser incluido en la preparación metodológica de los profesores de la UCI que desarrollen la interdisciplinariedad.

A partir de la experiencia de la autora y la de otros profesores de la asignatura Álgebra Lineal, así como de los resultados obtenidos de las visitas de ayuda metodológica, de inspección y especializada se detectaron las siguientes insuficiencias:

- En la identificación de los nodos interdisciplinarios (Fernández de Alaiza, 2000) entre las asignaturas de la especialidad del Ingeniero en Ciencias Informáticas desde el PEA del Álgebra Lineal a través de las TIC.
- En la preparación metodológica (MINED, 1979) de la asignatura Álgebra Lineal que permita desarrollar la interdisciplinariedad desde el PEA del Álgebra Lineal a través de las TIC.
- En la utilización de los recursos informáticos con que dispone el centro, esencialmente el Entorno Virtual de Aprendizaje (EVA) para desarrollar la interdisciplinariedad de las asignaturas de la especialidad del Ingeniero en Ciencias Informáticas desde el PEA del Álgebra Lineal a través de las TIC.

Se ha podido constatar en intercambio con los profesores de la UCI que estos están conscientes de la necesidad de desarrollar la interdisciplinariedad desde el PEA del Álgebra Lineal a través de las TIC para lograr la formación general e integral de los discentes, pero se sienten limitados a la hora de afrontar esta situación porque requieren de una mayor información teórico y práctica, debido a la variedad de influencia que tuvieron en su formación y a la inexperiencia del claustro.

Esto ha provocado inexactitudes y espontaneidad para el desarrollo de la interdisciplinariedad desde el PEA del Álgebra Lineal durante las clases que se imparten en la UCI.

La UCI tiene la misión estratégica de formar profesionales comprometidos con su Patria, altamente calificados en la rama de la informática y de producir software y servicios informáticos, a partir de la estrecha vinculación estudio-trabajo, es decir, capaces de integrar conocimientos que le permitan solucionar problemas específicos del entorno en el que se desenvuelvan a partir de una correcta concepción del Proceso de Enseñanza; pero de acuerdo a las insuficiencias manifestadas, se evidencia que los profesores de la Facultad 5 que imparten la asignatura Álgebra Lineal presentan limitaciones para desarrollar la interdisciplinariedad desde el PEA del Álgebra Lineal con la asignatura Gráficos por Computadoras a través de las TIC.

Por lo anterior se formula el siguiente Problema Científico: ¿Cómo contribuir a la interdisciplinariedad desde el PEA del Álgebra Lineal con la asignatura Gráficos por Computadoras en la Facultad 5 de la UCI?

En correspondencia con el problema el Objetivo General de la investigación consiste en: Proponer una estrategia metodológica para desarrollar la interdisciplinariedad desde el PEA del Álgebra Lineal con la asignatura Gráficos por Computadoras a través de las TIC en la Facultad 5 de la UCI.

Desarrollo

La Estrategia metodológica para preparar a los profesores de la UCI en la interdisciplinariedad desde el PEA de la asignatura Álgebra Lineal a través de las TIC, su marco teórico se sustenta en la filosofía marxista leninista.

Filosófico: En el método materialismo dialéctico al concebir las leyes objetivas fundamentales de la dialéctica que revelan todo el proceso de desarrollo, su causa, cómo se produce y su dirección y al utilizar los principios de la dialéctica, y en particular se tiene en cuenta el de la concatenación universal que expresa que no existe nada aislado, todos los objetos, fenómenos y procesos están estrechamente relacionados en interconexión e interdependencia.

Psicológico: se asume el enfoque histórico cultural de Vigotsky y sus seguidores, basado en la formación y desarrollo integral de la personalidad de los sujetos, a partir de la necesaria relación de intercambio que se debe dar entre los estudiantes y entre estos y el profesor, la interiorización del proceder de la interdisciplinariedad en los textos y desde esta concepción ejecutar acciones por el profesor, que contribuyan a la educación de los estudiantes a partir de las necesidades y potencialidades de cada uno de ellos para la asimilación de estos contenidos en la Educación Superior (ZDA) y sobre esta base realizar acciones encaminadas a ofrecer la ayuda necesaria para ascender al nivel deseado (ZDP) teniendo en cuenta la unidad de lo afectivo y lo cognitivo, logrando un clima comunicativo que posibilite la realización del proceso en forma óptima.

Sociológico: Asumiendo la concepción de la educación como un fenómeno social que no se puede aislar de los contextos en que se desarrolla desde las exigencias de la sociedad, hasta su desarrollo en el marco de relaciones que la caracterizan, que las relaciones se enriquecen y trascienden en su interacción y en su desenvolvimiento social y se materializan en el PEA contribuyendo a la preparación del hombre para la vida, en el papel activo del sujeto en el proceso de transformación y socialización y la implicación necesaria de la escuela, la familia, la comunidad y las vivencias de los estudiantes para los fines de la enseñanza del Álgebra Lineal.

Pedagógico: Contribuye a la formación de la cultura general e integral del estudiante a partir de la relación dialéctica que existe entre la escuela y la sociedad. La escuela se relaciona con el medio, con la sociedad y recibe de ésta el encargo social; donde el profesor por tanto, constituye el mediador entre la cultura y los estudiantes, con vista a potenciar la apropiación de los contenidos por estos que han sido seleccionados atendiendo a los intereses de la sociedad y al desarrollo integral de la personalidad de los estudiantes en cada momento histórico concreto.

En la presente investigación se asume por preparación metodológica:

Conjunto de actividades que realizan los docentes para la preparación de su trabajo como: la elaboración de los planes de clases, la profundización de los contenidos y las formas metodológicas, elaboración de medios, etc., que contribuyen a elevar la formación de las cualidades profesionales y consecuentemente su maestría pedagógica. (MINED, 1979, p.13)

La interdisciplinariedad: una alternativa para la formación integral del Ingeniero en Ciencias Informáticas

La necesidad de integración entre las disciplinas ha sido un fenómeno que desde mediados de siglo ha venido manifestándose y que en el transcurso de los años su necesidad se ha incrementado. En el desarrollo actual de las ciencias la constante penetración, influencias recíprocas y entrecruzamientos en las disciplinas es uno de los hechos más destacables.

La presente investigación se centrará en el nivel de interdisciplinariedad asumiendo para su concepción la definición:

> Condición didáctica que permite cumplir el principio de la sistematicidad de la enseñanza y asegurar el reflejo consecuente de las relaciones objetivas vigentes en la naturaleza, en la sociedad y en el pensamiento, mediante el contenido de las diferentes disciplinas que integran el plan de estudios de la escuela actual. (Fiallo, J. 2001, p.3)

La presente investigación se centra en los Nodos de articulación interdisciplinarios (Fernández de Alaiza, 2000). Para revelar, identificar y clasificar dichos nodos se parte de la estructura temática identificando contenidos que presentan o tienen posibilidades de articulación interdisciplinaria con contenidos de las restantes disciplinas.

Estrategia Metodológica para desarrollar la interdisciplinariedad desde el PEA del Álgebra Lineal con la asignatura Gráficos por Computadoras a través de las TIC

En la representación gráfica de la estrategia metodológica para los profesores de la UCI para desarrollar la interdisciplinariedad desde el PEA de la asignatura Álgebra Lineal, (Fig. 1) se potencia la secuenciación de la misma desde sus fundamentos y estructuración interna.

Representación de la Estrategia Metodológica para desarrollar la interdisciplinariedad desde el PEA del Álgebra Lineal con la asignatura Gráficos por Computadoras a través de las TIC

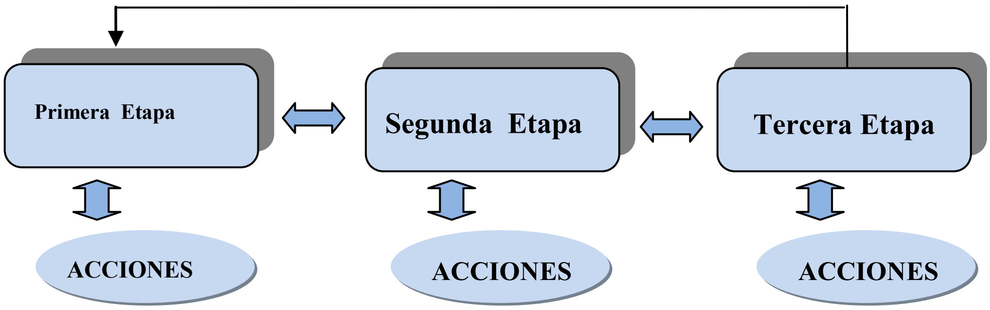


Figura 1.

Etapas de la estrategia

Primera etapa: Creación de condiciones previas en la ejecución de la estrategia metodológica para desarrollar la interdisciplinariedad desde el PEA de Álgebra Lineal a través de las TIC en la Facultad 5 de la UCI, cuyo objetivo es: Desarrollar acciones que permitan el aseguramiento de las condiciones previas para el desarrollo de la estrategia metodológica.

- Acción 1: Elaboración y aplicación del diagnóstico. Objetivo: Elaborar y aplicar el diagnóstico para determinar las insuficiencias y potencialidades con respecto a la preparación metodológica de los profesores de la UCI para desarrollar la interdisciplinariedad de la asignatura Álgebra Lineal.

- Acción 2: Procesamiento de la información derivada de la aplicación de los instrumentos. Objetivo: Procesar la información derivada de la aplicación de los instrumentos aplicados, utilizando la evaluación científica para establecer pronósticos.

- Acción 3: Reunión metodológica con los profesores de la asignatura. Objetivo: Analizar los problemas que en la práctica pedagógica afectan el trabajo metodológico de los profesores de la UCI para desarrollar la interdisciplinariedad de la asignatura desde el PEA de Álgebra Lineal.

Acción 4: Elaboración de las precisiones metodológicas para el desarrollo de los talleres. Objetivo: Elaborar las precisiones metodológicas para la realización de los talleres de trabajo interactivo, con los profesores que integran el colectivo pedagógico de Álgebra Lineal, con el propósito de contribuir al trabajo metodológico, con énfasis en la preparación metodológica de la asignatura para desarrollar la interdisciplinariedad con Gráfico por Computadoras en la Facultad 5 de la UCI.

Segunda etapa. Instrumentación de la estrategia metodológica para desarrollar la interdisciplinariedad desde el PEA de la asignatura Álgebra Lineal en la Facultad 5 de la UCI, cuyo objetivo: Valorar la fundamentación teórica que sustenta la realización del trabajo metodológico para desarrollar la interdisciplinariedad desde el PEA del Álgebra Lineal con la asignatura Gráficos por Computadoras en la Facultad 5 de la UCI y su aplicación en la formación de los estudiantes de la carrera de Ingeniería en Ciencias Informáticas, mediante la discusión y el debate científico, para contribuir a la preparación de los directivos en la dirección del trabajo metodológico.

- Taller: Análisis de problemáticas propias de la realidad profesional cotidiana relacionada con el desarrollo de la interdisciplinariedad de la asignatura Álgebra Lineal en la Facultad 5 de la UCI. Objetivo: Reflexionar sobre las problemáticas propias de la realidad profesional cotidiana relacionada con el desarrollo de la interdisciplinariedad desde el PEA de la asignatura Álgebra Lineal en la Facultad 5 de la UCI.

Clase instructiva metodológica

Objetivo: Instruir a los docentes en los fundamentos de la interdisciplinariedad y su aplicación en la enseñanza del Álgebra Lineal en la Educación Superior para potenciar la preparación metodológica de la asignatura.

Clase demostrativa

Objetivo: Demostrar a los docentes cómo concebir, desde los tipos de clases de la Educación Superior, la interdisciplinariedad de la asignatura Álgebra Lineal con Gráficos por Computadoras.

Clase abierta

Objetivo: Comprobar en los docentes cómo conciben desde los tipos de clases de la Educación Superior la interdisciplinariedad del Álgebra Lineal con Gráficos por Computadoras.

Clase de comprobación

Objetivo: Controlar en los docentes cómo conciben, desde los tipos de clases de la Educación Superior, la interdisciplinariedad de la asignatura Álgebra Lineal con Gráficos por Computadoras.

- Acción 5. Preparación para las visitas de ayuda metodológica. Objetivo: Preparar las condiciones previas para la integración de los contenidos teóricos sobre el empleo de la interdisciplinariedad de la asignatura Álgebra Lineal con Gráficos por Computadoras en los distintos tipos de clase de la Educación Superior a través del intercambio y reflexión.

Visitas de ayuda metodológicas. Objetivo: Demostrar cómo aplicar los contenidos teóricos en las ayudas metodológicas para el empleo de la interdisciplinariedad de la asignatura de la asignatura Álgebra Lineal con Gráfico por Computadoras.

- Acción 6. Autopreparación del docente. Objetivo: Profundizar en los conocimientos mediante la preparación individual de los docentes para la implementación del empleo de la interdisciplinariedad de la asignatura Álgebra Lineal con Gráfico por Computadoras en la tipología de clases de la Educación Superior.

Tercera etapa: Evaluación de la preparación de los docentes para el empleo de la interdisciplinariedad, teniendo como objetivo: Evaluar la preparación de los docentes para el empleo de la interdisciplinariedad de la asignatura de la asignatura Álgebra Lineal con Gráficos por Computadoras en la Facultad 5 de la UCI a partir de la implementación de la estrategia metodológica.

- Acción 7: Evaluación de la preparación de los docentes para el empleo de la interdisciplinariedad de la asignatura Álgebra Lineal con Gráficos por Computadoras en la Facultad 5 de la UCI a partir de la implementación de la estrategia metodológica. Objetivo: Evaluar la preparación de los profesores para el empleo interdisciplinariedad de la asignatura Álgebra Lineal con Gráficos por Computadoras en la Facultad 5 de la UCI a través de distintos instrumentos que revelen la efectividad de la estrategia metodológica.

Considerando el objetivo que se propone, se puede identificar una variable a controlar, que es la estrategia dirigida a la preparación de los profesores que imparten la asignatura Álgebra Lineal en cuanto al desarrollo de la interdisciplinariedad de la asignatura.

Considerando que el objetivo de la tesis es: proponer una Estrategia Metodológica para desarrollar la interdisciplinariedad desde el PEA del Álgebra Lineal con la asignatura Gráficos por Computadoras a través de las TIC, se establecieron para que fueran valorados por los especialistas diferentes aspectos relacionados con la estructura y efectividad de la misma.

La estrategia metodológica propuesta fue valorada a través del método de consulta a expertos, empleando para ello la metodología del Delphy.

En correspondencia con este método se procedió a delimitar el contexto en el que se desea efectuar la valoración sobre el tema en estudio. Luego correspondió la selección de los expertos. Para la selección se llevó a cabo un muestreo intencional seleccionando 10 especialistas; de ellos 5 son doctores, lo que representa un 50%; son másteres (MSc) 5, lo que representa un 50%; y 9 de ellos con más de 19 años de experiencia, lo que representa un 90%.

Atendiendo a las categorías docentes de los especialistas: 5 son profesores auxiliares, lo que representa un 50%; 5 son profesores asistentes, lo que representa un 50%.

Fue determinado el nivel de calificación en una determinada esfera del conocimiento que poseen, el coeficiente de competencia K para cada especialista. Para ellos se tuvo en cuenta la autovaloración ofrecida por el propio sujeto sobre su desempeño y las fuentes de argumentación de sus conocimientos.

Seguidamente se les explicó el proceso a los especialistas y se procedió a la aplicación del instrumento para la recogida de los criterios de estos, respecto a la Estrategia Metodológica presentada.

Este, permitió recoger diferentes criterios relacionados con la relevancia de los presupuestos teóricos y metodológicos de la propuesta. El procesamiento estadístico de las opiniones dadas por los especialistas reflejaron datos significativos con respecto a la valoración que se hace sobre la Estrategia Metodológica presentada.

Los valores identificados aportan un alto nivel de significación de la concordancia entre los expertos, lo que indica la aceptación de la Estrategia Metodológica para desarrollar la interdisciplinariedad desde el PEA del Álgebra Lineal con la asignatura Gráficos por Computadoras a través de las TIC. Sin embargo, se realizaron una serie de observaciones, sugerencias y recomendaciones, importantes para perfeccionar la propuesta, algunas de las cuales se tuvieron en consideración.

En el análisis estadístico se puede apreciar que la media correspondiente a las categorías: muy adecuado y bastante adecuado sobresalen de las restantes, lo que hace que en el tratamiento estadístico posterior, giren sobre estos valores los resultados de las valoraciones de los especialistas.

Los puntos de corte para cada categoría se ubicaron como se muestra en la siguiente tabla:

Muy adecuado	Bastante adecuado	Adecuado	No adecuado
0.39	0.63	2.76	3.49

Luego, en correspondencia con los valores promedios asignados por los especialistas a cada paso de la metodología, se le asignó a cada uno de estos categorías siendo predominantes en la totalidad de los pasos las de Muy Adecuado y Bastante Adecuado, por lo que se consideran dichos pasos apropiados en función del objetivo de la Estrategia Metodológica.

En sentido general, tanto las valoraciones cualitativas como los resultados estadísticos aportan evidencias importantes que permiten valorar positivamente la estrategia que se propone.

Conclusiones

Esta investigación permitió continuar dilucidando el complejo proceso de formación del Ingeniero en Ciencias Informáticas a través de la sistematización de un conjunto de materiales que analizan el mismo; quedando evidenciado que el modelo pedagógico tradicional ha quedado atrás y que se deben transformar los métodos de enseñanza de las matemáticas y desarrollarlos acorde a las demandas actuales y las perspectivas futuras.

Se constató que los profesores de la Facultad 5 de la UCI presentan limitaciones a la hora de afrontar la interdisciplinariedad desde el PEA del Álgebra Lineal a través de las TIC para lograr la formación general e integral de los estudiantes.

La Estrategia Metodológica se diseñó desde un enfoque interdisciplinar considerando como centro la asignatura Álgebra Lineal y su vínculo con las asignaturas de la especialidad específicamente Gráficos por Computadoras y atendiendo al modelo de formación existente en la UCI.

La estrategia metodológica para desarrollar la interdisciplinariedad desde el PEA del Álgebra Lineal a través de las TIC aporta nuevas herramientas para el profesorado en su afán de perfeccionar la formación del Ingeniero en Ciencias Informáticas en la UCI.

Referencias bibliográficas

Álvarez, M. (Febrero, 2002). La interdisciplinariedad en la enseñanza de las ciencias. En Acercamientos a la interdisciplinariedad en la enseñanza aprendizaje de las ciencias. *II Congreso Internacional "Didáctica de las Ciencias"*. La Habana.

Fernández de Alaiza, B. (2001). *La interdisciplinariedad como base de una estrategia para el perfeccionamiento del diseño curricular de una carrera de ciencias técnicas y su aplicación en la Ingeniería en Automática en la República de Cuba.* Tesis de doctorado no publicada. Universidad de Ciencias Pedagógicas Enrique José Varona. La Habana.

Fiallo, J. (1996). *Las relaciones intermaterias: una vía para incrementar la calidad de la educación*. La Habana: Ed. Pueblo y Educación.

Fiallo, J. (Enero, 2001): La Interdisciplinariedad en el Currículo: ¿Utopía o Realidad Educativa? *Congreso Internacional Pedagogía 2001*. La Habana.

Follari, R. (1982). *Interdisciplinariedad*. México: Azcapotzalco.

MINED, (1979). 7ma Parte del Seminario Nacional a dirigentes, metodólogos e inspectores de las direcciones provinciales y municipales de educación. La Habana.

Perera, F. (2000). *La formación interdisciplinar de los profesores de ciencias: un ejemplo en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Física*. Tesis de doctorado no publicada. La Habana. Cuba.

Piaget, P.S. (1997). *Relación interdisciplinaria y sistema de ciencias*.Moscú: Frosvescharie.

Rassekh, S. y Vaideanu, G. (1987): Les contenus de l'éducation. Perspectivas mondiales. París, UNESCO.

UN ESQUEMA PARA LA COMPRENSIÓN DE LA RECTA TANGENTE EN UN ENTORNO TECNOLÓGICO

Francisco Boigues, Vicente Estruch, Abilio Orts
Universidad Politécnica de Valencia. España
fraboipl@mat.upv.es

Resumen: Presentamos una investigación cuyo objetivo es analizar la comprensión de la recta tangente en un entorno de aprendizaje en el que se puede usar un CAS. Desde las perspectivas históricas y cognitivas (APOS) analizaremos una serie textos de Bachillerato e Ingeniería que nos permitirá fijar una propuesta para la comprensión de la recta tangente como el límite de una sucesión de rectas secantes que tienen en común el punto de tangencia. Finalmente, mostramos unas herramientas diseñadas con el asistente matemático MATLAB© (génesis instrumental), accesibles online, que pueden ayudar a los estudiantes, especialmente en el registro gráfico, a construir los objetos cognitivos descritos en la descomposición genética.

Palabras clave: Comprensión, recta, tangente, tecnología

Abstract: We present a research which aim is to analyse the understanding of the tangent line in a learning environment in which CAS can be used. From historical and cognitive perspectives (APOS), we will discuss several High School and Engineering texts. That will allow us to set up a proposal for the understanding of the tangent line as limit of a sequence of secant lines that have in common the tangency point. Finally we present some tools designed with the mathematician application software MATLAB, (Instrumental Génesis), available on line. These tools can help the students to build the cognitive objects, especially in the graphic register, described in the genetic decomposition.

Key words: Understanding, straight, tangent, technology.

Introducción

Uno de los tópicos generales en el campo de la Educación Matemática es el análisis de la construcción del conocimiento matemático avanzado. En este campo, la incorporación de los sistemas de cálculo formal (CAS) ofrece un nuevo horizonte de investigación de los procesos de enseñanza-aprendizaje que pueden ayudar a mejorar la comprensión de las matemáticas. (Boigues, Estruch & Llinares, 2010). El objetivo principal de este estudio es profundizar en los mecanismos que puedan proporcionar a estudiantes de Bachillerato y de primer curso de Universidad de carreras técnicas un mejor conocimiento conceptual de las matemáticas. En concreto se aborda el concepto de recta tangente, desde una perspectiva que superando la mera manipulación algorítmica, permita al alumno mejorar sus competencias en la resolución de problemas no estandarizados.

Marco teórico

La teoría APOS (Baker, Cooley & Trigueros, 2000) es un intento de aplicar la abstracción reflexiva de Piaget a la comprensión de tópicos avanzados en matemáticas. Se concibe la comprensión como un proceso de creación por parte del individuo de elementos cognitivos que son caracterizados como *acciones, procesos y objetos*. Los diferentes elementos cognitivos relacionados con una determinada noción, son organizados de manera estructurada formando los *esquemas*. Otra de las componentes teóricas que ofrece APOS es la *descomposición genética* de una noción, que consiste en una descripción detallada de las construcciones mentales que se espera que un individuo realice al formar su propio esquema de una noción matemática concreta.

Junto a la teoría APOS, adoptamos uno de los marcos teóricos de referencia en los estudios que consideran el uso de la tecnología en la enseñanza, la génesis instrumental, la cual conjuga aspectos cognitivos con antropológicos (Artigue, Batanero & Kent, 2007. Uno de los puntos básicos de esa teoría es la diferencia entre artefacto e instrumento (Verillon & Rabardel, 1995; Lavicza, 2010). Artefacto se identifica con la herramienta propiamente dicha y hablamos de instrumento cuando con el artefacto se establece una relación significativa entre el usuario y la tarea a realizar. El proceso por el cual un artefacto se convierte en instrumento, llamado génesis instrumental (Drijvers, Kieran & Mariotti, 2010), consiste en la formación, por parte del estudiante, de esquemas instrumentales entendidos como formas estables de tratar determinadas tareas. Estos esquemas instrumentales pueden ser esquemas de uso, que son aquellas formas generales directamente relacionadas con el artefacto, o esquemas de acción instrumental, éstos últimos relacionados directamente con la actividad a realizar con el artefacto.

En base al marco teórico, con esta investigación pretendemos identificar las diferentes construcciones cognitivas que se les pueden proponer a estudiantes en lo que respecta a la noción de recta tangente, respetando su significado institucional. Como consecuencia, plantearemos una descomposición genética de la recta tangente así como los esquemas instrumentales que los estudiantes pueden poner en juego en un entorno tecnológico.

Metodología

Para fijar la descomposición genética en este estudio, que detallamos en la tabla 1, hemos utilizado una metodología siguiendo varias etapas. En primer lugar aproximarnos al significado institucional mediante un repaso de la génesis histórica del concepto (Durán, 1996; Kline, 1992).

En una segunda fase se han realizado análisis de diversos libros de texto (Contreras, Ordoñez, Luque, García, Sánchez & Ortega, 2003). En concreto se analizaron 14 libros de último curso de bachillerato y algunos textos clásicos utilizados en la docencia matemática en estudios de ingeniería. En esta fase se han considerado tres dimensiones de análisis:

a) Análisis conceptual, que aborda el modo de organizar el concepto a lo largo del texto. Se tienen en cuenta los siguientes aspectos:

a.1. El tipo de lenguaje que se utiliza: coloquial, simbólico-formal y gráfico.

a.2. El modo de argumentar o justificar los diversos pasos, que se puede clasificar en: lógico-deductivo, expositivo y heurístico (manipulación y descubrimiento).

a.3. Si existe una definición y se proponen relaciones entre los conceptos manejados a través de proposiciones.

a.4. El tipo de problemas resueltos y propuestos que se utilizan. En concreto analizamos si hay problemas no estandarizados y si se proponen ejercicios con mayor carga algebraica frente a lo numérico, y si existen problemas de tipo teórico.

b) Un análisis didáctico cognitivo que busca identificar las capacidades cognitivas que se pretende fomentar.

c) Un análisis fenomenológico, caracterizado por los problemas y aplicaciones que motivan la introducción de la noción de recta tangente.

Resultados

El estudio histórico, permite vislumbrar varias etapas en lo que respecta al tratamiento de la recta tangente. En una primera etapa, la de los clásicos griegos, se intuyen dos visiones respecto a la noción de tangente. Una visión más estática sería, por ejemplo, la propuesta por Apolonio, que formula la recta tangente como la recta que toca a una cónica en un único punto. Otra visión, más dinámica, es la de Arquímedes, que obtiene la recta tangente a una espiral identificando la dirección de la tangente con la dirección instantánea del movimiento.

En una segunda etapa, que se identifica como la de los precursores del cálculo, se mantiene la doble visión de la época clásica, pero se observa un esfuerzo mayor en la búsqueda de métodos de cálculo de la tangente. Descartes concibe la recta tangente como la posición límite de la secante y reduce el problema de determinación de la tangente a una curva al caso de la construcción de una tangente a una circunferencia. Fermat aplica su método para obtener máximos y mínimos al cálculo de la recta tangente. Torricelli, al igual que Roberval, calcula la recta tangente a la cicloide descomponiendo el movimiento. Barrow considera una curva como el límite de un polígono cuyos lados son infinitamente pequeños, y afirma que el lado del polígono infinitamente pequeño se convierte, en el límite, en la tangente a la curva

En una tercera etapa, la del nacimiento del cálculo, Newton y Leibniz desarrollan un método general y reconocen que los problemas de tangentes y cuadraturas son recíprocos. Newton tiene una concepción dinámica de las curvas, como si fueran generadas por un movimiento. Por su parte, Leibniz considera las curvas como si estuvieran formadas por segmentos indivisibles de longitud infinitesimal.

Del análisis de los libros de texto, destacan los siguientes resultados. En lo que respecta al análisis Contextual/Didáctico, se observa que el concepto de recta tangente aparece dentro del bloque de Análisis. En primer lugar se realiza un estudio, secuencial, de las funciones, de los límites, de la continuidad y tras definir la derivada, se presenta la recta tangente relacionada con la Tasa de Variación Media; a continuación las rectas secantes y la interpretación geométrica de la derivada. Formalmente no se apuesta por ninguna teoría cognitiva, aunque la cantidad de ejercicios propuestos en los textos dan a entender una concepción constructivista.

Del Análisis Fenomenológico, destaca el hecho de que no se plantean un problema-situación que permita construir la noción de recta tangente. Más bien, simplemente se plantea una manera de hallar la recta tangente. Por tanto, se nos da a entender que el alumno ya posee cierta noción de recta tangente. Pero, sobre todo, destaca el hecho de que se relaciona la pendiente de la recta tangente a una función en un punto como con la derivada de la función en dicho punto.

En lo que respecta al Análisis Conceptual, se tiene que todas las editoriales analizadas hacen uso del lenguaje coloquial, el gráfico y el algebraico. Sin embargo, no se argumenta ninguna de las afirmaciones expuestas. Se aportan nociones matemáticamente acabadas. Se suele definir la recta tangente como el límite de las rectas secantes, pero en realidad, más que una definición se aporta un método de cálculo de la tangente. La mayoría de problemas suelen consistir en cálculos algebraicos de rectas tangentes, aunque habría que puntualizar que en los manuales universitarios se resuelven cuestiones relacionadas con el cálculo de valores aproximados a una función en puntos cercanos al punto de tangencia.

Conclusión

Como conclusión, hemos detectado que la recta tangente es concebida fácilmente como la mejor aproximación lineal a una función en el entorno de un punto, en concordancia con la idea de Barrow y Leibniz (Boyer, 1986), la cual se calcula a partir del límite de una sucesión de rectas secantes. En la tabla siguiente se recogen, en detalle, los diferentes elementos que integral la descomposición genética de la recta tangente que se propone.

	ESQUEMA A
A1	Dada una función *f(x)* y un punto de la gráfica *P(x=a,f(a))* se realiza la ***acción*** de ampliar (zoom) la gráfica de *f(x)* en el punto *P*.
A2	La interiorización como ***proceso*** de A1.
A3	El encapsulamiento como ***objeto*** de A2.
	ESQUEMA B
B0	Dada una función *f(x)* y un punto de la gráfica *P(x=a,f(a))* ejecutar la ***acción*** de dibujar una recta secante que una el punto *P* con otro punto *Q(x=a+h, f(a+h))* relativamente próximos.
B1	Formar una sucesión de rectas secantes manteniendo fijo P y variando el punto Q acercándose a P (h tendiendo a 0).
B2	Interiorizar B1 como proceso.
B3	Encapsular B2 como un objeto.
	ESQUEMA C (NOCIÓN DE RECTA TANGENTE)
A=A3	
B =B3	
ARB	Identificar la tendencia de B como la mejor aproximación a A
	ESQUEMA D (EXPRESIÓN ANALITICA DE LA RECTA TANGENTE)
D1	Calculo de la recta secante: $y-f(a)=m_s(x-a),\quad m_s=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$
D2	Cálculo de la recta tangente: $y-f(a)=m(x-a),\quad m=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$

Tabla 1

Propuesta de descomposición genética para la noción de recta tangente

Aplicaciones para la enseñanza:

Finalmente se presentan dos herramientas, accesibles online, útiles para el desarrollo de actividades de laboratorio virtual; las cuales han sido diseñadas utilizando recursos del asistente matemático MATLAB© (Cordero, Hueso, Martínez & Torregrosa, 2005). Dichas herramientas pueden facilitar el que los estudiantes construyan los objetos cognitivos descritos en la descomposición genética, especialmente en lo que respecta al registro gráfico. Los esquemas instrumentales fijados para las diversas actividades que los estudiantes deben realizar son los siguientes:

a) Esquemas de uso: acceder a una dirección de internet que permite usar la función zoom y la función rectas secantes. Las funciones elaboradas son accesibles en la dirección que se señala a continuación:

- Función zoom: http://hdl.handle.net/10251/10722
- Sucesión rectas secantes: http://hdl.handle.net/10251/10723

b) Esquemas de acción instrumental:

b.1 Función zoom:

Hay que introducir como entradas:

- Los coeficientes de un polinomio de tercer grado, siguiendo el orden creciente de las potencias de x, que definirá la función, f(x), a estudiar (para polinomios de menor grado se completa con ceros).
- El valor x_0 donde se estudia localmente la función.
- El radio, d, de un intervalo inicial (x_0-d, x_0+d) para el que se representará la función.
- El radio, d1, d1 < d, de un intervalo (x_0-d1, x_0+d1) encajado en el anterior, que define una ventana sobre la que se realiza el zoom.

Como salida obtenemos dos gráficos:

El primero será la representación gráfica de *f(x)* en el intervalo (x_0-d, x_0+d) sobre el que destaca, en magenta, una ventana cuya ampliación (zoom) da lugar al segundo gráfico que aparece enmarcado también en magenta (ver gráfico 1).

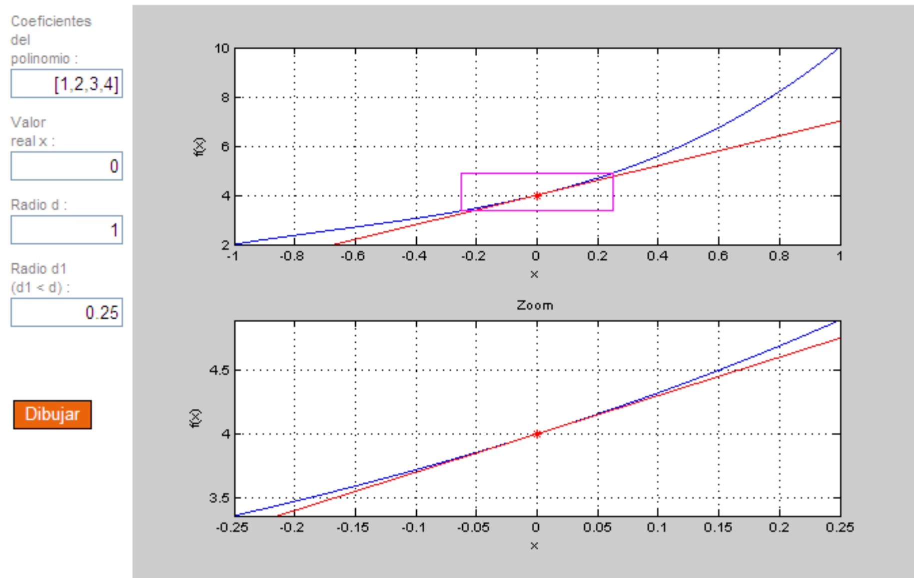


Gráfico 1.- Salida de la función "zoom"

b.2 Función recta tangente:

Hay que introducir como entradas:

- Los coeficientes del polinomio de tercer grado, siguiendo el orden creciente de las potencias de *x*., que definirá la función, *f*(*x*), a estudiar.
- El valor x_0 real tal que (x_0, f(x_0)) es el punto de tangencia, común a las rectas secantes a construir.

