Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

COMITÉ LATINOAMERICANO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA
COLEGIO MEXICANO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA A.C.
• VOL. 27 » AÑO 2014

2014

ALME 27

ACTA LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

Volumen 27

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

ACTA LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA
VOLUMEN 27

Editora:
Patricia Lestón (Argentina)
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Editores Asociados:

Rebeca Flores	(México)	Milton Rosa	(Brasil)
José Marcos López	(México)	Cariño Ruiz	(México)
Mónica Micelli	(Argentina)	Luis Arturo Serna	(México)
Carlos Oropeza	(México)	Daniela Veiga	(Argentina)

Diseño de portada y CD:
Gabriela Sánchez Téllez

Diseño de interiores:
Elizabeth Mariscal Vallarta
Instituto Politécnico Nacional
Karla Patricia Carranza Huerta

Edición:
©2014. Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C.
CMM 040505 IC7
Paseo de las Lomas 67. Parque Residencial Coacalco, CP 55720
Coacalco, Estado de México
México

www.cmmedu.com

ISBN: 978-607-95306-7-9

Derechos reservados.
© Comité Latinoamericano de Matemática Educativa
www.clame.org.mx

Se autoriza la reproducción total o parcial, previa cita a la fuente:

Lestón, P. (Ed.). (2014). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 27. México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Comité Latinoamericano de Matemática Educativa
(CLAME)
www.clame.org.mx

Consejo Directivo

2012 - 2016

Claudia M. Lara Galo
Presidente
presidencia@clame.org.mx

Elizabeth Mariscal Vallarta
Tesorera
tesoreria@clame.org.mx

Cecilia R. Crespo Crespo
Secretaria
secretaria@clame.org.mx

Ángela M. Martín
Vocal Caribe
vocal_caribe@clame.org.mx

Edison de Faria
Vocal Centroamérica
vocal_centroamerica@clame.org.mx

Marcela Ferrari Escolá
Vocal Norteamérica
vocal_norteamerica@clame.org.mx

Patricia Lestón
Vocal Sudamérica
vocal_sudamerica@clame.org.mx

Consejo Consultivo

Egbert Agard
Ricardo Cantoral
Fernando Cajas
Guadalupe de Castillo
Evarista Matías
Rosa María Farfán
Teresita Peralta
Gustavo Martínez Sierra

Comisión de Admisión

Marcela Parraguez
Santa Daysi Sánchez
Christiane Ponteville

Comisión de Promoción Académica

Edison de Faria
Yolanda Serres
Leonora Díaz Moreno
Mayra Castillo
Javier Lezama

Comité Internacional de Relme

Cecilia Crespo Crespo
Ángela Martín
Javier Lezama
Hugo Parra Sandoval
Olga L. Pérez González

Comité
Científico de Evaluación

Acuña Soto, Claudia	*(México)*	Crespo Crespo, Cecilia	*(Argentina)*
Alberto, Malva	*(Argentina)*	Criberio Díaz, Josefina	*(México)*
Aparisi, Liber	*(Argentina)*	Dalcín, Mario	*(Uruguay)*
Arceo, Cristina	*(Argentina)*	De Faria, Edison	*(Costa Rica)*
Arcos, Ismael	*(México)*	Del Puerto, Silvia	*(Argentina)*
Ardila, Analida	*(Panamá)*	De la Cruz Allan	*(México)*
Barbosa, Gabriela	*(Brasil)*	Días, Marlene	*(Brasil)*
Basso, Ademir	*(Brasil)*	Díaz Moreno, Leonora	*(Chile)*
Beyer, Walter	*(Venezuela)*	De la Cruz Oliva, Allan	*(México)*
Blanco, Haydeé	*(Argentina)*	Dolores, Crisólogo	*(México)*
Borello, Mariangela	*(Italia)*	Engler, Adriana	*(Argentina)*
Braicovich, Teresa	*(Argentina)*	Escorza Morales Alfonso	*(México)*
Cabañas Sánchez, Guadalupe	*(México)*	Esper, Lidia	*(Argentina)*
Calvillo, Nancy	*(México)*	Espinoza Ocotlán, Pedro M.	*(México)*
Camacho, Alberto	*(México)*	Fanaro, María de los Ángeles	*(Argentina)*
Camós, Cristina	*(Argentina)*	Farfán, Rosa María	*(México)*
Campistrous, Luis	*(Cuba)*	Flores, Rebeca	*(México)*
Cantoral, Ricardo	*(México)*	Gaita Ipaguirre, Rosa C.	*(Perú)*
Carrillo Yañez, José	*(España)*	García Zatti, Mónica	*(Argentina)*
Castañeda, Pedro	*(México)*	Geromini, Noemí	*(Argentina)*
Castro, Anabelle	*(Costa Rica)*	Gómez Otero, Enrique J.	*(México)*
Ciancio, María Inés	*(Argentina)*	Gómez Reyes, Adriana	*(México)*
Colin Uribe, María Patricia	*(México)*	González de Galindo, Susana	*(Argentina)*
Cordero, Francisco	*(México)*	Hernández Pérez, Hipólito	*(México)*
Córdoba Gómez, Francisco	*(Colombia)*	Hernández Rodríguez, Marco	*(México)*
Corica, Ana	*(Argentina)*	Holgado, Lisa	*(Argentina)*
Correa Zeballos, Marta	*(Argentina)*	Homilka, Liliana	*(Argentina)*

Comité
Científico de Evaluación

Ibarra Olmos, Silvia	*(México)*	Muro, Claudia	*(México)*
Jiménez Martínez, Rafael	*(Cuba)*	Müller, Daniela	*(Argentina)*
Lanza, Pierina	*(Argentina)*	Navarro Sandoval, Catalina	*(México)*
Larios Osorio, Víctor	*(México)*	Nesterova, Elena	*(México)*
Lerman, Nora Inés	*(Argentina)*	Ochoviet, Teresa Cristina	*(Uruguay)*
Lestón, Patricia	*(Argentina)*	Olave, Mónica	*(Uruguay)*
Lezama Andalón, Javier	*(México)*	Olazabal, Ana María	*(México)*
Llanos, Viviana	*(Argentina)*	Oliva, Elisa	*(Argentina)*
Lois, Alejandro	*(Argentina)*	Oliveira Groenwald, Claudia	*(Brasil)*
López Arias, Elpidio	*(Cuba)*	Oropeza Legorreta, Carlos	*(México)*
López Mojica, José Marcos	*(México)*	Ortega, Tomás	*(España)*
López Vera, Lilia	*(México)*	Osorio Abrego, Héctor	*(Panamá)*
Maffey García, Silvia	*(México)*	Otero, Rita	*(Argentina)*
Marcolini, Josefina	*(España)*	Parra, Hugo	*(Venezuela)*
Martín, Ángela	*(Rep. Dominicana)*	Parraguez, Marcela	*(Chile)*
Martínez Vázquez Miriam	*(México)*	Pecharromán, Cristina	*(España)*
Mena, Jaime	*(Chile)*	Peña Rincón, Pilar Alejandra	*(Chile)*
Mercau, Susana	*(Argentina)*	Pérez, Alma Rosa	*(México)*
Messina, Vicente	*(Argentina)*	Pérez, María Angélica	*(Argentina)*
Micelli, Mónica	*(Argentina)*	Pérez González, Olga	*(Cuba)*
Milevicich, Liliana	*(Argentina)*	Petakos, Kyriakos	*(Grecia)*
Minaard, Claudia	*(Argentina)*	Piceno Rivera, Juan Carlos	*(México)*
Miranda Montoya, Eduardo	*(México)*	Pochulu, Marcel	*(Argentina)*
Molfino, Verónica	*(Uruguay)*	Ralph, Adlai	*(Brasil)*
Molina, Juan Gabriel	*(México)*	Ramírez García, Elsa	*(Cuba)*
Montiel, Gisela	*(México)*	Ramos Carranza, Rogelio	*(México)*
Moreno Chandler, Luis	*(Panamá)*	Reséndiz, Evelia	*(México)*

Comité
Científico de Evaluación

Rizo Cabrera, Celia	*(Cuba)*	Sosa, Leticia	*(México)*
Rodríguez, Flor Monserrat	*(México)*	Sosa, Moguel, Landy	*(México)*
Rodríguez, Mabel	*(Argentina)*	Soto, Daniela	*(Chile)*
Rodríguez de Estofán, Rosa	*(Argentina)*	Suárez Téllez, Liliana	*(México)*
Rosas Mendoza, Alejandro	*(México)*	Sureda, Patricia	*(Argentina)*
Rotaeche, Araceli	*(México)*	Testa, Yacir	*(Uruguay)*
Ruiz, Blanca	*(México)*	Torrente, Carmen	*(Argentina)*
Salazar, Pedro	*(México)*	Tuyub Sánchez, Isabel	*(México)*
Salgado, Hilda	*(Colombia)*	Valdivé, Carmen	*(Venezuela)*
Salinas, Jesús	*(México)*	Vázquez Camacho, Rosa	*(México)*
Sánchez Barrera, Julio Moisés	*(México)*	Veiga, Daniela	*(Argentina)*
Sánchez Luján, Bertha Ivonne	*(México)*	Velázquez B., Santiago	*(México)*
Serna, Luis Arturo	*(México)*	Véliz, Margarita	*(Argentina)*
Serres, Yolanda	*(Venezuela)*	Ventura, Marger	*(Brasil)*
Silva de Bona, Aline	*(Brasil)*	Vergara, Marili	*(Argentina)*
Slavin, Mabel	*(Argentina)*	Viramontes, Juan de Dios	*(México)*
Solís Esquinca, Miguel	*(México)*	Vrancken, Silvia	*(Argentina)*
Rodríguez, María Lourdes	*(Cuba)*		

TABLA DE CONTENIDOS

CAPITULO 1: ANÁLISIS DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

Introducción al Capítulo 1 3
Christiane Ponteville

Experiencias innovadoras en evaluación 5
Adriana Engler, Alberto Camacho

El manejo de estrategias de aprendizaje por parte de los alumnos en el nivel superior 15
María Angélica Pérez, Margarita del Valle Veliz, Lucía P. Martin

Análisis del razonamiento de alumnos universitarios en situaciones de validación en geometría analítica 25
Patricia Sastre Vázquez, Carolina Boubée, Ana María Graciela Rey

Herramientas para el cambio en la enseñanza de las matemáticas: algunas posibilidades 33
Agustín de la Villa, Alejandro Lois, Liliana Milevicich, Gerardo Rodríguez

¿Qué modelos epistemológicos subyacen en la enseñanza del álgebra universitaria? 41
Nora Ferreyra, Marcelo Lorenzo, Mei Lee, Fabio Prieto, Daniela Scarímbolo, Carlos Parodi

Club multidisciplinario como escenario para el desarrollo de competencias 51
Pericles Ramírez Jiménez, Jaime L. Arrieta Vera,Gildardo Cortés Bello

Impacto del SAN en el rendimiento académico de alumnos de primer año en la facultad de bioquímica química y farmacia de la UNT 61
Marta A. Correa Zeballos, Berta J. Chahar, Ricardo R. Gallo, Gregorio R. Figueroa, Mirtha A. Moya, Aída E. Fernández

Análisis del tratamiento de la aritmética en los libros de matemática de la colección bicentenario 73
Ángel Míguez Álvarez, Ana Duarte Castillo

Algunas cuestiones advertidas en la implementación de un instrumento de evaluación en el área de la matemática 83
Graciela C. Lombardo, Silvia Caronía, Roxana V. Operuk, Viviana E. Pereyra, Matías J. Corvo, Perla M. Ledesma

La evaluación de competencias en el debate de la evaluación de los aprendizajes universitarios 91
Viviana Cámara

Transversalidad del concepto de independencia lineal en algebra lineal, análisis numérico y análisis matemático II 103
Elisa S. Oliva, María I. Ciancio, Susana B. Ruiz

Hacia un modelo teórico respecto a la enseñanza de las construcciones geométricas que favorezca el trabajo heurístico y las prácticas argumentativas 111
Liliana Siñeriz, Gregoria Guillén, Mª De La Trinidad Quijano

Experiencias de aula que han contribuido a mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática 121
Vivian Libeth Uzuriaga López, Alejandro Martínez Acosta

Una propuesta metodológica para el aprendizaje de conceptos matemáticos basado en competencias 129
Susana B. Ruiz, María I. Ciancio y Elisa S. Oliva

Um estudo das estratégias utilizadas pelos alunos da educação básica ao responderem questões sobre números racionais em avaliações externas no Brasil 135
Rosivaldo Severino Dos Santos, Marcelo Câmara Dos Santos, Tânia M. M. Campos

Por uma educação matemática para além do capital e com justiça social 145
Marco Aurélio Kistemann Jr.

Conocimiento matemático para enseñar geometría analítica a nivel universitario. Elaboración de instrumentos para su análisis 153
Virginia Ciccioli , Natalia Sgreccia

Actitudes de estudiantes de secundaria hacia las matemáticas 163
María del Socorro García González, Rosa María Farfán Márquez

Pesquisas sobre a transição ensino médio e ensino superior 173
Sirlene Neves De Andrade, Marlene Alves Dias, Tânia Maria Mendonça Campos

De los problemas prácticos a los formales: una transición necesaria en el aula de clases 181
Javier García-García

Construcción cognitiva de la raíz cuadrada 191
Mauricio Gamboa Inostroza, Marcela Parraguez González, Patricia Vásquez Saldías

Reforma integral de la educación básica. Transversalidad de contenidos 199
Hanssell G. Caballero V., Evelia Reséndiz B., Ramón J. Llanos P

Niveles de construcción de significado de algunos símbolos matemáticos 209
María Laura Distéfano, María Andrea Aznar, Marcel David Pochulu

Dificultades en el diseño de tareas con modelización 219
Angela Mora Zuluaga, José Ortiz Buitrago

¿Errores u obstáculos epistemológicos? 227
Patricia Sastre Vázquez, Alejandra Cañibano, Rodolfo Eliseo D´Andrea

"Un acercamiento funcional a la resolución de desigualdades matemáticas" 235
Armando Cuevas V., Arturo Rodríguez E., Oscar González O.

Argumentos de estudiantes de nivel medio superior en el IPN sobre funciones que involucran raíces cuadradas 245
María Patricia Colín Uribe, Celia Araceli Islas Salomón, Fernando Morales Téllez

Creencias de los futuros profesores de matemáticas de secundaria acerca de la enseñanza de la matemática en primaria 255
Cecilia Rojas Pardo, Alicia Zamorano Vargas

Estudio de la primera representación en la resolución de problemas 263
Alma Alicia Benítez Pérez, Martha Leticia García Rodríguez

Diagnóstico en estudiantes de nuevo ingreso a nivel superior: competencias y dificultades matemáticas 273
Landy Sosa Moguel, Isabel Tuyub Sánchez, Eddie Aparicio Landa

En el primer año de carreras universitarias ¿es la matemática un problema para los estudiantes? Importancia de competencias específicas 281
Silvia Martínez, Nydia Dal Bianco, María Cristina Martín, Fernando López Gregorio

Fracciones y videojuegos. ¿una razón para jugar? 291
Alfonso Olvera, Alfredo Martínez, Freddy Villamizar, Hugo Estrada

Desarrollo de actitudes hacia el estudio de las matemáticas en educación secundaria. Su relevancia en el logro de aprendizajes esperados 299
Santiago Ramiro Velázquez, Josip Slisko Ignjatov, Hermes Nolasco Hesiquio

La compuesta de dos simetrías con ejes secantes, ¿es una rotación?: una reflexión desde la teoría los modos de pensamiento 309
Károl Lisette Rueda Gómez, Marcela Parraguez González

Tratamiento de la contingencia desde el desarrollo de la competencia de argumentación en el aula de matemáticas 317
Horacio Solar Bezmalinovic, Jordi Deulofeu

Dificultades en la solución de problemas que involucran un enfoque algebraico 327
Carlos Oropeza Legorreta, José Isaac Sánchez Guerra, Carlos Oropeza Ugalde

Un método para identificar niños matemáticamente talentosos 335
Zeidy Margarita Barraza García, José Luis Soto Munguía

Paradoxo de zenão: diferentes interpretações para uma compreensão construtiva 343
Lúcia Cristina Silveira Monteiro

El seminario repensar las matemáticas, la mirada de un estudiante de bachillerato del PIFI 351
David Alfonso Romero, Liliana Suárez Téllez

Ejecución en fluidez verbal y razonamiento lógico matemático: un acercamiento a la relación desempeño lingüístico-rendimiento matemático 355
José Gabriel Sánchez-Ruiz, E. Alejandro Escotto-Córdova, Ana Ma. Baltazar-Ramos, Miriam Gpe. Ruiz-Tafoya

Del reconocimiento de patrones a la generalización 361
Noelia Londoño Millán, Alibeit Kakes Cruz, Ana Lilia Álamo Acevedo

Una estrategia para el desarrollo del sentido numérico en estudiantes en condición de extraedad 369
Nelssy Jiménez Díaz, Faberth Díaz Celis

Análisis de enunciados de problemas matemáticos para la escuela secundaria 379
Elisa Petrone, Mariela Cirelli, Natalia Contreras, Natalia Ferrari, Natalia Sgreccia

Red de colaboración en investigación de la educación estadística 389
José Armando Albert, María Inés Rodríguez, Sergio Hernández, José Luis Torres, Hugo Alvarado, Noelia Bertorello, Gisela Albrecht, Ana María Ruiz

Fatores motivacionais na autorregulação da aprendizagem de estatística de estudantes de psicologia 399
Felipe Franco Gabriel, Maria Helena Palma De Oliveira

Interacción entre objetos matemáticos y representaciones semióticas en diferentes escenarios de aprendizaje. Diseño de situaciones didácticas 409
Nydia Dal Bianco, Silvia Martínez, Fabio Prieto, Mariela L. Ambrosino, Matías A. Juárez

Evaluación de los aprendizajes en matemática 417
Ana Duarte Castillo

La lectura y la interpretación en la universidad 427
Ana María Vozzi, Cristina Lorena Zelaya Galera y María Belén Celis

Acercamientos a la aleatoriedad en la enseñanza obligatoria 433
Teresita Méndez Olave y Leonora Díaz Moreno

Una mirada cognitiva a las transformaciones lineales. Articulación entre las interpretaciones: matricial y funcional 441
Isabel Maturana Peña y Marcela Parraguez González

La formación de conceptos en la resolución numérica de ecuaciones no lineales 451
Marta Caligaris, Georgina Rodríguez y Lorena Laugero

Metodología para el diseño de actividades didácticas basadas en modelación matemática 461
María del Consuelo Macias González y Avenilde Romo Vázquez

¿Cómo generar habilidad para demostrar? 471
Rodolfo Eliseo D´Andrea y Patricia Sastre Vázquez

Autorregulando el aprendizaje del cálculo 481
Patricia Villalonga de García, Susana González de Galindo, Susana Mercau de Sancho y Marta Marcilla

¿Prueba de hipótesis, intervalo de confianza o prueba de significancia? 491
Gudelia Figueroa Preciado, Irma Nancy Larios Rodríguez y María Elena Parra Ramos

El aprendizaje activo como estrategia didáctica para la enseñanza del cálculo 499
Elvira G. Rincón Flores, Dora Elia Cienfuegos Zurita, Delia Galván Sánchez y María de la Luz Fabela Rodríguez

El aprendizaje de la matemática y sus referencias semióticas 507
María Rosa Rodríguez y Jesús Alberto Zeballos

¿Para qué enseñamos estadística? 517
Christiane Cynthia Ponteville

PV aplicado en la resolución de problemas de variación 527
Segundo Javier Caicedo Zambrano y Leonora Díaz Moreno

CAPITULO 2: PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Introducción al Capítulo 2 539
Mónica Micelli

Idoneidad didáctica de un proceso de instrucción en una enseñanza de la estadística con proyectos 541
Stella Maris Figueroa, Sandra Baccelli, Gloria Prieto

Sistemas lineares: do ensino médio às engenharias 551
Maria Alice Veiga Ferreira De Souza, Larissa Martins Simmer

Trabalhando a matemática e desenvolvendo a ciência 561
Renata Camacho Bezerra, José Ricardo Souza, Kelly Roberta Mazzuttilubeck

Actividad reflexiva sobre modelización etno-matemática del trenzado 567
Renata Camacho Bezerra, José Ricardo Souza, Kelly Roberta Mazzutti Lubeck

Una forma divertida de experimentar y jugar con la estadistica 575
Esteban Szigety, Javier E. Viau, Alejandra Tintori Ferreira

Diseño de secuencia didáctica para promover un acercamiento intuitivo de la correlación lineal, en estudiantes del bachillerato tecnológico, utilizando metodología Acodesa 585
Irma Nancy Larios Rodríguez y Benjamín Moran Medina

Explorar y descubrir para conceptualizar: ¿qué es un poliedro? 593
Judith Bertel Behaine, Juan Alberto Barboza

Actividades y problemas en su contexto histórico 599
Gustavo Franco

Caracterización de un banco de pruebas para la enseñanza de ecuaciones diferenciales 607
Felipe Santoyo Telles, Miguel Ángel Rangel Romero, Karla Liliana Puga Nathal, Eliseo Santoyo Telles

Nuevo sistema de evaluación en la cátedra de cálculo II 615
Marta Adriana Correa Zeballos, Ricardo Raúl Gallo, Gloria Moris, Mirtha Adriana Moya, Aida Evangelina Fernández

Construcción de la noción de número irracional en formación de profesores: conflictos semióticos y desafíos 629
Luis Reina, Miguel R. Wilhelmi, Pablo Carranza, Aitzol Lasa

Didáctica de la solución de problemas matemáticos a nivel preuniversitario 639
Andrés Hernández, Yolanda Serres Voisin

Análisis cualitativo de ecuaciones en diferencias y caos 647
Juan Carlos Bressan; Ana Ferrazzi De Bressan

Fútbol: una mirada desde la matemática educativa 657
Alma Iris Pineda Guillen, María Esther Magali Méndez Guevara

Análisis de una evaluación por rúbricas en una actividad matemática universitaria 665
Favieri, Adriana

Relações institucionais existentes para o ensino da noção intuitiva de conjuntos no ensino fundamental e médio no Brasil 673
Ademir Ávila, Marlene Alves Dias

Média aritmética – uma análise das atividades do livro didático de matemática adotados no Brasil 681
José Ivanildo Felisberto De Carvalho, Verônica Gitirana

Construcciones mentales para el objeto recta de Euler 689
Violeta Chávez Aninat, Marcela Parraguez González

Uso de la ISM en el aula de sordos y comprensión del sistema métrico decimal. Edades [17-22] 697
Ignacio Garnica Y Dovala, Mónica G. Astorga Adrián, Andrea Barojas Gómez

Enseñanza experimental del sistema de numeración decimal y la representación cognitiva del número 707
Susana Andrade Neyra, Marta Elena Valdemoros Álvarez

Una película en la clase de matemáticas 717
Marger Da Conceição Ventura Viana

Rescate fraccionario 727
Abel Carmona, Mónica Lisi, Angélica Elvira Astorga y Estela Sonia Aliendro

La geometría en un curso de ingreso a carreras de ingeniería 737
Roxana Scorzo

Las prácticas matemáticas en los inicios del nivel superior 745
María Carmen Quercia, Adriana Laura Pirro, Lucrecia Ethel Moro

Geometría de los números complejos 755
José Fermín Berríos Piña, Jairo Naranjo

Resolución de problemas aditivos por estudiantes de secundaria 763
Mario Hernández Pérez, Aurora Gallardo Cabello

Construcciones y mecanismos mentales para el aprendizaje de la matriz asociada a una transformación lineal 771
Isabel Maturana Peña, Marcela Parraguez González, Miguel Rodríguez Jara

Las cónicas: una propuesta didáctica desde la teoría de los modos de pensamiento 779
Daniela Bonilla Barraza, Marcela Parraguez González, Leonardo Solanilla Chavarro

Rediseño y aplicación de una secuencia de actividades para evitar que estudiantes de nivel medio superior miren a las operaciones de potenciación y radicación como inversas 787
María Patricia Colín Uribe, Celia Araceli Islas Salomón, Fernando Morales Téllez

Testes adaptativos 797
Agostinho Iaqchan Ryokiti Homa, Claudia Lisete Oliveira Groenwald

Ecuación vectorial de una recta: una propuesta didáctica desde la teoría antropológico de lo didáctico 807
Daniela Bonilla Barraza, Jocelyn Díaz Pallauta

Prerrequisito para el tratamiento del límite funcional: inecuaciones 815
Ana María Narvaez, Clarisa Noemí Berman, Marcela Rodriguez

Construcciones mentales para el aprendizaje del Teorema de isomorfismo de grupos 825

Arturo Mena Lorca, Astrid Morales Soto, Marcela Parraguez González

Un dispositivo didáctico para la enseñanza funcional de las matemáticas: las actividades de estudio e investigación AEI 833
Marta Bonacina, Claudia Teti, Alejandra Haidar, Santiago Bortolato, Valeria Philippe

Comprensión del enfoque frecuencial de probabilidad de estudiantes al final del bachillerato tecnológico 843
Jesús Salcedo Prado, Ana María Ojeda Salazar

Enseñanza del concepto de límite de una función mediante sus diversas representaciones semióticas, a nivel licenciatura 853
Marisol Radillo Enríquez, Lucía González Rendón

Criação de tarefas educacionais para o ensino e a aprendizagem de área e perímetro 963
Marcílio Dias Henriques, Leandro Gonçalves Dos Santos, Meiriele Nonato De Oliveira, Roberta Gualberto Ferreira, Theysmara Menon

De un videojuego a las ecuaciones del tiro parabólico: una propuesta didáctica 871
Andrés Ruiz Esparza Pérez, Asuman Oktaç

El uso de manipulables para propiciar la comprensión del significado de ecuaciones lineales y cuadráticas, y de sistemas de ecuaciones lineales en la escuela secundaria 879
Paola Tonanzy García Mendívil, Jorge Ruperto Vargas Castro

Dificultades en las ecuaciones lineales en segundo grado de educación secundaria 889
Ponciano Hernández Hernández, Eugenio Filloy Yagüe

Exploración del triángulo en el plano cartesiano 897
Evodio Jiménez Tapia

Ideas fundamentales de probabilidad y esquema compensatorio visual: experiencia con el síndrome down 905
José Marcos López Mojica, Ana María Ojeda Salazar

El teorema de Ptolomeo: del almagesto a los textos de hoy 915
José Luis Soto Munguía

Una propuesta para la enseñanza del concepto de derivada de una función, mediante actividades de visualización 925
Lucía González Rendón y Marisol Radillo Enríquez

Pruebas informales en estudiantes universitarios 933
Rodolfo Eliseo D´Andrea; Alejandra Cañibano; Patricia Sastre Vázquez

La integral absoluta Gaussiana 941
Rogelio Ramos Carranza, Armando Aguilar Márquez, Frida María León Rodríguez,

Omar García León, Juan Rafael Garibay Bermúdez

Conjuntos mínimos determinantes para Spline bidimensional 951
Rogelio Ramos Carranza, Armando Aguilar Márquez, Frida María León Rodríguez, Omar García León, Juan Rafael Garibay Bermúdez

Enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal a través de sus relaciones intra e inter matemáticas 959
Andrés González Rondell

Proposta de correção de atividades de introdução a álgebra em sala de 7ª série do ensino fundamental 969
Ronaldo Sovenil De Oliveira; [2]Maria Helena Palma De Oliveira

Sobre el aprendizaje de la transformada de laplace: algunas dificultades y una propuesta didáctica 977
Ana Mabel Juárez, Liliana Irassar

Emergentes de una propuesta didáctica en el marco de un aprendizaje colaborativo 987
Raúl Katz, Pablo Sabatinelli

Dificultades en estudiantes universitarios del estadistico como variable aleatoria en la distribucion del muestreo de medias 995
José Armando Albert Huerta, Blanca Ruiz Hernández

Estudio epistémico del número π: implicaciones didácticas 1005
Patricia M. Konic, Juan D. Godino, Walter F. Castro, Mauro Rivas

El área bajo la curva. Construcción de significado en contextos físicos 1013
Mario Armando Giordano Moreno, Ignacio Garnica y Dovala

La enseñanza de la matemática a alumnos ciegos y disminuidos visuales. El relato de una experiencia 1023
Ana María Mántica, Marcela Götte, María Susana Dal Maso

Espacios de reflexión sobre la enseñanza de la matemática en la escuela media. Análisis gráfico como puerta de entrada hacia el aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales de 2x2 1031
Analía Edith Bozzalla, Silvina Aida García Serrano

Desarrollo de una taxonomía de comprensión tabular 1041
Soledad Estrella, Arturo Mena, Raimundo Olfos

La matemática en la pintura costarricense: un primer acercamiento 1049
Jesennia Chavarría Vásquez

Rescatando los poliedros de Arquímedes 1057
Mario Dalcín, Verónica Molfino

Demostraciones y construcciones elaboradas por estudiantes de profesorado a partir de una clasificación de cuadriláteros 1065
Mario Dalcín, Verónica Molfino

Los espacios vectoriales, como estructuras algebraicas, en el proceso de enseñanza aprendizaje del álgebra lineal: una propuesta de investigación 1073
Ángela Martín Sánchez, Olga Lidia Pérez González, Ramón Blanco Sánchez, Laura Casas Fuentes

Sobre os conhecimentos de um grupo de professores para ensinar equações 1083
Angélica Da Fontoura Garcia Silva; Etienne Lautenschlager

Estudio exploratorio acerca de las dificultades que muestran alumnos de bachillerato para transitar de un razonamiento inductivo a uno deductivo 1091
Salvador Moreno Guzmán, Jesús Salinas Herrera

Confrontación de modelos de enseñanza en la transición de la suma aritmética a la suma algebraica 1099
Andrea Aurora Pérez Esguerra, Eugenio Filloy Yaguë, Aurora Gallardo Cabello

Preferencia de registros de representación en el concepto de límite de funciones de alumnos de primer año de ingeniería 1107
María Rosa Romiti, Natalia Sgreccia y Marta Caligaris

El lenguaje matemático en problemas de cinemática 1117
Felipe Matías, Aurora Gallardo

Construcción de conocimientos geométricos a través del plegado 1125
Mónica Lorena Micelli

Una descomposición genética teórica para el concepto espacio vectorial R2 1133
Miguel Rodríguez Jara, Marcela Parraguez González

Espejito, espejito: ¿cuáles son los nuevos numeritos? 1143
Dalys Alvarado

La matemática como herramienta de modelización para dar respuesta a situaciones problema 1151
Isabel Dorado Auz, José Luis Díaz Gómez

Presaberes matemáticos con los que ingresan estudiantes a la universidad 1161
Silvia Johanna Rojas S., Sonia Rocío Suárez C., Sandra Evely Parada Rico

Construcciones mentales para la apropiación del concepto de la integral desde registros geométricos 1169
Karla Liliana Puga Nathal, Eduardo Miranda Montoya

La resolución de problemas en el aprendizaje estadístico 1177
Blanca Dulce Miriam Benítez Pérez, Alma Alicia Benítez Pérez

Introducción al concepto derivada: un diseño experimental con estudiantes universitarios de humanidades 1187
Juan Carlos Sandoval Peña

Regulación continua del aprendizaje del cálculo y rendimiento académico en alumnos universitarios de primer año 1197
Susana González de Galindo, Lisa Holgado de Mejail, Patricia Villalonga de García

La enseñanza a través de la resolución de problemas. una experiencia de clase 1205
Sonia Bibiana Benítez, Lidia María Benítez

Coordinación de los diferentes registros de representación en el estudio de la circunferencia que pasa por tres puntos: actividades didácticas 1215
Manuel Alfredo Urrea Bernal, María Antonieta Rodríguez Ibarra, Luis Enríquez Chapa

Argumentación lógica como herramienta para la formación ciudadana en estudiantes de 3ro de secundaria: una propuesta didáctica 1235
María Gabriela Ramos Alva, Wuilinton Sánchez Rubio, Enrique Huapaya Gómez

La deconstrucción de los modelos de crecimiento 1243
José Trinidad Ulloa Ibarra. Jaime Arrieta Vera, Jorge Armando Rodríguez Carrillo

Actividades lúdicas como estrategia al impulso del talento matemático 1251
Lucila Mendoza Toro, José Trinidad Ulloa Ibarra, Elsa García de Dios

Una forma de aprender expresiones algebraicas manejando conceptos de áreas 1259
Neli Gonzales Prado

Enseñar bioestadística en carreras de ciencias de la salud 1265
Myriam Nuñez, Christiane Ponteville, Hugo Granchetti, Mariano Reynoso, Elunei Seifert

CAPITULO 3: ASPECTOS SOCIOEPISTEMOLÓGICOS EN EL ANÁLSIS Y EL REDISEÑO DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

Introducción al Capítulo 3 1275
Cecilia Crespo Crespo

La analogía, una fase de la modelación 1277
Gildardo Cortés Bello, Jaime L. Arrieta Vera, Eduardo Tomás Torres

La característica de una comunidad de conocimiento de ingeniería: el uso de la simultaneidad de la derivada 1289
Leslie Mariel Torres Burgos, Francisco Cordero Osorio

Las funciones y sus gráficas en el estudio de la variación y el cambio 1299
Silvia Vrancken, Mariana Schmithalter, Adriana Engler, Daniela Müller

El uso de títeres en matemáticas 1309
Marcela Ferrari Escolá

El uso de las figuras de análisis a través de sus funcionamientos y formas 1317
Mónica Lorena Micelli, Cecilia Rita Crespo Crespo, Gabriela Buendía

Prova em dupla como oportunidade para diálogo e socialização de saberes 1327
Marger Da Conceição Ventura Viana, Davidson Paulo Azevedo Oliveira, Nilson De Matos Silva

Estudio sobre ideas matemáticas y su contexto sociocultural en los ingresantes universitarios 1335
Silvia Noemí Sanchez, Ana Rosa Pratesi, María Cristina Cardozo, Pedro Daniel Leguiza, Alida Mónica Masachs, Analía E. Almirón, Mariela Sánchez

Resolución de problemas combinatorios en el contexto intercultural: estrategias utilizadas por niños de primaria y estudiantes universitarios 1345
Javier García-García

Algoritmos de predicción en la modelación cuadrática 1453
Marvin Mendoza Valencia, Leonora Díaz Moreno, Jaime Arrieta Vera

¿Qué aprendizajes evidencian los estudiantes de ingeniería al ingresar al cálculo inicial? 1363
Marvin Mendoza V., Leonora Díaz M.

Construcción de gráficas de funciones racionales 1373
Beatriz Alejandra Veloz Díaz, Rosa María Farfán Márquez

Herramientas, argumentos y procesos en prácticas de simulación 1381
Melvis Ramírez Barragán, Jaime Arrieta Vera

Estudio de prácticas de modelación con estudiantes de México y Chile 1389
Miriam Carolina Ortiz Torrescano, Jaime Arrieta Vera, Leonora Díaz Moreno

Proceso social de institucionalización del conocimiento matemático escolar: un modelo de prácticas 1395
Verónica Molfino, Gabriela Buendía

Contribuições da história da matemática na perspectiva da etnomatemática para a educação financeira em uma classe do oitavo ano do ensino fundamental 1405
Gelindo Martineli Alves, Marger Da Conceição Ventura Viana, Milton Rosa

La solución de problemas no rutinarios y actitudes hacia el estudio de las matemáticas en el nivel medio superior de la UAGro 1415
René Santos Lozano, Santiago Ramiro Velázquez Bustamante

La cosmovisión indígena y sus perspectivas didácticas: visión etnomátemática de dos grupos étnicos 1423
María Elena Gavarrete Villaverde, Luis Marcelo Casis Raposo

Figuración y gestualidad una forma de abordar la variación 1431
Wilson Gordillo Thiriat, Eduardo Carrasco Henríquez

Interdisciplinariedad en la investigación educativa. Transferencia de la matemática educativa a otras didácticas específicas 1439
Liliana Suárez Téllez

Matemática educativa: Latinoamérica, adherencia e identidad 1449
Héctor Silva-Crocci, Francisco Cordero Osorio

Exclusión, opacidad y adherencia. Tres fenómenos del discurso matemático escolar 1457
Karla Gómez Osalde, Héctor Silva-Crocci, Francisco Cordero Osorio, Daniela Soto Soto

La enseñanza de las matemáticas a través de la investigación: la red de actividades de aprendizaje 1465
Claudia Flores Estrada, José Luis Torres Guerrero, Liliana Suárez Téllez

Flexibilización de currículos de matemáticas en situaciones de interculturalidad 1475
Pilar A. Peña Rincón

Concurrencia de predicción y algoritmia en la modelación 1483
Carol Sepúlveda Herrera, Leonora Díaz Moreno, Jaime Arrieta Vera

Análisis sociocultural constructivista de las dificultades asociadas al estudio de temas geométricos en el nivel escolar: una alternativa metodológica usando recursos educativos abiertos 1491
Myrian Luz Ricaldi Echevarria

Etnomatemática: eje central de la recuperación de saberes matemáticos. Experiencia de américa latina y retos para Costa Rica 1501
Ana Patricia Vásquez Hernández

Un estudio de la construcción social del conocimiento matemático en el cotidiano 1511
David Zaldívar Rojas, Francisco Cordero Osorio

El compromiso como parte de un empoderamiento compartido para superar la exclusión que genera el DME 1521
Beatriz Introcaso, Dirce Braccialarghe

Multidisciplina y modelación un diálogo entre la ingeniería y la matemática educativa 1531
Francisco Cordero, Johanna Mendoza, Leslie Torres, Tamara Del Valle, Miguel Solís, Jaime Mena

Visualización de la función cuadrática 1539
Claudio Enrique Opazo Arellano, Jesús Grajeda Rosas, Rosa María Farfán Márquez

Mujeres y matemáticas escolares: un estudio longitudinal, sociocultural con estudiantes mexicanas 1547
Claudia Rodríguez Muñoz, Sonia Ursini Legovich

Matemática funcional en una comunidad de conocimiento. Una situación de acumulación en la formación de ingenieros civiles 1557
Johanna Mendoza, Francisco Cordero

El uso de la cantidad en una comunidad de artesanos-comerciantes otomíes 1567
Teresa Parra Fuentes, Francisco Cordero Osorio

Socioepistemología y matemáticas: del aula extendida a la sociedad del conocimiento. "todo lo que siempre quisiste saber y nunca te animaste a preguntar" 1573
Ricardo Cantoral, Daniela Reyes-Gasperini

El rediseño de situaciones de aprendizaje y la reflexión docente 1585
Mayra Anaharely Sarai Báez Melendres, Rosa María Farfán Márquez

La regla de los cuatro pasos. Análisis socioepistemológico 1593
Adriana Engler

La modelación. Un eje para la red de desarrollo de usos 1603
María Esther Magali Méndez Guevara y Francisco Cordero Osorio

Introducción al lenguaje algebraico con uso de hipertextos 1611
Leonardo Maier y Nora Ferreyra

Construcción de lo bilineal en prácticas de modelación 1619
Silvana Gómez Ojeda, Leonora Díaz Moreno y Jaime Arrieta Vera

Herramientas gráficas de la simulación 1629
Juan Felipe Flores Robles y Jaime Arrieta Vera

El uso de las gráficas en una comunidad de prácticas. El caso de la Maestría en ingeniería de la UADY 1635
Isabel Tuyub y Gabriela Buendía

Acercamiento histórico epistemológico de la optimización 1645
Tamara Del Valle Contreras y Astrid Morales Soto

Análisis socioepistemológico de los obstáculos asociados a la división por cero 1655
Daniela Veiga

RELME 15, RELME 27… reflexiones sobre la evolución de la matemática educativa en Latinoamérica 1665
Cecilia Crespo Crespo

CAPITULO 4: EL PENSAMIENTO DEL PROFESOR, SUS PRÁCTICAS Y ELEMENTOS PARA SU FORMACIÓN INICIAL

Introducción al Capítulo 4 1677
Nora Lerman, Patricia Lestón

Refletindo a formação matemática dos professores dos anos Iniciais 1679
Renata Camacho Bezerra

Experiencia de articulación entre asignaturas del profesorado en matemática 1687
Nora Ferreyra, María Eva Ascheri, Rubén Pizarro

Cómo enseñas y te diré como aprenden 1697
Mariela Kreimer

Trabajo colaborativo, un tejido que hace trama entre la escuela y la institución formadora 1705
Claudia Asteasuain, Ethel Barrio, Estela Dávila, Analía Petich

Aplicación de etnomatemáticas para la formación de profesores que trabajan en entornos indígenas 1713
María Elena Gavarrete Villaverde

Significados del conocimiento geométrico que circula en el nivel medio y en la formación inicial del profesor en matemáticas: un problema de investigación 1723
Julia Edith Corrales, Silvia Catalina Etchegaray

Uso del marco TPACK por alumnos de un profesorado de matemática 1733
Lorena Verónica Belfiori

Alumno recursante. Un diagnóstico desde la perspectiva de los estilos de aprendizaje 1741
Ana María Craveri y María del Carmen Spengler

Impacto de las prácticas instruccionales de los formadores de profesores de matemáticas 1751
Francisco Rojas y Jordi Deulofeu

Elementos de conocimiento matemático en estudiantes para profesor de matemática. El caso de los polígonos 1761
Nuria Climent, Emma Carreño y C. Miguel Ribeiro

El rol del discurso matemático escolar en la construcción de significados trigonométricos 1771
Gisela Montiel Espinosa

Análisis didáctico de un proceso de estudio del objeto matemático "proporcionalidad" 1781
Francisco Javier Parra Bermúdez, Ramiro Ávila Godoy y Jesús Ávila Godoy

O projeto PIBID na formação de professores de matemática: ações educacionais inovadoras com bases teóricas 1789
Marcílio Dias Henriques, Leandro Gonçalves dos Santos, Meiriele Nonato de Oliveira, Roberta Gualberto Ferreira y Theysmara Menon

Gestión de las competencias matemáticas y reflexión docente: el caso de la modelización y la argumentación en el aula 1797
Horacio Solar Bezmalinovic; Francisco Rojas, Andrés Ortiz y Rodrigo Ulloa

El trabajo geométrico personal de futuros profesores 1807
Carolina Henríquez-Rivas

El desafío de cambiar las prácticas docentes. Una experiencia de asesoría técnica en matemática educativa 1817
Pilar A. Peña Rincón, Francisco J. Rojas Sateler

Acciones de formación de profesores de matemáticas. Algunas experiencias de diseño e implementación 1825
Silvia Elena Ibarra Olmos

La formación docente y su concreción en el diseño de estrategias didácticas y materiales curriculares 1835
María Isabel Segura Gortáres, María Eugenia Ramírez Solís y Liliana Suárez Téllez

A formação inicial de professores de matemática, no brasil, na perspectiva do programa de consolidação das licenciaturas 1843
José Fernandes da Silva y Ruy Pieropaolo

Criterios de evaluación de recursos didácticos en el área de matemática 1851
Carina Pacini, Lucía Sacco, Rosana Scolari y Liliana Tatángelo

Una perspectiva del conocimiento matemático para la enseñanza del profesor centrada en su especialización: el modelo MTSK 1861
Dinazar I. Escudero, Eric Flores-Medrano, Nuria Climent, José Carrillo, Luis C. Contreras, Miguel A. Montes, Álvaro Aguilar y Nielka Rojas

Um modelo para análise do processo de generalização 1869
Maria Lucia Panossian y Manoel Oriosvaldo de Moura

La formación de valores desde el contenido de las asignaturas matemática 1 y matemática 2 1877
Niurys Lázaro Alvarez y Ariuska Hernández Sablón

El desarrollo de habilidades cognitivas y cognitivo-lingüísticas en las planificaciones de geometría tridimensional de residentes del profesorado en matemática 1887
Natalia Landaluce , Natalia Sgreccia y Marta Massa

Acerca de la iniciación del acompañamiento a profesores en matemática en procesos de génesis documental 1897

Natalia Sgreccia y Pablo Carranza

Estudio de las funciones continuas en la formación inicial de profesores 1905
Romina Menares y Elizabeth Montoya

Análisis de procesos cognitivos en geometría con estudiantes de profesorado 1915
Marco antonio rosales riady

Caracterizando la práctica docente en la implementación de una "propuesta didáctica de límites infinitos mediante situaciones contextuales" 1923
José Rafael Couoh Noh, María Guadalupe Cabañas-Sánchez y Eddie Aparicio-Landa

Reflexiones del profesor de matemáticas al analizar los errores de los estudiantes 1933
Leticia Sosa Guerrero, Elvira Borjón Robles y Judith A. Hernández Sánchez

Contribuciones para el mejoramiento del proceso de desarrollo del eje de la práctica profesional en matemática 1943
Lidia Beatriz Esper y Carmela L. La Tora

El afecto en el aprendizaje de la matemática: una mirada desde los docentes paraguayos 1953
Oswaldo Jesús Martínez Padrón

Los significados de la aleatoriedad de los profesores de matemática y de biología en formación 1963
Amable Moreno, José María Cardeñoso y Francisco González

Descartes y la formación de profesores de matemáticas 1973
Jhon Helver Bello Chávez y Alberto Forero Poveda

Actitudes hacia las matemáticas de los futuros profesores de E.G.B de Chile. Estudio de cuatro descriptores actitudinales 1983
Marcelo Casis, Encarnación Castro y Nuria Rico

Aportes desde una investigacion en el contexto de la formacion del profesorado 1993
María Beatríz Bouciguez, Liliana Irassar, María Cristina Modarelli, María Rosa Nolasco y María de las Mercedes Suárez

Competencias docentes necesarias para mejorar los procesos de aprendizaje en matemáticas en cursos a distancia 2003
Martha Leticia García Rodríguez, Alma Alicia Benítez Pérez y Alicia López Betancourt

Explorando tonalidades emocionales en la formación inicial y continua de profesorado de matemáticas 2013
Jorge Ávila Contreras

Análisis del discurso didáctico docente en la formación inicial de profesores de matemática 2023
Nora Inés Lerman

TEXTOS INSTRUCCIONALES EN LA FORMACIÓN INICIAL DE LOS PROFESORES DE MATEMÁTICAS; SU DECONSTRUCCIÓN PARA UNA COMUNICACIÓN EFECTIVA ENTRE DOCENTES Y ALUMNOS 2033
Nora Inés Lerman, Cecilia Crespo Crespo y Javier Francisco Lezama Andalón

EL ROL DE LAS PUBLICACIONES EN LA CONSTRUCCIÓN DE LA PROFESIONALIZACIÓN DOCENTE 2043
Patricia Lestón

CAPITULO 5: USO DE RECURSOS TECNOLÓGICOS EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Introducción al Capítulo 5 2055
Daniela Veiga

Construção dos sólidos platônicos na superfície esférica: uma introdução aos conceitos de geometria esférica através do software spherical easel 2057
Viviane Beatriz Hummes, Adriana Breda

Tecnologías que justifican técnicas 2065
Alberto Camacho Ríos

Derivada y aplicaciones: la tecnología en el aula 2075
María Elena Schivo, Natalia Sgreccia, Marta Caligaris

Significados de polinomios y sus raíces en un ambiente de evaluación en línea 2085
Maximino Dórame Velásquez, Ana Guadalupe Del Castillo Bojórquez

Uso de recursos tecnológicos en el proceso de aprendizaje de la matemática 2095
Agustín Carrillo, Liliana Milevicich, Eugenio Rodriguez, Agustín De La Villa

Fortalezas y debilidades en el uso de la computadora en el aula de matemática de la universidad 2105
Betina Williner

¿Papel o computadora? ¡da igual! 2115
Mabel Alicia Slavin, Ana Paula Krompiewski, Matías Samartino, Mónica Torre, Andrés

El ABP en la enseñanza de las matemáticas como estrategia didáctica para el desarrollo del pensamiento crítico en el nivel medio básico y modalidad telesecundaria 2125
Laura Flores Torres, Elvira G. Rincón Flores, Leopoldo Zuñiga

Diseño de hipertextos en matemática para estudiantes de ingeniería 2133
Favieri Adriana, Williner Betina, Scorzo Roxana, Falsetti Marcela

Aplicaciones multimediales en la articulación 2141
Analía Elisabeth Almiron, Nori Esther Cheein De Auat, Pedro Daniel Leguiza, Liliana Graciela Zajac, Mariela Beatriz Sánchez, Stella Maris Zalazar, Rosa Viviana Ruiz,

Marina Bloeck

Una propuesta de aprendizaje para la pendiente con el uso de Geogebra 2151
Antonio González, Ricardo Cantoral

La enseñanza aprendizaje del número en preescolar y el uso de las TIC´s 2159
Evelia Reséndiz, Sergio Correa, Karla Y. Medina, Carlos R. Nava, Ramón J. Llanos

Geogebra y los sistemas de representación semióticos 2169
Ana Elena Gruszycki, Luis Oteiza, Patricia Maras, Liliana Gruszycki, Hugo Ballés

Resultados de la implementación de autoevaluaciones virtuales en matemática 2177
Analía Mena, Graciela Abraham, Marta Golbach, María De Los Ángeles Juárez, Mirta Jacobo, Dora Fernández

Una propuesta de trabajo colaborativo con libre elección de tic en el aula de matemática 2185
Patricia Có, Mónica Del Sastre, Erica Panella

El aprendizaje de espacios vectoriales en ambientes computacionales 2195
María Guadalupe Vera Soria, Eduardo Miranda Montoya

Enseñanza de la inferencia estadística a partir de clases virtuales 2205
Terán Teresita, Córdoba Omar

Ecuaciones diferenciales ordinarias en ingeniería: soluciones utilizando un cas 2215
Agustín De La Villa, Alejandro Lois, Liliana Milevicich, Gerardo Rodríguez

Geogebra, una herramienta para la enseñanza delas matemáticas y simulación de fenómenos 2225
Noé Camacho Calderón, Margarito Godínez De Dios, Santiago Rámiro Velázquez Bustamante

Objetos virtuales de aprendizaje para matemática asistidos con *Medhime 2.0* 2231
Américo Sirvente, Elisa Silvia Oliva, María Inés Ciancio

Métodos numéricos y tecnologías en la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias: relato de una experiencia 2237
María Eva Ascheri, Rubén A. Pizarro, María E. Culla, Mei Yi Lee

Tipos de ejercicios para el aprendizaje de la matemática en línea: el caso de actividades referidas a `redondeo 2247
Cristina Ochoviet, Katharina Skutella

Diseño e implementación de cuestionarios en Moodle 2255
Daniela Müller, Silvia Vrancken, Adriana Engler

Recurso virtual que favorece el autoaprendizaje 2263
María Rosa Rodríguez, Graciela Abraham, Eduardo López Ávila

Propuesta de aula: modelación y visualización de los conceptos del cálculo diferencial, mediados con la herramienta Cabri 2271

Luís Albeiro Zabala Jaramillo, Marcela Parraguez González

Las capacidades de los alumnos para el diseño de recursos tecnológicos a medida 2279
Malva Alberto Toso, Marta Castellaro, Constanza Quaglia

La modalidad virtual en el ingreso a la *face-unt* 2289
Marta Inés Cirilo, Marta Lía Molina

Aprendizaje del teorema de Pitágoras utilizando la estrategia de modelación a través del uso de *applets* 2299
María del Rosario Arenas y Lorenza Illanes, Ruth Rodríguez

Construcción de la gráfica cartesiana apoyados en aplicaciones multimedia en escuelas secundarias 2309
Carlos Espinosa Marchán, Rolando Roa Vásquez y Celma Espinosa Marchán

Contraste entre el "escenario didáctico" y el escenario virtual: interacción entre la matemática educativa y la computación 2317
Eliza Minnelli Olguín Trejo y Marta Valdemoros Álvarez

Recursos didácticos del y para el profesor de matemáticas. Una experiencia de formación continua en la modalidad en línea y a distancia 2327
Avenilde Romo Vázquez y Jean-Philippe Georget

Introducción al concepto de derivada de una función real con apoyo de las tecnologías digitales 2335
Armando Cuevas V., Arturo Rodríguez E. y Oscar González O.

PRESENTACIÓN

Las personas que participan en las RELME (Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa) o que forman parte de CLAME (Comité Latinoamericano de Matemática Educativa), y aquellos colegas y profesionales que asisten a las diferentes actividades de formación y divulgación relacionadas, constantemente aportan al conocimiento de la Matemática Educativa. La publicación de sus trabajos en medios escritos o digitales como la ALME 27 (Vigesimoséptima Acta Latinoamericana de Matemática Educativa), o la RELIME (Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa), se constituyen en espacios importantes de divulgación que permiten no solo hacer una recopilación de trabajos para ser consultados por diversos profesionales interesados en la Matemática Educativa, sino que registran los aportes para que sean accesibles para consultas en cualquier momento.

Cabe mencionar que el *Third International Handbook of Mathematics Education*, publicado el año pasado tiene un artículo acerca de las organizaciones internacionales en educación matemática, y en él se reconoce a CLAME como una organización que atiende a una comunidad en un idioma específico y sus aportaciones a la región y a esta comunidad a través de la RELME (Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa) que se lleva a cabo anualmente y las publicaciones mencionadas anteriormente.

La comunidad CLAME se forma de la interrelación entre sus miembros y otros colegas que buscan fomentar la investigación de calidad y el perfeccionamiento y profesionalización de los docentes. Es un referente regional en Matemática Educativa, en el que un grupo de estudiosos, unidos por valores académicos y profesionales, trabajan con responsabilidad, dedicación y calidad. El compartir sus esfuerzos y trabajos, con fines comunes, los ha constituido en un singular grupo que, además, comparte la alegría del trabajo, una sensibilidad particular por la mejora en la enseñanza de la Matemática, y un sentimiento de amistad estrecha. Por ello, presentar y publicar trabajos en la comunidad CLAME es un experiencia personal y profesional muy enriquecedora.

El trabajo que lleva preparar una RELME es exhaustivo en organización y logística, y aún más exhaustivo en exigencias de calidad. Año con año, desde la convocatoria, se procura que los productos sean cada vez mejores, revisando los tipos de trabajos y categorías, y modificándolos de manera que se ajusten a criterios cada vez más estrictos, globales,

actualizados y que aporten valor. La publicación en ALME, fruto de los trabajos presentados en RELME, proporciona, por tanto, productos depurados y revisados que permiten asegurar que los trabajos publicados son una contribución valiosa al acervo cultural y educativo a nivel regional y mundial.

En esta ocasión ALME 27 incluye trabajos que han sido revisados con disciplina y rigurosidad y que provienen de la RELME 27 que se llevó a cabo en Buenos Aires, Argentina en julio de 2013.

Dichos trabajos se organizan en lo siguientes capítulos que incluyen la introducción de un profesional invitado especial.

Capítulo 1: Análisis del discurso matemático escolar

Capítulo 2: Propuestas para la enseñanza de las matemáticas

Capítulo 3: Aspectos socioepistemológicos en el análisis y el rediseño del discurso matemático escolar

Capítulo 4: El pensamiento del profesor, sus prácticas y elementos para su formación profesional

Capítulo 5: Uso de recursos tecnológicos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas

Esperamos que esta Vigesimoséptima Acta se utilice como carta de presentación de los aportes que, como profesionales de la matemática educativa, hacemos a la sociedad.

Aprovecho para agradecerle a los árbitros y, especialmente, a los editores de trabajos de ALME por su esfuerzo concienzudo y eficaz y, sobre todo, comprometido y muy responsable. Ellos son testimonio de la entrega desinteresada y valiosa que caracteriza a nuestra comunidad educativa, y se constituyen en ejemplos dignos de imitar por la importante labor que realizan.

Claudia María Lara Galo M.A.
Presidenta del Consejo Directivo
CLAME (2012-2016)

Junio 2014

CAPITULO 1

ANÁLISIS DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

Introducción al Capítulo de Análisis del Discurso Matemático Escolar

Christiane Cynthia Ponteville

Miembro del Comité Organizador Nacional-RELME 27 . (Argentina)

El Discurso Matemático Escolar, que analizaremos en esta sección del Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, puede ser pensado como las acciones que se presentan entre los diversos actores que integran los procesos educativos, teniendo en cuenta a los saberes matemáticos que se imparten en los diferentes niveles de la educación y en los diversos entornos educativos. De esta forma, constituye un capítulo fundamental del desarrollo de la Matemática Educativa.

Así, el discurso matemático escolar no es un objeto teórico para analizar sino una construcción sociocultural constituyendo una explicación científica que debe ser interpretada a la luz de diferentes manifestaciones como pueden ser los libros de texto, el análisis del discurso, los currículos escolares, las planificaciones, las evaluaciones, entre otros, que son llevados al aula por un docente y reinterpretados por cada alumno en una situación particular.

El desarrollo de la Matemática Educativa y la inclusión de nuevos y diversos objetos de estudio hacen que el Discurso Matemático Escolar necesite de una relación permanente entre los elementos que forman parte del asunto educativo teniendo en cuenta fuertemente el trayecto que realiza el contenido desde su formación como contenido científico hasta formar parte del discurso sabiendo que sobre él actúan las situaciones que se presenten en la escuela, la sociedad y la cultura propia del entorno influyendo en las decisiones didácticas.

De esta forma, las propuestas didácticas que surgen de las diversas investigaciones constituyen un material invalorable para el docente que encara en forma consciente la búsqueda de la significación del contenido matemático que va a enseñar en su aula.

Cada uno de los trabajos que forman este sección plantean una visión del Discurso Matemático Escolar caracterizando diversos aspectos que tienen que ver con los alumnos, los docentes, los saberes, los entornos no académicos, las estrategias didácticas, los instrumentos de enseñanza, los lenguajes utilizados, entre muchos otros. Los diferentes trabajos permiten describir la realidad de las diversas aulas encuadrándose en diversos marcos teóricos. Las metodologías que se presentan son variadas y buscan aportar elementos para modificar la realidad del aula favoreciendo a crear un Discurso Matemático Escolar en evolución y pendiente de los cambios que de los diferentes actores que lo rodean. Estas diversas visiones son las que hacen que está área de estudio sea tan importante y de desarrollo permanente de la Matemática Educativa.

EXPERIENCIAS INNOVADORAS EN EVALUACIÓN

Silvia del Puerto, Silvia Seminara
Universidad Tecnológica Nacional Argentina
spuerto@fibertel.com.ar, seminarasilvia@gmail.com

Resumen. En el presente trabajo se describen dos experiencias sobre evaluación. Una de ellas está basada en la utilización de la *devolución de la evaluación* como parte del proceso educativo, bajo la hipótesis de que el alumno, al rehacer su examen a partir de los comentarios que realiza el docente sobre sus aciertos, errores y dificultades, tiene aún oportunidad de continuar reorganizando los contenidos en su esquema cognitivo. La otra experiencia describe un proyecto de *evaluación continua* en el cual empleamos varias técnicas no tradicionales de evaluación que pretenden asegurar el monitoreo continuo de los aprendizajes y el *feedback*, necesario tanto para alumnos como para docentes.
Palabras clave: evaluación formativa; evaluación continua; feedback
Abstract. In this paper we describe two experiences about evaluation. One is based on the use of the *return of the assessment* as part of the educational process, under the assumption that the student, redoing the test from the comments made by the teacher about their successes, failures and difficulties, has a further opportunity to continue reorganizing the contents in his cognitive schema. The other experience describes a *continuous assessment project* in which we use several nontraditional assessment techniques, which aim to ensure continuous monitoring of learning, and the necessary *feedback*, useful both for students and teachers.
Key words: formative assessment; continuous assessment; feedback

Introducción

A partir de nuestra experiencia diaria como docentes en la universidad debemos reconocer que en este nivel educativo la evaluación se lleva a cabo sólo en las instancias formales - exámenes parciales y finales - y está destinada casi exclusivamente a la medición de los aprendizajes para la acreditación o la certificación, y muy pocas veces se la asocia a la toma de decisiones, por parte de alumnos y docentes, sobre la marcha del proceso educativo.

Considerar que la evaluación sirve sólo para la acreditación de una asignatura es olvidar su utilidad para retroalimentar el proceso educativo, ya que informa a los alumnos tanto sobre los tópicos de mayor importancia como del estado de su propio conocimiento, y a los docentes, sobre la efectividad de sus elecciones metodológicas y sus acciones pedagógicas.

A la evaluación tradicional, caracterizada por ser sumativa, individual, puntual y terminal, se contrapone una evaluación alternativa *formativa*, *compartida*, *dinámica*, *procesual*, *continua* e *integrada al curriculum* (Álvarez Méndez, 2001). Una evaluación continua e integrada al proceso educativo informa al docente sobre las dificultades *reales* que tienen los alumnos, permite a éstos *aprender de sus propios errores* a partir de las correcciones del profesor, en forma inmediata y mientras el aprendizaje se consolida, y permite además advertir posibles disfunciones en la planificación, posibilitando corregirlas a tiempo.

Delgado y Oliver (2006) describen este modelo de evaluación enriquecida:

> *"…el profesor no sólo debe evaluar al final del proceso de aprendizaje la asimilación de conocimientos y el desarrollo de competencias por parte de los estudiantes, sino que, a lo largo del curso, debe proponer con cierta periodicidad actividades, de carácter evaluable, que faciliten la asimilación y el desarrollo progresivos de los contenidos de la materia y de las competencias que deben alcanzarse, respectivamente. De esta forma la evaluación se convierte en continua o progresiva, y el profesor puede realizar un mayor y mejor seguimiento del progreso en el aprendizaje del estudiante, ya que permite una valoración integral. Se trata, en suma, siguiendo las teorías constructivistas del conocimiento, de apostar por un aprendizaje significativo."* (Delgado y Oliver, 2006)

No se propone, necesariamente, dejar de lado la evaluación tradicional - a veces insoslayable por razones institucionales - sino *complementarla* con tareas enriquecedoras que estimulen la reflexión y propicien la autorregulación, para que los alumnos puedan rectificar errores y reorientar a tiempo su tarea si reciben información permanente sobre el ritmo y la calidad de sus aprendizajes.

> *"Si de la evaluación hacemos un ejercicio continuo, no hay razón para el fracaso pues siempre llegaremos a tiempo para actuar e intervenir inteligentemente en el momento oportuno, cuando el sujeto necesita nuestra orientación y nuestra ayuda para evitar que cualquier fallo detectado se convierta en definitivo."* (Álvarez Méndez, 2001)

Delgado García et al. (2005) afirman que el esfuerzo y la dedicación del alumno son mayores si se lo evalúa de manera continua y la evaluación deja de ser una situación de presión para pasar a ser una oportunidad para demostrar, de manera natural, lo aprendido. La evaluación no debería tener como única finalidad el control del estudiante, sino que debería cumplir, fundamentalmente, una función didáctica de realimentación y estímulo. En este contexto, el objetivo primordial de la evaluación no es otorgar una nota, sino contribuir al aprendizaje.

Con la intención de tratar de modificar el papel tradicional de la evaluación en nuestras aulas, decidimos desplegar algunas acciones tendientes a enriquecer el uso de las instancias de examen. Realizamos concretamente dos experiencias que llamaremos brevemente *devolución del examen* (2011) y *evaluación continua* (2012).

Marco teórico

La devolución de un examen es un momento de gran importancia en el aprendizaje del alumno, y una instancia que *valida* esa evaluación. Si los alumnos reciben los comentarios de la evaluación como cierre de su trabajo, quedará tal vez justificada su calificación, pero se habrá perdido la

oportunidad de utilizar una información valiosísima para realimentar los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Tedesco (2007) afirma que en la corrección de la evaluación el alumno debe poder reconocer sus errores, sentirse guiado hacia la búsqueda de un conocimiento más integrado y generarse nuevos interrogantes. Es posible también que se pongan al descubierto en la corrección conflictos cognitivos no resueltos.

Varios autores consultados (Gil Pérez y de Guzmán, 1993; Carlino, 2005) coinciden en señalar que el examen no sólo debe ser corregido y entregado al alumno lo antes posible, sino que también debe ser discutido en clase, pues el estudiante, con su examen delante, se manifiesta más abierto y participativo. También señalan que es conveniente que, antes de la calificación final, el alumno rehaga su examen en casa, o reescriba el examen en clase, a partir de las observaciones del docente, y vuelva a entregarlo para, de esta forma, afianzar lo aprendido e, incluso, realizar reajustes en la organización de sus conocimientos: en la instancia de rehacer la evaluación el alumno puede aún reestructurar la información, lograr una mayor integración de conceptos y procedimientos, y acercarse al cambio conceptual deseable, si éste aún no se ha producido. De esta manera la evaluación pasa a formar parte central del proceso de aprendizaje del alumno, enriqueciéndolo y completándolo.

El primer año de la universidad supone un gran cambio para los alumnos, que deben acostumbrarse a un nuevo método de enseñanza, a explicaciones del docente más rápidas, y a conceptos que deben asimilarse más velozmente. Como dicen Fernández Barberis et al. (2006), *"hoy se enseña una cosa y mañana se utiliza como si se la conociera de toda la vida"*. Esto da como resultado, por lo general, calificaciones muy bajas en los exámenes tradicionales. En este escenario, la evaluación debería acompañar y ayudar a este proceso de adaptación, y más aún teniendo en cuenta que la matemática es una disciplina acumulativa, y que se necesita tiempo y trabajo personal para asimilar los nuevos conceptos y adquirir las herramientas básicas necesarias.

Las principales razones por las cuales no suele emplearse la evaluación continua en la universidad son el elevado número de alumnos por curso, lo que no permite un seguimiento individual, y los escasos márgenes de tiempo con que se cuenta para el desarrollo de los contenidos previstos; esto lleva a que no se evalúen los *procesos* de aprendizaje y a que se obtenga la calificación de los alumnos *exclusivamente* a través de las evaluaciones parciales y finales.

Otra realidad que observamos a diario es que la evaluación no suele ser coherente con las prácticas de aula: por un lado se estimula el aprendizaje por comprensión, pero por otro suele

evaluarse con pruebas mecanicistas y memorísticas, que no contribuyen al aprendizaje significativo esperado, ni estimulan la reflexión, y obedecen más bien a la facilidad y rapidez de su corrección.

El interrogante es: ¿cómo puede conciliarse una evaluación continua, integrada a los procesos de enseñanza y aprendizaje, con la realidad presente en las aulas de la universidad?

Angelo y Cross (1993) proponen una respuesta a esta pregunta: sugieren emplear técnicas informales de evaluación, que complementen a la evaluación sumativa, y permitan un monitoreo continuo, aún con un elevado número de alumnos. Los llamados "CATs" (Classroom Assessment Technics) son estrategias simples, que permiten recolectar, de manera rápida y sencilla, información sobre la manera en que están aprendiendo nuestros estudiantes, para poder mejorar el proceso, en caso de ser necesario.

James Block, citado por Camilloni (2004), afirma que "*las pruebas deben ser frecuentes y sobre pequeñas unidades, interpretando las respuestas del alumno en cada uno de los ítems que las componen*". Esta misma idea es la que inspira el diseño de los CATs, algunos de las cuales describimos brevemente a continuación, siguiendo la propuesta de Angelo y Cross (op. cit.):

-*La redacción de un minuto.* Consiste en pedir a los alumnos que respondan a dos preguntas: "¿cuál fue el aspecto más importante de lo que aprendimos hoy?" y "¿qué preguntas te quedaron por hacer?"

-*El aspecto más engorroso del tema tratado.* Esta técnica se utiliza para informarnos sobre los contenidos que a los alumnos no les quedaron claros. Los alumnos deben responder a la pregunta "¿cuál fue el aspecto más difícil del tema que tratamos hoy?"

-*Resumen en una sola oración.* Los alumnos deben simplificar, en una única oración, la respuesta a una pregunta específica sobre una parte del contenido desarrollado durante la clase del día.

- *Parafraseo dirigido.* Se les pide que parafraseen con sus propias palabras el contenido de la clase, en dos o tres oraciones.

- *Aplicaciones concretas.* Se les pide a los alumnos que relacionen los conocimientos adquiridos con situaciones concretas de la vida cotidiana o con otras áreas de aplicación.

-*Cuadro o grilla caracterizadora.* Los alumnos deben diseñar un cuadro o grilla que represente interrelaciones entre los conceptos aprendidos.

-*Notas encadenadas.* El docente escribe una pregunta en un sobre; cada alumno la responde en un papel que coloca en el mismo sobre y se lo pasa a un compañero, que la responderá a su vez; todos los alumnos de la clase deben contestar la misma pregunta; al final, el docente comunica los resultados a la clase.

-*Generación de preguntas por parte de los alumnos.* Se les pide a los alumnos que formulen preguntas sobre el tema desarrollado, anunciándoles que las mismas serán incluidas en algún parcial o examen final.

-*Buzón de sugerencias.* Se coloca un buzón en un lugar del aula y se les pide a los alumnos que dejen notas indicando los aspectos de la clase que ellos consideran deben mejorarse o modificarse; el docente las lee y las responde a la clase siguiente.

Estos instrumentos requieren, según Angelo y Cross (op. cit.) una planificación en función de los contenidos y los objetivos, una implementación cuidada e informada a los alumnos, y una devolución lo más perentoria posible, que informe en general sobre los resultados positivos y los cambios que deberán implementarse a partir de las respuestas erróneas. La respuesta a los mismos no demanda más que unos pocos minutos de la clase, el análisis de los resultados por parte del docente tampoco lleva mucho tiempo, y permite recabar información casi a diario sobre la marcha del proceso.

Estos aspectos se inscriben en el marco de la llamada *evaluación orientada al aprendizaje* que obedece, según Álvarez Valdivia (2008), a tres principios fundamentales:

- plantear las tareas de evaluación como tareas de aprendizaje;
- involucrar a los estudiantes en la evaluación;
- ofrecer los resultados a modo de *feedback*.

Metodología

De acuerdo con las ideas expuestas, en el año 2011 decidimos trabajar sobre la *devolución de la evaluación*, utilizándola como parte del proceso educativo, bajo la hipótesis de que el alumno, al rehacer su examen a partir de los comentarios del docente sobre sus aciertos, errores y dificultades, tiene aún oportunidad de continuar reorganizando su esquema cognitivo a favor del cambio conceptual necesario para el aprendizaje de algunos contenidos (del Puerto y Seminara, 2013). Para ello, cuando finalizamos el desarrollo del tema "rectas en el espacio", evaluamos individualmente a nuestros alumnos de Álgebra y Geometría Analítica con algunos problemas no rutinarios referidos a estos contenidos; los docentes corregimos este trabajo para la clase siguiente, marcando los errores sin aclarar la forma correcta de resolución, pero indicando en cada caso si se trataba de errores conceptuales, de redacción, de notación o fallas en las justificaciones, y pedimos a los alumnos que para la clase siguiente *rehicieran* en sus hogares el examen, modificando su escrito de acuerdo con las observaciones hechas por el docente, y pudiendo recurrir a la bibliografía e, inclusive, consultar con sus compañeros. En esta segunda

entrega del examen no se encontró evidencia de que los alumnos se hubieran "copiado" mayoritariamente unos de otros, ya que no hubo producciones exactamente iguales; incluso algunos alumnos cometieron nuevos errores de cálculo y no todos obtuvieron calificación máxima. La devolución se completó resolviendo todos juntos los ejercicios en el pizarrón. Varias clases más tarde se evaluó a los alumnos con un cuestionario individual de 5 ejercicios.

En la Tabla 1 se comparan los resultados obtenidos en ese mismo cuestionario individual por alumnos del 2009, que habían trabajado del modo tradicional, y los que protagonizaron en 2011 la *devolución de la evaluación*.

Tabla 1: Comparación de resultados

		2009	2011
1a	No responde	6 %	3 %
	Responde correctamente	2 %	33 %
	Responde con idea previa	63 %	34 %
	Responde con modelos sintéticos	29 %	30 %
1b	No responde	10 %	0 %
	Responde correctamente	6 %	22 %
	Responde con idea previa	57 %	67 %
	Errores varios no representativos	27 %	11 %
1c	No responde	37 %	4 %
	Responde correctamente	21 %	28 %
	Responde con modelos sintéticos	42 %	68 %
2a	No responde	31 %	3 %
	Responde correctamente	54 %	94 %
	Errores varios no representativos	15 %	3 %
2b	No responde	42 %	11 %
	Correcto	2 %	64 %
	Correcta incompleta	2 %	3 %
	Modelos sintéticos	27 %	8 %
	Errores varios no representativos	27 %	14 %

La tabla muestra que en 2011 son muchos más los alumnos que dan respuestas correctas, y menos los que no responden. Concretamente, por ejemplo, en el ejercicio 2b) vemos cómo de un 2% que lo contestaron correctamente en el 2009 ahora es un 64% de los alumnos el que da la respuesta correcta; en el 1c), aumenta de un 42% a un 68% el número de alumnos que contesta usando un modelo sintético (vale decir, una instancia intermedia entre el pensamiento plano y el espacial) lo cual, si bien no constituye una respuesta correcta, significa un progreso con respecto a responder utilizando una idea previa sólo válida en el plano; en el 2b) disminuyó la cantidad de alumnos que responde con modelos sintéticos en beneficio de los que responden correctamente.

Si bien es necesario tener en cuenta el alcance limitado de estos resultados, puede decirse que el trabajo sobre la devolución de la evaluación tuvo una influencia positiva en este grupo de alumnos en el proceso hacia el cambio conceptual.

En el transcurso del año 2012, nos propusimos continuar trabajando sobre el proceso de evaluación, abordando la *evaluación continua*, tan poco frecuente en el ámbito de la educación superior.

Nuestra intención fue implementar algunas de las técnicas rápidas de evaluación continua propuesta por Angelo y Cross en uno de nuestros cursos de Álgebra y Geometría Analítica.

Para ello se diseñaron instrumentos a aplicar en pocos minutos, para cada contenido importante de la asignatura, al finalizar una clase, unos en forma individual y otros de manera grupal. Se ejemplifican algunos a continuación: se les solicitó a los alumnos

- que respondieran por escrito y brevemente a la pregunta *¿cuáles consideras que son los aspectos más importantes de lo que hemos aprendido con respecto a los vectores geométricos?*;
- que describieran brevemente cómo obtienen, dada la ecuación de una recta en el espacio, las ecuaciones de *a)* un plano paralelo a la misma y *b)* una recta que la corte perpendicularmente;
- que indicaran por escrito ejemplos de la vida diaria donde se presenten: *1)* un par de rectas paralelas, *2)* dos rectas alabeadas, *3)* una recta paralela a un plano, *4)* una recta perpendicular a un plano;
- que escribieran una frase en que relacionaran los conceptos de "matriz inversible", "determinante", "sistema de ecuaciones lineales" y "conjunto de soluciones";
- que formularan por escrito dos preguntas conceptuales, de V o F, que serían incluidas en un posible parcial, teniendo en cuenta en cada una de ellas dos conceptos elegidos de entre una lista de contenidos relacionados con espacios vectoriales;
- que en dos o tres renglones explicaran el proceso de "rototraslación de cónicas", etc., además de colocar en el aula un buzón de sugerencias.

Los resultados obtenidos al analizar las respuestas a estas actividades se informaron a diario a los estudiantes, y se volcaron en planillas de seguimiento.

Para estimular el compromiso de los alumnos, se les comunicó que los resultados cualitativos obtenidos en las actividades continuas de evaluación se tendrían en cuenta para el redondeo de la calificación de las evaluaciones parciales.

También se insistió sobre las ventajas que les aportaría a los estudiantes el seguimiento de este sistema evaluativo, ya que "los contenidos serían asimilados en forma gradual", "los errores serían detectados a tiempo para ser corregidos", y "los exámenes parciales serían más fáciles de aprobar para aquellos alumnos que superen a diario la evaluación continua". Si bien el docente no puede obligar al alumno a ser consecuente con una evaluación continua, puede incentivarlo a que participe de la misma, dando a conocer sus ventajas.

Conclusiones

Si bien con alcance limitado, puede decirse que el trabajo sobre la devolución de la evaluación tuvo una influencia positiva en el grupo de alumnos involucrados, ya que se orientó a los alumnos en función de sus propios errores, realizando un *feedback* coherente con los aprendizajes alcanzados y los que aún restaban por lograr; esta información resultó útil para reorganizar y completar el aprendizaje, y colaboró en el proceso hacia el cambio conceptual. Además, resultó estimulante el intercambio de opiniones entre docentes y alumnos en el momento de la puesta en común.

En cuanto a la evaluación continua, el escaso tiempo para desarrollar los contenidos y la gran cantidad de alumnos, hacen en general dificultosa una evaluación periódica. Sin embargo, las actividades que aplicamos demandaron sólo unos minutos de cada clase, no produjeron interrupciones en las tareas y se mimetizaron con las que se realizaban cotidianamente.

Los resultados obtenidos al analizar las respuestas se volcaron en planillas de seguimiento que nos permitieron detectar a tiempo falencias - que de otro modo hubieran pasado inadvertidas - en la comprensión de algunos de los contenidos y modificar a tiempo las actividades de aula. De este modo pudimos realizar un monitoreo diario del estado de conocimiento de nuestros alumnos, y esto posibilitó realizar ajustes oportunos en el desarrollo de las actividades de enseñanza. Además, conocimos mejor a nuestros alumnos, sus estilos personales y sus necesidades particulares, aún tratándose de grupos numerosos.

En cuanto a los alumnos, a través de estas actividades obtuvieron datos útiles acerca de la marcha de sus aprendizajes y la experiencia constituyó un estímulo para un mayor compromiso con el trabajo en la asignatura.

Referencias bibliográficas

Álvarez Méndez, J. M. (2001). *Evaluar para conocer, examinar para excluir.* Madrid: Ediciones Morata.

Álvarez Valdivia, I. (2008). Evaluación del aprendizaje en la universidad: una mirada retrospectiva y prospectiva desde la divulgación científica. *Revista Electrónica de Investigación Psicoeducativa,* N° 14, *6* (1), 235-272.

Angelo, T. y Cross, P. (1993). *Classroom Assessment*. San Francisco: Jossey-Bass.

Camilloni, A. (2004). Sobre la evaluación formativa de los aprendizajes. *Quehacer Educativo, 14*(68), 6-12.

Carlino, P. (2005). *Escribir, leer y aprender en la universidad. Una introducción a la alfabetización académica.* Buenos Aires: Fondo de Cultura Económica de Argentina.

Delgado, A. M. & Oliver, R. (2006). La evaluación continua en un nuevo escenario docente. *Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento*, *3*(1).

Delgado García, A. M.; Borge Bravo, R.; García Albero, J.; Oliver Cuello, R. y Salomón Sancho, L. (2005). *Competencia y diseño de la evaluación continua y final en el espacio europeo de educación superior*. *Programa de Estudios y Análisis.* Ministerio de Educación y Ciencia. Dirección General de Universidades. Barcelona, España. Recuperado de:

http://campus.usal.es/~ofeees/ARTICULOS/competencias_evaluacion_eees_mec.pdf

del Puerto, S. y Seminara, S. (2013). Devolución de la Evaluación: una Experiencia Innovadora en el Aula de Matemática en el Nivel Superior. *Premi*sa, *15*(57), 3-13.

Fernández Barberis, G., Escribano Ródenas, M. y Bosch Frigola, I. (2006). *La Evaluación continua en Matemáticas en la Universidad*. Universidad CEU, San Pablo, Brasil; XIV Jornadas de ASEPUMA y II Encuentro Internacional. Recuperado de:

http://www.uv.es/asepuma/XIV/comunica/116.pdf

Gil Pérez, D. y de Guzmán, M. (1993). *Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. Tendencias e Innovaciones*. Parte II.4: La necesidad de innovaciones en la evaluación. *Biblioteca Virtual Organización de Estados Iberoamericanos.* Recuperado de: http://www.oei.org.co/oeivirt/ciencias.pdf

Tedesco, F. (2007). Devolución: instancia de aprendizaje. *Revista Iberoamericana de Educación. (OEA).* Versión digital. Recuperado de:

http://www.rieoei.org/deloslectores/1904Tedesco.pdf

EL MANEJO DE ESTRATEGIAS DE APRENDIZAJE POR PARTE DE LOS ALUMNOS EN EL NIVEL SUPERIOR

María Angélica Pérez, Margarita del Valle Veliz y Lucía P. Martin
Universidad Nacional de Tucumán Argentina
mperez200@hotmail.com, margaveliz@yahoo.com.ar

Resumen. En el presente trabajo se realizó un análisis de los distintos tipos de estrategias y se hizo un diagnóstico de aquellas que manejan los alumnos en la asignatura Cálculo. Se utilizó una adaptación del cuestionario ACRA de Escalas de Estrategias de Aprendizaje (Román Sánchez, 2004). Se evaluaron estrategias de adquisición de información, de codificación, de recuperación y de apoyo al procesamiento de la información. Se implementó con una escala tipo Lickert, midiéndose la confiabilidad y validez del instrumento, y luego mediante la técnica multivariada de análisis de factores, se agruparon los ítems que presentaban similitudes en cada una de las escalas observadas. Participaron de este diagnóstico 45 alumnos recursantes de la asignatura, sobre un total de 97 inscriptos en el primer cuatrimestre del año 2012.
Se determinó que en mayor porcentaje se aplican estrategias de recuperación de información y de apoyo al procesamiento de información, y en menor cuantía las restantes.
Palabras clave: estrategias – aprendizaje – diagnóstico
Abstract. In this paper, we analyze different types of strategies and make a diagnosis about those implemented by students of Calculus. We used an adapted ACRA questionnaire of Learning Stategies Scales (Román Sánchez, 2004). We evaluated those strategies related to the acquisition, codification, recovery and support regarding the information processing. We implemented a Lickert Scale, as a way to measure that instrument's reliability and validity, and then we used a factors analysis technique to group questionnaire´s items according with their similarities on each observed scale.
45 repeating students over a total of 97 applicants in 2012 first semester participated of the experience.
Strategies regarding the recovery and support of the information processing were applied in the highest percentage; while other strategies were applied in the lowest percentage.
Key words: strategies – learning - diagnosis

Introducción

Para poder desenvolverse con éxito en la sociedad actual, en que el conocimiento crece vertiginosamente y hay una gran cantidad de información disponible, es imprescindible que el estudiante no sólo adquiera conocimientos conceptuales, sino que aprenda a buscar, seleccionar, criticar e integrar esa información a su esquema cognitivo. Ello implica aprender procedimientos y estrategias que le permitan continuar aprendiendo, lo que Gargallo López y Ferreras Remesal (p. 9) definen como "Aprender estrategias de aprendizaje es «aprender a aprender» y el aprendizaje estratégico es una necesidad en la sociedad de la información y del conocimiento". El estudiante debe aprender a evaluar, planificar y controlar sus propios procesos de aprendizaje, adecuándolos al contexto y a la tarea a la que se enfrenta.

Beltrán (2003, p. 65) opina que antes de encarar la enseñanza de las estrategias a un estudiante, "…es preciso averiguar el conocimiento que ese estudiante tiene de las estrategias y la práctica que tiene en su empleo. Se trata, evidentemente, de hacer un diagnóstico del equipamiento estratégico de una persona en relación con el aprendizaje."

Es importante establecer las diferencias entre las llamadas técnicas de estudio y las estrategias de aprendizaje. Las primeras se encuadran en un enfoque conductista, se pone el acento en "cómo estudiar" y se percibe como un proceso desde el exterior (enseñanza – profesor). En cambio en las estrategias de aprendizaje se enfatiza el "cómo aprender", lo cual indica un proceso desde el interior del alumno (aprendizaje – alumno); se encuadran en la concepción cognitivista.

Marco conceptual

Algunas definiciones de estrategias de aprendizaje:

Los especialistas en el tema han dado distintas definiciones de este concepto. El conocimiento de algunas de ellas permite detectar características importantes de las estrategias de aprendizaje.

Weinstein (1985) (citado por Beltrán, 2002) las identifica con un conjunto de competencias necesarias para el aprendizaje efectivo, la retención de la información y su aplicación posterior. Las clasifica en estrategias cognitivas de procesamiento de la información (organizar y elaborar la información recibida), estrategias activas de estudio y estrategias de apoyo (técnicas para organizar el tiempo de estudio y dirigir la atención a la tarea de aprendizaje)

Yanac Reynoso (pp. 112-113), citando a Monereo (1997), señala que una estrategia de aprendizaje "es un proceso de toma de decisiones consciente e intencional sobre qué conocimientos (especialmente procedimentales) utilizar para alcanzar determinados objetivos de aprendizaje ante determinadas situaciones educativas."

Para Beltrán (2002), las estrategias de aprendizaje hacen referencia a operaciones mentales que facilitan los diversos procesos de aprendizaje. Es a través de las estrategias que el sujeto puede procesar, organizar, retener y recuperar la información, a la vez que planifica, regula y evalúa esos mismos procesos en función de los objetivos planteados.

Clasificación de las estrategias:

Entre los autores citados por Beltrán (2002), figura Danserau (1997), quien habla de estrategias: a) primarias, que operan directamente sobre el material y abarcan la comprensión –retención y la recuperación – utilización; b) de apoyo, que hacen referencia a la elaboración y programación de metas, aplicación de la concentración y diagnóstico.

Además, Kirby (1984), citado por Monereo, C. (1990), distingue entre microestrategias de aprendizaje, que actúan entre una tarea específica y su adquisición por el sistema cognitivo y las macroestrategias de aprendizaje, cuya acción tiene por objetivo el conocimiento y comprensión de los propios mecanismos de aprendizaje que pone en marcha el sujeto.

Las microestrategias, que se identifican con las técnicas de estudio, integrarían las estrategias de

repetición y elaboración, mientras que las macroestrategias, que se pueden definir como habilidades metacognitivas, se vinculan con las estrategias de organización, regulación y afectivo – motivacionales (Monereo, 1990).

Diagnóstico sobre las estrategias que manejan los alumnos:

Con respecto a la enseñanza de las estrategias, hay dos tendencias: la implementación de programas de enseñanza de las estrategias, paralelos a las disciplinas, y la enseñanza dentro de cada una de las disciplinas. Hay opiniones divididas sobre cuál de estas dos opciones es la más conveniente. Por ejemplo, la principal crítica sobre la primera variante es que las estrategias desarrolladas al margen de los contenidos curriculares, no siempre logran ser transferidos por los alumnos a situaciones concretas. En cambio, cuando las estrategias están incorporadas al currículum, el docente integra la enseñanza de las estrategias con la enseñanza del contenido facilitando así el procesamiento de la información y la transferencia de las estrategias. Esta segunda posición es la más aceptada en la actualidad.

Metodología empleada

En este estudio, se hizo un análisis de las diferentes estrategias que manejan los alumnos de Cálculo. Para llevar a cabo este diagnóstico, se utilizó una adaptación del cuestionario ACRA (escalas de estrategias de aprendizaje) de Román y Gallego de 1994, citado en Román Sánchez (2004). Este cuestionario se compone de cuatro escalas que se ajustan a la teoría sobre las estrategias de aprendizaje existente y sobre la que hay acuerdos básicos.

La escala I evalúa estrategias de adquisición de información: integra estrategias atencionales (exploración, fragmentación, subrayado lineal e idiosincrásico, epigrafiado), y estrategias de repetición (repaso en voz alta, repaso mental y repaso reiterado).

La escala II mide estrategias de codificación de información: integra estrategias de nemotecnización (acrósticos, acrónimos, rimas, muletillas), estrategias de elaboración (relaciones, imágenes, metáforas, aplicaciones, autopreguntas, paráfrasis), y estrategias de organización (agrupamiento, secuencias, mapas conceptuales, diagramas).

La escala III mide estrategias de recuperación de información: incluye estrategias de búsqueda (búsqueda de codificaciones e indicios), y estrategias de generación de respuestas (planificación de respuesta y respuesta escrita).

La escala IV evalúa estrategias de apoyo al procesamiento: integra estrategias metacognitivas (autoconocimiento, automanejo, planificación, regulación y evaluación), y estrategias socio – afectivas (autoinstrucciones, autocontrol, interacciones sociales, motivación intrínseca y

extrínseca).

El cuestionario se implementó con una escala de medición de tipo Lickert adaptada a cada uno de los ítems que componen las cuatro escalas de estrategias antes mencionadas. La confiabilidad del cuestionario se midió con el coeficiente alfa de Cronbach, en cada una de las cuatro escalas de estrategias, resultando en todo los casos mayores o iguales que 0.7, lo que indica que la escala de medición utilizada se muestra desde aceptable a elevada. Participaron de este diagnóstico 45 alumnos recursantes de la asignatura, sobre un total de 97 (noventa y siete) en el primer cuatrimestre del año 2012.

Se analizó la validez del instrumento y para ello se utilizó una técnica estadística multivariada (análisis factorial). Tal método nos indica cuántas dimensiones integran una variable y qué ítems conforman cada dimensión. El análisis factorial, según Hernández Sampieri (2008) es una técnica que consiste en resumir la información contenida en una matriz de datos con un número determinado de variables o ítems.

La interpretación de los factores se logra examinando las características de los ítems de un grupo asociado a un determinado factor y estableciendo los rasgos comunes que permiten identificar al factor y darle una denominación que se corresponda con esas características comunes (Johnson, 2004). En nuestro caso, se aplicó:

a) el método de Componentes Principales para determinar el número adecuado de factores.

b) la rotación ortogonal método de Varimax, que preserva la incorrelación entre los factores al rotar los ejes de los mismos, mediante la maximización de la suma de las varianzas de las saturaciones (aporte, peso o carga factorial de cada ítem en cada factor) de los ítems dentro de cada factor.

c) el determinante de la matriz de correlaciones que al ser muy cercano a cero, indica en todos los casos, que el grado de intercorrelación entre los ítems es muy alto, condición inicial que debe cumplirse en el análisis en componentes principales.

d) el test de esfericidad de Barlett (Johnson, 2004, p. 181) con su estadístico Chi2 que permitió contrastar la existencia de correlación entre las variables, indicando que tiene sentido el análisis factorial llevado a cabo, en todos los casos para todas las escalas de estrategias.

e) estadístico KMO, medida de adecuación muestral de Kaiser – Meyer – Olkin, cuyo valor cercano a la unidad, reveló una adecuación excelente de nuestros datos a un modelo del análisis factorial.

Los resultados de este análisis de factores, para cada una de las cuatro escalas de estrategias de aprendizaje, se muestran a continuación ordenados sólo para las escalas I y II. Para las siguientes escalas, se presenta un resumen de los resultados indicando los factores que la componen.

Cuadro Nº 1: Escala I que evalúa Estrategias de Adquisición de Información. Matemática II. Junio 2012.

Factor N° 1: Estrategias Atencionales	**Saturación**
Utilizo signos (de admiración, asteriscos, etc.), algunos de ellos sólo entendibles por mí, para resaltar aquellas partes del texto que considero importantes	0,82
Para distinguir y resaltar las distintas partes de que se compone un texto largo, lo subdivido en varios pequeños, mediante anotaciones, títulos o rótulos.	0,62
Cuando voy a estudiar un material, anoto los puntos importantes que he visto en una primera lectura superficial para obtener más fácilmente una visión de conjunto.	0,59
Hago uso de lápices o bolígrafos de distintos colores para favorecer el aprendizaje.	0,54
Varianza explicada 21,6%	
Factor N° 2: Estrategias de Repetición: repaso en voz alta.	Saturación
Empleo los subrayados para facilitar la memorización.	0.82
En los libros, apuntes u otro material a aprender, subrayo en cada párrafo las palabras, datos o frases que me parecen más interesantes.	0.67
Leo en voz alta, más de una vez, los subrayados comentarios, esquemas, etc. hechos durante el estudio	0.59
Varianza explicada 13,3%	
Factor N° 3: Estrategias de Repetición: repaso mental.	Saturación
Después de analizar un gráfico o dibujo del texto, dedico algún tiempo a aprenderlo y reproducirlo sin el libro.	0,77
Cuando estoy estudiando una lección, para facilitar la comprensión, descanso, y después la repaso para aprenderla mejor.	0,65
Varianza explicada 12,4%	
Factor N° 4: Estrategias de Repetición: repaso reiterado.	Saturación
Cuando el contenido de un tema es denso y difícil vuelvo a releerlo despacio.	0,81
Durante el estudio, escribo o repito varias veces los datos importantes o más difíciles de recordar.	0,75
Hago que me pregunten los subrayados, comentarios, esquemas, etc. hechos al estudiar un tema.	**0,53**
Varianza explicada 10,2%	

El total de varianza explicada es 57,54%, distribuida en cuatro (4) factores, con las estrategias atencionales integradas en el Factor N° 1, enfatizándose los subrayados y la fragmentación de textos. En los tres factores restantes se incluyen estrategias de repetición según la utilidad que le dan los alumnos son: repaso en voz alta, repaso mental y repaso reiterado.

Cuadro Nº 2: Escala II que evalúa Estrategias de Codificación de Información. Matemática II. Junio 2012.

Factor N° 1: Estrategias de organización.	**Saturación**
Hago esquemas o cuadros sinópticos de lo que estudio.	0,79

Si he de aprender conocimientos sobre el procedimiento, procesos o pasos a seguir para resolver un problema, tarea, etc.; hago diagramas y/o gráficos	0,78
Al estudiar, agrupo y/o clasifico los datos según criterios propios.	0,67
Varianza explicada 28,9%	
Factor N° 2: Estrategias de elaboración: paráfrasis.	Saturación
Hago resúmenes de lo estudiado al final de cada tema.	0,88
Completo la información del libro de texto o de los apuntes de clase acudiendo a otros libros, artículos, enciclopedias, etc.	0,84
Dedico un tiempo de estudio a memorizar, sobre todo, los resúmenes y los esquemas	0,68
Varianza explicada 12,9%	
Factor N° 3: Estrategias de elaboración: aplicabilidad de los contenidos	Saturación
Uso aquello que aprendo, en la medida de lo posible, en mi vida diaria.	0,79
Aplico lo que aprendo en unas asignaturas para comprender mejor los contenidos de otras.	0,74
Me intereso por la aplicación que puedan tener los temas que estudio a los campos laborales que conozco.	0,64
Durante las explicaciones de los profesores, suelo hacerme preguntas sobre el tema.	0,54
Varianza explicada 8,6%	
Factor N° 4: Estrategias de elaboración: relacionar y autopreguntas	Saturación
Cuando estudio, me voy haciendo preguntas sugeridas por el tema, a las que intento responder.	0,71
Deduzco conclusiones a partir de la información que contiene el tema que estoy estudiando.	0,63
Relaciono o enlazo el tema que estoy estudiando con otros que he estudiado o con datos o conocimientos anteriormente aprendidos. etc.	0,59
Cuando leo hago la diferencia entre los aspectos y contenidos importantes o principales de los accesorios o secundarios.	0,52
Varianza explicada 6,3%	
Factor N° 5: Estrategias de elaboración: Sobre lo aprendido y estudiado.	Saturación
Acudo a los amigos, profesores o familiares cuando tengo dudas o puntos poco claros en los temas de estudio o para intercambiar información.	0,81
Discuto, relaciono o comparto con los compañeros los trabajos, esquemas, resúmenes o temas que hemos estudiado.	0,73
Realizo ejercicios, pruebas o pequeños experimentos, etc. como aplicación de lo aprendido.	0,49
Varianza explicada 5,9%	

El agrupamiento de los ítems de las Estrategias de Codificación de Información resultó con varianza total explicada del 62,6% correspondiendo a las estrategias de organización el factor de mayor relevancia. Las estrategias de elaboración se muestran componiendo los cuatro factores restantes, destacándose la realización de explicaciones e interpretaciones ampliadas de lo que se estudia (paráfrasis); la aplicabilidad de los contenidos y las autopreguntas.

La Escala III evalúa estrategias de recuperación de información.

Las estrategias de recuperación de la información se agruparon en tres factores, que son la búsqueda de códigos, de indicios y de generación de respuestas, con una varianza total explicada del 60%, que se distribuye en forma destacada en cada uno de ellos. El pensar y preparar mentalmente lo que se va a decir o escribir; recordar todo lo que se pueda para luego ordenarlo y finalmente desarrollarlo punto por punto y el evocar sucesos, episodios o anécdotas ocurridos durante la clase o en otros momentos de aprendizaje, son las estrategias que en mayor medida se manifiestan en los alumnos.

La Escala IV evalúa estrategias de apoyo al procesamiento de información.

El total de varianza explicada es del 60,3%, siendo el factor referido a las estrategias metacognitivas el de mayor incidencia en esta explicación. Los demás factores tienen que ver con estrategias de autocontrol y de motivación que son consideradas de poca significación.

Para determinar en qué magnitud estos alumnos tienen incorporada cada una de estas escalas de estrategias, se definió, para cada caso, una variable resultado de categorizar el promedio de las puntuaciones de las respuestas de los alumnos a los ítems del cuestionario.

Cuadro Nº 3: Distribución de las Escalas de Estrategias de aprendizaje. Matemática II. Junio 2012.

Utiliza estrategias de:	Muy pocas veces	Algunas veces	Muchas veces	Siempre	Total
Adquisición de información	9%	45%	39%	8%	$100_{(45)}$ %
Codificación de información	10%	42%	36%	12%	$100_{(45)}$ %
Recuperación de información	3%	27%	53%	17%	$100_{(45)}$ %
Procesamiento de información	1%	22%	54%	23%	$100_{(45)}$ %

Se observa en este cuadro que las estrategias que aplican nuestros alumnos en mayor cuantía son las de "recuperación" y la de "procesamiento" de información.

Cuadro Nº 4: Distribución del uso de estrategias, según la condición académica. Matemática II. Junio 2012.

Condición académicas al finalizar el cursado	Utilizó todo tipo de estrategias:			Total
	Muy pocas veces	Algunas veces	Muchas veces	
Promocionado	-----	11%	16%	27%
Regular	1%	14%	45%	60%
Libre	---	3%	10%	13%
Total	**1%**	**28%**	**71%**	**$100_{(45)}$%**

Los mayores porcentajes de alumnos que utilizaron alguna vez o muchas veces todo tipo de estrategias de aprendizaje se encuentran entre los promocionados o regulares.

Conclusiones

Del estudio realizado surge que las estrategias consideradas no tienen la misma frecuencia de uso entre los alumnos.

El aprendizaje de estrategias de aprendizaje se identifica con el "aprender a aprender", esto es, con el aprendizaje de habilidades para aprender contenidos. Implica actuar con autonomía eligiendo las estrategias apropiadas, ser capaz de trazar un plan de aprendizaje, controlar su desarrollo y evaluar los resultados obtenidos. Saber lo que hay que hacer para aprender, saberlo hacer y controlarlo mientras se hace, es lo que pretenden las estrategias.

De ahí la importancia de incorporar su enseñanza dentro de la disciplina Matemática, lo que permitirá el adiestramiento de mecanismos de control inherentes a la disciplina.

Se determinó que en mayor porcentaje se aplican estrategias de recuperación de información y de apoyo al procesamiento de información, y en menor cuantía las restantes. Estos resultados sugieren que la incorporación de estrategias es necesaria para obtener mejores resultados académicos, lo que se está tratando de implementar en el cursado del año 2013.

Referencias bibliográficas

Beltrán, J. (2002). Procesos, Estrategias y Técnicas de Aprendizaje. Madrid, España: Síntesis.

Beltrán, J. (2003). Estrategias de aprendizaje. Revista Educación. Universidad Complutense de Madrid, 332, 55 – 73.

Gargallo López, B. y Ferreras Remesal, A. (s. f.). Estrategias de Aprendizaje. Un programa de intervención para ESO y EPA. Revista del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte de Madrid. Colección Investigación 148. En www.educacion.es/cide/espanol/publicaciones/.../col148pc.pdf

Hernández Sampieri, R (2008). Metodología de la Investigación. México: McGraw-Hill Interamericana.

Johnson, D. E. (2004). Métodos multivariados aplicados al análisis de datos. México: International Thomson Editores.

Monereo, C. (1990). Las estrategias de Aprendizaje en la Educación formal: enseñar a pensar y sobre el pensar. Infancia y aprendizaje, 50, 3 – 25. En www.salgadoanoni.cl/wordpressjs/wp-content/.../02/enseñar-a-pensar.pdf

Román Sánchez, J. M. (2004). El Modelo ACRA de estrategias de aprendizaje: Propuestas de intervención sobre dificultades de aprendizaje. Revista del Departamento de Psicología. Universidad de Valladolid. En www.buendia.uva.es/DocumentosReducido.asp?Accion=IrA...7

Yanac Reynoso, E. (s. f.). Estrategias de Aprendizaje. 109 – 126. En www.unmsm.edu.pe/psicologia/.../06LibroEAPYanac.pdf

ANÁLISIS DEL RAZONAMIENTO DE ALUMNOS UNIVERSITARIOS EN SITUACIONES DE VALIDACIÓN EN GEOMETRÍA ANALÍTICA

Patricia Sastre Vázquez, Carolina Boubée y Ana María Graciela Rey
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires Argentina
Universidad Católica Argentina
psastre@faa.unicen.edu.ar, cboubee@faa.unicen.edu.ar, grey@faa.unicen.edu.ar

Resumen. El presente trabajo relata una etapa del proyecto de investigación "Análisis del Lenguaje Matemático y su influencia en los procesos de Validación en estudiantes universitarios de Ingeniería". Su objetivo es el análisis de los tipos de razonamiento utilizados por estudiantes del Primer Año de todas las carreras de la Facultad de Agronomía de la Universidad Nacional del Centro, en situaciones de validación referidas a Secciones Cónicas.
Los resultados arrojan un predominio de procederes más intelectuales que pragmáticos, una significativa cantidad de casos con ausencia de validación y otros en los que se evidencia la interpretación simbólica de un objeto algebraico.
Palabras clave: razonamiento, validación, cónicas
Abstract. This paper describes a stage of the research project "Analysis of the Mathematical Language and its influence on the processes of Validation Engineering college students." Its aim is to analyze the types of reasoning used by students of the First Year of races of the Faculty of Agronomy of the Universidad Nacional del Centro, validation situations regarding Conic Sections.
The results show a predominance of intellectual procedures more pragmatic, a significant number of cases with no validation and other evidence on which the symbolic interpretation of an object algebra.
Key words: reasoning, validation, conical

Introducción

La actividad matemática escolar se ha compuesto, tradicionalmente, por propuestas de actividades en las que los estudiantes aplican los conocimientos ya adquiridos. Estas propuestas corresponden a lo que Balacheff (2000) denomina como "esfera de práctica" y remiten a acciones que no generan nuevos conocimientos porque no implican la necesidad de tomar decisiones ni validarlas. Sin embargo es posible diseñar otro tipo de actividades que inviten al estudiante a comprometerse activamente en la construcción de su aprendizaje y den lugar al desarrollo del razonamiento, entendido como la capacidad de establecer relaciones entre conceptos o información conocida, argumentar con razones fundadas y comunicar en forma convincente los resultados de indagaciones (Samper de Caicedo, Camargo y Leguizamón de Bernal, 2003).

El presente trabajo relata una etapa de un proyecto de investigación en desarrollo, en el área de Educación Matemática. En el marco del proyecto "Análisis del Lenguaje Matemático y su influencia en los procesos de Validación en estudiantes universitarios de Ingeniería", se persigue como objetivo el análisis de los tipos de razonamiento utilizados por estudiantes del Primer Año de todas las carreras de la Facultad de Agronomía de la Universidad Nacional del Centro, en situaciones de validación referidas a Secciones Cónicas. Estas situaciones implican la argumentación

y fundamentación de las afirmaciones a las cuales arriban los alumnos, lo cual constituye un paso importante hacia la demostración en Matemática.

Referencial teórico

Balacheff (2000) denomina "situaciones de validación" a aquellas actividades en las cuales los alumnos deben socializar sus explicaciones acerca de una afirmación, y las considera un paso importante en el camino hacia la demostración en Matemática. Este tipo de situaciones exigen procesos de pruebas, que no son equivalentes a los requeridos en las demostraciones formales, pero implican la toma de decisión y la construcción de una prueba explícita por parte de los estudiantes, favoreciendo el razonamiento y la búsqueda de justificaciones.

Estas actividades que invitan a la construcción de conjeturas, a la toma de decisiones y a la búsqueda de justificaciones, son consideradas por algunos autores (Samper de Caicedo, *et al*, 2003) como "actividades de investigación".

La forma como el individuo procede para investigar, convencerse o convencer a otros acerca de una conjetura, está relacionada con la concepción que tenga acerca de la naturaleza del hacer matemático, con el conocimiento matemático que posea, siendo de suma importancia, también, el lenguaje del que disponga para trabajar (natural y simbólico) y el tipo de justificaciones que se le hayan solicitado al estudiante en su formación matemática escolar.

Balacheff (2000) distingue dos tipos de proceder al investigar: en forma pragmática o intelectual. En el primer caso, los estudiantes recurren a la acción sobre ostensivos, para establecer o justificar conjeturas. Se fundamentan en observaciones y construyen razones personales o grupales para tener confianza en ellas. Este proceso tiene un carácter singular, pues los estudiantes se centran en casos particulares, y generalmente utilizan lenguaje natural para comunicar sus producciones. Se intenta mostrar la eficacia o utilidad de una conjetura. En síntesis, son pruebas ligadas a la acción y a la experiencia. En el segundo caso, los estudiantes se apoyan en propiedades y relaciones de los objetos matemáticos involucrados. El proceso se fundamenta en la toma de conciencia del carácter genérico de las situaciones consideradas, convirtiendo el conocimiento en objeto de reflexión y discusión, privilegiando la utilización del lenguaje formal en la comunicación. Se busca aplicar el rigor propio de una teoría, ir más allá de la acción.

Es necesario reconocer el salto epistemológico entre los procedimientos pragmáticos y los intelectuales. Aceptar y valorar un ambiente que dé lugar a procedimientos prácticos, permite obtener conocimientos, lenguaje e instrumentos de argumentación para la aceptación del nuevo estatus de validación en el ambiente teórico. El nivel de desarrollo de las herramientas de investigación da lugar a distintos tipos de razonamiento.

De acuerdo con Balacheff (2000), se considera al *razonamiento* como una actividad intelectual no completamente explícita que se ocupa de la manipulación de la información dada o adquirida, para producir una nueva información. Esta misma actividad, cuando tenga como fin asegurarse de la validez de una proposición y, eventualmente, producir una explicación (una prueba o una demostración), será designada como *proceso de validación.*

El mismo autor distingue diferencias que lo llevan a hacer una clasificación más fina del razonamiento utilizado, pasando gradualmente de una racionalidad empírica a una construcción netamente cognitiva. Clasifica el razonamiento utilizando las siguientes categorías:

- *Empirismo ingenuo*: se produce y asegura una conjetura después de haberla estudiado, empíricamente, en algunos casos.
- *Experiencia crucial*: se asegura la conjetura verificándola, pragmáticamente, en un caso especial, con características extremas como respuesta a la necesidad de generalizar.
- *Ejemplo genérico*: la validez de la conjetura surge del estudio de un caso representativo de la clase correspondiente. El ejemplo genérico puede utilizarse para proceder en forma pragmática o intelectual, marcando la transición entre estos tipos de procedimientos.
- *Experiencia mental*: se afirma la validez de la conjetura interiorizando la acción y separándola de las ejecutorias sobre representantes particulares. Es decir, las operaciones y relaciones con que realiza la prueba no se derivan de la experiencia práctica sobre un objeto sino del conocimiento de definiciones, postulados y teoremas; se sustituye la observación por la razón para fundamentar el conocimiento.

Diseño metodológico

Se diseñó una actividad con la finalidad de que los alumnos pudieran enfrentarse a la tarea de validar matemáticamente, en el área de la Geometría Analítica, específicamente abordando el tema "Secciones Cónicas", bajo el título "Actividades matemáticas para pensar de a dos".

El grupo de alumnos con los cuales se realizó el estudio estuvo compuesto por 46 estudiantes de la Facultad de Agronomía de la Universidad Nacional del Centro, sita en Azul, Provincia de Buenos Aires. Todos ellos son alumnos regulares de Matemática, asignatura que corresponde al primer cuatrimestre del Primer Año de las carreras de Ingeniería Agronómica, Licenciatura en Tecnología de los Alimentos y Profesorado en Ciencias Biológicas.

La actividad, que se presentó en forma escrita, incluyó una cuestión con dos preguntas y se solicitó, de manera explícita y enfática que los estudiantes, en parejas (23 grupos), dejaran en la

hoja de resolución todo lo que hicieran, además de explicar y justificar la respuesta o las razones que impidieron la resolución.

La cuestión planteada fue la siguiente:

- ¿En qué caso/s particular/es la elipse puede transformarse en otra cónica?
- ¿Qué sucede con los elementos de ambas cónicas?

Se propuso una actividad considerada lo suficientemente amplia como para permitir la posibilidad de ser abordada de diversas maneras, como por ejemplo, mediante el análisis de los ángulos formados por los planos y el cono de revolución, análisis en el marco del registro gráfico, del registro analítico, estudio de excentricidades, etc.

En cuanto a la oportunidad para realizar esta actividad, se decidió que fuera inmediatamente después del desarrollo de la Unidad programática correspondiente a "Cónicas" a través de clases teórico-prácticas, y previa a la evaluación correspondiente.

Resultados

Para el análisis de los resultados se utilizaron las categorías ya mencionadas en el Marco Teórico, definidas por Balacheff (2000), y que denotaremos: EI, EC, EG y EM. Así mismo, debimos tomar en cuenta una nueva categoría emergente: la categoría que denominamos Interpretación simbólica de un objeto algebraico (ISOA).

Siguiendo a Peirce (1987) se interpreta que un ícono hace referencia a una simple asociación racional entre el signo y la cosa significada, mientras que un símbolo implica una asociación mental con una significación propia del interpretante entre el signo y el objeto. Así, en términos de este autor, una fórmula algebraica es un ícono ya que una gran propiedad distintiva de los íconos es que mediante su observación se pueden descubrir otras verdades concernientes al objeto. No obstante este predominio del carácter icónico, las expresiones algebraicas contienen símbolos en el sentido de Peirce, como por ejemplo los signos +, –, =, etc.

La nueva categoría surge de la necesidad de encuadrar aquellas producciones de los estudiantes en las que se observa la pérdida del carácter icónico de la expresión algebraica de una cónica, reduciendo toda la expresión a símbolo, debido al peso que le otorgan al símbolo + o – de las ecuaciones de la elipse y de la hipérbola, respectivamente.