- El valor real h, que determina un intervalo inicial (x_0, x_0+h).

Como salida obtenemos cuatro gráficos que son aproximaciones sucesivas a la recta tangente mediante rectas secantes (rojo) con un punto en común. En todos ellos aparece la gráfica de la función *f(x)* (azul) y la recta tangente a *f(x)* (verde) en el punto (x_0, f(x_0)).

- En la "Aproximación 1" se tiene la recta secante a la gráfica de f(x) en los puntos (x_0,f(x_0)) y (x_0+h,f(x_0+h)).
- En la "Aproximación 2" se tiene la recta secante a la gráfica de f(x) en los puntos (x_0,f(x_0)) y (x_0+(h/2),f(x_0+(h/2)))
- En la "Aproximación 3" se tiene la recta secante a la gráfica de f(x) en los puntos (x_0,f(x_0)) y (x_0+(h/3),f(x_0+(h/3)))
- En la "Aproximación 4" se tiene la recta secante a la gráfica de f(*x*) en los puntos (x_0,f(x_0)) y (x_0+(h/10),f(x_0+(h/10))).

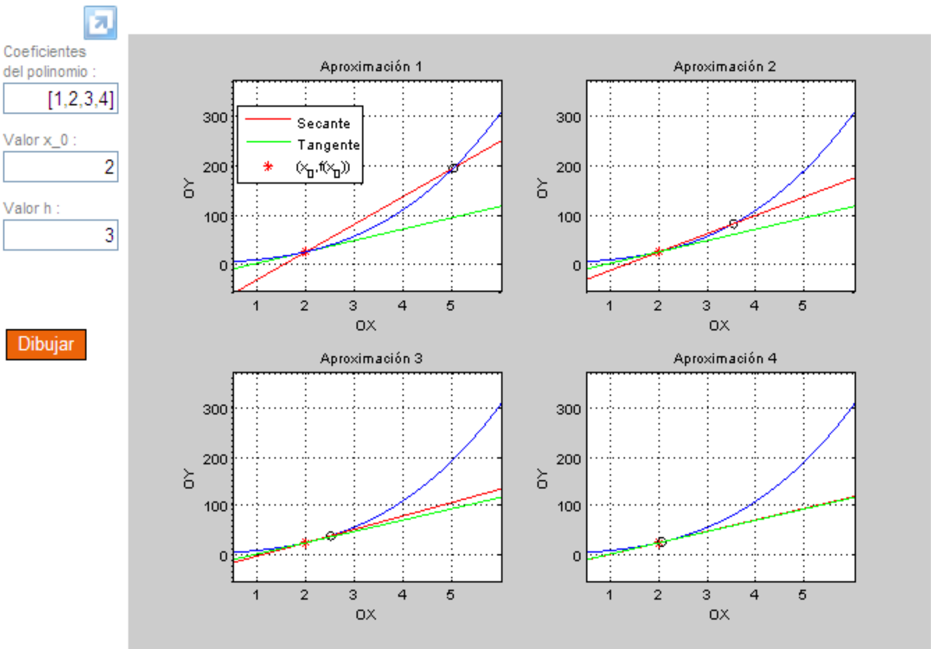


Gráfico 2.- Salida de la función "recta tangente"

Referencias bibliográficas

Artigue, M., Batanero C. & Kent, P. (2007). Mathematics thinking and learning at post secondary level. In F. Lester (ed.), *Second Handbook of research on Mathematics Teaching and learning: a project of the National Council of Teachers of Mathematics (pp.1011-1045)*. Charlotte, NC: Information Age Publisher.

Baker, B.; Cooley, L. & Trigueros, M. (2000). A Calculus graphing Schema. *The Journal for Research in Mathematics Education*, 31(5), 557-578.

Boigues, F. J., Estruch, V. & Llinares, S. (2010). El papel de sistemas de cálculo formal en la comprensión de las matemáticas: el caso de la integral definida. *Modeling in Science Education and learning*. Vol. 3(1), 3-18.

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza editorial.

Contreras, A., Ordoñez, L., Luque, L., García, M, Sánchez, C. & Ortega, M. (2003). *Análisis de manuales de 1º y 2º de bachillerato, en cuanto a los conceptos básicos del Cálculo infinitesimal derivada e integral, bajo la perspectiva de los obstáculos epistemológicos.* Proyecto de investigación del Instituto de Estudios Giennenses.

Cordero, A., Hueso, J.L., Martínez, E. & Torregrosa, J.R. (2005). *Métodos Numéricos con Matlab.* Valencia: editorial UPV.

Drijvers, P., Kieran C. & Mariotti, M. (2010). Integrating Technology into Mathematics Education: Theoretical Perspectives. In C. Hoyles y L.Lagrange (ed.), *Mathematics Education,* (pp.89-132). New York: Springer.

Durán, A. (1996). *Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo*. Madrid: Alianza.

Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático: Desde la Antigüedad a nuestros días*. (Tomo 1). Madrid: Alianza editorial.

Lavicza, Z. (2010). Integrating technology into mathematics teaching at the university level. *Mathematics Education*.42, 105-119.

Verillon, P. & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrument activity. *European Journal of Psychology of Education*, 9(3), 77-101.

EMPLEO DE LA PROGRAMACIÓN EN LOS MÉTODOS PROBABILÍSTICOS PARA LA GENERACIÓN DE NÚMEROS ALEATORIOS Y SUS APLICACIONES EN LA SIMULACIÓN

José Antonio Molinet Berenguer, Yoan Martínez López, Laura Casas Fuentes
Universidad de Camagüey "Ignacio Agramonte y Loynaz". Cuba
jose.molinet@reduc.edu.cu, yoan.martinez@reduc.edu.cu, laura.casas@reduc.edu.cu

Resumen: En el presente artículo se propone la utilización de un lenguaje de programación para el aprendizaje, en las carreras técnicas, de los métodos probabilísticas. De manera específica, consideramos que para el estudio de los métodos probabilísticas que son utilizados en la generación de los números aleatorios, que se imparten en la asignatura de Probabilidades, el estudiante al usar la programación como herramienta, puede visualizar mejor, a través de ejemplos, las aplicaciones de las distribuciones: Normal, Poisson, Binomial, Exponencial y Muller, en la simulación de procesos y fenómenos de acuerdo a su perfil profesional.

Palabras clave: Programación, números aleatorios, simulación.

Abstract: This article proposes the use of a programming language for learning of probabilistic methods in technical careers. Specifically, we believe that the study of probabilistic methods are used in generating random numbers, which are taught in the course of probabilities, for students to use programming as a tool, which they can see better through examples, distributions applications: Normal, Poisson, Binomial, Exponential, and Muller, in processes and phenomena simulation according to their profile.

Key words: Programming, random numbers, simulation.

Introducción

El número de eventos que se pueden simular empleando los números aleatorios generados por las distintas distribuciones ocupan diversas esferas (Bodt & Taylor, 1982). La distribución de Poisson por ejemplo modela eventos tales como el número de autos que pasan a través de un cierto punto en una ruta durante un periodo definido de tiempo, el número de llamadas telefónicas en una central telefónica por minuto, el número de servidores web accedidos por minuto, el número de mutaciones de determinada cadena de ADN después de cierta cantidad de radiación.

La programación de estas distribuciones, empleando para ello cualquier lenguaje de programación, permite al estudiante simular el comportamiento de sistemas que se ajusten a ellas (Navidi, 2007). Lo cual facilita la comprensión de procesos y fenómenos que serán cotidianos en su labor profesional y a su vez el estudio de las distintas condiciones límites a las que podrían verse sujetos dichos procesos, que abarcan desde lo industrial hasta lo social y biológico. La automatización de los cálculos permite que el estudiante resuelva en un tiempo razonable ejemplos de procesos reales, sin importar cuan extenso y complejos sean los cálculos, además de dotarlo de gráficas que faciliten la toma de decisiones.

Desarrollo

En los cursos de probabilidades impartidos en las carreras técnicas, se hace énfasis en el comportamiento estocástico de muchos sistemas reales que no pueden ser siempre caracterizados por una distribución uniforme (Tausworthe, 1965). Aparecen mucho más frecuentemente otras distribuciones tales como la Normal, Exponencial, Poisson y Binomial en fenómenos tales como el número de autos que pasan a través de un cierto punto en una ruta durante un periodo definido de tiempo, el número de servidores web accedidos por minuto o las mediciones físicas en áreas como los experimentos meteorológicos (Pitman, 1993). A lo largo de su vida profesional, el estudiante tendrá que enfrentarse a problemas relacionados con sistemas como los mencionados anteriormente, para solucionar estos problemas tendrá que auxiliarse de técnicas de simulación que exigen en particular conocer de métodos que permitan generar números aleatorios con cualquier distribución así como técnicas de prueba de bondad de ajuste a una distribución arbitraria, entre las teóricas clásicas o una empírica (Press, Teukolsky, Vetterling, & Flannery, 1992).

Hoy en día la Simulación es ampliamente empleada por tres razones principales:

- *Complementar la teoría:* Aunque se entiendan los procesos y las leyes que lo rigen, a veces no es posible obtener una solución analítica (o numérica). Además, en ocasiones se desconocen las condiciones iniciales u otra información referente al fenómeno.
- *Complementar los experimentos:* Los experimentos pueden ser muy costosos, peligrosos o resulta difícil realizar mediciones directamente.
- *La potencia de cómputo aumenta mientras que el costo disminuye:* En 1965 Gordon Moore enunciaba la ley, según la cual, el número de componentes en un chip se duplicaba cada año. Luego en 1975 se modificó a: duplicarse cada dos años.

Un correcto acercamiento de la simulación al fenómeno real, depende directamente de la generación de los números aleatorios según la distribución correspondiente. Generar un conjunto de números aleatorios consiste en obtener los valores x pertenecientes al dominio $[x_{mín}, x_{máx}]$, de forma tal que su frecuencia de ocurrencia coincida con el valor que toma la función de densidad de probabilidad $f(x)$.

Ejemplos de distribuciones y su programación

Distribución Normal

En estadística y probabilidades se llama distribución normal, distribución de Gauss o distribución gaussiana, a una de las distribuciones de probabilidad de variable continua que con más frecuencia aparece en fenómenos reales.

La importancia de esta distribución radica en que permite modelar numerosos fenómenos naturales, sociales y psicológicos. Mientras que los mecanismos que subyacen a gran parte de este tipo de fenómenos son desconocidos, por la enorme cantidad de variables incontrolables que en ellos intervienen, el uso del modelo normal puede justificarse asumiendo que cada observación se obtiene como la suma de unas pocas causas independientes (Walpole, Myers, & Myers, 1992).

La función de densidad de esta distribución está dada por la siguiente ecuación:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left[\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \qquad (1)$$

La Figura 1 muestra el gráfico de la función densidad de la distribución normal.

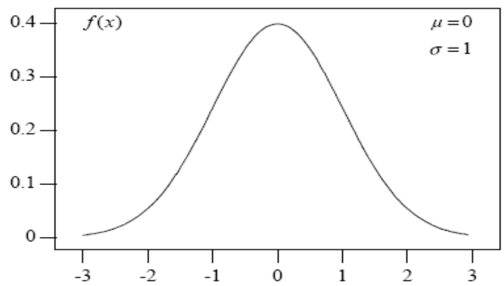


Figura 1 Gráfica de la función normal.

A continuación se muestra el algoritmo que nos permite programar esta distribución (en este caso se ha empleado el lenguaje C++) de forma tal que al pasarle los parámetros necesarios se genere un conjunto de valores que sigan esta distribución y nos permita aplicarlos a un ejemplo real.

Algoritmo:

(1) Generar a=U(-1,1) y b=U(-1,1) donde U es la distribución uniforme en (-1,1)

(2) $U=a^2+b^2$

(3) Si U<1, return ; en caso contrario ir a (1)

Código en C++:

```
double normal(double mu, double sigma)
{
  assert(sigma>0);
```

```
  double p,p1,p2;
  do{
    p1 = uniform(-1.,1.);
    p2 = uniform(-1.,1.);
    p = p1*p2+p2*p2;
 }while(p>=1.);
 return  mu + sigma*p1*sqrt(-2. * log(p) / p);
}
```

Algunas aplicaciones de variables asociadas a fenómenos que siguen esta distribución:

- Caracteres morfológicos de individuos (la estatura).
- Nivel de ruido en telecomunicaciones.
- Caracteres fisiológicos como el efecto de un fármaco.
- Errores cometidos al medir ciertas magnitudes.
- Caracteres sociológicos como el consumo de cierto producto por un mismo grupo de individuos.

Distribución Binomial

En estadísticas, la distribución binomial es una distribución de probabilidad discreta del número de sucesos en una secuencia de n experimentos independientes, los cuales tienen probabilidad θ de ocurrir.

La variable aleatoria binomial y su distribución están basadas en un experimento que satisface las siguientes condiciones:

- El experimento consiste en una secuencia de *n* intentos, donde *n* se fija antes del experimento.
- Los intentos son idénticos, y cada uno de ellos puede resultar en dos posibles resultados, que denotamos por éxito *(S)* o fracaso *(F)* (p(S)+p(F)=1).
- Los intentos son independientes, por lo que el resultado de cualquier intento en particular no influye sobre el resultado de cualquier otro intento.
- La probabilidad de éxito es constante de un intento a otro.

Siguiendo estas premisas la variable aleatoria binomial *X* está definida como el número de éxitos entre los *N* intentos.

La ecuación (2) muestra la fórmula de la función de densidad de la distribución binomial:

$$f(k) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & k \in \{0, 1, \cdots, n\} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad (2)$$

La Figura 2 muestra el gráfico de la función binomial:

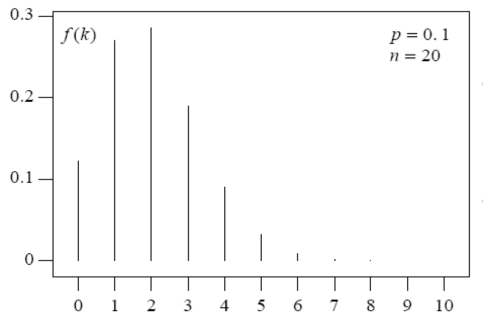


Figura 2 Gráfica de la función binomial.

Para generar un conjunto de números aleatorios empleando la distribución binomial se puede emplear el siguiente algoritmo y su correspondiente implementación en el lenguaje C++.

Algoritmo

(1) Generar a=U(0,1) donde U es la distribución uniforme en (0,1)

(2) Generar n valores de *X* independientes, donde *X*=1 si U<p, sino *X*=0

(3) Return $X=X_1+\ldots+X_n$

Código en C++:

```
int binomial (int n, double p)
{
   assert(0. <= p && p <= 1. && n>=1);
   int sum = 0;
   for( int i = 0; i < n; i++) sum += bernoulli(p);
   return sum;
}
```

Algunos fenómenos que siguen una distribución binomial:

- Al nacer un/a bebé puede ser varón o hembra.

- En el deporte un equipo puede ganar o perder.
- En pruebas de cierto o falso sólo hay dos alternativas.
- Un tratamiento médico puede ser efectivo o inefectivo.
- La meta de producción o ventas del mes se pueden o no lograr.
- En pruebas de selección múltiple, aunque hay cuatro o cinco alternativas, se pueden clasificar como correcta o incorrecta.

Distribución Poisson

En teoría de probabilidades y estadísticas, la distribución de Poisson es una distribución de probabilidad discreta que expresa, a partir de una frecuencia de ocurrencia media, la probabilidad que ocurra un determinado número de eventos durante cierto periodo de tiempo.

La ecuación (3) muestra la fórmula de la función de densidad de la distribución de Poisson:

$$f(k) = \begin{cases} \dfrac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} & k \in \{0, 1, \cdots\} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad (3)$$

La Figura 3 muestra el gráfico de la función Poisson:

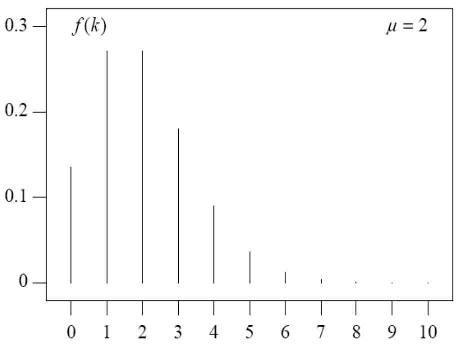


Figura 3 Gráfica de la función Poisson.

Para obtener de forma automática un conjunto de valores que se rijan por esta distribución se puede emplear el siguiente algoritmo y escribirlo en un determinado lenguaje de programación.

Algoritmo:

(1) $a=e^{-\mu}$, b=1 y i=0

(2) Generar U_{i+1} = U(0,1) y remplazar b por b* U_{i+1}, donde U es la distribución uniforme en (0,1)

(3) Si *b*<*a*, return *X*=i; en caso contrario i=i+1 e ir a (2)

Código en C++:

```
int poisson(double mu)
 {
   assert( mu > 0.);
   double b = 1.;
   int i;
   for( i = 0; b>=exp(-mu); i++) b* = uniform( 0., 1. );
   return i - 1;
```

La distribución de Poisson se aplica a varios fenómenos discretos de la naturaleza (esto es, aquellos fenómenos que ocurren 0, 1, 2, 3,... veces durante un periodo definido de tiempo o en un área determinada) cuando la probabilidad de ocurrencia del fenómeno es constante en el tiempo o el espacio (Walpole, Myers, & Myers, 1992). Ejemplos de estos eventos que pueden ser modelados por la distribución de Poisson incluyen:

- El número de autos que pasan a través de un cierto punto en una ruta (suficientemente distantes de los semáforos) durante un periodo definido de tiempo.
- El número de errores de ortografía que uno comete al escribir una única página.
- El número de llamadas telefónicas en una central telefónica por minuto.
- El número de servidores web accedidos por minuto.
- El número de animales muertos encontrados por unidad de longitud de ruta.
- El número de núcleos atómicos inestables que decayeron en un determinado período en una porción de sustancia radiactiva. La radiactividad de la sustancia se debilitará con el tiempo, por lo tanto el tiempo total del intervalo usado en el modelo debe ser significativamente menor que la vida media de la sustancia.
- El número de estrellas en un determinado volumen de espacio.
- La distribución de receptores visuales en la retina del ojo humano.
- El número de llamadas telefónicas en una central telefónica por minuto.
- El número de autos que pasan a través de un cierto punto en una ruta (suficientemente distantes de los semáforos) durante un periodo definido de tiempo.

- El número de mutaciones de determinada cadena de ADN después de cierta cantidad de radiación.

A partir de todas estas distribuciones estudiadas y de los algoritmos anteriormente vistos, se pueden obtener códigos en diferentes lenguajes de programación y así crear programas que permitan el cálculo estadístico. Haciendo uso de estos programas el estudiante puede aplicar las distintas distribuciones en la solución de problemas reales como los que fueron expuestos anteriormente, sin que el gran volumen de información que estos generan pueda impedir su tratamiento.

En nuestra experiencia encontramos dos formas principales de aplicar los programas de computación obtenidos. La primera consiste en que el estudiante para simular determinado fenómeno utilice estos códigos y genere un conjunto de números aleatorios y así analizar determinados aspectos del mismo, sin tener que esperar a medir realmente estos datos. La segunda forma reside en calcular los parámetros de entrada de las distribuciones utilizando un conjunto de valores reales, para posteriormente generar los valores a través de la fórmula ya programada y comparar la distribución obtenida con los valores reales.

Conclusiones

En el presente trabajo se realizó un análisis de las diferentes distribuciones que los estudiantes deben dominar, para la aplicación de los mismos en su perfil técnico. También se evidenció como el empleo de la programación representa una importante herramienta en los métodos probabilísticos para la generación de números aleatorios y sus aplicaciones en la simulación.

La generación automática de un conjunto de números que sigan una determinada distribución permite al estudiante realizar un análisis detallado de fenómenos reales que no serían posibles reproducir. De esta manera, el uso de la computación y el conocimiento de cualquier lenguaje de programación facilitan la comprensión mediante gráficas y aplicaciones reales de un número de distribuciones probabilísticas tratadas en los cursos de Probabilidades y Estadísticas.

Referencias bibliográficas

Bodt, B. A., & Taylor, M. S. (1982). *A Data Based Random Number Generator for a Multivariate Distribution.* Aberdeen: Defense Technical Information Center.

Navidi, W. (2007). *Estadística para ingenieros y científicos.* Mexico: McGraw-Hill.

Pitman, J. (1993). *Probability.* New York: Springer-Verlag.

Press, W., Teukolsky, S., Vetterling, W., & Flannery, B. (1992). *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing.* New York: Cambridge University Press.

Tausworthe, R. C. (1965). Random Numbers Generated by Linear Recurrence Modulo Two. *Mathematics of Computation*, 201-209.

Walpole, R. E., Myers, R. H., & Myers, S. L. (1992). *Probabilidad y Estadística para Ingenieros.* México: McGraw-Hill

ESTRATEGIA METODOLÓGICA PARA POTENCIAR EL USO DEL SOFTWARE ELEMENTOS MATEMÁTICOS EN LA SECUNDARIA BÁSICA

Niurys Lázaro Alvarez
Universidad de las Ciencias Informáticas. Cuba
nlazaro@uci.cu

Resumen: El trabajo referido a una "Estrategia metodológica para potenciar el uso del Software Elementos Matemáticos en la Secundaria Básica" propone acciones de preparación del profesor de Matemática para la utilización del software, a través de procedimientos didácticos que contribuyen a elevar la calidad de la clase y el aprendizaje de los alumnos. La autora utilizó diferentes métodos para acercarse a la realidad educativa y detectar las dificultades que existían y motivaron el inicio de la actividad investigativa para determinar las causas que originan la situación, lo cual permitió diseñar la estrategia metodológica en la solución de los problemas. Se ha probado la validez de la propuesta en el marco de la Maestría en Ciencias de la Educación en la escuela de educación secundaria "Carlos Ulloa" del municipio Pinar del Río con resultados satisfactorios donde se explica la estructura de la estrategia, contiene los talleres de preparación a los profesores, así como parte de un Cuaderno de Ejercicios que se resuelven con el uso del Software.

Palabras clave: Estrategia metodológica, software, elementos matemáticos.

Abstract: This paper presents a *methodological strategy to strengthen the use of Mathematical Elements Software in Junior High School*. It offers actions for Mathematics teacher preparation to use this Software through didactic procedures, which contributes in raiseing the lessons quality and the students learning. The author used some methods to approach at educative environment and to find the current difficulties that motivated the beginning of the investigation, to determine the causes that originated the situation. This allowed the author to design the methodological strategies for solving problems. The validity of the proposal has been proven through the Science Education Master studies at Junior High School "Carlos Ulloa" in Pinar del Rio municipality, with satisfactory results. It implies the structure strategy and it also contains teacher's preparation workshops as well as part of a Workbook, which can be solved with the use of Software.

Key words: Methodological strategy, software, mathematical elements.

Introducción

En Cuba, el uso de las tecnologías como apoyo a la educación es una palpable realidad; las transformaciones que vive la escuela cubana hacen de ella una herramienta de vital importancia y pertinencia. Es innegable que posterior a la aparición de la multimedia como tecnología, las computadoras se han convertido en un excelente medio de enseñanza, por su carácter interactivo y su contribución a la individualización del proceso de aprendizaje.

Por otra parte, la enseñanza de la Matemática como asignatura priorizada que está presente en todo lo que se realiza diariamente, y que tiene un gran peso en el desarrollo de la formación general y en particular en el pensamiento lógico de los niños, adolescentes y jóvenes a lo largo de todas las etapas de estudio, debe ser un proceso sistémico, continuo e interdisciplinario donde además de utilizar las bibliografías tradicionales, el profesor debe aprovechar estas potencialidades que brindan las nuevas tecnologías de la informática con el objetivo de eliminar los problemas presentes en esta asignatura.

Buscar modelos educativos innovadores donde se utilicen las potencialidades de los medios de comunicación y las nuevas tecnologías de la información, es requisito para elevar la calidad de la educación en cualquier estructura sociopolítica, motivo este por el cual la autora utilizó diferentes métodos para acercarse a la realidad educativa y detectar las dificultades que existían y motivaron el inicio de la actividad investigativa para determinar las causas que originan la situación.

Antecedentes

En la Educación Secundaria Básica en Cuba se han utilizado diferentes software educativos dirigidos a la enseñanza de la Matemática mediante los cuales se ejercitan determinadas habilidades matemáticas como el desarrollo del pensamiento lógico, cálculo de ángulos y cálculo numérico respectivamente.

Para hacer frente a todas o casi todas las exigencias de los planes de estudios de los currículum de estudio de los diferentes sistemas de enseñanza, se concibió un modelo pedagógico denominado *hiperentorno educativo* (Labañino, 2003), donde se incluye la colección El Navegante que cuenta con 10 software educativos, uno de ellos Elementos Matemáticos. La colección “El Navegante” es un hiperentorno de aprendizaje compuesto por 6 módulos básicos y diversos servicios informáticos.

Como antecedentes del problema a partir de la exploración empírica realizada se constató en las inspecciones, controles a clases y entrenamientos metodológicos realizados se identifican un conjunto de insuficiencias relacionadas con el aprovechamiento del software Elementos Matemáticos de la Colección El Navegante y su utilización en las clases de Matemática.

Los antecedentes permitieron identificar el siguiente *problema científico*: ¿Cómo potenciar la utilización del software Elementos Matemáticos de la Colección El Navegante en las clases de Matemática en la Secundaria Básica?

Con el interés de dar solución al problema formulado, se plantea como *objetivo:* elaborar una estrategia metodológica para potenciar la utilización del software Elementos Matemáticos de la Colección El Navegante en la Secundaria Básica.

El aporte práctico fundamental de la investigación se concreta en la confección de una estrategia metodológica para potenciar el uso del software Elementos Matemáticos de la colección El Navegante en la Secundaria Básica, de forma tal que permita elevar la preparación de los profesores a fin de que facilite un aprendizaje significativo en los alumnos.

Fundamentos

La transmisión de conocimientos y la enseñanza se han desarrollado a lo largo de muchos siglos, en un mundo donde la velocidad de propagación de la información y la aplicación y divulgación de los nuevos hechos científicos ha impuesto a la educación un ritmo acelerado, pero a la luz del descubrimiento y amplísimo desarrollo de la Computación, donde el libro ha dejado de jugar su papel protagónico como el más veloz, seguro y actualizado portador de la información y se abre paso una nueva era en el desarrollo de la humanidad, la era de la Informática.

Con relación a la utilización de las nuevas tecnologías de la información y las comunicaciones se hizo referencia en el III, IV, V y VI Seminario Nacional para Educadores en Cuba, en los cuales se aportan ideas, conceptos y procedimientos para la utilización de software en diferentes asignaturas y enseñanzas. La sistematización realizada por la autora desde la etapa exploratoria de esta investigación, le permitió identificar en los trabajos revisados que una tarea fundamental en la actualidad, en la preparación y superación de los profesores en ejercicio, está relacionada con el uso de las tecnologías como apoyo y mediador en el proceso de enseñanza aprendizaje. Entre los que han dedicado espacio de reflexión e investigación científica al tema están (Labañino, 2003,2005; Rodríguez, 2007; Coloma y Salazar, 2005).

Este es un reto que deben afrontar los profesores de la Educación Secundaria Básica, en aras de lograr una instrucción que desarrolle habilidades en sus alumnos que les permitan enfrentar los medios informáticos y como parte de éstos los software.

Por otra parte, la Matemática juega un papel fundamental en el conjunto de las diferentes ciencias particulares. La historia se ha encargado de demostrar que lo determinante en el desarrollo de la ciencia lo constituyen las exigencias de la realidad material. Partiendo de problemas geométricos, físicos, económicos y de la técnica y otras ciencias particulares se crean las definiciones, proposiciones y teoremas con los que se da solución a dichos problemas.

La estrategia metodológica que se propone constituye un conjunto de acciones, ordenadas convenientemente a corto y mediano plazo, que permite la transformación de la dirección del proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura Matemática, tomando como base métodos y procedimientos para potenciar el uso del software Elementos Matemáticos de la Colección El Navegante en un tiempo concreto en la Educación Secundaria Básica.

Esta se recoge en una tesis presentada por la autora en el marco de la Maestría en Ciencias de la Educación en la Mención Secundaria Básica, y parte de las acciones propuestas, principalmente los talleres y ejercicios, fueron trabajados por la autora en el grupo 2-D, en el primer bloque del primer año intensivo en la asignatura de Matemática.

La estrategia que se ofrece es una propuesta general, no es un algoritmo rígido y cerrado, sino que deja abierto el espacio para la incorporación de nuevas metodologías y conocimientos, que puedan enriquecer y perfeccionar la propuesta.

La estrategia ha sido planificada para que el profesor más preparado dirija la preparación metodológica de los profesores en ejercicio, con el apoyo de los más experimentados en el tema, y controle el desarrollo de las acciones planificadas para la dirección del proceso de enseñanza-aprendizaje a través del empleo del software Elementos Matemáticos.

La estrategia tiene como *objetivo general:*

Implementar un conjunto de acciones que potencien, en los profesores generales integrales de la Educación Secundaria Básica, el uso del software Elementos Matemáticos de la Colección El Navegante, como una vía para la motivación en los alumnos por la asignatura Matemática.

Como *objetivos específicos:*

Entrenar a los profesores generales integrales, en la navegación por el software Elementos Matemáticos y su uso en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura Matemática.

Potenciar el uso del software Elementos Matemáticos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, como contribución a la clase cubana actual.

Fundamentos filosóficos, psicológicos y pedagógicos de la estrategia

En la concepción de la estrategia que se propone se presta atención a los modelos actuales de las teorías educativas actuales, pues la misma se sustenta teóricamente en su carácter sistémico, expresada en el conjunto de relaciones sociales por lo que tiene carácter socio-histórico; por su posibilidad de desarrollo del pensamiento lógico y creador; por su sentido de estructurar de manera lógica, metodológica y cognoscitiva la preparación de las condiciones para potenciar el uso del software Elementos Matemáticos. Esta propuesta, además, se proyecta, entre otras, en funciones históricas del fenómeno educativo como: preparar al individuo para entregar conocimientos, para la vida en condiciones de la revolución tecnológica y para buscar desarrollo humano.

Desde el punto de vista psicológico la estrategia se fundamenta a partir del enfoque de la escuela Histórico-Cultural de Vigotsky (1988). La noción de Zona de Desarrollo Próximo permite evaluar las capacidades intelectuales de los alumnos y hace posible que adquiera mayores niveles de independencia y se "eleve" a un nivel intelectual superior mediante la colaboración y la actividad conjunta. A la vez, se tiene en cuenta el papel del profesor y del software como agentes mediadores en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Desde el punto de vista social la estrategia privilegia la armonía entre los miembros del colectivo pedagógico en su preparación y del grupo escolar, el profesor y el software, basada en una atención personalizada según el diagnóstico. La aplicación del enfoque comunicativo favorece la relación mutua entre los profesores en el marco del trabajo metodológico cooperado y entre los miembros del colectivo escolar, el establecimiento de niveles de ayuda en dúos, tríos o pequeños grupos.

Desde el punto de vista pedagógico se atiene a las concepciones de la tradición pedagógica cubana y a los aportes de pedagogos extranjeros sobre el uso de las nuevas tecnologías, sobre la aplicación del enfoque comunicativo y sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje desarrollador.

El trabajo metodológico para potenciar el uso del software favorece el desarrollo de diferentes habilidades como observar, identificar, describir, ejemplificar y valorar, entre otras.

Estructura de la estrategia

Las acciones de la estrategia se determinan a corto y mediano plazo. Las acciones de diagnóstico a profesores, tabulación y procesamiento de los resultados, la realización de los talleres iniciales son a corto plazo. Mientras a mediano plazo se realizan las acciones de preparación al personal docente, de demostración, control y evaluación.

Las acciones se dividen en tres fases: de diagnóstico de las necesidades de los profesores, de entrenamiento y demostración y de control y evaluación.

Acciones para el diagnóstico de necesidades

1. Aplicación de instrumentos para la fase de diagnóstico inicial a los profesores, para detectar las necesidades que poseen en cuanto a la navegación por el software Elementos Matemáticos y su uso en el proceso de enseñanza de la Matemática.

2. Tabulación y procesamiento de los resultados obtenidos producto a la aplicación de los instrumentos.

Acciones de entrenamiento y demostración a profesores

Desarrollo de talleres encaminados a familiarizar a los profesores con las actividades docentes, que pueden realizar con el uso del software como medio de enseñanza y los software que integran la Colección El Navegante.

- Colección El Navegante.
- Las softareas.
- La clase con el uso del software Elementos Matemáticos.

1. Desarrollo de talleres para socializar las acciones que se realizan, experiencias y sugerencias prácticas, para utilizar el software Elementos Matemáticos. Este se realiza en el laboratorio de Computación.

- El software Elementos Matemáticos, ¿intruso o aliado?
- Navegación por el software Elementos Matemáticos.
- Planificación de tareas con el uso del software Elementos Matemáticos.

2. Realización de clases demostrativas en las que se utiliza el software Elementos Matemáticos de la Colección El Navegante para la motivación, para el tratamiento de nuevos conceptos o procedimientos, para la fijación de conceptos o procedimientos y/o para la evaluación, en la asignatura Matemática.
3. Desarrollo de actividades metodológicas cooperadas, relacionadas con los siguientes temas:
4. Potencialidades del software Elementos Matemáticos para el aprendizaje en la asignatura Matemática.

- Implicaciones de una clase desarrolladora.
- Relaciones interdisciplinarias entre los contenidos de la unidad “Los números con signo” de la asignatura Matemática y demás asignaturas del currículo.