Vale aclarar que las categorías de razonamiento tomadas de los trabajos de Balacheff, fueron definidas en el contexto de la Geometría Euclidiana. Esto pone en evidencia y justifica la necesidad de incluir esta nueva categoría emergente, propia del planteo de actividades que involucran aspectos algebraicos, característicos de la Geometría Analítica.

Se consideran respuestas SC, "sin categorizar", aquellas en las cuales existe conjetura pero no existe validación o presentan una validación inconsistente.

La Tabla 1 muestra los resultados obtenidos en la categorización de las respuestas producidas por los grupos de estudiantes.

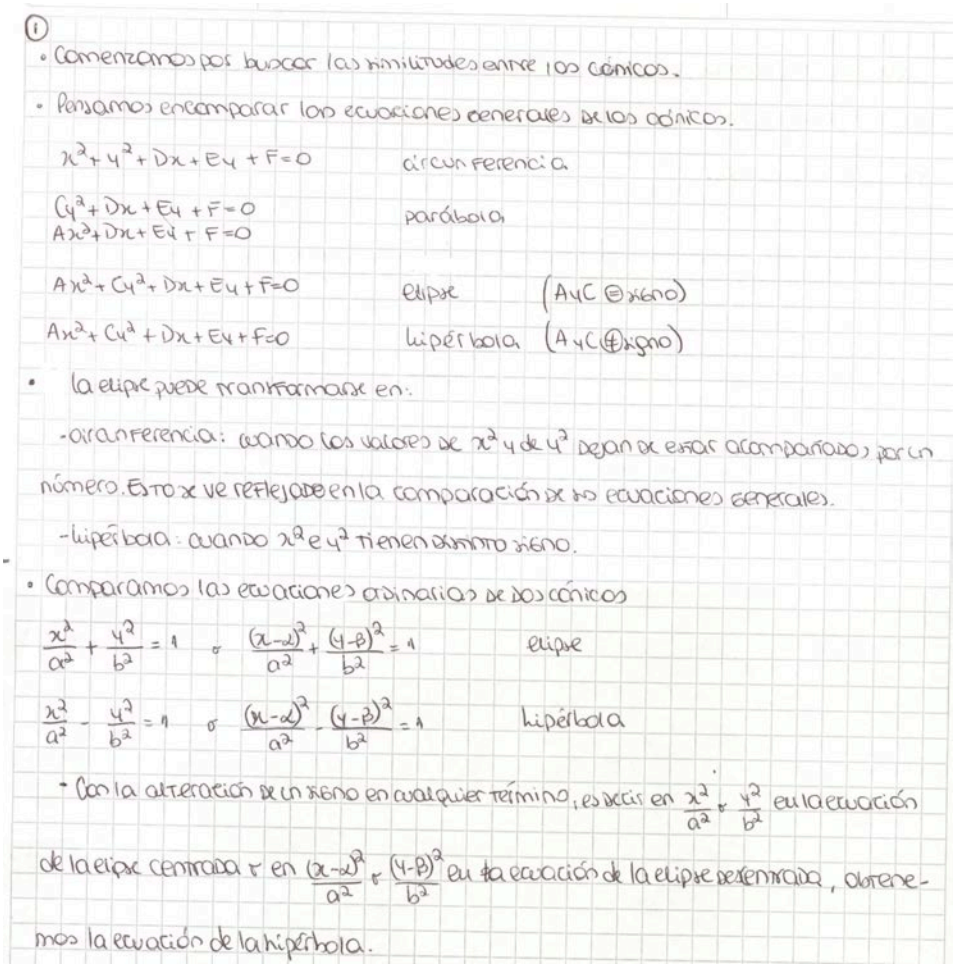
Tabla 1. Cantidad de grupos de estudiantes para cada categoría

Categorías de Respuestas		Cantidad de Grupos
Sin categorizar	Sin Categorizar (SC)	4
Categorías según Balacheff	Empirismo Ingenuo (EI)	1
	Experiencia Crucial (EC)	0
	Ejemplo Genérico (EG)	4
	Experiencia Mental (EM)	6
Categoría emergente	Interpretación Simbólica de un Objeto Algebraico (ISOA)	8
	TOTAL	23

Más allá de la corrección de las respuestas, como el objetivo perseguido es el análisis del tipo de razonamiento empleado por los alumnos al validar, las producciones categorizadas son aquellas que evidenciaban algún tipo de razonamiento, logrando validar alguna conjetura. Claramente, las respuestas sin categorizar son aquellas que no mostraron ningún tipo de validación, y encontramos 4 grupos con estas características.

La categorización de las producciones de los alumnos responde a la mayor categoría de razonamiento identificada. Es decir, quizás dan muestra de comenzar con un tipo de razonamiento más empírico, pero logran arribar a razonamientos más intelectuales, entonces se los incluyó en las categorías de este último tipo.

Con las Figuras 1, 2 y 3 ejemplificamos la categoría emergente ISOA mostrando algunos casos representativos de la Interpretación Simbólica de un Objeto Algebraico.



(i)

- Comenzamos por buscar las similitudes entre los cónicos.
- Pensamos en comparar las ecuaciones generales de las cónicas.

$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ circunferencia

$Cy^2+Dx+Ey+F=0$ parábola
$Ax^2+Dx+Ey+F=0$

$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ elipse (A y C ⊖ signo)

$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ hipérbola (A y C ⊕ signo)

- la elipse puede transformarse en:

-circunferencia: cuando los valores de x^2 y de y^2 dejan de estar acompañados por un número. Esto se ve reflejado en la comparación de las ecuaciones generales.

-hipérbola: cuando x^2 e y^2 tienen distinto signo.

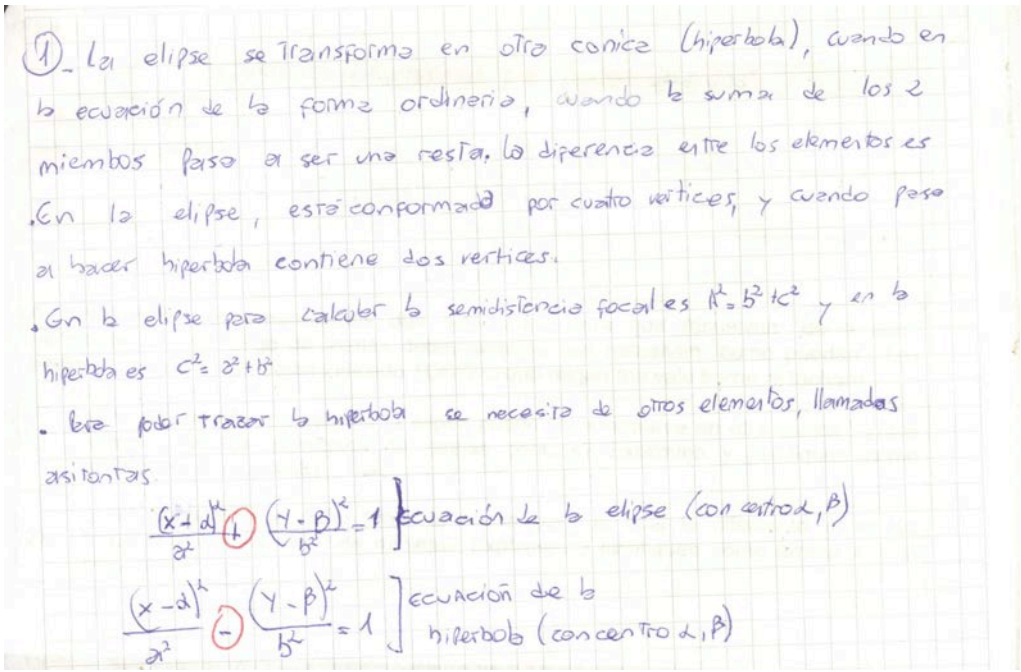
- Comparamos las ecuaciones ordinarias de dos cónicas

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ o $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ elipse

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ o $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ hipérbola

- Con la alteración de un signo en cualquier término, es decir en $\frac{x^2}{a^2}$ y $\frac{y^2}{b^2}$ en la ecuación de la elipse centrada y en $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}$ y $\frac{(y-\beta)^2}{b^2}$ en la ecuación de la elipse descentrada, obtenemos la ecuación de la hipérbola.

Figura 1. Respuesta del Grupo 8 categorizada ISOA, en la que además del cambio de signo, hay un cambio en los coeficientes



(1)- La elipse se transforma en otra conica (hiperbola), cuando en la ecuación de la forma ordinaria, cuando la suma de los 2 miembros pasa a ser una resta. la diferencia entre los elementos es

.En la elipse, está conformada por cuatro vertices, y cuando pasa a hacer hiperbola contiene dos vertices.

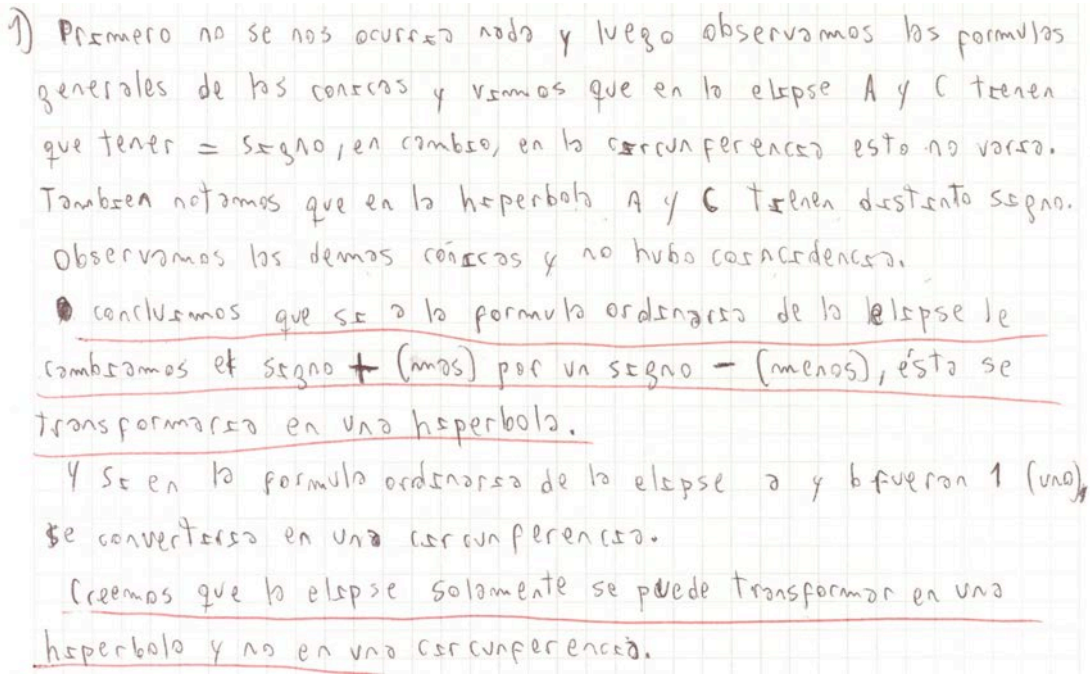
.En la elipse para calcular la semidistancia focal es $A^2=b^2+c^2$ y en la hiperbola es $c^2=a^2+b^2$

. Para poder trazar la hiperbola se necesita de otros elementos, llamadas asintotas.

$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ ecuación de la elipse (con centro α,β)

$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ ecuación de la hiperbola (con centro α,β)

Figura 2. Respuesta del Grupo 13 categorizada ISOA



1) Primero no se nos ocurrió nada y luego observamos las formulas generales de las conicas y vimos que en la elipse A y C tienen que tener = signo, en cambio, en la circunferencia esto no varia. Tambien notamos que en la hiperbola A y C tienen distinto signo. Observamos las demas conicas y no hubo coincidencia.

Concluimos que si a la formula ordinaria de la elipse le cambiamos el signo + (mas) por un signo − (menos), ésta se transformaría en una hiperbola.

Y si en la formula ordinaria de la elipse a y b fueran 1 (uno), se convertiría en una circunferencia.

Creemos que la elipse solamente se puede transformar en una hiperbola y no en una circunferencia.

Figura 3. Respuesta del Grupo 14 categorizada ISOA

Análisis de resultados y conclusiones

La caracterización de los tipos de razonamiento puestos en juego en los procesos de validación que llevan a cabo los estudiantes involucrados en este estudio, para la actividad propuesta, arroja un predominio de procederes más "conceptuales" o "intelectuales" en relación a los considerados más "pragmáticos", si solo se consideran las categorías de razonamiento propuestas por Balacheff (2000). Los relativamente altos valores de EM en los casos analizados así lo confirman.

Sin embargo, los indicadores de ausencia de validación y los numerosos casos de interpretaciones simbólicas de las expresiones algebraicas de las cónicas (categoría ISOA), por las que un cambio de signo valida la transformación de una cónica en otra, dan cuenta de una significativa heterogeneidad a nivel grupal. Además de esta heterogeneidad, la alta frecuencia de razonamientos categorizados como ISOA, evidencia un desconocimiento del status algebraico de los símbolos operacionales en las expresiones algebraicas, y refleja el obstáculo que representa para los alumnos la articulación entre los registros algebraico y gráfico, esencial en el aprendizaje de la Geometría Analítica, particularmente.

Consideramos necesario continuar con la indagación que permita comprender cuál es y cómo funciona la racionalidad de los estudiantes, por lo que otras propuestas de actividades y temas resultan imprescindibles para un análisis más profundo y acabado del razonamiento de los alumnos universitarios en contextos de validación.

Referencias bibliográficas

Balacheff, N. (2000). *Procesos de Prueba en los Alumnos de Matemáticas*. Bogotá: Una empresa docente. Universidad de los Andes.

Peirce, C. S. (1987). *Obra lógico-semiótica* (Edición de Armando Sercovich). Madrid: Taurus.

Samper de Caicedo, C., Camargo, L. y Leguizamón de Bernal, C. (2003). *Tareas que promueven el razonamiento en el aula a través de la geometría*. Bogotá: Asociación Colombiana de Matemática Educativa-Grupo Editorial Gaia.

HERRAMIENTAS PARA EL CAMBIO EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS: ALGUNAS POSIBILIDADES

Agustín de la Villa, Alejandro Lois, Liliana Milevicich y Gerardo Rodríguez
Universidad Pontificia Comillas. Escuela Técnica Superior de Ingeniería ICAI España
Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional General Pacheco Argentina
Escuela Politécnica Superior de Zamora. Universidad de Salamanca. España
avilla@dmc.icai.upcomillas.es, alelois@hotmail.com, liliana_milevicich@yahoo.com.ar, gerardo@usal.es

Resumen. Las nuevas tecnologías han llegado para quedarse y formarán parte cada vez más activa de los procesos de enseñanza y aprendizaje. El presente trabajo surge del curso corto desarrollado durante RELME 27 con el propósito de analizar las nuevas tecnologías en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en las escuelas de Ingeniería: su incidencia y adecuación. En ese sentido se abordaron los siguientes tópicos: los Laboratorios de Matemáticas, una enseñanza integrada de las Matemáticas, algunas experiencias surgidas del proceso de Bolonia: Proyectos y concursos, las nuevas tecnologías: plataformas en línea, tutorías y evaluación.
Palabras clave: nuevas tecnologías, laboratorios de matemáticas, enseñanza por competencias, evaluación en línea, tutorías en línea
Abstract. New technologies are here to stay and will form an increasingly active part of the teaching and learning process. This paper arises from the short course developed over RELME 27 in order to discuss new technologies in the teaching and learning of mathematics in engineering schools: their impact and adequacy. In this sense, the following topics were addressed: Mathematics laboratories, integrated teaching of mathematics, some experiences arising from the Bologna Process: Projects and contests, new technologies: online platforms, tutorials and evaluation.
Key words: new technologies, math laboratories, teaching skills, online assessment, online tutoring

Antecedentes

Los centros de estudios superiores: Universidad Tecnológica Nacional (UTN) de Argentina y las universidades españolas Universidad Pontificia Comillas de Madrid, y Universidad de Salamanca, en el marco del Programa de investigación conjunta entre Argentina y España, y sustentado por sendos convenios firmados entre las mencionadas universidades, han venido desarrollando actividades conjuntas con el propósito de:

1. Evaluar la evolución sobre la incorporación de Tecnologías de Información y Comunicación (TICs) en la Educación Superior en América Latina y el Caribe, fundamentalmente en los últimos 10 años.
2. Favorecer la investigación en el uso de tecnologías educativas en la Educación Superior.
3. Contribuir a fomentar la investigación en el uso de tecnología educativa dentro y fuera del aula, divulgar sus resultados y aplicarlos para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática en el nivel superior.
4. Fomentar la interrelación entre las instituciones educativas, universidades, facultades, países y diferentes culturas para contribuir a una enseñanza en el nivel superior más acorde con los tiempos actuales.

En respuesta a tales propósitos se han presentado propuestas en la modalidad de grupos de discusión, cursos y talleres en las Reuniones Latinoamericanas de Matemática Educativa de los años 2009, 2010 y 2012. A saber:

- Un grupo de discusión en la RELME XXIII en Santo Domingo, República Dominicana, referido a la *Perspectiva de las TICs en la Educación Superior en América Latina*. (Lois, Milevicich, Rodríguez, de la Villa, 2010)
- Un grupo de discusión en RELME XXIV en la Ciudad de Guatemala, Guatemala referido a la *Perspectiva de las TICs en la Educación Superior Iberoamérica*. (Lois, Milevicich, Rodríguez, de la Villa, 2011)
- Un taller en la RELME XXVI en Belo Horizonte, Brasil referido a *Enseñar matemática: un reto en el nuevo paradigma tecnológico.* (Lois, Milevicich, Rodríguez, de la Villa, 2013)
- Un curso corto, en el recién mencionado congreso, referido a *La revolución tecnológica en la enseñanza de las matemáticas. El nuevo paradigma. ¿Es una oportunidad de cambio o un simple engaño?* (Lois, Milevicich, Rodríguez, de la Villa, 2013)

Introducción

En el presente trabajo se pretende plasmar el contenido del curso dictado durante la RELME 27: los tópicos abordados, conclusiones y perspectivas de continuidad en esta línea de investigación.

El curso comenzó analizando *la evolución de los Laboratorios de Matemáticas*, desde la aparición de los primeros computadores en la década de los 70 del siglo XX hasta nuestros días, haciendo hincapié sobre cómo, lenta pero sostenidamente, se ha ido trasladando el laboratorio de informática al aula tradicional, lo que ha permitido lograr *una enseñanza integrada de las matemáticas* donde el uso del ordenador es tan común como la tiza y el pizarrón, las diapositivas o las transparencias.

El curso continuó analizando algunos *Laboratorios de Matemática adaptados al proceso de Bolonia,* en el marco del Espacio Europeo de Educación Superior (EEES).

La segunda parte del curso estuvo destinada a *las nuevas tecnologías: plataformas en línea, tutorías y evaluación*. Se presentaron numerosos ejemplos con el propósito de mostrar cómo puede la virtualización de la enseñanza contribuir a mejorar la calidad, la equidad, la flexibilidad, la eficiencia y las posibilidades de formación y actualización permanente en la Educación Superior.

Desarrollo

La evolución de los Laboratorios de Matemáticas

La aparición de las primeras computadoras dio un auge especial a determinadas ramas de las matemáticas en las cuales su utilización era esencial, como por ejemplo en el Análisis Numérico. Posteriormente, en la década de los 80, se empezó a usar el ordenador como herramienta didáctica, intentando enfatizar aspectos tales como la visualización y la capacidad de cálculo, tanto simbólico como numérico. Se crearon entonces, en las diferentes Escuelas de Ingeniería, los Laboratorios de Matemáticas con el propósito de favorecer aprendizajes significativos, el desarrollo de habilidades y capacidades relacionadas con las asignaturas correspondientes y la autonomía del estudiante.

A nuestro juicio, hubo tres elementos determinantes que impulsaron la creación de los Laboratorios de Matemáticas en la Educación Superior. En primer lugar, el uso de ordenadores portátiles que permitió trasladar físicamente el laboratorio de informática al aula, en segundo lugar el acceso masivo a Internet, y finalmente, el acceso a CAS especializados y su incorporación a las diferentes asignaturas.

En este nuevo contexto se vincula la enseñanza y el aprendizaje de temas específicos de las Matemáticas integrando las TICs en el aula como herramienta didáctica, utilizando, entre otros recursos, el acceso a páginas interactivas de Matemáticas, donde los gráficos y los cálculos cobran vida a través de escenas configurables. Tal es el caso del material ofrecido en el sitio destinado al Proyecto Descartes (*http://recursostic.educacion.es/descartes*).

La confección de estas páginas interactivas (denominadas applets, término tomado del inglés) y la utilización de otros estándares facilitan investigar propiedades, adquirir conceptos y relacionarlos, aventurar hipótesis y comprobar su validez, hacer deducciones, establecer propiedades y teoremas, plantear y resolver problemas.

Descartes Web 2.0 es un complemento del núcleo interactivo para páginas educativas que se insertan en una página de hipertexto de tal modo que se pueda editar simultáneamente el hipertexto y las escenas interactivas insertadas en él. Por ello es que Descartes puede ser utilizado por los autores de páginas WEB educativas para enriquecer sus materiales con una amplia variedad de modelos matemáticos interactivos. En la figura 1 se observa un applet que permite analizar la intersección de un cono con un plano y, a partir de la variación de parámetros en el gráfico, trabajar sobre las competencias de investigar, deducir, conjeturar, etc. Algunas preguntas interesantes relacionadas son:

a) ¿Qué resulta de la intersección del cono con un plano paralelo al plano xy? ¿Puede deducir tal intersección de manera analítica?,

b) ¿En algún caso la intersección es vacía?,

c) ¿Cuál es la superficie que resulta si el plano no es paralelo al plano xy?

d) ¿Puede expresar la curva intersección entre el cono y el plano a través de una función vectorial?

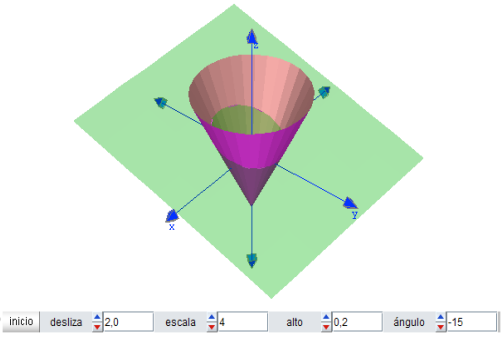


Figura 1. Applet intersección del cono centrado en el origen de coordenadas y un plano.

En el curso impartido también se analizó EDUTEKA, Portal Educativo gratuito de la Fundación Gabriel Piedrahita Uribe (FGPU), que se publica en Cali, Colombia, desde 2001 y se actualiza mensualmente. Este sitio Web (*www.eduteka.org)* provee, en forma gratuita, materiales para docentes. Pone a su disposición una amplia variedad de contenidos formativos e informativos con el uso de las TICs y presenta espacios interactivos en línea con recursos útiles y valiosos para los docentes. Algunos ejemplos presentados están referidos a Funciones y gráficos, Planos de coordenadas y los gráficos y Sistemas de coordenadas cartesianas. En cada uno de ellos se examinaron los ejemplos, las actividades adicionales y las discusiones. No se desarrollan en este trabajo por razones de espacio, sin embargo se pueden consultar a través del link:

http://www.eduteka.org/MI/master/interactivate/activities/Flaydata/Index.html

Luego se presentó el Laboratorio de Matemáticas diseñado por nuestro grupo de investigación, formado por los docentes de UTN, Universidad Pontifica Comillas y Universidad de Salamanca, tal como se mencionó en los antecedentes; y algunos programas desarrollados en relación con:

el concepto de derivada (Posición – Velocidad – Aceleración, Razón de cambio, Construcción de la función anti-derivada), el concepto de integral (Suma de Riemann, Integrales impropias), las funciones vectoriales (Triedro de Frénet, Círculo osculador), el cálculo multivariable (Mapa de contorno, La derivada direccional, Integrales dobles, Coordenadas esféricas) y el cálculo vectorial (Superficies orientadas).

Laboratorios de Matemáticas adaptados al proceso de Bolonia

Las experiencias realizadas en los últimos años en las Escuelas de Ingeniería españolas se han realizado dentro del movimiento de renovación causado por la entrada en vigor del Espacio Europeo de Educación Superior, conocido comúnmente por proceso de Bolonia, por ser esta ciudad italiana donde se firmó la primera Declaración sobre el Espacio Europeo común.

El proceso de Bolonia tiene como características esenciales una educación centrada en el estudiante y basada en competencias (genéricas y específicas) que el alumno debe adquirir a lo largo de sus estudios y en cada una de las asignaturas que cursa en su currículo.

En ese sentido, las principales competencias asociadas a las carreras de Ingeniería en relación con las matemáticas son: sentido crítico, trabajo autónomo, trabajo en equipo, capacidad para resolución de problemas y el uso de las TICs.

La incorporación a la práctica docente de los fundamentos metodológicos del proceso de Bolonia ha obligado a cambiar la metodología en los procesos de enseñanza y aprendizaje, incluyendo la elaboración de nuevos materiales destinados a un contexto de enseñanza mixta, dada la incorporación, incluso en las universidades de enseñanza presencial, de las enseñanzas on-line.

Por su parte, la incorporación de los diferentes CAS se ha realizado de manera gradual. En una primera etapa se establecieron los Laboratorios de Matemáticas donde se realizaban periódicamente unas prácticas usando diferentes CAS que luego se evaluaban mediante un examen en los citados laboratorios. El uso de los CAS no siempre proporcionaba resultados compatibles con el análisis matemático del problema a resolver. En algunas ocasiones, que nos servían de pretexto para explicar a los alumnos que un CAS no podía convertirse en una caja negra mágica, el resultado era absolutamente inesperado. (Alonso, et al., 2001).

Con el paso del tiempo las posibilidades de uso de los CAS se ampliaron, incrementando su influencia en el rol docente e incentivando a los estudiantes a desarrollar sus propios procedimientos y a comparar diferentes tipos de software para tratar de elegir el más apropiado en cada tema. Un ejemplo de ello quedó plasmado en el material sobre Cálculo Diferencial en varias variables desarrollado con los CAS Maple y Mathematica. (García, García, Hoya, Rodríguez & de la Villa, 2002).

Las nuevas necesidades docentes han puesto, además, de manifiesto la conveniencia de formar equipos docentes amplios para realizar las nuevas tareas educativas. La elaboración de nuevos materiales docentes ha implicado el inicio de tareas colaborativas, con la participación, en primer lugar, de profesores de otras universidades españolas y, posteriormente, con la participación en diferentes proyectos europeos: Xmath Project y dMath Project.

Una segunda etapa en experiencias de innovación, nos permitió profundizar el trabajo iniciado, consolidando la participación en diferentes proyectos europeos (EVLM Project, WEBMLS Project)

Con el propósito de favorecer la motivación de los estudiantes en las asignaturas de Matemáticas en Ingeniería, se han organizado concursos donde se premiaba, mediante la participación en un Congreso, el que resultara mejor trabajo. Los trabajos debían estar relacionados con problemas

técnicos o de la vida real, propuestos por el profesor, y en los que se aplicaran conceptos desarrollados en la asignatura. A modo de ejemplo se expuso, durante el curso, el trabajo ganador del concurso sobre Transformaciones ortogonales, que consistió en el almacenaje óptimo de contenedores en un puerto. (García, García, Rodríguez & de la Villa, 2011).

Las nuevas tecnologías: plataformas en línea, tutorías y evaluación.

Los sistemas de gestión de aprendizaje (LMS), entre ellos las plataformas en línea, están actualmente disponibles en la mayoría de las universidades. Estas plataformas, que contienen una estructura de soporte para la creación y organización pedagógica de diferentes tipos de materiales didácticos, están sustentadas por un software instalado en un servidor de Internet o Intranet y se utilizan con el propósito de ejecutar, administrar, distribuir y controlar las actividades de formación presencial, semi-presencial (b-learning) o a distancia (e-learning). (Milevicich y Lois, 2012)

Esta formación en línea tiene características técnicas y pedagógicas específicas:

1. Que se produzca en red, lo que permite una actualización inmediata, almacenamiento y recuperación, distribución y capacidad de compartir los contenidos y la información.

2. Que llegue al usuario final a través de un ordenador, utilizando estándares tecnológicos 3. Que esté centrado en una visión de los procesos de enseñanza aprendizaje distinta de los paradigmas tradicionales.

En primer lugar, si focalizamos nuestra atención en los recursos técnicos, debemos mencionar que es imprescindible contar con redes de transmisión de alta velocidad para poder lograr un tráfico ágil en la información y en el acceso al material disponible en servidores propios o externos.

En segundo lugar, si nos referimos a los recursos humanos, cabe preguntarnos cuáles son las competencias docentes en este nuevo contexto, asociadas a los requerimientos de mayor esfuerzo, mayor complejidad en las tareas a desarrollar, incertidumbre frente a lo desconocido y perder el control del proceso de enseñanza-aprendizaje. Parafraseando a Bautista, Borges y Forés (2006), creemos que las competencias requeridas son de comunicación, de gestión del conocimiento, de actualización permanente y de trabajo en equipo.

A modo de ejemplo analizamos un curso virtual de tipo b-learning destinado a la enseñanza y aprendizaje de Análisis Matemático II para alumnos de las carreras de Ingeniería de la Universidad Tecnológica Nacional, en los siguientes ítems:

El diseño (seguridad, configuración del curso, manejo de usuarios),

Los recursos (enlace a archivos o páginas Web), las actividades (foros, consultas, chat. cuestionarios, bases de datos, encuestas, glosarios, lecciones, wikis, tareas y hotpot).

Una parte sustancial de las actividades son los foros que permiten gestionar las tutorías en línea, así como los hotpot y consultas que permiten elaborar e implementar las evaluaciones. En ese sentido, se presentaron en el curso ejemplos sobre la utilización de los foros (organización, pautas de uso, roles, etc.) y de evaluaciones en línea en cada una de las unidades de la asignatura. Los proyectos de innovación en marcha están abordando nuevas formas de evaluación que complementen o sustituyan a la evaluación tradicional.

Conclusiones

La creación de los Laboratorios de Matemáticas en la Educación Superior estuvo asociada al uso masivo de ordenadores portátiles, a la irrupción de Internet y de CAS específicos.

En este nuevo contexto se ha propiciado una enseñanza integrada de las Matemáticas y se ha orientado el proceso hacia una enseñanza basada en competencias. Los cambios introducidos han impulsado un replanteo en la metodología, en el rol docente y en los materiales de estudio.

Cabe destacar que en la actualidad nuestro material de estudio incluye un CD/DVD con diferentes posibilidades de uso de diferentes CAS. En general en dichos ficheros se incluyen tutoriales auto-contenidos y una colección de problemas resueltos con el CAS de los que aparecen propuestos en los materiales. De este modo se facilita el trabajo autónomo y en grupos de trabajo.

El cambio metodológico sobre el proceso de evaluación es uno de los problemas al que nos enfrentamos en la actualidad. Es necesaria una reflexión profunda sobre los principios pedagógicos que orientan los procesos de evaluación. Parece evidente que, tras los cambios sufridos en los otros aspectos de la tarea docente, no nos podemos quedar en los tradicionales exámenes con lápiz y papel para evaluar las competencias matemáticas. Las experiencias en marcha se están ocupando de estudiar las diferentes opciones que las nuevas tecnologías nos permiten.

Estos cambios nos han llevado a modificar el sistema de evaluación de tal manera de disminuir el peso de los exámenes tradicionales y reemplazarlo por un nuevo esquema de evaluación en la que se ponderen todas las actividades del alumno: realización de proyectos, resolución de problemas, realización de prácticas con un CAS; sin excluir los exámenes tradicionales. En ese sentido, las tutorías en línea cumplen un papel fundamental. Su incorporación permite propiciar una interacción asincrónica entre docente – alumno y alumno – alumno, realizar un seguimiento del proceso de aprendizaje y reorientar el mismo si fuera necesario.

Referencias bibliográficas

Alonso, F., García, A., García, F., Hoya, S., Rodríguez, G., de la Villa, A. (2001). Some unexpected results using computer algebra systems. International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education, 8 (3), *239-252.*

Bautista, G., Borges, F. & Forés, A. (2006). *Didáctica universitaria en entornos virtuales de enseñanza aprendizaje*. Madrid, España: Narcea Ediciones.

García, A., García, F., Hoya, S., Rodríguez, G. & de la Villa, A. (2002) Differential Calculus of several variables with Mathematica and Maple. *Second International Conference of Mathematics.* Creta, Grecia.

García, A., García, F., Rodríguez, G. & de la Villa, A. (2011). Orthogonal transformations with DERIVE. *Seventeenth International Conferences on Applications of Computer Algebra*. Houston, Texas, U.S.A.

Lois, A., Milevicich, L., Rodríguez, G. & de la Villa, A. (2010). Perspectiva de las TIC'S en la Educación Superior en América Latina. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 23*, pp. 1331-1340. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Lois, A., Milevicich, L., Rodríguez, G. & de la Villa, A. (2011). Perspectiva de las TIC'S en la educación superior en Iberoamérica. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 24, pp. 1170-1178.* México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Lois, A., Milevicich, L., Rodríguez, G. & de la Villa, A. (2013). La revolución tecnológica en la enseñanza de las matemáticas: el nuevo paradigma ¿es una oportunidad de cambio o un simple engaño?. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26, pp. 1867-1876.* México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Lois, A., Milevicich, L., Rodríguez, G. & de la Villa, A. (2013). Enseñar Matemática: un reto en el nuevo paradigma tecnológico. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26, pp. 1859-1866.* México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Milevicich, L. & Lois, A. (2012). La evaluación en la educación superior. El proceso desde la presencialidad hacia la virtualidad**.** *III Congreso Europeo de Tecnologías de la Información en la Educación y en la Sociedad: Una visión crítica (TIES 2012)*, Barcelona, España.

¿QUE MODELOS EPISTEMOLOGICOS SUBYACEN EN LA ENSEÑANZA DEL ALGEBRA UNIVERSITARIA?

Nora Ferreyra, Marcelo Lorenzo, Mei Lee, Fabio Prieto, Daniela Scarímbolo y Carlos Parodi
Universidad Nacional de La Pampa Argentina
noraf@exactas.unlpam.edu.ar, mlorenzo@exactas.unlpam.edu.ar

Resumen. En el marco de un proyecto de investigación analizamos las dificultades del estudio del álgebra en el nivel universitario tomando como marco teórico la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Creemos que uno de los factores que intervienen en el fracaso podría ser la existencia, dentro de las instituciones, de un Modelo Epistemológico Dominante (MED), que condiciona la tarea docente y provoca cierta desarticulación e incomprensión en los estudiantes.

En este trabajo mostramos la experiencia realizada con el fin de indagar acerca del nivel de algebrización alcanzado por alumnos de segundo año del Profesorado de Matemática de la Universidad Nacional de La Pampa (UNLPam). El resultado de dicha experiencia indica que los estudiantes de la cohorte estudiada no han alcanzado una modelización funcional incluida en el tercer nivel de algebrización

Palabras clave: álgebra, cálculo aritmético, proceso de algebrización

Abstract. As part of a research project analyzed the difficulties of the study of algebra at the college level as a theoretical framework taking the Anthropological Theory of Didactics. We believe that one of the factors involved in the failure could be the existence, within the institutions, of Dominant Epistemological Model (DEM), which determines the teaching task and causes some disruption and lack of understanding in students.

In this paper, we show the experience made in order to inquire about the algebraisation level of students of Teacher of Mathematics career in the National University of La Pampa (NULPam). The result of this experience indicates that students in the cohort studied have not reached a functional modeling included in the third level of algebraisation

Key words: algebra, arithmetical calculation, algebraisation process

Introducción

En diversos estudios se han reconocido las dificultades y el alto grado de fracaso de los estudiantes de primer año de las carreras universitarias al enfrentar el estudio del Algebra. (Scarímbolo & Ferreyra, 2008; Parodi et al., 2009)

En el marco de un proyecto de investigación hemos abordado esta problemática desde el marco teórico provisto por la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) y creemos que uno de los factores de este fracaso podría ser la existencia, dentro de las instituciones, de un modelo epistemológico dominante (MED), que mediatiza y condiciona la tarea docente y provoca cierta desarticulación e incomprensión en los estudiantes.

Investigaciones previas, publicadas por Bosch (2000), Gascón (1994) y Bolea (2003) entre otros, han establecido el carácter prealgebraico de la matemática presente en la enseñanza obligatoria, en la cual el MED resulta ser el de una aritmética generalizada.

La ausencia del álgebra como instrumento modelizador dificulta el planteo y la discusión de expresiones desde la perspectiva funcional y con ello la emergencia de problemas vinculados a nuevos conocimientos matemáticos.

En el trabajo presentado en el III Congreso de la TAD, Ruiz, Bosch y Gascón (2011) advierten sobre las consecuencias de la aritmetización escolar del álgebra. Al respecto señalan:

> "[...] el carácter prealgebraico de las matemáticas que se estudian en la enseñanza obligatoria constituye uno de los factores esenciales de las discontinuidades observadas en el sistema educativo [...]
>
> …la ausencia del uso del instrumento algebraico dificulta enormemente el desarrollo de la modelización algebraico-funcional lo que obstaculiza la emergencia de las cuestiones problemáticas que podrían dar sentido al cálculo diferencial." (Ruiz, Bosch y Gascón, 2011. p.745)

Como docentes del Profesorado en Matemática de la UNLPam, preocupados por la enseñanza del álgebra, tratamos de indagar acerca del MED en nuestra institución con el fin de hacerlo visible como problema y debatir sobre la necesidad de contar con un nuevo paradigma que aporte a superar las dificultades en la enseñanza y el aprendizaje.

Marco teórico

Dentro de la investigación en didáctica de la matemática, el Programa Epistemológico se caracteriza por integrar "lo pedagógico" y "lo matemático" y analizar las actividades matemáticas que se desarrollan en las distintas instituciones de enseñanza como medio para estudiar e interpretar el funcionamiento del sistema didáctico. Este programa, según Gascón (2002), aborda el problema de la Educación Matemática desde el análisis de las prácticas matemáticas que se llevan a cabo en las diferentes instituciones (no sólo docentes).

En el ámbito del enfoque epistemológico en didáctica de la matemática podemos considerar diferentes teorías, una de ellas es la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997). Dicha teoría postula que en las instituciones nunca pueden estudiarse problemas aislados, y centra la atención en las soluciones obtenidas y su aplicación a otros problemas, cada vez más complejos que originarán nuevas organizaciones matemáticas. En esta Teoría el modelo de la actividad matemática institucional, está centrado en la noción de "Organización Matemática". Dicha organización matemática comprende un saber matemático modelizado por medio de organizaciones didácticas para su enseñanza. Toda Organización Matemática está compuesta por cuatro clases de elementos fundamentales:

- Cierto número de tareas o problemas matemáticos considerados en una institución dada.
- Un conjunto de técnicas que permiten realizar las tareas, es decir una manera sistemática de resolver las cuestiones propuestas.
- Una tecnología que describe las técnicas utilizadas y justifica su pertinencia para resolver las tareas en las que se aplica. Dicha tecnología integra los conceptos, permite relacionar distintas técnicas y producir otras nuevas.
- Un segundo nivel justificador, la teoría, que permite fundamentar las descripciones y justificaciones tecnológicas. La teoría justifica las tecnologías, tal como éstas justifican las técnicas.

Este sistema formado por los cuatro elementos conforma una organización matemática que consideramos la unidad mínima de análisis de la actividad matemática.

El caso particular del álgebra escolar ha sido motivo de investigaciones desde el enfoque de la TAD, algunas de ellas han abordado, cuestiones referidas al proceso de algebrización de organizaciones matemáticas en la Escuela Secundaria. Particularmente, se ha caracterizado el modelo dominante en dicha institución escolar como una "aritmética generalizada" que se distingue de su interpretación como instrumento de modelización (Bolea, 2003). Desde este punto de vista, al dejar de pensar en el álgebra como una prolongación de las prácticas aritméticas, es posible investigar la emergencia de un modelo más general.

En el marco de nuestra investigación, consideramos necesario poner a prueba el nivel de algebrización básico que deberían haber alcanzado los estudiantes. Para ello, adoptamos como modelo epistemológico de referencia (MER), el propuesto en el trabajo de Ruiz, Bosch y Gascón (2011), mencionado anteriormente, en el cual se amplía el modelo epistemológico del álgebra para articularlo con la modelización algebraica con parámetros.

Se asume entonces, el álgebra, como instrumento de modelización y se espera que un estudiante sobre todo en el profesorado, alcance lo que dicho trabajo denomina un *tercer nivel de algebrización.* Este nivel se caracteriza por una Organización Matemática (OM) con una fuerte generalización de las ecuaciones, en las cuales no se limita el número de variables y no hay distinción entre parámetros e incógnitas. Es en este nivel donde se considera que culmina el proceso de algebrización elemental.

Siguiendo el trabajo de Ruiz, consideramos como "problema aritmético" a aquel que puede resolverse mediante una simple cadena de operaciones a partir de los datos del problema. Las técnicas más usuales en la resolución de este tipo de problemas se manifiestan en discursos

verbales, que también pueden escribirse como una cadena estructurada y consiste en lo que se denomina *Programa de Cálculo Aritmético* (PCA).

Para alcanzar el tercer nivel mencionado anteriormente, se plantean tres etapas en el proceso de algebrización que describiremos brevemente.

La primera etapa se caracteriza por la necesidad de considerar un PCA como un todo, pasar de una formulación retórica a una escrita y manipularlo globalmente. Surgen nuevas técnicas, sobre todo de simplificación, para resolver los nuevos problemas.

La segunda etapa se identifica con la necesidad de igualar dos PCA que tengan los mismos argumentos numéricos. Aparecen nuevas técnicas como las de cancelación, que tienen como objetivo obtener ecuaciones equivalentes y no sólo PCA equivalentes como pasaba en la primera etapa.

Finalmente, la tercera etapa se identifica con el momento de generalizar fuertemente el cálculo ecuacional puesto que se hace necesario no limitar el número de variables y no hacer ninguna distinción entre incógnitas y parámetros. El tipo de situaciones que provoca tal ampliación se relaciona con la variación simultánea de dos o más variables y cómo impacta en la variación del PCA.

Experiencia

Con el fin de caracterizar el nivel de algebrización alcanzado por estudiantes de segundo año de Profesorado en Matemática y describir su desempeño en distintas etapas del proceso, tomamos como población de estudio a los 17 alumnos de la asignatura Taller I. Estos estudiantes han regularizado las materias iniciales de la carrera como Álgebra I y Álgebra Lineal, por lo cual asumimos que disponen del instrumento algebraico, con sus prácticas aritméticas y los elementos tecnológico-teóricos que les permiten justificar e interpretar tales prácticas.

En el desarrollo de la experiencia se presentaron, con algunas variantes, los problemas propuestos por Ruiz-Munzón, Bosch y Gascón (2012), identificados como el *sistema de triángulos isósceles inscritos en una circunferencia*. La resolución de los mismos involucra desde un PCA hasta una completa algebrización de la fórmula, lo cual posibilita, entre otros tratamientos, estudiar la modificación de cada una de las variables en función de las demás.

El primer problema planteado es:

> Problema 1: *Un triángulo isósceles está inscrito en una circunferencia de radio 6cm. Si la altura relativa al lado desigual del triángulo mide 9cm, ¿cuánto vale el área del triángulo?*

La resolución aritmética prevista es verbal, apoyada en la Figura 1, donde se señala la operatoria aritmética siguiente: Se resta el radio de la altura para obtener uno de los catetos del triángulo *OBH*. Con este dato y el radio podemos calcular la mitad de la base y, posteriormente, aplicar la fórmula tradicional para el cálculo del área de un triángulo: $A = \frac{b \cdot h}{2}$.

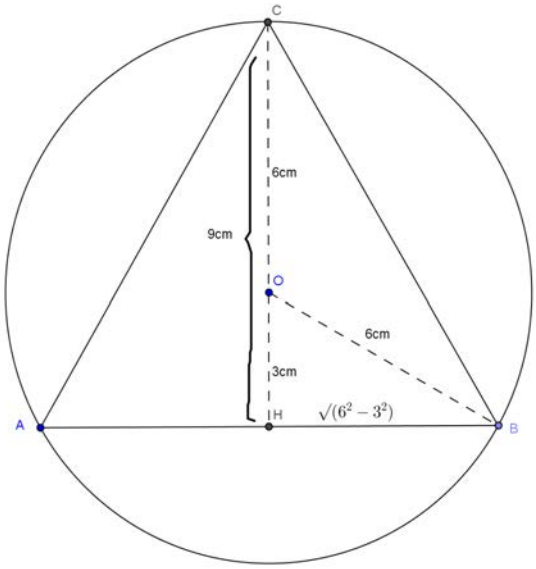


Figura 1

Efectivamente, para la resolución de este tipo de problemas no es necesario disponer de una traducción simbólica del procedimiento, alcanza con poder resolver las operaciones. Sin embargo, si comenzamos a plantear algunas cuestiones de naturaleza tecnológica, relativas a por qué se obtiene el resultado que se obtiene, qué condiciones se requieren para que tenga solución, cuál es el dominio de validez de las técnicas utilizadas, entre otras, podemos avanzar en el proceso de algebrización.

> Problema 2: *Un triángulo isósceles está inscrito en una circunferencia y la altura relativa al lado desigual del triángulo mide* $3/2$ *del radio de la circunferencia. ¿Cómo depende el área del triángulo del radio de la circunferencia circunscrita?*

Puesto que en este problema los datos no son números sino relaciones y tampoco se pide un resultado numérico sino una relación, resulta evidente que estamos ante un problema situado ya en un primer grado de algebrización.

Al analizar las respuestas obtenidas tanto del Problema 1 como del Problema 2, notamos que los estudiantes, curiosamente, en el primer problema mostraron resoluciones que corresponderían a

una primera etapa de algebrización, ya que no ejecutaron simplemente un PCA sino que tradujeron a una formulación simbólica, y manipularon globalmente el problema.

Nos surge pues el siguiente interrogante: ¿Por qué apareció esa resolución algebraica, aun disponiendo de los números para sacar las cuentas en cada paso? ¿Podrá ser una cuestión de Contrato Didáctico?

Como consecuencia de lo trabajado en el primer caso, en el problema 2 respondieron: "*ya está resuelto, queda expresado*" y escribieron: $A = \frac{3\sqrt{3}}{4} r^2$. Es una observación correcta, ya fue resuelto, puesto que se "adelantaron" en el problema anterior. El lenguaje algebraico aparece como simbolismo de lo aritmético y se evidencia la eficacia de la técnica operatoria provista por el teorema de Pitágoras y las propiedades del conjunto numérico.

Podemos pensar también con respecto a la resolución de estos primeros problemas, que la escuela secundaria o las asignaturas de primer año de universidad les han brindado las herramientas algebraicas necesarias como para prescindir del paso por el nivel aritmético y situarse directamente en una primera etapa de algebrización de manera general, ya que todos ensayaron la misma modelización.

De acuerdo a nuestro marco teórico, en el mismo nivel de algebrización se sitúan los problemas que requieren resolver una ecuación sencilla. Por ejemplo, en el problema 2, si se intercambian la condición de dato e incógnita entre Área y Radio, sólo cambia el procedimiento en despejar y obtener la siguiente expresión: $r = \sqrt{\frac{4 \cdot A}{3\sqrt{3}}}$.

En este problema, también fueron capaces de responder preguntas formuladas en torno al campo de validez de la técnica utilizada, puesto que analizaron la posibilidad de considerar triángulos isósceles cuya altura sea menor que el radio de la circunferencia y pudieron plantear las fórmulas correspondientes. Esta actividad pone de manifiesto la utilización de un discurso tecnológico que justifica la resolución del problema y sustenta la técnica en el contexto del mismo.

Para evaluar la segunda etapa del proceso de algebrización es preciso plantear problemas en los cuales se requiera igualar dos PCA, por lo cual propusimos a los estudiantes los problemas 3 y 4.

> Problema 3: *Dos triángulos isósceles están inscritos respectivamente en circunferencias de radios* R_1 *y* R_2. *Se sabe que la altura (relativa al lado desigual) del segundo es el doble de la correspondiente altura del primero y el radio de la segunda circunferencia excede en 1*

cm al radio de la primera. Si los dos triángulos tienen la misma área, ¿qué relación hay en cada caso entre la altura del triángulo y el radio de la circunferencia circunscrita?

Puesto que en los problemas anteriores se habían trabajado estas relaciones, se suponía que los estudiantes, economizando tiempo y esfuerzo, iban a recuperar las expresiones que relacionan el Área con la altura y el radio en cada caso para luego plantear una ecuación y concluir. Esto es:

$$A_1 = h_1\sqrt{R_1^2 - (h_1 - R_1)^2}$$

$$A_2 = h_2\sqrt{R_2^2 - (h_2 - R_2)^2} = 2h_1\sqrt{(R_1+1)^2 - (2h_1 - (R_1+1))^2}$$

Puesto que las áreas son iguales, es posible realizar la igualación y determinar la relación entre el radio y la altura para cada uno de los triángulos.

$$A_1 = A_2$$

$$h_1\sqrt{R_1^2 - (h_1 - R_1)^2} = 2h_1\sqrt{(R_1+1)^2 - (2h_1 - (R_1+1))^2}$$

Curiosamente, los estudiantes no utilizaron el desarrollo efectuado en el primer triángulo para resolver el segundo, sino que realizaron todas las tareas nuevamente. ¿Será que no percibieron la similitud de operaciones a realizar en ambos triángulos?

Se identificaron dificultades parecidas en un trabajo previo realizado en torno al grado de algebrización en una tarea de álgebra lineal (Lorenzo, Ferreyra y Parodi, 2012). En ese momento se supuso que tal comportamiento estaba asociado al contrato didáctico, sin embargo, en este caso se repite sin mediar las mismas condiciones iniciales.

Otra de las cuestiones observadas en el desempeño de los estudiantes es que lograron obtener la relación entre altura y radio correspondientes al triángulo 1, pero no realizaron la transferencia para expresar la relación en términos de altura y radio del segundo triángulo. No tenemos hipótesis para la ausencia de esa resolución, ya que se observa una buena actuación en tareas más complejas como por ejemplo el análisis acerca de las condiciones para la existencia de ambos triángulos o los posibles valores que pueden tomar las variables involucradas.

Problema 4: *Dos triángulos isósceles están inscritos respectivamente en circunferencias de radios R_1 y R_2. Se sabe que la altura (relativa al lado desigual) del segundo es el doble de la correspondiente altura del primero y el radio de la segunda circunferencia excede en 1 cm al radio de la primera. Si los dos triángulos tienen la misma área y la altura del primer triángulo es de 2 cm. ¿cuánto mide el radio de la circunferencia circunscrita a este triángulo?*

Siguiendo la categorización de Ruiz Munzón, el problema 4 corresponde a un subconjunto particular de los problemas que identifican el segundo grado de algebrización, la mencionada autora señala como un riesgo el describir la razón de ser del álgebra escolar con la resolución de problemas de este tipo, puesto que se limita a la resolución de ecuaciones, dando un valor concreto a una de las variables.

Nuestros alumnos trabajaron de acuerdo a lo esperado en dicha etapa y pudieron distinguir que el problema 4 era sólo un caso particular del 3.

La culminación del trabajo de algebrización estaría dada en el tercer nivel, donde se requiere una fuerte generalización, sin hacer la distinción de parámetros ni incógnitas y la posibilidad de estudiar la variación de algunas variables en conjunto a partir de la variación de otras.

Para analizar la actuación de nuestros alumnos propusimos la resolución de la siguiente tarea:

> Problema 5: *¿Se puede determinar un triángulo isósceles por su área A y la longitud del lado igual c? ¿Cuánto mide el radio R de la circunferencia donde se inscribe el triángulo? ¿Cómo depende R de la variación conjunta de los lados b y c?*

Si bien casi todos los estudiantes pudieron establecer relaciones, lo hicieron en términos de una fórmula, esto es: $A = \dfrac{h \cdot 2\sqrt{c^2 - h^2}}{2}$ o bien: $h = \pm\sqrt{\dfrac{c^2 \pm \sqrt{c^2 - 4A^2}}{2}}$ pero verificaron a partir de números, es decir estableciendo claramente cuáles eran los datos y cuales las incógnitas y no respondieron cuestiones asociadas al análisis funcional.

Aun cuando la última pregunta era muy explícita, sólo dijeron que la dependencia era $R = \dfrac{c^2}{\sqrt{4c^2 - b^2}}$ o alguna otra expresión similar. Sin pensar en la manipulación de algunas variables.

Consideraciones finales

El análisis de la producción de los estudiantes de segundo año de Profesorado en Matemática de la UNLPam, nos permitió aproximarnos al MED de nuestra institución y establecer algunas hipótesis preliminares. Cabe señalar que hemos analizado una sola cohorte de alumnos (ingresantes 2011) por lo cual los resultados, como ya dijimos, deberán ser validados con futuras repeticiones de este tipo de actividades.

Con respecto al nivel de algebrización de los estudiantes, pensamos que el paso por los dos primeros años en la universidad les ha permitido superar el modelo del álgebra como aritmética

generalizada. Si bien se trabaja con números como ejemplo o como recursos de prueba para la formulación de conjeturas, se logran establecer relaciones.

Sin embargo, parece evidente que no se logra el tercer nivel de algebrización, asociado al modelo del álgebra como instrumento de modelización algebraico-funcional puesto que están lejos de poder analizar la dependencia entre diferentes variables, ni siquiera a partir de preguntas orientadoras. Ante las indagaciones realizadas, los alumnos no lograron esa fuerte generalización del cálculo ecuacional a la que se refiere Munzón. Esto priva a los estudiantes del manejo de tareas que se requieren para estudiar funciones aisladas, esto es, para indagar acerca de las relaciones internas entre los elementos de una misma función y para analizar su comportamiento global. No lograron apropiarse de las técnicas que les permitiesen abordar las tareas planteadas y, por lo tanto, no lograron desarrollar tecnologías y/o teoría pertinente para este nivel.

En este punto, nuestra hipótesis es que el MED del álgebra en nuestra institución, tiene los elementos básicos del instrumento de modelización algebraico-funcional y que con un trabajo de profundización en ese sentido puede lograrse la culminación del desarrollo algebraico en los primeros años de la carrera.

Referencias bibliográficas

Bolea, P. (2003). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*, Monografías del seminario matemático. Prensa Universitarias de Zaragoza: Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Zaragoza.

Bosch, M. (2000)."Un punto de vista antropológico: la evolución de los "instrumentos de representación" en la actividad matemática". IV Simposio SEIEM. Huelva, España.

Chevallard, Y., Bosch, M., Gascón, J. (1997): *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*, Barcelona: ICE-Horsori

Gascón, J. (1994): Un nouveau modéle de l'algébre élémentaire comme alternative à l'arithmétique généralisée, *Petit x*, 37, 43-63.

Lorenzo, M.; Ferreyra, N. y Parodi, C. (2012). "Análisis del grado de algebrización en una tarea de Álgebra Lineal de la UNLPam", *Memorias de la IV REPEM*, pp 152 – 159, EdUNLPam.

Parodi, C.; Rechimont, E.; Ferryra, N.; Castro, N. ; Scarímbolo, D. (2009). "El trabajo algebraico de los ingresantes". Comunicación XXXII Reunión de Educación Matemática, Universidad Nacional de Mar del Plata. Resumen en http://www.mdp.edu.ar/exactas/uma2009/pdf/sesiones/Sesion4.pdf

Ruiz-Munzón, N., Bosch, M. y Gascón, J. (2011). "Un modelo epistemológico de referencia del álgebra como instrumento de modelización", *Actas III CITAD: Un Panorama de la TAD*, pp 743-765, Centre de Recerca Matemàtica, Campus de Bellaterra, Barcelona.

Scarímbolo, M., Ferreyra, N. (2008) "El modelo de la proporcionalidad en ingresantes al nivel universitario", *Memorias de la III REPEM*, pp 152 – 159, EdUNLPam.

CLUB MULTIDISCIPLINARIO COMO ESCENARIO PARA EL DESARROLLO DE COMPETENCIAS

Pericles Ramírez Jiménez, Jaime L. Arrieta Vera y Gildardo Cortés Bello
Centro de Estudios Tecnológicos, industrial y de servicio, No. 116 México
pericles_r@hotmail.com, jaime_arrietav@hotmail.com, gildardo_59@yahoo.com.mx

Resumen. Este trabajo es parte de un proyecto en curso que plantea establecer un espacio colaborativo entre profesores-alumnos-ciencia donde se aborden problemas del entorno con un enfoque pluridisciplinario, el *Club Multidisciplinario*. A pesar de la reforma del currículo del nivel medio superior en México las prácticas docentes tradicionales subsisten. El currículo formal no corresponde con el real. Un problema delicado, es el ausentismo del profesor en el aula que no permite la completes de los programas. Son necesarias nuevas formas de interacción alumno-docente-ciencias. El *Club* se entiende no sólo como el espacio físico y los elementos tecnológicos, sino también, la organización de los profesores, las relaciones entre los participantes, los diseños de aprendizaje y los materiales que se elaboran. La acción metodológica es aprovechar los recursos gratuitos del servicio social y/o prácticas profesionales, así como el sentido de colaboración, solidaridad y humanismo de los asesores para el desarrollo de competencias de los estudiantes del CETis 116
Palabras clave: club, colaborativo, multidisciplinario, competencias, matemáticas
Abstract. This work is part of an ongoing project that aims to set a collaborative space between teachers-students-science where environmental problems are addressed with a multidisciplinary approach, the *Multidisciplinary Club*. Although curriculum reform from high school in Mexico traditional teaching practices remain. The formal curriculum does not correspond with reality. A delicate problem is the absence of the teacher in the classroom that does not allow the completion of the programs. We need new forms of interaction student-teacher-sciences. The *club* is understood not only as the physical and technological elements, but also the organization of teachers, relationships between participants, learning designs and the materials they are made. The methodological action is to take the free resources of social service and / or professional practice as well as the sense of cooperation, solidarity and humanism of the advisors to develop skills of students CETis 116
Key words: club, collaborative, multidisciplinary, competencies, mathematics

Introducción

El desarrollo cada vez más complejo de la enseñanza de las ciencias y las matemáticas, ha impulsado diferentes puntos de vista acerca de la construcción de los conocimientos por los actores sociales. Lo anterior se complica más por la implementación de las tecnologías en los trabajos escolares, de ahí que la administración haya decidido cancelar, asignaturas como historia, psicología, sociología, desarrollo motivacional, etc., pero estas acciones a fin de cuentas no son suficientes porque las nuevas asignaturas son equivalentes a tres o cuatro en una sola.

Se ha intentado incorporar los medios tecnológicos al aula de ciencias y existen múltiples propuestas. Se han empleado variados diseños de aprendizaje en secuencias didácticas, atendiendo la articulación de la escuela con su entorno y el desarrollo de competencias genéricas y disciplinares, sin embargo la separación entre estos escenarios permanece.La reforma integral en el nivel medio superior pone énfasis en el entorno del estudiante para el desarrollo de competencias, para lo cual preparara a su personal docente y administrativo para la modalidad de aprendizaje por competencias.

Sin embargo estos esfuerzos no se ven materializados por lo indicadores (prueba enlace, Olimpiadas, test de admisión en escuela de nivel superior, etc.),ni en su rendimiento(resultados de las diferentes asignaturas, índices de reprobación, de deserción, etc), por lo que es necesario buscar nuevas formas de interacción alumno-docente-ciencias.

La problemática

Los programas de estudio no se terminan en su mayoría, debido a un gran ausentismo de la planta docente a la institución y a los salones de clase, de tal manera que el currículo formal no corresponde con el currículo real, principalmente en las materias de tronco común, considerando el contenido, los objetivos, cumplimiento de los programas y esto se refleja en el desarrollo de las competencias.

No hay órganos funcionales que discutan, propongan, cuestionen y gestionen estrategias para resolver las diferentes problemáticas educativas. Las academias que son el órgano regulador para gestionar ante las autoridades, queda truncada su labor por lo que llaman "*un carpetazo*".

Por otro lado, ya no existe la cultura de dar un "*tiempo extra*" al trabajo para mejorar las actividades docentes; esto se aprecia tanto en el docente, administrador y estudiante, el proceso educativo en nuestras escuelas se ha burocratizado y degenerado en algunas ocasiones por nuestras autoridades sindicales y de negociación con la administración. La atención al sector de alumnos con problemas de reprobación de muchas asignaturas es baja y como consecuencia la deserción en el plantel es alta.

Existe un fuerte hermetismo en el trabajo docente, principalmente en lo colectivo, no se habla entre profesores del trabajo en el aula, las prácticas escolares cotidianas son tradicionales, clases expositivas, sin trabajo colaborativo, memorísticas y algorítmicas, con situaciones sin contexto o con contextos artificiales, sin experimentación y excepto en las asignaturas de informática, sin relación con los medios tecnológicos, por lo que los estudiantes son los más afectados en su aprovechamiento; la administración justifica la solución al problema por medio de acciones fuera de contexto porque se ve relegada su autoridad por situaciones políticas.

Por lo anterior, se pretende establecer un escenario donde se posibilite el desarrollo de competencias al abordar la solución de problemas multidisciplinares. El escenario se entiende no sólo como el espacio físico y los elementos tecnológicos, sino la organización de los profesores y/o asesores participantes, comprometiéndose en las actividades con los estudiantes.

La relación de los estudiantes, los diseños de aprendizaje y los materiales que se elaboran también forman parte de este escenario, así como un fuerte compromiso con padres de familia y otros elementos sociales juegan un papel interactivo en las construcciones de las competencias.

Entre las competencias que serán fortalecidas por el *Club Multidisciplinario*, tenemos:

1. Llevar a la práctica procesos de enseñanza y de aprendizaje de manera efectiva, creativa e innovadora a su contexto institucional.
2. Evaluar los procesos de enseñanza y de aprendizaje con un enfoque formativo.
3. Construir ambientes para el aprendizaje autónomo y colaborativo.
4. Contribuir a la generación de un ambiente que facilite el desarrollo sano e integral de los estudiantes.
5. Participa en los proyectos de mejora continua de su escuela y apoya la gestión institucional.

Las otras tres competencias faltantes, se desarrollan en forma natural como consecuencia de las anteriores.

Este escenario multidisciplinario pretende potencializar el desarrollo de competencias, por lo que nuestra propuesta estratégica para resolver la problemática, es la implementación, diseño, formalización y expansión de un C*lub Multidisciplinario,* cuya finalidades establecer nuevas formas de interacción *alumno-docente-ciencias*, implementando el *trabajo colaborativo*, significativo, con puentes entre la escuela y su entorno, y con la consigna de multiplicar los conocimientos y habilidades, a través de círculos de estudio a terceros,Johnson, D. y Otros (1999) , como una estrategia del *servicio social* y/o *prácticas profesionales* en su comunidad escolar y obtener como producto, estudiantes de alto rendimiento,Tapia (2012).

Para esto, se tiene planeado trabajar con jóvenes del nivel medio superior, con instructores de servicio social de varias instituciones de nivel profesional (Instituto Tecnológico de Acapulco, Facultad de Matemáticas de la UAG y otras Universidades), asícomo invitados especiales de la UNAM,CETis 116*, CETis 90, etc., para conferencias, cursos, concursos, congresos, mesas redondas, etc.

A partir del desarrollo del *Club*, se pretenden realizar otras actividades entre las que destacamos, los concursos internos de matemáticas como primer paso impulsor para el entendimiento hacia las demás disciplinas y viceversa, de esta manera vemos la parte interdisciplinar como esencia del *Club*, además de,cursos de regularización o asesorías a terceros por los mismos estudiantes integrando círculos de estudio como parte de su *servicio social y/o prácticas profesionales*; conferencias o seminarios y preparar alumnos de secundaria para su posterior incorporación a nuestro Plantel, etc.

Marco teórico

Los antecedentes de este estudio están basados en la modelación y las prácticas sociales, Arrieta (2003), prácticas convivenciales (la práctica escolar y la práctica social), Arrieta y Díaz (2013), donde las construcciones se hacen pensando en lo que hacen en su práctica diaria los especialistas u obreros en su cotidianidad, que son conocimientos contextuales de su entorno laboral, por lo que adquieren sentido los saberes y aprendizajes, entonces nuestros estudiantes en el *Club Multidisciplinario*están en un ambiente de amplia diversidad de saberes, de tal manera que pensamos que esta diversidad les da un sentido de ente integral, a tal grado que los significados también cambian, por lo que también cambiará su práctica social.

Nuestra visión de la enseñanza de las ciencias y las matemáticas es de que los estudiantes aprenden interactivamente con el profesor, aprenden entre ellos, aprenden de su contexto, aprenden de su práctica social, pero sobre todo, deberían aprender de la escuela a construir herramientas para transformar su práctica social o su naturaleza, Arrieta (2003).

De esta forma, nuestro trabajo se centra en la recuperación del concepto pitagórico de "*Club*", donde en un espacio social participan profesores, estudiantes, invitados, etc., interactuando con los conocimientos previos de los actores para producir nuevos conocimientos científicos y contextuales; creemos que, esto es hacer ciencia.

El diálogo suscitado cuando se facilita un espacio igualitario en el que los jóvenes sienten libertad y confianza para participar y expresar sus argumentos no sólo hace más fructífera la clase, dado que aparecen muchas más formas de resolver los mismos problemas, sino que además contribuye a la generación colectiva de aprendizaje, tal y como decía Vygotsky (1978).

Esa forma de presentar los conceptos matemáticos o de otras asignaturas, en cierta forma obliga a los estudiantes a establecer conexiones directas entre el concepto establecido y la realidad que les circunda.

Otros antecedentes de este trabajo se encuentran en el desarrollo de los trabajos de Arrieta (2003), Hernández y Ramírez (2004), López (2005), Ramírez (2010), Tapia (2012) y en los resultados obtenidos en los concursos de ciencias básicas de la DGETI en los años 92-99, donde se lograron buenos resultados académicos por el *trabajo colectivo* de varios compañeros profesores de matemáticas y otras ciencias para preparar a los concursantes. Otra evidencia es en 2009, se lograron excelentes resultados en la Prueba Enlace, a través de la *colaboración colectiva* de los docentes; así como en 2011 el turno vespertino mejoró de un 0.9 hasta un 8.4 de *excelencia* y del 11.0 hasta el 18.6 en *bueno* con respecto al 2010como consecuencia de la implementación del *Club de matemáticas*.

Por otro lado, haciendo un análisis de la problemática de los estudiantes egresados, observamos que el perfil del egresado no es el adecuado y como evidencia tenemos los bajos resultados de la Prueba Enlace comparada con otras instituciones o con otros estados de la República Mexicana.

Evidencia empírica, tenemos con los estudiantes del Instituto Tecnológico de Acapulco, de los cuales tenemos la información que de 40 estudiantes por grupo, reprueban entre el 50% y 90% los cursos normales, de los cuales un gran porcentaje son del CETis 116*.

En varios links de Internet, se puede observar que hay escuelas que ya cuentan con un *Club de Matemáticas*, algunos con Blogs, otros con cursos, unos con costos otros gratuitos, etc.; hay una diversidad de *Clubes*, de la misma manera que los hay para física, química y otros.

El CETis 116* tiene la particularidad de que en varios años, se lograron buenos resultados a nivel de concursos, en matemáticas, física, química y biología, pero hemos observado que algunos que tienen éxito en matemáticas no lo tienen en química, otros que son destacados en física o química, no lo son el Inglés o en su ortografía.

Además que en estos concursos sólo se trabaja para su preparación con doso tres alumnos por asignatura, por lo cual, tenemos como hipótesis, que con el *ClubMultidisciplinario* los estudiantes lograrán mejorar sus competencias en un ambiente de alto rendimiento y solidaridad para compartir conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes.

Por tanto, se considera que es preferible un estudiante multifuncional apegado a la **R**eforma **I**ntegral dela **E**ducación**N**ivel **M**edio **S**uperior, que un estudiante experto en una asignatura y que descuide otras materias, SEMS, (2009).

Metodología

La metodología contempla un test para ubicar el punto de partida de los estudiantes del *Club* y el contraste con los resultados de instrumentos aplicados semestralmente a partir del segundo año (comparación de medias) cuando el *Club* este completamente integrado, así como una comparación anual de crecimiento en los resultados de la Prueba Enlace y/o en la reducción del nivel de deficiencia de la misma.

Entrevistas frecuentes sobre el estado de satisfacción a los integrantes del *Club,* tanto instructores, directivos, y alumnos que participan en los círculos de estudio monitoreando y asesorándose.

La ejecución del proyecto contempla cinco etapas:

- Establecimiento de las condiciones generales, investigación inicial. Estructuración e integración del *Club Multidisciplinario*. Un semestre.

- Construcción de los productos, investigación en fase de construcción. Un semestre.
- Prueba y ajuste de los productos. Investigación terminal, validación y presentación de resultados relativos. Dos semestres, correspondiente al presente del proyecto.
- Divulgación y/o expansión del *Club Multidisciplinario*. Dos semestres
  - Exposición e institucionalización de los productos del proyecto en eventos académicos locales y nacionales.

En la primera etapa (de formalización), se cuenta con un grupo de primer año con 40 estudiantes, de segundo 30 y de tercero 20; se observa que los jóvenes de segundo y tercero se ausentan más que los de primer año, se considera que los de primero son más vulnerables a malearlos o a moldearlos a las necesidades académicas de la institución o del proyecto.

Se tiene como antecedente inicial el plan piloto de este año, en donde se implementaron tres grupos de secundaria con los contenidos mínimos de Matemáticas y Español en su preparación en el examen de admisión, obteniéndose resultados favorables sin cuantificarse, de tal manera que la administración pidió que se repitieran las acciones para el próximo año considerando al total o 100 % de los candidatos a ingresar.

Una de las instituciones participantes es la Facultad de Matemáticas, que nos facilitó a varios de sus estudiantes para dar alternativas pedagógicas de temas afines a los programados del CETis desde la perspectiva didáctica. Se trabaja con 8 estudiantes del Instituto Tecnológico de Acapulco como servicio social.

En la segunda etapa (de crecimiento), se cuenta con 120 alumnos de primero, 50 de segundo y 40 de tercero, en esta etapa se pretende lograr una concepción bien clara y definida de los objetivos que se pretenden alcanzar. En esta etapa se planea contar con 10 instructores para trabajar con alumnos de primer año y los demás grupos atenderlos con profesores del plantel e invitados.

En la visita expositiva del trabajo de la ciudad de Buenos Aires, en el Congreso 27 de la RELME, una de las críticas a la universalización del trabajo, es que no todas las instituciones tienen el programa de servicio social y/o prácticas profesionales, por lo que, los que ya cuentan con un *Club*, sólo lo limitan a una asignatura. Así que el trabajo fue elogiado por varios de los presentes en varios aspectos y sugerencias para mejorarlo. Como perspectiva, se pretende en la última etapa tener 200 estudiantes de primero, 150 de segundo y 100 de tercero, cuando la autoridad institucionalice el proyecto.

Conclusiones

Bajo esta premisa creemos que las acciones inmediatas, son:

a) Mejorar la atención a los alumnos para reducir el índice de reprobación y deserción, conformando los círculos de estudio o micro-celdas académicas.

b) Mayor participación de la población estudiantil fomentado la *cultura de la colaboración*, sobre todo en las actividades académicas, concursos, seminarios, etc.

c) Diseño y aplicación de cursos especiales de didáctica de la matemática.

d) Ya no podremos decir que los estudiantes vienen mal preparados del nivel medio básico, porque implementaremos un semestre de cursos para todos los alumnos de secundaria que quieran ingresar al CETis 116*, utilizando instructores del Tecnológico y monitores del CETis.

e) Apoyo directivo en los requerimientos de las necesidades del *Club Multidisciplinario*, como insumos, aulas, equipo, apoyo del personal administrativo y docente.

f) Integración de más compañeros docentes al proyecto.

g) Sensibilidad social, en la percepción de la *colaboración y solidaridad* con la institución, para ayudar a los docentes y a sus compañeros de grupo. Ver *figura 1*.

Curso diseñado por la facultad de matemáticas sobre modelación.

Conferencia por el Dr. Chona P. y el Ing. Medina D. sobre el tema de matemáticas fácticas.

Estudiantes de UNAM participaron con el Club dando conferencias motivacionales

Figura 1. Algunas evidencias del trabajo colaborativo de Instituciones Sociales que están participando en el proyecto Club Multidisciplinario del CETis 116.

Perspectivas

Algunas de las aportaciones que consideramos serán de impacto social, son:

a) Incremento de la eficiencia terminal, mejor calidad en el perfil del egresado.

b) Mejoramiento de los niveles de desempeño de la Prueba Enlace, trabajando los programas desde el primer semestre y de ser posible desde nivel secundaria.

c) Progreso de la comprensión lectora e idiomas, competencias en el uso de los lenguajes y la comunicación.

d) Incremento en la participación de concursos académicos, locales, estatales, nacionales u Olimpiadas.

e) Desarrollo motivacional en el uso de las Tics en el ámbito académico, así como su aplicación a diferentes contextos.

f) Incorporación de un comité de alumnos-padres de familia a las reuniones de academia para fortalecer las propuestas ante la autoridad y que estas sean promovidas y ejecutadas, ver *figura*

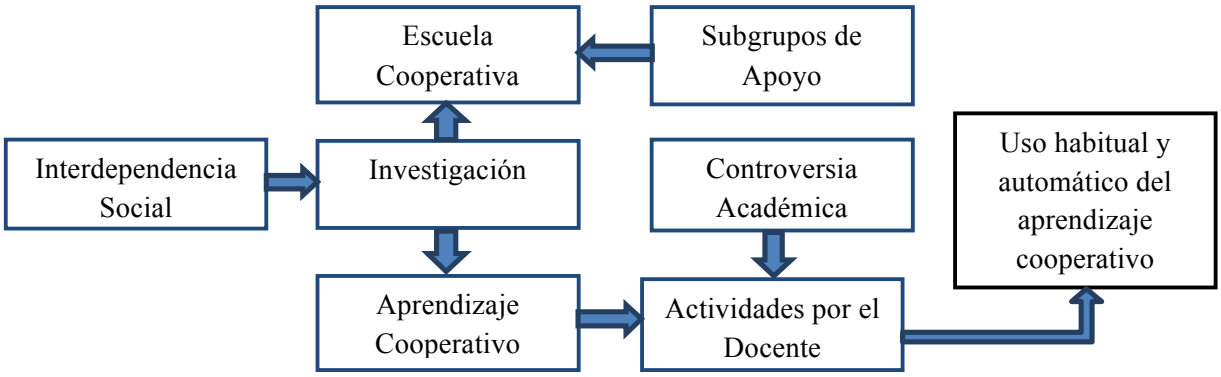


Figura 2. Circuito del aprendizaje colaborativo, tomado de Johnson, D. (1999)

Estas y otras más perspectivas se piensan trabajar a futuro considerando los elementos principales de la escuela y su comunidad, ver *figura 3*.

Figura 3. Organización del Club y sus acciones inmediatas.

Referencias bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de una matematización en el aula*. Tesis doctoral no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México, 2003.

Arrieta, J. y Díaz L. (2013). *Una mirada socioepistemológica de la modelación*. Trabajo postdoctoral. Universidad Autónoma de Guerrero, México, Universidad de los Lagos, Chile. En revisión

Hernández A. y Ramírez P. (2004). *El tratamiento de fenómenos físicos para aprender matemáticas*. Tesis de maestría no publicada, Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Johnson, D., Johnson R. y Johnson E. (1999). Los nuevos círculos del aprendizaje. *La cooperación en el aula y en la escuela*. Ed. AIQUE. Argentina.

López, F. (2005). *Implementación y análisis de estrategias didácticos que permitan la reincorporación de alumnos reprobadores en cursos de geometría analítica en el nivel medio superior*. Tesis de maestría no publicada. Universidad Autónoma de Guerrero. México.

Ramírez, P. (2010). *Guía secuencial de aprendizaje para la construcción de conocimientos estadísticos*. Tesis de maestría no publicada. Universidad Autónoma de Guerrero. México.

SEMS, (2009). Matemáticas, *Programa de Estudios del Bachillerato Tecnológico*, SEMS, COSDAC, México, p. 26

Tapia, G. (2012). *Mega Proyecto CRAAI-GTS2012*, México CETis 90.Trabajo de investigación en curso.

Vygotsky, L.S. (1978). *Mind in society*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

* Centro de Estudios Tecnológicos industrial y de servicios 116

IMPACTO DEL SAN EN EL RENDIMIENTO ACADÉMICO DE ALUMNOS DE PRIMER AÑO EN LA FACULTAD DE BIOQUÍMICA QUÍMICA Y FARMACIA DE LA U.N.T

Marta A. Correa Zeballos , Berta J. Chahar , Ricardo R. Gallo , Gregorio R. Figueroa , Mirtha A. Moya y Aída E. Fernández
Universidad Nacional de Tucumán Argentina
Universidad Tecnológica Nacional
czeballos@fbqf.unt.edu.ar, rgallo@arnet.com.ar, amoya@fbqf.unt.edu.ar, rfigueroa@fbqf.unt.edu.ar, bchahar@fbqf.unt.edu.ar

Resumen. Hasta 2004, el irrestricto ingreso a la Facultad de Bioquímica, Química y Farmacia de la UNT traía como consecuencia una elevada tasa de deserción en primer año. Este y otros fueron los disparadores para la implementación del "Sistema de Admisión y Nivelación (SAN)".

El objetivo de este trabajo es: "Mostrar que el SAN mejora significativamente el porcentaje de alumnos regulares y el rendimiento académico en exámenes finales de Matemática II".

Los resultados de esta investigación indican que la mejora es sustancial, tanto en el porcentaje anual de alumnos que regularizan la materia como en el rendimiento académico en exámenes finales. A partir de este análisis se puede inferir que la implementación del SAN es positiva

Palabras clave: admisión, nivelación, ingreso, SAN, impacto

Abstract. Until 2004, the unrestricted admission to the Faculty of Biochemistry, Chemistry and Pharmacy of the UNT brought as a consequence a high dropout rate in first year. This and others were the triggers for implementing the "Admission System and Leveling (SAN)".

The aim of this paper is: "Show that the SAN significantly improves the percentage of regular students and academic performance in Mathematic II final."

The results of this investigation indicate that the improvement is substantial, both in the annual percentage of students in regularizing the subject as academic performance in final examinations. From this analysis it can be inferred that the implementation of SAN is positive

Key words: admission. leveling, entry, SAN, impact

Introducción

Hasta el año 2004, el ingreso de los estudiantes a primer año de las distintas carreras que se dictan en la Facultad de Bioquímica, Química y Farmacia de la Universidad Nacional de Tucumán, era irrestricto. Esta modalidad traía como consecuencia un sobre dimensionamiento de las estructuras académicas y administrativas de las cátedras de primer año y una elevada tasa de deserción, especialmente en los primeros meses del inicio de cada año lectivo. Obviamente que este hecho tenía a posteriori un impacto negativo en los indicadores de rendimiento académico como la tasa egreso – ingreso, tiempo de permanencia promedio en la Facultad hasta la graduación, desgranamiento, etc. Estos y otros fueron los disparadores para que se estudiara y se pusiera en marcha el "Sistema de Admisión y Nivelación (SAN)", desde el año 2005.

A partir del SAN, para ingresar a la Facultad, se exige la aprobación de cuatro materias: Matemática, Física, Química y Biología. Como contrapartida de esta exigencia la institución, un mes y medio antes de la toma de los exámenes, les ofrece cursos de revisión y nivelación de los tópicos que serán temas de los exámenes en cada una de las asignaturas que deberán rendir. Los aspirantes

pueden optar por un examen voluntario antes de iniciar los mencionados cursos. En caso de aprobar las cuatro asignaturas se consideran ingresantes a la facultad. De no aprobar, pueden asistir a los cursos y posteriormente rendir los exámenes obligatorios.

Como evaluación del SAN, en estos ocho años de vigencia del mismo se observa que: a) la tercera parte de los preinscritos no rinde el examen voluntario ni inicia los cursos que les ofrece la Facultad, b) un reducido número de alumnos aprueba el examen voluntario de las cuatro materias para ingresar a la facultad, c) el número de alumnos que ingresan no supera el sesenta por ciento (60 %) de los que cursan las cuatro asignaturas.

Un efecto inmediato de la puesta en marcha del SAN es la drástica reducción del número de alumnos en primer año, que pasó de más de mil alumnos ingresantes por año a no más de cuatrocientos y como lógica consecuencia el número de comisiones y el número de alumnos por comisión se redujeron notablemente.

Por lo expuesto es que creemos se hace necesario plantearnos estudiar otros efectos no tan evidentes como los que acabamos de mencionar. En primer lugar será importante, cuando hayan pasado ocho o más años de los ya transcurridos de vigencia del SAN, analizar si hubo cambios en los históricos indicadores de eficiencia globales de la Facultad, esto es lo que consideramos como la investigación de impacto en el largo plazo de la nueva modalidad de ingreso. Quizás en uno o dos años más de presencia del SAN se deba realizar una indagación del impacto de mediano a largo plazo, analizando en el ciclo superior de las carreras si los indicadores de eficiencia cambiaron. Finalmente una indagación de los efectos, que este nuevo sistema tiene en los cursos de primer año, referidos a los porcentajes de alumnos regularizados en, por ejemplo, Matemática II, que se cursa en el segundo cuatrimestre y en esta instancia agregamos analizar el porcentaje de alumnos que rinden y aprueban el examen final, antes y después de la implementación del SAN, se la considera un estudio del impacto en el corto y mediano plazo, respectivamente.

Objetivo

Esta investigación tiene por objetivo: "Establecer si el Sistema de Admisión y Nivelación, implementado en la Facultad de Bioquímica de la UNT desde el año 2005, mejora significativamente el porcentaje de alumnos regularizados y el número de alumnos que aprueban los exámenes finales en la Cátedra de Matemática II". Es decir, este trabajo se ocupa solo de analizar el impacto de corto y mediano plazo del SAN.

Marco teórico

Es evidente que este trabajo está centrado en analizar si el sistema de evaluación, después de desarrollar un breve curso de nivelación para los aspirantes a ingresar a la facultad, ha sido

eficiente, entendiendo esta eficiencia en términos de: a) el nivel de conocimientos con que llegan a la instancia de ingreso es el adecuado, b) si el estudiante tiene un sistema de estudio adquirido y c) si efectivamente su vocación está en consonancia con la carrera elegida. Entendemos que si el sistema es el adecuado los indicadores del desarrollo de los primeros cursos deberían ser superiores al que manifestaban antes del SAN. Por lo expuesto es que nuestro marco teórico estará centrado en las evaluaciones.

La evaluación para la instancia de ingreso está íntimamente relacionado, no solo con la necesidad de alcanzar determinado nivel de calidad educativa, sino, centralmente, de gerenciar adecuadamente los recursos, el tiempo y los esfuerzos para alcanzar un mayor nivel de competencias tanto en el individuo como en la institución, visto desde la universidad, pero también esta instancia de evaluación de ingreso a la facultad, analizada desde la institución de nivel medio, estará ligada a una reformulación de contenidos, formas de enseñanza y replanteo de los propios sistemas de evaluación..En lo que sigue analizaremos los conceptos de evaluación obtenidos de diversos autores que tratan este tema.

La evaluación, en gran medida determina lo que los alumnos aprenden y cómo lo aprenden. Por lo tanto es también una parte importante del proceso enseñanza- aprendizaje ya que, esta información aporta al proceso de retroalimentación hacia el docente, que deberá tomarla para realizar un ajuste del "qué, cómo, por qué y cuándo enseñar" y los objetivos prioritarios son: a) para los alumnos, satisfacer la exigencia de los exámenes, b) para los docentes, es que la evaluación refleje la aprehensión y maduración de los contenidos que enseñan.

Evaluación es una actividad inherente a todo proceso intencional, como la educación, por lo que debe ser sistemática y su objetivo es valorarlo. Calificación es la valoración del logro de los alumnos. Este juicio de valor expresa el grado de suficiencia o insuficiencia en los conocimientos y habilidades del alumno por medio de una prueba o examen. Si la calificación no es usada para tomar alguna decisión respecto del proceso no existe una auténtica evaluación. Por lo tanto la evaluación es un proceso sistemático de identificación, recogida o tratamiento de datos sobre hechos educativos, con el objetivo de valorarlos y a partir de esto tomar decisiones.

La evaluación en el ámbito educativo tiene una amplia aplicación no sólo al rendimiento de los alumnos, sino también a los programas educativos, la práctica docente, los centros educativos, el sistema educativo en su conjunto. La evaluación puede resultar un estímulo para la educación, para ello es necesaria una definición clara de los objetivos y las reglas y acciones para lograrlos como así también las posibilidades de recuperación en caso de fracaso. Encontramos que esta problemática es una preocupación constante y permanente en la agenda didáctica de docentes e investigadores.

En este marco permanente de transición acordamos que el sistema de evaluación debe estar en concordancia no sólo con la propuesta curricular propiciada desde la cátedra, sino también con la concepción de enseñanza con la que trabajan los docentes en el aula y desde nuestra ya extensa práctica agregamos que debe atender también a las resoluciones y procedimientos que reglamentan la promoción de los alumnos y el currículum universitario en vigencia. Es decir, enseñanza, aprendizaje y evaluación son conceptos que se implican mutuamente, se alimentan, se solidarizan y se nutren unos de los otros.

Estas actividades conllevan además las posibilidades de reflexión y retroalimentación de cualquier secuencia de enseñanza y aprendizaje donde juega un papel importante la evaluación. Celman, S. (1998) señala que las prácticas evaluativas se entrelazan en el interior mismo del proceso total y destaca que la evaluación no es ni puede ser un apéndice de la enseñanza ni del aprendizaje; no debe ser concebida como último acto desprendido de las acciones propias de la enseñanza y el aprendizaje.

La misma autora (2004), a la que hicimos referencia en el párrafo anterior, también expresa que las diferencias entre las distintas nociones de evaluación educativa radican básicamente en la concepción de educación que se tenga y que esas diferencias se centran en la tarea del evaluador, en lo que se evalúa, en el para qué evaluar. Destaca que es impensable un concepto de evaluación que no tenga en cuenta al sujeto, el objeto y práctica de la evaluación. Además refuerza la idea de evaluación educativa, participativa, democrática, tendiente a la comprensión favoreciendo así la formación de docentes críticos y comprometidos.

Entre las tendencias actuales sobre evaluación encontramos las que hacen referencia a las formas explícitas de la evaluación, nos centramos en las opiniones de Lipsman, M. (2004) cuando aclara que es importante que los criterios de evaluación sean transparentes, que proporcionen a todos la igualdad de oportunidades y que tales criterios sean públicamente conocidos por los alumnos y que los juicios de valor sean actos de negociación explícita entre todos los implicados. Así mismo remarca y argumenta la idea de que no se puede encontrar un método que se consiga aplicar globalmente, exacto y que dé cuenta fehaciente de las competencias adquiridas por los alumnos y sus procesos de aprendizaje.

Gimenez Uribe y Samoluk (2007) plantean cinco dimensiones básicas de la evaluación relativas a los cuestionamientos que siempre han dado lugar a diferencias respecto de la definición de evaluación. Ellos distinguen:

a) El momento en que se realiza la evaluación que está relacionado con el "cuándo evaluar" y distinguen tres tipos de evaluaciones: la inicial, la continua y la final.

b) Los objetivos de la evaluación, que está relacionado con el "para qué evaluar" y se distinguen tres tipos de evaluación: la evaluación diagnóstica; la formativa y la sumativa. i) diagnóstica: se realiza al comienzo del curso académico, de la implantación de un programa educativo, del funcionamiento de una institución escolar, etc. Consiste en la recogida de datos en la situación de partida. Es imprescindible para iniciar cualquier cambio educativo, para decidir los objetivos que se pueden y deben conseguir y también para valorar si al final de un proceso, los resultados son satisfactorios o insatisfactorios. ii) formativa: la evaluación se utiliza preferentemente como estrategia de mejora y para ajustar sobre la marcha, los procesos educativos de cara a conseguir las metas u objetivos previstos. Es la más apropiada para la evaluación de procesos, aunque también es formativa la evaluación de productos educativos, siempre que sus resultados se empleen para la mejor de los mismos. Suele identificarse con la evaluación continua. iii) sumativa: suele aplicarse más en la evaluación de productos, es decir, de procesos terminados, con realizaciones precisas y valorables. Con la evaluación no se pretende modificar, ajustar o mejorar el objeto de la evaluación, sino simplemente determinar su valía, en función del empleo que se desea hacer del mismo posteriormente.

c) El evaluador, dimensión que está relacionada con el "quién evalúa" y nos hablan de evaluaciones internas y externas como aquellas que son realizadas por los participantes del proceso de enseñanza-aprendizaje o por una persona o equipo ajeno o no partícipe de la enseñanza, respectivamente.

d) El objeto de la evaluación, dimensión relacionada con el "qué evaluar": los aprendizajes de los alumnos, el desempeño del docente, los programas educativos, las instituciones educativas, entre otras.

e) Instrumentos de evaluación o el "cómo evaluar". Estos instrumentos deben adecuarse a los puntos anteriores, puesto que responderán de manera diferente de acuerdo a cual sea nuestro interés en la información que se recolecta. Por esto, debemos analizar, si el instrumento elegido es idóneo para nuestro propósito. Entre estos instrumentos mencionamos la observación, las entrevistas, los exámenes orales, los exámenes escritos, los trabajos en clase, las comunicaciones.

Por otra parte, autores como Santos Guerra (1998) entienden que si bien el proceso evaluador es muy complejo, la evaluación desempeña algunas funciones generales, que clasifica como: de diagnóstico, selección, jerarquización, comunicación y formación.

La lectura bibliográfica nos permitió consensuar el concepto de evaluación. Los debates internos en reuniones de cátedra pusieron de manifiesto que la evaluación es una parte fundamental del

proceso de enseñanza y aprendizaje, porque la lectura de sus resultados no sólo habla de lo aprendido o no por el alumno, sino también de la eficacia, la pertinencia, las competencias logradas o vacantes, la calidad del programa de estudios, el desempeño del docente en cuanto a criterios de selección, organización y jerarquización de contenidos y actividades. Concertamos además que es posible conocer los alcances y limitaciones de un proyecto educativo a medida que se va ejecutando. De nada sirve hacer el análisis sólo al final, puesto que esto impide mejorar y revisar la práctica que se desempeña en el momento actual.

Por otra parte, la revisión de nuestras prácticas nunca es fútil, trivial, o insignificante sino que nos da las herramientas para mejorarlas en el futuro. Pautamos que la evaluación debe mostrarnos los procesos de pensamiento, las habilidades cognitivas logradas y las que están ausentes, los grados de desempeño de los estudiantes, por lo que es muy importante no solo tener en cuenta qué evaluar, sino también cómo, cuándo y mediante qué instrumentos. Concluimos que el proceso evaluativo debe ser planificado de forma rigurosa y con conciencia, debe ser explícito, ofrecer alternativas, ser continuo y permitir la retroalimentación y corrección del proceso. Las actividades requieren de conocimiento y práctica referentes a datos y procedimientos de rutina; continuamos con prácticas referentes a la resolución de problemas típicos de la asignatura Proponemos actividades especiales para los alumnos que adhieran a un régimen especial de seguimiento de la cátedra.

Hipótesis

La hipótesis de este trabajo es que; "el Sistema de Admisión y Nivelación implementado en la Facultad de Bioquímica, Química y Farmacia de la UNT, donde los estudiantes deben aprobar los exámenes de Matemática, Física, Química y Biología para ingresar versus el ingreso irrestricto del sistema anterior, mejora sustancialmente el porcentaje de alumnos regularizados en la Cátedra de Matemática II y el número de estudiantes que aprueban esa asignatura".

Metodología

Según Juan Samaja (1993), toda investigación científica se desarrolla bajo dos conceptos: a) La Matriz de Datos, que es una estructura cuatripartita compleja formada por la unidades de análisis, las variables, los valores y el procedimiento adoptado para obtener estos valores. b) El sistema de matrices de datos de una investigación, es decir la complejidad del conocimiento que se quiere aportar obliga a definir matrices centrales (una o más, llamadas matrices coordinadas) y en muchos casos es necesario diseñar matrices de nivel inferior (llamadas subunitarias) y también matrices de nivel superior a las centrales (llamadas matrices supraunitarias). Bajo este presupuesto el

desarrollo de una investigación tiene cuatro fases: Diseñar, Llenar, Procesar e Interpretar Matrices de datos.

Como el estudio que presentamos es del tipo "antes y después", el trabajo se dividió en dos periodos de tiempo, entre los años 2003-2004, que corresponden a dos años del período de ingreso irrestricto en la institución y el período 2005-2010 correspondiente a la puesta en marcha del SAN. En ambos casos la información fue obtenida de una fuente secundaria, pues se usaron los registros de la sección alumnos de la Facultad.

Matrices de datos.

Por la razón señalada anteriormente, en este trabajo fue necesario diseñar dos matrices centrales, una correspondiente al "antes" y la otra al "después", de la implementación del SAN. Pero no fue necesario definir matrices subunitarias, ni tampoco matrices supraunitarias

Las dos matrices centrales del trabajo, una para cada período considerado, muestran como unidades de análisis los estudiantes cursantes de matemática II de la Facultad, agrupados en dos grandes grupos, los que regularizaron la materia al finalizar su desarrollo, lo que implica tener la asistencia exigida y la aprobación de los parciales y los que no consiguieron tal regularidad. Como variable se identifica el porcentaje correspondiente de alumnos regulares y no regulares en cada año del período considerado tomados sobre el total de alumnos inscriptos y cursantes.

Llenado de las matrices de datos.

En la Tabla 1 se muestran los valores del total absoluto y porcentual de alumnos regulares y no regulares correspondientes a los años bajo estudio antes de la implementación del SAN. Mientras que en la Tabla 2, se presentan los mismos elementos pero, en este caso, para los años del periodo con implementación del SAN. En la Tabla 3 se dan los valores del total absoluto y porcentual de alumnos regularizados y no regularizados pero agrupados en totales para cada período considerado.

Tabla 1. Matriz central. Porcentajes de alumnos regulares en el período 2003-2004

	2003		2004	
	Totales	%	Totales	%
Alumnos Regulares	310	76	347	**84**
Alumnos no Regulares	96	24	67	**16**
Total	**406**	**100**	**414**	**100**

Fuente: Sección Alumnos de la Facultad de Bioquímica, Química y Farmacia

Tabla 2. Matriz central. Porcentajes de alumnos regulares en el período 2005-2010

	2005		2006		2007		2008		2009		2010		2011	
	Total	%	Total	%	Total	%	Total	%	Total	%	Total	%	Total	%
Alumnos Regulares	355	79	316	78	305	84	302	85	288	91	236	89	246	**82**
Alumnos no regulares	95	21	91	22	58	16	53	15	27	9	29	11	54	**18**
Total	**450**	**100**	**407**	**100**	**363**	**100**	**355**	**100**	**315**	**100**	**265**	**100**	**300**	**100**

Fuente: Sección Alumnos de la Facultad de Bioquímica, Química y Farmacia

Tabla 3. Porcentajes de alumnos regulares en los períodos sin y con SAN

	2003 - 2004		2005 -2011	
	Totales	%	Totales	%
Alumnos Regulares	657	80	2048	**83**
Alumnos no Regulares	163	20	407	**17**
Total	**820**	**100**	**2455**	**100**

Fuente: Sección Alumnos de la Facultad de Bioquímica, Química y Farmacia

Impacto del SAN en los porcentajes de alumnos regulares en Matemática II. Procesamiento de las matrices de datos.

Para analizar el impacto que tuvo el SAN con respecto al porcentaje de alumnos regulares, se consideran el total de alumnos regulares y no regulares clasificados de acuerdo a si tuvieron o no el SAN, tal como se muestra en la Tabla 4.

Debido a que este estudio es de tipo retrospectivo, para medir la fuerza de asociación entre estas dos variables de tipo cualitativas dicotómicas (antes y después - regulares y no regulares) se usó el test estadístico inferencial denominado ODDS RATIO que proponen Graham, D., Everitt, B. (1995).

Para realizar la comparación de los porcentajes de regulares antes y después de la aplicación del SAN se controló que los grupos sean homogéneos con respecto a ciertos factores que podrían tener algún impacto en este análisis. Es así que:

a) El plan de estudio para ambos períodos considerados se puede considerar invariante, puesto que hasta el año 2006 estuvo vigente el plan 1990, desde el año 2007 se reformuló dicho plan, pero los contenidos de la asignatura Matemática I no se modificaron, por lo que efecto plan queda descartado.

b) El régimen de cursado no cambió dado que la materia es cuatrimestral antes y después del SAN, por lo que efecto cursado no tiene influencia en los valores obtenidos.

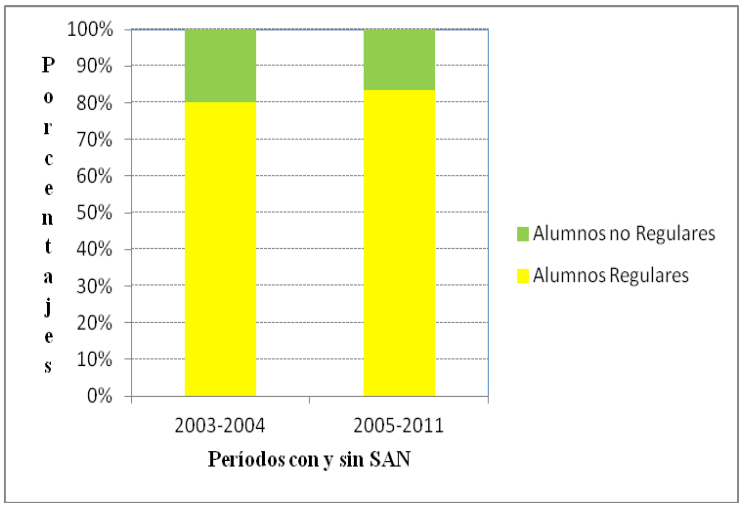
c) Dado que el plantel de profesores, a cargo del dictado de los tópicos teóricos como el de los contenidos prácticos, no se modificó a lo largo de todos los años bajo estudio tampoco este efecto docente tiene influencia.

Tabla 4. Alumnos regulares y no regulares en los períodos con y sin SAN

	Con SAN	Sin SAN	Total
Alumnos Regulares	2048	657	2705
Alumnos no Regulares	407	163	570
Total	2455	820	3275

Fuente: Sección Alumnos de la Facultad de Bioquímica, Química y Farmacia

Gráfico 1: Porcentajes de alumnos que regularizaron y no regularizaronen los períodos con y sin SAN



El estadístico calculado es el ODDS RATIO con su intervalo de confianza I del 95% es el siguiente:

OR = 1,248412 IC (95%) = (1,003421; 1,547905)

Este valor para el estadístico, mayor que uno, y el correspondiente intervalo de confianza nos indica que hay evidencia significativa para concluir que el SAN tuvo un impacto positivo en el porcentaje de alumnos regulares.

b) Impacto del SAN en el rendimiento académico de los alumnos en los exámenes finales.

Para medir el impacto del SAN se considera el total de alumnos inscriptos en los exámenes finales en los años 2003 al 2010. Para este análisis se suprimen los alumnos recursantes. Para poder llegar a las matrices centrales fue necesario considerar matrices subunitarias, una para cada

cohorte y se consideraron los alumnos aprobados desaprobados y ausentes en los distintos turnos de exámenes.

Tabla 5. Matriz central. Porcentajes de alumnos aprobados, desaprobados y ausentes en los exámenes finales antes de la implementación del SAN

Exámenes Finales	2003	2004
Aprobados	164 (66%)	176 (71%)
Desaprobados	28 (11%)	27 (11%)
Ausentes	57 (23%)	46 (18%)
Inscriptos	249(100%)	249 (100%)

Fuente. Datos suministrados por sección alumnos de la Facultad de Bioquímica

Tabla 6. Matriz central. Porcentajes de alumnos aprobados, desaprobados y ausentes en los exámenes finales después de la implementación del SAN

Exámenes Finales	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Aprobados	196(74%)	178(66%)	161(64%)	213(70%)	192(66%)	198(59%)
Desaprobados	31(12%)	42(15%)	32(13%)	46(15%)	57(19%)	72(21%)
Ausentes	36(14%)	51(19%)	59(23%)	45(15%)	45(15%)	68(20%)
Inscriptos	263(100%)	271(100%)	252(100%)	304(100%)	294(100%)	338(100%)

Para medir el rendimiento académico se considera el siguiente índice de eficiencia definido como la razón entre el total de alumnos aprobados en los exámenes finales sobre el total de alumnos regularizados.

$$\mathrm{EfC}i = \frac{\mathrm{Ap}}{\mathrm{R}}.100 \quad \text{con } i = 2003, 2004, \ldots, 2010$$

donde EfCi : eficiencia en los finales en la cohorte i; Ap: Total de aprobados en los exámenes finales en la cohorte i y R : Total de alumnos regularizados en la cohorte i.

La siguiente tabla muestra el total de alumnos aprobados, regularizados y la eficiencia en los exámenes para las distintas cohortes.

Tabla 7. Eficiencia en los exámenes finales

	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Ap	164	176	196	178	161	213	192	198

R	310	347	355	316	305	302	288	236
EfCi	53%	51%	55%	56%	53%	71%	67%	84%

Del análisis de la tabla 7 se observa que el rendimiento académico de los alumnos en los exámenes finales, medido a través de la eficiencia, mejora sustancialmente a partir del año 2005, período en que se aplicó el SAN.

Conclusiones

Por todo lo expuesto, y hasta lo que se pudo observar al finalizar este trabajo, podríamos concluir, en forma provisoria, que la implementación de este nuevo sistema de admisión y nivelación en la facultad de Bioquímica, Química y Farmacia de la UNT, se puede considerar más eficiente que el tradicional ingreso irrestricto, respecto del porcentaje de alumnos que regularizan Matemática II, considerando que estos porcentajes se toman sobre el total de alumnos inscriptos y que están en condiciones de rendir, es decir tienen el porcentaje de asistencia exigido a clases prácticas. También se concluye que el SAN tiene un impacto positivo en el rendimiento académico en los exámenes finales, medido este a través del índice de eficiencia, el que mejora sustancialmente a partir del año 2005.

No obstante el equipo de trabajo seguirá monitoreando los resultados y además prevé, cuando hayan transcurridos los años necesarios de vigencia del SAN, encarar los estudios de impacto de largo plazo a los que se hacen referencia en el último párrafo de la introducción de este trabajo.

Referencias bibliográficas

Celman, S. (1998). *¿Es Posible Mejorar la Evaluación y Transformarla en Herramienta de Conocimiento?* Buenos Aires. Editorial Paidós.

Graham, D. Brian E. (1995). *Clinical Biostatistics.* New York. John Wiley & Sons Inc.

Giménez Rodríguez, J. (1997). *Evaluación en Matemáticas.* Madrid. Editorial Síntesis

Lipsman, M. (2004). *La Innovación en las Propuestas de Evaluación de los Aprendizajes en la Cátedra Universitaria.* Santa Fe. Ediciones UNL.

Giménez Uribe, M. Samoluk, M. (2007). *Reflexiones Sobre Evaluación Universitaria. Posibilidades de Revisión y Mejora.* Santa Fe. Mat. Didáctico UTN

Santos Guerra, M. A. (1998). *Evaluación Educativa. Un Proceso de Dialogo, Comprensión y Mejora.* Buenos Aires. Editorial Magisterio del Plata.

Samaja, J. (1993). *Epistemología y Metodología. Elementos para una Teoría de la Investigación Científica.* Buenos Aires. EUDEBA.

ANÁLISIS DEL TRATAMIENTO DE LA ARITMÉTICA EN LOS LIBROS DE MATEMÁTICA DE LA COLECCIÓN BICENTENARIO

Ángel Míguez Álvarez y Ana Duarte Castillo
Universidad Nacional Abierta Venezuela
amiguez@una.edu.ve ; aduarte@una.edu.ve

Resumen. El presente artículo es parte de una investigación amplia enfocada en analizar el tratamiento de las actividades de aprendizaje del área de Aritmética en los libros de matemática de la Colección Bicentenario. Se utilizó el modelo de caracterización de Alson (2000) referido a las situaciones de producción. El objetivo fue identificar las categorías presentes en las actividades de aprendizaje de aritmética; posteriormente se propuso las actividades referidas a las categorías faltantes, si era el caso. El libro considerado para esta etapa fue primer grado de Educación primaria, dirigidos a niños entre 7-8 años. La colección Bicentenario es el nombre que recibe el grupo de libros de texto (Matemática, Lengua, Ciencias Naturales y Ciencias Sociales) editados por el Gobierno Bolivariano de Venezuela. Este estudio, se justifica en que el tipo de material curricular representa uno de los elementos del currículo que posee mayor incidencia en el proceso de enseñanza-aprendizaje, tanto de las matemáticas como de otras disciplinas escolares. (Serrano, 2009; Parcerisa, 1996).
Palabras clave: libros de texto, colección bicentenario, situaciones de producción
Abstract. This paper is part of a wide investigation approach in to analyze the learning activities treatment in the Arithmetic, in the mathematic books of Bicentenary Collection. Was utilities Alson (2000) characterization model, which refers to situations of productions. The target was to identify present category in the learning activities in Arithmetic; subsequently proposed activities concerning the missing categories, if it was the case. The considered book to this stage was the first grade of primary education which is used for 7 and 8 year old children's. Bicentenary Collection is the name of group text books (mathematic, language, science and social science) edited for Bolivarian Government of Venezuela. Curricular material represents one of the elements of the curriculum that has more impact on the teaching-learning process; this study is justified in that aspect, both in mathematics and other school subjects. (Serrano, 2009; Parcerisa, 1996.
Key words: textbooks, bicentennial collection, production situations

Introducción

Enseñar aritmética a niños de siete años o más, requiere de varios conocimientos. Primero, el conocimiento matemático de lo que se quiere enseñar, este conocimiento debe tener cierta profundidad que lleve a la maestra, entre otras tantas cosas, a comprender las definiciones matemáticas de las operaciones aritméticas. Segundo, se hace necesario tener un conocimiento didáctico sobre el contenido a enseñar, tal como lo señala Shulman (2005). En este caso particular, conocimiento sobre la didáctica de la matemática, por ejemplo ¿Cómo enseñar las operaciones básicas?. Tanto la adición como la sustracción deberían enseñarse de manera simultánea para que los estudiantes comprendan la noción algebraica de una operación y su inversa. Además, es necesario mostrar las diversas formas de representación, el uso de materiales concretos. Tercero, se debe preparar la puesta en escena dentro del aula, para el performance que requiere una clase. La maestra debe conocer cómo diseñar la Unidad de Enseñanza. En nuestro contexto, el Estado Venezolano les entrega a los estudiantes un libro de texto, para este caso, de Matemática. Por lo

cual, consideramos necesario mostrar a las maestras una herramienta que le permita clasificar los ejercicios, las preguntas y los problemas que el libro presenta con miras a planear su enseñanza y complementar lo planteado por el libro con actividades diversas que enriquezcan el proceso que se da en la clase de matemática.

Para ello, utilizamos el modelo de caracterización propuesto por Alson (2000) denominado *Situaciones de Producción*, para hacer un análisis de contenido, intensivo, temático por categorías, tal como lo define Campenhoudt (2001), de los ejercicios y problemas presentes en el libro. Esta caracterización lleva a una clasificación de las actividades propuestas en el libro, con base en el análisis de contenido realizado. Con la intención de identificar las categorías presentes en las actividades del área de aritmética presentadas en el libro; para luego proponer las actividades referidas a las categorías faltantes, si fuese el caso o para diseñar o buscar actividades complementarias que mejoren el ciclo de enseñanza con más bondades para el estudio de la aritmética por parte de los estudiantes.

Situaciones de Producción

Alson (2000) define una situación de producción de la siguiente manera "Un individuo está en una situación de producción si debe producir un objeto a partir de otro objeto utilizando una acción hecha por él" (p.3). En donde, llama procedimiento a una sucesión de operaciones que permiten a partir de un objeto obtener otro" (Alson, op. cit, p.2)

La Situación de Producción se simbolizará con el icono: $\longmapsto$ el Procedimiento lo simbolizaremos por el icono: $\rightarrow$

Este autor hace referencia a cuatro situaciones de producción, que describimos a continuación:

- *Situación de Producción Algorítmica*

Una Situación de Producción es Algorítmica cuando al individuo se le presenta un objeto "origen" A y un procedimiento y su acción consiste en obtener el objeto "resultado" B.

$$(A \rightarrow) \mapsto (B)$$

Por ejemplo: Dados los números 2, 3 y la operación adición +, la acción de producción es obtener la suma, es decir, el número 5 $(2+3=) \mapsto (5)$

- *Situación de Producción Significante*

Una Situación de Producción es Significante cuando al individuo se le presenta un procedimiento y un objeto "resultado" B y su acción consiste en obtener el objeto "origen" A.