5. Planificación del programa de un Círculo de Interés relacionado con el software Elementos Matemáticos de la colección El Navegante.
6. Confección de guía de observación de clases, de conjunto con la jefa de grado, dirigidas a las clases con el uso del software.
7. Realizar debates de todos los videos que aparecen en el módulo Biblioteca del software Elementos Matemáticos, relacionados con la unidad “Los números con signo”.

Acciones de control y evaluación

1. Desarrollo de visitas de control y ayuda metodológica a las clases de Matemática con el uso del software.
2. Desarrollo de talleres mensuales para realizar ajustes a la estrategia y confrontar criterios o nuevas ideas.
3. Supervisión de los registros de entrenamientos relacionados con las acciones de la estrategia.
4. Desarrollo de un taller final para realizar el balance del trabajo con el software Elementos Matemáticos de la colección El Navegante.
5. Desarrollo del diagnóstico final para corroborar la efectividad de la estrategia.

Talleres de preparación a los profesores

La forma de desarrollar los talleres de preparación tienen características singulares ya que los participantes, a través de las tareas asignadas por el profesor del curso, van "descubriendo" las características y potencialidades del software Elementos Matemáticos en las clases de Matemática, y asumen los criterios que a su juicio se deben adoptar para la utilización del software en cuanto a sus objetivos y selección de las tareas a resolver, atendiendo a las funciones didácticas predominantes y su tratamiento metodológico.

Con la realización de los talleres y la propuesta de un cuaderno de tareas que se resuelven con el uso del software Elementos Matemáticos, los participantes llegan por sí mismos a formarse un criterio propio. No se trata de que la autora imponga su criterio o dé una "receta" de cómo utilizar el software Elementos Matemáticos.

Se puede utilizar a los profesores más experimentados en el tema para el desarrollo de los talleres y las clases demostrativas, a través de actividades metodológicas cooperadas, dirigidas por la jefa de grado.

Ejemplos de actividades en los talleres

En los talleres desarrollados, se brinda una forma metodológica diferente para sistematizar los elementos a tener en cuenta al utilizar el software Elementos Matemáticos en las clases.

Para introducir en los talleres el modelo didáctico se proponen actividades como:

a) Al inicio de una clase de Matemática cuyo asunto es: "Traducción del lenguaje común al algebraico" se plantea la siguiente actividad:

1. Visita el módulo Biblioteca / Videos. Navega hasta visualizar (las veces que sean necesarias) el video titulado Acertijo Matemático /.

2. Responde las siguientes preguntas:

❖ ¿Cómo se representó el número pensado?

❖ ¿Qué lenguaje es hablado en el intercambio?

❖ ¿Qué lenguaje se utiliza para escribir lo que se dice?

Figura 1: Imagen del software Elementos Matemáticos. Módulo Biblioteca/ Video.

Se solicita a los profesores que visualicen el video y digan con qué objetivo se planteó esa actividad en ese momento. Se socializan las opiniones donde pueden surgir otras propuestas de preguntas.

b) En el desarrollo de una clase de Matemática que tiene como asunto: Construcción de gráficas de barras, se plantea la siguiente actividad.

Visita el módulo Contenidos / Construcción de gráficos / Gráfico de barras // Lee detenidamente el contenido y visualiza la explicación que se te brinda.

1. Escribe en tu libreta el procedimiento para construir gráficos de barras.

2. ¿Cuándo se debe utilizar este tipo de gráfico?

Se solicita a los profesores que visualicen el contenido del epígrafe y la explicación que se brida y digan con qué objetivo se planteó esa actividad en ese momento. Se socializan las opiniones donde pueden surgir otras propuestas de actividades.

En los talleres desarrollados con el objetivo de planificar tareas que se resuelven con el uso del software Elementos Matemáticos, se desarrollan actividades como:

Se divide el grupo en equipos, cada uno en computadoras diferentes y con el Programa de octavo grado abierto en diferentes asignaturas. Puede ser según la asignatura en que son especialistas.

Equipo 1: Programa de Español.

Equipo 2: Programa de Geografía.

Equipo 3: Programa de Biología.

Equipo 5: Programa de Física.

Equipo 4: Programa de Química.

Se les orienta para entrar al software Elementos Matemáticos y visualizar el video que encuentren al seguir el siguiente recorrido. Módulo Biblioteca / Videos / La Matemática en la agricultura/

a) Copia del programa de la asignatura que te corresponde con qué contenidos se relaciona el material visualizado.

b) ¿Es posible establecer relaciones interdisciplinarias con estas asignaturas y la Matemática?

Escribe dos actividades que relacionen la asignatura que corresponde con el material.

Este tipo de actividad está encaminada a establecer relaciones interdisciplinarias y la vinculación de la Matemática con la vida práctica; por lo que en cada momento varía el material a visualizar. A continuación se muestran diferentes ejemplos:

De módulo Biblioteca:

Imágenes:

- ❖ Los números negativos a partir de la temperatura.
- ❖ Los números negativos a partir de la altura.
- ❖ Las fracciones en la alimentación.

Videos:

- ❖ ¿Qué es la Matemática?
- ❖ ¿Cómo aprender Matemática?
- ❖ Los números que nos rodean.
- ❖ Acertijo Matemático.
- ❖ La Matemática y los animales.

Tutores:

- ❖ Diferencias horarias.

De forma general se establecen relaciones interdisciplinarias con la asignatura Español Literatura en:

- Expresión de forma oral y escrita de las ideas.

Comentarios orales de textos leídos

- Redacción de diferentes tipos de resúmenes.

Con la asignatura de Geografía:

- Los recursos naturales. Distribución.
- Producción agropecuaria. Características generales
- Producción agrícola. Importancia.

Con la asignatura de Biología:

- Salud ambiental. Importancia para la salud humana del cuidado de la fauna.
- Diferencias entre alimentación y nutrición.
- Importancia de los animales. Necesidad de su protección.

Con la asignatura de Física:

- La naturaleza y el hombre.
- Mediciones de magnitudes físicas.

Todos estos contenidos se imparten en las unidades uno o dos de sus asignaturas, coincidiendo en tiempo con la Unidad 1 de Matemática.

A partir de los talleres que se planificaron para la preparación de los profesores, se propone un cuaderno que contiene actividades que para resolverlas, es obligatorio el uso del software Elementos Matemáticos. Estas responden a diferentes contenidos de la asignatura de Matemática en octavo grado. Dichas actividades pueden ser planificadas por los profesores para cumplir diferentes funciones didácticas dentro de sus clases y estas promueven la reflexión y el intercambio entre los alumnos sobre la aplicación de la Matemática en la vida.

Conclusiones

Existe coincidencia en que para lograr el éxito en el uso del software en las escuelas y, por tanto, para obtener mejoramientos en la calidad del proceso de enseñanza-aprendizaje, es necesario elevar la preparación de los profesores en ejercicio en el uso de los mismos en sus clases.

Las acciones contenidas en la estrategia y los talleres propuestos, constituyen una experiencia metodológica y didáctica sobre cómo trabajar con los profesores de Matemática para potenciar el uso del software Elementos Matemáticos en las clases y una vía para agilizar las acciones necesarias para planificar una clase de Matemática utilizando dicho software.

Referencias bibliográficas

Coloma, O. y Salazar, M. (2005). ¿Cómo utilizar el software educativo en el aula? *Memorias Pedagogía 2005, Curso 99*. La Habana: MINED.

Labañino, C. (2003). Materiales multimedia interactivos para la clase al alcance de todos. Material digitalizado. *Memorias Pedagogía 2003*. La Habana: MINED.

____________ (2005). Colección "El Navegante". Material digitalizado. Dirección Nacional de Computación del MINED.

Lázaro. N. (2008). *Estrategia Metodológica para potenciar el uso del Software Elementos Matemáticos en la Secundaria Básica*. Tesis de Maestría no publicada. Instituto Superior Pedagógico "Rafael María de Mendive". Pinar del Río. Cuba. Recuperado el 31 de marzo de 2011 de http://bibliodoc.uci.cu/TM/Tdig_ 0002_08.pdfVigotsky, L. S. (1988). *Historia del desarrollo de las funciones psíquicas superiores*. La Habana: Editorial Científico Técnica.

A ATENÇÃO E A INTERAÇÃO NA AUTORREGULAÇÃO DA APRENDIZAGEM DE ESTATÍSTICA DE ESTUDANTES DE TECNOLOGIA DE GUARULHOS

[1]Washington de Mendonça, [2]Maria Helena de Oliveira, [3]Verônica Yumi Kataoka.
[1,2,3]Universida de Bandeirante de São Paulo UNIBAN. Brasil
[1]washington_de@uol.com.br, [2]mhelenapalma@gmail.com.br, [3]verônicayumi@terra.com.br

Resumen: Este estudio tiene el objetivo de describir y analizar los comportamientos de autorregulación de estrategias de atención y de interacción en el aprendizaje de estadística de 185 estudiantes de cursos de tecnología de una facultad del municipio de Guarulhos. Los resultados relativos a las estrategias de atención mostraron que los estudiantes atribuyen más importancia a la profundización del contenido de otras disciplinas que a los de la estadística a pesar de haber atribuído mucha importancia a la estadística para su formación profesional. Los resultados relativos a las estrategias de interacción evidencian que la interacción profesor-alumno depende de la acción del profesor y de la necesidad puntual de solicitar ayuda al mismo cuando se tienen dificultades de aprendizaje. Por otra parte, las interacciones en clase no muestran modos de relación dialógica en la mediación del aprendizaje. Esto puede ser un indicio de un caracter tecnicista en la relación profesor-alumno, propia de metodologías tradicionales de enseñanza.

Palabras clave: Autorregulación, estrategias de atención e interacción, tecnólogos.

Abstract: This study aims to describe and analyze the behavior of self-regulation strategies of attention and interaction in the learning of Statistics. One hundred eighty-five students of technology courses at a college in the city of Guarulhos were studied. Although students have pointed out that Statistics is very important for their professional development and their career, the results concerning attention strategies have shown that students give more importance to learning the content of other subjects rather than Statistics. The results regarding interaction strategies show that the teacher-student interaction is dependent on the teacher's action and also, on the student's need in case there is a learning difficulty. Moreover, classroom interaction does not show mediation of learning experiences. This may be an indication of a teacher-student relationship which is part of traditional teaching methodologies.

Key words: Self-regulation, strategies of attention and interaction; technologists.

Introdução

O presente estudo visa descrever e analisar comportamentos de autorregulação da atenção e da interação na aprendizagem de Estatística de estudantes de cursos tecnológicos de graduação do município de Guarulhos, São Paulo.

Houve épocas em que o homem acumulava dados do passado para resolver problemas do presente. Entretanto, com a aplicação da probabilidade e da Estatística aos problemas de interpretação de dados, no fim do século XIX e início do século XX, os números passaram a ser utilizados para resolver os problemas do presente e a prever os acontecimentos futuros. A utilização da Estatística na pesquisa científica e empírica, datada do século passado, deveu-se principalmente à capacidade inferencial de suas técnicas e ao auxílio na tomada de decisões em situações de incerteza (Cazorla e Santana, 2010). Hoje, a Estatística é importante em todas as áreas do conhecimento humano. Assim, é comum encontrarmos nas diversas mídias informações que exigem das pessoas conhecimentos estatísticos como a leitura e interpretação de gráficos e tabelas que são imprescindíveis para a tomada de decisões nas diversas áreas da vida pessoal e social. Além disso, o conhecimento exigido em inúmeras áreas de atuação profissional, fizeram com que a Estatística se transformasse em conteúdo essencial na formação para o trabalho.

Para se apropriar e se beneficiar das informações estatísticas as pessoas devem ser letradas. Para Soares (2004, p.16), o letramento configura-se como "a participação em eventos variados de leitura e da escrita nas práticas sociais que envolvem a língua escrita, e de atitudes positivas em relação a essas práticas". Mais especificamente, Watson (2003, p. 1), define letramento estatístico como a "capacidade de compreender e avaliar criticamente resultados estatísticos que permeiam nossa vida cotidiana, juntamente com a capacidade de apreciar as contribuições que o pensamento estatístico pode fazer nas decisões públicas e privadas, profissionais e pessoais".

No contexto de escolarização, segundo Watson (2003), para que aconteça o letramento Estatístico é necessário que o estudante tenha a compreensão dos conceitos estatísticos; e que ainda desenvolva a capacidade de comunicar resultados por meio de palavras, descreverem os conceitos envolvidos no cálculo da média, do acaso, e da aleatoriedade. Watson (2003) afirma que uma pessoa letrada estatisticamente entende a utilidade da pesquisa e quando questionada responde as perguntas com mais responsabilidade.

Na sociedade do conhecimento, a evolução das tecnologias da informação tem gerado mudanças culturais, profissionais e sociais. A escola em consonância com estas mudanças deve "educar os seus estudantes para que eles saibam de uma forma autônoma, crítica e motivada assumir um papel construtivo nas suas próprias aprendizagens ao longo da vida". (Silva, Duarte, Sá e Simão, 2004, p.12). Essas mudanças atingem também os professores de Estatística que devem estimular o desenvolvimento de competências de autorregulação da aprendizagem de seus alunos.

Segundo Zimmerman (1986, citado por Silva et al, 2004), em uma abordagem sociocognitiva, "a autorregulação na aprendizagem refere-se ao grau em que os indivíduos atuam, no nível metacognitivo, motivacional e comportamental, sobre os seus próprios processos e produtos de aprendizagem, na realização das tarefas escolares." Em qualquer que seja a atividade, a autorregulação implica esses componentes, na medida em que toda ação para ser regulada pelo indivíduo exige que: 1) tenha consciência dos objetivos a atingir; 2) conheça as exigências da ação que quer realizar; 3) discrimine e organize os seus recursos internos e externos para concretização da ação; 4) avalie o nível de realização atingido; 5) altere os procedimentos utilizados se o resultado que chegou não o satisfaça.

Sob o enfoque histórico-cultural, que mais de perto orienta este estudo, a autorregulação da aprendizagem é entendida como função metacognitiva, autoconsciente, socialmente construída e dependente do domínio pelo aluno de instrumentos culturais específicos.

Especificamente neste estudo, a autorregulação da aprendizagem concretiza-se como atividade metacognitiva marcada pelo uso intencional de estratégias de domínio de funções mentais como as de atenção e de interação. Os processos metacognitivos desenvolvem-se de modo relacional com os processos afetivos: a motivação (desejos, interesses e necessidades) gera o pensamento, porque subjacente a cada pensamento há uma tendência afetivo-volitiva (Vigotsky, 1998).

Para Vygotsky (1998, p. 38) a linguagem permite o controle do comportamento e a planificação de ações, portanto desempenha importante função reguladora "... a linguagem habilita as crianças a providenciarem instrumentos auxiliares na solução de tarefas difíceis, a superar a ação impulsiva, a planejar uma solução para um problema antes da sua execução e a controlar seu próprio comportamento". É a capacidade de simbolização que torna possível elaborar mentalmente a ação e agir sobre as diferentes partes que a compõe. Ao longo do desenvolvimento da criança e através de diferentes estágios, a linguagem vai exercendo uma função de regulação da ação. Num primeiro momento, a linguagem dos adultos exerce uma função incentivadora e depois, uma função inibidora. Com a apropriação da linguagem, a criança passa a exercer por si só essas funções através da emissão de verbalizações dirigidas a si mesma. (Lopes da Silva, 1986 citado por Silva *et als*., 2004).

Der Veer e Valsiner (1996) destacam que até a idade adulta as pessoas aprendem a fazer uso de meios externos para direcionar a ação, finalmente esses instrumentos culturais se internalizam. Nessa perspectiva enquadra-se o foco deste estudo ao buscar informações sobre os processos de aprendizagem de estudantes de primeiro ano de ensino superior.

Rosário; Perez e Gonzáles-Pienda (2004) afirmam que as estratégias de aprendizagem devem ser entendidas por meio de suas características, como ações deliberadas para alcançar objetivos específicos; como respostas pessoais relativas às tarefas a serem realizadas, não constituindo um guia pré-estabelecido; como as estratégias selecionadas e aplicadas com flexibilidade à tarefa, que envolvem tanto recursos cognitivos como recursos motivacionais; como estratégias que devem ser aplicadas a diferentes tipos de tarefas escolares para facilitar sua transferência.

Nesse sentido, o estudante autorregulado utiliza-se de estratégias de aprendizagem que são ações deliberadas para alcançar objetivos específicos; para tal, utiliza-se de diversos instrumentos culturais que auxiliam o processo. De modo mais amplo, as estratégias de aprendizagem são procedimentos adotados pelos estudantes para a realização de uma tarefa de aprendizagem (Lopes da Silva e Sá, 1993).

No processo de desenvolvimento, o homem adquire a capacidade de dirigir voluntariamente a sua atenção para elementos do ambiente que julga relevante. Esta seleção voluntária depende, entre outros fatores, da atividade que desenvolve e que é "construída ao longo do desenvolvimento do individuo em interação com o meio em que vive". (Oliveira, 2010, p. 77). Esta atenção é denominada voluntária. Em contrapartida existe a atenção involuntária cujo mecanismo, segundo Oliveira (2010, p. 78), também é "mediada por significados aprendidos ao longo do desenvolvimento". Um exemplo simples desta atenção são os barulhos fortes repentinos. Quando estamos realizando alguma atividade e um forte barulho ecoa repentinamente paramos instantaneamente para saber o que está acontecendo.

Luria (1979, p.25) explica a atenção voluntária, ou arbitrária e a divide em etapas. A primeira é aquela onde a criança não domina a linguagem e aqui a atenção fica "dividida entre duas pessoas: a mãe orienta a atenção e a criança se subordina ao seu gesto indicador e à palavra". É a mãe que aponta para determinado objeto e diz o nome deste. Luria classifica como uma "etapa exterior pela fonte e social pela natureza". Uma transformação radical acontece com a evolução da linguagem pela criança, pois esta "já é capaz de deslocar com autonomia a sua atenção, indicando esse ou aquele objeto com um gesto ou nomeando-o com a palavra correspondente". Temos, portanto, "uma nova forma de organização interior da atenção, social pela origem, mas interiormente mediada pela estrutura". Nas etapas seguintes a criança continua a desenvolver a linguagem e "criam-se estruturas intelectuais (discursivas) internas cada vez mais complexas e elásticas e a atenção do homem adquire logo os traços, convertendo-se em esquemas intelectuais internos dirigíveis que são, por si mesmos, um produto da complexa formação social dos processos psíquicos". A facilidade com que as crianças transferem a atenção de um objeto para outro nos faz muitas vezes acreditar na involuntariedade, entretanto isso se deve ao desenvolvimento dos processos de linguagem internos e intelectuais que vão se tornando complexos e automatizados (Luria, 1979, p.26).

A interação é descrita por Bilimória e Almeida (2008) como partilha, cooperação e confronto de informação, conhecimentos e posicionamentos que dinamizam a representação mental das tarefas e repercutem no controle das atividades cognitivas e metacognitivas. A mediação social decorrente da interação entre os sujeitos no processo de ensino e aprendizagem, para

Vigotsky (1998), é a base do conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) que permite entender que o nível de desenvolvimento é determinado por aspectos interativos e sociais e envolve dois processos fundamentais: a mediação e a internalização.

O espaço contido na ZDP é aquele em que se expressa a capacidade de solucionar problemas de modo independente, pois representa a distância entre os níveis de desenvolvimento real e potencial. Para Vigotsky esse é um espaço de mediação social, uma vez que com o auxílio de um companheiro mais capaz na tarefa, é possível avançar para níveis de desenvolvimento cognitivo mais complexo. O conceito da ZDP delimita a importância dos processos interacionais na aprendizagem ao demonstrar como um processo de origem social (interpessoal) – aprender por meio da mediação com aquele que é mais experiente na tarefa – transforma-se em um processo psíquico (intrapessoal) por meio da internalização que é o mecanismo responsável por essa transição, ou seja, é um processo de reconstrução interna de uma atividade externa (Salvador, 1999). O que caracteriza esse processo de desenvolvimento como essencialmente social que permite a passagem de um plano social para um plano individual são as trocas, as de experiências partilhadas, os diálogos e as colaborações entre os envolvidos (Palangana, 2001).

O objeto deste estudo são os comportamentos de autorregulação de estratégias de atenção e de interação de estudantes de cursos tecnológicos na aprendizagem de Estatística.

Método

A coleta de dados aconteceu no 2° semestre de 2010 e participaram do estudo 185 universitários de dois cursos tecnológicos de uma faculdade de Guarulhos: Logística (n = 134) e Gestão Financeira (n = 48) que concluíram a disciplina de estatística recentemente. Esses estudantes responderam questionário de perfil, teste estatístico e escala de estratégias de atenção e de interação (Oliveira e Kataoka, 2010) com 15 afirmativas, sendo 6 questões relativas à atenção e 9 questões relativas à interação. Para cada afirmativa, as possibilidades de resposta são: sempre (S), quase sempre (QS), quase nunca(QN) e nunca(N), em que será atribuída pontuação de 4 até 1 para as afirmativas positivas e de 1 até 4 para as afirmativas negativas. Dessa maneira, a pontuação total pode variar entre 15 e 60.

Foi utilizado o software SAS (Statistical analysis Software), versão 15.0, para analisar os resultados por meio de freqüência, média e desvio padrão, teste t e ANOVA (nível de significância de 5%).

Resultados e discussões

A média de idade dos participantes era de 26,4 anos (s = 7,03) que aponta para uma idade superior a de alunos de cursos regulares de graduação. A faixa etária variou de 18 a 55 anos. Para esta amostra, 60% é do gênero masculino, sendo que no curso de Logística há a predominância do gênero masculino (69,2%), enquanto que no curso de Gestão Financeira prevalece o gênero feminino (62,7%). Dos respondentes 68,1 % estavam no 2º semestre, 9,7% no 3º semestre, 15,1% no 4º semestre. Os alunos que trabalhavam representam 93,4%. Aproximadamente 17,9% dos alunos afirmaram ter feito outro curso de graduação, mas apenas 10 alunos o concluíram. Do total da amostra 17 alunos (9,4%) fizeram alguma disciplina de Estatística. Para 89,7% dos estudantes da amostra, Estatística é importante ou muito importante e 98,4% afirmaram que o professor proporcionou ambiente favorável para a interação entre os alunos.

Os alunos do curso de Logística tiveram pontuação média (44,17) na escala de atenção e interação significativamente maior que a média (41,92) dos alunos do curso de Gestão Financeira $\left(t_{(180)} = 7{,}14; p = 0{,}082\right)$.

	Afirmação	N	QN	QS	S
1	**Para as demais disciplinas do curso**, eu busco textos, informações e explicações adicionais que permitam o aprofundamento.	3,98	25,57	51,14	19,32
2	Eu busco textos, informações e explicações adicionais **sobre Estatística** que permitam o aprofundamento	21,62	47,57	23,24	7,57
3	Eu tenho boas relações com todos os colegas nas aulas de Estatística, podendo mudar de grupo.	8,20	24,04	33,33	34,43
4	Eu sempre expresso minha opinião para o professor (a) de Estatística, inclusive faço perguntas	9,78	34,24	34,78	21,20
5	Eu preparo os materiais, os trabalhos, leio os textos/materiais **de Estatística** com antecedência e participo das aulas de Estatística	15,68	40,00	34,05	10,27
6	Eu providencio os textos/materiais **de Estatística** e a leitura/estudo dos mesmos nos dias que antecedem a prova, ou no mesmo dia	12,50	30,43	42,93	14,13
7	**Para as demais disciplinas do curso**, eu preparo os materiais, os trabalhos, leio os textos/materiais com antecedência e participo das aulas	4,40	41,76	40,66	13,19
8	Eu tenho um grupo de colegas de sala de aula na disciplina de Estatística.	7,03	11,35	20,00	61,62
9	**Para as demais disciplinas do curso,** eu providencio os textos/materiais e a leitura/estudo dos mesmos nos	9,89	32,97	45,60	11,54

	dias que antecedem a prova, ou no mesmo dia				
10	Eu só respondo o que o (a) professor (a) de Estatística pergunta.	13,66	21,86	44,81	19,67
11	Eu faço perguntas para o professor (a) de Estatística.	9,19	35,14	32,97	22,70
12	Eu pergunto, peço ajuda para o professor (a) de Estatística, quando não entendo	2,73	10,38	38,25	48,63
13	Eu ofereço ajuda (explicação) ao (s) colega (s) nas aulas de Estatística quando ele (s) não entende (m).	6,49	10,81	46,49	36,22
14	Eu tenho **apenas** um colega nas aulas de Estatística com quem me relaciono predominantemente.	54,59	16,76	12,43	16,22
15	Eu peço ajuda ao (s) colega (s) nas aulas de Estatística quando preciso de explicação.	1,62	15,68	42,16	40,54

Quadro 1. Distribuição percentual dos participantes em cada item da escala de Atenção e de Interação

Os resultados apresentados no Quadro 1 sobre as estratégias de atenção revelam que os estudantes mantêm os mesmo comportamentos autorregulatórios como, sempre ou quase sempre, preparar materiais, trabalhos; fazer leituras com antecedência; participar das aulas de Estatística (54,32%) e das demais disciplinas (53,85%), no entanto, quando a estratégia envolve o aprofundamento do conteúdo de Estatística, é notável que essa busca de textos, informações e explicações ocorre mais fortemente para as demais disciplinas do curso (70,56%) do que para Estatística (30,81%).

No que se refere aos dados relativos às estratégias de interação em sala de aula de Estatística, é interessante ressaltar que a interação professor-aluno apresenta-se bastante intensa, porém, o comportamento do estudante mostra-se mais interativo quando a iniciativa parte do professor, ou seja, 64,48% só respondem o que o professor pergunta. Mas quando se trata de fazer perguntas para o professor, 44,33% afirmam que nunca ou quase nunca o fazem. Além disso, 44,02% afirmam que nunca ou quase nunca expressam a própria opinião para o professor de Estatística. Esses índices caem para 13,11% que nunca ou quase nunca perguntam ou pedem ajuda para o professor de Estatística quando não entendem o conteúdo. É possível considerar que para os participantes deste estudo a interação é motivada basicamente pela dificuldade na aprendizagem.

Considerações finais

Os resultados relativos às estratégias de interação na aprendizagem de Estatística de estudantes de cursos tecnológicos do município de Guarulhos, São Paulo, indicam que a forma que a disciplina de Estatística é abordada parece motivar de forma moderada a autorregulação da aprendizagem, os estudantes mobilizam-se para aprender o conteúdo, mas, no que se refere ao aprofundamento do conhecimento em estatística, a mobilização é maior para as demais disciplinas do curso.

A análise geral dos dados relativos às estratégias de interação na aprendizagem de Estatística mostra que a diretividade do comportamento autorregulatório está relacionada à ação do professor ou ao interesse objetivo e pontual de se obter ajuda na aprendizagem. Os processos interativos não parecem ser a prática contínua de modos de relacionamento marcados pelo diálogo próprio dos processos de mediação. Isso pode ser um indício de um caráter tecnicista na relação professor-aluno, própria de metodologias tradicionais de ensino.

Por fim, considera-se que os estudos sobre as estratégias de autorregulação da aprendizagem de Estatística, avaliando os resultados da escala apresentada nesse trabalho, podem auxiliar os professores dessa disciplina a refletir sobre ações pedagógicas que estimulem seus alunos no desenvolvimento dessas estratégias.

Referências bibliográficas

Bilimória, H. e Almeida, L. S. (2008). *Aprendizagem auto-regulada: fundamentos e organização do Programa SABER***.** *Psicol. esc. educ.* [online]. jun. 2008, [citado 12 Maio 2009], p.13-22. Disponível na http://pepsic.bvs-psi.org.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1413-55720080001000002&lng=pt&nrm=iso>.

Cazorla, I. e Santana, E. (2010). *Do tratamento da informação ao letramento estatístico*. Bahia, Via Litterarum.

Der Veer, R. V. e Valsiner J. (1996). *Vygotsky: uma síntese*. São Paulo: Loyola.

Luria, A. R. (1979). *Curso de Psicologia Geral*. Rio de Janeiro: Editora Civilização Brasileira S.A., vol. 3.

Oliveira, M. K. (2010). *Vigotsky: Aprendizado e desenvolvimento: um processo sócio-histórico*. São Paulo, Scipione.

Oliveira, M.H.P. e Kataoka, V.Y. (2010) *Processos de autorregulação da aprendizagem de estatística e os níveis de letramento estatístico de estudantes de ensino médio e de ensino superior*. Projeto de Pesquisa não publicado, Universidade Bandeirante de São Paulo:São Paulo.

Palangana, I. C. (2001). *Desenvolvimento e Aprendizagem em Piaget e Vygotsky*. 4ªed. São Paulo: Summus.

Rosário, P., Peréz, J. C. N. e Gonzáles-Pienda, J. A. (2004). Histórias que enseñan a estudiar y aprender: una experiência en la enseñanza obligatoria portuguesa. *Revista Eletrônica de Investigação Psicoeducativa, 2* (1), 131-144.

Salvador, C.C. (1999). Psicologia da educação. Porto Alegre: Artes Médicas.

Silva, A. L., Duarte, A., Simão, M.A. (2004). *Aprendizagem auto-regulada pelo estudante*. Porto: Porto Editora.

Soares, M. B. (2004). *Letramento e Alfabetização: as muitas facetas.* Revista Brasileira de Educação, 25(1), 1-17, Acesso em 04 agosto de 2011 de http://www.scielo.br/pdf?script=sci_issuetoc&pid=1413-247820040001&pt&nrm=iso

Watson, J. M. (2003). *Statistical Literacy at the School Level: What should students know and do?* In: *Proceedings of the 54º Bulletin of the International Statistical Institute*, Berlim. Berlim: ISI, 1-4.

Vigotsky, L. S. (1998). *A formação social da mente*. 6ª ed. São Paulo: Martins Fontes.

Zimmerman, B. J. (1986). *Development of self-regulated learning: which are the key subprocesses?* Contemporary Educational Psychology, 11, 307-313.

ESTRATÉGIAS DE INTERAÇÃO NA APRENDIZAGEM DE ESTATÍSTICA DE ALUNOS DE CURSOS TECNOLÓGICOS DE SÃO PAULO

[1]Maria Helena Palma de Oliveira; [2]Verônica Yumi Kataoka; [3]Felipe Franco Gabriel
[1,2,3]Universida de Bandeirante de São Paulo UNIBAN. Brasil
[1]mhelenapalma@gmail.com; [2]veronicayumi@terra.com.br; [3]felipe.gabriel@gmail.com

Resumen: El estudio analiza y describe estrategias de interacción en el aprendizaje de Estadística de 165 alumnos de seis cursos de tecnología de una Universidad privada del Gran San Pablo. Estos estudiantes respondieron un cuestionario de perfil y una escala de estrategias de interacción. El enfoque sociohistórico considera los procesos de interacción como confrontación de conocimientos, posiciones e informaciones que involucran comportamientos de cooperación y que movilizan el control de las actividades cognitivas y metacognitivas. Los resultados muestran que las estrategias de interacción en la autorregulación del aprendizaje estadístico son evidentes en el contexto estudiado, sin embargo son más frecuentes en las prácticas entre estudiantes, aunque los estudiantes consultan al profesor prefieren consultarse entre sí.

Palabras clave: Autorregulación, estratégias de interacción, aprendizaje de estadística.

Abstract: This study describes and analyses strategies of interaction in the learning of statistics amongst 165 students from six technological courses of a private university in Greater São Paulo. These students responded to a questionnaire about their profile and completed a scale to measure interaction strategies. The socio-historical approach considers processes of interaction as confrontations of knowledge, position and information which involve cooperation behaviours and which mobilise the control of cognitive and metacognitive activities. The results show that interaction strategies in the self-regulation of statistics learning are evident in the context studies, however they most frequently occur as practices in student-student relations, since, in the classroom, in the processes of learning, although the student ask their teachers questions, they look, preferentially, to other colleagues in the class and not to the teacher.

Key words: Self-regulation, strategies of interaction, statistics learning.

Introdução

Este estudo tem como objetivo descrever e analisar as estratégias de interação na aprendizagem de Estatística de estudantes de cursos tecnológicos de uma universidade privada de São Paulo. O estudo faz parte de um projeto mais amplo que vem sendo desenvolvido desde 2008 (Oliveira & Silva, 2008) e que se encontra em 2ª. fase (Oliveira & Kataoka, 2010) cujo objetivo é verificar os processos de autorregulação da aprendizagem de estatística de estudantes de ensino médio e de ensino superior de São Paulo e da grande São Paulo e sua relação com os níveis de letramento estatístico proposto por Watson e Callingham (2003).

O aprendizado de Estatística torna-se fundamental na construção da cidadania crítica, pois permite o entendimento de fenômenos e tendências de relevância social e pessoal, taxas de criminalidade, crescimento populacional, produção industrial, aproveitamento educacional (Gal, 2002).

A Estatística é utilizada amplamente em várias situações na sociedade atual, como em pesquisas eleitorais, cálculo de indicadores econômicos e financeiros.. O conhecimento estatístico contribui tanto para a tomada de decisões pessoais e sociais como também auxilia em situações profissionais que necessitem desse conhecimento (Wallman, 1993).

Os alunos que ingressam no curso superior, segundo Cordani (2001), geralmente possuem conhecimento insuficiente, ou até inexistentes, de temas básicos derivados da aprendizagem de Estatística na escola, como probabilidade, variabilidade, raciocínio aleatório. Esse fato é agravado por problemas de entendimento da linguagem, o que pode trazer empecilhos para uma boa desenvoltura na vida acadêmica e até mesmo para a aprendizagem de temas mais complexos que necessitem de um aprendizado básico de Estatística.

Vigotski (1995) considera a autorregulação da aprendizagem como uma função metacognitiva, na qual o estudante utiliza de estratégias de maneira intencional e consciente, sendo o responsável pelo seu próprio processo de aprendizagem.

O estudante autorregulado utiliza-se de estratégias de aprendizagem que, segundo Rosário; Perez; Gonzáles-Pienda (2004), são ações deliberadas para alcançar objetivos específicos; para isso, faz uso de diversos instrumentos culturais que auxiliam o processo. Em um sentindo mais amplo, as estratégias de aprendizagem são procedimentos adotados pelos estudantes para a realização de uma tarefa de aprendizagem (Silva e Sá, 1993).

Dentre as estratégias que o aluno pode utilizar estão as estratégias de interação que, segundo a abordagem sociohistórica, é descrita como o confrontação de conhecimentos, posicionamentos e informações e processos de cooperação que dinamizam a representação mental das tarefas, que influi no controle das atividades cognitivas e metacognitivas (Bilimória e Almeida, 2008). A mediação social e a internalização, são dois fatores destacados por Vigotsky (1998) no processo de aprendizagem como a base do conceito Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) para a qual o nível de desenvolvimento é determinado por aspectos interativos e sociais (Salvador, 1999). Na ZDP, a capacidade de solucionar problemas de modo independente determina a distância entre os níveis de desenvolvimento real e potencial. Sendo assim, a solução de um problema ocorre na mediação social, com o auxílio de um companheiro mais capaz na tarefa – o professor ou um colega. O conceito da ZDP explicita a importância da interação no desenvolvimento cognitivo, pois demonstra como um processo de origem social (interpessoal) transforma-se em um processo psíquico (intrapessoal). A passagem de um processo social para um processo individual ocorre por meio de trocas, que permitem o desenvolvimento de experiências partilhadas, de diálogos e de colaborações entre os envolvidos, tornando-se um desenvolvimento essencialmente social (Palangana, 2001).

O processo interacional que ocorre no contexto de sala de aula possui uma função motivadora, sendo que a qualidade desse processo influencia a qualidade do aprendizado, pois, segundo Almeida & Antunes (2005), o processo de aprendizado interliga-se aos aspectos cognitivos e afetivos. Para Vigotski (1995), a motivação gera o pensamento, porque subjacente a cada pensamento há uma tendência afetivo-volitiva. Dessa maneira, a interação na sala de aula é consubstancial à aprendizagem (Radford, 2006).

Dentro dessa perspectiva, destaca-se o professor como motivador na autorregulação da aprendizagem, independentemente do conteúdo a ser ensinado. Boruchovitch (1999) aponta que os educadores têm reconhecido cada vez mais a importância das estratégias de aprendizagem tanto para a uma aprendizagem efetiva quanto para o desenvolvimento da autorregulação.

Estudos recentes sobre a autorregulação de estratégias de aprendizagem de Estatística com estudantes de cursos tecnológicos de nível superior vêm mostrando que os processos autorregulatórios são mais evidentes quando envolvem atividades orientadas pelos professores (Oliveira, Gabriel, Pestana, 2011), (Oliveira, Kataoka, Silva, Silva, Silva, 2009). Esses resultados, mesmo que revelem a diretividade do professor no processo, revelam também características da qualidade da interação professor-aluno.

Método

Participaram da pesquisa 165 universitários de seis cursos tecnológicos (Gestão de Pessoas, Gestão de Recursos Humanos, Logística Empresarial, Tecnologia em Logística, Gestão nas Organizações) de uma universidade privada instalada na Grande São Paulo que concluíram uma disciplina de Estatística em 2009. A coleta aconteceu no 2º semestre de 2009. Os estudantes responderam um questionário e uma escala de estratégias de interação. Com a aplicação do questionário, composto de 21 itens, foi possível traçar o perfil do estudante, abordando sua trajetória escolar, a importância, o sentimento e a idéia sobre Estatística bem como sua experiência com essa disciplina; além de questões a respeito da interação entre estudantes e professor-estudantes. A escala foi elaborada contendo 9 afirmativas, sendo 7 positivas e 2 negativas. Para cada afirmativa, as possibilidades de resposta eram: *sempre*, *quase sempre*, *quase nunca* e *nunca*, em que foram atribuídas pontuações de 4 a 1 para as afirmativas positivas e de 1 a 4 para as negativas. Por exemplo, para a resposta *sempre*, quando a afirmativa era positiva, foram atribuídos 4 pontos e, quando negativa, apenas 1 ponto. Dessa forma, a pontuação total poderia variar de 9 a 36 pontos.

Avaliaram-se qualitativamente os itens da escala levando em consideração as possibilidades de respostas. Realizou-se também uma análise quantitativa da pontuação da escala geral de acordo com as variáveis levantadas no questionário, sendo utilizados testes F (ANOVA), com exceção das variáveis: gênero, tempo de estudo e tipo de curso de ensino médio, em que foi adotado o teste t. Quando o efeito da variável estudada foi considerado significativo, pelo teste F, as médias das suas categorias foram comparadas pelo teste Tukey (Hair, Anderson, Tathan, Black, 2005), com nível nominal de significância de 5%.

Resultados e discussões

Os participantes da pesquisa tinham idade média de 28,5 anos (desvio padrão = 7,2). Aproximadamente, metade da amostra (54%) é do gênero masculino. No entanto, quando avaliamos separadamente por curso, há predominância do gênero masculino no curso de Logística e há predominância do feminino no curso de Gestão de Pessoas.

Aproximadamente 20% dos alunos (44) relataram já terem feito outros cursos de graduação, mas apenas 9 alunos concluíram-no. E cursar uma disciplina Estatística foi experimentado pela primeira vez no curso tecnológico que faziam, haja vista que apenas 8% já a tinham realizado em outros cursos.

Não houve diferença significativa para a pontuação na escala geral quando comparada por: curso [$F_{(5,216)}$ =2,19, p=0,056], gênero [$t_{(219)}$ = 1,77, p=0,078], sentimento [$F_{(3,209)}$ =2,48, p=0,062] e idéia em relação à estatística [$F_{(3,210)}$ =2,65 , p=0,050].

) =2,65 , p=0,050].

Os dados referentes à pontuação média na escala de estratégias de atenção e de interação em relação a características de perfil do estudante de cursos tecnológicos podem ser observados na Tabela 1.

Os dados da Tabela 1 evidenciam a importancia da motivação e do valor que o estudante atribuí ao curso como fatores determinantes do uso de estratégias de atenção e de interação na aprendizagem de estatística. Esses resultados vêm ao encontro da afirmação de Vigotsky (1995) de que na base do pensamento (e da ação) há que se considerar sempre a base afetivo-volitiva.

Tabela 1 – Análise de variância da pontuação da escala por tipo de ensino médio cursado, motivação para a realização do curso tecnológico e importância atribuída à Estatística.

Variável	n	F	P	Interpretação dos resultados
Cursou o Ensino Médio	213	3,89	0,001	Os alunos que fizeram o ensino médio técnico tiveram pontuação média (46,1) na escala de atenção e interação

				significativamente maior que os alunos do supletivo (41,7)
Motivação para realizar o curso	217	3,67	0,007	Os alunos que não sabiam que curso fazer tiveram pontuação média (39,2) significativamente menor que os alunos fizeram o que queriam (45,7), bem como os que levaram em consideração o mercado de trabalho (44,5)
Importância atribuída à Estatística	222	3,64	0,014	Os alunos que atribuíram pouca importância à Estatística tiveram pontuação média (41,8) menor que os alunos que atribuíram muita importância (45,1)

A Tabela 2 apresenta as questões da escala de estratégias de interação na aprendizagem de estatística aplicada e a distribuição percentual dos participantes em cada item da escala.

Tabela 2. Distribuição da freqüência percentual dos participantes em cada item da escala de estratégias de interação

Questão	Afirmativa	Sempre	Quase sempre	Quase nunca	Nunca
1	Eu pergunto, peço ajuda para o professor (a) de Estatística, quando não entendo	46,3	35,0	13,6	5,1
2	Eu sempre expresso minha opinião para o professor (a) de Estatística, inclusive faço perguntas	28,8	34,5	28,8	7,9
3	Eu só respondo o que o (a) professor (a) de Estatística pergunta.	14,7	45,2	28,8	11,3
4	Eu faço perguntas para o professor (a) de Estatística.	26,6	37,3	26,6	9,6
5	Eu tenho um grupo de colegas de sala de aula na disciplina de Estatística.	39,5	32,2	16,9	11,3
6	Eu tenho apenas um colega nas aulas de Estatística com quem me relaciono predominantemente.	9,6	27,7	24,3	38,4
7	Eu tenho boas relações com todos os colegas nas aulas de Estatística, podendo mudar de grupo.	14,1	23,2	34,5	28,2
8	Eu peço ajuda ao (s) colega (s) nas aulas de Estatística quando preciso de explicação.	45,2	40,1	11,9	2,8
9	Eu ofereço ajuda (explicação) ao (s) colega (s) nas aulas de Estatística quando ele (s) não entende (m).	42,4	35,6	14,1	7,9

Em relação aos processos interativos professor-estudante, a análise dos resultados da escala mostrou que 59,9% dos estudantes restringem-se a responder aquilo que o professor de Estatística pergunta. Além disso, 36,7% dos estudantes nunca ou quase nunca expressam a própria opinião ou fazem perguntas para o professor.

No que se refere à interação entre os alunos na sala de aula de Estatística, a análise dos resultados evidenciou que 85,3% dos estudantes sempre ou quase sempre pedem ajuda para os colegas de classe quando precisam de explicação; assim como 78,0% dos estudantes oferecem ajuda para os colegas na explicação de conteúdo de Estatística.

Em relação aos comportamentos que envolvem à diretividade do professor na mediação da aprendizagem de Estatística, evidencia-se que 81,3% dos alunos sempre ou quase sempre tiram dúvidas com o professor sobre algo que não entendem e 59,9% dos alunos só respondem o que o professor pede.

Destaca-se também que 63,3% dos alunos expressam sua opinião em contexto de sala de aula de Estatística e 63,9%, fazem perguntas ao professor, o que demonstra autonomia do estudante nos processos interativos que envolvem o professor de Estatística.

Os modos de interação entre os estudantes no contexto de sala de aula de Estatística expressa-se pelos 71,7% dos estudantes que sempre ou quase sempre tem um grupo de colegas em sala de aula e pelos 37,3% que afirmam que sempre ou quase sempre, relacionam-se predominantemente com apenas um colega. Outro dado importante nesse aspecto é que 62,7% responderam que nunca ou quase nunca se relacionam com todos os colegas da sala ou mudam de grupo.

Uma análise mais pormenorizada sobre esses dados revela que os processos interativos nas aulas de Estatística são por um lado são bastante significativos, no entanto, a análise mais profunda mostra que grande parte dos alunos restringe sua interação a um pequeno grupo de colegas, o que pode configurar certa dificuldade em termos de relacionamentos mais amplos. Nesse caso, a relativa dificuldade dos alunos na autorregulação de estratégias de interação pode estar relacionada ao próprio perfil do aluno. É preciso considerar, no caso específico desse estudo, que os alunos envolvidos cursavam o 1° ano letivo de cursos tecnológicos em referência e ainda estavam em processo inicial da vivência universitária. Ribeiro (2007), afirma que as necessidades que a graduação impõe ao longo de uma vivência acadêmica e as exigências que requerem altos níveis de autonomia do estudante fazem com que o mesmo mude seu padrão de estratégias de autorregulação, passando assim a uma menor incidência de comportamentos individuais constatada nos primeiros anos e a uma maior elaboração de comportamentos autorregulatórios ao longo dos anos.

Estudo realizado sobre esse tema comparou os comportamentos autorregulatórios de estudantes do 3° semestre e de estudantes do 1° semestre de um curso tecnológicos (Pestana, Gabriel, Oliveira, Kataoka, 2010) e trouxe dados que ressaltam que os estudantes do 1°

semestre apresentam características mais individualistas em relação à aprendizagem do que os do 3° semestre, demonstrando que os estudantes do 1° semestre ainda não tinham desenvolvido completamente estratégias de interação com o professor e com os colegas.

Dados da pesquisa atual mostram que interação aluno-aluno ocorre predominantemente em grupo, sendo que poucos estudantes relacionam-se somente com um colega e preferencialmente mantém-se nos mesmos grupos sem mudar constantemente de grupo. Esta característica no comportamento dos estudantes pode também estar relacionada ao fato de serem estudantes em início de curso universitário, conforme já foi exposto anteriormente. Nesse sentido, embora utilizem-se de estratégias de interação na autorregulação da aprendizagem de estatística o fazem dentro de limites, interagindo mais exclusivamente dentro de grupo específico.

Considerações finais

A análise das médias obtidas na escala de estratégias de interação na autorregulação da aprendizagem de Estatística de estudantes de cursos tecnológicos evidenciou a importância dos aspectos afetivos presentes na motivação e no valor que o estudante atribui ao curso como fatores determinantes da autorregulação da aprendizagem.

Os resultados demonstram que os processos interacionais estão evidentes no contexto estudado, porém estão mais desenvolvidos na relação estudante-estudante, pois, quando o estudante possui dúvidas sobre a disciplina, este procura preferencialmente, em contexto de sala de aula, outro colega de classe e não o professor. Dois fatores são destacados na explicação desses resultados: problemas na qualidade da interação professor-aluno que podem impedir a abertura necessária para o estudante usufruir de um processo de interação eficiente com o professor; hábitos arraigados na vivência discente devido a práticas educativas centralizadoras e impeditivas de um processo dialógico no contexto de aprendizagem.

O processo interacional mostra-se presente no contexto de sala de aula abordado, porém devido ao fato de os estudantes estarem no começo da vida acadêmica, esse processo expressa-se de maneira inicial: não há a presença de comportamentos autorregulatórios mais aprofundados e complexos. Esse evento pode ser elaborado e construído de uma maneira mais efetiva por meio da regulação do professor, que pode exercer uma diretividade no processo de aprendizagem dos alunos; além disso, as estratégias de autorregulação da aprendizagem são construídas e aprendidas em um contexto social, do qual o professor faz parte e no qual pode desenvolver e estimular nos estudantes o exercício e a utilização desse tipo de comportamento. Ou seja, os estudantes podem elaborar no contexto de sala de aula, um domínio de estratégias de interação e uma maior autonomia em seu processo de aprendizagem de Estatística.

Referências bibliográficas

Almeida, S.H.V.; Antunes, M.M. (2005). A teoria vigotskiana sobre memória: possíveis implicações para a educação. In: *ANPED 28* Reunião Anual/Anais, v.1. Caxambu. MG. Recuperado em 10 setembro, 2009, disponível em <www.anped.org.br/reunioes/28/textos/gt20/gt20295int.rtf>

Bilimória, H.; Almeida, L.S. (2008) Aprendizagem auto-regulada: fundamentos e organização do Programa SABER**.** *Psicol. esc. educ.* [online]. Recuperado em 15 de setembro de 2009, disponível em <http://pepsic.bvs-psi.org.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1413-

55720080001000028lng=pt&nrm=iso>. ISSN 1413-8557.

Boruchovitch, E. (1999). Estratégias de aprendizagem e desempenho escolar: considerações para a prática educacional. *Psicologia: Reflexão e Crítica*, *12 (2)*, 361-376.

Cordani, L.K. (2001). *Ensino de Estatística na Universidade e a controvérsia sobre os fundamentos da inferência.* Tese de Doutorado não publicada. Universidade do Estado de São Paulo, São Paulo, Brasil.

Gal, I. (2002). *Adult's* statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review, v. 70 (1),* 1-25.

Hair Jr. J.F.; Anderson, R.E.; Tathan, R.L.; Black, W.C. (2005). *Análise Multivariada de dados*. Porto Alegre: Bookman.

Oliveira, M.H.P.; Gabriel, F.F.; Pestana, C.T.P. (2011). Validação de uma escala de autorregulação de estratégias de memória na aprendizagem de estatística de estudantes

Universitários. In: *XIII Conferencia Interamericana de Educação Matemática. XIII CIAEM-IACME.* Recife: Universidade Federal de Pernambuco, Brasil.

Oliveira, M.H.P.; Kataoka, V.Y. (2010). *Processos de autorregulação da aprendizagem de estatística e os níveis de letramento estatístico de estudantes de ensino médio e de ensino superior.* Projeto de Pesquisa não publicado, Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo: UNIBAN, Brasil.

Oliveira, M.H.P.; Kataoka, V.Y.; Silva, C.B.; Silva, A.M.G.; Silva, C.A. (2009). A autorregulação de estratégias de memória em estudantes universitários de cursos tecnológicos de São

Paulo. In: *V* Encontro Mineiro de Educação Matemática. V EMEM. *U*niversidade Federal de *Lavras* (UFLA). *Lavras, MG, Brasil.*

Oliveira, M.H.P.; Silva, C.B. (2008), *A auto-regulação da aprendizagem de estatística e sua relação com o nível de letramento estatístico: um estudo com estudantes universitários de cursos tecnológicos da cidade de São Paulo.* Projeto de Pesquisa não publicado, Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo: UNIBAN, Brasil.

Palangana; I. C. (2001) *Desenvolvimento e Aprendizagem em Piaget e Vygotsky*. São Paulo: Summus.

Pestana, C.T.P.; Gabriel, F.F.; Oliveira, M.H.P.; Kataoka, V.Y. (2010). Estratégias de memória no processo de autorregulação da aprendizagem de estatística: um estudo com alunos de cursos tecnológicos de nível superior. In: *V Congresso Internacional de Ensino da Matemática. CIEM, Vol. 1*. Canoas: Universidade Luterana do Brasil.

Radford, L. (2006). Elementos de uma teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Número Especial,* 113-139.

Ribeiro, Y.S. (2007). Auto-regulação: diferenças em função do ano e área em alunos universitários. *Psicologia: teoria e Pesquisa Vol. 23(4),* 443-448.

Rosário, P.; Perez, J. C. N.; Gonzáles-Pienda; J. A. (2004). Histórias que enseñan a estudiar y aprender: una experiência en la enseñanza obligatoria portuguesa. *Revista Eletrônica de Investigación Psicoeducativa Vol. 2 (1),* 131-144.

Salvador, C.C. et all. (1999). *Psicologia da educação.* Porto Alegre: Artes Médicas.

Silva, A. L.; Sá, I. (1993). *Saber estudar e estudar para saber*. Porto: Porto Editora.

Vigotski, L. S. (1995). Historia del desarrollo de las funciones psíquicas superiores. In: *Obras escogidas*, *tomo III* (pp 11-340). Madrid: Visor/MEC.

Vigotsky, L.S. (1998). *A formação social da mente*. São Paulo: Martins Fontes.

Walman, K. (1993). Enhancing Statistical Literacy: Enriching Our Society. *En: Journal of the American Statistical Association Vol.88*, 421

Watson, J.; Callingham, R. (2003). Statistical Literacy: a complex hierarchical construct. *Statistical Education Reasearch Journal, 2 (2)*, 3-46.

REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN EN AMBIENTE EXCEL: UN ESTUDIO DE CASO

Alicia López-Betancourt, B. Javier Espinoza de los Monteros D.
Universidad Juárez del Estado de Durango. México.
ablopez@ujed.mx

Resumen: El presente artículo muestra parte de la investigación al diseñar y explorar cinco Secuencias Didácticas (SD) para trabajar el concepto de función en ambiente *Excel*. Las SD se exploraron en tres facultades de la Universidad Juárez del Estado de Durango. El propósito se centró en abordar las diferentes representaciones semióticas del concepto de función así como la articulación de éstas a través de la resolución de problemas. Los resultados muestran que los estudiantes trabajaron la representación tabular y obtienen datos específicos para el problema a solucionar. Lo cual les apoya para conjeturar y generalizar para acceder a la representación algebraica del problema.

Palabras clave: Función, *excel*, representación, semiótica.

Abstract: This article presents part of the investigation done for the design and exploration of five didactic sequences (DS). These five didactic sequences work to include the concept of function within the *Excel* environment. The incorporation of the sequences will occur within three of the faculties in the Universidad Juarez del Estado de Durango. The main purpose was approaching different semiotic representations from the concept of function. As well as the articulation of these through problem solving, the results demonstrate that the students working the tabular form of representation are able to obtain specific data for the problem: the problem that they need to solve. This helps them conjecture and generalize for them to access the problem through algebraic representation.

Key words: Function, *excel*, representation, semiotic.

Antecedentes

En el semestre agosto-diciembre del 2009, el Cuerpo Académico (CA) de Matemática Educativa aplicó una encuesta en las Facultades de Ciencias Forestales (FCF), Ciencias Químicas (FCQ) y Matemáticas (MAT) de la Universidad Juárez del Estado de Durango. Esta encuesta tuvo como objetivo conocer las percepciones de los estudiantes de los conceptos de cálculo diferencial en estudiantes del primer semestre.

A manera de ejemplo de los resultados obtenidos con respecto al concepto de función. Se les proporcionaron cinco gráficas de funciones y debían relacionarlas con sus expresiones algebraicas. Los porcentajes para asociaciones incorrectas fueron de 32% a 50%, mientras que para las correctas fueron del 20% al 37%. En las cinco asociaciones el 30% no contestó.

Como una propuesta para atender las deficiencias detectadas en ese y otros ejercicios, el CA de Matemática Educativa formuló desarrollar el proyecto: “Representaciones semióticas del concepto de función en ambiente *Excel*”. Para esto se diseñaron cinco secuencias didácticas (SD) y se tomó como base los fundamentos teóricos que se presentan enseguida.

Fundamentación Teórica

Para (Duval, 1993) las representaciones semióticas son fundamentales en la actividad matemática para la aprehensión de conceptos. En este sentido un objeto matemático a través de sus representaciones semióticas y la interacción de cada una de ellas pueden permitir la aprehensión del objeto matemático. Ahora bien, el desarrollo de la tecnología ha permitido la construcción de diferentes representaciones de los objetos matemáticos en ambientes interactivos, dinámicos y accesibles hacia los alumnos.

Por su parte (Hitt, 2003b) señala el escaso uso por parte de los estudiantes de los apoyos visuales para la resolución de problemas matemáticos y la escasa articulación de las diferentes representaciones de los conceptos. Esta escasa articulación se debe en gran medida, a que en general, los profesores no enseñamos a los estudiantes a que las incorporen en la resolución de ejercicios y problemas. También (Hitt, 1995) muestra las dificultades en las representaciones gráficas en problemas en contexto. (Cuevas, 2009) por su parte enfatiza la importancia de acercar a los estudiantes a los conceptos a través de la solución de problemas.

Las secuencias didácticas que se diseñaron incluyen problemas en contexto y se apoyan en los referentes teóricos de (Hitt, 1996, 2002 y 2003a) y se tomó la postura de (Hitt, 2010) en cuanto a las categorías de aprendizaje en acuerdo a la teoría de (Duval, 1993).

Se presentan las dos primeras categorías: "Categoría A: los alumnos tienen ideas imprecisas acerca de un concepto, mezcla incoherente de diferentes representaciones; Categoría B: reconocer los elementos de un sistema semiótico de representación en relación a un objeto matemático dado o sobre un concepto" (Hitt, 2010, p.2).

Se tomó a (Ruiz, 2008) para la definición de SD y con base en ésta se definieron los elementos para cada una de las SD. Estos fueron: tecnología a utilizar, expectativa de aprendizaje, conocimientos previos de la tecnología. Se diseñaron cinco secuencias didácticas (Ver figura 1).

Objetivo

El objetivo de la investigación se centró en: diseñar, explorar y evaluar secuencias didácticas con problemas en contexto y en ambiente *Excel* para trabajar el concepto de función con diferentes representaciones, realizar conversiones entre ellas así como su articulación.

Por cuestiones de espacio en este documento se describen y analizan los resultados correspondientes a la SD1: Abordar de forma intuitiva el concepto de función a través de problemas.

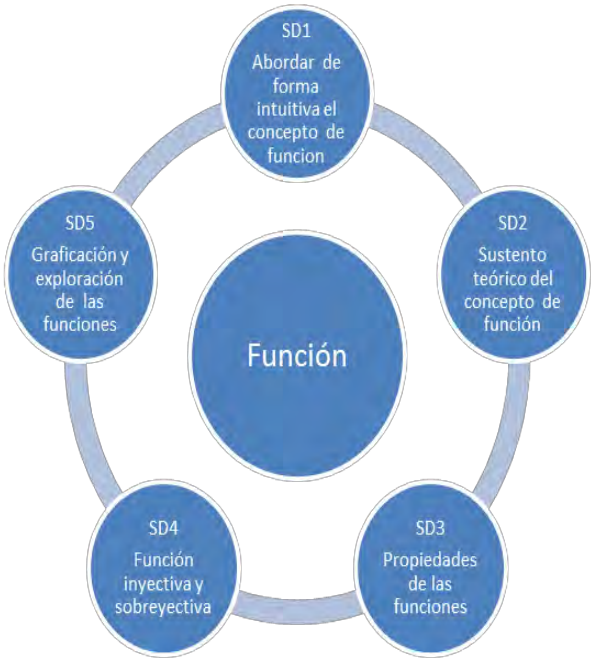


Figura 1. Secuencias didácticas para el concepto de función

Método

Para el diseño de las secuencias didácticas se trabajaron colaborativamente tres profesores y tres tesistas. Se tuvieron reuniones durante cuatro semanas en las que se revisó bibliografía, se analizó cómo estructurar y diseñar las diferentes SD.

Se estableció trabajar en forma colaborativa en las tres facultades integrándose equipos aunque cabe señalar que estos variaron en el número de integrantes, por ejemplo en MAT fueron tres equipos con dos integrantes, en FCQ tres equipos con cinco integrantes y en FCF seis equipos con cuatro integrantes.

Para la gestión se acudió tanto a la FCF y FCQ se les explicó en qué consistiría la estrategia con las cinco SD. Posteriormente se establecieron las fechas para la exploración en mayo del 2010.

Se inició la exploración con el examen pre-test, posteriormente se les impartió un taller de *Excel* para que los estudiantes tuvieran los conocimientos que debían trabajar en las SD. Al término de las secuencias didácticas se aplicó el examen post-test. Al final de la exploración se les entregó a los estudiantes una evaluación para las secuencias didácticas.

Para el análisis se trabajó con un modelo mixto (Creswell y Plano, 2007). El aspecto cualitativo incluyó las hojas de trabajo por parte de los estudiantes de las SD. El análisis de los datos se realizó a través de las representaciones de los estudiantes registrados en las hojas de trabajo de las SD. El presente reporte se enfoca en el aspecto cualitativo para el análisis de la SD1.

Resultados

Con el propósito de acercar al lector a la dinámica de la secuencias didácticas se presenta un fragmento de la SD1 correspondiente a FCF y FCQ de modo que facilite la explicación de los resultados.

SD1: Modelación de un problema en contexto

Tecnología a utilizar: Excel.

Expectativa de aprendizaje: Modelar algebraicamente una situación problémica.

Conocimientos previos de la tecnología: Introducir valores y fórmulas en forma de tabla y graficar.

Conocimientos matemáticos previos: Área, volumen, despejar variables en una ecuación y calcular el valor de una variable.

1. Contexto: Esta actividad será desarrollada por alumnos del primer semestre de la Facultad de Ciencias Químicas de la UJED. Aunque también puede ser aplicada en cualquier otra licenciatura que incluya en su currículo un curso de cálculo diferencial.

2. Habilidades y competencias a desarrollar: Ésta actividad permitirá analizar una situación problémica mediante la tabulación de datos y graficación en *Excel*, particularizar, generalizar y modelar algebraicamente dicho problema.

3. Desarrollo de la Actividad:

Instrucciones:

El pez caracol es una especie en peligro de extinción debido a la contaminación química en los ríos de los montes Apalaches. Los conteos aleatorios de los peces en los últimos años muestran disminución en un 10% de la población cada año. Supongamos que la población de peces para el año 2000 es de 200,000.

P1. ¿Cuál es la población de peces en 2001? ________¿ en 2003?_________

¿Y en 2005?________¿Y en 2008?_________

P2. Escribe el procedimiento que usaste para calcular la cantidad de peces en 2001, 2003, 2005 y 2008

2001:	**2003:**
2005:	**2008:**

A1. Realiza una tabla en *Excel* que incluya al menos 120 años con sus valores respectivos a la población de peces y grafícala.

A2. Verifica si los valores que obtuviste en la pregunta 1 coinciden con los de la tabla. En caso de que no coincidan revisa tanto el procedimiento que hiciste para responder la pregunta 1 como la tabla que obtuviste, para detectar el error y corregirlo.

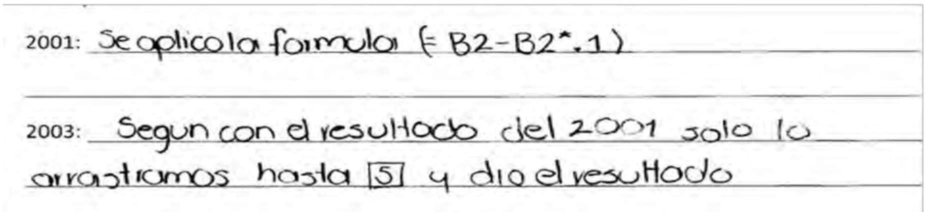
P3. ¿A los cuántos meses la población de peces es 19695.418?___________ ¿Y a los cuántos meses el valor de la población es 1.3503?___________

P4. ¿Llegará un momento en el que la población de peces sea 0?__________

¿Por qué?_______________________________________

A continuación algunos de sus resultados.

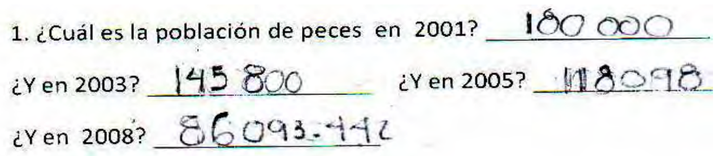
Equipo 1, FCQ. Este equipo ingresó a *Excel* la fórmula para obtener los datos correctos para la solución del problema, al igual que en MAT describen como ingresar los datos en *Excel* (Ver figura 2)


2001: Se aplico la formula (= B2-B2*.1)

2003: Segun con el resultado del 2001 solo lo arrastramos hasta [5] y dio el resultado

Figura 2. Descripción del equipo 1, FCQ

Equipo 4, FCF. En este primer ejercicio, el equipo 4, FCF no presentó evidencias de haber trabajo con la herramienta papel y lápiz para obtener la fórmula correspondiente a esta situación, sino que al comprender el problema, ingresa correctamente la fórmula en *Excel* (Verfigura 3)

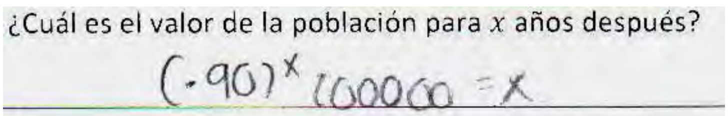

1. ¿Cuál es la población de peces en 2001? 180 000

¿Y en 2003? 145 800 ¿Y en 2005? 118098

¿Y en 2008? 86093.442

Figura 3. Respuesta equipo 4, FCF

Al solicitarles que describan el proceso de resolución sólo describen restar 10% a cada año, sin mencionar como obtuvieron la fórmula ingresada en *Excel* (Ver figura 4).


¿Cuál es el valor de la población para *x* años después?

$(.90)^x \, 100000 = x$

Figura 4. Modelo del equipo 4, FCF

Se observa que logra a través de la tabulación encontrar los valores para los años solicitados pero no establece la relación con la representación algebraica al denotar con la misma variable *x*.

El segundo problema a resolver también es guiado por preguntas con el propósito de que los estudiantes se apoyen en la representación tabular, conjeturen y logren generalizar el modelo. Para el caso de MAT los equipos lo precisan mientras que en FCF y FCQ lo resuelven parcialmente.

La SD finaliza con un problema en el cual ya no se les guía con preguntas, enseguida los resultados:

Problema para la FCF: *un ingeniero forestal desea construir un jardín botánico rectangular cuyo largo sea el doble de ancho. Expresar el área como función de uno de sus lados.*

Por cuestiones de tiempo los estudiantes no se quedan en el salón de cómputo para responderlo. Se les insiste que se queden a trabajarlo pero como el grupo toma este curso como un complemento a sus actividades escolares le resta compromiso por parte de los estudiantes. De forma similar ocurrió en la FCQ.

Para el caso de los estudiantes de MAT se presenta la solución del equipo 1, MAT al problema:

Suponga que el área de un terreno en la sierra de Durango tiene forma de triángulo equilátero, encuentra una expresión para calcular el área sabiendo que la longitud de uno de sus lados es igual a x

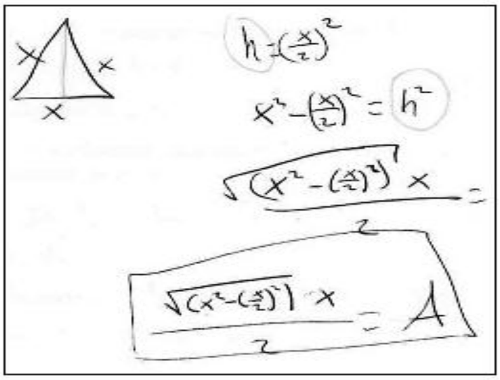


Figura 5. Representación del equipo, MAT.

El equipo 1, MAT lo realizó de forma correcta, aunque tuvo el siguiente problema: Como podemos observar en la figura 5, nombran un lado del triángulo correctamente $h=(x/2)^2$, después aplican el Teorema de Pitágoras pero vuelven a utilizar la misma letra "h" para nombrar la expresión que se pide, lo cual es incorrecto, aunque tuvieron dificultades para nombrarla tenían claro como llegar al modelo.

Conclusiones

Este trabajo del diseño de las secuencias didácticas dejó un aprendizaje al interior de los profesores debido a que cada uno aportaba ideas o experiencias de su práctica docente. Mientras que los tesistas expresaban sus vivencias como estudiantes al enfrentarse a la solución de problemas y el concepto de función. También resulta pertinente comentar las dificultades que se tuvieron en la Facultad de Ciencias Químicas y Ciencias Forestales esto porque el profesor titular si bien estuvo de acuerdo en la exploración de las secuencias didácticas no se involucró en el proceso de la exploración.