$(\rightarrow B) \mapsto (A)$

Por ejemplo: Dada la suma, el número 7, y la operación adición +, la acción de producción es obtener los sumandos, es decir, un par de números cuya suma sea 7

$$(__+__= 7) \mapsto (1,6) \text{ o } (2,5) \text{ o } (0,7)...$$

- *Situación de Producción de Interpretación*

Una Situación de Producción es de Interpretación cuando al individuo se le presenta un objeto "resultado" B y su acción consiste en obtener el objeto "origen" A y el procedimiento asociado para obtener el objeto "resultado" B

$$(B) \mapsto (A \rightarrow)$$

Por ejemplo: Dado un intervalo en la recta real [-3, ∞), la acción de producción es obtener una inecuación cuyo resultado sea dicho intervalo

$$[-3, \infty) \mapsto (x+3\geq 0 \rightarrow)$$

donde → es el procedimiento para hallar la solución de una inecuación.Esto es una Interpretación que se le da al intervalo [-3, ∞). Otra posible interpretación es:

$$[-3, \infty) \mapsto (f(x) = \sqrt{x+3} \rightarrow)$$

donde → es el procedimiento para hallar el dominio de la función

- *Situación de Producción de Formalización*

Una Situación de Producción es de Formalización cuando al individuo se le presenta un objeto "origen" A y su acción consiste en obtener un procedimiento que permita obtener el objeto "resultado" B $(A) \mapsto (\rightarrow B)$

Por ejemplo: Sabiendo que una cuerda es el segmento que une a dos puntos diferentes de una circunferencia y que el diámetro es la denominación de la cuerda que pasa por el centro de la circunferencia. ¿Cuánto mide el diámetro ***d*** de una circunferencia si su radio ***r*** mide 12 cm?. Con base en lo estudiado, el estudiante debe determinar que el diámetro es equivalente a dos radios, es decir (→), de aquí se tiene que:

$$(\boldsymbol{r}) \mapsto [\rightarrow (\boldsymbol{d})]$$

$$(12) \mapsto [\rightarrow (24)]$$

En este caso → viene dado por la relación $\boldsymbol{d} = 2\boldsymbol{r}$

Colección Bicentenario

La colección Bicentenario es el nombre que recibe el grupo de libros de texto (Matemática, Lengua, Ciencias Naturales y Ciencias Sociales) editados por el gobierno venezolano, a través del Ministerio del Poder Popular para la Educación como uno de los muchos programas sociales que han sido impulsados en la República Bolivariana de Venezuela en los últimos años. Estos Libros de texto están dirigidos a estudiantes de Educación Primaria (7 años – 12 años) y son cónsonos con el proceso de transformación social descrito en la Ley Orgánica de Educación (2009). Este tipo de material curricular, el libro de texto, representa uno de los elementos del currículo que posee mayor incidencia en el proceso de enseñanza, tanto de las matemáticas como de otras disciplinas escolares. (Serrano, 2009; Parcerisa, 1996). En cuanto a los libros de Matemática, tenemos que uno de los fines de la educación establecidos en la Ley Orgánica de Educación (2009), de la República Bolivariana de Venezuela, establece "Desarrollar la capacidad de abstracción y el pensamiento crítico mediante la formación en filosofía, lógica y matemáticas, con métodos innovadores que privilegien el aprendizaje desde la cotidianidad y la experiencia".

La concepción, tanto pedagógica como didáctica que acompañan los libros de matemática hace referencia a una educación productiva, intercultural e intracultural, disciplinaria, intradisciplinaria e interdisciplinaria, liberadora, emancipadora, revolucionaria, comunitaria, antiimperialista, participativa, colaborativa, investigativa y activa. Esto, con el fin de romper con la educación matemática tradicional ubicada en el paradigma del ejercicio (Skosvmose, 2000). Se pretende aproximarse a lo distinguido por el Skosvmose, como los escenarios de investigación. La Colección Bicentenario, material curricular distribuido por el Ministerio del poder Popular de Educación tanto en escuelas y liceos puede ser revisada en: http://www.me.gob.ve/coleccion_bicentenario/index.php

La Aritmética en el libro "Contemos 1, 2, 3 y 4"

De las 18 lecciones que contiene el libro de primer grado, la mitad están referidas a aritmética, la distribución es la siguiente:

N°	Área / Tema	Nombre Lección	Contenido Matemático
2	Aritmética / Relaciones de cantidad	Colecciones	Relaciones como "más que", "menos que", "tanto como" e "igual a". Uso de cuantificadores como: "mucho", "poco"
3	Aritmética / Introducción a los números naturales	Los Números	Relación colecciones-números. Lectura y escritura de los números. Significado y uso de los números
4	Aritmética / Valor de posición	Contando de diez en diez	Unidad, decena y centena

5	Aritmética / Números ordinales	Orden y ordeno	Los números ordinales. Series ascendentes y descendentes
6	Aritmética / Series numéricas	De ida y vuelta	Series numéricas ascendentes y descendentes
7	Aritmética / Adición	¡A sumar!	Elementos de la adición
8	Aritmética / Sustracción	¡A restar!	Elementos de la sustracción
9	Aritmética / El número cero	El número cero	Adición y sustracción con el cero
10	Aritmética / Adición y sustracción	¿Problemas a mí?	Resolución de problemas combinados

Tabla 1. Lecciones referidas a Aritmética.

Clasificación de las Situaciones de Producción en las lecciones

N°	Nombre Lección	Situaciones de Producción			
		Algorítmicas	Significativas	Interpretación	Formalización
2	Colecciones	5	2	1	2
3	Los Números	3	6	0	0
4	Contando de diez en diez	13	0	0	0
5	Orden y ordeno	5	0	2	0
6	De ida y vuelta	18	0	1	0
7	¡A sumar!	3	3	2	1
8	¡A restar!	13	0	1	0
9	El número cero	3	0	1	0
10	¿Problemas a mí?	7	12	0	0
	Total	70	24	8	3
	%	66,67	22,86	7,62	2,86

Tabla 2. Situaciones de Producción en las lecciones de Aritmética.

Ejemplos que ilustran las Situaciones de Producción presentes en el libro de primer grado

- **Algorítmica** [(A →) ↦ (B)]

Si tuvieses 20 semillas, ¿cuántas decenas de semillas tendrías? (Lección 4: Contando de diez en diez; pág. 55)

- **Significativa** [(→ B) ↦ (A)]

Completa en tu cuaderno:

_____ **8** (Lección 3: Los números; pág. 39)

[*En esta actividad se espera que el niño o la niña escriba en letras el nombre del número indicado y que dibuje una colección de objetos con el número de elementos indicado*]

- **Interpretación** [(B) ↦ (A →)]

¿Si estas participando en una carrera y adelantas al segundo, en qué posición estás ahora? (Lección 5: Orden y ordeno; pág. 59)

- **Formalización** [(A) $\mapsto$ (→B)]

¿Cómo podemos saber dónde hay más elementos? (Lección 2: colecciones; pág. 21)

[*En esta actividad se espera que el niño o la niña describa un método para saber en cuál conjunto o colección hay más elementos*]

Análisis de las lecciones

Alson (2000) señala que en el proceso de enseñanza, las Situaciones de Producción algorítmicas deberían ser, al menos, la mitad de las Situaciones de Producción propuestas en los libros, con el fin de que el estudiante comprenda el concepto y/o procedimiento enseñado por primera vez. Al revisar las lecciones de aritmética del libro de primer grado de la colección bicentenario podemos observar que en general, las lecciones vistas como un todo se acercan a lo señalado por el autor. Sin embargo, al revisar lección por lección, nos encontramos con una preponderancia de las Situaciones de Producción Algorítmicas, salvo en las lecciones 3, 7 y 10. En el caso de la lección 3, Los Números, se hace énfasis en Situaciones de Producción significativas, dado que esta noción, identificar el nombre, el símbolo de un número y la cardinalidad de una colección es un concepto que se viene trabajando desde la educación inicial (0 – 6 años) y en esta lección se espera una comprensión mayor y un dominio suficiente por parte del niño o niña en primer grado (7 años). En el caso de la lección 7, ¡A sumar!, hay igual número de Situaciones de Producción Algorítmicas y Significantes. Es en este grado en el que se enseña por vez primera el algoritmo de la adición, más la noción de "juntar" dos conjuntos o colecciones es trabajado en la Educación Inicial y existe un apresto a la operación de adición por lo que no es descabellado presentarle a la niña o niño de primer grado actividades significativas como las presentadas en esta lección. Veamos un ejemplo de una Situación de Producción Significativa presentada en esta lección (pág. 72):

Cinco más _____ es igual a = 11

5 + _____ = 11

En el caso de la lección 10, ¿Problemas a mí?, hay un mayor número de Situaciones de Producción Significativas (12) que Algorítmicas (7), esto es debido a que es una lección de cierre, consolidación o síntesis de lo estudiado en las lecciones anteriores. En esta lección se hace énfasis en la comprensión de la operación de adición. Identificamos tres tipos de lecciones de aritmética en este libro, lecciones para introducir temas, lecciones para continuar estudiando temas vistos o estudiados previamente y lecciones para consolidar y sintetizar lo ya estudiado.

Sugerencias pedagógicas

La maestra, a la hora de hacer el análisis pedagógico para planificar sus actividades de aula, debe identificar el tipo de lección que va a trabajar y con base en ello y las situaciones de producción que aparecen en el libro, para determinar si es necesario incorporar nuevas situaciones para enriquecer el proceso de enseñanza de los estudiantes. A continuación presentamos algunas sugerencias:

<table>
<tr><th>Lecciones</th><th>Sugerencias Pedagógicas</th></tr>
<tr><td>En la lección 4, Contando de diez en diez, los estudiantes deben conocer y comprender el cartel de valores y las reglas para su uso, por primera vez. La maestra debe comprender la importancia del uso del carel de valores, dado que el mismo está presente en las lecciones de los libros de los años posteriores en los temas referidos a numeración, adición, sustracción y multiplicación.</td><td>- Es recomendable, en este nivel educativo, usar material manipulable para comprender el uso del cartel de valores.

Un primer cartel de valores debe usarse con objetos manipulables con miras a conocer su uso y para la comprensión del sistema de numeración posicional. Luego, el estudiante deberá usar el cartel de valores escribiéndolo en su cuaderno y usando los números para la comprensión del sistema de numeración posicional y las reglas de la adición.

- Una actividad interesante para desarrollar, consolidar el dominio del sistema de numeración posicional es la de solicitar al estudiante escribir números que tengan determinada cifra en diferentes valores posicionales y el de presentarles números y preguntar sobre el valor posicional de determinada cifra presente en dicho número. Por ejemplo:

Escriba un número de… cifras que tenga el 5 en la posición de la decena.

Diga el valor de la cifra 7 en los siguientes números: 607; 74; 766

- Se deben colocar ejercicios, de verbalización, de números escritos en el cartel de valores con el fin de nombrar las cantidades según la posición ocupada. Por ejemplo:

<table>
<tr><td>C</td><td>D</td><td>U</td></tr>
<tr><td>4</td><td>5</td><td>0</td></tr>
<tr><td></td><td>D</td><td>U</td></tr>
<tr><td></td><td>4</td><td>5</td></tr>
</table>
Se debe leer como cuarenta y cinco decenas

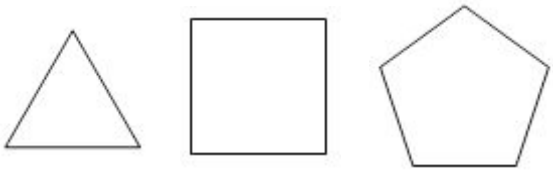
Se debe leer como cuarenta y cinco unidades

En grados posteriores, o a juicio de la maestra, se debe promover la lectura de cantidades sin el uso del cartel de valores.</td></tr>
</table>

La lección 6, De ida y vuelta, propone situaciones algorítmicas referidas a colecciones de objetos.

Esto se puede complementar con seriaciones ideográficas, geométricas o de otro tipo que promuevan la abstracción en la identificación de la prosecución numérica.

Por ejemplo:



…

Otros ejemplos: 2, 4, 6, 8,…

12, 9, 6,…

La adición y la sustracción son operaciones inversas [5+3=8; 8-5=3]. Entender la adición y la sustracción como operaciones inversas desde un comienzo tiene grandes frutos en la comprensión de las operaciones aritméticas y de ideas importantes dentro de la matemática. Una actividad que puede complementar la comprensión de lo estudiado en las lecciones 7, ¡A sumar! y 8, ¡A restar! Es la de plantear la adición y la sustracción de manera simultánea. Por ejemplo:

Adición						Sustracción				
5	+	3	=			8	-	5	=	
7	+		=	15		15	-		=	7
16	+	9	=				-	16	=	9
	+	6	=	10		10	-		=	6
	+		=	21		21	-		=	

Con base en esta tabla, que puede ser con más ejercicios que los que acá proponemos, se le puede preguntar a los estudiantes: ¿cómo podemos comprobar si una suma es el resultado correcto? ¿Cómo podemos comprobar si una resta es el resultado correcto?

Cuadro 1. Sugerencias pedagógicas

Consideraciones finales

El libro de texto que tienen a su disposición los niños dentro del aula de matemática marca el rumbo de la clase, más está en manos de cada maestra el enriquecer, complementar y consolidar las propuestas pedagógicas que en él aparece.

La maestra, al hacer su análisis pedagógico para diseñar su unidad de enseñanza, su clase, deben describir cómo debe ser el transitar del estudiante por la lección sobre el tema seleccionado, desde qué debe conocer, las habilidades que debe desarrollar, las posibles dificultades a superar y cómo superarlas y la contribución de la actividad de enseñanza en el aula a las destrezas y conocimiento matemático global del estudiante.

Además, es necesario que diseñen, analicen y seleccionen los materiales y las tareas que constituirán las actividades de enseñanza en el aula. Nuestra propuesta, con este estudio realizado, es que la determinación de las Situaciones de Producción presentes en cada una de las lecciones del libro nos ayudará a decidir cómo lograr una mejor enseñanza en el aula. Lo que mostramos acá, es nuestra propuesta de trabajo para las educadoras que día a día reflexionan y buscan una mejor forma de enseñar. Las Situaciones de Producción propuestas por el Profesor Pedro Alson se convierten en una herramienta de apoyo para la planificación y diseño de la clase, para el enriquecimiento del proceso de enseñanza y para guiar la actividad de estudio y ejercitación de los estudiantes de matemáticas en la educación básica. El compartir la Unidad diseñada con tus colegas y la evaluación de los logros alcanzados en su uso serán el escalafón adecuado, de esta propuesta, para el esfuerzo que debe repetirse hasta lograr una enseñanza tan buena que garantice la comprensión de todos nuestros estudiantes.

Referencias bibliográficas

Alson, P. (2 000). *Eléments pour une théorie de la signification en didactique des mathématiques*. Tesis de Doctorado no publicada. Francia: Universidad Bordeaux I

Campenhoudt, Q. (2001). *Manual de Investigación en Ciencias Sociales*. Mexico : LIMUSA

Duarte, A. y Bustamante, K. (2013). Colección Bicentenario: Una mirada desde los libros de matemática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 26 (1), 23-30

Ley Orgánica de Educación, 5929, Gaceta Oficial de la República Bolivariana de Venezuela (2009)

Moya A. y Otros. (2011). *Contemos 1, 2, 3 Y 4 Libro de Matemática Primer Grado*. Caracas, Venezuela: Ministerio del Poder Popular para la Educación (MPPE)

Parcerisa (1996) *Materiales curriculares. Cómo elaborarlos, seleccionarlos y usarlos*. Barcelona: Grao.

Serrano, W. (2009). *Las Actividades Matemáticas, el saber y los libros de textos.* Bolivia-Venezuela: Fondo Editorial IPASME.

Shulman, L. (2005) Conocimientos y Enseñanza: Fundamentos de la nueva reforma Profesorado. *Revista de currículum y formación del profesorado,* 9 (2), 1-30

Skovsmose, O. (2000) Escenarios de Investigación. *Revista EMA*, 6(1), 3-26

ALGUNAS CUESTIONES ADVERTIDAS EN LA IMPLEMENTACIÓN DE UN INSTRUMENTODE EVALUACIÓN EN EL ÁREA DE LA MATEMÁTICA

Graciela C. Lombardo, Silvia Caronía, Roxana V. Operuk, Viviana E. Pereyra, Matías J. Corvo y Perla M. Ledesma
Universidad Nacional de Misiones Argentina
gracielalombardo@gmail.com, silvca2@gmail.com, roxsoperuk@gmail.com, viviana_1207@hotmail.com, corvomatias@gmail.com, vicky0902ledesma@gmail.com

Resumen. El objetivo de este trabajo fue analizar la efectividad del uso de cuestionarios grupales implementados para llevar a cabo la evaluación diagnóstica continua. Se trabajó con registros provenientes de cuestionarios grupales de los alumnos de la asignatura Geometría Métrica, del Profesorado en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales de la Universidad Nacional de Misiones. Con este trabajo se pudo realizar la evaluación diagnóstica de los aprendizajes de conceptos abordados en clases anteriores. El software INFOSTAT facilitó el proceso del análisis estadístico de los datos, y brindó de manera sencilla, una relación entre las variables intervinientes. Con la elaboración e implementación de los instrumentos de evaluación, se percibió el nivel de conceptualización de los estudiantes, en cuanto a determinados conceptos primordiales de la asignatura. Se detectaron errores relativos a los contenidos abordados y se trazaron acciones para revertirlos

Palabras clave: matemática, geometría, evaluación diagnóstica

Abstract. The aim of this research work was to analyze the effectiveness of the implementation of group questionnaires to implement continuous diagnostic evaluation. Records of questionnaires solved by the students attending Metric Geometry from the Mathematics Training Course of the Faculty of Exact, Chemical and Natural Sciences were examined. Through this research it was possible to make a diagnostic assessment of the learning of concepts covered in previous classes. The INFOSTAT software facilitated the process of statistical data analysis and provided, in a simple way, a relationship between the variables involved. The development and implementation of the evaluation instruments made it possible to sense the level of conceptualization of the students about certain key concepts of the subject. Furthermore, errors related to the contents dealt with were detected and actions were designed to reverse the situation

Key words: mathematic, geometry, diagnostic evaluation

Introducción

El presente trabajo constituye un avance del Proyecto de Investigación "Análisis de la implementación de herramientas computacionales aplicadas al proceso de evaluación en Matemática", cuyo objetivo es valorar la aplicación de herramientas computacionales en el proceso de evaluación continua. El proyecto forma parte de una línea de investigación llevada a cabo por este grupo desde el año 2009.

Se trabajó con la materia Geometría Métrica, del 1° año del Profesorado en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales (FCEQyN) de la Universidad Nacional de Misiones. (UNaM). Para mejorar la enseñanza de esta asignatura se buscó investigar en qué medida los instrumentos de evaluación resultan propicios para realizar la evaluación diagnóstica continua (EDC) de los aprendizajes operados por los alumnos. El estudio se apoyó en la teoría de la Asimilación (Ausubel, 1983).

En esta presentación se pretende analizar la efectividad del uso de cuestionarios grupales implementados para llevar a cabo una evaluación diagnóstica continua.

Fundamentación

Los docentes cuentan con diversos recursos que les permiten determinar los conocimientos que detentan los alumnos, como también planificar sus clases en forma continua. En la determinación y selección de saberes subyace la concepción de enseñanza y de aprendizaje que posee el docente.

Existen tres instancias de evaluación en el aula, las que son consideradas relevantes por el sentido que cada una tiene y por su necesaria complementariedad práctica. Estas instancias son: "evaluación diagnóstica Inicial", "evaluación diagnóstica continua" y "acreditación". (Palou de Maté, 2003). La primera tiene como objetivo establecer y reconocer los saberes que han incorporado los alumnos en años previos; la siguiente, recabar información sobre los saberes adquiridos por los alumnos en la etapa presente, a efectos de delinear la propuesta de enseñanza, como también, establecer criterios tendientes a examinar los resultados de aprendizajes; y en la última fase se centra la atención en la verificación de resultados para certificar y legitimar sus conocimientos.

En acuerdo con Carlino (2007), la evaluación representa un medio potente en el que se produce la retroalimentación del aprendizaje y la enseñanza. En efecto, lo producido por el alumno en instancias evaluativas confiere información al docente la cual puede ser devuelta al alumno, a fin de reorientar su desempeño, como así también proporcionar argumentos para repensar su práctica pedagógica posterior. Al respecto, esta investigadora alude al currículum real, y lo define como lo que realmente aprenden los alumnos, más allá de lo que los profesores pretendieron enseñar. Es por ello que si tanto docentes como alumnos realizan, "con naturalidad", prácticas innovadoras y argumentadas con la respectiva evaluación en proceso, entonces pueden repensarse instancias de acreditación de la misma condición.

Teniendo en cuenta las cuestiones vertidas por Álvarez Méndez (2012), en relación al "mejor método" de evaluación durante el proceso de enseñanza y aprendizaje, se advierte la importancia de considerar un gran número de variables intervinientes en este cometido. De acuerdo con Rodríguez (2012), esto trae a la reflexión que debe existir coherencia entre los objetivos propuestos, la modalidad de trabajo en el aula y los criterios de evaluación. En tal sentido, los instrumentos de evaluación creados deberán tener la virtud de poder observar habilidades más complejas, a más de ser una vía para la acreditación.

Tal como fue señalado previamente, se considera que no sólo es primordial integrar al alumno como actor fundamental en el proceso de enseñanza y aprendizaje, sino también considerar a la evaluación como vía potente que posibilita al docente hacer una retroalimentación de las

actividades realizadas en su quehacer. Se considera imprescindible encontrar otros instrumentos evaluativos, que permitan determinar: conocimientos previos de los estudiantes, su relación con la temática a enseñar, forma en que se interrelacionan dentro de la matriz intersubjetiva básica del educando.

Por todo lo mencionado, se sostiene que a través de la investigación educativa el profesor puede contar con herramientas que contribuyan al proceso de evaluación y en definitiva al mejoramiento de las prácticas educativas.

Metodología

El presente trabajo tiene carácter exploratorio y descriptivo, y se enmarca dentro del Paradigma Hermenéutico o interpretativo del campo socio educativo.

Se tomó como referencia a una parte de la población del Profesorado en Matemática, de la materia Geometría Métrica del 1° año, asignatura dictada en el 1° cuatrimestre del ciclo lectivo 2012.

Los instrumentos de análisis fueron registros provenientes de la implementación de un cuestionario trabajado en forma grupal (EDC).Por razones de espacio, se presentan los resultados de uno de los instrumentos implementados.

Se suministró un cuestionario, para la elaboración en forma grupal (37 grupos), cuyo propósito fue evaluar contenidos relativos a los "movimientos en el plano". Los estudiantes accedieron a la consigna a través del aula virtual de la cátedra (ver Cuadro 1).Una vez resueltas las cuestiones planteadas, subieron al mismo sitio las producciones grupales. Para esta instancia los alumnos ya habían recorrido un trayecto dentro de la materia, y abordado los contenidos articulantes que sirvieron como cimiento para las construcciones y soluciones a las actividades.

Las categorías utilizadas, en el análisis y carga de los registros provenientes de las evaluaciones grupales, constan en el Cuadro 2.

Cuadro 1. Evaluación diagnóstica continua: trabajo grupal

Dados los siguientes enunciados, indicar, en cada caso, si es verdadero o falso. En caso que la proposición sea falsa explicar cuál o cuáles son las razones de la falsedad:

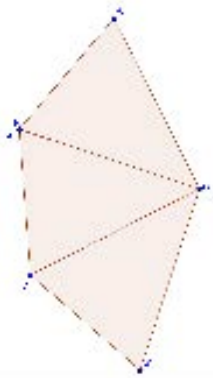
a) Sea la composición $T_v o T_u$ donde el vector v es equipolente con el vector $(-2)u$, entonces esta composición se puede reemplazar por $T_{(-u)}$.

b) La composición $S_g o S_f o S_e$, con e // f // g, se puede reemplazar por una S_h , de tal modo que "h" contiene a los puntos medios de los segmentos determinados por los pares de puntos homólogos pertenecientes a la primera y última figura de la composición.

c) Sea el triángulo equilátero ABC. La composición dee movimientos $(S_e o T_v o S_C)(ABC) = ABC$.

(Donde el vector "v" es equipolente con el duplo del vector MC';" "M" es el punto medio del segmento A'B'; y "e" es la rectar determinada por los puntos A y B).

d) En la figura, se observa el cumplimiento de la siguientee igualdad: $(G_{(C,90°)} o S_e)(ABC) = A''B''C''$. (La recta" "e" es la bisectriz del ángulo $\widehat{ACB}$).



Inicialmente se realizó un análisis de los trabajos, lo cual posibilitó hacer la categorización de las variables a estudiar.

Una vez obtenidas las categorías se utilizó el software estadístico INFOSTAT el cual facilitó ampliamente el proceso del análisis estadístico de los datos, y brindó de manera sencilla, una relación entre las variables intervinientes.

Cabe aclarar, que para algunas consignas no fue necesario el uso de todas las categorías, debido a las características propias del problema presentado.

Cuadro 2. Categorías utilizadas en el análisis de los datos

Modo de Respuesta: se considera la forma de la respuesta.
Coloquial (C): responde solamente en forma escrita.
Gráfico (G): responde solamente con gráficos.
Coloquial – Gráfico (C-G): responde en forma escrita y con gráficos.
No Responde (N-R)
Calidad de la respuesta: se considera el grado de completitud de la respuesta.
Completo (Co): explicita todas las posibilidades.
Incompleto (In): explicita algunas posibilidades.
No Responde (N-R): No explicita ninguna posibilidad.
Nivel de corrección de la respuesta:
Bien (B)
Regular (R)
Insuficiente (I)
No Responde (N-R)

Resultados

Luego de procesar los datos empíricos y realizar un análisis de lo obtenido a partir de las herramientas mencionadas precedentemente, se ha podido observar que las formas de respuestas se sintetizan en los siguientes gráficos:

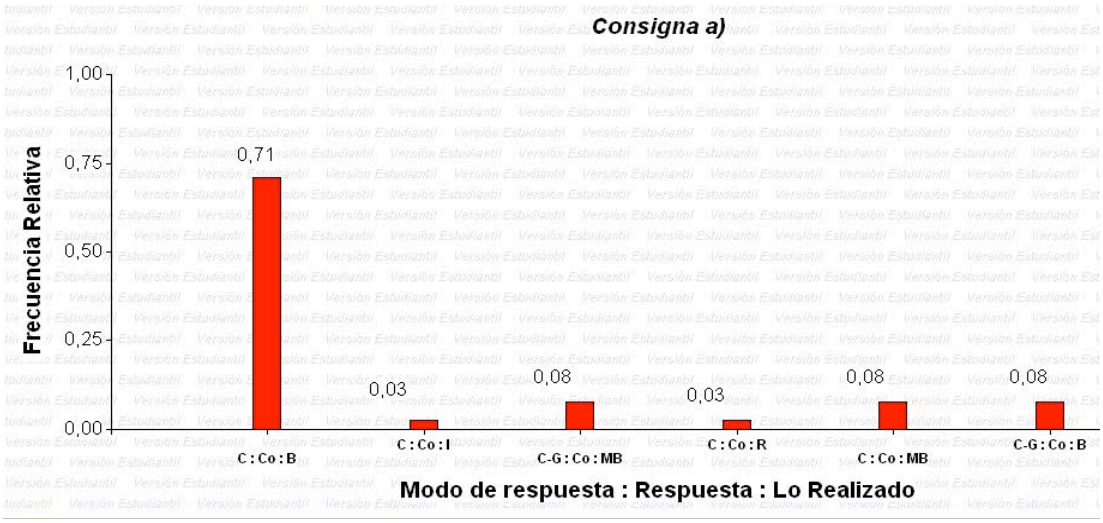


Figura 1. Frecuencias relativas de las formas de respuesta a la consigna a)

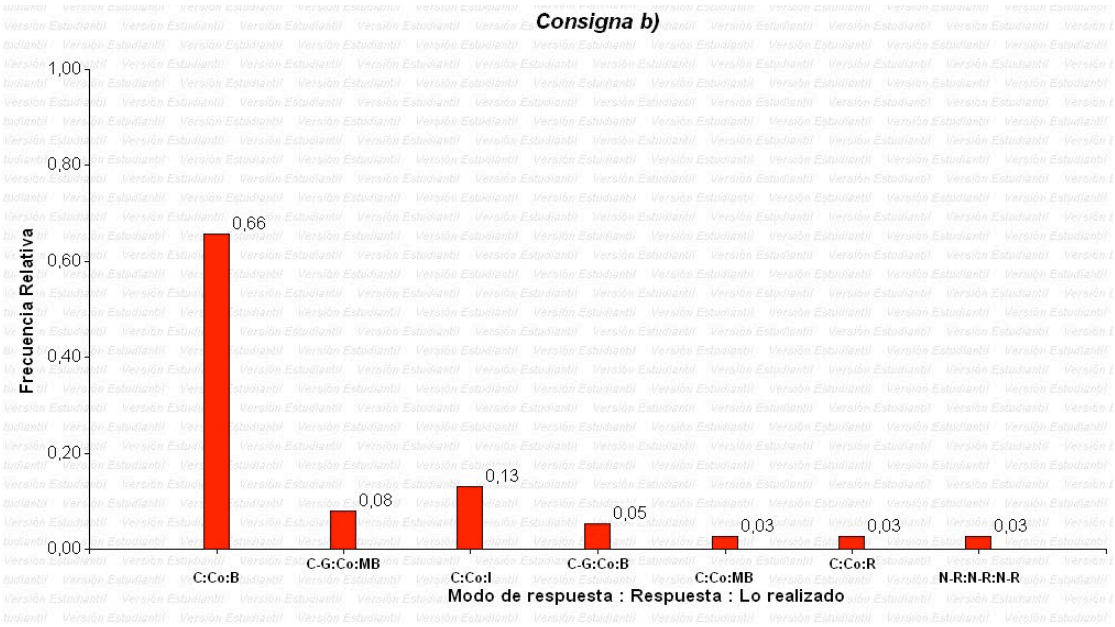


Figura 2. Frecuencias relativas de las formas de respuesta a la consigna b)

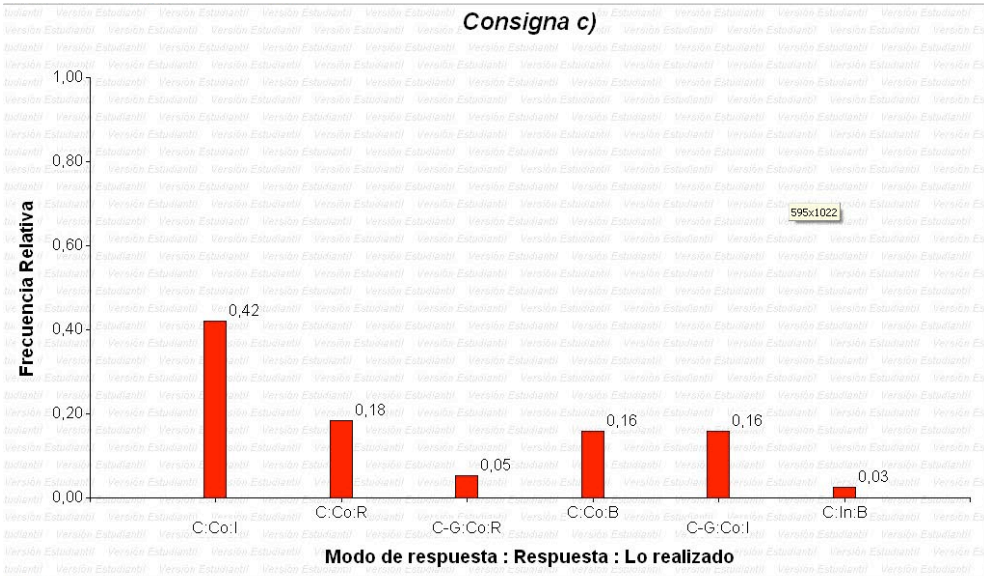


Figura 3. Frecuencias relativas de las formas de respuesta a la consigna c)

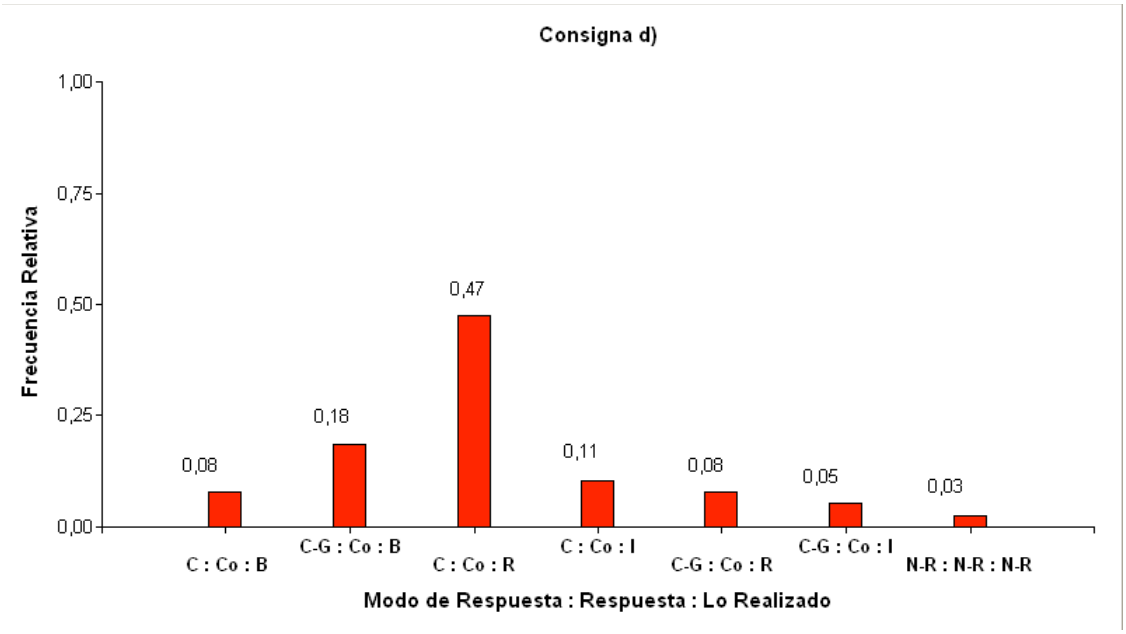


Figura 4. Frecuencias relativas de las formas de respuesta a la consigna d)

Es así que los datos recabados y analizados permitieron obtener información potente a dos efectos: por una parte evaluar la propuesta de evaluación diagnóstica y continua para años venideros; y por otra, tomarla como medio óptimo para reflexionar, delinear y perfilar la actividad docente. En este último sentido se trazaron acciones tendientes a revertir los errores conceptuales detectados.

Asimismo, cabe aclarar que en el momento de la recopilación de datos se obtuvo un gran cúmulo de información, que en algunos casos no se correspondieron con lo solicitado, lo cual permitió advertir que la consigna se prestó a más de una interpretación.

Conclusiones

Con la elaboración e implementación de los instrumentos de evaluación, se percibió el nivel de conceptualización de los estudiantes, en cuanto a determinados conceptos primordiales de la asignatura. Se pudo detectar errores relativos a los contenidos abordados, los cuales se constituían en elementos de anclaje fundamentales para el desarrollo de temas de tratamiento posterior. A tal efecto se trazaron acciones para revertirlos. El diseño de este tipo de actividades, permitió realizar una apreciación muy confiable de los saberes de los educandos y más "sustanciosa" que la proveniente de una metodología evaluatoria tradicional.

Además, se puede inferir que del análisis de los datos, se obtuvieron relaciones entre las variables presentes y detectar falencias en los instrumentos de evaluación en cuanto a los enunciados de las consignas. Es así que, a la hora de reformularlas para su uso en futuros ciclos académicos, se podrán visualizar los datos obtenidos de un modo más ágil, teniendo en cuenta que se trabaja con un gran número de alumnos.

Referencias bibliográficas

Álvarez Méndez, J. M. (2012). *Didáctica, currículo y evaluación. Ensayos sobre cuestiones didácticas*. Buenos Aires: Miño y Dávila.

Carlino, O. (2007). *Escribir, leer y aprender en la Universidad. Una introducción a la alfabetización académica*. Buenos Aires. Fondo de Cultura Económica.

Palou de Maté, C. (2003). Evaluar para enseñar y evaluar para acreditar. C. Palou de Maté (Comp.). *La enseñanza y la evaluación. Una propuesta para matemática y lengua* (pp. 19-48). Buenos Aires.GEEMA–UNCo Facultad de Cs de la Educación–CEDiCo.

Rodríguez, M. (2012).Resolución de Problemas. M. Pochulu y M. Rodríguez. (Comps). *Educación Matemática. Aportes a la Formación Docente desde distintos enfoque teóricos*.(pp.153-174). Buenos Aires: Editorial UNGS – EDUVIM.

LA EVALUACIÓN DE COMPETENCIAS EN EL DEBATE DE LA EVALUACIÓN DE LOS APRENDIZAJES UNIVERSITARIOS

Viviana Cámara
Universidad Nacional del Litoral Argentina
vcamara@fce.unl.edu.ar

Resumen. En este reporte se socializarán los resultados obtenidos del Proyecto de Investigación: *La Evaluación de competencias en el debate de la evaluación de los aprendizajes universitarios*, Secretaria de Ciencia y Técnica de la UNL en el año 2009. Respecto a evaluación de los aprendizajes se consideró la evaluación auténtica por sus características relacionadas a la evaluación por competencias. Su aplicación en Matemática Básica y Análisis Matemático de las carreras de grado de la Facultad de Ciencias Económicas de la UNL permitió describir las dificultades /obstáculos que presentan los alumnos al abordar el estudio de un tema específico de matemáticas así como las actitudes del estudiante con respecto a su propio aprendizaje. Se utilizaron portafolios, guías de observación no estructuradas y pruebas de seguimiento. Por otro lado, en cuanto a la formación docente, mediante un proyecto de extensión de interés social, se logró dar cuenta de las competencias docentes necesarias para la evaluación de competencias.

Palabras clave: competencias profesionales, evaluación de los aprendizajes, matemática

Abstract. In this report we socialize the results of the Research Project: Evaluation of competencies in the discussion of college learning assessment, Secretary of Science and Technology of the UNL in 2009. With regard to assessment of the programming is considered the true assessment by their characteristics related to the competency evaluation. Its application in Basic Mathematics and Mathematical Analysis undergraduate courses in the Faculty of Economics of the UNL allowed to describe the difficulties / obstacles that the students to approach the study of a specific topic in mathematics and attitudes student regarding their own learning. Portfolios, guides unstructured observation and follow-up tests were used. On the other hand, in terms of teacher training, an outreach project by social interest, it was possible to account for the teaching skills necessary for competency assessment

Key words: professional competencies, learning evaluation, mathematics

Introducción

El Tratado de Bolonia o también conocido como Proceso de Bolonia es el nombre que recibe el proceso iniciado a partir de la Declaración de Bolonia, acuerdo que en 1999 firmaron los ministros de educación de diversos países de Europa. Se trató de una declaración conjunta que dio inicio a un *proceso de convergencia* que tenía como objetivos facilitar el intercambio de titulados y adaptar el contenido de los estudios universitarios a las demandas sociales (De Faria Campos, 2010:18). En este contexto "las competencias" han pasado al centro de la escena en el campo educativo mediante el diseño curricular de a) toda una carrera, b) de áreas determinadas de una carrera, o bien c) actividades especialmente diseñadas basadas en competencias profesionales. El modelo curricular basado en competencias tiene como eje para su diseño los problemas que abordarán los profesionales. Se pretende así, dar respuesta al saber hacer que requiere la situación real del trabajo a través del desarrollo de competencias basadas en procesos cognitivos como así también conocimientos y acciones necesarias para toma de decisiones y la anticipación en los contextos de

incertidumbre de los actuales ámbitos socio-laborales. (Posada Álvarez, 2004; Vargas, 2001, Estévez et al, 2003).

Desde esta perspectiva en el campo educativo se han generado distintas metodologías de enseñanza y aprendizaje y en este contexto la evaluación debe entenderse no como un hecho aislado y puntual sino integrada en el propio proceso de enseñanza y aprendizaje e incorporando un seguimiento de la progresión del aprendizaje de cada alumno (Pimienta Prieto, 2008). Es así que "los teóricos" reconocen la necesidad de precisar las características más definitorias de la evaluación en concordancia con sus finalidades, elaborando entonces un breve diccionario sobre las cualidades esenciales que caracterizan la evaluación de los aprendizajes.

En este contexto un grupo de profesores del área de matemática viene participando en proyectos de investigación cuyo tema principal es el modelo curricular basado en competencias. En el año 2006, se desarrolló el proyecto denominado: Educación matemática basada en Competencias Profesionales: diseño curricular. Su producción se basó fundamentalmente en el desarrollo de a) secuencias de enseñanza basadas en la resolución de problemas de la actividad administrativa, b) la enseñanza de conceptos matemáticos a través de la modelización del proceso productivo de carne aviar, c) casos de la actividad profesional referida a la toma de decisión para la adquisición de préstamos bancarios.

Por otro lado, al realizar una propuesta metodológica basada en modelización matemática o en casos relacionados con la actividad profesional se hizo necesario abordar la problemática de la evaluación o más ciertamente, el papel de la evaluación de los aprendizajes. Un sistema de evaluación que permite no sólo valorar a las competencias adquiridas por los estudiantes sino también propicia sus desarrollos y establece en los actores involucrados (estudiantes, profesores) mecanismos de sinergia para la autocrítica, reflexión y meta análisis del proceso educativo.

En este sentido, se diseñó y se desarrolló desde 2009 hasta 2012, el proyecto: La evaluación de competencias en el debate de la evaluación de los aprendizajes universitarios. Proyecto del cual se presenta el presente reporte.

Objetivo del proyecto

En general, el debate actual acerca de la evaluación de los aprendizajes en la Universidad da cuenta que dicha problemática es una tarea pendiente. En ella intervienen cuestiones pedagógicas, epistemológicas, políticas, éticas y de poder pero además, las tradiciones instaladas históricamente están basadas y a su vez conforman sistemas de creencias - pocas veces explicitados o reconocidos- en los actores e instituciones acerca de qué es importante evaluar, para qué, porqué y al servicio de quién o quienes están operando dichas prácticas evaluativas.

En este debate acerca de las evaluaciones de aprendizaje se cuestiona, se interroga y se pone en duda las prácticas más frecuentes utilizadas en las Universidades.

Los cuestionamientos no sólo están referidos a los diferentes sistemas que se adoptan- exámenes parciales, trabajos prácticos u otras formas de producción durante el cursado; exámenes o trabajos finales por asignatura; las maneras de calificación en cuanto a promediar o no las diferentes instancias evaluativas; etc., sino que además, se debaten las argumentaciones que los docentes tienen , en el mejor de los casos, o no tienen para sostener y aplicar dichas prácticas habituales referidas a la evaluación de los aprendizajes.

Por ello, se consideró importante asumir una investigación que no sólo aporte conocimientos para modificar los actuales sistemas de evaluación sino que la misma pueda construir espacios adecuados para la reflexión autocrítica acerca de los sistemas de evaluación de competencias. En otras palabras "*Dado que evaluar es emitir un juicio sobre el valor de una cosa, saber evaluar se convierte en un asunto complejo y delicado… que nos exige una actuación profesional seria y formada, reflexiva, deliberada, intencional, sistemática y, sobre todo, que se pueda justificar; … y es que junto al 'qué' evaluar, al 'para qué' y al 'cómo', hay un 'quién': el que evalúa, y unos 'para quién' que son los destinatarios de esa actividad. Y esa condición ineludiblemente personal del proceso no puede obviarse ni enmascararse tras sofisticaciones técnicas de ningún tipo*". (Trillo Alonso, 2005).

Desde este lugar, aparece como necesidad la de analizar los procesos de evaluación a fin de rescatarlos como fuentes para la toma de decisiones respecto a la dirección de la enseñanza de la matemática.

De alguna manera, al pretender innovaciones en el terreno de la educación matemática se hace inherente la pregunta: cómo evaluar y ella se convierte en un referente desequilibrante ya que la falta de respuestas es una justificación para continuar con las técnicas de enseñanza y evaluación tradicionales.

Por lo expresado anteriormente el objetivo general del proyecto que se presenta es: Analizar los sistemas de evaluación de competencias que se aplican en Universidades que cuentan con diseños curriculares basados en competencias para determinar los alcances, limitaciones y las acciones de formación docente necesarias para su aplicabilidad en el área de matemática de la Facultad de Ciencias Económicas de la UNL.

Metodología

El diseño metodológico del proyecto responde a una investigación de corte cualitativo, analítica en cuanto al proceso de análisis y comparación, el tipo de razonamiento inductivo-deductivo. Los métodos utilizados fueron básicamente análisis de documentos, entrevistas y encuestas

semiestructuradas. Con el propósito de cumplir los objetivos de la investigación, la revisión bibliográfica y la profundización teórica se centraron en diferentes ejes. En primer lugar, al estado de situación en otras universidades con respecto al curriculum por competencias y, en segundo lugar, en la evaluación de aprendizajes.

Producción y resultados.

Evaluación auténtica. Aplicación del método portafolios.

La evaluación, cualquiera sea el paradigma que sustente al modelo, debe seguir un cierto proceso para emitir un juicio fundado que contribuya a la mejora del objeto evaluado y a la toma de decisiones en función de los aprendizajes logrados y a lograr.

Diremos que " *concebimos una competencia como la intersección entre los conocimientos, las habilidades, las destrezas y los valores, considerando un marco contextual específico. Es decir, no hablamos de competencia fuera de un marco socio-histórico determinado"* (Pimienta Prieto, 2008:15).

La evaluación auténtica se relaciona con el currículum por competencias y se centra en las competencias que se pretenden desarrollar en contextos significativos a través de la acción pedagógica y forma parte del proceso de enseñanza y aprendizaje (Barberá, 2005).

Bajo esta perspectiva se avanzó diseñando diferentes actividades que tuvieron impacto en las cátedras de matemática de la Facultad, modificando su metodología de enseñanza y por ende su evaluación. Estas estrategias evaluativas responden a las características de la evaluación auténtica.

El plan de estudios de la facultad de ciencias económicas de la UNL para las carreras de grado está compuesto por cinco asignaturas del área de matemática, dos de las cuales, matemática Básica y Análisis Matemático están ubicadas en el primer semestre y en el segundo semestre, respectivamente, del primer año.

En matemática básica se implementó una prueba piloto en una comisión aplicando el método de portafolios. En este sentido se diseñó el portafolio con el fin de obtener *evidencias y vivencias* de un grupo de estudiantes de la cátedra de Matemática Básica.

La competencia seleccionada para evaluar fue: La capacidad para interpretar los parámetros de las funciones lineal $y = m x + b$ y exponencial: $f(x) = \beta e^{\alpha x}$. A partir de ella se definieron los indicadores de logro para luego consecuentemente generar las actividades contenidas en los folios del portafolio. Cada folio constaba de dos partes, a saber: La primera referida al contenido conceptual y procedimental de la asignatura y la segunda contenía una serie de interrogantes que tendían a lograr una reflexión del estudiante sobre su propio proceso de aprendizaje y de factores emocionales involucrados. Por ejemplo: ¿qué dificultades se te presentaron en la resolución del

problema? ¿Tuviste necesidad de consultar la teoría pertinente?, ¿qué bibliografía consultaste? ¿Realizaste solo la actividad o con ayuda externa? ¿Qué conocimientos previos tuviste necesidad de utilizar? ¿Consideras que aprendiste correctamente el tema?

Esta experiencia tuvo muy buena adhesión por parte de los estudiantes (90% entregaron el portafolio en forma completa). Se pudo detectar ciertas dificultades en la valoración del portafolio pudiéndose sintetizar en:

a) Los estudiantes no pudieron manifestar en forma escrita su problema para realizar la actividad matemática, pero sí pueden hacerlo verbalmente, b)Se notó una dependencia absoluta del profesor, c) Existe una ausencia de reflexión sobre la necesidad de aprender la teoría para abordar la práctica, d) Existe una falta de manejo de bibliografía. Su única referencia es Internet.

Sin embargo, los logros más importantes observados fueron:

a)Un incremento significativo en la participación de los estudiantes en la clase y en las actividades realizadas, b)Una importante avance en auto-reflexión sobre sus propias dificultades, c) Un reconocimiento de sus debilidades y fortalezas.

Surge además como reflexión grupal muy fuertemente la necesidad de asumir la propia responsabilidad de aprender, y de considerar, por parte de los docentes, el impacto que la incorporación de las tecnologías tiene en los estudiantes.

Modificación del sistema de evaluación de la cátedra Análisis Matemático

Desde la perspectiva de la evaluación auténtica asumimos un cambio en los criterios evaluativos en el proceso de enseñanza y aprendizaje en la cátedra de Análisis Matemático de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional del Litoral.

En la construcción de la propuesta evaluativa nos basamos en estas dificultades y en una concepción de estudiante como sujeto activo en permanente interacción con su medio, teniendo una "visión del aprendizaje como un proceso espiralado en permanente construcción; entendiendo que se aprende entonces no a partir de certezas impuestas, sino de dudas, cuestionamientos, resolución de obstáculos y dificultades, de interpretación conceptual". (Sanjurjo y Vera, 2006:138).

Se propuso una metodología de evaluación continua y procesual con la finalidad de aportar al estudiante información acerca de "sus dificultades" y "logros" en la resolución de cuestiones específicas de la asignatura. Para la corrección de los ejercicios el profesor disponía de una planilla que contenía los indicadores de logro correspondientes a cada actividad. De esta manera se tuvo un control acerca de las competencias logradas.

Se implementaron tres pruebas de seguimiento antes del parcial de la asignatura. Las mismas consistían en ejercicios de interpretación de textos, lenguaje coloquial y simbólico, integración de contenidos nuevos con los viejos, interpretación gráfica, etc.

La tercera prueba de seguimiento se diferenciaba de las anteriores porque en ella se enfatizó el trabajo en equipo en el cual la consigna era realizar en forma extra áulico el estudio completo de una función, el cual debían defender en forma oral y entregar el informe escrito. Esto les permitió a los alumnos utilizar las herramientas tecnológicas tanto para verificar los resultados obtenidos como para presentar el desarrollo del trabajo en forma prolija y ordenada. A modo de incluir un ingrediente motivador a los alumnos que aprobaban las tres pruebas se les asignaba 6/100 puntos extras a la nota del parcial.

La única intervención diferente fue la incorporación de la evaluación continua por lo cual se puede afirmar que la metodología empleada resultó satisfactoria para los docentes de la cátedra. Además, se observaron algunos aspectos que se pueden considerar como positivos, tales como:

a) el trabajo grupal fuera del aula y su respectiva defensa oral, resultó un valioso instrumento de aprendizaje ya que, la exposición es una oportunidad para comunicarnos; se caracteriza por decir a otros de manera clara y sin temor nuestras ideas y opiniones, así como escuchar y atender las de los demás. El estudiante al prepararse para la exposición, además de resolver el problema correctamente, debe saber organizar las ideas que se van a decir, practicar el uso adecuado del lenguaje, manejar los tiempos, seleccionar recursos de apoyo, revisar las fuentes, entre otras.

b) la corrección de las pruebas de seguimiento posibilitó a los estudiantes subsanar dificultades/obstáculos que por sí mismos no pueden detectar. Por ejemplo: el lenguaje matemático utilizado, la redacción de las justificaciones, el uso de contraejemplos, el uso de ejemplos y el uso de las definiciones/propiedades/teoremas propios de la asignatura.

c) se enfatizaron roles en la función docente, distinguiendo que el docente no sólo es un transmisor de conocimiento sino que también es capaz de escuchar e interpretar al alumno, sugerir resoluciones sin desviar el pensamiento del estudiante, la capacidad de observar.

Proyecto de extensión de interés social

Se diseñó y desarrolló un proyecto de extensión, aprobado por la Secretaría de Extensión de la Universidad, participaron docentes de escuelas de enseñanza media y de institutos de formación docente de la Pcia. de Santa Fe. El propósito principal del proyecto fue:

Desarrollar propuestas de aprendizaje de conceptos matemáticos que contribuyan a favorecer la integración de contenidos y el desarrollo de niveles cognitivos superiores atravesado por las

transformaciones que las tecnologías de la información y la comunicación aportan a la educación matemática.

Cabe aclarar que "entendemos por estrategias de integración en la enseñanza aquellas actuaciones o explicaciones de los docentes o propuestas de actividades para los estudiantes, dirigidas a la conformación de un todo o una estructura o de relación de sentido entre temas, conceptos o campos" (Litwin, 2001).

Este proyecto se desarrolló en dos fases, la primera puso el foco en la formación de profesores incorporando las tecnologías de la información y la segunda fase consistió en el diseño y puesta en aula de una propuesta didáctica que incorporó los elementos constitutivos del proyecto, integración de contenidos y tecnologías de la información.

Formación de Recursos Humanos

Tesis Doctoral

- En el año 2011 fue defendida la tesis doctoral en Educación de la profesora Susana Marcipar Katz, denominada: Evaluation of the Perceptions on Educational and Institutional Quality: the Cornerstone for Decision-making, (Evaluación de las percepciones sobre calidad educativa e institucional: insumo para la toma de decisiones), *ATLANTIC INTERNATIONAL UNIVERSITY HONOLULU, HAWAI.*

Tesis de Maestría

- En el año 2012, fue defendida la tesis de maestría de la profesora Claudia Zanabria: Evaluación de los Aprendizajes: Prácticas y Creencias de los docentes del área matemática de la FCE de la UNL.

El objetivo general de dicha tesis fue: Interpretar las evaluaciones de los aprendizajes en el área de matemática, del ciclo de formación básica común de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional del Litoral, desde las perspectivas docentes para conocer e identificar los sustentos teóricos en que se basan sus prácticas evaluativas.

Se trata de una investigación evaluativa y educativa. De acuerdo a las estrategias implementadas para el desarrollo de la misma, la metodología es fundamentalmente interpretativa con corte narrativo, pues estas modalidades de indagación pretenden proporcionar descripciones que colaboren en la comprensión de cómo transcurre el proceso de constitución y recreación de sentidos de las propias acciones por parte de quien las llevan a cabo en diferentes escenarios sociales, sobre la base de la interpretación de sus saberes, convicciones, creencias, motivaciones, valoraciones, intenciones subjetivas e interacciones con los otro.

Con respecto a los resultados, en término generales, la palabra de las docentes encuestadas expresadas mediante relatos, opiniones, diseño y valoración de actividades, ha evidenciado que estos expertos conciben la matemática de acuerdo a visiones distintas. Esta situación provoca que se focalice su enseñanza y aprendizaje en un aspecto u otro, como en el lenguaje matemático, en el pensamiento, en los conceptos, en los procedimientos o en la aplicación de los conceptos a situaciones contextuales.

Pero si bien en la trastienda del aula las vivencias son distintas, se ha develado que en general, las docentes participantes de esta investigación, asumen la evaluación como un "ritual" en el que se efectiviza lo establecido en el programa de estudio: Implementar exámenes en los que se pretende "constatar" el aprendizaje de conceptos fundamentales para lograr la acreditación.

- En el año 2011 fue presentado el Plan de tesis de maestría de la prof. Belquis Alaniz, "Las capacidades argumentativas de los estudiantes de la facultad de ciencias económicas, en matemática financiera". El cual está siendo desarrollado actualmente.

Esta tesis se basa en el supuesto general: "Los alumnos de las carreras de Contador Público Nacional y Licenciado en Administración de la Facultad de Ciencias Económicas de la UNL tienen diferentes capacidades argumentativas para sustentar la toma de decisiones en aspectos financieros, metodológicos y técnicos"

Siendo el objeto de estudio "las capacidades argumentativas de los estudiantes de la FCE, inscriptos en las materias correspondientes al 4° año de las carreras de CPN y LA" el trabajo de investigación será fundamentalmente del tipo descriptivo desde un punto de vista sincrónico. Se trata de una investigación no experimental, que puede incluirse en las investigaciones transeccionales o transversales. Se describirán las variables y analizarán su incidencia e interrelación en un momento dado. El diseño de investigación que no resultará exclusivamente cualitativo. Teniendo en cuenta la legitimidad de los hallazgos cualitativos, se recurrirá a la integración de métodos.