Para la SD1 se observó que los estudiantes se apoyaron en *Excel* para la resolución de los problemas, en los dos que se les guiaba a través de preguntas retomaron la representación tabular de las funciones e intentaron llegar al modelo. Esto resultaba complicado por ser la primera secuencia didáctica, sin embargo se observó que en los problemas guiados por preguntas los estudiantes relacionaban la representación tabular con la representación algebraica. Esto no se observó en el problema que omitía la orientación por preguntas excepto para los estudiantes de MAT. En esta secuencia didáctica los estudiantes empezaron a trabajar: variación entre variables lo cual ayudó para la SD2.

Se continúa en mejorar las SD después de ésta primera exploración, en buscar alternativas de comunicación institucional entre las facultades para impulsar la aplicación reflexiva de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas y en replicar en otros contextos.

Referencias bibliográficas

Creswell, J.W. y Plano, C.V. (2007). *Mixed methods research*. Estados Unidos: Sage Publication.

Cuevas Vallejo, C.A. (2009). Seminario Enseñanza del Cálculo. Un reporte. *Memorias del Primer Encuentro Nacional sobre la Enseñanza del Cálculo*. (pp. 1-12). México, D.F.: CINVESTAV-IPN.

Duval, R. (1993). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo de pensamiento. *Investigaciones en Matemática Educativa II*. (pp. 188-231). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Hitt, F. (1995). Intuición primera versus pensamiento analítico: dificultades en el paso de una representación gráfica a un contexto real y viceversa. *Educación Matemática 7(1)*, 63-75.

______. (1996). Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos. En F. Hitt (Editor), *Investigaciones en Educación Matemática* Vol. I, 245-264.

______. (2002). *Funciones en contexto*. México: Pearson.

______. (2003a). Una Reflexión sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana 10(2),* 213-224.

______. (2003b). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. Recuperado el 24 de septiembre del 2006 de http://matedu.cinvestav.mx/librosfernandohitt/Doc-6.doc

______. (2010). Propuesta sobre una teoría sobre el aprendizaje y la instrucción de las matemáticas basada en un interaccionismo social. Reunión UNISON. México.

Ruiz Iglesias, M. (2008). *Enseñar en términos de competencias*. México: Trillas.

DESARROLLO DE HABILIDADES MATEMÁTICAS PARA EL USO DE LAS TECNOLOGÍAS

Teresa Carrasco Jiménez, Alfredo del Castillo Serpa, Esther Ansola Hazday, Eugenio Carlos Rodríguez
Instituto Superior Politécnico "José Antonio Echeverría"CUJAE. Cuba.
tcarrasco@mecanica.cujae.edu.cu, acastillo@mecanica.cujae.edu.cu, esther@ind.cujae.edu.cu, ecarlos@tesla.cujae.edu.cu

Resumen: La introducción de las tecnologías en el proceso enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, puede contribuir a que los conocimientos, habilidades, modos de la actividad mental y actitudes que se desean formar, se desarrollen de forma tal que los alumnos se habitúen a reflexionar, plantear hipótesis y conjeturas, validarlas y valorarlas. En las carreras de ingeniería, estos resultados no siempre se alcanzan y la situación persiste aún con la introducción de distintas herramientas tecnológicas. En esta situación puede estar incidiendo que los estudiantes no tengan los conocimientos y habilidades necesarias en el uso de las tecnologías para enfrentar el aprendizaje de las Matemáticas. En este trabajo se presenta el estudio realizado sobre las habilidades que deben poseer los estudiantes de los primeros años de las carreras de ingeniería para utilizar las tecnologías en la solución de problemas matemáticos, y algunos indicadores para diagnosticar las mismas.

Palabras clave: Habilidades, tecnologías, enseñanza-aprendizaje, diagnóstico.

Abstract: The introduction of technologies in the Mathematics teaching learning process can contribute with the develop of knowledge, abilities, ways of the mental activity and attitudes that we wish to structure, which are developed in such a way that the students get familiarized to meditate, to outline hypothesis and conjectures, to validate and value them. In engineering careers, these results are not always reached, and the situation still persists with the introduction of different technological tools. In this situation one of the situations that can be influencing is that the students don't have the knowledge and necessary skills in the use of the technologies to face the learning of the Mathematics. In this paper we present a study about the skills needed by the students of early years of engineering to use technologies in solving problems which require the use of Mathematics.

Key words: Abilities, technologies, teaching-learning, diagnostic

Introducción

Las transformaciones que están ocurriendo en la sociedad con el desarrollo de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones inciden, como en muchos otros campos, en los procesos educativos. En el ámbito de las Matemáticas, el uso adecuado de las tecnologías puede contribuir a introducir nuevas formas en el proceso de enseñanza y aprendizaje, en las que los conocimientos, habilidades, modos de la actividad mental y actitudes que deseamos formar, se desarrollen de forma tal que los estudiantes se habitúen a reflexionar, plantear hipótesis y conjeturas, validarlas y valorarlas (Carlos y Ansola, 2010).

Las tecnologías, ayudan en la recolección, grabación, organización y análisis de datos. Aumentan además la capacidad de hacer cálculos y ofrecen herramientas convenientes, precisas y dinámicas que dibujan, grafican y calculan. Con estas ayudas, los estudiantes pueden extender el rango y la calidad de sus investigaciones matemáticas y enfrentarse a ideas matemáticas en ambientes más realistas (Carlos y Ansola, 2010).

En las carreras de ingeniería, estos resultados no siempre se alcanzan y la situación persiste aún con la introducción del uso de distintas herramientas tecnológicas como son: Asistentes Matemáticos, calculadoras graficadoras, plataformas virtuales y otras.

Entre los obstáculos que impiden el logro de estos propósitos se pueden mencionar los siguientes:

- Los profesores no siempre tienen la preparación adecuada para enfrentar el reto que significa aplicar las tecnologías en el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas.
- Los estudiantes no siempre tienen los conocimientos y habilidades necesarias en el uso de las tecnologías para enfrentar el aprendizaje de las Matemáticas haciendo uso de ellas.
- El diseño de los currículos de Matemática no poseen la coherencia necesaria para lograr desarrollar habilidades en el uso de las potencialidades que brindan las tecnologías (Carlos y Ansola, 2010).

La investigación que se expone está centrada en el segundo de los obstáculos mencionados, específicamente en lo referente a las habilidades.

El presente trabajo tiene como propósito exponer el estudio realizado sobre las habilidades matemáticas que poseen los estudiantes de los primeros años de las carreras de ingeniería y las que se tienen que desarrollar, para utilizar las tecnologías en la solución de problemas que requieren del uso de las Matemáticas. El estudio realizado es la primera etapa del desarrollo de el proyecto de investigación "El currículo de Matemática con Tecnología", que está dirigido a la elaboración de un Sistema Didáctico para la Disciplina Matemática en carreras de ingeniería, que aproveche las potencialidades de las herramientas tecnológicas para lograr en los estudiantes modos de actividad mental y actitudes que les permita extender el rango y la calidad de sus investigaciones matemáticas y enfrentarse a ideas matemáticas en ambientes más realistas, alcanzando categorías de aprendizaje de orden superior, tales como reflexión, razonamiento, planteamiento de problemas, solución de problemas y toma de decisiones (Carlos y Ansola, 2010).

En esta etapa de la investigación se determinan las habilidades matemáticas que deben poseer los estudiantes para poder hacer un uso adecuado de las tecnologías, el agrupamiento de estas habilidades en dimensiones y los indicadores que permitirán elaborar los instrumentos para el diagnóstico de la situación real en el desarrollo de estas habilidades.

En la primera fase de la metodología aplicada en la investigación se emplean diferentes métodos como son: histórico-lógico, que posibilita la aproximación a los referentes teóricos del tema, profundizar en sus relaciones, analizar diferentes criterios relacionados con la teoría curricular, la Didáctica de la Matemática y el uso de las herramientas tecnológicas en el proceso de enseñanza y aprendizaje; el enfoque sistémico, que posibilita modelar el objeto de la investigación mediante la determinación de sus elementos básicos; y el análisis documental para el estudio y análisis de diferentes documentos normativos.

Las bases teóricas de la investigación se sustentan fundamentalmente en el aprendizaje desarrollador (Zilberstein, 2006a; Zilberstein, 2006b; Zilberstein y Portela, 2002), y en el uso de estrategias metacognitivas (Labarrere, 1994) en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática sustentadas en el uso de tecnologías.

Asumimos una concepción desarrolladora que se ha ido conformando y sistematizando en los últimos años a la luz de diferentes investigaciones pedagógicas realizadas, enriquecida con la práctica docente en Cuba […] La Didáctica debe ser desarrolladora, es decir, conducir al desarrollo integral de la personalidad del estudiante, siendo esto el resultado de un proceso activo de apropiación de la experiencia histórica acumulada por la humanidad. El proceso de enseñanza- aprendizaje, no puede realizarse teniendo en cuenta solo lo heredado por el alumno, debe considerar que es decisiva la interacción socio-cultural, lo que existe en la sociedad, la actividad, la socialización, la comunicación (Zilberstein, 2006a, p. 33).

Algunos referentes sobre las habilidades y las tecnologías

Las habilidades constituyen una de las formas de la asimilación de la actividad del hombre. Teniendo como fundamento la teoría psicológica de la actividad sustentada en el Enfoque Histórico Cultural, "no se puede separar el saber, del saber hacer, porque siempre saber es saber hacer algo, no puede haber un conocimiento sin una habilidad, sin un saber hacer". Talízina (1984).

Desde el punto de vista psicológico la habilidad constituye el dominio de operaciones (psíquicas y prácticas) que permiten la regulación racional de la actividad. Es la comprensión de la interrelación entre el fin de la actividad y las condiciones, los medios de su puesta en práctica (Álvarez de Zayas, 1995), concepto que se asume en este trabajo.

En concordancia con esta definición se puede señalar que la habilidad es el saber hacer, es el dominio por parte del sujeto, de las operaciones que se manifiestan desde un saber hacer elemental, que transita hacia un elevado nivel de calidad en la ejecución y un alto grado de perfección y destreza en la realización de estas operaciones. Las habilidades siempre parten del conocimiento y se apoyan en el conocimiento, es el conocimiento en acción.

Varios autores, tales como Hernández (1989) y Delgado (1995 y 1997), por citar algunos, han desarrollado estudios sobre el sistema básico de habilidades matemáticas específicas y generales, resultado de gran valor didáctico y metodológico, tanto para los docentes como para la formulación de los programas de las diferentes asignaturas.

Identificar las habilidades específicas que son necesarias para usar la tecnología, resulta un requisito indispensable para la utilización de las mismas en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Se asume el criterio de otros autores al señalar, que toda determinación en torno al uso de las tecnologías en la educación impone prudencia y sabiduría. Por eso, merece atención la metáfora "las TIC estarán integradas en la enseñanza cuando sean invisibles" (Prats, 2003).

Los elementos anteriormente analizados fundamentan el hecho de que un programa de Matemática diseñado con el uso explícito de las tecnologías, deberá contribuir tanto a la asimilación del contenido matemático como a la solución de situaciones problemáticas o tipos de problemas al que pueden enfrentarse los estudiantes. El uso de herramientas informáticas de cálculo poderosas, así como las construcciones y representaciones visuales ofrecen a los estudiantes acceso a contenidos matemáticos y a contextos que de otro modo serían para ellos muy difíciles de explorar. Las herramientas tecnológicas utilizadas durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas pueden facilitar el desarrollo en los estudiantes de una variedad de categorías de aprendizaje de orden superior tales como: reflexión, razonamiento, planteamiento de problemas, solución de problemas y toma de decisiones (Carlos y Ansola, 2010).

Las habilidades generales matemáticas

Para operacionalizar las habilidades necesarias en el uso de las tecnologías para enfrentar el aprendizaje de las Matemáticas se aplicará lo indicado por Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (1991) en cuanto a identificar dimensiones e indicadores para dichas habilidades.

Partiendo del sistema de Habilidades Generales Matemáticas planteadas por Delgado (1995 y 1997), el grupo de investigadores que trabajan en este proyecto de investigación trataron de determinar cuales de ellas deben poseer los estudiantes de los primeros años de las carreras de ingeniería para resolver problemas utilizando herramientas tecnológicas, el resultado fue producto de una sesión de tormenta de ideas (brain storming) en la cual se llegó a la conclusión que todas las definidas por Delgado (1995 y 1997), forman parte imprescindible de las que un estudiante debe desarrollar, y son las siguientes: Interpretar, Identificar, Recodificar, Calcular, Algoritmizar, Graficar, Definir, Demostrar, Modelar, Comparar, Resolver, Optimizar y Controlar.

En este proceso se utilizaron las cuatro dimensiones que se definen teniendo en cuenta las funciones que realizan las habilidades y que están en correspondencia con lo planteado por varios autores, entre ellos Polya (1945), Scoenfeld (1992) y Delgado (1997), entre otros, estas son:

- Dimensión correspondiente a las Habilidades Conceptuales: Son aquellas que operan directamente con los conceptos.
- Dimensión correspondiente a las Habilidades Traductoras: Aquellas que permiten pasar de un dominio a otro del conocimiento
- Dimensión correspondiente a las Habilidades Operativas: Son aquellas que funcionan generalmente como auxiliares de otras más complejas y que están relacionadas con la ejecución en el plano material o verbal.
- Dimensión correspondiente a las Habilidades Heurísticas o Metacognitivas: Son aquellas que emplean recursos heurísticos y metacognitivos y están presentes en un pensamiento reflexivo, estructurado y creativo.

El resultado obtenido fue la clasificación de las habilidades determinadas anteriormente dentro de estas dimensiones, tal y como se muestra a continuación:

Dimensión	Habilidades
Conceptuales	Definir
	Demostrar
	Identificar
	Comparar
Traductoras	Interpretar
	Modelar
	Recodificar
Operativas	Algoritmizar
	Graficar
	Calcular
	Aproximar
	Optimizar
Heurísticas y Metacognitivas	Conjeturar
	Resolver
	Representar
	Controlar

La tarea siguiente fue determinar el conjunto de indicadores que servirán para diagnosticar las habilidades matemáticas que deben poseer los estudiantes de los primeros años de las carreras de ingeniería. A continuación se muestran algunas habilidades y los indicadores correspondientes:

Dimensión	Habilidades	Indicadores
Conceptuales	Definir	Reproducción verbal
		Reproducción gráfica
		Reproducción Numérica
		Reproducción Simbólica
	Demostrar	Por reducción al absurdo
		Por contraejemplo
		Método constructivo
	Identificar	Determinar propiedades esenciales.
		Estructura lógica del concepto
		Situación de pertenencia.
	Comparar	Fundamento de la comparación.
		Agrupar en clases

Los indicadores determinados para cada habilidad se corresponden con el punto de partida para el diseño de los instrumentos que servirán para diagnosticar el estado de desarrollo actual de estas habilidades. El paso siguiente en el diseño del instrumento para diagnosticar será diseñar los ítems Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (1991), el esquema de un ejemplo se muestra a continuación:

Dimensión	Habilidad	Definición Operacional	Indicadores	Ítems
Conceptuales	Definir	Es establecer mediante una proposición las características necesarias y suficientes del objeto de estudio.	Reproducción verbal	
			Reproducción gráfica	
			Reproducción numérica	
			Reproducción simbólica	
			Por reducción al absurdo	

Habilidades matemáticas agrupadas atendiendo a los efectos que producen las tecnologías

Otro aspecto de la investigación que está en desarrollo, con respecto a las habilidades generales matemáticas, es el relacionado con la influencia de la tecnología para ampliar las capacidades cognitivas en algún sentido fundamental (Salomon & Perkins, 2005).

Para dar respuesta a esta pregunta Salomon & Perkins (2005) introducen los conceptos de "Efectos con la tecnología", cuando esta es usada para mejorar el desempeño intelectual mientras uno está operando la herramienta; "Efectos de la tecnología", cuando el uso de la tecnología puede dejar residuos cognitivos que aumentan el desempeño incluso después de que uno deja de usarla; y "Efectos a través de la tecnología", cuando la tecnología no sólo aumenta el desempeño, sino que, fundamentalmente, lo reorganiza. El tema, en desarrollo aún, es determinar qué habilidades generales matemáticas desarrolladas con el uso de la tecnología pueden tener "efectos de" y "efectos a través".

Conclusiones

El trabajo presentado forma parte del proyecto de investigación titulado "El currículo de Matemática con tecnología en carreras de ingeniería", que se desarrolla por un grupo de investigadores, que a su vez son profesores de Matemática en las carreras de ingeniería, en el Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría (Cujae) en La Habana.; en él se muestra la primera etapa de esta investigación, en la cual se han arribado a tres resultados importantes:

1. La identificación de las habilidades que deben poseer los alumnos de los primeros años de las carreras de ingeniería para resolver problemas que requieren de la Matemática, utilizando herramientas tecnológicas.

2. La clasificación de estas habilidades en cuatro dimensiones: conceptuales, traductoras, operativas y heurísticas y metacognitivas.

3. La determinación de indicadores para el diseño de los instrumentos que medirán el desarrollo de estas habilidades en los estudiantes.

Estos son resultados parciales de lo que será la determinación de los elementos que caracterizarían el diseño de los Programas de la Disciplina Matemática para carreras de ingeniería, y las asignaturas que la componen, de manera que, mediante el uso de herramientas tecnológicas específicas, contribuyan al desarrollo de habilidades que potencien el uso de la tecnología; el desarrollo de estas habilidades hará que los conocimientos y modos de actividad mental se desarrollen de forma tal que los estudiantes se habitúen a reflexionar, plantear hipótesis y conjeturas, validarlas y valorarlas.

Referencias bibliográficas

Álvarez de Zayas, R. (1995) *Didáctica y Currículum del docente*. La Habana: editorial del ISPEJ Varona.

Carlos, E. y Ansola E. (2010). El currículo de matemática con tecnología en carreras de ingeniería. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 23,* 1293 -1301. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Delgado, J. R. (1995). Un sistema de habilidades para la enseñanza de la Matemática. *Memorias de la 9na Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigación en Matemática Educativa*. Tomo II. México: Cinvestav-IPN.

Delgado, J. R. (1997). Las habilidades generales matemáticas y la estructuración del conocimiento matemático. En R.M. Farfán, J. Lezama, A. Arellano y E. Oaxaca (Eds), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 11*, 108-111. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Hernández, H. (1989). *El perfeccionamiento de la enseñanza de la Matemática en la Enseñanza Superior Cubana. Experiencia en el Algebra Lineal.* Tesis de Doctorado no publicada, Universidad de La Habana. Cuba.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (1991). *Metodología de la Investigación*. México: Mc Graw – Hill.

Labarrere, A. (1994). *Pensamiento. Análisis y Autorregulación de la actividad cognoscitiva de los alumnos*. México: Ángeles Editores.

Polya, G. (1945). *How to solve it*. Pricenton: Pricenton University Press

Prats, M. A. (2003). *Las TICs en la Educación. Entrevista*. Recuperado el 12 de marzo de 2003 de: http://www.educaweb.com

Salomon, G., & Perkins, D. (2005). Do technologies make us smarter? Intellectual amplification with, of and through technology. In R.J. Sternberg & D. Preiss (Eds.), *Intelligence and technology: The impact of tools on the nature and development of human abilities* (pp. 71–86). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. En D.A. Grows (Ed), *Handbook for research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). Nueva York: Macmillan Publishing Company.

Talízina, N.F. (1984). *Fundamentos de la enseñanza en la Educación Superior*. Conferencias no publicadas. Universidad de la Habana. Cuba

Zilberstein, J. (2006a). Categorías de una Didáctica Desarrolladora. Posición desde el enfoque Histórico-Cultural. En Colectivo de Autores. *Preparación Pedagógica Integral para Profesores Integrales* (pp. 33-43), La Habana: Editorial Felix Varela.

Zilberstein, J. (2006b). Principios Didácticos en un Proceso de Enseñanza-Aprendizaje que Instruya y Eduque. En Colectivo de Autores. *Preparación Pedagógica Integral para Profesores Integrales* (pp. 19-31), La Habana: Editorial Felix Varela.

Zilberstein, J. y Portela, R. (2002). *Una Concepción Desarrolladora de la Motivación y el Aprendizaje de las Ciencias*. Cuba: Editorial Pueblo y Educación.

UNA ALTERNATIVA METODOLÓGICA PARA EL TRATAMIENTO DE LOS CONTENIDOS DE CÁLCULO NUMÉRICO CON EL APOYO DE ASISTENTES MATEMÁTICOS

Rosa A Vázquez Cedeño*, Milagros Gutiérrez Álvarez, Edistio Yoel Verdecia Martínez*
*Universidad de las Ciencias Informáticas, Universidad de Camagüey Cuba
ravazquez@uci.cu, milagros.gutierrez@reduc.edu.cu,edistioyoel@uci.cu

Resumen: El trabajo muestra, los resultados obtenidos de la aplicación de una alternativa metodológica para el tratamiento de contenidos del Cálculo Numérico con el apoyo del asistente matemático Derive, en dos grupos de estudiantes de universidades en diferentes países. Se tuvo en cuenta las características particulares de los grupos de estudiantes y el uso de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TIC) en el Proceso de Enseñanza Aprendizaje (PEA). Se realizaron tareas con un enfoque de aplicación de contenidos y de justificación de hipótesis, lográndose un equilibrio entre la fundamentación y la profesionalización en el PEA. Se propicia un despertar de motivaciones, intereses y mayor acercamiento a las Matemáticas.

Palabras clave: Conceptos, asistentes matemáticos, alternativa metodológica.

Abstract: The present work shows the results of the application of a methodological alternative for the treatment of topics of Numeric Calculation with the support of Derive, in two groups of university students in different countries. The characteristics of the groups of students and the use of the TIC in the PEA have been kept in mind. The tasks were designed with focus in application of contents and hypothesis justification, achieving a balance between the foundation and professionalization in the PEA. This has propitiated an awakening of motivations, interests and bigger approach to the Mathematics.

Key words: Concepts, mathematical assistant, alternative methodology.

Introducción

La necesidad del aprendizaje y comprensión de los conceptos matemáticos en alumnos que estudian Matemática, ya sea en programas de formación profesoral o Licenciatura, así como la introducción de los asistentes matemáticos en el trabajo de estos es cada día una prioridad indiscutible en el Proceso de Enseñanza Aprendizaje (PEA) de dicha disciplina.

La situación que abordamos tiene su existencia a partir de la experiencia de los docentes participantes en el trabajo con el Cálculo Numérico para la formación de Ingenieros con uso de asistentes matemáticos, miembros del Grupo de Investigación de Enseñanza de la Matemática de la Universidad de Camagüey y de coincidir su trabajo en universidades en diferentes países y continentes: La Universidad Agostino Neto de Luanda en Angola y en el Centro de Estudios Superiores de Tefé perteneciente a la Universidad del Estado de Amazonas, Brasil.

En ambos casos eran estudiantes donde ya se habían cursado los semestres iniciales de la disciplina y por lo tanto estudiado los conceptos: función, continuidad, raíces, acotación, derivación, integración, etc., dichos alumnos cursan el quinto o sexto semestre de su carrera: Ciencias o Formación Profesoral, y por tanto han cursado los semestres iniciales del Álgebra y el Cálculo Diferencial e Integral y deben enfrentarse a los métodos del Cálculo Numérico, lo que lleva al estudiante ante una nueva visión de los métodos de la Matemática y el necesario dominio e interpretación de los conceptos ya estudiados.

Desde las observaciones iniciales pudimos detectar deficiencias similares en los grupos de estudiantes a pesar de la distancia, diferencia cultural y de nacionalidad, lo que corrobora lo determinado por otros investigadores tal y como se afirmaba

> "… los estudiantes aprenden los procedimientos del cálculo (encontrar límites, diferenciación, etc.) a un nivel puramente algorítmico, construido sobre imágenes conceptuales escasas. Y que las dificultades en la concepción de los procesos de diferenciación e integración pueden explicarse en términos de que los estudiantes carecen, necesariamente, de un nivel alto de abstracción, tanto del concepto de función (como un objeto) como de los procesos de aproximación"(Dreyfus 1990).

Tareas para la verificación de hipótesis, la representación y reconocimiento grafico de estos conceptos, así como el paso entre diferentes registros semióticos, constituyen aspectos de amplio grado de dificultad para los alumnos cuando el aprendizaje no ha profundizado lo suficiente.

La comprensión de los conceptos básicos del Cálculo suele resultar una tarea difícil para la mayoría de los estudiantes en sus primeras experiencias en estas asignaturas y en estos casos constituían problemas de máxima prioridad ante la formación profesional de dichos estudiantes. Dificultades similares son presentadas por investigadores de diferentes latitudes e independientemente del fundamento teórico empleado: (Orton, 1983; Artigue, 1998 y Cantoral, 2000), Cabañas y Cantoral (2007), citados por los autores Contreras, Hernández, Aguilar, León y Oropeza (2011) situación esta corroborada en nuestra situación objeto de estudio.

A esto se añade un limitado y muy escaso uso y aprovechamiento de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones y sus potencialidades en el Proceso de Enseñanza Aprendizaje de la Matemática.

La observación inicial permitió reconocer el siguiente problema científico: Los estudiantes en ambos centros tienen insuficiencias al reconocer, aplicar y visualizar los principales conceptos matemáticos.

El propósito fundamental de la investigación fue: lograr una alternativa metodológica que posibilitara la profundización de los alumnos en los conceptos iniciales del Cálculo Diferencial e Integral aprovechando las posibilidades de los softwares matemáticos y de las potencialidades de un proceso apoyado en las TIC.

Diagnóstico

El diagnóstico fue realizado a través de las observaciones de clases, pruebas y test de verificación de los conocimientos, así como las entrevistas realizadas a partir de los intercambios con los propios estudiantes, otros docentes de dichas instituciones y materiales existentes.

La verificación efectuada fue guiada en dos direcciones:

a- aspectos del contenido matemático

b- uso de las TIC para la resolución de problemas matemáticos y más específicamente dominio de algún asistente matemático.

Los resultados obtenidos arrojaron la siguiente caracterización de manera similar en ambas instituciones.

Bajo nivel de interpretación, representación gráfica y aplicación de los conceptos fundamentales del Cálculo y el Álgebra, tomando como elemento clave las funciones reales y su representación gráfica, la continuidad y discontinuidad, derivabilidad de una función en un punto y un intervalo, intervalos de crecimiento y decrecimiento así como la acotación en un intervalo, ecuaciones, raíces. Todo esto tomado para su constatación a partir del estudio y análisis de las hipótesis de los principales métodos numéricos a estudiar.

En cuanto a asistentes matemáticos se habían recibido cursos optativos, por lo tanto no cursado por todos, pero en ninguno de los casos había ocurrido un empleo sistemático en el aprendizaje y resolución de problemas de ninguna de las asignaturas estudiadas, por lo que la falta de empleo, aplicación y trabajo sistemático había conducido al olvido, falta de conocimiento y práctica en el trabajo con los mismos.

Marco teórico

La investigación realizada basa sus fundamentos en la teoría de Vigotsky (1985), dicha teoría coloca en el centro al estudiante, como sujeto activo y consciente con un objetivo determinado, utilizando diversos medios a su disposición, que en general son asumidos como mediadores en el proceso de enseñanza aprendizaje.

En el PEA, se destacan y asumen dos tipos principales de mediación: la social y la instrumental, que actúan directamente en el proceso de conocimiento. En la mediación social están las personas como instrumento de mediación para la acción sobre el ambiente, los grupos sociales en la integración de los sujetos a las prácticas sociales y el papel del otro en la formación de la conciencia del individuo.

En la concepción de Vigotsky, cuando se hace referencia a la mediación instrumental se trata de la utilización por los hombres de los instrumentos creados por él y acorde al momento y desarrollo de la cultura de su época cuando realiza las acciones de transformación de la realidad.

La cultura en la concepción Vigotskiana, es el producto de la vida y de la actividad social del hombre y se expresa a través de los signos, los cuales tienen un significado estable ya que se han formado en el desarrollo histórico y transmitido de generación en generación. Para este proceso mediador nos sustentamos fundamentalmente en dos de los principios enunciados por García Quiroga (2006):

- el carácter mediatizado de la psiquis humana y
- el carácter activo del estudiante en el proceso de enseñanza aprendizaje.

En el contexto de la investigación desarrollada, la mediación instrumental fue considerada a través del uso de los asistentes matemáticos, específicamente Derive y Excel, en menor medida, así como el aprovechamiento y uso de la computadora y sus potencialidades.

Para que se dé el aprendizaje se requiere que el estudiante logre su independencia cognoscitiva, la cual está asociada al desarrollo de su pensamiento abstracto el que depende a su vez de los nexos símbolo objeto de los que dispone el sujeto.

El concepto no es el punto de partida del conocimiento, sino su resultado. "*En el concepto se tiene la expresión concentrada de conocimientos, actividades prácticas e investigativas como suma de todo lo acontecido en una etapa de la realidad social*". Vázquez (1999, p. 63).

Los conceptos básicos necesarios para el trabajo en Cálculo Numérico no se conceptualizaron, lo cual impide al alumno identificar, clasificar y, en definitiva, operar correctamente a pesar de conocer los procedimientos generales, así como realizar algunos cálculos y por tanto aplicarlo a casos específicos como la Resolución de Problemas.

Este planteamiento de la escuela Histórico Cultural, es un principio básico en nuestro trabajo, pues el dominio de los conceptos y las aplicaciones a la resolución de problemas, que aspiramos a lograr, dependen en una medida considerable de la representación semiótica de los objetos de estudio, sobre dichas representaciones semióticas, el estudiante desarrollará las generalizaciones necesarias para lograr el dominio del contenido estudiado.

Para el caso analizado conocer y manejar las representaciones gráficas de funciones, la interpretación geométrica de propiedades y conceptos relativos a las mismas, así como el empleo en demostraciones y constatación de propiedades relativas a los conceptos, constituye una base importante para el trabajo a realizar y los propósitos de la investigación realizada. Todo esto tiene respuesta a través de la potencialidad gráfica y de procesamiento, así como que cada vez es más accesible y dinámica su interfaz, constituyen características de gran relevancia en relación con los sistemas de representación y las representaciones semióticas que resultan de vital importancia para que los alumnos conciban la construcción del conocimiento matemático.

Respecto a las representaciones una de las actividades fundamentales de los profesores es enfrentar a los alumnos a problemas en donde, para poder resolverlos, necesitan realizar conversiones entre distintos registros.

Experiencias para la introducción de herramientas computacionales como recurso didáctico de apoyo al desarrollo del pensamiento de los alumnos así como al aprendizaje de la Matemática es en la actualidad una línea fecunda para el trabajo de la investigación en Matemáticas.

Por su parte Litwin citado por García Quiroga (2006, p. 11) aduce:

> "…la mayor dificultad no radica en el uso de una nueva herramienta sino en concebir un proyecto en el cual tenga sentido la utilización de la misma y, a partir de él, los nuevos recursos tecnológicos puedan potenciar la propuesta educativa o enmarcarla".

Fernando Hitt citado por López (2006, p. 35) enfatiza que:

> ...es importante promover la visualización matemática utilizando diferentes representaciones y haciendo uso reflexivo de las nuevas tecnologías que permitan dar un significado concreto a las nociones matemáticas. El desarrollo de habilidades ligadas a la visualización matemática podrá impulsar a los estudiantes a un nivel más profundo de los conceptos propios del cálculo. El diseño de nuevos materiales es imperativo para este desarrollo integral.

La alternativa metodológica definida a partir del análisis teórico realizado está sustentada en los siguientes elementos:

- El carácter activo del estudiante mediatizado instrumentalmente por el asistente matemático y las computadoras en el PEA de la Matemática.

- La necesidad de formación de los conceptos básicos del Cálculo y su aplicación en la Resolución de Problemas.
- La representación gráfica, la interpretación geométrica la realización de volúmenes de cálculo por mediación del asistente como elementos base para la justificación y comprobación de la aplicación de los métodos.
- Los asistentes matemáticos como elemento fundamental para la resolución de problemas aplicados, la conceptualización y la verificación de las hipótesis.

Metodología

Una vez realizado el diagnóstico el trabajo consistió en un experimento de enseñanza a partir del diseño y desarrollo de actividades en el laboratorio para la disciplina Cálculo Numérico. Se dividió en cuatro etapas: diagnóstico; preparación de las actividades, capacitación de los alumnos en TIC y para el trabajo con los software: DERIVE y EXCEL.

En la etapa de preparación, los docentes, determinaron todos los conceptos y propiedades que de manera fundamental están presentes en los métodos numéricos a estudiar durante el curso, así como su verificación a partir de las funcionalidades de los asistentes: los distintos tipos de funciones y sus representación, continuidad, acotación, estudio de la función en un intervalo acotado, raíces, discontinuidades, límite, comportamiento en el infinito, derivabilidad son algunas de las mas trabajadas a lo largo del semestre.

La concepción fundamental de las actividades es el uso del software no solo en su rápida potencialidad para los cálculos, sino para el trabajo de los alumnos en su experimentación y comprobación de estos, así como la verificación del cumplimiento de las hipótesis para la aplicación o no de un método, de forma que el alumno profundice el método aplicado, sus requerimientos y al propio tiempo trabaje en la consolidación de los conceptos básicos relacionados con el Cálculo Diferencial e Integral.

Para la preparación de los estudiantes en el manejo de los asistentes matemáticos se estudiaron sus propiedades y funcionalidad general con énfasis en las funciones y operaciones en correspondencia a las necesidades antes detectadas: la representación de una función en los diferentes registros semióticos: analítica, gráfica, tabulada; la potencialidad de acercamiento en la gráfica con el “Zoom” de Derive, la elaboración de tablas de cálculo a partir del Excel, las funciones discontinuas en Derive como: “ABS”, “SIGN”, “STEP” y “CHI”.

Las clases en el laboratorio están apoyadas por guías y una clase de preparación y ejemplificación por parte del docente en el aula; en todos los casos se parte de una actividad inicial, o parte de ella, con trabajo en pequeños equipos de trabajo, y posteriormente la resolución de problemas de forma individual. El alumno recoge en sus cuadernos los resultados y conclusiones a que se arriba, para una posterior discusión en el aula.

Ejemplos:

Tema: Raíces de ecuaciones

1-Dada una ecuación polinómica: compruebe gráfica y analíticamente el número de raíces, aíslelas en intervalos de amplitud $\leq \beta$, de un valor aproximado de las mismas a partir de su aproximación con Derive. Verifique el cumplimiento de las hipótesis necesarias para la aplicación de cada uno de los procedimientos. (Comentarios: para este tipo de problemas el alumno debe realizar un análisis combinado de la Regla de Descartes, la fórmula de Lagrange, las hipótesis de continuidad en el intervalo , así como el cambio de signos en sus valores. Para lograr tener en pantalla todas las raíces deberá hacer un estudio gráfico pormenorizado ya que las mismas pueden quedar fuera del intervalo que tiene en pantalla).

2- Dada una ecuación algebraica, hacer un estudio comparativo del valor de alguna de sus raíces a partir de la aplicación de diversos métodos previa comprobación del cumplimiento de las hipótesis: gráfico, bisección, iterativo general, Newton; así como el estudio del error absoluto tomando en consideración como valor exacto el valor dado por el asistente. (Comentarios: para estos casos es necesario el estudio de las hipótesis necesarias en cada caso, el trabajo de cálculo que podrá ser asistido por el Excel, el estudio de funciones iterativas y la determinación de la condición de convergencia para la posible aplicación del método).

Resultados

Como resultado de este trabajo, se considera un mayor aprovechamiento de los estudiantes y comprensión del aparato conceptual matemático como base para resolver los problemas particulares, y su preparación para enfrentar tareas posteriores en otras disciplinas

Mediante las actividades desarrolladas conjuntamente con las tareas orientadas se constató un mayor dominio de los aspectos necesarios para la comprobación de las hipótesis de los métodos y en particular para la compresión del cálculo numérico.

Conclusiones

El trabajo realizado evidenció cambios en la manera de pensar y actuar en la mayoría de los alumnos, por la visión propia de la Matemática y sus contenidos, así como el empleo de elementos de análisis, búsqueda e indagación para la resolución de los problemas y no solo los elementos propios del cálculo sin importar a donde se llega, disminuyendo significativamente la concepción de la casi exclusiva dedicación a encontrar respuesta mediante el cálculo.

De este modo, la estrategia didáctica diseñada, llevó a los estudiantes ante los elementos que para el aprendizaje y desarrollo en la Matemática posibilitan las nuevas tecnologías, para que el estudiante pueda concentrar sus esfuerzos en la interpretación de los resultados, el desarrollo de estrategias de resolución de problemas y la creación de soluciones novedosas para ellos.

De acuerdo con el análisis teórico la propuesta desarrollada proporciona al alumno una visión de la Matemática mediada por la computadora, los asistentes y sus recursos, así como la necesidad de profundizar en el aprendizaje de los conceptos básicos del cálculo y su verificación a partir de la representación gráfica, los análisis geométricos y los cálculos según la naturaleza y condiciones del problema lo requieran. Más que el cálculo de una derivada o un límite, es el análisis de ambos a través de su representación gráfica, rescatándose la necesidad de la visión geométrica en el aprendizaje de la Matemática, cuestión esta a la cual se hace el llamado a profundizar en la comunidad matemática.

Así, de esta manera, empleará distintas representaciones de un mismo concepto, lo que le permitirá consolidar sus conocimientos de forma más consciente, sólida, duradera y útil para abordar problemas con niveles de complejidad, en general imposibles sin el uso de la tecnología.

Referencias bibliográficas

Contreras, J., Hernández, J., Aguilar, A., León, F. y Oropeza, C. (2011). Calculo de áreas planas en R^2 usando las nuevas Tecnologías. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 24*,1110-1118. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Dreyfus, T. (1990). *Advanced Mathematical Thinking.* In Nesher, P. And Kilpatrick, J. (Ed.).Mathematics and Cognición: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Educations (pp.113-134). Cambrige University Press.

García Quiroga, L. (2006). *Metodología para el proceso enseñanza aprendizaje del cálculo integral fundamentado en el nexo símbolo objeto.* Tesis de Doctorado no publicada, Universidad de Camagüey, Cuba.

Litwin, E. (2005). La tecnología educativa en el debate didáctico contemporáneo. Buenos Aires: Amorrortu.

López, L. (2006). *Desarrollo de la habilidad de visualización matemática 3D en estudiantes, requerida en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática de nivel superior y en el ejercicio profesional*. Tesis de Doctorado no publicada, Universidad de Camagüey, Cuba.

Vázquez, R. A. (1999). *La resolución de problemas y tareas en Matemática IV para Ingeniería Eléctrica.* Tesis de Doctorado no publicada, Universidad de Camagüey, Cuba.

Vigotsky, L. S. (1985). Problemas fundamentales de defectología contemporánea. *Obras Escogidas en seis tomos. Tomo V,* 2-26. La Habana: Pueblo y Educación.

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN CON DERIVE: DE LA SOLUCIÓN ALGEBRAICA A LA SOLUCIÓN GRÁFICA

Javier Barrera Ángeles[1], Petra Téllez Reyes[2], Iván León Giniebra[3], Tulio Rafael Amaya de armas[4]
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Centro de Bachillerato Tecnológico e Industrial y de Servicios No 8, Hidalgo, Universidad "Hermanos Saiz Montes de Oca" Pinar del Río, Madre Amalia, Universidad de Sucre de Sincelejo.
México, Cuba, Colombia.
Jbarrera12@hotmail.com, ptr405@hotmail.com, ileong@mat.upr.edu.cu, tuama1@hotmail.com

Resumen: Este trabajo presenta los resultados de una investigación cuyo objetivo es documentar de qué manera el uso de tecnología facilita la comprensión de soluciones de tipo gráfico de una ecuación diferencial ordinaria. En este sentido, el uso de herramientas tecnológicas es promovido por profesionales de la educación e instituciones como el NCTM (National Council of Teachers of Mathematics).Un aspecto importante del uso de tecnología, es la representación dinámica. Por otra parte, proporciona marcos constructivos de referencia en donde se representan y articulan dinámicamente diferentes registros de representación. Esta investigación se sustentó en un caso de estudio con estudiantes universitarios. El método empleado fue de comparación y, algunos resultados sobresalientes evidencian una clara disociación entre las respuestas analíticas o simbólicas y la interpretación gráfica de los resultados.

Palabras clave: Representación, resolución, gráfica, analítico, cualitativo.

Abstract: This work represents the results of the research aimed at documenting how the use of technology facilitates the comprehension of the graphical solution of an ordinary differential equation. In this sense, the use of technological tools is promoted by professionals in educations and Institutions such as the NCTM (National Council of Teachers of Mathematics). An important point of the use of technology is the dynamic representation. In the other hand, it provides constructive frames of reference that represent and articulate dynamically different registers of representation. This research was sustained in a study case with college students. The method used was the comparison, and some outstanding results demonstrate a clear dissociation between the analytic or symbolic answers and the graphic interpretation of the outcomes.

Key words: Representation, resolution, graphical, analytical, qualitative.

Introducción

El propósito de este trabajo es presentar los resultados de la investigación "Resolución de Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden con derive: de la solución algebraica a la solución gráfica". El objetivo es documentar de qué manera el uso de la tecnología facilita la comprensión de las soluciones de tipo gráfico de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden.

Un aspecto importante que conduce a esta investigación tiene que ver con la necesidad de complementar la práctica docente ordinaria con una interacción ordenada del uso de las herramientas tecnológicas (manejo del software) para una comprensión significativa de la solución de una ecuación diferencial. Al respecto, existe la idea en algunos profesores e investigadores que el uso de la tecnología promueve un mejor ambiente de aprendizaje. En este sentido, el uso de la tecnología es promovido por instituciones de educación superior en varios países, así, como por profesionales de la educación e instituciones de carácter gubernamental y no gubernamental como el NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) que promueven el desarrollo y difusión de recursos tecnológicos para los distintos contenidos y niveles educativos (Godino, Recio, Roa, Ruiz y Pareja, 2005).

El uso de la tecnología tiene que ver con la representación dinámica que muestra la pantalla, sobre la cual se pueden hacer visualizaciones concretas acerca de la exploración de posibles resultados y que con el sólo uso de lápiz y papel esto era casi imposible de realizar. Así, la tecnología es una estructura representacional que amplía las posibilidades del pensamiento humano (Kaput, 1994). En este sentido, el propósito de las herramientas tecnológicas es desarrollar habilidades y destrezas en los estudiantes al manipular objetos matemáticos en los procesos de resolución de problemas (Moreno, 2005).

Por otra parte, existen investigaciones que han abordado el estudio de las ecuaciones diferenciales de primer orden, por ejemplo, autores como Sandoval y Díaz (2009), han señalado que el Cabri-Géometre proporciona un nuevo marco constructivo de referencia muy amplio y adecuado a las ecuaciones diferenciales de primer orden, debido a que en él pueden representarse y articularse dinámicamente diferentes registros de representación.

Para llevar a cabo esta investigación se hizo una selección adecuada de situaciones que permitieron estudiar a las ecuaciones diferenciales de primer orden con lápiz y papel (resolución simbólica) y con el uso del derive. Para lo cual se diseñó una investigación sustentada en un estudio de caso en donde participaron estudiantes del segundo año universitario. El método empleado en esta investigación fue de comparación.

Algunos de los resultados más sobresalientes son: en la primera actividad el problema que enfrenta el estudiante es distinguir el tipo de ecuación de acuerdo a sus características. Otro problema que presentaron fue la dificultad para encontrar la ecuación diferencial a través del enfoque analítico. Por último, no existe reflexión sobre los procesos de resolución en las situaciones planteadas. En la segunda actividad, a pesar de la interacción con la herramienta tecnológica, existen dificultades en la introducción y manipulación de la información con dicha herramienta, ya que se presentan resultados diferentes en la solución de la misma ecuación diferencial. Los resultados evidencian una clara disociación entre las respuestas analíticas o simbólicas y la interpretación gráfica de las situaciones planteadas. Por último, el uso del derive creó un ambiente interactivo que motivo a los estudiantes a resolver los problemas planteados, aunque los resultados no fueron los esperados.

Referentes teóricos

Un aspecto importante que conduce a esta investigación tiene que ver con la necesidad de complementar la práctica docente ordinaria con una interacción ordenada del uso de herramientas tecnológicas (manejo del software) para una comprensión significativa de la solución de una ecuación diferencial ordinaria a través del análisis reflexivo; al respecto, se tiene la idea en algunos profesores e investigadores de que el uso de la tecnología promueve un mejor ambiente de aprendizaje en los estudiantes. En este sentido, el uso de la tecnología es promovido por instituciones de educación superior en varios países, así, como por profesionales de la educación e instituciones de carácter gubernamental y no gubernamental como el NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) que promueven el desarrollo y difusión de recursos tecnológicos para los distintos contenidos y niveles educativos (Godino, et al. 2005).

Un aspecto importante en el uso de la tecnología tiene que ver con la representación dinámica que muestra la pantalla, sobre la cual se pueden hacer visualizaciones concretas acerca de la exploración de posibles resultados y que con el sólo uso de lápiz y papel esto era casi imposible de realizar. Así, la tecnología es una estructura representacional que amplía las posibilidades del pensamiento humano (Kaput, 1994). De manera que el propósito de las herramientas tecnológicas es desarrollar habilidades y destrezas en los estudiantes al manipular objetos en los procesos matemáticos (Moreno, 2005).

Por otra parte existen investigaciones que han abordado el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, por ejemplo, autores como Sandoval y Díaz (2009), han señalado que el Cabri-Géometre proporciona un nuevo marco constructivo de referencia muy amplio y adecuado a las ecuaciones diferenciales de primer orden, debido a que en él pueden representarse y articularse dinámicamente diferentes registros de representación. También existen trabajos de investigación que estudian la forma en que las herramientas tecnológicas promuevan la revisión, integración y aplicación de conocimiento a través de la aplicación de estrategias y técnicas que pretenden desarrollar habilidades en los estudiantes mediante del uso de herramientas informáticas y técnicas numéricas en la resolución de problemas.

Desde la experiencia misma, sabemos que los métodos analíticos están limitados a resolver ciertos problemas específicos. Sin embargo, los métodos numéricos no tienen limitaciones a solo formas estándares. Además, muchas de las ecuaciones diferenciales de significancia práctica no se pueden resolver usando métodos analíticos de cálculo, por lo que se necesitan aproximaciones numéricas (Ascheri y Pizarro, 2010).

Planteamiento y análisis de resultados

El curso de ecuaciones diferenciales ordinarias, no sólo es un curso más de matemáticas, es un tema que requiere de un amplio conjunto de conocimientos para su buen desarrollo y entendimiento. Además, requiere de habilidades y destrezas en el manejo de conceptos y conocimientos por parte de los estudiantes para alcanzar el éxito en su entendimiento y comprensión de los fenómenos físicos; es decir, el estudio de estas ecuaciones específicas, no aparecen solo a partir de las familias de curvas geométricas, sino también del intento de modelar diversos fenómenos de la física o la ingeniería e inclusive se ha considerado como la piedra angular de disciplinas como la física y la ingeniería eléctrica. También proporciona un importante instrumento de trabajo en áreas tan diversas como la biología y la economía (Zill, 1988). Por ejemplo, la tasa de crecimiento de la población P es la derivada dP/dt. Puesto que ésta es proporcional a la población, se expresa como el producto, kp, de la población P y la constante k de proporcionalidad (Blanchard, Devaney & Hall Glen (1999).

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

Resolver esta ecuación requiere del dominio de un conjunto de conocimientos y habilidades por parte de los estudiantes. Es decir, primero se debe hallar una solución general a través de algún método algebraico o analítico, para después encontrar cualquier solución particular. En este caso, la solución es $P(t) = ce^{kt}$, proporcionando valores a c se obtiene una familia de graficas que muestran las diferentes soluciones de la Ec. Diferencial.

Otro aspecto importante en el estudio y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales tiene que ver con los enfoques de solución, en primer lugar tenemos el enfoque analítico, que busca fórmulas explícitas que describen el comportamiento de las soluciones. Por ejemplo, las funciones exponenciales dan soluciones explicitas al modelo del crecimiento exponencial. En segundo lugar está el enfoque cualitativo que hace uso a la geometría para tener un panorama del comportamiento del modelo y por último, el enfoque numérico que usa las herramientas tecnológicas para buscar resultados aproximados a la solución.

Para el desarrollo de esta investigación se ha considerado solamente el enfoque analítico y el enfoque cualitativo, para la cual se diseñaron dos actividades:

*Actividad 1***.** Plantea tres situaciones:

a) Se plantea la tabla que contiene cinco ecuaciones diferenciales con los siguientes encabezados y se pide que marquen el tipo de Ecuación que corresponda.

Ecuación	Separable	Homogénea	exacta	lineal

b) Se pide hallar la ecuación diferencial que corresponde a la familia de curvas: $b_1)\quad y = cx^3,\qquad b_2)\quad y^2 = c(x+1)$. Además, bosquejar gráficamente las soluciones.

c) Se pide al estudiante que resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$c_1)\ (1-\frac{3}{x}+y)dx+(1-\frac{3}{y}+x)dy=0,\ c_2)\ \frac{dy}{dx}+y=e^{3x},\ c_3)\ \frac{dx}{dy}=\frac{x^2y^2}{1+x},\ c_4)(y^2+yx)dx-x^2dy=0$$

La situación "a)", busca que el estudiante identifique las características que distinguen a cada tipo de ecuación; la Situación "b)", plantea la necesidad de utilizar el enfoque analítico y cualitativo para encontrar la ecuación diferencial que describe la familia de curvas, además de ilustrar gráficamente cada familia; por último, la situación "c)", establece que el estudiante resuelva las ecuaciones diferenciales mediante el enfoque analítico.

Actividad 2. Promueve el uso de la herramienta tecnológica a través del software (derive) para analizar los resultados de las ecuaciones diferenciales mediante el enfoque cualitativo en las situaciones b y c.

Estas actividades pretenden aportar elementos y recursos que el estudiante utiliza para resolver los problemas planteados. Además, promueve el uso de herramientas tecnológicas para analizar y reflexionar sobre dichos resultados utilizando como marco de referencia el enfoque cualitativo a través del uso de elementos tales como: *extensivos* (las situaciones y campos de problemas de donde emerge el objeto), *ostensivos* (las herramientas semióticas disponibles para representar o para operar con los problemas y objetos involucrados), *actuativos* (procedimientos y estrategias para resolver problemas), *intensivos* (propiedades características y relaciones con otras entidades) y *validativos* (argumentos que sirven para justificar o validar las soluciones). En este sentido, se usa la herramienta tecnológica para dar respuesta a los problemas, lo que permite un mayor dinamismo en el manejo de los objetos matemáticos, dando lugar a razonamientos heurísticos según Lavalle, Micheli y Boché (2003).

Metodología

El diseño de esta investigación tuvo como sustento un caso de estudio a partir de una muestra de 27 estudiantes de segundo año universitario (tercer semestre de Lic. En sistemas computacionales, de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, entre 19 y 21 años). El tipo de método que se empleó fue de comparación a partir de un primer momento y una segunda aplicación en un segundo momento. A estos estudiantes se les dio un curso de ecuaciones diferenciales ordinarias; tomando como referente la literatura recomendada por los programas de estudio; este curso tuvo una duración de 4 meses, tomando 5 horas a la semana de clase. Durante este período se instruyó a los estudiantes sobre el uso del software para analizar de manera cualitativa los resultados encontrados al resolver las ecuaciones diferenciales ordinarias. Posteriormente se diseñó la estrategia para el desarrollo de esta investigación considerando aspectos como el día, la hora, el equipo a utilizar, el escenario, etc. Después del cuarto mes se aplicaron las actividades previamente diseñadas de acuerdo al objetivo de esta investigación.Una vez que resolvieron de manera analítica los problemas se les pidió que analizaran los resultados de manera cualitativa con el uso de las herramientas tecnológicas. Una de las recomendaciones era que explicaran en la medida de lo posible el proceso que realizaban en cada problema.

Análisis de resultados

Después de haber realizado el trabajo y recabado la información escrita así como las presentaciones realizadas en la computadora, se procedió al análisis de la información, la cual se describe a continuación. De la actividad uno, los resultados en la situación "a", fueron los siguientes: separables (23), Homogéneas (3), Exactas (3), Lineales (23). Como se aprecia en este resultado el primer problema que enfrenta el estudiante es distinguir el tipo de ecuación de acurdo a sus características, la simple inspección no les fue suficiente para determinar el tipo de ecuación. Sin embargo, las ecuaciones separables y lineales son las más favorecidas según muestran los resultados. Para la situación "b", los resultados son poco alentadores, es decir de 27 estudiantes, 12 trazaron las dos gráficas solicitadas, 7 solo la primer gráfica y 8 ninguna. De las gráficas mostradas por los estudiantes se desprende que el recurso para el trazo de gráficas fue en menor grado el registro numérico (tabulación). En total solo nueve estudiantes trazaron de manera correcta la gráfica uno y solo un estudiante trazo las dos gráficas de manera adecuada.

Para el análisis en los procesos de solución de las ecuaciones diferenciales planteadas en la situación "c", se consideraron los siguientes elementos: extensivos, ostensivos, actuativos, intensivos y valídativos. Al analizar las respuestas de los estudiantes a los problemas planteados se observa que no existe reflexión alguna en cuanto al proceso de resolución, lo que produce resultados incorrectos en la mayoría de los casos. En este sentido, la tabla 1 resume los resultados sobre los procedimientos requeridos para hallar la solución.

Ecuación	Procedimiento correcto	Procedimiento incorrecto	Sin procedimiento	Total
Ec.1	14	13		27

Ec.2	14	12	1	27
Ec.3	10	16	1	27
Ec.4	6	19	2	27

Tabla 1. Resultados obtenidos en la situación "c"

Como se puede observar, el 40.74% corresponde a las respuestas correctas a través de elementos tales como actuativos, intensivos, valídativos. El 55.55% corresponde a los procedimientos incorrectos y el 3.70% simplemente no contesto nada. Estos resultados muestran que el uso del enfoque analítico a través de los elementos explicativos se ve limitado por las carencias tanto conceptuales como operativas de los estudiantes, cuya actividad la realizaron sin detenerse en la reflexión, el análisis de los procedimientos e interpretación de resultados.

La segunda actividad enmarcada dentro del enfoque cualitativo, busca un acercamiento a la reflexión sobre los resultados emanados de los procesos en la resolución de problemas. El uso de las herramientas para lograr este fin juega un papel importante en esta actividad. Si bien es cierto que el uso de las herramientas tecnológicas permite el desarrollo de habilidades en los estudiantes, también es cierto que plantea al estudiante una serie de retos que ponen a prueba su capacidad en el manejo de una herramienta que requiere de un conjunto de conocimientos para el desarrollo de un trabajo reflexivo en la resolución de las ecuaciones diferenciales. Conocimientos tales como: instrucciones para operar el equipo, instrucciones sobre el manejo del software, conocimientos de la disciplina y habilidades en la interpretación de resultados.

Una revisión detallada de las respuestas planteadas en la situación tres, facilita visualizar diferentes respuestas a una misma pregunta a pesar de que el uso de la herramienta tecnológica permite interactuar de manera dinámica con los resultados. También hay evidencia en las respuestas de los estudiantes sobre el hecho de que no se reflexiona sobre estas, ya que al estudiante solo le interesa introducir la ecuación y que aparezca el gráfico, sin importar aspectos como las escalas o dominios de la función solución. En ningún caso de los registrados en esta investigación se percibe explicación alguna sobre las respuestas en las cuales hagan uso de los elementos actuativos, intensivos y valídativos, a pesar de que el ambiente les permite interactuar de manera dinámica y reflexiva.

Conclusiones

Al finalizar esta investigación se obtuvieron algunos resultados sobresalientes. El primer problema que el estudiante enfrenta es distinguir el tipo de ecuación de acuerdo con sus características. Además, el recurso para el trazo de graficas sigue siendo el registro numérico (tabulación). No existe reflexión en cuanto al proceso de resolución de problemas dentro del enfoque analítico, por consiguiente, la actividad se ve limitada por las carencias conceptuales y operativas de los estudiantes, cuya actividad la realizan sin reflexionar en los procedimientos de solución e interpretación de resultados. Por otra parte, existen serias dificultades al momento de introducir y manipular la información con la herramienta tecnológica, ya que al presentar las gráficas que corresponden a las soluciones de las ecuaciones diferenciales planteadas aparecen gráficas diferentes.A pesar de que el uso de la herramienta tecnológica permite interactuar de manera dinámica con los resultados no se percibe explicación sobre las respuestas a las situaciones planteadas.En esta segunda parte se muestran una clara disociación entre las respuestas analíticas o simbólicas y la interpretación gráfica de los resultados. Por último, el uso del derive creo un ambiente interactivo que motivo a los estudiantes a resolver los problemas planteados, aunque los resultados no fueron los esperados. Sin embargo, si se muestra un avance significativo en el intento de reflexionar sobre las gráficas como respuestas a los problemas planteados.

Referencias bibliográficas

Ascheri, M.E y Pizarro, R.A (2010). *Propuesta para la enseñanza de la resolución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias utilizando OCTAVE*. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de la Pampa, Santa Rosa, Argentina. Recuperado el 28 de Octubre de 2011 de http://ww.uncoma.edu.ar/ academica/seadi/documentos/03.pdf

Blanchard, P., Devaney, R. L. & Hall, G.R. (1999). *Ecuaciones diferenciales*. México: International Thomson Editores.

Godino, Juan D., Recio, Ángel M., Roa, R., Ruiz, Francisco y Pareja, Juan Luis (2005). *Criterios de diseño y evaluación de situaciones didácticas basadas en el uso de medios informáticos para el estudio de las matemáticas*. IX Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM (pp. 235-242). Córdoba: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Kaput, J. (1994). *Democratizing access to calculus: New routes to old roots. Mathematics and cognitive science*. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Lavalle, A., Micheli, E., y Boché, S. (2003). Juicios heurísticos sobre probabilidad en alumnos del profesorado en matemática. *Sociedad Argentina de Educación Matemática 5 (17),* 23 – 32

Moreno, M (2005). *El papel de la didáctica de la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros*. España: Departamento de Matemáticas (UdL).

Sandoval, I. y Díaz, E. (2009). *Ecuaciones diferenciales de 1er orden una perspectiva didáctica con geometría dinámica*, Departamento de Matemática Educativa del IPN. México.

Zill, G. D (1988). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

ANÁLISIS DE LAS ESTRATEGIAS UTILIZADAS POR ESTUDIANTES AL RESOLVER ACTIVIDADES DE CORTE GEOMÉTRICO PARA EL CONCEPTO DE COMBINACIÓN LINEAL

Carlos Oropeza Legorreta, Javier Lezama Andalón
CICATA-IPN. México.
carlos_oropezamx@yahoo.es, jlezamaipn@gmail.com

Resumen: En este documento presentamos la estructura general del proyecto de investigación, el cual centra su atención en el estudio del concepto de combinación lineal. Reportamos algunas experiencias de clase con estudiantes de un curso de álgebra lineal, a partir de la elaboración de situaciones didácticas tomando a la ingeniería didáctica como fundamento teórico y la visualización como una herramienta didáctica, considerando que recientes investigaciones didácticas reconocen generalmente que tales conceptos representan una especial complejidad, debido a su carácter abstracto. Además se incluyen exploraciones basadas en cuestionarios, análisis de algunos resultados parciales de diversas actividades, ejemplos resueltos con el apoyo de software matemático. Finalmente se reportan observaciones de regularidades observadas.

Palabras clave: Álgebra lineal, visualización, situación didáctica

Abstract: This paper shows the general structure of the investigation project, which focus its attention on the study of the linear combination concept. Some student class experiences in a linear algebra course were reported starting from the making of didactic situations taking the didactic engineering as a theoretical basis and visualization as a didactic tool, considering that recent didactic investigations generally recongize that such concepts represent a special complexity, due to its abstract nature. Explorations based on questionaries are included, also analysis of partial results of several activities and of solved examples with the mathematical software support. Finally several views of observed regularities are observed.

Key words: Linear algebra, visualization, didactic situation

Introducción

Existen algunas asignaturas que utilizan como apoyo para su estudio la asociación de conocimientos basados en propiedades físicas, propiedades observadas en la naturaleza, situaciones relacionadas con el desarrollo económico de un país, crecimiento de una población, fenómenos periódicos, etc. Sin embargo, en el estudio del álgebra lineal la mayor parte de los conceptos que se abordan en los libros de texto (recomendados como bibliografía de consulta para escuelas de ingeniería en México) es presentada a partir de definiciones formales. Dichas definiciones en la mayoría de los casos, no parten de conocimientos previos, ni de argumentos provenientes de la física o geometría, sino que se construyen preferentemente con formalidad axiomática. Esto hace entre otras cosas que muchos estudiantes perciban al álgebra lineal como demasiado abstracta y declaran que sus conceptos carecen de aplicación en la realidad. Por otra parte, el álgebra lineal es generalmente considerada uno de los prerrequisitos más importantes para muchos campos de matemáticas, ciencia e ingeniería. Consistentemente, los cursos de álgebra lineal están provistos de una gran variedad de disciplinas a nivel licenciatura. En nuestro caso se prevé que la investigación tendrá lugar en escuelas de ingeniería y considera dos aspectos que la soportan, el primero relacionado con la experiencia docente adquirida en el transcurso de un poco más de una década trabajando precisamente con estudiantes de ingeniería y el segundo tiene que ver con los estudios que diversos teóricos han realizado.

En diversos cursos que he impartido durante poco mas de diez años en la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán UNAM, he observado algunas regularidades entre las cuales se pueden mencionar el hecho de que los estudiantes no pueden dar evidencias tangibles de un significado distinto a los desarrollos analíticos en la solución de un problema; es decir, tienen dificultades con el empleo de las propiedades de los números reales, con el uso de algunos conceptos básicos de álgebra y las gráficas de vectores en tercera dimensión entre otras.

Sierpinska, Nnadozie & Oktaç (2002) realizan una investigación que desarrollan teniendo como antecedentes los trabajos que han estudiado las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje del álgebra lineal.

Por otra parte en su libro de Álgebra Lineal en la página 32, Hoffman & Kunze (1973) afirman que:

> "Ciertas partes del álgebra lineal están íntimamente relacionadas con la geometría. La misma palabra <<espacio>> sugiere algo geométrico, como lo hace el vocablo <<vector>> para muchos. Cuando se avance en el estudio de los espacios vectoriales, el lector observará que mucha de la terminología tiene una connotación geométrica. Para concluir esta sección introductoria sobre espacios vectoriales, se considerará la relación de los espacios vectoriales con la geometría, hasta un grado que indicará al menos el origen del nombre <<espacio vectorial>>".

Además en su el libro de texto Matrix Algebra, Winter (1992) menciona en el prefacio lo siguiente:

> "El álgebra de matrices es vitalmente importante como una herramienta para las materias tales como: química, economía, ingeniería, matemáticas, física y computación científica. Los problemas importantes en estos campos pueden ser reducidos a problemas en álgebra de matrices, los cuales pueden ser resueltos precisamente con la alta velocidad de las computadoras. Por esta razón, los estudiantes suelen tener un primer curso de álgebra lineal en los inicios de su plan de estudios. Una desventaja de esto es que los aspectos geométricos del álgebra

> lineal frecuentemente consiguen poca atención. Esto es desafortunado, por mucho el álgebra lineal debe su existencia a las intuiciones geometrías de sus creadores, y muchos de sus métodos pueden ser mejor entendidos en conexión con sus interpretaciones geométricas".

La estructura del proyecto a desarrollar, tiene como objetivos: la elaboración de situaciones didácticas tomando como fundamento a la ingeniería didáctica, para la construcción del concepto de combinación lineal haciendo uso de la visualización como una herramienta didáctica. Además de aportar diversos cuestionamientos que permitan continuar nuevos estudios relacionados a potenciar el uso de la visualización en álgebra lineal. Se puede esperar entonces que para un estudiante las aportaciones que se deriven de la investigación puedan representar un beneficio, puesto que sería un planteamiento alterno que les proporcionaría cierta flexibilidad al estudiar álgebra lineal. Y la exploración del funcionamiento y efecto del uso de aquellos elementos de carácter visual que se ponen en juego en el momento de trabajar la ingeniería didáctica y su conexión con las características específicas del concepto de combinación lineal. En los supuestos se estructura la hipótesis, misma que afirma que: "Un estudiante alcanza una idea clara y precisa del concepto de combinación lineal cuando es conducido a escenarios de representación geométrica, vía el diseño de una ingeniería didáctica".

La pregunta de investigación por resolver es: ¿Cómo caracterizar la forma en que los estudiantes estructuran el concepto de combinación lineal, después de resolver situaciones didácticas de corte geométrico? Algunos investigadores afirman que los vínculos que matemáticamente parecen claros y sencillos pueden presentar una red compleja para los estudiantes; sus aproximaciones al resolver problemas pueden ser la señal de que no utilizan totalmente las conexiones adecuadas de los conceptos involucrados. Sugieren que teorías como Apos (acción-proceso-objeto-esquema) podrían servir como perspectiva teórica para clasificar el reaprendizaje, así como para dar forma a la noción de vínculo y su papel en el aprendizaje de las matemáticas. Por otra parte, el estudio puede ser útil para aportar información a otras aproximaciones, por ejemplo las que centran su atención en el uso del software que es una propuesta de la cual frecuentemente hacen uso los libros de texto.

La Teoría de Situaciones Didácticas es utilizada como marco teórico y la Visualización como herramienta didáctica en la investigación. La Teoría de Situaciones Didácticas fue formulada inicialmente por Guy Brousseau y retomada, reformulada y enriquecida por una amplia comunidad de investigadores, fundamentalmente de la comunidad francesa de la Didáctica de las Matemáticas. Como metodología de investigación la ingeniería didáctica se caracteriza: Por un esquema experimental basado en las "realizaciones didácticas" en el aula, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza. Y por el registro de los estudios de caso y la validación que es esencialmente interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori. El proceso experimental de la ingeniería didáctica consta de cuatro fases:

1) Análisis preliminares, los mas frecuentes son:

   El análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza.

   El análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos.

   El análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución.

   El análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica.

2) Concepción y análisis *a priori* de las situaciones didácticas: El investigador toma la decisión de actuar sobre un determinado número de variables del sistema que no estén fijadas por las restricciones. Se distinguen dos tipos de variables de comandos:

   Variables macro-didácticas o globales, Concernientes a la organización global de la ingeniería

   Variables micro-didácticas o locales, Concernientes a la organización local de la ingeniería, o sea, la organización de una secuencia o fase.

3) Experimentación, esta supone hacer explícitos los objetivos y condiciones de realización de la investigación a los estudiantes que participarán de la experimentación, el establecimiento del contrato didáctico, la aplicación de los instrumentos de investigación, el registro de observaciones realizadas durante la experimentación.

4) Análisis a posteriori y evaluación: es la ultima fase de la ingeniería didáctica, Los datos se completan con otros obtenidos mediante la utilización de metodologías externas: cuestionarios, entrevistas individuales o en pequeños grupos, realizadas durante cada sesión de la enseñanza, etc.

En contraste, la visualización tiene diversas acepciones por los investigadores que se han encargado de estudiarla, sin embargo, en este trabajo será considerada como: "La capacidad, el proceso, el producto de creación, interpretación, empleo de y reflexión sobre cuadros, imágenes, diagramas, en nuestras mentes, en papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensando y desarrollando ideas desconocidas y anticipando el entendimiento" (Arcavi, 1999). En el trabajo además de reportar algunas exploraciones.

La propuesta de hacer uso de la visualización como una herramienta didáctica tiene como finalidad presentar aspectos que justifican la importancia de implementar estrategias alternativas que propicien en los estudiantes la conformación de ideas estructuradas de forma diferente al transcurrir de una clase convencional.

Desarrollo

A continuación se reportan parte de los Resultados obtenidos por los Profesores que resolvieron la Propuesta Didáctica.