La investigación será analítica en cuanto al proceso de análisis y comparación, el tipo de razonamiento inductivo-deductivo. El razonamiento inductivo estará presente desde el inicio del proyecto, donde las observaciones de casos particulares pueden llevar a enunciar ideas que a su vez guiarán la subsecuente búsqueda de datos.

Esta investigación puede incluirse dentro de la categoría de los estudios centrados en el lenguaje, puesto que incluye un análisis de contenido cualitativo y el análisis del discurso, ambos interesados en los aspectos de la comunicación.

En un principio, el estudio se realizará en alumnos que hayan cursado la materia, en alumnos que la estén cursando, todos pertenecientes al 4° año de cursado y en alumnos egresados de las respectivas carreras, de la FCE. de la UNL, durante un cuatrimestre.

- En el año 2011 fue presentado el Plan de tesis de maestría de la prof. Marta Nardoni, titulada: La comprensión que tienen los alumnos referida a números racionales al terminar la escuela secundaria, desarrollándose actualmente. El propósito de este trabajo es valorar la comprensión que tienen los estudiantes referida a los números racionales al finalizar la escuela secundaria, y que inician estudios terciarios o universitarios.

El trabajo responde al siguiente objetivo general: Valorar la comprensión que han alcanzado los estudiantes, sobre números racionales, al finalizar la escuela secundaria e iniciar estudios terciarios o universitarios.

La investigación es de naturaleza diagnóstico-descriptiva y cualitativa, de corte etnográfico y hermenéutico, y será desarrollada bajo el Enfoque Ontológico y Semiótico del conocimiento e instrucción matemática (EOS) que propone Godino (2000, 2002) y Godino, Batanero y Font (2007), como línea teórica y metodológica de la Didáctica de la Matemática.

Conclusiones

En principio, se destaca que esta investigación aportó evidencias que la evaluación de aprendizajes, específicamente, la evaluación auténtica, es una alternativa didáctica que permite no sólo valorar a las competencias adquiridas por los estudiantes sino también propicia sus desarrollos y establece en los actores involucrados (alumnos, profesores) mecanismos de sinergia para la autocrítica, reflexión y meta análisis del proceso educativo.

En relación a la generación de los conocimientos basados en las interpretaciones, creencias y argumentaciones de los docentes respecto a la evaluación de los aprendizajes cabe señalar que la evolución de la investigación ha logrado a los docentes integrantes del equipo de investigación, transitar la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación desde una concepción tradicional hacia una concepción auténtica y significativa. Es decir, ha permitido trascender la concepción de la evaluación como "rendimiento y acreditación" para acercarse a una concepción de "evaluación formativa y continua" y analizar las perspectivas de su aplicación en cátedras de matemática. Este posicionamiento docente dio cuenta de la necesidad de generar instancias de capacitación y perfeccionamiento a docentes "in service" como lo fue, el proyecto de extensión de interés social, descrito anteriormente.

Es posible señalar que, el impacto del proyecto de investigación se ha dirigido en las siguientes direcciones, a saber: a) modificación del sistema de evaluación de las cátedras del área de

matemática de la Facultad, b) formación en investigación de los integrantes del proyecto y c) perfeccionamiento docente ofrecido a profesores de las escuelas de nivel medio y de los Institutos de Formación Docente del área de incumbencia de la Universidad Nacional del Litoral mediante proyectos de extensión.

Finalmente, cabe hacer referencia a algunos interrogantes que surgieron del proyecto, ¿De qué manera deberían incorporarse las TICs para facilitar la enseñanza dentro de un dispositivo articulado que promueva modalidades educativas que sean alternativas o complementarias a las actuales? ¿Cómo integrar el aprendizaje a las problemáticas del contexto para mejorar la comprensión disciplinar? ¿En la selección de las modalidades de evaluación de los aprendizajes ¿cuáles son los criterios que se aplican? ¿qué funciones y fines se asigna a dichas evaluaciones?¿cuáles son los fundamentos en los que los profesores se basan al momento de desempeñar la función acreditadora de los aprendizajes de los estudiantes? ¿Cuáles son las características de las denominadas metodologías activas y qué posibilidades ofrecen en la enseñanza de la matemática para integrar disciplina- contextos-tecnologías?

Referencias bibliográficas

Barbera, E. (2005). *La evaluación de competencias complejas: la práctica del portafolio*. Consultado 10/11/2009 de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=35603110.

De Faria Campos, E. (2010). La importancia de las competencias en la educación superior. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática* 5 (6) 13-37.

Estévez Henniger, Acedo, I y otros (2003). La práctica curricular de un Modelo basado en competencias laborales para la educación superior de adultos. *Revista Electrónica de investigación educativa*, 5(1).

Godino, J. D. (2000). *Significado y comprensión en matemáticas*. *Uno 25*, 77-87.

Godino, J. D. (2002). *Un enfoque ontológico semiótico de la cognición matemática recherches en didactique des mathématiques 22(2/3)*, 237-284.

Godino, J.D., Batanero, C. & Font, V. (2007). *The onto-semiotic approach to research in mathematics education*. *Zentralblatt für didaktik der mathematik 39(1-2)*, 127-135.

Litwin, E. (2001*). La integración: una estrategia de enseñanza para favorecer mejores reflexiones en la enseñanza superior* acceso 04/2011 en http://www.litwin.com.ar/site/articulos1.asp

Pimienta Prieto, J. (2008). *Evaluación de los aprendizajes. Un enfoque basado en competencias.* México. Pearson educación. Primera edición.

Posada Álvarez, R. (2004). *Formación superior basada en competencias, interdisciplinariedad y trabajo autónomo del estudiante.* Consultado 12/5/2008 en

http://www.rieoei.org/deloslectores/648posada.pdf

Sanjurjo, L. y Vera, M.T (2006). *Aprendizaje significativo y enseñanza en los niveles medio y superior*. Rosario: Homo sapiens ediciones.

Trillo Alonso (2005).competencias docentes y evaluación auténtica: ¿falla el protagonista?**.** *Colección de cuadernillos de actualización para pensar la enseñanza universitaria.* Año 1. N°3, universidad nacional de río cuarto.

Vargas, F. (2001). *Sistemas educativos basados en competencia como estrategia para la formación continua de los trabajadores*. Consultado 03/2009 en

http://www.ilo.org/public/spanish/region/ampro/cinterfor/temas/complab/doc/pre_cint/foroeyt/

TRANSVERSALIDAD DEL CONCEPTO DE INDEPENDENCIA LINEAL EN ALGEBRA LINEAL, ANÁLISIS NUMÉRICO Y ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Elisa S. Oliva, María I. Ciancio y Susana B. Ruiz
Universidad Nacional de San Juan Argentina
eoliva@iinfo.unsj.edu.ar, elisaoliva65@gmail.com, miciancio@hotmail.com

Resumen. Anomalías entre enseñanza y aprendizaje se evidencian en falta de articulación de conceptos. Nuestra propuesta consiste en una secuencia didáctica, para establecer un andamiaje para articular el concepto de Independencia Lineal, definido en Algebra y que tiene ramificaciones en: ecuaciones diferenciales, polinomios de interpolación, etc. Para el aprendizaje y resignificación del concepto, se trabajó con alumnos de las Lic. en Geofísica y en Astronomía de la UNSJ, en : Algebra Lineal - Análisis Numérico- Análisis Matemático II. El equipo que participó, valoró la experiencia como exitosa por la cantidad de contenidos matemáticos que llegaron a integrar los alumnos.

Palabras clave: independencia lineal, transversalidad, articulación

Abstract. The anomalies between teaching and learning are evident in the lack of articulation of concepts. Our proposal consists of a didactic sequence, to set up scaffolding to articulate the concept of linear independence, defined in Algebra and with branches in: differential equations, polynomials of interpolation, etc. For the learning and the resignification of the concept, we worked with students from the LIC. in Geophysics and Astronomy of UNSJ, in : Linear Algebra - Numerical Analysis - Mathematical Analysis II. The team who participated, assessed the success of the experience in the amount of mathematical content that the students managed to integrate

Key words: linear independence, transversality,articulation

Introducción

La falta de articulación de conceptos son situaciones de anomalía entre las fases de enseñanza y de aprendizaje. La presencia de un pensamiento sistémico en la adquisición de conceptos desempeña un papel importante en un profesional universitario. El logro de la capacidad de síntesis en el alumno, se evidencia en que alcanza una organización de pensamiento, que le permite establecer conexiones, reflexionar de manera general sobre conceptos que forman un todo coherente a los que les puede aplicar procedimientos para resolver problemas; esta forma integradora de pensar está relacionada con el pensamiento teórico (Sierpinska, 2000) y con el pensamiento sistémico (Sierpinska et al., 2002).

Nuestra propuesta consiste en una secuencia didáctica diseñada en tres bloques para establecer un andamiaje para la articulación del concepto matemático de Independencia Lineal. Este concepto definido primariamente en algebra lineal, tiene ramificaciones en otros contenidos matemáticos como: bases de un espacio vectorial, solución de ecuaciones diferenciales, determinación de polinomios de interpolación y ajuste de datos, análisis de componentes principales en estadística, aplicaciones en economía e ingeniería, etc. Se busca potenciar la vinculación transversal de las cátedras, por el aprendizaje y resignificación de este concepto, se propone para ello el trabajo con

los alumnos en los bloques: Algebra Lineal - Análisis y Cálculo Numérico- Análisis Matemático II , de las Lic. en Geofísica y Lic. en Astronomía de la Fac. de Cs. Exactas Físicas y Naturales- UNSJ .

Implicadas en este proceso las cátedras mencionadas implementaron fomentar el análisis algebraico y la visualización gráfica como fuente de conocimiento, elaborando un programa de prácticas con el uso de computadora, basada en los siguientes objetivos:

- Participación activa del alumno en el conocimiento del concepto teórico de Independencia Lineal (en distintos Espacios Vectoriales) y de los comandos del software para la discusión analítica y solución a problemas planteados.
- Intervención dinámica del estudiante en la búsqueda de bases gráficas del software que den solución gráfica a problemas planteados. Integración de conceptos del área matemática y computación.
- Generar, con ayuda de un enfoque geométrico, una superación de la dicotomía entre teoría y práctica.
- Iniciar a los alumnos en la experimentación, animarlos a realizar investigación y a producir respuestas.

Esta nueva formación que reciben nuestros alumnos, está basada en la idea de que saber matemática, es hacer matemática, mediante la resolución de problemas, el razonamiento, la comunicación, las conexiones, la investigación y la exploración.

Metodología

Las competencias matemáticas abren puertas hacia futuros productivos, por ello el que entienda y pueda usar matemática tendrá mejores oportunidades en su futuro. En este sentido, el Consejo Nacional de Profesores de Matemática de los Estados Unidos (NCTM, 2000) cuestiona la noción que las matemáticas son para un pequeño y selecto grupo de personas. Por el contrario, todos necesitan entender matemáticas y los estudiantes deben tener la oportunidad y la ayuda necesaria para aprender contenidos matemáticos que sean relevantes con profundidad y comprensión.

La Educación Matemática plantea entre sus objetivos, que los estudiantes logren articular temas matemáticos, de manera que puedan formar conceptos más complejos. Uno de los beneficios de adquirir esta cualidad de articular saberes, es que permite resolver diversos problemas matemáticos presentados por el profesor o inclusive problemas de la vida cotidiana, debido a que lo incentiva para ir aprendiendo ideas matemáticas cada vez más complejas a medida que avanza en sus estudios (Pérez Pérez, 2007).

Cuando los estudiantes pueden conectar ideas matemáticas, su comprensión es más profunda y duradera. Pueden ver conexiones matemáticas en la rica interacción entre los temas matemáticos, en contextos que relacionan las matemáticas con otras disciplinas (NCTM, 2000).

El sistema educativo no puede mantenerse al margen de la multitudinaria explosión de la aplicación de las nuevas tecnologías en muchos aspectos de la vida cotidiana, precisa incorporar el manejo de informática como uno de sus objetivos, para obtener el conocimiento.

El progresivo aumento de memoria virtual, permite el acceso a paquetes de cálculo simbólico, que en otra época sólo estaban disponibles en grandes centros de investigación, que no requieren costosos aprendizajes. Esto estimula el uso didáctico de las computadoras en el tratamiento de los temas habituales de Matemática, permitiendo a los alumnos dejar de ser pasivos espectadores en las clases, para convertirse en partícipes activos, generando su propia formación.

El presente trabajo consiste en una secuencia didáctica, que involucró un trabajo conjunto de las cátedras de Algebra Lineal - Análisis y Cálculo Numérico- Análisis Matemático II , respecto del contenido de INDEPENDENCIA LINEAL, con el objetivo de que los alumnos lograran una estructura superior de pensamiento, ensamblando las piezas en donde este contenido está presente en las tres asignaturas, para lograr armar un rompecabezas de saberes matemáticos.

La primera asignatura, que se abordó fue Algebra Lineal, porque es primariamente definido allí y trabajado en distinto tipo de espacios vectoriales y tiene ramificaciones en otros contenidos matemáticos como: bases de un espacio vectorial.

Se toma como punto de partida la definición de los conceptos de Independencia Lineal de vectores y de Dependencia Lineal, su posterior análisis algebraico para distintos conjuntos de vectores y a su vez variando el espacio vectorial considerado. Se incorpora la perspectiva geométrica del concepto de independencia lineal en los espacios vectoriales R^2 y R^3.

Posteriormente se desafía al alumno a una verificación algebraica rutinaria (Grossman, 1999) , (Lay, 2007) y a que presente sus propios ejemplos algebraicos y a que integre através de la visualización gráfica de ejemplos concretos de conjuntos de vectores en R^2 o R^3 , cumpliendo cada uno alguna consigna prefijada, por el docente.

La propuesta de anexar al trabajo simbólico-algebraico, la obtención de conclusiones gráficas, es porque al alumno le cuesta materializar en ejemplos concretos el concepto en estudio. Contando con un software científico con excelente capacidad gráfica, numérica y simbólica, se alcanza el concepto observándolo desde distintas interpretaciones geométricas, por eso se da un fuerte énfasis a visualizar ideas, sobre una verificación algebraica rutinaria.

En la asignatura de: Análisis y Cálculo Numérico, se trabaja sobre el planteo "Cuando se tiene un número finito de mediciones sobre un fenómeno que se está investigando y se quiere extraer información de esos datos, reconstruyendo el fenómeno en su totalidad (en un "dominio continuo"), con la función que represente "lo mejor posible" los datos: Curvas de Ajuste y Polinomio de Interpolación" .

Se abordó el concepto del Wronskiano, pues su aplicación permite elegir funciones de ajuste (monomios, funciones trigonométricas, etc.) (Nakamura, 1997) que cumpliendo el concepto de Independencia Lineal, ayudan a decidir la aplicación de Polinomios de Interpolación y/o Polinomios de Ajuste, según las características del conjunto de datos a trabajar.

Posteriormente se desafía al alumno a que presente sus propios ejemplos algebraicos, cumpliendo el conjunto de mediciones alguna consigna prefijada, por el docente, siempre realizando através del uso del Wronskiano la verificación de la Independencia Lineal de las funciones usadas, para responder al planteo algebraico.

Luego en la asignatura de: Análisis Matemático II, se abordó la propuesta de hallar la Solución general de ecuación diferencial lineal homogénea EDOLH de orden *n* a coeficientes constantes. Se determinan soluciones particulares para este tipo de ecuaciones de orden 2,3y 4 , se verifica con wronskiano si son Linealmente Independientes y en caso afirmativo se construye la Solución General, realizando una combinación lineal de las n soluciones particulares que contiene n constantes arbitrarias (Stewart,1998). El Wronskiano permite al alumno realizar la verificación de Independencia Lineal de las soluciones particulares, pues las representaciones gráficas de las soluciones particulares no proporciona información suficiente sobre este concepto.

Posteriormente se desafía al estudiante a que presente ejemplos cumpliendo la ecuación característica de la EDOLH de orden n con alguna consigna prefijada, verificación de la independencia lineal de las soluciones particulares, y comprobar que :"El conjunto de soluciones de una EDOLH de orden n es un espacio vectorial de dimensión n"

Modelo de guías propuestas a los alumnos en la asignatura Algebra Lineal

Ej. 1.- Analice cuales de los siguientes conjuntos de vectores son L.I:

a) En $\boldsymbol{R}^2$: $(1,2);(-1,0);(1,-1)$

b) En $\boldsymbol{R}^3$: $(3,1,1);(2,-1,5)$

c) En $\boldsymbol{R}^3$: (1,0,-1) ; (1,2,1) ; (0,-3,2)

d) En $\boldsymbol{P}_2$: : $1-x\,;3-x^2\,;x$

e) En $\boldsymbol{M}_{22}$: $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

f) En $\boldsymbol{M}_{22}$: $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix};\begin{bmatrix}4 & -1\\ 3 & 0\end{bmatrix}$

Ej. 2.- Los siguientes conjuntos de vectores son LD, justifique algebraicamente:

a) $\boldsymbol{R^2}$: $(1,1);(2,2)$

b) $\boldsymbol{R^2}$: $(1,1);(2,2);(5,5);(0,-1)$

c) $\boldsymbol{R^3}$: $(1,1,2);(2,-1,-5);(1,-1,-4);(2,1,1)$

d) $\boldsymbol{P_2}$: $1-x\,;3-x^2\,;x;-5x+7-2x^2$

e) $\boldsymbol{M_{22}}$: $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix};\begin{bmatrix}4 & -1\\ 3 & 0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}-2 & 5\\ 6 & 0\end{bmatrix}$

Ej.3.- Responda a las siguientes condiciones:

- Determine el valor de la constante "**c**", para que los vectores{ (8,2,4) ; (0,-1,**c**) ; (1.5,0.5,0) } sean Linealmente Independientes

❖ Analice para que valores de "c" : $\left\{\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 3 & 5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & -c\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 1 & 6\end{bmatrix}\right\}$ son L.I. en M_{22}.

❖ Dados los vectores (8,2,4) ; (0,1,k) ; $(\frac{3}{2},\frac{1}{2},0)$. Determine el conjunto de valores para la constante "k", para que los vectores sean Linealmente Independientes

❖ Dados los vectores $1-x\,;3-kx^2\,;\frac{k}{2}x$ .Determine el conjunto de valores para la constante "k", para que los vectores sean Linealmente Independientes .

❖ Analice para que valores de "c" : $\left\{\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 3 & c\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & -c^2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 1 & 6\end{bmatrix}\right\}$ son L.I. en M_{22}.

Ej.4- Indicar si los conjuntos de vectores de los Gráficos 1, 2, 3, 4 y 5 de R^2, son o no Linealmente Independientes.

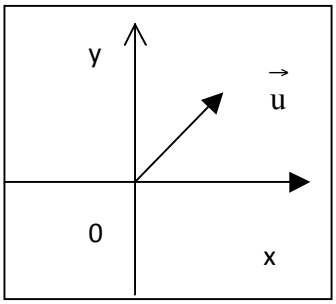


Gráfico 1

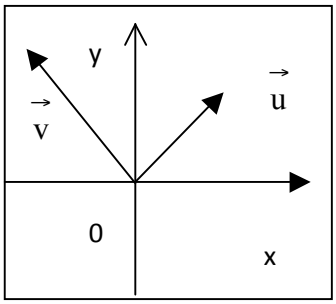


Gráfico 2

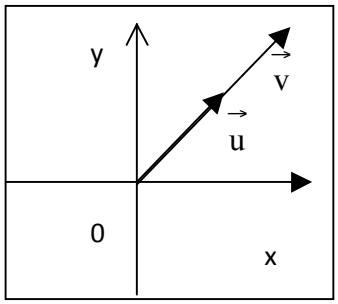


Gráfico 3

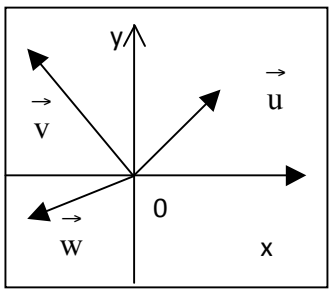


Gráfico 4

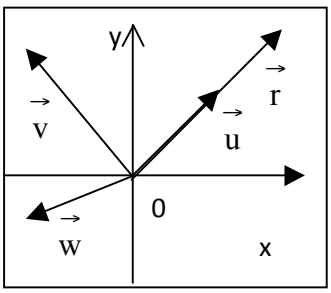


Gráfico 5

Ej.5- Dar un ejemplo de un conjunto en R^2, de seis vectores que no sea linealmente independiente.

Ej.6- Indicar si los conjuntos de vectores de los Gráficos 1, 2, 3, y 4 de R^3, son o no Linealmente Independientes.

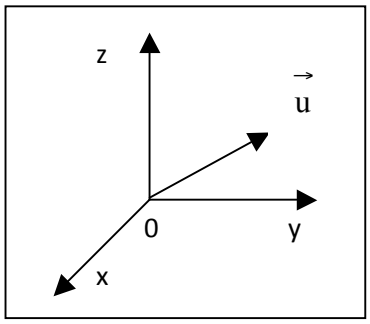


Gráfico 1

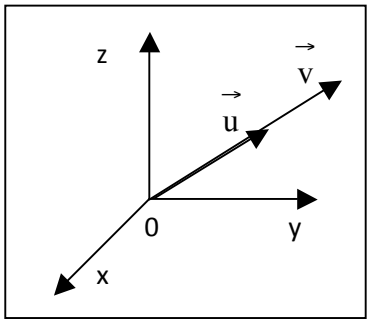


Gráfico 2

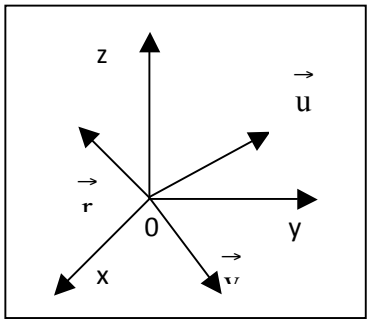


Gráfico 3

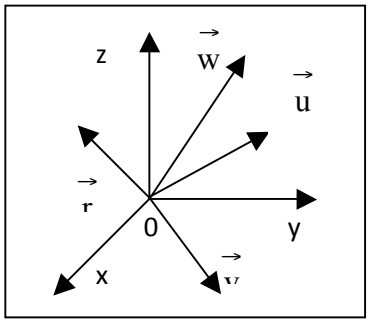


Gráfico 4

Ej.7- Para cada una de las siguientes situaciones, dar un ejemplo de un conjunto en R^3, talque:

- Esté formado por 2 vectores y sea Linealmente independiente.
- Esté formado por 3 vectores y no sea linealmente independiente.
- Esté formado por 5 vectores y sea Linealmente Depeendiente.

Ej.8-Demostrar las siguientes situaciones:

- En un espacio vectorial V, se sabe que los vectores $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, son Linealmente Inde-

pendientes. Demuestre que los vectores $\{\vec{c}+\vec{b}-3\vec{a},\ \vec{c}-3\vec{b}+\vec{a},\ \vec{b}-\vec{a}\}$son Lineal-

mente Dependientes.

- En un espacio vectorial V, se sabe que los vectores $\{\vec{x},\ \vec{y},\vec{w}\}$, son Linealmente Independientes. Demuestre que los vectores $\{\vec{w}-\vec{x},\ c\vec{w}+\vec{y},\ c\vec{y}+\vec{x}+3\vec{w}\}$ con c constante , $c\neq 0$, $c\neq\pm 2$, son Linealmente Independientes

Conclusiones

La construcción del concepto algebraico de Independencia Lineal no resulta sencillo, cuando se cambia del Espacio Vectorial R^2, R^3, al de Polinomios o Soluciones de una EDOLH de orden n, debido a las características propias del álgebra. En la interpretación de las gráficas de la independencia lineal de funciones polinómicas, o Soluciones de una EDOLH de orden n, algunos estudiantes intentan transferir conocimientos adquiridos en el cálculo y geometría analítica, realizando incorrectamente intersecciones entre curvas, etc.

El desarrollo de la capacidad para determinar cuál es la herramienta más adecuada según la naturaleza del Espacio Vectorial para analizar el concepto en estudio (algebraico, exploración gráfica y/o una combinación de visualización geométrica con rigurosidad simbólica) demuestra el dominio transversal del mismo.

La puesta en práctica de las actividades anteriores fue exitosa, pues si bien es una actividad de este grupo de docentes realizada con el mismo conjunto de alumnos a lo largo de dos años. El equipo de estudiantes que intervino en la experiencia valoró la cantidad de elementos matemáticos que llegaron a discutir, pues al término de la experiencia los participantes sienten satisfacción por la actividad matemática desarrollada.

Referencias bibliográficas

Grossman, S. (1999). *Algebra Lineal*. Editorial Mc Graw Hill

Lay, D. (2007). *Algebra Lineal y sus aplicaciones*. México:Pearson Addison Wesley

Nakamura, S. (1997). *Análisis Numérico y visualización gráfica con Matlab*. México: Prentice-Hall

NCTM. (2000). *Resumen Ejecutivo de Principios y Estándares de la Educación Matemática*. Extraído el 14/09/2013 de http://www.cimm.ucr.ac.cr/ciaem/archivos/RE_NCTM.pdf

Pérez Pérez, I. (2007). *Articulación de saberes matemáticos y modelos conceptuales.* Tesis de Maestría no publicada. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. México.

Sierpinska, A. (2000). On Some Aspects of Students'thinking in Linear Algebra En J. L. Dorier, (Eds.), *The Teaching of Linear Algebra in Question* (pp. 209-246). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Sierpinska, A., Nnadozie, A. y Oktaç, A. (2002). *A Study of Relationships between theoretical thinking and high achievement in Linear Algebra*. Montreal, Canada: Concordia University.

Stewart, J. (1998). *Cálculo*. México: Editorial Thomson

HACIA UN MODELO TEÓRICO RESPECTO A LA ENSEÑANZA DE LAS CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS QUE FAVOREZCA EL TRABAJO HEURÍSTICO Y LAS PRÁCTICAS ARGUMENTATIVAS

Liliana Siñeriz, Gregoria Guillén y Mª de la Trinidad Quijano
Universidad Nacional del Comahue — Argentina
Universitat de València — España
lsineriz@gmail.com, gregoria.guillen@uv.es, trinidadquijano@gmail.com

Resumen. Presentamos una síntesis de un proyecto, actualmente en desarrollo, centrado en la enseñanza de las construcciones geométricas. En el estudio se conjugan dos líneas de investigación, desde donde se indagan elementos relativos a la enseñanza de resolución de problemas y de contenidos geométricos, con el fin de precisar competencias específicas que se ponen en juego al abordar esta clase de problemas, que pueden tomarse como referente para diseñar y/o analizar planes de formación de profesores de distintos niveles educativos. Damos cuenta de los resultados alcanzados hasta el momento, así como también de la forma en que continuará la investigación.

Palabras clave: geometría, construcciones, heurísticas, procesos matemáticos

Abstract. We present an overview of a project, currently in development, focusing on the teaching of geometric constructions problems. The study combined two lines of research, where elements of teaching problem solving and geometric content are investigated, in order to pinpoint specific competences that are brought into play to tackle this kind of problems, which can be a reference for designing and/or analyzing teacher training plans of different educational levels. We account for the results achieved so far, as well as how the investigation will continue.

Key words: geometry, constructions, heuristics, mathematical processes

Introducción

En investigaciones anteriores ya hemos destacado la importancia de los problemas de construcción para trabajar elementos de resolución de problemas (Siñeriz, 2002; Siñeriz y Puig, 2006). En el proyecto de investigación que presentamos en este informe (Siñeriz y Guillén, 2010-2013) nos hemos propuesto conjugar dos líneas de investigación referidas a la enseñanza de resolución de problemas (RP) y a la enseñanza de contenidos geométricos (CG). Nuestra intención es elaborar un Modelo de Competencia (MC) al enseñar construcciones geométricas; esto es, identificar los elementos que debieran formar parte de la conducta competente al enseñar este tipo de problemas, cuando dicha enseñanza tiende a promover la exploración, las prácticas argumentativas y la apropiación de procedimientos de carácter heurístico. Dicho modelo se constituye a partir del análisis de los problemas, del proceso de resolución y de la actuación experta, es decir de una persona que tiene experiencia en un dominio, y se utilizará como referente para analizar otros planes de formación.

Para ello hemos resuelto explorar la enseñanza de las construcciones desde cuatro ópticas diferentes: desde las destrezas, desde el proceso de resolución de problemas, desde los métodos y desde los contenidos matemáticos. Estos enfoques han llevado a programar diferentes estudios

exploratorios, en los que se ha considerado a la RP en su doble aspecto, como contenido y como metodología, en consonancia a los propósitos que se desprenden de los actuales diseños curriculares.

Hemos diseñado e implementado Modelos de Enseñanza (ME) donde se abordan estos problemas en distintos niveles educativos y hemos acotado el análisis de la actuación docente a determinados problemas.

Las fuentes de información de los estudios exploratorios son diversas. Por un lado, provienen de la observación de la actuación de dos formadoras de profesores, expertas en la enseñanza de RP y de CG, una de ellas de nivel primario y la otra de nivel secundario, con el fin de identificar elementos que forman parte de la competencia. Por otro lado, se observan las clases de dos profesoras de secundaria que tuvieron una formación previa en métodos y heurísticas de RP, con la intención de introducirnos en una nueva problemática: la de examinar cómo la enseñanza recibida condiciona los entornos de aprendizaje que los docentes de secundaria crean en su actividad de enseñanza.

Las situaciones de enseñanza correspondientes se recogieron en audio y/o video; se confeccionaron registros de cada clase y a su término se realizaron notas sobre el desarrollo de las mismas, por parte de la docente implicada y de otros investigadores del equipo.

Estos estudios se desarrollaron en diferentes etapas y ya se han publicado algunos resultados. En este reporte de investigación vamos a describir brevemente el trabajo desarrollado en el marco del proyecto mencionado en cada una de estas etapas; adelantamos también cómo estamos continuando el mismo al considerar los propósitos iniciales y las posibles vías abiertas que se vislumbran con el trabajo realizado.

Antecedentes. Marco teórico

En Guillén y Siñeriz (2012) describimos brevemente los marcos teóricos de las dos líneas de investigación que se conjugan en este proyecto.

Desde la enseñanza de resolución de problemas, consideramos las elaboraciones teóricas en torno a los problemas de regla y compás (Siñeriz, 2002; Siñeriz y Puig, 2006), donde se extrapolaron y reformularon algunos resultados derivados de Polya (1965, 1962-1965) y de Schoenfeld (1985), lo que llevó a caracterizar la conducta competente en función de las fases del proceso de resolución, del espacio teórico de problemas y de los aspectos cognitivos, diferenciando a éstos en *contenido matemático, trabajo heurístico y gestor*. Asimismo, rescatamos la clasificación de heurísticas de Puig (1996), distinguiendo entre *destrezas heurísticas, herramientas heurísticas, métodos heurísticos, sugerencias heurísticas* (Quijano y Siñeriz, 2012).

Desde la enseñanza/aprendizaje de contenidos geométricos, centramos la atención en conceptos, procesos matemáticos y relaciones, fijándonos en las acciones que se realizan asociadas a estos contenidos como componentes de la práctica escolar. En esta dirección nos basamos en trabajos previos sobre los procesos matemáticos a partir de la geometría de los sólidos (Guillén, 2004, 2005, 2010).

Por otra parte, a fin de atender a los procesos inherentes a la práctica profesional, consideramos las dimensiones propuestas por Schoenfeld y Kilpatrick (2008) que caracterizan la enseñanza "proficiente". En este sentido centraremos también la atención en los *contenidos para la enseñanza* que le permiten al docente interpretar y planificar las situaciones de aula (reflexión sobre la propia práctica, conocimiento sobre los estudiantes como pensadores y aprendices, sobre la organización-gestión del aprendizaje).

Etapas de la investigación

Como hemos indicado en la introducción, la obtención y análisis de datos se ha planeado en diferentes etapas, que se corresponden con diferentes estudios exploratorios que se complementan y que contemplan los propósitos del proyecto.

Primera Etapa:

Esta etapa se centra en la formación de profesoras de secundaria cuyo plan de enseñanza será objeto de estudio en una fase posterior.

Continuando con las investigaciones anteriores en relación a los problemas de regla y compás (Siñeriz, 2002) se ha diseñado un Modelo de Enseñanza Inicial, el cual se conformó de dos partes, considerando a las docentes en su doble rol: como resolutoras y como orientadoras del trabajo en el aula.

Se realizaron ocho encuentros semanales de 2½ hs cada uno, destinados a la enseñanza de métodos (Análisis-Síntesis; Método de los dos Lugares; Método de la Figura Auxiliar, Método de la Figura Semejante), a través de la resolución de problemas seleccionados para tal fin. También se explicitaron las herramientas heurísticas involucradas (consideración de casos particulares; examen de posibilidades, analogía) y las sugerencias generales (buscar problemas relacionados, resolver el problema de forma diferente, analizar la solución) que ayudan a avanzar en el camino de solución, o bien se dirigen a ampliar los conocimientos matemáticos del resolutor. Con el propósito de promover espacios para la argumentación, se instala el análisis continuo de la cantidad de soluciones, de las condiciones de existencia y/o unicidad de la solución, del conjunto de datos del problema. En esta instancia se aspira a que las profesoras puedan, a partir de los problemas seleccionados, familiarizarse con los métodos y con la forma de trabajo en los problemas.

Posteriormente se ofrecieron dos seminarios, centrando la atención en el rol de los métodos como generadores de problemas, en las fases del proceso de resolución como organizadoras de dicho proceso y en los aspectos cognitivos implicados al resolver esta clase de problemas. En dos encuentros de 2½ hs se analizaron transcripciones de clases de escuela secundaria, provenientes de observaciones hechas en el marco de las investigaciones sobre problemas de regla y compás, en las cuales una profesora con formación previa en métodos, enseña contenidos curriculares a partir de dichos problemas. Además, se discutieron posibles consignas que permitirían promover la producción de argumentos por parte de los estudiantes y el uso de distintas heurísticas.

Por último, las profesoras participantes consensuaron una propuesta didáctica, y cada una adaptó modos y tiempos de acuerdo a las condiciones particulares de su contexto escolar. Se realizaron sendas experimentaciones áulicas en 1° año de establecimientos de escuela secundaria en San Carlos de Bariloche; se registraron las intervenciones docentes y las resoluciones de los alumnos.

Segunda Etapa

Esta etapa estuvo centrada fundamentalmente en el diseño de Modelos de Enseñanza desde las distintas perspectivas adoptadas, cuyo análisis llevaría a identificar elementos de competencia que serán los referentes para analizar actuaciones docentes y producciones de alumnos.

Hemos puesto la atención en determinados problemas, que se abordan desde distintos puntos de vista. Si bien cada problema tiene su propia especificidad, también puede contribuir a identificar elementos para el análisis de otros problemas.

Hemos seleccionado situaciones abiertas (SA) susceptibles a ser abordadas en diferentes niveles educativos. Particularmente se ha trabajado la construcción de circunferencias tangentes a otras dos y algunas construcciones de triángulos dados diferentes datos.

Las experimentaciones se desarrollaron en el Centro Regional Universitario Bariloche de la Universidad Nacional del Comahue y en la en la Escuela Universitaria de Magisterio de la Universidad de Valencia.

El ámbito de estudio estuvo constituido por dos formadoras de profesores que imparten la enseñanza en asignaturas del campo de la Didáctica de la Matemática, una de ellas de nivel primario y la otra de nivel secundario. Se observó la implementación de un plan de enseñanza en el marco de una asignatura de 4° año de Magisterio y el desarrollo de una SA en dos asignaturas del último año del Profesorado de Matemática, y se recogieron las producciones de los alumnos. Asimismo, a fin de tener datos desde una nueva perspectiva, se realizaron observaciones de clase en Representación Gráfica, asignatura de 1° año de Ingeniería a cargo de un profesor que participa en el proyecto. Las situaciones de enseñanza correspondientes se recogieron en audio o video.

En la formación de profesores de Matemática la SA "construir una circunferencia tangente a dos circunferencias exteriores" fue propuesta en las asignaturas "Seminario de la Enseñanza de la Matemática" y "Didáctica Especial y Residencia" para promover la reflexión sobre el propio proceso de resolución. En la primera, se planteó para analizar las heurísticas y métodos implicados, y en la segunda, para interpretar dicho proceso desde las producciones teóricas de Polya y Schoenfeld (fases, episodios, recursos, heurísticas, gestión) y anticipar intervenciones centradas en la visión retrospectiva (revisión-extensión del problema). Asimismo, la situación fue una de las construcciones trabajadas en el tema "empalmes", en la asignatura "Representación Gráfica" de 1° año de Ingeniería, para la aplicación de los algoritmos de construcciones elementales y la práctica en dibujo instrumental de precisión.

Por otro lado, esta SA fue parte del Modelo de Enseñanza (ME) desarrollado en Magisterio, en el marco de la asignatura "Didáctica de la geometría, de la medida, de la probabilidad y la estadística", para trabajar contenidos geométricos a partir de distintos contextos. Cabe indicar que la enseñanza implementada también ha contemplado el trabajo con las operaciones básicas (copia de ángulos y segmentos), algunos enfoques para las construcciones elementales (mediatriz, rectas perpendiculares, bisectriz, rectas paralelas) a partir de contextos cotidianos, y la resolución de otras SA y problemas.

Tercera Etapa

Se ha centrado en el análisis de datos. Por un lado se comenzaron a analizar las producciones de los alumnos de secundaria y de profesorado; en Quijano y Siñeriz (2012) presentamos sucintamente la propuesta implementada en el nivel secundario y el análisis de las respuestas de los estudiantes correspondientes a tres problemas de construcción de triángulos. Por otro lado, el foco de atención ha sido el análisis de las actuaciones de las docentes de planes de Formación de Profesores en torno a distintas SA, habiendo ya publicado algunos resultados que vamos a describir brevemente.

En Guillén y Siñeriz (2012) hemos examinado la actuación de la profesora de Magisterio de Valencia en torno a la SA "Construir una circunferencia tangente a dos circunferencias exteriores". Como ya indicamos, el análisis de esta actuación se ha realizado sobre la base de los elementos de competencia delimitados en estudios previos, referidos a la enseñanza de resolución de problemas y a la enseñanza/aprendizaje de contenidos geométricos, y del ME previo desarrollado en el mismo ámbito del estudio. Caracterizamos la actuación de la profesora al desarrollar la SA y de esta manera hemos identificado nuevos elementos que debieran formar parte de la conducta competente al enseñar construcciones geométricas, que hemos asociado a la planificación de las sesiones de clase o que se pueden desarrollar con su actuación. En las

conclusiones subrayamos la transferencia de resultados de la investigación que hace la profesora a sus clases y lo adecuada que ha resultado la SA para lograr los objetivos planteados. Hacemos notar que las conclusiones no se pueden extrapolar a todos los planes de formación, para continuar se sugiere la búsqueda de otras situaciones con este potencial así como experimentar en otro ámbito de estudio.

En Guillén y Siñeriz (en prensa) se ha analizado la actuación de la misma docente en torno a la SA "Construir un triángulo dados dos lados y una altura". Con este análisis también hemos dado cuenta de los elementos que se han considerado como objeto de enseñanza, que incorporamos a nuestro Modelo de Competencia para la enseñanza de construcciones geométricas; los mismos se refieren al planteamiento y resolución de problemas, a contenidos geométricos y a algunos aspectos de la enseñanza de los mismos. La diversidad de observaciones que se señalan en el análisis realizado refleja que esta nueva situación proporciona un contexto de RP propicio para poder usar e integrar una variedad de contenidos matemáticos trabajados previamente, contemplando a su vez otros contenidos pertinentes para la enseñanza de esta materia. En el trabajo se indican varios ejemplos de aportes de la investigación que se han considerado en su actuación; en las conclusiones se hace notar también las limitaciones del estudio para generalizar los resultados obtenidos.

Asimismo, en relación a la situación mencionada respecto a las circunferencias tangentes, hemos realizado la reconstrucción de la enseñanza y el análisis de datos correspondientes a las otras experimentaciones desarrolladas en la etapa anterior. Un primer análisis de la actuación nos lleva a observar algunas analogías en el marco de las dos asignaturas de Profesorado de Matemática. En ambos casos las orientaciones se dirigieron a: analizar los datos señalando las posibles alternativas, examinar la cantidad de soluciones, establecer condiciones para que la solución sea única, organizar los conocimientos y estrategias implicados en cada resolución, evaluar su efecto dentro del proceso, recuperar las ideas erróneas utilizadas y llevar a argumentar el por qué de los cambios de punto de vista, rescatar las distintas aproximaciones y promover la explicitación de las heurísticas subyacentes. Se introdujo el recurso tecnológico (Cabri-Géomètre II) para contrastar conjeturas y facilitar la elaboración de nuevas conjeturas y se propició la validación mediante el uso de las propiedades características de los lugares geométricos implicados.

Además, en el tratamiento llevado a cabo en Didáctica Especial y Residencia, al igual que en la asignatura de Magisterio, se ha contemplado un análisis preliminar de las producciones de los alumnos, que permitió a la docente seleccionar de cada una ciertos aspectos que se tomaron como objeto de enseñanza. En este sentido, dichas producciones se utilizaron para: 1. Mostrar los episodios identificados en una resolución; 2. Señalar la naturaleza general de preguntas incluidas en

la visión retrospectiva (que no contemplan las peculiaridades del problema) y el orden arbitrario de actividades propuestas para esta fase; 3. Rever la idea de creencias de acuerdo a la bibliografía de referencia; 4. Ilustrar la explicitación de la transformación del problema original al tomar un caso particular y sus infinitas soluciones; 5. Interpretar un plan seguido para el caso genérico. Estas observaciones han sustentado el diseño de un taller dirigido a profesores y alumnos de profesorado (Siñeriz y Yaksich, 2012).

Cuarta Etapa

En esta etapa nos hemos introducido en una nueva problemática: el análisis de la actuación docente en secundaria cuando se ha tenido una formación previa en RP.

Nos hemos centrado en el problema elemental de geometría plana "construir un triángulo dados sus lados". Hemos examinado la actuación de la profesora de Magisterio durante el trabajo en dicho problema y el proceso de enseñanza desarrollado en el marco del ME inicial, impartido a las docentes de secundaria en la primera etapa de trabajo. De este modo, desde el análisis de la actuación experta en la enseñanza de RP y/o de CG, determinamos elementos de competencias que se ponen en juego al enseñar a partir de este problema. A su vez hemos utilizado estos referentes para hacer un análisis preliminar de la actuación de una de las profesoras de secundaria participantes, al tratar el mismo problema con alumnos de 1° año de escuela secundaria. Este análisis ha llevado a continuar examinando la actuación al extender el problema a una SA referida a la construcción de triángulos dadas ternas de lados y/o ángulos y, aunque la investigación actualmente esté en desarrollo y aún no se hayan publicado resultados al respecto, podemos adelantar que la riqueza de la situación y el carácter exploratorio del estudio hacen sentir la necesidad de ampliarlo a otras situaciones y a otras actuaciones en el ámbito de escuela secundaria.

Comentarios finales

En los trabajos ya publicados hemos subrayado que el estudio desarrollado hasta la actualidad ha hecho sentir la necesidad de prestar gran atención a la enseñanza de los contenidos tratados; como el aprendizaje de los mismos conlleva grandes dificultades, se hace necesario seguir explorando en esta dirección usando diferentes situaciones y/o problemas para desarrollar la enseñanza.

Por otro lado, cabe señalar que hasta ahora se ha examinado con detalle la actuación de una profesora de Magisterio de Valencia, al desarrollar las dos situaciones abiertas mencionadas, pero los resultados y conclusiones del estudio, si bien pueden tomarse como referentes para el análisis

de otros planes de formación, no se pueden extrapolar a todos ellos, con lo que se ha de seguir indagando en otros ámbitos de estudio.

Asimismo, el análisis de la actuación docente en secundaria está en su fase inicial. Se tiene previsto continuar analizando la actuación en secundaria al desarrollar la enseñanza vía otras situaciones o problemas y tomando como ámbito de estudio otros profesores de este nivel que previamente hayan tenido instrucción en RP y/o en CG.

La indagación sobre procesos de aprendizaje de los estudiantes al resolver diferentes SA o problemas también se contempla como propósito de la investigación, aunque el trabajo desarrollado esté en la fase inicial.

Referencias bibliográficas

Guillén, G. (2004). El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos: describir, clasificar, definir y demostrar como componentes de la actividad matemática. *Educación Matemática*, *16*(3), 103-125.

Guillén, G. (2005). Análisis de la clasificación. Una propuesta para abordar la clasificación en el mundo de los sólidos. *Educación Matemática*, *17*(2), 117-152.

Guillén, G. (2010). ¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría?, ¿y en la investigación? En M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. Sierra (Eds), *Investigación en educación matemática XIV*, 21-68. Lleida: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Guillén, G. y Siñeriz, L. (2012). El caso de la circunferencia tangente a otras dos. Análisis de la actuación de una profesora de Magisterio. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M.C. Penalva, F. García, y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI*, 331-340. Baeza: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Guillén, G. y Siñeriz, L. (en prensa). La enseñanza de resolución de problemas y de contenidos geométricos a partir de la construcción de triángulos. En B. Gómez y L. Puig (Eds). *Resolver problemas. Estudios en memoria de Fernando Cerdán*. Valencia: Departamento de Didáctica de la Matemática. PUV.

Polya, G. (1962-1965). *Mathematical Discovery.* New York: Wiley & Sons.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas* [Traducido por J. Zagazagoitia]. México, DF: Trillas. (Trabajo original publicado en 1945).

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Madrid: Síntesis.

Quijano, M. y Siñeriz, L. (2012). Construcciones de triángulos con regla y compás: análisis de producciones de estudiantes de nivel medio. En M. Ascheri, R. Pizarro, N. Ferreira y G. Astudillo (Eds.), *Memorias Reunión Pampeana de Educación Matemática IV*, 37-46. Santa Rosa: EdUNLPam.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Academic press.

Schoenfeld, A. H. & Kilpatrick, J. (2008). Toward a theory of proficiency in teaching mathematics. In D. Tirosh & T.Wood (Eds.), *The international handbook of mathematics teacher education: Tools and processes in mathematics teacher education* (pp. 321-354). Rotterdam: Sense Publishers.

Siñeriz, L. (2002). La enseñanza de resolución de problemas de regla y compás. Del mundo de la pura resolución de problemas a la escuela media argentina: estudio de dos casos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 5(1), 79-101.

Siñeriz, L. y Guillén, G. (2010-2013). Diseño e informes del proyecto *Hacia un modelo teórico respecto a la enseñanza de las construcciones geométricas que favorezca el trabajo heurístico y las prácticas argumentativas.* Proyecto de investigación financiado por la Secretaría de Investigación de la Universidad Nacional del Comahue (04/B158).

Siñeriz, L., & Puig, L. (2006). Un modelo de competencia para la resolución de problemas de construcción con regla y compás. En J. Aymerich y S. Macario Vives (Eds), *Matemáticas para el siglo XXI* (pp. 323-331). Castellón: Publicacions de la Universitat Jaume I.

Siñeriz, L. y Yaksich, A. (2012). El problema de las circunferencias tangentes: Un amplio camino para la construcción del conocimiento matemático. En M. Ascheri, R. Pizarro, N. Ferreira y G. Astudillo (Eds.), *Memorias Reunión Pampeana de Educación Matemática IV*, 12-13. Santa Rosa: EdUNLPam.

EXPERIENCIAS DE AULA QUE HAN CONTRIBUIDO A MEJORAR EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA

Vivian Libeth Uzuriaga López y Alejandro Martínez Acosta
Universidad Tecnológica de Pereira Colombia
vuzuriaga@utp.edu.co, amartinez@utp.edu.co

Resumen. En este artículo se socializan algunas experiencias realizadas en la semana de inducción universitaria de la Universidad Tecnológica de Pereira, las cuales ayudaron a mejorar la motivación de los alumnos por el estudio de la matemática y a revisar la práctica docente, como uno de los proyectos del grupo de investigación EMEMATIC.
Dentro de las experiencias se encuentran: Conocimientos previos que tienen los estudiantes al cursar una asignatura; valiosas para desarrollar el nuevo conocimiento. La relación con el entorno y la cotidianidad; es tarea del profesor proponer situaciones que motiven al alumno por el estudio de la matemática, para ser entendida como una ciencia transversal en su formación. La matemática como soporte teórico en desarrollos científicos y tecnológicos; no es desconocido su papel en la modelación, planteamiento y solución de problemas que surgen en las disciplinas del saber. Desarrollo histórico como una estrategia para fortalecer la enseñanza y favorecer el aprendizaje
Palabras clave: alumno, aprendizaje, cotidianidad, educación, experiencias de aula
Abstract. This paper socializes some experiences in college Induction Week at the Technological University of Pereira, which helped improve student motivation for the study of mathematics; and the revision of the teaching's practice as one of the group's projects EMEMATIC research.
Among the experiences are: Prior knowledge that students need to have to take a course, valid for developing a new knowledge. The relationship with the environment and everyday life, which is up to the teacher to propose situations that motivate the student for the study of mathematics, to be understood as a science transversal to their whole education. Mathematics as theoretical support for scientific and technological developments: it is not unknown role in modeling, analyze and solve problems in the disciplines of knowledge. Historical development as a strategy to strengthen teaching and promote learning.
Key words: student, learning, daily life, education, classroom experiences

Introducción

Es común encontrarse con estudiantes, desde la primaria hasta la universidad, que le tienen fobia a la matemática, el problema es más grave con los alumnos que cursan carreras universitaria como ingeniería, tecnología, química o física; ellos la consideran abstracta, sin relación con su carrera, el entorno y con poca o ninguna utilidad para su vida profesional.

Inquietos y preocupados por esta problemática, concretamente por la actitud apática hacia la matemática observada en la mayoría de los estudiantes que ingresan a la Universidad Tecnológica de Pereira, UTP, reflejada en altos índices de repitencia, deserción, bajo aprovechamiento académico y falta de motivación por el estudio de la misma; en particular los grupos de investigación "Estudios metodológicos para la enseñanza de la matemática y el uso de las nuevas tecnologías, EMEMATIC" y "Enseñanza de la Física y la Matemática, ENFIMA", desarrollaron proyectos, tales como: "Análisis de la mortalidad académica del curso Matemática I", "Diseño, construcción e implementación del curso Matemáticas Fundamentales basado en el Aprendizaje Desarrollador", "Diagnóstico de las causas que obstaculizan el aprendizaje del álgebra lineal en los estudiantes de ingeniería de la Universidad Tecnológica de Pereira", "Una propuesta de enseñanza

para el curso Álgebra Lineal" y "Estudios metodológicos para contribuir a mejorar el proceso de Enseñanza_aprendizaje del Álgebra Lineal, incorporando las nuevas Tecnologías de la Información y las Comunicaciones", con los cuales buscaron además de hacer diagnósticos, construir propuestas que disminuyeran los altos índices de fracaso académico y mejorarán el aprovechamiento académico de los estudiantes.

Otra de las actividades desarrolladas por EMEMATIC, en el período de 2008 a 2011, consistió en ofrecer un ciclo de conferencias y talleres durante la semana de adaptación a la vida universitaria a los estudiantes que ingresaron a primer semestre a la UTP, en los programas de ingeniería, tecnología, química industrial y administración ambiental. Uno de los objetivos de estas conferencias fue: Mostrar la importancia de la matemática, su presencia en lo que vemos o hacemos y algunos de sus aportes en desarrollos científicos o tecnológicos.

En este artículo se mostrarán algunas de las actividades propuestas y desarrolladas con los alumnos para lograr el objetivo anterior.

Desarrollo

Teniendo en cuenta que la mayoría de los alumnos que ingresan a la UTP conciben la matemática sólo como números, ecuaciones, sin aplicaciones y que no sirve para nada, se ofreció en el marco de la semana de inducción o adaptación a la vida universitaria, durante el periodo 2008 a 2011, conferencias con las cuales se pretendía fomentar un cambio de percepción hacia la matemática, o por lo menos mostrarla desde otro contexto. Para ello se desarrollaron diferentes actividades clasificadas de la siguiente manera:

Conocimientos previos que tienen los estudiantes al cursar una asignatura. La información guardada en la memoria de los alumnos sobre una realidad o un concepto es valiosa en el momento de desarrollar el nuevo conocimiento. No se puede pensar que los estudiantes tienen la mente "en blanco" o que son un disco duro "virgen". Como lo afirma Ausubel (1968) "el aprendizaje tiene lugar cuando el aprendiente liga la información nueva con la que ya posee, reajustando y reconstruyendo en este proceso ambas".

Mediante lecturas matemáticas y reconocimiento de algunos conceptos en diferentes lugares de la ciudad y sucesos se inquieta al alumno a conectar y relacionar los conocimientos previos con los nuevos. Por ejemplo. La figura muestra un refrigerador de uno de los almacenes de cadena de la ciudad y un horno en un sitio típico de Pereira donde se asan arepas de chócolo.

Figura 1. Refrigerador y horno de barro

Se pide a los alumnos realizar una descripción o lectura matemática de las imágenes mostradas en la figura 1. La mayoría identifica términos como: temperatura, alta en el horno y bajo cero en el refrigerador, lo que permite hacer una discusión acerca de los números enteros y una interpretación de los negativos. Formas geométricas como rectángulos, arcos de circunferencia; se aprovecha esta situación para hacer referencia a las superficies esféricas o de otro tipo que estudiarán en el curso de Cálculo en Varias Variables, como la forma del horno o los recipientes usados para depositar la masa de las arepas. Otros conceptos, altura, distancia, ángulos, volumen, etc.

La segunda experiencia es, *la relación con el entorno y la cotidianidad*. Es labor del profesor motivar a los alumnos por el estudio de la matemática, revelar su importancia, su relación con actividades diarias, con el entorno y sus aportes para el desarrollo del pensamiento. Por tanto, hace parte de su quehacer diseñar, construir y proponer actividades que le permitan a los estudiantes evidenciar lo anterior.

Por ejemplo, "no es posible que veamos un rectángulo caminando como si se tratara de una persona, sin embargo cada uno es capaz de reconocerlos en cualquier lugar", como lo plantean Uzuriaga y Martínez en su artículo: Algunas experiencias que han contribuido a mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Teniendo en cuenta lo anterior, se plantea la actividad de identificar cinco ángulos en cada una de las imágenes

Figura 2. Sesquicentenario de la ciudad de Pereira, Risaralda

La mayoría identifican los ángulos, en la figura de la izquierda, en los cuales se ven claramente definidas las rectas que los determinan, pero no los ángulos "curvilíneos", que se observan en esta figura y en la imagen de la derecha, formados por las intersecciones de las circunferencias.

De igual manera, se aprovecha el reconocimiento del campus universitario que hacen los estudiantes en la semana de inducción y se les propone identificar los lugares de la UTP que aparecen en la siguiente figura

Figura 3. Facultad de Bellas Artes y Humanidades y Guaducto

Un gran número de estudiantes pueden identificar sin problema el Guaducto, foto de la derecha y la Facultad de Bellas Artes y Humanidades, foto de central. Sin embargo, les causa mayor dificultad reconocer la misma Facultad en la foto de la izquierda, para lo cual argumentan: "no está de frente". Entonces se hace la pregunta ¿desde qué edificio o lugar pudo haber sido tomada la fotografía? Inmediatamente, se discute acerca de la importancia de la matemática y algunos conceptos geométricos básicos que retomarán en el primer curso de matemáticas y algunas ecuaciones como la que permite modelar el Guaducto, ilustrado en la figura 4. Con lo anterior se pretende, que el alumno se de cuenta que la matemática no se queda en el aula de clase y las ecuaciones que allí se estudian, se emplean o aplican en diferentes situaciones o contextos.

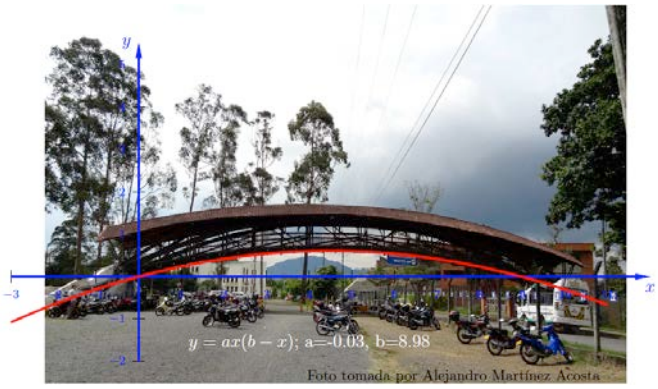


Figura 4. Guaducto de la UTP

La matemática como soporte teórico en desarrollos científicos y tecnológicos, es la tercera experiencia desarrollada como actividad de aprendizaje y motivación para su estudio. En diferentes áreas y disciplinas del saber surgen problemas que requieren de la matemática para su modelación

o solución; situación que es usada como una estrategia de enseñanza con la cual se puede llevar al alumno al desarrollo de su creatividad, del pensamiento y de la abstracción.

Un ejemplo que permite mostrar esta fundamentación teórica, es cuando se le propone al alumno identificar conceptos matemáticos en obras civiles importantes del área metropolitana Centro Occidente (Risaralda), como las que aparecen en la siguiente figura.

Figura 5. Puentes Helicoidal e Intersección a desnivel La Romelia

Se hacen varias preguntas: ¿cuál es la forma de los puentes?, una gran cantidad de alumnos creen que es una circunferencia; si es una circunferencia ¿cómo ingresan o salen los vehículos?, si el nombre del puente, que aparece a la izquierda, es helicoidal ¿qué forma tiene?. Se hace notar a los alumnos la forma de hélice del puente y se hace una introducción sencilla sobre las ecuaciones que los pueden modelar, las cuales se estudiarán en los cursos de Matemáticas II y III, Cálculo Diferencial e Integral y Cálculo en Varias Variables, respectivamente. A manera de ilustración:

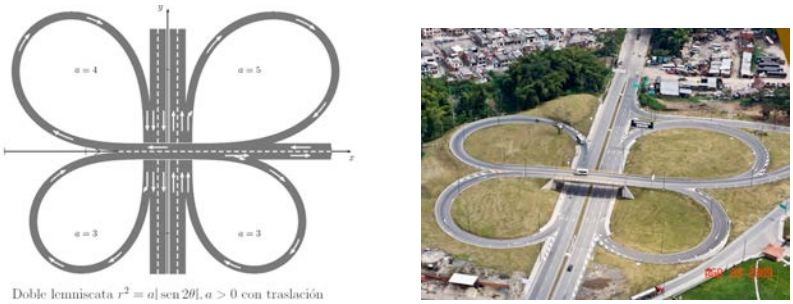


Figura 6. Intersección a desnivel La Romelia

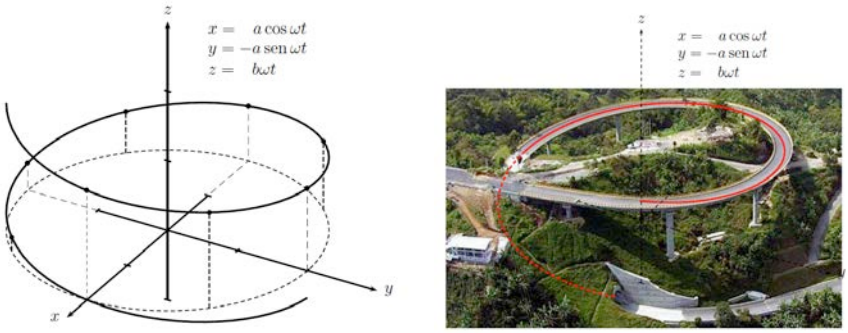


Figura 7. Puente Helicoidal

Otro ejemplo es la importancia de la matemática en la medicina. Una gran mayoría de los alumnos que ingresan a estos programas manifiestan que la matemática no tiene nada que ver con su carrera y es una de las razones por las cuales la seleccionaron. Ellos no perciben que requieren conceptos básicos de matemáticas, en particular de estadística, para la interpretación de exámenes de laboratorio, los cuales son usados para tomar decisiones acertadas sobre tratamientos, ajustes y cálculos en la dosificación de medicamentos, pues un error de cálculo puede traer consecuencias nefastas para los pacientes. El auge de la matemática en la medicina se ha producido en los últimos años, como lo menciona el Dr. Víctor Hugo Olmedo Canchola en su artículo "Matemáticas en medicina: una necesidad de capacitación" (Canchola, 2012) en donde hace un análisis de la necesidad de desarrollar capacidades y habilidades matemáticas en el ámbito médico.

También, la matemática está presente en desarrollos científicos médicos de más envergadura, como es el caso del aporte de los modelos matemáticos en estudios para el tratamiento del cáncer, que aparece en investigaciones recientes realizadas por los científicos Martin Nowak, profesor de matemáticas y biología y director de Program for Evolutionary Dynamics de la Universidad de Harvard, y la matemático Ivana Bozic. Según publica la Harvardgazette, en su trabajo, los científicos demostraron matemáticamente que la combinación de dos fármacos aplicados en una "terapia dirigida" (un enfoque de tratamiento diseñado para interrumpir la capacidad del cáncer para crecer y expandirse) podrían curar eficazmente casi todos los tipos de cáncer. (Martínez, 2013)

La última experiencia que se presenta es el desarrollo histórico. Este se toma como una estrategia didáctica con la que se pretende hacer notar a los alumnos que la matemática no es acabada, estática, descontextualizada y que las soluciones a los problemas no se dieron de forma inmediata; en la mayoría de los casos se necesitaron años e incluso siglos para llegar a ellas. Además, existen problemas, denominados problemas abiertos, que aún no se les ha encontrado solución.

Conocer la historia y epistemología de la matemática, permite articular temas diversos en un contexto histórico, al igual que relacionarlo con diferentes disciplinas, áreas y líneas centrales el pensamiento matemático. Como aparece en el artículo La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza: "la Historia de la Matemática pone de manifiesto la dimensión cultural de las Matemáticas y su notable impacto en la Historia del Pensamiento" (González, 2004)

La conjetura de Kepler sobre el empaquetamiento de esferas que surgió en el siglo XVI para dar respuesta a un problema de la escena política y militar, consistía en encontrar un procedimiento rápido para calcular el número de balas de cañón que podían apilarse en la cubierta de un barco. Con este ejemplo se ilustra uno de tantos problemas que necesitaron muchos años o incluso

siglos para llegar a su solución, este en particular, se resolvió satisfactoriamente solo hasta finales del siglo XX.

Aún hoy en día, después de haber sido resuelto el problema, este sigue vigente en el aula de clase cuando se le pregunta al estudiante ¿cómo se deben acomodar esferas de un mismo radio para minimizar el espacio entre ellas? y en la vida cotidiana se usa para apilar naranjas, como se ilustra en la siguiente figura

Figura 8. Empaquetamiento

Los intentos de soluciones a la conjetura de Kepler dieron origen al problema del recubrimiento con esferas que consiste en buscar la manera más eficaz de distribuirlas de modo que cubran todo el espacio y que tiene aplicaciones en la instalación de antenas de comunicación, como se muestra en la figura

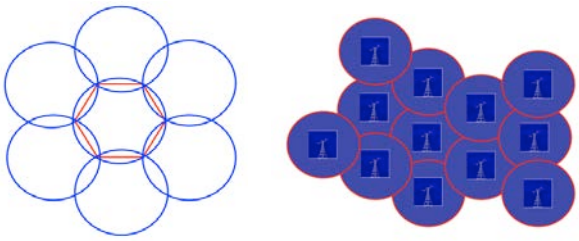


Figura 9. Recubrimientos

Entre otras aplicaciones que surgieron de la conjetura son: Conseguir buenos empaquetamientos que permitan aumentar la capacidad de transmitir información (telefonía, internet, etc). Los códigos correctores de errores que hacen que un CD suene bien a pesar que esté rayado. El crecimiento de los cristales que está determinado por la forma como se acomodan los átomos. (Quirós, 2012).

Conclusión

Las experiencias desarrolladas y presentadas a los estudiantes les permitieron darse cuenta que la matemática no se queda solo en el aula de clase en simples ecuaciones, fórmulas y cálculos, no es un requisito más de su carrera, ni es un objeto abstracto, alejado de la vida diaria. Fue una oportunidad en la cual los alumnos reconocieron la importancia de la matemática en diferentes

situaciones de la vida real, en desarrollos científicos y tecnológicos, en la relación y aporte que hace en diversas áreas o disciplinas del saber. Además, la mayoría se motivó por profundizar en tópicos que estudiarán posteriormente en sus programas, asimismo aprendieron a iniciarse en lecturas matemáticas del mundo en el que se desenvuelven. Es decir, a usar conscientemente conceptos matemáticos para resolver, modelar o plantear distintos problemas. En resumen, se logró influir positivamente en la percepción de los alumnos hacia la matemática.

Referencias bibliográficas

Canchola, V. (2012). Matemáticas en medicina: una necesidad de capacitación. *Revista Medicina Interna de México*, 28(3), 278-281.

D´Amore, B. (2008). Matemática en todo. Editorial Magisterio. Bogotá.

González, P. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Revista SUMA*, España, 45, 17-28.

Martínez, Y. (2013). Las matemáticas enseñan a atacar el cáncer de manera más eficiente. Revista electrónica Tendencias 21.

Quirós, G. (2012). *La conjetura de Kepler, un problema de optimización del siglo XVII con aplicaciones en el siglo XXI.* Recuperado en septiembre de 2013 de:

http://www.educa2.madrid.org/web/educamadrid/principal/files/34b0304e-7fce-4b92-875e-b0c7711e9926/RECURSOS/CURSOS/CIENCIAS/MATEMATICA/ANALISIS/0.3.pdf?t=1352402550541

http://www.tendencias21.net/Las-matematicas-ensenan-a-atacar-el-cancer-de-manera-mas-eficiente_a21586.htmlSanz Serna J. M. (2008). Matemáticas y medicina. *La Gaceta de la RSME*, 11(50), 665 – 677.

Uzuriaga, V. y Martínez, A. (2010). Algunas experiencias que han contribuido a mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. *Revista Entre Ciencia e Ingeniería*, 3 (6), 112-128.

Uzuriaga, V.; Martínez, A. y González, C. (2012). La matemática más allá de simples números y ecuaciones. *Revista Scientia et. Technica*. 50, 112-117.

UNA PROPUESTA METODOLÓGICA PARA EL APRENDIZAJE DE CONCEPTOS MATEMÁTICOS BASADO EN COMPETENCIAS

Susana B. Ruiz, María I. Ciancio y Elisa S. Oliva
Universidad Nacional de San Juan Argentina
sbruizr@yahoo.com.ar, miciancio@hotmail.com, elisaoliva65@gmail.com

Resumen. Producir cambios en las formas habituales de impartir conocimientos, es un gran desafío y un compromiso diferente, al que nos enfrentamos cotidianamente los docentes. El proceso educativo debe propender a reconceptualizar los procesos de enseñanza y aprendizaje, a fin de lograr el desarrollo de capacidades que le permitan al sujeto enfrentar nuevas situaciones que favorezcan en su posterior accionar en el campo profesional. El lenguaje del Análisis Matemático para funciones de varias variables y del Análisis Numérico es adaptable a muchos contextos, por la generalidad de sus objetos de estudio, por ello forma parte en el planteo de problemas y la determinación de soluciones de situaciones de la misma Matemática y otros campos científicos como son la Geofísica y Geología. En este trabajo, se explica cómo se ha organizado una secuencia de actividades integradoras.
Palabras clave: competencias, contenidos integrados, reservas naturales
Abstract. Produce changes in the usual ways of imparting knowledge, is a great challenge and a different commitment, we face daily teachers. The educational process must tend to reconceptualize the teaching and learning processes in order to achieve the development of capabilities that will allow the subject to face new situations that favor their subsequent professional activities in the field. The language of mathematical analysis for functions of several variables and Numerical Analysis is adaptable to many contexts, by the generality of its objects of study, for it is part in the posing of problems and determining solutions of the same mathematics situations and other scientific fields such as geophysics and geology. This paper explains how we have organized a sequence of activities inclusive.
Key words: competencies, integrated content, nature reserves

Introducción (Justificación de la experiencia)

La Matemática, en las carreras universitarias, además de desarrollar el pensamiento lógico, algorítmico y heurístico, en el marco del desarrollo científico-tecnológico en el que se está inmerso, debe desarrollar las capacidades de modelización, análisis y síntesis (Schoenfeld, A.1989). El lenguaje del Análisis Matemático para funciones de varias variables y del Análisis Numérico es adaptable a muchos contextos, por la generalidad de sus objetos de estudio, por ello forma parte en el planteo de problemas y la determinación de soluciones de situaciones de la misma Matemática y otros campos científicos como son la Geofísica y Geología. Producir cambios en las formas habituales de impartir conocimientos, es un gran desafío y un compromiso diferente. El proceso educativo debe propender a reconceptualizar los procesos de enseñanza y aprendizaje, a fin de lograr el desarrollo de capacidades que le permitan al sujeto enfrentar nuevas situaciones (Elosúa y Garcia, 1993); que favorezcan en su posterior accionar en el campo profesional. Es por ello la importancia que los docentes de cualquier nivel, y en particular el universitario, deben tener claro el porqué y para qué de los contenidos que deben impartir, (Santos,T.1994) y a partir de ello proponer actividades de aprendizaje que contribuyan en la formación de competencias afines al perfil profesional que se persigue.

Tareas desarrolladas: En este trabajo, se explica cómo se ha organizado una secuencia de actividades integradoras orientadas a promover y afianzar el aprendizaje significativo de temas del Análisis Matemático y Análisis Numérico en alumnos del primer año de las carreras Lic. en Geofísica y Lic. en Geología, de la Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales de la Universidad Nacional de San Juan (Argentina).

Se selecciona como problema motivador: "Evaluación de Reservas Naturales" ya que es un tema de gran importancia para los alumnos que cursan cualquiera de las carreras, y que se pone de manifiesto en el perfil profesional planteado en los respectivos planes de estudio. El abordaje del problema de esta propuesta, se desarrolla a través de la ejecución de un "Proyecto de Trabajo Áulico", por parte del alumno, donde se presentan distintos "planteos" problemáticos y "actividades" (relacionadas a estos planteos) para la resolución de problemas concretos, sirviendo de guía para la utilización y jerarquización de los diversos temas matemáticos involucrados. Temas Abordados en la Experiencia:

- Estimación del Volumen de Recursos Minerales, mediante la determinación de áreas de la superficie de secciones de minerales.
- Estimación del Volumen de Almacenamiento de Agua en Represas o Embalses a partir de Curvas de Nivel.
- Cálculo del Volumen de Depósitos de Reservas Naturales, bajo suelo, con formas geométricas predeterminadas, utilizando Integrales Triples.

Entre los conceptos matemáticos que se necesitan abordar en la resolución de las actividades, se pueden mencionar: el cálculo de áreas y volúmenes de regiones acotadas mediante Integrales Múltiples; cambio de coordenadas en Integrales Múltiples; Curvas de Nivel, Métodos de Integración Numérica (Regla del Trapecio, Regla de Simpson); y Secciones Cónicas y Cuadricas.

Planificación de las Actividades. Las actividades propuestas se planifican y agrupan por niveles de dificultad, con el objetivo de favorecer el pensamiento crítico, para la resolución de situaciones más complejas. En general los planteos propuestos en este proyecto áulico a abordar, van invitando al alumno a investigar y descubrir aspectos de las asignaturas: Análisis Matemático II, Análisis Numérico, Geometría Analítica, con apoyo de software,(Burden, Faires y Douglas, 2002); conduciéndolo en el arte de conjeturar y experimentar, mediante la resolución de problemas, a fin de promoverlo en la participación de futuros proyectos que atañen a su formación profesional.

Muestra de los Modelos Propuestos

Planteo 1: Cálculo aproximado de volúmenes de reservas de minerales

Existen distintos tipos de métodos de estimación de reservas, cuya idoneidad depende de la particularidad del yacimiento mineral. Uno de los métodos clásicos que se aplica en la práctica es el "Método de los Perfiles". El "Método de los Perfiles" comúnmente se utiliza cuando se tiene cuerpos mineralizados de forma irregular y que han sido estudiados por sondeos distribuidos regularmente de forma tal que permitan establecer cortes o perfiles en los que se basa el cálculo de reservas. El área de la sección del cuerpo mineralizado intersecada por un perfil (ver Figura 1) se puede calcular por varios métodos, uno de ellos es la regla de Simpson.

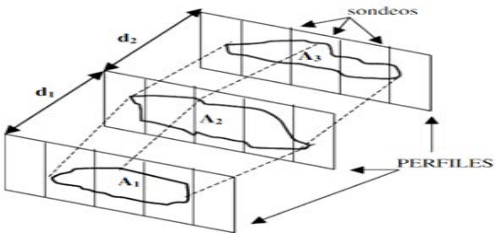


Figura 1: Áreas de secciones de Cuerpos Mineralizados

El volumen de un bloque comprendido entre perfiles se puede obtener: multiplicando el área de cada sección por la mitad de la distancia al perfil contiguo a cada lado (cada perfil genera un bloque): $V=A_2.d_1/2 + A_2.d_2/2$, siendo necesaria una corrección en caso de perfiles extremos. El volumen total se puede estimar como la suma de los volúmenes parciales estimados de cada bloque. A partir del volumen y una estimación de las densidades medias parciales, de cada bloque, se puede estimar el tonelaje de mineralización total, como suma de los tonelajes parciales de cada bloque.

Actividad 1 Propuesta: De acuerdo al Planteo 1, las Figuras 2, 3 y 4 muestran las regiones planas correspondientes a los perfiles de un cuerpo mineralizado con áreas A_1 , A_2 y A_3 respectivamente. En este caso particular las regiones planas pueden considerarse limitadas por las curvas: $y=x^2$, $y=6-x$, $x=3$ e $y=2$.

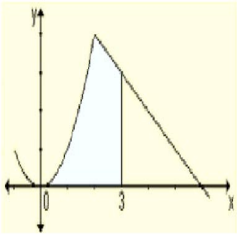


Figura 2

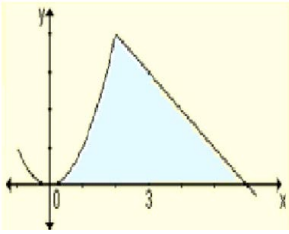


Figura 3

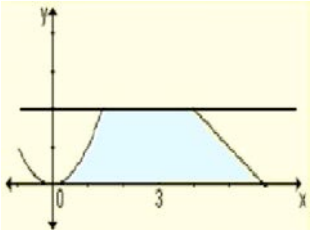


Figura 4

En las figuras anteriores se muestran los Perfiles de Cuerpos Mineralizados con diferentes Areas

- Calcular las áreas de las regiones definidas en cada perfil utilizando integrales dobles.
- Aplicar el método de los perfiles para estimar el volumen total del sólido (cuerpo mineralizado).

Actividad 2 Propuesta: a) Investigar sobre la Regla de Simpson en el cálculo aproximado de áreas de regiones planas. Dado el sólido definido en la Actividad 1, aplicar el Método de los Perfiles para estimar el Volumen Total del cuerpo mineralizado, utilizando la regla de Simpson para el cálculo aproximado de las áreas respectivas.

Planteo 2: Cálculo aproximado del Volumen de Almacenamiento de Agua en Represas o Embalses a partir de Curvas de Nivel.

Supongamos que el grafico de Curvas de Nivel de una Represa o Embalse de agua es el que se muestra en la Figura 5 a).

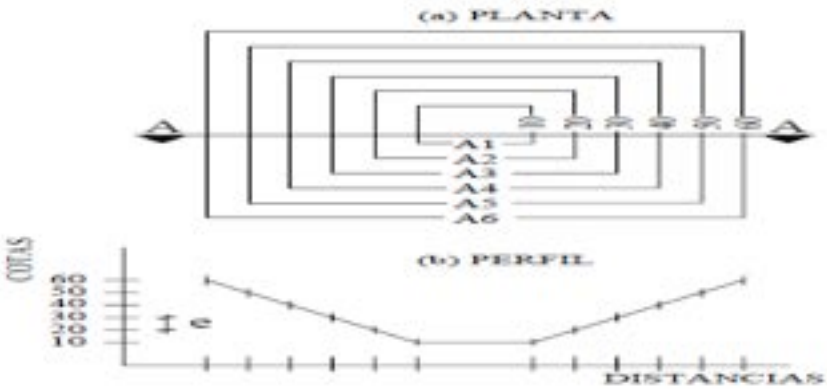


Figura 5a) Representación de Curvas de Nivel

Figura5b) Representación de una sección Transversal

Se puede visualizar que, cada curva de nivel encierra una región acotada con un área determinada. La curva de nivel de altura k=10 encierra un región con área A1, la de altura k=20 una con área A2 y así sucesivamente. Si representamos una sección transversal obtenemos la Figura 5 b). Si se aplica el "Método de Áreas Medias" (Nakamura, S.1992) para el cálculo del volumen, V, se tiene: V= volumen del embalse en m3, Ai= área encerrada por la curva de nivel de altura i; e= equidistancia entre curvas de nivel contiguas).

$$V=\frac{A_1+A_2}{2}.e+\frac{A_2+A_3}{2}.e+\frac{A_3+A_4}{2}.e+\frac{A_4+A_5}{2}.e+\frac{A_5+A_6}{2}.e \qquad V=\left(\frac{A_1+A_n}{2}+\sum_{i=2}^{n-1}A_i\right).e$$

Planteo 3: Cálculo Exacto del Volumen de Almacenamiento de Agua en Represas o Embalses a partir de Integrales Múltiples

El depósito de combustible correspondiente a una empresa tiene la forma de un cilindro circular recto. El depósito, bajo suelo, esta a una distancia d=2m del mismo, como se observa en la Figura 7. Se sabe que su capacidad total es de 20π m³. El nivel del depósito, D, cuando está vacío es de 6m, respecto a la superficie del suelo.

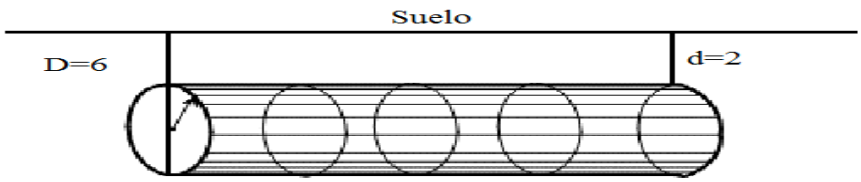


Figura 7: Forma Cilíndrica del depósito de combustible.

Actividad Propuesta 4: Considerar el Planteo 3. Determinar el volumen de combustible que queda en el depósito, si el nivel del mismo se encuentra a una distancia d*=5m.

Planteo 4: Ídem al Planteo 3, (Larson, H.1989) para el caso de un depósito que tiene la forma de un "Esferoide" (elipsoide con dos semiejes iguales), con capacidad total $V=16\pi$ m^3 (ver Figura 8). El nivel de combustible, respecto a la superficie del suelo, cuando el depósito está lleno es d=2m, mientras que cuando está vacío es D=6m.

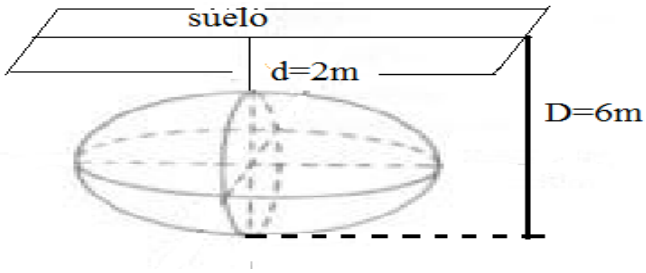


Figura 8: Forma del depósito "Esferoide"

Actividad Propuesta 5: Considerar el Planteo 4. Determinar el volumen exacto de combustible que queda en el depósito, si el nivel del mismo se encuentra a una distancia d*=3m.

Al finalizar las actividades propuestas, entregue el material elaborado a los docentes de la cátedra.

Nota: Puede obtener otros planteos relacionados al tema consultando las siguientes páginas web:

http://www.serbi.ula.ve/serbiula/libros-electronicos/Libros/topografia_plana/pdf/CAP-9.pdf
http://es.scribd.com/doc/59357521/Calculo-de-Reservas-de-Mineral

Resultados observados luego de finalizar la propuesta

Al concluir las etapas previstas en el desarrollo del proyecto áulico y analizar las respuestas obtenidas por cada grupo de trabajo, en donde se propuso un espacio de reflexión entre los actores: Alumnos-Docentes; se pudo valorar los siguientes aspectos:

- Desarrollar en los alumnos un pensamiento "creador" debe ser una de las principales metas de la educación en el nivel superior. Para lograr este pilar, los docentes deben

conducir el proceso de apropiación de conceptos, seleccionando de manera adecuada no sólo los contenidos a impartir sino también los métodos y estrategias para lograrlo.

- Producir cambios en las formas habituales de impartir conocimientos, es un gran desafío y un compromiso diferente, al que nos enfrentamos cotidianamente los docentes, y aun cuando esto resulta una tarea compleja, los resultados son ampliamente satisfactorios.
- La utilización de diferentes herramientas matemáticas, para solucionar un mismo planteo; permiten desarrollar nuevas habilidades y capacidades en el alumno, que promueven la relación e integración de conceptos y su aplicación en la realidad
- Es de destacar la motivación que se logra en los alumnos, cuando se les hace ver la necesidad de manejar el conocimiento matemático y aplicarlo en contextos reales para discutir las respuestas observadas.

Referencias bibliográficas

Schoenfeld,A.(1989). *La enseñanza del pensamiento matemático y la resolución de problemas.* Academic Press, EUA.

Elosúa, M. R.; Garcia, E. (1993). *"Estrategias para enseñar y aprender a pensar."* Madrid. España; Narcea Ediciones

Santos Trigo, L.M. (1994). *La Resolución de Problemas en el Aprendizaje de las Matemáticas.* México: CINVESTAV-IPN.

Larson, H.,(1989). *Cálculo y Geometría Analítica.* España.Mac Graw Hill.

Nakamura, S., (1992) *"Métodos Numéricos Aplicados con Software"*, México. Pearson Educación.

Burden, R., Faires, J., y Douglas, M. (2002) *"Análisis Numérico",* México. Cengage Learning http://www.serbi.ula.ve/serbiula/libros-electronicos/Libros/topografia_plana/pdf/CAP-9.pdf Recuperado el 11 de mayo de 2011

http://es.scribd.com/doc/59357521/Calculo-de-Reservas-de-Mineral Recuperado el 11 de mayo de 2011

UM ESTUDO DAS ESTRATÉGIAS UTILIZADAS PELOS ALUNOS DA EDUCAÇÃO BÁSICA AO RESPONDEREM QUESTÕES SOBRE NÚMEROS RACIONAIS EM AVALIAÇÕES EXTERNAS NO BRASIL

Rosivaldo Severino dos Santos, Marcelo Câmara dos Santos y Tânia M. M. Campos
Universidade Federal de Pernanbuco Brasil
rosivaldo100@ig.com.br, marcelocamaraufpe@yahoo.com.br, taniammcampos@hotmail.com

Resumen. Neste trabalho apresentamos as estratégias utilizadas por alunos da Rede Municipal do Recife ao responderem questões sobre números racionais, particularizando o SAEPE/Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco. Tomamos como aporte teórico a Teoria dos Campos Conceituais, segundo a qual, o conhecimento de determinado conceito não deve ser considerado isoladamente e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica que indica que o conhecimento matemático é uma análise do sistema de produção das representações semióticas referentes a esse conhecimento. Quanto às estratégias utilizadas pelos alunos, observamos que os mesmos se utilizam de diferentes estratégias para responder aos itens propostos.
Palabras clave: avaliação, educacional; números racionais; estratégias
Abstract. We present strategies used by students from Recife's Municipal Public School when answering questions about rational numbers, particularly in the case of Pernambuco State Educational Evaluation System. We took Conceptual Fields Theory and Theory of Registers of Semiotic Representation as our theoretical ground. For the first one, knowledge of a certain concept should not be considered in an isolated way. For the second, mathematical knowledge is an analysis of the production done by means of the semiotic system referring to this knowledge. In our analysis, we have observed that students use different strategies to respond the proposed questions.
Key words: educational evaluation; rational numbers; strategies

Introdução

A avaliação educacional, em particular as macro avaliações, tem ocupado um lugar de grande importância nos sistemas de ensino atualmente, na medida em que se observa a necessidade de verificar o que os alunos aprenderam ao longo dos anos em que estiveram estudando.

A macro avaliação é um dos principais instrumentos para a elaboração de políticas educacionais dos sistemas de ensino e redirecionamento das metas das unidades escolares. Seu foco é o desempenho da escola e o seu resultado é uma medida de proficiência que possibilita aos gestores a implementação de políticas públicas, e às unidades escolares um retrato de seu desempenho.

A avaliação em larga escala é hoje uma política pública institucionalizada que foi iniciada no Brasil na década de 80, quando o Ministério da Educação iniciou o desenvolvimento de estudos sobre avaliação educacional, movido pelo incentivo proveniente das agências financiadoras internacionais. Nessa época, foram lançados os pressupostos para a construção do que veio a se tornar mais tarde o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB).

O SAEB foi implementado em 1990 com o objetivo de aperfeiçoar normas e procedimentos específicos e assegurar cientificidade, confiabilidade e comparabilidade a seus resultados.

A macro avaliação SAEB – Sistema de Avaliação da Educação Básica é composta por dois exames complementares, que são a ANEB/Avaliação Nacional da Educação Básica e a ANRESC/Avaliação Nacional do Rendimento Escolar. A ANEB é realizada de forma amostral com alunos de escolas públicas e privadas, localizadas em áreas urbana e rural matriculados no 5° e 9° anos do Ensino Fundamental e no 3° ano do Ensino Médio. Já a ANRESC, que recebe o nome de prova Brasil, é aplicada censitariamente a alunos do 5° e 9° anos do Ensino Fundamental Público de áreas urbana e rural, nas escolas que tenham no mínimo 20 alunos matriculados na série avaliada.

O SAEPE – Sistema de Avaliação de Pernambuco avalia de forma censitária, os alunos das redes de ensino estadual e municipal sendo, no 3° ano, apenas em Língua Portuguesa, e no 5° e 9° anos do Ensino Fundamental e 3ª série do Ensino Médio, incluindo os projetos de correção de fluxo escolar, nas áreas curriculares de Língua Portuguesa e Matemática.

Analisando os resultados do SAEPE, comprovamos as dificuldades dos alunos em compreender os números racionais e suas operações, assim como a ideia de fração e a relação que se tem entre numerador e denominador. Por exemplo, na avaliação do SAEPE realizada no ano de 2008, nos resultados dos quinze itens relacionados aos descritores que tratam de números racionais o percentual de acerto variou entre 6,4% e 42%.

Diversas pesquisas no âmbito da Educação Matemática (Campos, Jahn, Leme da Silva e da Silva, 1995; Merlini, 2005; Santos, 2005; Vasconcelos, 2007), sobre os números racionais na representação fracionária, têm indicado que a forma como esses números são apresentados às crianças, normalmente com o significado parte-todo com quantidades contínuas e de forma descontextualizada, contribui para que os alunos não superem as dificuldades apresentadas em lidar com problemas envolvendo números fracionários.

Nunes e Bryant (1997) afirmam que uma forma comum de apresentar as frações às crianças é por meio de um todo dividido em partes, destacando algumas pintadas e informando às crianças que as partes pintadas representam o numerador e o total de partes é o denominador.

Campos et al. (1995) demonstraram que a introdução de frações por meio do modelo parte-todo leva os alunos a aplicar um procedimento de dupla contagem, em que o denominador é o número de partes em que o todo foi dividido e o numerador é o número de partes que foram pintadas, sem entender o significado da fração.

Merlini (2005) investigou a formação e o desenvolvimento do conceito de fração com alunos de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental e verificou que, em ambas as séries, o índice de acertos às questões aplicadas foi de 21,16%, demonstrando certa homogeneidade entre os desempenhos das séries e indicando um resultado insatisfatório.

Com base nos dados acima descritos, realizamos a investigação com as questões referentes ao conteúdo de Números Racionais, com o objetivo de identificar as estratégias que os alunos do 9° ano do Ensino Fundamental mobilizam ao responderem questões que solicitam a utilização da noção de número racional.

Fundamentação teórica

A Teoria dos Campos Conceituais (Vergnaud, 1991) oferece uma estrutura que possibilita estudar as filiações e rupturas entre conhecimentos e as relações existentes entre os conceitos.

Vergnaud (1991) considera um conceito como sendo formado por uma terna de três conjuntos (S, I, R), em que S é um conjunto de situações que tornam o conceito significativo; I é um conjunto de invariantes (objeto, propriedades e relações) que podem ser reconhecidos e usados pelo sujeito para analisar e dominar essas situações e R é um conjunto de representações simbólicas que podem ser usadas para pontuar e representar as situações e os procedimentos para lidar com eles.

O estudo do desenvolvimento de um campo conceitual considera que existe uma série de fatores que influenciam e interferem na formação e no desenvolvimento dos conceitos, e que o conhecimento conceitual deve existir dentro de situações-problema.

No processo de aquisição do conhecimento, os conceitos matemáticos expressam seus sentidos a partir de uma variedade de situações que podem ser analisados com a ajuda de um conjunto de conceitos.

Para Vergnaud (1991), é por meio das situações e dos problemas a resolver que um conceito adquire sentido para o sujeito. Nesse contexto, podemos distinguir duas classes de situações:

- em uma dessas classes, o sujeito dispõe em seu repertório, em um dado momento de seu desenvolvimento, das competências necessárias ao tratamento relativamente imediato da situação;
- na outra classe, o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, o que o obriga a um tempo de reflexão, a hesitações, a tentativas frustradas que o leva, eventualmente ao sucesso ou ao fracasso.

Vergnaud (1991) esclarece que as competências e concepções são adquiridas pela criança por meio da formação de esquemas. Para entendermos o que vem a ser competência e sua relação com a concepção, é necessário primeiro entender o conceito de esquema.

Os esquemas são os procedimentos, os invariantes e as condutas organizadas por regras de ações sobre uma classe de situações dadas, isto é, a forma estrutural de atividade e está acompanhado de um teorema-em-ação ou de um conceito-em-ação.

O conceito-em-ação é um invariante operatório com suas propriedades e definições; quando são manifestados, geralmente são explícitos.

Os teoremas-em-ação aparecem de modo intuitivo e, na maioria das vezes, são implícitos. Estão relacionados com as estratégias utilizadas pelo sujeito no momento de solucionar situações-problema, sem que ele consiga explicitá-los ou justificá-lo.

Portanto, os teoremas-em-ação indicam um caminho para se analisar as estratégias intuitivas dos alunos e ajudá-los a transformar conhecimento intuitivo em conhecimento explícito.

Como parte do nosso aporte teórico, trataremos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, uma vez que, segundo Duval (1999), a análise do desenvolvimento cognitivo e as dificuldades encontradas na aprendizagem dos números racionais confrontam-se com a existência de diversos registros de representação semiótica, a diferença entre o objeto representado e seus diferentes registros de representação semiótica e a coordenação entre diferentes registros de representação semiótica.

Para Duval (1999), é importante distinguir o objeto matemático e a sua representação. Aprender matemática é diferente de aprender outras disciplinas, pois requer uma atividade cognitiva diversa das requeridas em outros domínios do conhecimento. A diferença entre essas atividades não deve ser procurada nos conceitos, pois não há domínio de conhecimento que não desenvolva um contingente de conceitos mais ou menos complexo.

Procedimentos metodológicos

A pesquisa foi desenvolvida em três escolas pertencentes à Rede Municipal do Recife, localizadas na periferia da zona norte da cidade, no turno vespertino, e a escolha em realizar a pesquisa nessas três escolas se deu em virtude do baixo desempenho das mesmas na avaliação do SAEPE/2008.

Inicialmente, procedemos a um levantamento dos itens do SAEPE no eixo de Números e Operações, referentes aos números racionais. Após isso, identificamos o percentual assinalado pelos alunos em cada distrator – que são as alternativas de respostas com exceção do gabarito – das questões referentes a esse componente curricular. Foram identificados quinze itens referentes a seis descritores, os quais indicam o domínio que o aluno deve ter acerca do conhecimento matemático. A partir desses itens, foi elaborado o instrumento para a pesquisa, com base nos descritores do SAEPE e da avaliação da Prova Brasil.

O instrumento foi elaborado com oito itens que contemplaram alguns subconstrutos dos números racionais, a saber: dois de reconhecimento de fração na ideia de parte de um todo, dois relativos à representação de números racionais na reta numérica, dois sobre equivalência de frações e dois

sobre mudança de representação (forma fracionária Þ forma decimal). Apresentaremos neste artigo quatro itens referentes ao significado parte-todo e representação de números racionais na reta numérica.

A coleta de dados foi realizada com 276 alunos pertencentes a três escolas municipais do Recife, e a aplicação dos instrumentos aconteceu no horário e na sala de aula dos alunos. O professor da turma cedeu o horário para a realização da coleta, a qual foi realizada pelo pesquisador, de forma individual e sem consulta.

Nossa escolha em realizar a pesquisa nessas três escolas se deu em virtude do baixo desempenho das mesmas na avaliação do SAEPE/2008, o qual foi divulgado no ano de 2009.

Após a aplicação do instrumento, foram selecionados 26 alunos para a realização de entrevistas em função de suas respostas ao instrumento de pesquisa, com o objetivo de identificar as estratégias utilizadas pelos mesmos na resolução das questões constantes no protocolo.

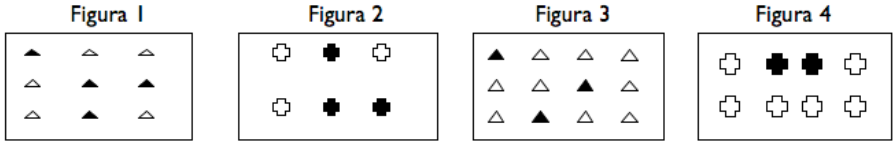
Usamos a entrevista de explicitação com o objetivo de levar os alunos a explicarem as suas respostas ao protocolo, para identificarmos as estratégias utilizadas pelos mesmos na resolução dos itens sobre números racionais.

Análise dos resultados

Podemos observar que, tanto em nossa pesquisa, quanto no resultado do SAEPE, em nenhum dos itens, o percentual de acerto chegou a 50%, o que é um dado preocupante, do ponto de vista do ensino. Isso porque o ensino dos números racionais, na sua representação fracionária, inicia-se a partir do terceiro ano do Ensino Fundamental, e os alunos que participaram desta pesquisa e da avaliação do SAEPE estão no último ano do Ensino Fundamental. No tocante às estratégias utilizadas pelos alunos ao responderem os itens do instrumento de pesquisa, observamos que, para um mesmo significado dos números racionais, os alunos utilizam estratégias diferentes na resolução dessas questões, assim como verificamos, também, o uso de uma mesma estratégia em questões com significados diferentes dos números racionais.

Apresentamos a seguir, quatro itens do instrumento de pesquisa – dois sobre equivalência de frações e dois sobre mudança de representação da forma fracionária para a forma decimal – com as estratégias identificadas em cada um desses itens.

Item 01 – Observe a parte sombreada nas seguintes figuras.



A parte sombreada pode ser representada pela mesma fração nas figuras:

a) 1 e 3 b) 2 e 3 c) 2 e 4 d) 3 e 4

Figura 1: Item 1 do protocolo de pesquisa

No item da figura 1, verificamos que o percentual de alunos que acertou foi muito baixo, 12,3% em nossa pesquisa e 18,6% no resultado do SAEPE. Creditamos esse baixo índice de acertos ao fato de que, nesse item, o aluno precisa fazer a conversão do registro figural discreto para o registro simbólico numérico fracionário, e, em seguida, fazer o tratamento para encontrar a resposta.

Com relação ao distrator da alternativa B, observamos que a maioria dos alunos assinalou esta alternativa, tanto em nossa pesquisa, quanto no resultado do SAEPE. Nossa hipótese para esse distrator foi: Indica que o aluno pode estar levando em consideração a quantidades de figuras sombreadas. Essa hipótese foi confirmada, uma vez que, durante a realização das entrevistas, um aluno afirmou ter marcado essa alternativa pelo fato de as duas terem o mesmo número de figuras sombreadas.

Item 02 – Uma sorveteria realizou uma pesquisa com seus clientes para descobrir o sabor de sorvete preferido pela maioria deles. Os resultados dessa pesquisa estão representados no quadro abaixo.

$\frac{6}{9}$ Preferem sorvete sabor chocolate
$\frac{3}{9}$ Preferem sabor napolitano
$\frac{18}{27}$ Preferem sorvete sabor morango
$\frac{15}{20}$ Preferem sorvete sabor flocos

Dois sabores de sorvetes foram igualmente preferidos pelos clientes pesquisados. Quais são esses sabores?

a) Morango e chocolate. c) Napolitano e chocolate.

b) Napolitano e flocos. d) Chocolate e flocos.

Figura 2: Item 2 do protocolo de pesquisa

Observamos que houve uma variação com relação ao número de alunos que acertou o item 2 em nossa pesquisa (36,2%) e no resultado do SAEPE (22%), uma vez que a diferença entre os

percentuais de acertos nos dois casos é de 14,2 pontos. Com relação aos demais distratores, o que nos chama atenção é o distrator da letra C, pois tanto em nossa pesquisa, quanto no resultado do SAEPE, a maioria dos alunos escolheu esse distrator, 39,1% em nossa pesquisa e 37,7% no resultado do SAEPE. Durante a realização das entrevistas, o que podemos constatar é que dois alunos entrevistados disseram ter marcado a alternativa C porque era nessa alternativa que estavam os menores números.

Item 03 – A professora Clotilde pediu que seus alunos escrevessem um número que representasse meio ou metade.

Geraldo	Cássio	Carla	Fernando
$\frac{1}{}$			

Os alunos que acertaram o exercício foram:

a) Cássio e Carla b) Geraldo e Cássio c) Carla e Geraldo d) Geraldo e Fernando

Figura 3: Item 3 do protocolo de pesquisa

No item 3, o registro de partida aparece na linguagem natural, podendo ser associado a dois registros de chegada em linguagem simbólica, um registro fracionário e um registro decimal.

Com relação aos alunos que acertaram esse item, foi mantida a regularidade entre os percentuais de alunos em nossa pesquisa e na avaliação do SAEPE, uma vez que a diferença entre eles é de apenas 2 pontos.

Com relação ao distrator da alternativa A, a nossa hipótese foi a seguinte: Indica que o aluno reconhece a representação 0,5, mas pode estar associando a fração $\frac{1}{2}$ à representação 1,2. Entretanto, não conseguimos comprovar ou negar a nossa hipótese, uma vez que dois alunos que foram entrevistados sobre esse distrator, disseram que não sabiam e escolheram aleatoriamente essa alternativa porque era a primeira.

Item 04 – O número 0,02 também pode ser escrito da seguinte forma:

a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{20}$ c) $\frac{1}{50}$ d) $\frac{1}{200}$

Figura 4: Item 4 do protocolo de pesquisa

No item 4, o que nos chama atenção é o baixo percentual de acertos, tanto em nossa pesquisa (8,3%) quanto no resultado do SAEPE (6,4%), e a diferença dos percentuais de acertos nos dois casos é de apenas 1,9 ponto. Outro fato a ser observado é a diferença nos números de acertos entre os itens 03 e 04, que em nossa pesquisa é de 20,7 pontos e no resultado do SAEPE é de 29,6

pontos, já que esses dois itens tratam do mesmo significado dos números fracionários, ou seja, os itens versam sobre a mudança da forma fracionária para a forma decimal e vice-versa.

Acreditamos que essa diferença entre os percentuais de acertos nesses itens, deva-se ao fato de que, embora nos dois itens haja a necessidade de se efetuar a conversão da representação dos números racionais. No item 03, o aluno pode usar como registro de partida tanto a representação fracionária quanto a representação decimal. Entretanto, no item 04, pelo fato de no comando constar a representação decimal, o aluno tende a usá-la como registro de partida e por isso esse item apresenta um maior nível de dificuldade.

Considerações finais

Com relação às estratégias utilizadas pelos alunos ao responderem os itens do instrumento de pesquisa, verificamos que, mesmo sendo trabalhados ao longo de todo o Ensino Fundamental, os números fracionários continuam a ser um componente curricular no qual os alunos apresentam muita dificuldade.

Observamos a dificuldade que os alunos apresentam ao encontrarem situações envolvendo o conceito de fração (*referente*), seja na sua forma fracionária, decimal, ou pictórica (*significante*) para se apropriar dos invariantes das frações, que são ordem e equivalência (*invariantes*).

Diante dessa dificuldade, percebemos a utilização de estratégias totalmente descontextualizadas dos problemas propostos para o encontro de respostas para as questões, mesmo que essas respostas nada tenham a ver com os comandos dos itens.

Entre as estratégias identificadas em nossa pesquisa, a situação mais recorrente é aquela na qual o aluno faz uso dos dados contidos no problema sem elaborar nenhum significado para essa ação. Nesse procedimento, os alunos permanecem ligados ao contexto do problema sem dominar as relações entre os conceitos envolvidos, e tentam resolver a questão utilizando as operações matemáticas com as quais estão familiarizados para operar esses dados, e, assim, encontrar a resposta.

No âmbito geral, verificamos que não houve regularidade na utilização das estratégias por parte dos alunos, uma vez que identificamos o uso de estratégias diferentes para tentar resolver uma mesma questão, assim como o uso da mesma estratégia em questões com significados diferentes.

Por fim, ressaltamos a importância do papel do professor como educador matemático e a necessidade do mesmo ter acesso às estratégias utilizadas pelos alunos nas avaliações de larga escala, para que, a partir dessas informações, possa repensar a sua prática de sala de aula. De posse dessas informações, o professor poderá discutir essas estratégias com os alunos, para, como

afirma Vergnaud (1991), ajudá-los a transformar conhecimento intuitivo em conhecimento explícito.

Referências bibliográficas

Campos, T., Jahn, A. P., Leme da Silva, M. C. e da Silva, M. J. (1995). *Lógica das equivalências*. Relatório de pesquisa não publicado; PUC, São Paulo.

Duval, R. (1999). *« L'analyse cognitive du fonctionnement de le pensée et de l'activité mathématique »* . Curso sobre aprendizagem intelectuais. Programa de estudos pós-graduados em Educação Matemática. São Paulo: PUC.

Kerslake, D. (1986). *Fractions: children's Strategies and errors*: *a report of the strategies and errors in Secondary Mathematics Project.* Windsor: NFER – Nelson.

Merlini, V. L. (2005). *O conceito de fração em seus diferentes significados*: *um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental.* Dissertação de Mestrado em Educação Matemática não publicada. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Nunes, T.; Campos, T.; Magina, S.; Bryant, P.(2005). *Educação Matemática: números e operações numéricas.* São Paulo: Cortez.

Nunes, T.; Bryant, P. (1997). *Crianças fazendo matemática.* Porto Alegre: Artes Médicas.

Pernambuco, Secretaria de Educação. (2008). *Boletim Pedagógico de Avaliação da Educação: SAEPE.* Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Educação, CAEd., Juiz de Fora.

Pernambuco, Secretaria de Educação. (2009). *Boletim Pedagógico de Avaliação da Educação: SAEPE*. Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Educação, CAEd., Juiz de Fora.

Santos, A. (2005). *O conceito de fração em seus diferentes significados: um estudo diagnóstico junto a professores que atuam no Ensino Fundamental.* Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Vasconcelos, I. C. P. (2007). *Números Fracionários: A construção dos diferentes significados por alunos de 4ª a 8ª séries de uma escola do Ensino Fundamental.* Dissertação de Mestrado em Educação. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

Vergnaud, G. (1991). A Teoria dos Campos Conceituais. *Recherches en didactique des mathématiques* 10(23), 133-170.

POR UMA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PARA ALÉM DO CAPITAL E COM JUSTIÇA SOCIAL

Marco Aurélio Kistemann Jr.
Universidade Federal de Juiz de Fora Brasil
marco.kistemann@ufjf.edu.br

Resumen. O tema deste artigo segue uma continuidade da conferência apresentada na Relme-26, "Por uma educação (matemática) para além da lógica do capital", na qual discutimos a Matemática Educativa, inserida em contextos da Educação Matemática, com o tema da Justiça Social. Para essa continuação, utilizamos as ideias de Ubiratan D'Ambrósio e Ole Skovsmose e seus pressupostos de justiça social por meio do *trivium* Literacia, Materacia e Tecnocracia (L-M-T), embasados na ética e justiça social.
Palabras clave: justiça social, materacia, literacia.
Abstract. The theme of this mathematics) beyond the logic of capital", in which we discussed the Educational Mathematics, inserted in contexts of mathematics education, with the theme of Social Justice. For this continuation, we use the ideas of Ubiratan D' Ambrosio and Ole Skovsmose and its assumptions of social justice through the *trivium* Literacy, Materacy and Technoracy (L-M-T), based on ethics and social justice.article follows a continuity of the Conference presented at Relme-26, "For an education.
Key words: social justice, materacy, literacy.

Introdução

Neste artigo ampliamos uma discussão iniciada no Relme-26, e nele apresentamos discussões teóricas apresentadas no corpo deste artigo que trata do tema da Justiça Social.

Então, nos embasamos, nas palavras de D'Ambrósio (1990) e que utilizamos ao longo de nossa conferência por acreditarmos que elas são uma tentativa de satisfazer as necessidades básicas para uma vida satisfatória e saudável, com liberdade e escolha, saúde e integridade física, boas relações sociais, segurança, paz e respeito às diversidades, culturais, sociais, étnicas, políticas e religiosas. Nesse sentido, inquirimos: "Que tipo de mundo nós como educadores matemáticos e matemáticos estamos deixando para as demais gerações, quando tomamos a decisão de desvincular aprendizagem matemática de justiça social?".

Num mundo escolar em que se valorizam mais as provas e avaliações em larga escala, questões éticas têm sido relegadas para o segundo plano. Muitos entendem que, a transmissão do conhecimento que mais tarde será detectado por meio de provas supre todas as necessidades que devemos prover a nossos educandos. De acordo com D'Ambrósio (1999), tal estratégia gera uma ilusão de que à escola cabe, tão somente, a instrução matemática, sem que se leve em consideração atitudes básicas humanistas que podem gerar práticas com justiça social.

Nesse sentido, cabe à educação (matemática) ter objetivos bem delimitados, além de meramente preparar profissionais para o sucesso profissional. Ambicionar uma sociedade com justiça social é crer que a educação (matemática) seja responsável pela construção, juntamente

com os laços familiares, de seres humanos que percorram sua trajetória com alteridade, dignidade e respeito aos valores dos demais que o cercam nos grupos sociais.

ParaD'Ambrósio (2006), os problemas enfrentados atualmente em muitos países residem na deficiente formação de professores de matemática e a falta de sintonia dessa formação, com as particularidades da sociedade capitalista de consumo atual.

O papel da Educação Matemática

Entendemos que, o principal objetivo da Educação Matemática deva ser garantir uma Matemática Educativa como um relevante instrumento, de modo a preparar as futuras gerações para viver num mundo com mais equidade e justiça social. É inconcebível aceitar argumentos em prol de uma Educação Matemática que, na ação de seus educadores matemáticos, apenas transmitam seus conhecimentos sem referências às práticas éticas inerentes a esses conhecimentos. De acordo com D'Ambrósio (1999), educadores matemáticos não podem mais ignorar o fato de que seus mais bem sucedidos estudantes podem, por exemplo, se tornar engenheiros, que desenvolverão armas de extinção em massa de seres humanos, ou economistas a reforçarem táticas gananciosas que provocam mais exclusão no capitalismo.

Além disso, cabe à educação matemática, na figura de seus representantes, usar a educação como estratégia de redução das injustiças e desigualdades sociais na medida em que as práticas se desenvolvam fundamentadas no desenvolvimento da criticidade dos educandos. Na sociedade capitalista em que vivemos, o ensino-aprendizagem práticas de ensino de matemática permeadas pela prejudicial neutralidade científica e ensino de objetos matemáticos obsoletos, incrementam a distância entre os indivíduos eleitos socialmente e os indivíduos que jazem em situações de pobreza e exclusão.

Assim, estamos diante de um dilema, ou seja, para quê Educação Matemática? E por que devemos nos preocupar com uma Educação Matemática geradora de justiça social? Podemos seguir duas linhas de ação. Uma primeira linha que crê numa educação como estratégia para se ensinar conteúdos matemáticos e avaliá-los por meio de provas e testes. Ao optarmos por essa linha estaremos promovendo exclusão social, pois nessa linha a Matemática constitui-se como filtro que segrega gradativamente os mais "aptos", colocando um grande contingente de indivíduos à margem da inclusão sociocultural.

Ou, em contrapartida, podemos tomar o caminho do ensino-aprendizagem de Matemática, de modo a promover estratégias de inclusão na educação. Nesse caminho, a mediação do professor na sala de aula de Matemática se constitui como ação central na construção do

conhecimento matemático. O aluno nesse processo se constitui no agente da construção desse conhecimento. A colaboração aluno-professor, entendemos, promove à democratização na sala de aula e em decorrência a inclusão social ao proporcionar a todos os alunos a possibilidade de aprender matemática e utilizá-la de forma criteriosa e ética. Cremos que essa opção aquilata-se nas propostas de Matemática Educativa e pode tomar rumos de promoção de justiça social.

Colocar em prática essa inclusão passa pela prática do *trivium*proposto por D'Ambrósio (1999), qual seja de práticas educativas permeadas pela literacia (L), materacia (M) e tecnocracia (T). O currículo embasado nesse *trivium* e gerador de justiça social, em nosso entendimento e, de acordo com D'Ambrósio, compreende uma larga percepção da complexidade do mundo e da sociedade de consumo atual, possibilitando aos educandos instrumentos matemáticos, filosóficos e políticos para atuar nessa complexidade.

Um currículo de Matemática que promova justiça social

Entendemos que a Educação/Matemática de qualidade formal e política engendra-se como instrumento de formação ampla, de lutas de direitos de cidadania e da emancipação social, preparando os indivíduos e a sociedade para a responsabilidade de construir, coletivamente, um projeto de inclusão e de justiça social. Esse tipo de Educação/Matemática tem como escopo a inclusão social, de modo que cada indivíduo se torne apto ao questionamento, à problematização, à tomada de decisões, buscando as ações coletivas possíveis e necessárias ao encaminhamento dos problemas conjuntos e individuais (Kistemann JR., 2011).

Em várias conferências D'Ambrósio revela a importância de se praticar um currículo de Matemática que leve em consideração os avanços tecnológicos e supere o currículo obsoleto, com o ensino de temas que só promovem a exclusão social e o abandono da escola de muitos alunos.

Nesse sentido, defendemos um currículo de Matemática em que visando justiça social e equidade, cada educando seja, em primeiro lugar, habilitado a processar criticamente as informações que tem acesso, bem como escrever e produzir significados para os discursos, gestos, códigos, representações gráficas (Literacia)-[L]. O desenvolvimento da Literacia nas salas de aula de matemática constitui-se como uma ampla ação para promover a inclusão social, ao proporcionar a cada aluno a interpretação crítica de textos em geral e que envolvem conteúdos matemáticos.

Para exemplificarmos, o professor de Matemática pode trabalhar textos relacionando a literatura e a matemática, bem como a interpretação de tópicos envolvendo estatística, com

interpretação de gráficos que modelem temas relevantes para discussão. Ao promover as habilidades inerentes à Literacia, a criticidade dos alunos, mediada pelo professor, será desenvolvida e reduzirá a exclusão social. É urgente desenvolver habilidades que auxiliem os alunos a ler o mundo que frequenta e tome suas decisões, conforme preconizado por Freire (1994).

Num segundo momento e em paralelo com o primeiro, um currículo propiciador do desenvolvimento da capacidade do educando de fazer inferências, formulando hipóteses e refletindo sobre as conclusões obtidas a partir dos dados que produziu. Para D'Ambrósio (1999), esse segundo componente do *trivium*, a Materacia (M), vai muito além do desenvolvimento dos educandos de habilidades de contagem e medida.

A Materacia, nesse sentido, propõe uma profunda reflexão sobre as práticas humanas numa sociedade complexa, capitalista e excludente e em que medida leituras e práticas matemático-educativas podem auxiliar no entendimento dessa sociedade. Concordamos com Skovsmose (2007) quando este defende que Materacia não se refere apenas às habilidades matemáticas, mas também à competência de interpretar e agir numa situação social e política estruturada pela Matemática.

Ao promover a Materacia em sala de aula de Matemática, o professor está propiciando o desenvolvimento das habilidades dos alunos no concernente à leitura, interpretação e inferência de dados advindos de vários cenários, os quais os alunos convivem em seu cotidiano. Em nossas práticas temos em nosso grupo de pesquisa Grife/UFJF/Brasil (Grupo de Investigação Financeiro-Econômica em Educação Matemática) criado situações-problemas com temas ligados aos contextos financeiros do cotidiano.

Objetivamos com essas situações exercitar a criticidade, a investigação e a tomada de decisão de indivíduos-consumidores, no caso os alunos, quando estes lidam com situações que envolvem consumo. São situações como a Situação-problema: Um indivíduo consumidor decide comprar um computador de última geração oferecido em um site da internet. No anúncio do site constam as seguintes propostas: (i) R$2000, 00 à vista só hoje; (i) 10 x r$200,00, a prazo e sem juros. A empresa que está oferecendo o computador no site dizque opreço àvista é definitivo, inegociável, não dando desconto parapagamentos àvistade formanenhuma. Assim: a) O quevocêindivíduo-consumidortema dizersobre esseanúncio no site? b)Essas duas opções depagamento sãoequivalentes?; c) Que opçõesde pagamento você indivíduo-consumidor faria paraadquiriresse computador? (Kistemann JR. 2011).

Situações-problema como a citada despertam nos alunos, mais do que meramente a resolução da situação. Ao professor cabe investigar e convidar os alunos inserindo-os m práticas investigativas de ambientes de interesse dos alunos e nos quais a Matemática possa ajudar na modelação e problematização da situação. O professor ao agir como mediador proporciona aos alunos investigar, por exemplo, nessas situações, a matemática financeira e utilizá-la para sua tomada de decisão. Para tal os alunos devem aprofundar nos conceitos matemáticos inerentes a cada situação e pesquisar a fim de poder tomar a decisão que melhor atenda a sua realidade. É a materacia financeiro-econômica, conforme proposto por Kistemann Jr. (2011) ou a matemática em ação proposto por Skovsmose (2007), sendo desenvolvida na sala de aula de matemática promovendo a inclusão dos alunos em cenários financeiro-econômicos na sociedade de consumo em que se inserem.

A metodologia utilizada em nossa investigação se sustente nos pressupostos da metodologia de pesquisa qualitativa, e os resultados são advindos da investigação realizada na tese de doutorado intitulada: "A produção de significados e a tomada de decisão de indivíduos-consumidores". Grande parte das ideias defendidas neste artigo compõe o arcabouço teórico apresentado na tese em questão.

A Educação Matemática Crítica inclui o interesse pelo desenvolvimento da educação matemática como suporte da democracia e justiça social, implicando que asmicrossociedades de salas de aulas de matemática devem também mostrar aspectos de democracia, inclusão e justiça social. A Educação Matemática Crítica enfatiza que a matemática como tal não é somente um assunto a ser ensinado e aprendido, mas a Matemática em si é um tópico sobre o qual é preciso refletir. D'Ambrosio (1994), usando uma formulação mais incisiva, enfatiza que a Matemática é parte de nossas estruturas tecnológicas, militares, econômicas e políticas e como tal, um recurso tanto para maravilhas como para horrores. Fazer uma crítica da Matemática como parte da educação matemática é um interesse da educação matemática crítica e deve, entendemos ser praticado nas salas de aula de Matemática.

Propomos ainda, o desenvolvimento nas salas de aula de Matemática da Materacia Financeiro-Econômica, pesquisada por Kistemann Jr. (2011) de modo a apresentar aos alunos ambientes/cenários para investigação de situações financeiro-econômicas. Nesses ambientes o professor convida, conforme preconizado por Skovsmose (2000), os alunos a investigarem situações de cunho financeiro-econômicas exercitando a matemática financeira e a leitura critica dessas situações.Entendemos que o desenvolvimento da Materacia Financeira-Econômica nos alunos auxiliará na inclusão social e promoverá justiça social, na medida em que

os alunos utilizem suas habilidades despertadas nos ambientes para tomar decisões sustentáveis e cidadãs.

Ao professor nesse contexto cabe levar para o ambiente de sala de aula tópicos para discussão que transcendam o que Skovsmose (2011) denomina de paradigma do exercício.As práticas de sala de aula baseadas em ambientes/cenário para investigação diferem fortemente das baseadas em exercícios. A distinção entre elas pode ser combinada com uma distinção diferente, a que tem a ver com as referências que visam levar os estudantes a produzirem significados para conceitos e atividades matemáticas, exercitando o senso crítico e desenvolvendo suas competências como cidadão.

Ao optar por incluir os alunos em ambientes para investigação, o professor, com os temas pertinentes, abre espaço para ampliar a Literacia e a Materacia nos alunos propiciando a atuação desses alunos em seus contextos sociais em que se encontram inseridos. Cada aluno nessa proposta deve ser agente da construção de se conhecimento matemático, por meio da mediação docente, trabalhando de forma colaborativa com seus pares.

De acordo com Skovsmose (2007), quando os alunos estão explorando um ambiente/cenário, o professor não pode prever que questões vão aparecer. Uma forma de eliminar o risco é o professor tentar guiar todos de volta ao paradigma do exercício, à zona do conforto, o que gera exclusão da maioria dos alunos e acarreta danos para esses alunos excluídos. Reiteramos que à Educação Matemática, na ação de seus educadores, cabe a responsabilidade de promover a aprendizagem crítica, numa sociedade capitalista fortemente marcada pela individualização, reduzir a exclusão e incrementar a justiça social.

A terceira componente do *trivium*, a Tecnoracia (T), no caminho de justiça social, é prover o educando de cada vez mais familiaridade com a diversidade tecnológica, operando e refletindo de forma ética na funcionalidade e oportunidades oferecidas pelos avanços tecnológicos. Nos contextos sociais atuais, o desenvolvimento de habilidades de Tecnoracia, ou seja, habilidades de utilizar a tecnologia de forma ética e crítica, mediadas pelo professor, podem auxiliar também na construção do conhecimento matemático, promovendo a inclusão social e digital de cada aluno.

Ao optar por um ensino-aprendizagem embasado em ações éticas e que promovam justiça social, o professor mediador utilizará o *trivium* Literacia-Materacia-Tecnoracia [L-M-T] saindo da zona de conforto e passando a frequentar a zona de risco característica das ações que optam por privilegiar ambientes de investigação em detrimento do cotidiano das práticas embasadas no paradigma do exercício. Ao professor cabe a responsabilidade de apresentar aos

alunos situações que despertem a criatividade, o trabalho colaborativo e a criticidade dos alunos para a resolução de problemas utilizando-se de habilidades propiciadas pelo trivium [L-M-T].

Considerações finais

Entendemos que o *trivium* [L-M-T] apresenta-se como uma estratégia que revela nossa preocupação com a busca e consolidação de práticas de educação matemática que promovam justiça social, na medida em que concebe a proficiência matemática além das concepções usuais, quais sejam fazer contagens, medidas, comparações e resolução de exercícios, em geral, ações desvinculadas do contexto cultural em que se inserem os educandos.

Ao invés de um currículo de matemática com conteúdos e práticas obsoletas, conforme criticado por D'Ambrosio (2006), propomos ações matemático-educativas com o *trivium* [L-M-T] de forma a promover o crescente acesso dos educandos a habilidades matemáticas para atuarem na complexidade da sociedade capitalista, com o foco na ética e justiça social.

Nesse sentido mudanças no cotidiano da sala de aula são necessárias, ou seja, por meio da mediação docente, os alunos se tornam investigadores de situações-problema que buscam desenvolver habilidades de pesquisa e habilidades possibilitadas pelas práticas embasadas no trivium [L-M-T].Enfatizamos que, ao professor, atuando como mediador, cabe a atualização do currículo de Matemática inserindo no mesmo dimensões éticas e prática reificadoras de inclusão e justiça social. Entendemos que obstáculos existem para a manutenção do *status quo* de salas de aula de matemática em que o professor fala e os alunos ouvem, porém temos praticado em nosso grupo de pesquisa e nas salas de aula, a proposição de ambientes/cenários para investigação que promovam a inclusão e justiça social.

Referências bibliográficas

Bauman, Z. (2008).*Vida para consumo: a transformação das pessoas em mercadorias.*Rio de Janeiro: ZaharEditora.

D'Ambrósio, U. (1990). *The role of Mathematics Education in building a democratic and justice society*. Netherlands: Sense Publishers.

D'Ambrósio, U. (1999). *Literacy, Matheracy and Tecnoracy: a trivium for today-*

Mathematica Thinking and Learning. Reading: Addison-Wesley Editors.

D'Ambrósio, U. (2006). *Ethnomathematics- Link between Traditions and Modernity*.

Roterdam: Sense Publishers.

Freire, P. (1994). *Pedagogia da Autonomia*. São Paulo: Paz e Terra.

Kistemann Jr., M. A. (2011). *Sobre a Produção de Significados e a Tomada de Decisão de Indivíduos-Consumidores*. Rio Claro: Unesp.

Skovsmose O. (2007) *Educação Crítica: Incerteza, Matemática, Responsabilidade,* São

Paulo: Cortez Editora.

Skovsmose O. (2011). *Educação Matemática Crítica: A questão da democracia*.

Campinas: Papirus.

CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA ENSEÑAR GENOMETRÍA ANALÍTICA A NIVEL UNIVERSITARIO. ELABORACIÓN DE INSTRUMENTOS PARA SU ANÁLISIS

Virginia Ciccioli y Natalia Sgreccia
FCEIA-UNR. CONICET. Argentina
ciccioli@fceia.unr.edu.ar, sgreccia@fceia.unr.edu.ar

Resumen. En este reporte se comparte el proceso de elaboración de los instrumentos para la recolección de los datos de una investigación que conjuga diversas técnicas y participantes. El trabajo se realiza en el marco de un plan de acción más amplio, de un año de duración y que está iniciando su fase de ejecución. El encuadre teórico y metodológico se basa en la noción de *conocimiento matemático para enseñar* (*MKT*), conjugado aquí con las particularidades de la geometría analítica.
Palabras clave: instrumentos, MKT, geometría analítica
Abstract. In this report we share the process of elaboration of instruments for the data recolection of a research that conjugates diverse techniques and participants. The work is made in the context of a wider action plan, which duration is one year and which ejecution is begining. The theoretical and methodological frame is based on the notion of *mathematical knwoledge for teaching*, regarding with the particularities of the analitical geometry.
Key words: instruments, MKT, analitical geometry

Introducción

El presente trabajo se inscribe en una investigación más amplia, denominada "*Conocimiento matemático para enseñar* geometría analítica a nivel universitario. El caso del Profesorado en Matemática de la FCEIA-UNR", en el marco de una Beca de Iniciación a la Investigación Científica y Tecnológica (Res.1787/2012) que se encuentra en su fase inicial de ejecución. El interés por el tema emerge ante la reducida investigación educativa acerca de la formación de grado en didáctica de la geometría analítica.

La lectura realizada al momento de los volúmenes del Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (del 22 al 26), de la Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (del 3 al 15) y de la Revista Iberoamericana de Educación Matemática UNIÓN (del 27 al 32) arroja una importante evidencia de esta vacante. Si bien para la elaboración de los instrumentos se han rescatado algunos aportes, se ha podido observar que ninguno de estos estudios se centra en la formación de docentes en geometría analítica; sino que más bien se focalizan en el nivel secundario. A pesar de ello, es posible observar un común denominador en la mayoría de estas investigaciones: las interpretaciones incorrectas o acotadas de esta rama de la Matemática generan distorsiones en su enseñanza y aprendizaje.

De acuerdo con Arellano Cabezas y Oktaç (2009), los alumnos del nivel medio superior presentan dificultades en el pasaje del registro gráfico al algebraico en el tratamiento de ecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones lineales. Según señalan, esto se debe a la escasa importancia que se le da al uso de las gráficas y a la falta de reinterpretación de los conceptos y procedimientos algebraicos

en los problemas propuestos durante la escolaridad. Los estudiantes sólo son capaces de manejar los conceptos y procedimientos en los contextos en que fueron "aprendidos". Karrer y Navas Barreiro (2013) también observan dificultades en los estudiantes para realizar las transformaciones de un registro semiótico a otro en contenidos propios de la geometría analítica. Asocian este hecho, por un lado, al tratamiento acotado de tales contendidos en los libros de texto, que priorizan los registros monofuncionales discursivos (como el algebraico) y, por otro lado, a una formación de los docentes de la carrera fuertemente orientada al uso de los mismos.

Guajardo García y López Vera (2009) ofrecen propuestas didácticas para desarrollar el contenido "desigualdades cuadráticas" con el soporte de software para graficar. La potencialidad de este tipo de herramientas, según los autores, también radica en la posibilidad de trabajar en otro registro (geométrico), lo que aporta una nueva mirada de los problemas (resolución de desigualdades cuadráticas) que acarreaban ciertas dificultades en los alumnos al ser tratados únicamente desde el enfoque analítico. De acuerdo con Buendía (2012), las gráficas son fundamentales para el aprendizaje de la geometría analítica. Es necesario conocerlas para lograr su construcción, utilización como modelo e interpretación, y en su enseñanza interviene el profesor en Matemática. En este proceso se involucran la articulación de los elementos semióticos que componen la gráfica, la visualización de la misma en un cierto contexto y las conversiones entre registros semióticos (Duval, 1999).

Ante este panorama, en la investigación interesa analizar la formación que se ofrece en la carrera Profesorado en Matemática (PM) de la Universidad Nacional de Rosario (UNR) para enseñar geometría analítica a nivel universitario. Específicamente se orienta a:

- Determinar la contribución formativa de la asignatura Geometría I (en la que se enseñan los conocimientos básicos de geometría analítica en la carrera) en la configuración del *conocimiento matemático para enseñar* geometría analítica a nivel universitario.
- Identificar los modos de activación de los distintos dominios del *conocimiento matemático para enseñar* en estudiantes avanzados de la carrera.
- Caracterizar la visión de la formación por parte de los egresados del PM para enseñar geometría analítica en el Ciclo Básico de las Ingenierías de la UNR.

En este reporte se comparte el proceso de elaboración de los instrumentos para la recolección de los datos de la investigación, la cual conjuga diversas técnicas y participantes desde un entramado teórico-empírico que le da sustento.

Marco teórico

Sánchez (2011) muestra cinco ejes de relevancia en las investigaciones acerca de la formación de profesores en Matemática: creencias, visiones y concepciones de los profesores; prácticas docentes; conocimiento y habilidades de los profesores; relación entre teoría y práctica; práctica reflexiva. El eje *conocimiento y habilidades de los profesores* se vincula con aquello que debe disponer un docente para generar una buena enseñanza. Shulman (1986) inicia esta línea de investigación sobre la clase de conocimiento requerido por el profesor en la enseñanza de cualquier asignatura. Ball, Thames y Phelps (2008) orientan dicha línea hacia la Matemática y proponen un conjunto de seis dominios de *conocimiento matemático para enseñar (MKT)* que han de disponer los profesores (Fig. 1).

La geometría analítica unifica el álgebra y la geometría. Permite analizar las relaciones existentes entre estas ramas de la Matemática y operar con ellas, como consecuencia de la asociación de números con puntos y de ecuaciones con figuras, los cuales sirven como herramienta para la resolución de problemas en áreas como la Ingeniería. Los principales precursores de la geometría analítica fueron Descartes (1596-1650), Fermat (1601-1665) y Euler (1707-1783). La geometría analítica proporciona cientos de aplicaciones en diversas áreas del desarrollo de la humanidad. Se utiliza en un conjunto considerable de disciplinas y profesiones, tales como Física, Astronomía, Arquitectura, Arqueología, Cartografía, Topografía, Sociología, Marketing, Economía; sin olvidar numerosas aplicaciones tales como los Sistemas de Posicionamiento Global (GPS). Es por ello que la geometría analítica está presente en la formación básica de profesionales de diversos campos del mundo entero.

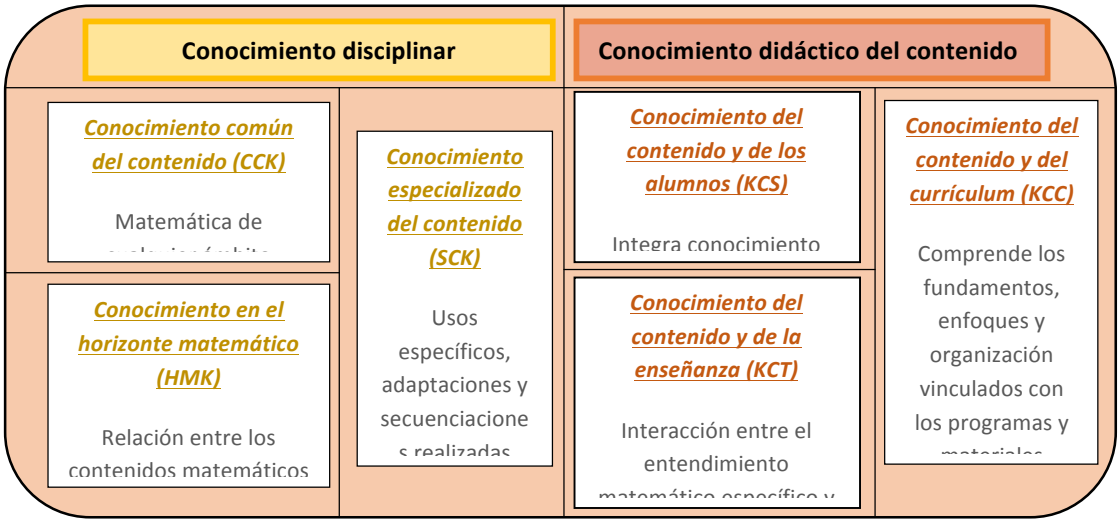


Figura 1. Dominios del *MKT* (Ball et al., 2008)

Metodología de la investigación

La metodología empleada asume un enfoque eminentemente cualitativo en su contexto natural (Taylor y Bogdan, 1987), con algunos aportes cuantitativos. El enfoque cualitativo en investigaciones que estudian fenómenos didácticos se considera pertinente porque la educación tiene que ver con acciones humanas (Contreras, 1994).

El diseño es particularista (Rodríguez Gómez, Gil Flores y García Jiménez, 1999) y responde al de un estudio de caso: el PM de la UNR, centrado en la configuración del *MKT* geometría analítica a nivel universitario, de acuerdo a los objetivos de la investigación.

El alcance de la investigación es principalmente descriptivo, ya que busca especificar las características y los perfiles importantes del caso en estudio de acuerdo a las categorías de análisis (Hernández Sampieri, Fernández Collado y Baptista Lucio, 2006). La investigación es de tipo empírica, porque recoge información de fenómenos de la realidad para lograr los objetivos específicos, y transversal, debido a que se recolectan datos con simultaneidad y en instancias puntuales para un cierto fin (Bravin y Pievi, 2008).

El sistema de categorías de análisis está delimitado por los dominios del *MKT*. Las técnicas de investigación, procurando la triangulación metodológica, son: observación de clases en la asignatura Geometría I; entrevistas semi-estructuradas a los profesores de Geometría I; cuestionarios abiertos a estudiantes avanzados de la carrera; grupos de discusión con egresados del PM que trabajan en Ingeniería de la UNR.

Resultados

Se procede a elaborar los instrumentos de recolección de la información durante el primer semestre de 2013 de manera tal de relacionar convenientemente las categorías de análisis, los objetivos de la investigación, las técnicas y los participantes a quienes van dirigidos. A continuación se muestran los ejes de interés que guían los protocolos de los instrumentos. Se consigna, entre paréntesis, el dominio del *MKT* que se le asocia desde su formulación.

- Observaciones de clases en la asignatura Geometría I.

Se pretende analizar no sólo cómo se ponen en juego los distintos dominios del *MKT* en los docentes de la materia, sino también cómo, desde la enseñanza disciplinar, se favorece la activación de dichos dominios en los futuros docentes en lo relativo a la geometría analítica.

1) *Con relación al contenido de la clase: contenidos y habilidades involucrados (CCK), secuenciación del contenido (SCK), temporización en cuanto al programa (KCC), registros semióticos de representación que se promueven (SCK), vinculaciones matemáticas más allá del contenido en tratamiento (HMK), emergentes.*

2) *Con relación al docente: estrategias didácticas implementadas (KCT), tipos de actividades (SCK), atención a las particularidades del alumnado (KCS), bibliografía considerada (KCC), intencionalidad didáctica del empleo de diversos recursos (KCT), seguridad conceptual (CCK), seguridad en la planificación, organización, manejo y monitoreo de la clase (KCT), valoración de las intervenciones del alumnado y trabajo sobre el error (KCT, SCK), lógica en la secuenciación de contenidos (KCC), organización temporal de la clase (KCT), promoción de la vinculación con otras disciplinas o con hechos cotidianos (HMK), vinculación de los contenidos de la clase con conocimientos previos (SCK), evaluación (tipo, frecuencia e instrumentos) (SCK).*

3) *Relativo a la relación alumnos-docente-contenido: relación docente-alumno, grado de compromiso en el desempeño de la tarea docente y en la enseñanza de contenidos (SCK, KCT, KCC, KCS), nivel de involucramiento en problemáticas generales de la materia y de la carrera (KCS, KCC, KCT).*

- Entrevistas semi-estructuradas a docentes de Geometría I.

Este instrumento se elabora con el propósito de fundamentar, desde la visión de los propios docentes de la materia, aquellos aspectos observados en las clases. Se intenta develar la mirada del docente como formador de formadores y las implicancias que esa enseñanza tiene, a su forma de ver, en el aprendizaje de los alumnos (futuros docentes); todo ello atravesado por la disciplina.

1) *¿Por qué considera que es importante la geometría analítica en la formación de un futuro profesor en Matemática? ¿Qué habilidades o destrezas cree que aporta el aprendizaje de esta asignatura que no aportan (o lo hacen en menor medida) otras ramas de la Matemática? (CCK, SCK, HMK).*

2) *¿En qué momentos del desarrollo de la asignatura considera que se hace explícita la conexión entre el álgebra y la geometría? (CCK, HMK, SCK) ¿Cómo desarrolla este "ida y vuelta" en sus clases? (KCT) ¿Qué importancia relativa le da a estos momentos o situaciones específicas? (KCC).*

3) *¿Qué errores o dificultades prevé en los alumnos con relación a la internalización de los conocimientos en cuestión? (KCS) ¿Con qué tipo de obstáculos los asocia? ¿Cómo afronta estas dificultades o errores durante las clases? (HMK, KCS, KCT, SCK).*

4) *La argumentación es una de las habilidades que se pretende desarrollar en los estudiantes del PM y que se encuentra entre los niveles más altos de razonamiento en la categorización propuesta por Van Hiele. Si bien esta habilidad viene siendo desarrollada en los alumnos a lo largo de su escolaridad secundaria, en el nivel superior comienza a exigirse una mayor formalidad debido a su maduración cognitiva. ¿Qué actividades se proponen desde la cátedra para fomentar la formalización en la argumentación en los contenidos propios de la geometría analítica? (SCK, KCS).*

5) *La "monumentalización del saber" es un término introducido por Chevallard para hacer referencia a aquellas situaciones de enseñanza en las que adquiere mayor importancia la figura del docente y donde los alumnos son espectadores de un saber transmitido por el docente. ¿En qué medida se hacen evidentes este tipo de situaciones en sus clases? ¿Considera que es un modelo de enseñanza apropiado para este nivel? ¿Y para otros niveles? ¿Por qué? (SCK).*

6) *¿Cuáles considera que son las fortalezas y debilidades en su práctica pedagógica en la asignatura? (KCT, KCS, KCC).*

- Cuestionarios abiertos a estudiantes avanzados de la carrera.

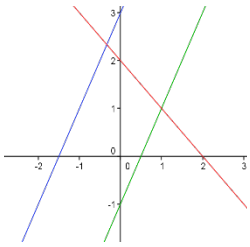
Se aplican a estudiantes avanzados de la carrera, luego de haber transitado casi la totalidad de la misma. Cada actividad se relaciona con alguno(s) de los dominios con el objetivo de, a partir de sus respuestas, develar el grado de conocimiento adquirido en la carrera.

1) *Dada la siguiente actividad: "Hallar la ecuación de la recta que interseca al eje y en el punto de coordenadas (0;4) y al eje x en el punto (-2;0)", analice si la resolución presentada a continuación es correcta o no. En caso de ser correcta, identifique los conocimientos puestos en juego. En caso de ser incorrecta, detecte el error (CCK) y ofrezca una explicación acerca de los posibles motivos del mismo (SCK).*

"Intersección con el eje y: (0;4) → h=4

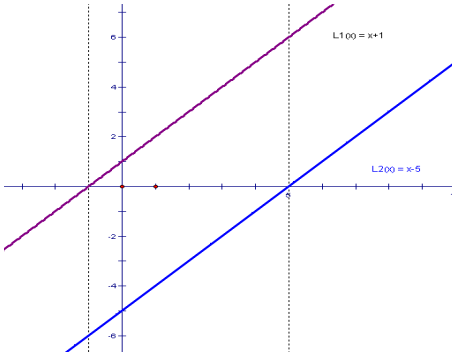
Intersección con el eje x: (-2;0) → m=-2

La ecuación de la recta buscada es y = -2.x + 4".



2) *a) Escriba las ecuaciones correspondientes a la siguiente gráfica y resuelva el sistema de ecuaciones asociado, gráfica y analíticamente (CCK). ¿Cómo explicaría a un alumno de nivel universitario la conexión entre los resultados obtenidos en la resolución gráfica y en la resolución analítica? (esboce una explicación como si estuviese desarrollando este contenido en una clase). ¿A qué registros semióticos de representación considera que debe recurrirse para resolver esta actividad? (se entiende por registro semiótico de representación al sistema de representación relativo a un sistema particular de signos: el lenguaje coloquial, la escritura algebraica o los gráficos que, además, puede ser convertido en una representación equivalente en otro registro). ¿Considera que existe algún otro registro que pueda ser utilizado en el tratamiento del contenido "sistemas de ecuaciones"? En caso afirmativo, identifíquelo y proponga una situación en la que deba recurrirse al uso del mismo. En caso negativo, explique por qué considera que son suficientes los registros que mencionó más arriba para el desarrollo completo del contenido en cuestión (SCK, KCT).*

3) *Dada la desigualdad* $x^2 - 4x - 5 > 0$, *analice si la siguiente resolución es correcta (CCK). En caso de ser incorrecta, corríjala respetando la secuencia de razonamiento propuesta. En caso de ser correcta, proponga otra forma de resolver la desigualdad que también haga uso del registro gráfico. ¿Cuáles son las ventajas de utilizar una u otra forma? (SCK).*



"Al factorizar la expresión cuadrática $x^2 - 4x - 5$ *tenemos* $(x + 1).(x - 5)$.

Luego si consideramos las gráficas de L1: $y = x + 1$, *L2:* $y = x - 5$, *observamos que:*

- L1 y L2 están sobre el eje x si $x > 5$.

Entonces $x + 1 > 0$ *y* $x - 5 > 0$ *si* $x > 5$

- L1 y L2 están bajo el eje x si $x < -1$.

Entonces $x + 1 < 0$ *y* $x - 5 < 0$ *si* $x < -1$.

Es decir, $(x + 1).(x - 5) > 0$ *si* $x \in (5 ; +\infty)$ *pero también,* $(x + 1).(x - 5) > 0$ *si* $x \in (-\infty; -1)$.

Por tanto, el conjunto solución de la desigualdad dada es: $(-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$*".*

En variadas investigaciones se ha observado que los estudiantes al enfrentarse a una expresión cuadrática, automáticamente resuelven la ecuación asociada. ¿A qué cree que se debe este hecho? ¿Cómo explicaría a un alumno la diferencia entre ecuación cuadrática y desigualdad cuadrática? (KCS, KCT).

4) *Para hallar la recta tangente a una circunferencia en un punto dado (teniendo como dato la ecuación de la circunferencia y las coordenadas del punto) se puede recurrir, entre otros, a los dos métodos siguientes (KCC):*

** aplicar la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto dado (recurriendo al método de derivación implícita de la ecuación de la circunferencia para obtener la pendiente de dicha recta);*

** hallar la ecuación de una recta que pase por el punto dado y que sea perpendicular a la recta que pasa por el centro de la circunferencia y el punto dado.*

¿Cuál de los procedimientos propuestos considera que evidencia en mayor medida un aprendizaje significativo del contenido "recta tangente a una circunferencia"? Justifique su respuesta (SCK).

5) *Al girar una parábola sobre su eje, obtenemos una superficie de revolución llamada paraboloide de una hoja. Estas superficies tienen muchas aplicaciones, principalmente en óptica y electrónica, ya que si un rayo de luz paralelo al eje choca contra el paraboloide, entonces se refleja hacia su foco, e inversamente, si*

un rayo sale del foco y choca contra el paraboloide, éste se refleja en la dirección de su eje. Proponga una situación problemática que involucre algún hecho de la realidad en el que deba recurrirse al uso de esta propiedad. ¿Conocía esta propiedad?, ¿la aprendió en la carrera? En caso afirmativo, explicite la materia en que se trató dicha propiedad y explique brevemente cómo fue desarrollada. En caso negativo, ¿considera que es importante para su formación conocerla?, ¿por qué? (HMK, KCC).

- Grupos de discusión con ciertos egresados de la carrera.

Se pretenden develar distintos aspectos del conocimiento disciplinar y didáctico del contendido y, si es que existen, diferencias en los modos de enseñar geometría analítica a futuros docentes y a futuros profesionales que utilizan esta disciplina como una herramienta.

1) *¿En qué aspectos se diferencian la geometría analítica que estudiaron en la carrera con la que enseñan a estudiantes de Ingeniería? ¿A qué creen que se deben tales diferencias? Den ejemplos de situaciones vividas en las que se hayan hecho evidentes (CCK, HMK, SCK, KCT, KCC).*

2) *¿De qué manera se articulan las actividades propuestas en la práctica de la materia relativas a geometría analítica con situaciones de la vida cotidiana o de la profesión ingenieril? ¿Cómo se trabajan en clase? Den ejemplos (HMK, KCT).*

3) *¿En qué situaciones específicas consideran que es "imprescindible" la visualización? ¿De qué manera promueven el desarrollo de dicha habilidad en sus clases? ¿Y qué pueden decir en relación con la diversidad de registros de representación? (SCK, KCT).*

4) (Análoga a la pregunta 5 de la entrevista)

5) *Si pudiesen planificar la materia a su criterio: ¿qué modificaciones harían en cuanto a: contenidos a desarrollar, metodologías de enseñanza, secuenciación, recursos y materiales didácticos, modos y criterios de evaluación? (KCC, SCK, KCT).*

Comentarios finales

A modo de sinopsis se resalta que la investigación se aborda involucrando a:

- 3 tipos de participantes (docentes, estudiantes y egresados del PM);
- 4 técnicas de recolección de datos (observación de clases, entrevistas semi-estructuradas, cuestionarios abiertos y grupos de discusión);
- 20 cuestiones a resolver (4, 6, 5 y 5, respectivamente);
- 6 dominios del *MKT*, cuya distribución según la técnica empleada se ve en la Tabla 1.
-

Técnica / Dominio	Observaciones de clases	Entrevistas semi-estructuradas	Cuestionarios abiertos	Grupos de discusión
CCK	2	2	3	1
HMK	3	3	1	2
SCK	7	5	4	4
KCS	4	4	1	1
KCT	7	3	2	3
KCC	4	2	2	2

Tabla 1. Dominios del MKT que se pretenden activar mediante cada técnica de la investigación

Poder estudiar cómo se activan los distintos dominios del *MKT* a través de la aplicación de distintas técnicas de recolección de la información y del intercambio con distintos participantes permite dar un enfoque práctico al marco teórico que sustenta la investigación así como enriquecer los aspectos teóricos y metodológicos al unificarlos.

Referencias bibliográficas

Arellano Cabezas, F. y Oktaç, A. (2009). Algunas dificultades que presentan los estudiantes al asociar ecuaciones lineales con su representación gráfica. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22*, 357-368. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.

Bravin, C. y Pievi, N. (2008). *Documento metodológico orientador para la investigación educativa*. Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación.

Buendía, G. (2012). El uso de las gráficas cartesianas. Un estudio con profesores. *Educación Matemática*, *24*(2), 5-31.

Contreras, D. (1994). *Enseñanza, Currículum y Profesorado*. Madrid: Akal.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali: Universidad del Valle.

Guajardo García, E. y López Vera, L. (2009). Las TIC como herramientas cognitivas en el desarrollo de la habilidad de resolución de desigualdades cuadráticas. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22*, 1691-1698. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, P. (2006). *Metodología de la investigación* (4° ed.). México DF: Mc Graw Hill.

Karrer M. y Navas Barreiro, S. (2013). Superfícies Esféricas: Uma proposta de ensino com o auxílio de um ambiente de geometría dinámica. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26*, 1831-1838. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Rodríguez Gómez, G., Gil Flores, J. y García Jiménez, E. (1999). *Metodología de la investigación cualitativa.* Sevilla: Aljibe.

Sánchez, M. (2011). A review of researchtrends in mathematicsteachereducation. *PNA*, 5(4), 129-145.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

Taylor, S. y Bogdan, R. (1987). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación.* Buenos Aires: Paidós.

ACTITUDES DE ESTUDIANTES DE SECUNDARIA HACIA LAS MATEMÁTICAS

María del Socorro García González y Rosa María Farfán Márquez
Cinvestav - IPN México
mgargonza@gmail.com, rfarfan@cinvestav.mx

Resumen. El objetivo perseguidoes ofrecer una explicación de las actitudes que estudiantes de escuela secundaria Mexicana expresan hacia las matemáticas en general y hacia un contenido matemático en particular, la proporcionalidad. Para la realización de la investigación, haremos uso del enfoque biográfico y la narrativa. En este escrito presentamos los primeros avances de investigación.
Palabras clave: actitudes, matemáticas, educación secundaria
Abstract. Our research goal is to offer an explanation of the attitudes expressed by Mexican high school students towards mathematics in general and toward a particular mathematical curricular content, the proportionality. To perform the research, we will use the biographical and narrative approach. In thispaperwepresentthefirstresearchadvances.
Key words: attitudes, mathematics, secondary education

Introducción

El dominio afectivo en Matemática Educativa es referido al extenso rango de sentimientos, emociones, creencias, actitudes, valores y apreciaciones de un sujeto hacia un objeto específico como la matemática, pueden encontrarse indicios a partir de la década de los sesenta, con estudios sobre actitud en la enseñanza de las matemáticas centrados en la relación entre actitud hacia las matemáticas y rendimiento escolar. Con el paso del tiempo el número de investigaciones en este dominio ha crecido, siendo la actitud el aspecto que ha alcanzado mayor difusión en comparación con las emociones y las creencias.

Con base en los resultados de algunas investigaciones realizadas sobre dominio afectivo, se concluye que este juega un papel esencial en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Así, se ha mostrado que las emociones, las actitudes y las creencias, caracterizados como los descriptores básicos del dominio afectivo, son capaces de generar satisfacción, frustración, alegría, gusto, repugnancia, apego, incertidumbre, miedo, desánimo, resistencia o preocupación en quienes protagonizan la clase de matemáticas repercutiendo en la popularidad de ésta y por tanto, en el aprendizaje. De acuerdo con Martínez (2005) la impopularidad de las matemáticas muchas veces está ligada a rendimientos académicos bajos y éstos, a su vez, al fracaso escolar de los estudiantes, dicho fracaso, a decir de este autor, puede tener explicaciones psicológicas, sociales, económicas y culturales.

En las últimas décadas se han realizado importantes investigaciones sobre actitudes hacia las matemáticas, mismas que han evidenciado que las actitudes constituyen factores relevantes al momento de desarrollarse procesos que tienen que ver con el aprendizaje de los estudiantes, por tal razón nos hemos propuesto como objetivo de investigación acercarnos a una explicación de las

actitudes que estudiantes de secundaria tienen hacia la matemática en general y hacia un contenido matemático en particular, a saber, la proporcionalidad. Esperamos a través de la investigación establecer una tipología de actitudes, más allá de las categorías positiva-negativa que ha caracterizado la tradición de investigación en este tema, creemos que dicha tipología nos ayudará a esclarecer el por qué de las categorías mencionadas, además de ayudarnos a alcanzar el objetivo propuesto.

Justificación y Antecedentes

Una razón para considerar que es necesario el estudio de las actitudes, es que éstas sirven para conocer el nivel de aceptación o de rechazo que las personas tienen de algún tema o para indicar el grado en que la población puede generar opiniones, juicios, y sentimientos respecto a diferentes entes (Quiroz, 2004). En nuestro caso, nos hemos propuesto conocer las actitudes que un grupo en particular, estudiantes de secundaria, tienen acerca de un objeto también particular, las matemáticas y un contenido específico del currículum matemático de dicho nivel escolar.

La razón de trabajar con esta población, obedece a que son estudiantes que están empezando a tener un contacto mayor con las matemáticas, a diferencia del nivel escolar anterior, esto queda expresado en el número de horas que les son asignadas (5 horas semanales), además de que en los tres grados que se cursan en educación secundaria las matemáticas son una de las materias obligatorias.Creemos que si los estudiantes en este nivel escolar, manifiestan buenas actitudes hacia las matemáticas esto repercutirá en sus años de estudios posteriores, incluso hasta en la elección de sus carreras. Así mismo, éstas pudieran llevar al estudiante a apreciar, valorar y comprenderlas matemáticas, lo que se traduciría en un mejor rendimiento. Por el contrario una actitud no buena, podría llevar al estudiante a enfrentarse a la materia con miedo, trayendo como consecuencia un bajo rendimiento académico.

La justificación del trabajo descansa en que esta tipología de las actitudes, es útil para tratar con las dificultades de los estudiantes y con ello mejorar su perspectiva hacia la matemática e incidir en su rendimiento académico.

Antecedentes

La actitud, es el objeto de estudio por excelencia de la psicología social, esto a consecuencia de mucho trabajo de investigación por parte de científicos sociales quienes mostraron un gran interés al considerar que esta podía ser utilizada de manera central en el estudio de los aspectos subjetivos de los agrupamientos sociales. Es así como los sociólogos William I. Thomas y Florian Znaniecki acuñaron por primera vez el término en 1918. Con este concepto ellos se referían al sustrato psicológico de una acción social de cualquier complejidad, querían indicar con él un

proceso de la conciencia individual, que determina la actividad, posible o verdadera del individuo en el mundo social (Quiroz, 2004). Desde la aparición del término actitud, ha sido amplio el abanico de significados y connotaciones que los diversos autores le han atribuido, mismos que se han desarrollado bajo distintas corrientes psicológicas, como el conductismo o el cognitivismo, por mencionar algunos. Con respecto a la forma de medirlas, ha prevalecido el uso de instrumentos tales como, las escalas de actitud, los cuestionarios, los sondeos y la observación, mismos que han superado pruebas de confiabilidad y de validez rigurosas. También es de resaltarse la influencia que las actitudes han hecho sentir en otras disciplinas y campos aparentemente alejados de la psicología social, baste como ejemplo mencionar, la Matemática Educativa.

En Matemática Educativa el constructo actitud ganó popularidad debido a dos razones: la necesidad de explicar el fracaso en la resolución de problemas matemáticos y la actividad matemática en sí misma. Al hacer un breve recorrido por el desarrollo del constructo hemos encontrado que su importancia en el aprendizaje de las matemáticas se ha logrado a lo largo de cuatro décadas tras el interés que ha despertado en los investigadores el dominio afectivo, sorteando la falta de una teoría en el campo de los afectos que muchos sugieren necesaria y por lo que la investigación en este punto ha sido criticada (García y Juárez, 2011). Pese a ello, han sido los resultados de las investigaciones los que al parecer han venido fortalecimiento al campo, con el diseño de instrumentos de medida de actitudes, muchos de ellos basados en métodos de otras disciplinas como la psicología y la sociología. Con respecto a la definición de actitud, esta ha evolucionado de su acepción meramente como medida de gusto o disgusto, hasta una definición tripartita que reconoce tres componentes: la respuesta emocional hacia las matemáticas, las creencias sobre las matemáticas y el comportamiento relacionado con las matemáticas.

Respecto al papel que desempeñan las actitudes en el aprendizaje de los estudiantes, ha quedado de manifiesto por ejemplo que sí algo se considera agradable, resulta más fácil de aprender, lo que repercute en el desempeño (Auzmendi, 1992). Hablando específicamente de actitudes, se ha constatado la influencia recíproca entre las actitudes y el logro académico (Neale, 1969), así, estudiantes con actitudes positivas hacia las matemáticas obtienen buenas calificaciones. Al respecto, se hace necesario considerar las variables que influyen en las actitudes de los estudiantes, Gairín (1987) menciona tres de ellas, las personales (entre éstas el sexo y la edad) las familiares (como son los estudios y profesión del padre y la madre) y las escolares (dentro de ellas se encuentran la tipología escolar, el grado escolar cursado, el profesor, la preferencia e importancia y rendimiento académico). Con respecto a la variable género, ha sido notorio que tanto hombres como mujeres manifiestan actitudes hacia las matemáticas, algunas veces positivas, otras tantas negativas, sin embargo han sido las mujeres quienes han manifestado una fuerte

aversión por la materia, sintiéndose más ansiosas y con menos confianza hacia las matemáticas que los hombres, debido a la creencia de que son un dominio exclusivamente masculino (Fennema y Sherman, 1978).

Uno de los aspectos que merece resaltarse, es la influencia de la tecnología en el aprendizaje de las matemáticas, en los trabajos de investigación revisados ha quedado de manifiesto que no siempre la tecnología influye en la confianza de los alumnos al resolver problemas matemáticos (Ursini y Sánchez, 2008) así como tampoco el tipo de actitud hacia las matemáticas con tecnología que tengan los estudiantes, sea negativa o positiva, modifica el rendimiento de los estudiantes (Juárez, 2010). Por otro lado, sobre la tradición de "medir" actitudes hacia las matemáticas que se ha seguido por décadas en los trabajos de investigación, Di Martino y Zan (2007, 2010) argumentan que esto de medir puede ser cambiado por "descubrir" las actitudes, sin ceñir a los estudiantes a un diseño previamente determinado, sino más bien conocerlas desde su punto de vista, en la práctica, ya que finalmente son ellos quienes las experimentan, quienes viven la realidad del proceso educativo, para esto, el uso de la narrativa como informante de la vida propia se torna un recurso de gran utilidad.

Al igual que la mayoría de las investigaciones revisadas, trabajaremos con estudiantes de secundaria, en correspondencia con uno de los resultados donde se dice que los estudiantes desarrollan las actitudes en este nivel escolar (Reys y Delon, 1968). Hemos notado que en la mayoría de las investigaciones al estudiar actitudes hacia las matemáticas, lo hacen hacia la materia en general, en algunos casos ademásde medir actitudes hacia las matemáticas, se han centrado en una rama de ellas como la aritmética o la estadística, ninguna de ellas se centra en un contenido específico de las matemáticas. Por nuestra parte, pretendemos conocer además de las actitudes de los estudiantes hacia las matemáticas, las actitudes hacia un contenido transversal del currículum, como lo es la proporcionalidad.

A decir de Gairín y Escolano (2009), la proporcionalidad es uno de los temas más relevantes para la formación de los ciudadanos, porque pone en juego los aprendizajes aritméticos escolares (medida, fracciones, operaciones elementales, etc.), a pesar de ello existe un bajo grado de competencia por parte de los alumnos, mismo que ha despertado gran interés entre los investigadores y profesores; de este modo, se ha producido una abundante literatura científica que aborda diferentes aspectos del proceso instructivo y de la comprensión de los estudiantes, con ellos se ha mostrado la existencia de dificultades para resolver problemas de proporcionalidad, por ejemplo ha sido evidenciado el uso muy frecuente de la regla de tres como procedimiento para la resolución de problemas de proporcionalidad, mismo que se aplica de manera indiscriminada en situaciones en las que es innecesaria o impertinente (Godino y Batanero, 2002). Han sido estas

razones las que nos han llevado a elegir a la proporcionalidad como el contenido matemático específico a estudiar.

Elementos teóricos

En este apartado se trata con elementos clave en la investigación, a saber, la Actitud, el Enfoque Biográfico y la Narrativa. En las líneas siguientes trataremos cada uno de ellos.

Para analizar el constructo actitud, hemos adoptado el modelo de las tres componentes, en el que se expone, que la actitud tiene 3 componentes que interactúan entre sí para formar la base constitutiva de la actitud (Juárez, 2010), estas son:

Cognitiva: Se integra de las percepciones, creencias, estereotipos, informaciones e ideas que posee la persona acerca del objeto de actitud.

Afectiva: Se refiere a los sentimientos que el objeto suscita en la persona o en el grupo.

Conductual: Compuesto por las tendencias, las disposiciones, las intenciones y las acciones que se dirigen hacía el propio objeto.

Es importante mencionar que una actitud tiene siempre un foco hacia el que se dirige, este puede ser una persona, una comunidad, cualquier cosa que sea considerada relevante por un grupo social determinado. En nuestro caso en particular, el objeto de actitud son las matemáticas. Entendemos así, las actitudes hacia las matemáticas, como aquellas referidas a la valoración y el aprecio de esta disciplina y al interés por esta materia y por su aprendizaje.

Los Estudios Narrativos en la Investigación

Los estudios narrativos son una forma de indagación sobre los relatos que personas, grupos e instituciones componen en y sobre la vida social. Estos surgen de la constatación de dos hechos fundamentales. Primero, se reconoce que una forma básica a través de la cual los seres humanos otorgan sentido a sus experiencias es pensándolas como historias o relatos. Segundo, se constata que la práctica de contar historias constituye una forma de comunicación humana fundamental. Estas narraciones permiten organizar acciones, motivaciones y actores alrededor de un significado a la vez que estructuran la experiencia del tiempo. En consecuencia, lo que estos estudios hacen es aplicar esta forma cotidiana de interpretación y comunicación a la práctica y propósitos investigativos con el objeto de estudiar la vida social Bernasconi (2011).

Los estudios narrativos enfatizan lo que el lenguaje hace, en contraposición a aquellas perspectivas que ven al lenguaje como un acto de habla o como un medio para la comunicación de un mundo objetivo. Las preguntas centrales de este tipo de estudios son:¿Qué dice esta historia?, ¿Por qué esta historia dice lo que dice?, ¿Cómo esta historia dice lo que dice

El Enfoque Biográfico

La expresión enfoque biográfico expresa una hipótesis, a saber, que el investigador que empieza a recolectar relatos de vida creyendo quizás utilizar una nueva técnica de observación en el seno de marcos conceptuales y epistemológicas invariables, se verá poco a poco obligado a cuestionarse estos marcos uno tras otro. Lo que estaría en juego no sería sólo la adopción de una nueva técnica, sino también la construcción paulatina de un nuevo proceso sociológico, un nuevo enfoque que, entre otras características, permitiría conciliar la observación y la reflexión (Bertaux, 1999).

Para trabajar con el enfoque biográfico, deben responderse las siguientes preguntas: ¿A quién interrogar?, ¿A cuántos? (tamaño de la muestra), ¿Se debe ser directivo o no directivo?, ¿Se deben recoger relatos completos o incompletos?, ¿Cómo transcribirlos?, ¿Cómo analizarlos?, ¿Cómo publicarlos?

Metodología

Para nuestra investigación se usará la narrativa y el enfoque biográfico, esto bajo la hipótesis de que estos enfoques nos permitirán identificar las componentes de la actitud que los estudiantes utilizan para describir su relación con las matemáticas, lo que nos proveerá de una explicación de las actitudes desde la práctica misma, a través de los relatos de vida de los estudiantes, respecto a la presencia de las matemáticas en su vida, para ello se propone redactar el escrito: *Mi experiencia con las matemáticas*.

Para determinar las actitudes de los estudiantes hacia la proporcionalidad hemos optado por el diseño de una Situación de Aprendizaje (SA), entendida esta como un espacio de encuentro en el que los participantes (profesor y alumnos), coordinan acciones a través de un proceso de interpretación/comprensión mediante el cual logran construir significados que comparten. Una vez diseñada la SA se pondrá en escena con los estudiantes participantes y será en el trabajo con ella, donde lo que viven los estudiantes nos dará la pauta para identificar las actitudes que tienen hacia ese contenido matemático en particular.

Referencias bibliográficas

Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática/estadística en las enseñanzas media y universitaria*. España: Mensajero.

Bernasconi, O. (2011). Aproximación narrativa al estudio de fenómenos sociales: principales líneas de desarrollo. *Acta Sociológica*, 56, 9-36.

Bertaux, D. (1999). El enfoque biográfico: su validez metodológica, sus potencialidades. *Proposiciones*, 29, 1-22.

Di Martino, P. y Zan, R. (2007). Attitude toward mathematics: Overcoming the positive/negative dichotomy. *The Montana Mathematics Enthusiast*, Monograph, 3, 157-168.

Di Martino, P. y Zan, R. (2010). 'Me and maths': towards a definition of attitude grounded on students' narratives. *Journal Mathematics Teacher Education*, 13, 27–48.

Fennema, E. y Sherman, J. (1978). Sex-related differences in mathematics achievement and related factors: A further study. *JournalforResearch in Mathematics Education*, 9(3), 189-203.

Gairín J. (1987). *Las actitudes en Educación, un estudio sobre Matemática Educativa*. Barcelona: Editorial.

Gairín, J. y Escolano, R. (2009). Proporcionalidad aritmética: buscando alternativas a la enseñanza tradicional. *Suma* +,62, 35-48.

García, M. y Juárez, J. (2011). Revisión del Constructo actitud en Educación Matemática: 1959-1979. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 26, 117-125.

Godino, J. y Batanero, C. (2002). *Proporcionalidad y su didáctica para maestros, manual para el estudiante*. España: Proyecto de Investigación y Desarrollo del Ministerio de Ciencia y Tecnología.

Gómez Chacón, I. (2000). *Matemática Emocional*. Madrid: Narcea.

Gómez-Chacón, I. (1998). Una metodología cualitativa para el estudio de las influencias afectivas en el conocimiento de las matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 16(3), 431-450.

Gómez-Chacón, I. (2010). Actitudes de los estudiantes en el aprendizaje de la matemática con tecnología. *Enseñanza de las Ciencias*, 28(2), 227-244.

Goñi, J. (2007). Las emociones de los docentes de matemáticas. *UNO Revista de didáctica de las matemáticas*, 45, 5-7.

Hannula, M. (2002). Attitude toward mathematics: emotions, expectations and values. *EducationalStudies in Mathematics*, 49, 25-46.

Juárez, J. (2010). *Actitudes y rendimiento en matemáticas. El caso de telesecundaria*. México: Díaz de Santos.

Martínez, O. (2005). Dominio Afectivo en educación matemática. *Paradigma*, 26(2), 7-34.

McLeod, D. (1992). Research on affect in mathematics education: a reconceptualization. In D.Grows (Ed.).*Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.575-596). New York: McMillan Publishing Company.

Messina, C. y Rodríguez, A. (2006). Sentimientos, sistema de creencias y comportamiento didáctico: un estudio etnográfico. *Revista de Educación*,339(2006), 493-516.

Neale, D. (1969). The role of attitudes in learning mathematics.*Arithmeticteacher*, 16, 631-640.

Quiroz, A. (2004). *Actitudes y representaciones*. México: Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Dirección general de fomento editorial.

Reys, R. y Delon, F. (1968). Attitudes of prospective elementary school teachers toward arithmetic.*Arithmetic teacher*, 15, 363-366.

Ursini, S. y Sánchez, G. (2008).Gender, technology and attitude towards mathematics: a comparative longitudinal study with Mexican students. *ZDM —The International Journalon Mathematics Education*, 40, 559–577.

PESQUISAS SOBRE A TRANSIÇÃO ENSINO MÉDIO E ENSINO SUPERIOR

Sirlene Neves de Andrade, Marlene Alves Dias y Tânia Maria Mendonça Campos
Universidade Bandeirante Anhanguera Brasil
sirlene-neves@hotmail.com, alvesdias@ig.com.br, tâniammcampos@hotmail.com

Resumen. ENesse trabalho apresentamos o estudo de alguns trabalhos relacionados à transição entre o Ensino Médio e o Ensino Superior