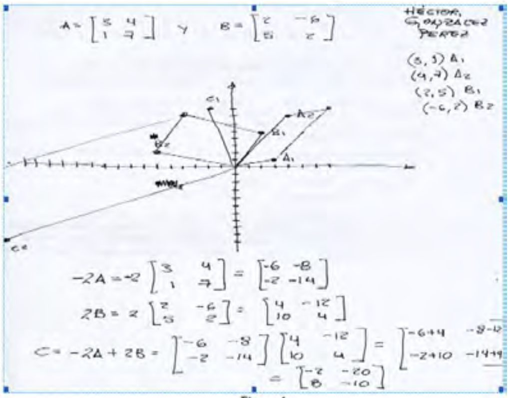
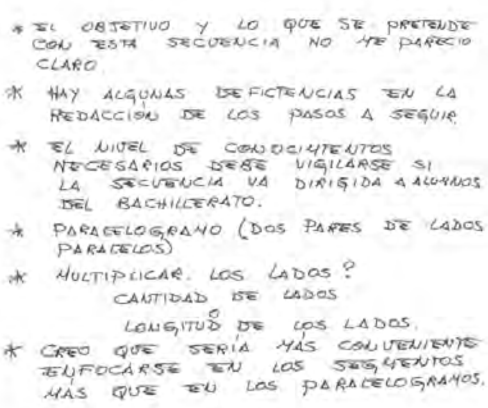


Figura 1

La razón de mostrar este extracto del trabajo es porque las imágenes nos proporcionan evidencias de algunos rasgos característicos que se encontraron en el grupo de trabajo.
Se puede apreciar que el profesor resuelve con claridad la parte algebraica haciendo uso de las operaciones básicas entre matrices, sin cometer errores en procedimiento realizado.



* EL OBJETIVO Y LO QUE SE PRETENDE CON ESTA SECUENCIA NO ME PARECIO CLARO

* HAY ALGUNAS DEFICIENCIAS EN LA REDACCIÓN DE LOS PASOS A SEGUIR

* EL NIVEL DE CONOCIMIENTOS NECESARIOS DEBE VIGILARSE SI LA SECUENCIA VA DIRIGIDA A ALUMNOS DEL BACHILLERATO.

* PARALELOGRAMO (DOS PARES DE LADOS PARALELOS)

* MULTIPLICAR. LOS LADOS ?
CANTIDAD DE LADOS
O
LONGITUD DE LOS LADOS.

* CREO QUE SERÍA MÁS CONVENIENTE ENFOCARSE EN LOS SEGMENTOS MÁS QUE EN LOS PARALELOGRAMOS.

Figura 2

Observe cómo trata de responder de alguna manera al desarrollo preferentemente algebraico que predominó en sus respuestas. La parte rescatable es: aportar observaciones y recomendaciones sobre el diseño mismo de la secuencia.

En contraste a continuación se muestran tres ejemplos, en los cuales la estrategia de visualización fue preferentemente más estructurada de acuerdo con los desarrollos realizados por parte de los profesores que participaron en la puesta en escena de la situación.

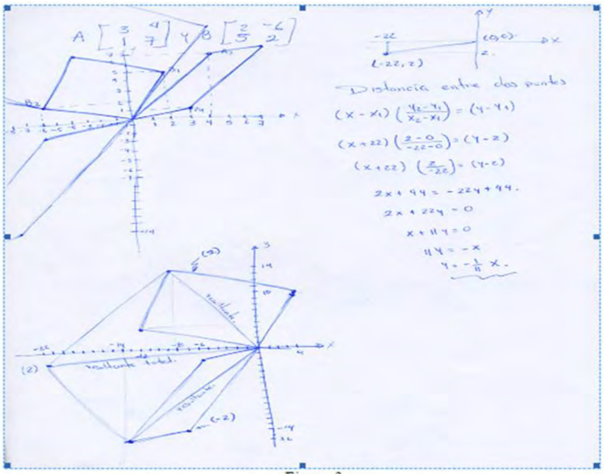


Figura 3

La Figura 3 esta compuesta de dos diagramas principales, en los que en principio se pueden identificar dos momentos.

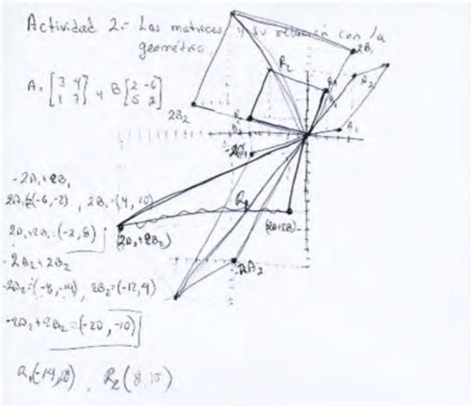


Figura 4

El profesor al resolver la situación trata de manejar los dos enfoques tanto el analítico como el geométrico… (Figura 4)

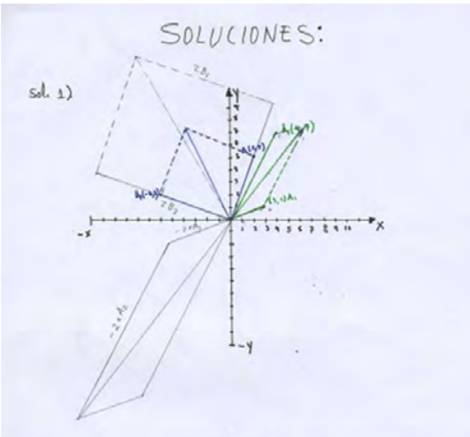


Figura 5

Lo sobresaliente de la solución incluida en la Figura 5 es que centra su atención en aspectos geométricos, es decir en consecuencia hace uso de la visualización y no muestra rasgos de las operaciones con las matrices en forma algebraica.

Exploraciones con uso de tecnología

Se han realizado también exploraciones basadas en el uso de software matemático. A continuación se muestran dos ejemplos.

Figura 6.

La Figura 6 muestra una interpretación en el software Mathematica de la gráfica de una matriz. Se puede observar que se consideran tres parámetros: fila, columna y valor de cada uno de los componentes de la matriz (son valores que se usan convencionalmente)

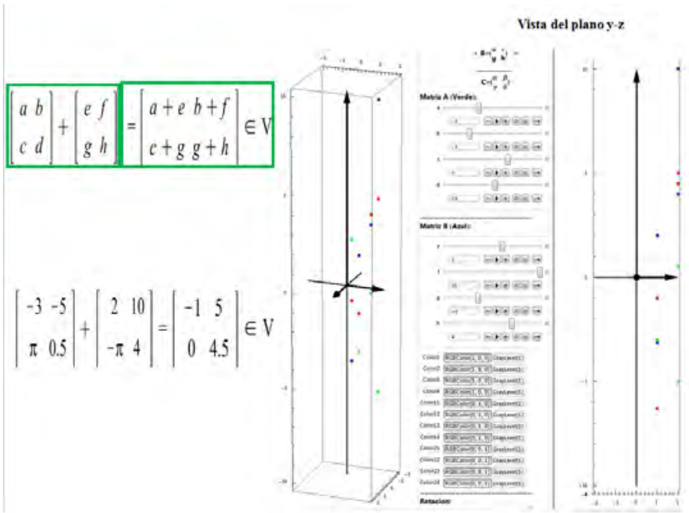


Figura 7.

En la Figura 7 se representa una suma de matrices, se incluyen valores no convencionales, como el de π, y que constituyen las bases para representar la combinación lineal entre matrices. Se puede apreciar que, en términos generales, se trata de una sumatoria de alturas con respecto a un plano.

Observaciones

El diseño de situaciones orientadas a la construcción de un concepto algebraico no resulta sencillo, debido a las características propias del álgebra lineal en el discurso matemático escolar. El uso del software matemático puede favorecer en algunos casos al esclarecimiento del concepto estudiado y estimula la intención en la adquisición del mismo. La dependencia e independencia lineal de polinomios de segundo grado no se relaciona con los puntos de intersección entre las parábolas asociadas a los correspondientes polinomios.

Recomendaciones

Replantear el diseño de la situación didáctica. Aplicar la puesta en escena de la situación didáctica en diversos sistemas educativos ya sean privados y públicos para fortalecer las regularidades observadas y poder contrastar la hipótesis propuesta.

Comentarios

Resolvieron la actividad en forma individual e identificaron las dificultades presentadas al manejar aspectos de carácter geométrico.

El grupo de participantes identificó los objetivos de la actividad en estudio, estrategias y formas de resolver la actividad didáctica en estudio, es decir todos terminan por comprender el concepto.

Finalmente el grupo examinado dejo evidencias verbales de la motivación y diversidad de propuestas que se generan al resolver actividades de esta naturaleza.

El diseño de situaciones orientadas a la construcción de un concepto algebraico no resulta sencillo, debido a las características propias del álgebra lineal en el discurso matemático escolar.

El uso del software matemático puede favorecer en algunos casos al esclarecimiento del concepto estudiado y estimula la intención en la adquisición del mismo.

La dependencia e independencia lineal de polinomios de segundo grado no se relaciona con los puntos de intersección entre las parábolas asociadas a los correspondientes polinomios.

A los antecedentes de geometría analítica que deben cubrir los estudiantes de licenciatura previos al curso de álgebra lineal. Ello permite que los estudiantes puedan resolver situaciones en este contexto

Se relaciona con las propuestas de algunos textos y en forma inicial de la experiencia que adquirí en un diplomado de didáctica de las matemáticas que centraba su atención en el análisis de los polinomios desde una perspectiva visual.

Referencias bibliográficas

Arcavi, A. (1999). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics 52*(3), 215-241.

Dorier, J. (2000). *On the Teaching of Linear Algebra*. Dordrecht. Kluwer Academic Publishers.

Hoffman, K & Kunze, R. (1973) *Álgebra Lineal*. Printece-Hall Interamericana, S.A., México.

Sierpinska, A., Nnadozie, A. & Oktaç, A. (2002). *A study of relationships between theoretical thinking and high achievement in linear algebra*. Research Report, Concordia University, Montreal, Canadá.

Winter, D. J. (1992). *Matrix Algebra*. Macmillan Publishing Company, U.S.A.

ANÁLISIS DE UNA EXPERIENCIA EDUCATIVA EN LA MODALIDAD B-LEARNING

Marta Inés Cirilo, Marta Lía Molina
Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Nacional de Tucumán. Argentina
martainescirilo@yahoo.com.ar

Resumen: En el presente trabajo nos proponemos presentar la experiencia educativa desarrollada durante el 2º Cuatrimestre de dos años consecutivos 2009 y 2010. En el año 2009 y 2010 se aprobaron para el 2do. Cuatrimestre los proyectos de dictado B-Learning usando la plataforma virtual Claroline, para alumnos regulares que quieren promocionar la asignatura.

En este artículo detallamos el diseño elegido para el Aula Virtual de Análisis Matemático, como así también las características del curso. Creemos que la propuesta del B-Learning seleccionada para trabajar en el Curso ha demostrado desde una perspectiva cualitativa, una real potencialidad transformadora de la enseñanza y de los aprendizajes en Matemática.

Palabras clave: Aprendizaje significativo, b-learning, TIC

Abstract: In this paper we propose to introduce the educational experience developed during the 2nd semester of two consecutive years 2009 and 2010. In 2009 and 2010 were approved for the 2nd Semester, the project of teaching by B-Learning using the virtual platform Claroline for regular students who want to promote the subject. This article presents details for the design chosen for the Virtual Classroom of Mathematical Analysis, as well as characteristics of the course. We believe that the proposed B-Learning in the Course has been shown from a qualitative perspective, a real potential for transforming teaching and learning in mathematics.,

Key words: Meaningful learning, b-learning, TIC

Introducción

Los cambios sociales, culturales y económicos que afectan a la sociedad se dan tan aceleradamente que los sistemas de formación tradicionales no son susceptibles de dar respuesta a todas las necesidades de los alumnos. El surgimiento de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación (NTIC) han afectado notablemente, en el campo educativo, la tarea educativa de formación de alumnos y de capacitación de profesionales.

En este contexto, se hace necesario que se redefina el concepto de "educación de calidad", que garantice al alumno conocimientos básicos, valores, habilidades y comportamientos que le permitan insertarse en el mundo laboral e integrarse en la sociedad como un ciudadano crítico y responsable.

Uno de los grandes desafíos actuales de la educación superior en la Argentina es la necesidad de introducir cambios en las prácticas pedagógicas en las aulas universitarias.

En el presente trabajo nos proponemos presentar la experiencia educativa desarrollada durante el 2° Cuatrimestre de los años 2009 y 2010. Representa una alternativa para que los alumnos que regularizaron la asignatura alcancen la promoción.

Mediante la propuesta procuramos que las actividades realizadas conduzcan a los siguientes *Objetivos*:

- Generar un espacio de reflexión y análisis de los temas de la materia, para contribuir en la formación dirigida a captar el real significado de cada tema.
- Fomentar la expresión en forma escrita y la capacidad de justificar adecuadamente las respuestas dadas a partir de los elementos brindados por el marco teórico.

Entornos virtuales de aprendizaje

La utilización de las redes virtuales como soporte de variadas experiencias dentro del mundo educativo generó nuevos entornos virtuales de aprendizaje en los cuales las TIC participan ampliamente.

En dichos entornos se favorece la interactividad, se estimulan estrategias de comunicación y colaboración asincrónica y sincrónica, se facilita la comunicación a distancia, se propician las tareas referidas a hacer más accesible, editable y publicable la información compartida.

El Dr. Bello (2005) denomina a los entornos virtuales de aprendizaje aulas sin paredes y afirma que es un espacio social virtual, cuyo mejor exponente actual es Internet, no es presencial, sino representacional, no es proximal, sino distal, no es sincrónico, sino multicrónico.

E-Learning es la ampliación del entorno de aprendizaje más allá de los tradicionales límites físicos, geográficos y temporales, a través del uso de tecnologías digitales en red. Prieto Castillo, D y Van de Pol, P., 2006, pág. 12.

Entre estos nuevos espacios educativos el B-learning ha adquirido gran importancia en los últimos años, y adoptamos la caracterización dada por Fainholc, B. cuando dice:

> … se podría acordar que el b-learning se define y se manifiesta en el contexto pedagógico como una planeada combinación de abordajes de enseñanza y por ende de situaciones de aprendizaje, que incluye una diversidad de medios, mediados por diversos códigos simbólicos y cara a cara con diversas estrategias de enseñanza, en línea y fuera de línea a través de sistemas tecnológicos, eminentemente favorecedores de la comunicación instantánea y la realización de trabajos e investigaciones colaborativas, todos pretendiendo mejorar los procesos educativos al apelar a la interactividad conectiva. Fainholc, 2007, pág 6.

Antecedentes y Contexto actual

La materia Análisis Matemático se dicta en forma tradicional durante el 1er. cuatrimestre del 2do. Año de las carreras de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de Tucumán (FACE-UNT). Se determinó que más de un 15% de alumnos se inscribe nuevamente en la materia para no rendir los exámenes finales. Es así como desde el año 2004, en el 2do. Cuatrimestre, se tomó como iniciativa el dictado de la asignatura en forma semi-presencial para alumnos regulares que quieren promocionarla.

Las experiencias anteriormente mencionadas nos mostraron que el grado de pro-actividad del estudiante en su proceso de aprendizaje, condicionado al creciente grado de autonomía en su aprendizaje, le permiten el uso estratégico de los recursos educativos puestos a su disposición.

El utilización cada vez más frecuente de entornos de aprendizaje en la educación universitaria hace que la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de Tucumán (FACE-UNT) adopte la Plataforma virtual de software libre Claroline @2001-2009. El uso de esta plataforma constituye una buena herramienta para apoyar los procesos de aprendizaje del alumnado y las prácticas pedagógicas de los docentes, puesto que Internet es un vehículo que permite diversidad de formas de comunicación mediada por el texto y los recursos audiovisuales.

Es por ello que en los años 2009 y 2010 el Consejo Directivo de la Facultad aprobó para el 2do. Cuatrimestre (Res. Nº 137-HCD-09 y Nº 293-HCD-10), los proyectos de dictado B-Learning de la Asignatura Análisis Matemático usando la plataforma virtual Claroline, para alumnos regulares que quieren promocionar la asignatura.

Diseño del curso

Para el diseño tuvimos en cuenta los siguientes principios psicopedagógicos cognoscitivos

- *Autonomía organizativa y el equilibrio cognoscitivo* como fuente de aprendizaje duradero. (conflicto cognitivo producido entre los aprendizajes previos y los nuevos esquemas que ofrecen los materiales)
- *Secuencialidad conceptual* (el alumno conoce la estructura de la materia de estudio, su organización y su relación con otras disciplinas)
- *Andamiaje cognoscitivo* (organizadores que ayuden a centrar la atención, relacionar ideas y recordar la información previa)

Es por ello que para trabajar con la modalidad B-Learning se diseñó y se implementó la preparación de los materiales didácticos haciendo uso de las herramientas tecnológicas de la plataforma que favorecen el proceso de enseñanza y de aprendizaje de la disciplina matemática. El uso del lenguaje con diferentes vocabularios, imágenes fijas o en movimiento, sonido y las herramientas tecnológicas de la web que se conocen como Web 2.0 fueron un aporte muy importante para el aprendizaje interactivo y el trabajo colaborativo que se propuso en el proyecto.

El diseño responde a un análisis de las características de los alumnos, los contenidos a abordar en cada caso, haciendo uso de las posibilidades que brindan las TIC para la educación. El hecho de que los asistentes a este curso sean alumnos que regularizaron la materia, hace que cuenten con *conocimientos* e *ideas "previas"* que favorecen la comunicación bidireccional entre docentes y alumnos.

Característica de un Curso Virtual

Un curso virtual debe planearse con objetivos muy específicos con materiales precisos, no redundantes y con actividades evaluativas que permitan comprobar el cumplimiento de los objetivos propuestos. También es importante tener en cuenta que el diseño y todos los materiales preparados deben favorecer la acción creadora del estudiante orientándolo a la búsqueda, investigación e integración de contenidos. El papel del estudiante puede ser desde receptor hasta generador de información, transformándose así en protagonista de su propia formación. Hay además que tener en cuenta las características que tienen los estudiantes destinatarios del curso. La estructura de un curso diseñado para estudiantes motivados y con una base de conocimientos elementales formada no debe ser la misma que la de un curso diseñado para estudiantes que no tengan estas características.

Característica del curso Análisis Matemático con modalidad B-Learning

Esta modalidad cubre necesidades que no son contempladas en el dictado tradicional (1er. cuatrimestre), a saber:

- Flexibiliza la dedicación horaria a la asignatura a fin de que los alumnos pudieran responder con su propio ritmo.
- Elección entre cuatro horarios diferentes a fin de que los alumnos puedan asistir al encuentro semanal, contribuyendo de esta manera a crear un ambiente más distendido.
- Asistencia tutorial presencial y virtual para reforzar conceptos fundamentales de la materia.

El curso diseñado en la modalidad B-Learning combina:

- Encuentros tipo Aula - Taller (actividad colaborativa teórico-práctica), con actividades que tienen sus bases en el uso de los recursos disponibles en la Plataforma Virtual Claroline. El trabajo grupal, en los encuentros, se plantea para favorecer las interacciones multidireccionales y a fin de resolver el problema de la *escritura simbólica,* propia del lenguaje matemático, por parte de los alumnos en la devolución de las actividades programadas.
- Actividades propuestas para trabajar en forma individual antes de los encuentros presenciales con material preparado para tal fin.

La elección del diseño de este curso virtual se basa fundamentalmente en la producción de los contenidos, con aporte en menor grado de las comunicaciones. También tuvimos en cuenta el hecho de que la simbología propia de la matemática restringe el uso de algunas herramientas de la Web 2.0.

Materiales didácticos

Los materiales de aprendizaje se pensaron y se elaboraron con una lógica diferente a la de otros materiales, ya que incorporan y relacionan imagen, sonido, vídeo, texto y elementos telemáticos en forma de recursos para el aprendizaje, creando así el máximo de conectividad y de interactividad.

Entre los materiales didácticos que se elaboraron se encuentran:

- La *Guía didáctica,* muestra los lineamientos generales para el trabajo a desarrollar dentro del curso, sirve como orientadora de los contenidos y actividades a realizar. A partir de ella el alumno conoce los objetivos, metodología de trabajo, las actividades, especificaciones de la materia, criterios de evaluación, bibliografía necesaria, cronograma, etc.
- Las *Clases virtuales***,** los contenidos de cada módulo de aprendizaje están dados a través de una clase virtual, recurso principal de mediatización, en el que se encuentra integrados los contenidos, fuentes de información y actividades. Las clases virtuales son presentadas al alumno como una conversación didáctica. En las mismas se incluyen videos realizados con pizarra electrónica que muestran ejercicios desarrollados paso a paso y con una secuencia lógica adecuada.
- Los *Materiales de lectura obligatoria,* por cada clase virtual hay elaborado un material didáctico que es de lectura obligatoria. Dicho material está mediado pedagógicamente y en él los contenidos se presentan en forma clara acompañados con casos relacionados

con la economía y algunos ejemplos resueltos. También se incluyen ejercicios que en su resolución muestran los errores que más frecuentemente se presentan en estos temas.

- Las *Auto-evaluaciones,* la plataforma Claroline, permite la preparación por parte del docente de ejercicios con retroalimentación, para fomentar el trabajo no presencial y promover el aprendizaje continuo de los alumnos, potenciar la capacidad de aprendizaje autónomo o dirigido, para que los estudiantes reflexionen sobre su propio trabajo y puedan actuar a tiempo en el caso de que no hayan alcanzado los objetivos formativos previstos, aprendiendo de sus errores. Complementan las actividades realizadas en los encuentros presenciales, se aplican semanalmente, evaluando contenidos específicos Estas actividades permiten a los estudiantes autoevaluarse y profundizar en el estudio de aquellos contenidos en los que no alcanzan buenos resultados. A la vez, a los docentes nos posibilita el conocimiento más preciso del desempeño de nuestros alumnos sin tener que esperar al primer examen parcial para tener una noción del desempeño de los mismos. O sea que desde el comienzo del curso se puede realizar un seguimiento del estudiante por medio de las actividades prácticas presenciales y las actividades evaluativos presentes en el Aula Virtual de la asignatura.

Los resultados

La actividad académica de la asignatura se desarrolló durante 15 semanas. Contempla doce actividades individuales antes del encuentro; igual número de encuentros presenciales semanales y auto- evaluaciones (controles de lectura comprensiva y práctica) en la Plataforma virtual Claroline en dos horarios diferentes con sus respectivas recuperaciones. Se realizaron evaluaciones continuas y finales de cada unidad. Éstas últimas, de carácter presencial, consistieron en tres exámenes parciales con derecho a recuperar uno de ellos.

La consulta de las estadísticas de acceso a los recursos y actividades del alumno le permite al docente hacer un seguimiento de su participación y rendimiento para poder luego, orientarlo en su trabajo personal.

Estadísticas desde la Plataforma y de la Encuesta

La información brindada a través del *Gráfico 1* nos indica que la mayor cantidad de accesos se registraron en la sección Ejercicios. Esto se debe a que en esta sección se encuentran las *Auto evaluaciones* que son semanales y obligatorias para poder acceder a la promoción.

Se observa una cantidad alta de accesos en las secciones *Material de Lectura Obligatorio y Prácticas,* mientras que la cantidad de accesos a las Clases Virtuales es baja como así también el acceso a la sección Foros de Consultas.

Uno de los resultados que nos llamó la atención fue el acceso a las Clases virtuales solo un 12 % de alumnos accedió a todas ellas. A fin de obtener una valoración de esta propuesta por parte de sus protagonistas "nuestros alumnos" confeccionamos una encuesta on line que se encuentra disponible en el Aula virtual de esta asignatura.

En los Gráficos N° 2, N° 3 y N° 4 mostramos algunas distribuciones de frecuencias de las respuestas a los indicadores de la opinión de los alumnos respecto al funcionamiento de la plataforma:

Gráfico N°1: Cantidad de accesos a Clases, Ejercicios, Prácticas, Material de Lectura y Foros

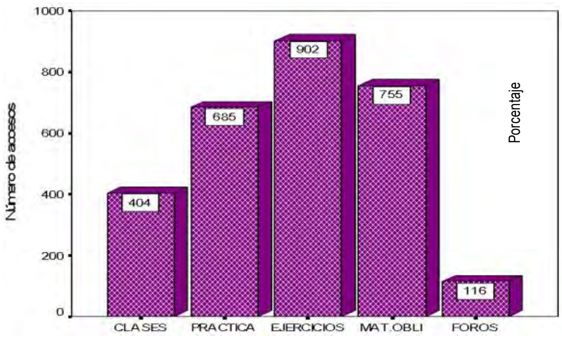


Gráfico N° 2: El acceso al Aula virtual no fue complicado

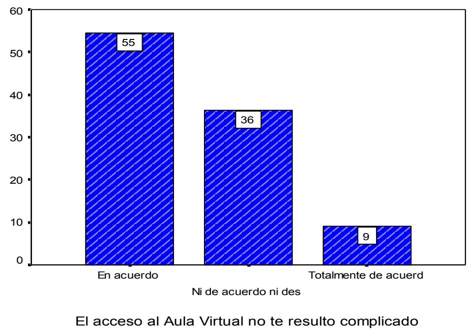


Gráfico N° 3: La organización del Aula virtual fue adecuada

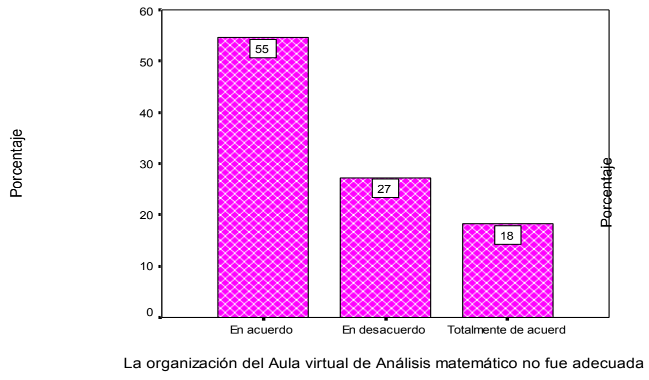
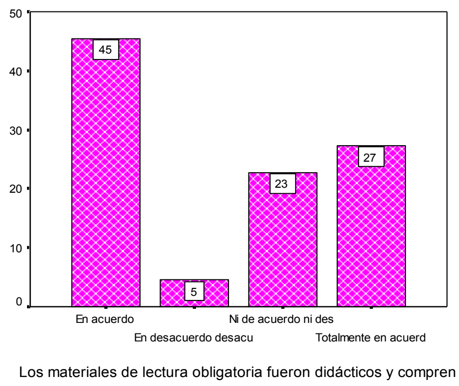


Gráfico N° 4: Los materiales de lectura obligatoria fueron didácticos y comprensibles



En ellos podemos observar que:

❖ El 64% de los alumnos considera que el acceso al Aula Virtual no fue complicado.

❖ El 73% de los alumnos considera que la organización del aula virtual fue adecuada.

❖ El 72% de los alumnos considera que los materiales de lectura obligatoria fueron didácticos y comprensibles.

Reflexiones

Creemos que la propuesta del b-Learning seleccionada para trabajar en el Curso ha demostrado, desde una perspectiva cualitativa, una real potencialidad transformadora de la enseñanza y de los aprendizajes en Matemática.

El diseño elegido para el Aula Virtual de Análisis Matemático cumplió ampliamente las expectativas de las autoras, ya que: favorece el auto-aprendizaje, el "aprender a aprender" y posibilita la construcción de esquemas de relaciones de conceptos de otras disciplinas.

La misma se ve corroborada por las opiniones totalmente favorables de los alumnos principales actores de los procesos enseñanza y aprendizaje.

Referencias bibliográficas

Ausubel, D.; Novak J. y Hanesian. (1983) *Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo.* México: Trillas.

Barberá, E. y Antoni Badia, J. (2004). *Educar con aulas virtuales*. Madrid: Machado Libros S.A.

Barberá, E. (2004). *La educación en la red. Actividades virtuales de enseñanza y aprendizaje*. Barcelona:

Echeverría, J. (2000). Educación y Tecnologías Telemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación*, (24), OEI. Disponible en http://www.rieoei.org/rie24a01.htm

Bello, R. E. (2005). *Educación Virtual: Aulas sin Paredes*. Recuperado el 15 de abril de 2011 de http://www.educar.org/articulos/educacionvirtual.asp

Fainholc, B. (2007). Modelo tecnológico en línea de Aprendizaje electrónico mixto (o Blended learning) para el desarrollo profesional docente de estudiantes en formación, con énfasis en el trabajo colaborativo virtual. *Centro de Diseño, Producción y Evaluación de Recursos Multimediales para el aprendizaje*. Recuperado el 10 de abril de 2011de http://www.cediproe.org.ar/new/archivos/informe_de_investigacion.doc

García, L. (2001). *La educación a distancia: de la teoría a la práctica.* Barcelona: Ariel

Gilbón, D y Contijoch, M.. (2005). La interacción y la interactividad en la educación virtual: *V Anales del Congreso Internacional virtual de Educación virtual, CIVE*. Recuperado el 28 de febrero de 2011 de http://e-spacio.uned.es/fez/eserv.php?pid=bibliuned:19419&dsID=n03gilbon05.pdf

Luque, M. (2004). Dinámica del aprendizaje y de la mediación en las aulas virtuales. *Instituto de Estudios Avanzados para las Américas (INEAM), AICD/OEA.* Recuperado el 15 de marzo de

2011 de http://www.educrea.cl/documentacion/articulos/educacion_a_distancia/06_dinamica_aprendizaje_mediacion_aulas_virtuales.html

Moreira, M. A. (2003). De los Webs educativos al material didáctico Web. *Revista Comunicación y Pedagogía,* Vol. 188.

Onrubia, J. (2005). Aprender y enseñar en entornos virtuales: actividad conjunta, ayuda pedagógica y construcción del conocimiento. *RED. Revista de Educación a Distancia.* Disponible en http://www.um.es/ead/red/M2/

Ortega, J. (2002). Principios para el diseño y organización de programas de enseñanza virtual: Sistematización a la luz de las teorías cognoscitivas y conductuales: *Las nuevas tecnologías en la Universidad.* Badajoz: ICE, España.

Pozo, J. I. (1994). *Teorías Cognitivas del Aprendizaje*. Madrid, Morata

Prieto, D.; Van de Pol, P. (2006). *E-learning, comunicación y educación. El dialogo continúa en el ciberespacio.* Bogotá: RNTC.

Rinaudo, M. y Donolo, D. (2010). Estudios de diseño. Una perspectiva prometedora en la investigación educativa. *Revista de educación a distancia.* Disponible en http://www.um.es/ead/red/22/rinaudo_donolo.pdf

LA UTILIZACIÓN DE LA NUEVAS TECNOLOGÍAS EN EL DESARROLLO DE HABILIDADES Y HÁBITOS EN LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS CON EL APOYO DE UN ENTORNO VIRTUAL DE APRENDIZAJE

César Nicolás Richard Martínez, Julio Alberto Mora Salvador, Alexander Rodríguez Rabelo
Universidad de las Ciencias Informáticas. Cuba
crichard@uci.cu, julio.mora@reduc.edu.cu, arodriguezra@uci.cu

Resumen: En el presente trabajo se expone algunas consideraciones sobre los nuevos desafíos planteados al proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, al incorporar las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC). También se ofrece los resultados obtenidos en algunas investigaciones sobre las aplicaciones de las herramientas tecnológicas, asistentes y software educativos específicos en las clases de matemática, en especial en estudiantes de 1er año de la carrera Ingeniería de la ¨Universidad de la Ciencias Informáticas (UCI), los cuales fueron superiores en relación con el diagnóstico inicial realizado, donde se apreció el significativo avance en el desarrollo de la habilidad de graficar funciones lineales y cuadráticas, así como el desarrollo de algunos valores.

Palabras clave: Autoaprendizaje, habilidad de graficar, software.

Abstract: In this research paper which is being presented to you, we express some considerations on new challenges to the teaching and learning process of mathematics by incorporating to it the Information Technology and Communication (ICT). It also provides the results of some research on the application of technological tools, wizards, and specific educational software mathematics lessons, especially for first year students of Informatics Engineering career at the University of Information Sciences, located in Havana, Cuba. The results obtained with the application of these tools were higher when compared to the initial diagnosis applied at the beginning, which revealed the relevant progress in developing the ability to graph linear and quadratic functions, as well as the development of certain values.

Key words: Self-learning, ability to plot, software

Introducción

En la actualidad, la universidad se enfrenta al desafío impuesto por el desarrollo vertiginoso de las Tecnologías de las Información y las Comunicaciones (TIC), renovando constantemente su encargo social, para proveer a los alumnos de herramientas y conocimientos actualizados y necesarios para los profesionales del siglo XXI.

Las TIC han tenido a su vez, un gran impacto en los métodos de enseñanza-aprendizaje, provocando transformaciones sustanciales en la forma en que tanto docentes como alumnos acceden al conocimiento. En la Universidad de las Ciencias Informáticas (UCI), se ha introducido paulatinamente las TIC con el objetivo de perfeccionar el proceso de enseñanza aprendizaje.

Hoy en día, los estudiantes que ingresan en la Universidad, no cuentan con toda la preparación necesaria en el campo de las matemáticas y en especial, en el desarrollo de habilidades para representar y graficar funciones, lo que incide en un mejor desempeño de su aprendizaje. Estos problemas traen consigo que queden algunas lagunas en el conocimiento matemático que pueden incluso volverse insalvables. Para erradicar estos, es necesario un trabajo extra, tanto de alumnos como de profesores, lo que exige la mayor presencialidad del profesor. Esto se debe en gran medida a la poca utilización y/o explotación del Entorno Virtual de Aprendizaje y a las dificultades de los estudiantes en el estudio individual y su comprobación.

Teniendo en cuenta lo antes expuesto se en el presente trabajo se propone como objetivo: ofrecer un software, que aprovechando las bondades de las TIC, permita promover y reactivar en los estudiantes de nuevo ingreso, los contenidos necesarios en cuanto a la representación de funciones lineales y cuadráticas, imprescindibles para la compresión del análisis matemático.

Este software sirve a la vez de asistente en la realización de las tareas mencionadas.

Materiales y métodos

En el presente trabajo se utilizan conceptos importantes que se definen a continuación:

Objeto de aprendizaje

Los objetos de aprendizaje son los elementos de un nuevo tipo de instrucción basada en el computador y fundamentada en el paradigma computacional de "orientación al objeto". Se valora sobre todo la creación de componentes (llamados "objetos") que pueden ser reutilizados en múltiples contextos. Esta es la idea fundamental que se esconde tras los objetos de aprendizaje: los diseñadores instruccionales pueden construir pequeños componentes de instrucción (en relación con el tamaño de un curso entero) que pueden ser reutilizados varias veces en contextos de estudio diferentes (Wiley, 2000, p. 3).

Entorno Virtual de aprendizaje

Es un entorno de aprendizaje mediado por tecnología, lo cual transforma la relación educativa, ya que la acción tecnológica facilita la comunicación y el procesamiento, la gestión y la distribución de la información, agregando a la relación educativa, nuevas posibilidades y limitaciones para el aprendizaje. Los ambientes o entornos virtuales de aprendizaje son instrumentos de mediación que posibilitan las interacciones entre los sujetos y median la relación de éstos con el conocimiento, con el mundo, con los hombres y consigo mismo (Ospina. D.P, 2012).

Software educativo

Aplicación informática concebida especialmente como medio para apoyar el proceso de enseñanza – aprendizaje (Alvares. K.A, 2009)

La utilización del software prevista parte de los fundamentos del Enfoque Histórico Cultural de (Vigotsky,L.S. 1985), el cual coloca en el centro al estudiante, como sujeto activo y consciente con un objetivo determinado, utilizando diversos medios a su disposición, que es lo que esta teoría asume como mediadores. Además de concebir al profesor como un facilitador y guía del proceso.

Según esta propuesta, en el proceso de enseñanza aprendizaje, se resaltan dos tipos de mediación: mediación social y mediación instrumental: los adultos y los instrumentos, actúan como mediadores del proceso de conocimiento.

Cuando se trata de la mediación social se refiere a la utilización de otra persona como instrumento de mediación para la acción sobre el ambiente, papel de los grupos sociales en la integración del sujeto a las prácticas sociales, papel del otro en la formación de la conciencia individual y el desarrollo de su personalidad.

En el caso de la mediación instrumental, según la concepción vigotskiana, se trata de la utilización por los hombres, en las acciones de transformación de la realidad, de los instrumentos creados por la cultura. En el contexto del presente trabajo, la mediación instrumental será concebida, a través del uso del software.

Resultado y discusión

En esta ocasión se presenta un objeto de aprendizaje para retroalimentar los contenidos, hábitos y habilidades en la representación de funciones lineales y parábolas. Este modo de enseñanza contribuye a que cada alumno no solo sea capaz de desempeñar tareas intelectuales complejas, sino que también se desarrolle su atención, la memoria, la voluntad, a la vez que sienta, ame y respete a los que le rodean y valore las acciones propias y las de los demás, contribuyendo de esta manera también a la formación de valores tales como: responsabilidad, honestidad y disciplina.

Sustentado en estos postulados, se asume que los instrumentos provocan modificaciones en el objeto de la realidad, es el medio de la actividad externa del hombre para conquistar la naturaleza, por tanto los instrumentos actúan en el plano externo, propiciando la interiorización de los conocimientos y su autotransformación.

En este sentido Vigotsky concibe la interiorización como un proceso donde ciertos aspectos de la estructura de la actividad que se ha realizado en un plano externo, pasan a ejecutarse en un plano interno, diferenciando la actividad externa en términos de procesos sociales mediatizados y argumentando que las propiedades de estos procesos proporcionaban la clave para entender el funcionamiento interno (Vigotsky.L.S, 1985).

A partir de lo expuesto, se asume que el docente orienta el trabajo independiente con el empleo del software, como principal mediador en el proceso de conocimiento de los alumnos, sin minimizar el papel que juega el trabajo en grupo y el profesor, los cuales encaminan o facilitan la solución de las tareas; orientan, instruyen, corrigen o demuestran cómo proceder; además de que refuerzan, apoyan y estimulan, permitiendo una mejor interiorización del aprendizaje.

En esta concepción, el medio o entorno social no es una simple condición que favorece u obstaculiza el aprendizaje: es una parte intrínseca del propio proceso y define su esencia. Es por eso que se pretende dar una mayor utilización al software elaborado, partiendo de las posibilidades que brinda desde el punto de vista del autoaprendizaje y la autopreparación de los estudiantes.

En la Universidad de las Ciencias Informáticas por las características de esta carrera es necesario que los estudiantes desarrollen la habilidad de graficar funciones, como base fundamental para el aprendizaje de los contenidos a recibir durante sus estudios.

La computadora y el software educativo, como medios de enseñanza, resultan un eficiente auxiliar del profesor en la preparación e impartición de las clases, ya que contribuyen a una mayor racionalización de las actividades del profesor y los alumnos y organización del proceso de enseñanza aprendizaje.

Para dar cumplimiento al objetivo del presente trabajo se desarrolló una aplicación que permite al estudiante desarrollar la habilidad de graficar funciones lineales y cuadráticas de forma autodidáctica. Dicha aplicación, a diferencia de los principales asistentes matemáticos existentes, que grafican con gran facilidad y rapidez cualquier función, permite al estudiante formar parte del proceso de graficar, o sea, no solo muestra la gráfica de la función que se quiere realizar, sino que es el usuario quien la construye a partir de sus conocimientos.

Se parte de ir desarrollando habilidades paulatinamente en los estudiantes de forma autodidáctica con la ayuda del software. (Ver Figura 1) Primeramente se logra representar puntos en el plano, comprobando la correcta posición de estos en el software, posteriormente, el estudiante puede desarrollar la habilidad de graficar funciones de primer orden (rectas). Como tercer paso el estudiante comienza a graficar funciones de 2do grado (parábolas) para a partir de estas habilidades básicas, poder representar funciones más complejas.

Figuras. 1. Desarrollo de las habilidades al estudiante.

Lograr asimilar estos conocimientos de manera fácil, le permitirá al estudiante adquirir las habilidades básicas necesarias. Y el hecho de que puedan ser realizadas sin la presencia del profesor, deja abierta la posibilidad al estudiante de desarrollar las actividades en el momento que estime oportuno, a partir de su planificación personal, necesidades e intereses.

De esta manera se obtuvo un software educativo que permite: Representar puntos en el plano: El usuario entra al sistema de coordenadas del punto que desea graficar, luego el sistema le ofrece un plano coordenado donde el usuario mediante un clic pondrá el punto en el plano, seguidamente el sistema revisa si el resultado es correcto e informa el mismo, con la corrección en caso de ser necesario (Ver figura 2).

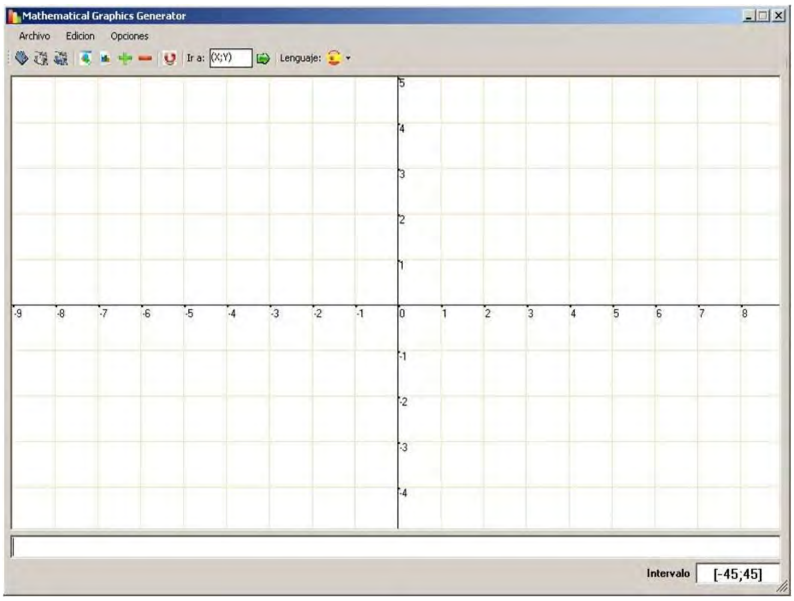


Figura. 2. Representación de puntos en el plano.

Representar rectas en el plano

El usuario primeramente le introduce al sistema la ecuación de la recta que quiere representar, posteriormente, siguiendo la metodología, del trazado de rectas, coloca en el plano de coordenadas dos puntos por los que pasa dicha función, terminando el sistema de representar la recta que une dichos puntos. A continuación el sistema revisa lo realizado, mostrando el resultado de la revisión, así como la recta correcta en caso de existir imprecisiones por el estudiante y cuán lejos se encuentra de la ecuación real, permitiendo que el estudiante intente nuevamente la acción con otra función e incluso con la misma que desea graficar. (Ver figura 3).

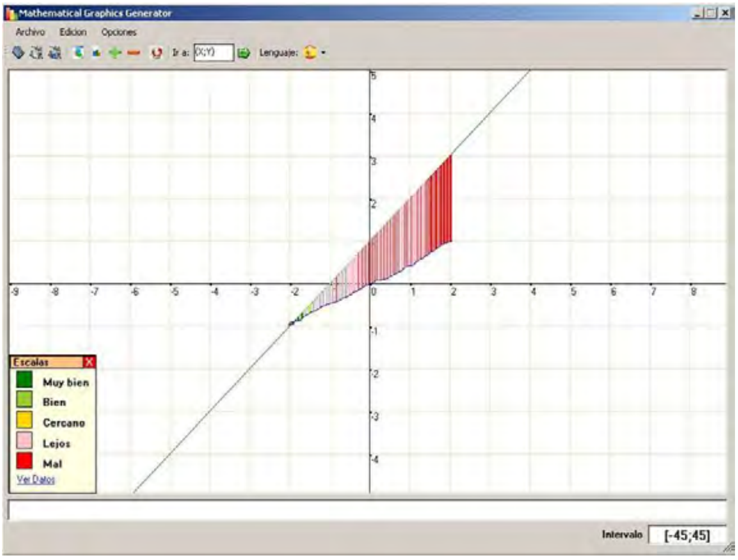


Figura 3. Graficar rectas en el plano.

Graficar parábolas:

En este caso se procede muy similar al anterior, pero el usuario en lugar de entrar dos puntos, entraría tres, donde siempre el del medio debe ser el vértice de la parábola.

De esta manera el estudiante puede practicar individualmente, en el momento que lo estime conveniente y desarrollar las habilidades necesarias.

Este sistema también pudiera integrarse a un entorno virtual de aprendizaje, donde ya desde la no presencialidad, el profesor podría ver el avance del estudiante, su evolución, y planificarle tareas específicas, acorde con las individualidades de cada uno.

Durante dos cursos académicos consecutivos el software elaborado fue aplicado en la Facultad 7, teniendo como base los resultados del diagnóstico inicial y se obtuvieron los siguientes resultados:

De un total de 32 estudiantes que presentaban dificultades significativas en la habilidad de graficar funciones, se logró que 27 de ellos alcanzara un mayor desarrollo en la habilidad referida, lo que se considera un resultado significativo en la utilización del objeto de aprendizaje presentado.

Conclusiones

Se obtuvo un sistema automático capaz de ayudar a los estudiantes en el desarrollo de habilidad de graficar funciones.

El estudiante es capaz, mediante su utilización, de solucionar los problemas que posee en estos contenidos de manera autodidáctica y entrenarse, desarrollando la autoevaluación y autopreparación.

Se logró mejorar la calidad de la preparación didáctica de los docentes en los contenidos referidos a la representación de funciones lineales y cuadráticas. Y la objetivización del proceso de enseñanza–aprendizaje de la matemática.

Referencias Bibliográficas:

Alvares. A.K (2009). Una Concepción Pedagógica para el Desarrollo de Aplicaciones Educativas: http://blogs.rimed.cu/infoedu/2009/06/23/sobre-el-concepto-de-software-educativo/ (14/03/2010)

Ospina, D.P (2010) ¿Qué es un ambiente virtual de aprendizaje?, Docente U. de A: http://aprendeenlinea.udea.edu.co/banco/html/ambiente_virtual_de_aprendizaje/(14/03/2010)

Vigotsky. (1985). *Interación entre enseñanza y desarrollo.* La Habana: Pueblo y Educación.

Wiley, D. A. (2000). Connecting learning objects to instructional design theory: a definition, a metaphor, and a taxonomy. In D A Wiley (Ed.), *The Instructional Use of Learning Objects*: http://reusability.org/read/chapters/wiley.doc (08/29/2004).

DIAGONALIZACIÓN DE ENDOMORFISMOS. APLICACIONES DE LA DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES

Patricia Mayo[1], Pedro Castañeda[2], Sergio Abraham[1], Pedro Fernández de Córdoba[1], Juan Pérez[2]
1. Departamento de Matemática Aplicada. Universidad Politécnica de Valencia, 2. España, Cuba.
Departamento de Matemáticas. Universidad de Pinar del Río.
pmayo@mat.upv.es, pcasta@mat.upr.edu.cu, sabraham@mat.upv.es, pfernandez@mat.upv.es, jperez@mat.upr.edu.cu.

Resumen: En este trabajo trataremos el proceso de diagonalización de endomorfismos y las aplicaciones que tiene en la resolución de problemas de álgebra lineal. Dicho trabajo se enmarca en un proyecto de colaboración entre la Universidad Politécnica de Valencia (España) y la de Pinar del Río (Cuba), relativo a la enseñanza de las matemáticas en carreras de ingeniería. El proceso de diagonalización de la matriz A consiste en encontrar la matriz diagonal D (que contiene a los autovalores) y la matriz de cambio de base P no singular (que contiene a los autovectores) y que cumplen la igualdad siguiente: A = PDP^{-1}

Siendo la matriz A diagonalizable, veremos cómo utilizar la diagonalización de matrices en modelos donde se tenga que calcular potencias, raíces y exponencial de una matriz mediante el asistente matemático DERIVE.

Palabras clave: Diagonalización, valor y vector propio.

Abstract: In this work we will have to do with process endomorfismos's diagonalization and the applications that have in the resolution of problems of linear algebra. Such work is delimited in a project of collaboration among the Polytechnic University from Valencia (Spain) and the one belonging to Pinar of the River relative to the teaching of mathematics in racing of engineering (Cuba). The process of diagonalization of the womb A the D consists in finding the diagonal womb (that he contains to the moral values) and the womb of base change nonsingular P (that he contains to the vectors) and the fact that they obey equality following: $A = PDP^{-1}$

Being the womb A diagonalizable, we will see how utilizing the diagonalization of wombs in models where it be had to calculate potencies, roots and exponential of an intervening womb the mathematical assistant DERIVE.

Key words: Diagonalization, value and own vector.

Introducción

Este trabajo se enmarca en una práctica de ordenador que se desarrolla con estudiantes de ingeniería de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales, de la Universidad Politécnica de Valencia y a la carrera de Ingeniería en Telecomunicaciones y Electrónica de la Universidad de Pinar del Río, Cuba. Según la experiencia de los profesores de esta disciplina se conoce que a pesar de que los estudiantes recibieron durante cursos precedentes formación en temas del Álgebra y después un curso introductorio universitario, algunos presentan obstáculos que aún perduran en el conocimiento del Álgebra. A través de la teoría del obstáculo epistemológico de Bachelard y de la experiencia en la enseñanza del Álgebra por muchos años auxiliados en el uso del asistente matemático DERIVE se logró que los estudiantes hicieran una correcta apropiación de los conocimientos y su aplicación al campo de desarrollo de su perfil profesional.

Marco teórico conceptual

> ¨Un obstáculo epistemológico se incrusta en el conocimiento no formulado. Costumbres intelectuales que fueron útiles y sanas, pueden después de un tiempo obstaculizar" (Bachelard, 1976, p.20). "Uno de los grandes aportes que realizó Bachelard a la moderna teoría del conocimiento fue sin duda alguna el de obstáculo epistemológico; estos son dificultades psicológicas que no permiten una correcta apropiación del conocimiento objetivo" (Villamil, 2008).

Un obstáculo es una concepción que ha sido en principio eficiente para resolver algún tipo de problema, pero que falla cuando se aplica a otro. Para superar tales obstáculos se precisan situaciones didácticas diseñadas para hacer a los alumnos conscientes de la necesidad de cambiar sus concepciones (Godino, citado en Ruiz, 2006).

Tomando como base lo anterior podemos entender que para que el alumno pueda trabajar primero debe comprender lo que se le está solicitando en el problema. Una vez comprendido, el alumno puede aplicar el primer hábito mental para el pensamiento algebraico: HACER-DESHACER, siendo esta la capacidad no solamente para usar un proceso con el fin de llegar a una meta, sino también para entender suficientemente bien el proceso como para regresar desde la respuesta hasta el punto de partida. En la aplicación de la diagonalización de endomorfismo es necesario vencer los obstáculos de resolver, entre otros, sistemas de ecuaciones y obtener raíces de ecuaciones algebraicas. Así el estudiante puede trabajar con formas más simplificadas para facilitar los cálculos en las distintas aplicaciones, como puede ser la exponencial de una matriz (Abraham, Fernández, Isidro y Mayo, 2010). En el proceso de diagonalización son necesarias algunas definiciones: siendo *A* una matriz cuadrada de dimensión *n:* un escalar $\lambda \in \Re$ se dice valor propio de la matriz *A* si existe un vector *v* no nulo tal que: $A\ v = \lambda\ v$. El vector *v* recibe el nombre de vector propio de la matriz *A*. (Pérez, 1999).

Como bien se conoce del Álgebra, el objetivo es encontrar la matriz diagonal D (que contiene a los autovalores) y una matriz de cambio de base *P* no singular (que contiene a los autovectores), que cumplen la igualdad siguiente: $A = PDP^{-1}$.

Propuesta Metodológica

Después de orientar la teoría sobre la diagonalización, el estudiante está en condiciones de subsanar los obstáculos presentados al inicio del curso haciendo un resumen o algoritmo, si es posible, sobre el problema de la diagonalización.

Paso 1: Calculamos el polinomio característico p (λ).

Paso 2: Descomponemos p (λ) calculando sus raíces. Una vez hecho esto, tenemos calculados los valores propios y sus multiplicidades algebraicas.

Paso 3: Calculamos las multiplicidades geométricas, $d_i = n - rg(A - \lambda_i I)$

Paso 4: Aplicamos el teorema anterior (criterio de diagonalización).

Paso 5: Obtenemos bases de los subespacios propios $V_{\lambda_i} = Ker(f - \lambda_i I)$.

Paso 6: Uniendo estas bases se obtiene una base de V para la cual la matriz asociada es D. Así pues la matriz de cambio de base, cuyas columnas son las coordenadas de estos vectores propios, es la matriz de paso P que verifica $D = P^{-1}AP$.

Paso 7: Se orientan actividades que se resuelven dentro de un marco computacional con el uso de un Asistente Matemático, en este caso utilizamos el DERIVE.

Diagonalización de una matriz cualquiera

Teorema:

La condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada sea diagonalizable es que exista una base del espacio vectorial formada por vectores propios del endomorfismo asociado a la matriz dada.

Se le recuerda al estudiante cuando los valores propios se repiten.

Teorema: **(**Condición de orden y rango)

La condición necesaria y suficiente para que una matriz A sea diagonalizable es que para cada valor propio λ_i de orden de multiplicidad r_i se verifique rango $(A - \lambda_i I) = n - r_i$.

Proposición

Sea V un espacio vectorial sobre K de dimensión n, f un endomorfismo de V y sea A la matriz asociada a f respecto de una base de V. Dado $\lambda \in K$, se verifica:

1. $V_\lambda = Ker(f - \lambda I)$.

2. V_λ es un subespacio vectorial de V.

3. dim(V_λ) = n - rg(A - λI).

4. λ es autovalor de f $\Leftrightarrow$ det(A - λI)=0.

Al subespacio V_λ recibe el nombre de *subespacio propio* de λ.

Polinomio Característico

Según hemos visto, para un endomorfismo f de matriz asociada A, un escalar λ es un valor propio de f si, y solo si, det(A - λI) =0; ahora bien, considerando el escalar λ como indeterminada, este determinante

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

Es un polinomio en λ, p(λ), de grado n que recibe el nombre de *polinomio característico* de f.

Llamaremos *multiplicidad geométrica* de λ_i a la dimensión d_i del subespacio propio V_{λ_i}, esto es: d_i = dim(V_{λ_i}) = n - rg(A-V_{λ_i} I)

La relación entre las multiplicidades algebraicas y geométricas viene dada por el siguiente resultado.

Proposición

Sea V un espacio vectorial sobre K de dimensión n y sea f: V $\rightarrow$ V un endomorfismo de V de matriz asociada A y sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ sus valores propios distintos. Entonces para cada i=1,..., r se tiene $1 \le d_i \le \alpha_i$.

Aplicaciones de la Diagonalización

En cuanto al cálculo de la *exponencial de una matriz*, en analogía con el desarrollo de Taylor en serie de potencias de e^x para $x \in R$, según Taylor:

$$\text{TAYLOR(EXP(x), x, 0, 7)} = \frac{x^7}{5040} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1$$,

definimos la exponencial de una matriz cuadrada $A \in M_{nxn}(K)$ como la siguiente serie matricial.

$$e^A = E + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + .. + \frac{A^n}{n!}$$

Del hecho que la matriz *A* sea diagonalizable, es cierto que $A^k = PD^kP^{-1}$ tal como se ha comentado anteriormente y podemos escribir que:

$$e^{A}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(PDP^{-1})^{k}}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{PD^{k}P^{-1}}{k!}=P\left\{\frac{\sum_{k=0}^{\infty}D^{k}}{k!}\right\}P^{-1}=P\left\{\sum_{k=}^{\infty}\frac{\begin{pmatrix}\lambda_1^k & & 0\\ 0 & \lambda_2^k & 0\\ 0 & & \lambda_n^k\end{pmatrix}}{k!}\right\}P^{-1}$$

$$=P\left\{\sum_{k=}^{\infty}\begin{pmatrix}\frac{\lambda_1^k}{k!} & 0 & 0...0\\ 0 & \frac{\lambda_2^k}{k!} & 0 & 0...0\\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots}\\ 0 & 0 & ...0 & \frac{\lambda_n^k}{k!}\end{pmatrix}\right\}P^{-1}=P\left\{\begin{pmatrix}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_1^k}{k!} & & 0...0\\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_2^k}{k!} & 0...0\\ \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots}\\ 0 & 0\ ... & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_n^k}{k!}\end{pmatrix}\right\}P^{-1}=P\begin{pmatrix}e^{\lambda_1} & 0 & 0...\ 0\\ 0 & e^{\lambda_2} & 0\ ...\ 0\\ 0 & 0 & e^{\lambda_3}...0\\ \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots}\\ 0 & 0 & 0...\ e^{\lambda_n}\end{pmatrix}P^{-1}$$

Siendo $\lambda_1,\lambda_2,...\lambda_n$ los autovalores de la matriz A. Hemos de mencionar que el cálculo de e^A también se puede llevar a cabo computacionalmente mediante una serie matricial que se implementa como $s(n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{A^k}{k!}$ y se obtienen distintos valores s(20),s(50),..., s(100) hasta que la serie converja.

Resultados

A continuación se les plantea una situación problemática a los estudiantes de ingeniería que contenga temas básicos del Álgebra Lineal y al mismo tiempo se orienta hacia actividades que se resuelvan dentro de un marco computacional con el uso de un Asistente Matemático, en este caso utilizamos el DERIVE. Es interesante también motivar a los estudiantes en otros conceptos del Álgebra como es el cálculo de valores propios complejos para el trabajo con las ecuaciones diferenciales que estudiarán en el segundo año de su carrera e incluso que se motiven cuando el endomorfismo no es diagonalizable, estas son interrogantes que se resolverán en otros proyectos.

$$A:=\begin{bmatrix}4 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 1 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

Dada la matriz A, diagonalizarla y calcular e^A.

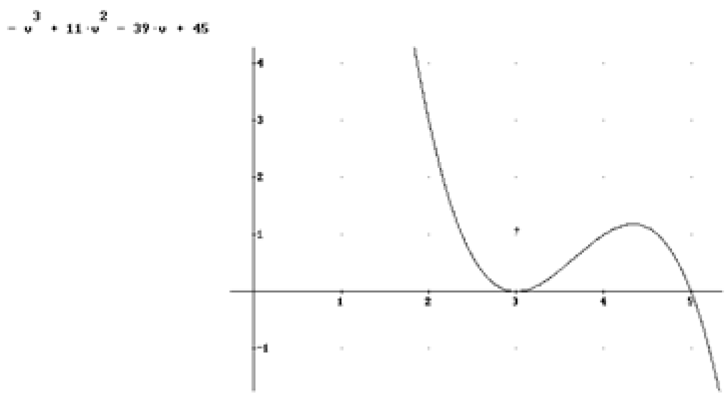
Teniendo en cuenta el uso de las TICs, compartimos el criterio:

> El asistente matemático como herramienta de trabajo en la Disciplina Matemática actuará como un nuevo elemento Didáctico Integrador en las carreras de Ciencias Técnicas. El uso del asistente matemático se ha ido incrementando paulatinamente y actualmente se hace una necesidad como un elemento más dentro del proceso Enseñanza – Aprendizaje. (Castañeda, 2001, p. 523).

El asistente que proponemos es el DERIVE, que ya es conocido por los estudiantes, este tiene ficheros y un tratamiento gráfico que nos proporciona un ambiente muy amigable y capaz de resolver la diagonalización y sus aplicaciones en un tiempo razonable.

El fichero para encontrar el polinomio característico es:

$\text{CHARPOLY}(A,\ v) = -v^3 + 11\cdot v^2 - 39\cdot v + 45$, seguidamente graficamos el polinomio para localizar sus raíces, este nos da un ambiente visual muy claro.



El asistente nos brinda ficheros para calcular los valores propios y sus vectores propios correspondientes.

```
EIGENVALUES(A, v) = [v = 3, v = 5]
EXACT_EIGENVECTOR(A, 3) = [[@2, @1, -@2]]
EXACT_EIGENVECTOR(A, 5) = [[@3, 2·@3, @3]]
```

Inmediatamente se obtiene la matriz diagonal D, de tal forma que se cumpla $D = P^{-1}AP$

Se obtiene la matriz P que es inversible, pues $\text{DET}(P) = -2$

$$P := \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad P\cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como se puede observar la matriz P cumple con sus propiedades de inversible y los estudiantes pueden corroborar todos estos cálculos con el asistente, como también veremos que se cumple $D = P^{-1}AP$.

$$A = P\cdot D\cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Ya una vez obtenida la matriz diagonal, podemos operar con ella en diferentes cálculos ya que:

Una matriz A es *diagonalizable* si es semejante a una matriz diagonal, D, es decir, si existe P regular tal que $D = P^{-1}AP$.

El proceso de cálculo de la matriz diagonal y de la matriz de paso se denomina diagonalización de A.

Recordar que:

Dos matrices cuadradas de orden n, A y B, son *semejantes* si existe una matriz cuadrada, P, con determinante distinto de cero, que satisfaga $B = P^{-1}AP$.

A la matriz B se le llama transformada de A mediante la matriz de paso P.

Propiedades:

1. Si A y B son semejantes, entonces son equivalentes.
2. Si A y B son semejantes, tienen el mismo rango.
3. Si (A,B) y (C, D) son semejantes con la misma matriz de paso, entonces A+C es semejante a B+D con matriz de paso P.
4. Si A y B son semejantes con matriz de paso P, y n es un número natural, $A^n \, y \, B^n$ son semejantes con matriz de paso P.

Para calcular e^A, procedemos como explicamos anteriormente

$$e^A = I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + .. + \frac{A^n}{n!}$$

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(PDP^{-1})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{PD^k P^{-1}}{k!} = P\left\{\frac{\sum_{k=0}^{\infty} D^k}{k!}\right\}P^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix}1&-1&-1\\2&0&1\\1&1&1\end{bmatrix}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\begin{bmatrix}5&0\\0&3\\0&0\end{bmatrix}}{k!}\begin{bmatrix}1&-1&-1\\2&0&1\\1&1&1\end{bmatrix}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\begin{bmatrix}5&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}^k}{k!}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-1&\frac{3}{2}\\-1&1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\2&0&1\\1&1&1\end{bmatrix}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\begin{bmatrix}5^k&0&0\\0&3^k&0\\0&0&3^k\end{bmatrix}}{k!}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-1&\frac{3}{2}\\-1&1&-1\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}1&-1&-1\\2&0&1\\1&1&1\end{bmatrix}\sum_{k=0}^{\infty}\begin{bmatrix}\frac{5^k}{k!}&\\0&\frac{3^k}{k!}\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&-1\\2&0&1\\1&1&1\end{bmatrix}\sum_{k=0}^{\infty}\begin{bmatrix}\frac{5^k}{k!}&0&0\\0&\frac{3^k}{k!}&0\\0&0&\frac{3^k}{k!}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-1&\frac{3}{2}\\-1&1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\2&0&1\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^5&0&0\\0&e^3&0\\0&0&e^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-1&\frac{3}{2}\\-1&1&-1\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} \frac{e^5}{2}+\frac{e^3}{2} & 0 & \frac{e^5}{2}-\frac{e^3}{2} \\ e^5-e^3 & e^3 & e^5-e^3 \\ \frac{e^5}{2}-\frac{e^3}{2} & 0 & \frac{e^5}{2}+\frac{e^3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 84.24934801 & 0 & 64.16381108 \\ 128.3276221 & 20.08553692 & 128.3276221 \\ 64.16381108 & 0 & 84.24934801 \end{bmatrix}$$

Cálculos hecho con DERIVE

Utilizando la expresión $s(n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{A^k}{k!}$, podemos observar que mientras más términos usemos más exacto es el resultado, ya que estamos representando a la exp(x) por un desarrollo en series de potencias.

$$S(5) = \begin{bmatrix} 54.90833333 & 0 & 36.50833333 \\ 73.01666666 & 18.4 & 73.01666666 \\ 36.50833333 & 0 & 54.90833333 \end{bmatrix} \qquad S(50) = \begin{bmatrix} 84.24934801 & 0 & 64.16381108 \\ 128.3276221 & 20.08553692 & 128.3276221 \\ 64.16381108 & 0 & 84.24934801 \end{bmatrix}$$

Se les orienta a los estudiantes calcular cos(A), es decir,

$$\mathrm{COS}(A) = R(n) := \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \cdot A^{2\cdot k}}{(2\cdot k)!}$$

Entre otras aplicaciones de la diagonalización podemos destacar:

El cálculo de la *raíz cuadrada de una matriz diagonalizable* A se puede calcular como $PD^{\frac{1}{2}}P^{-1}$, en la que $D^{\frac{1}{2}}$ es una matriz diagonal que se obtiene hallando la raíz cuadrada de los elementos de la diagonal de la matriz D.

$$A^{1/2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{1/2} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1.984059392 & 0 & 0.2520085849 \\ 0.5040171699 & 1.732050807 & 0.5040171699 \\ 0.2520085849 & 0 & 1.984059392 \end{bmatrix}$$

Respecto al cálculo *de la potencia de una matriz diagonalizable*, dada una matriz $A \in M_{nxn}(K)$ diagonalizable en K tal que $A = PDP^{-1}$ y $m \in N$ es un exponente, se tiene que $A^m = PD^mP^{-1}$ donde la matriz D^m es diagonal y se obtiene elevando al exponente m los elementos de la diagonal de la matriz *D*.

$$: A^{46} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{46} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7105427358044148764693867730577 7 & 0 & 71054273571578549527286176209848 \\ 14210854714315709905457235241969 6 & 8862938119652501095929 & 14210854714315709905457235241969 6 \\ 71054273571578549527286176209848 & 0 & 7105427358044148764693867730577 7 \end{bmatrix}$$

Conclusiones

En la experiencia que acabamos de exponer se ha explicado cómo utilizar los conceptos del Álgebra Lineal en algunas aplicaciones de la diagonalización, como es la exponencial, el cálculo de una potencia y la raíz cuadrada de una matriz. En la misma los estudiantes se sintieron motivados desde el momento que tuvieron que retomar los contenidos de valores y vectores propios. Se resolvieron los obstáculos presentados en cursos precedentes mediante la metodología empleada. Se les motivó explicándoles que en el segundo año de su carrera tendrían que retomar este contenido para resolver los sistemas de ecuaciones diferenciales, por lo que la metodología recibida tendría que ser adaptada a esta nueva situación. Pudieron corroborar las facilidades que les aporta el uso del asistente matemático en el trabajo algebraico, que en ocasiones es engorroso, permitiéndoles defender la idea sobre el rol que deben cumplir las TICs en los procesos formativos.

Referencias bibliográficas

Abraham, S. Fernández De Córdoba, P. Isidro, J.M y Mayo, P. (2010). *Matemáticas Asistidas por Ordenador*. Valencia: Intertech Cooperación.

Bachelard, G. (1976). *La formación del espíritu científico*. México: Siglo XXI.

Castañeda, P. (2001). Necesidad actual del uso del ordenador en el aprendizaje de la Matemática. En S. Abraham, P. Fernández, J. M. San Juan, B. Sáiz y M. Zacarés (Eds) Universidad Politécnica de Valencia (Eds.), *Experiencias Matemáticas y Didácticas en la Universidad de Pinar del Río* (pp. 523-528), España: Universidad Politécnica de Valencia.

Pérez, P. (1999). *Notas de Clase. Álgebra Lineal*. Valencia: Universidad Politécnica de Valencia.

Ruiz, A. (2006). Escuela francesa de didáctica de las Matemáticas y la construcción de una nueva disciplina científica. Costa Rica: San José. CIMM/UCR.

Villamil, L. E. (2008). *La noción de obstáculo epistemológico en Gastón Bachelard*. Recuperado el 26 de abril de 2012 de http://www.ucm.es/info/especulo/numero38 /obstepis.html.

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa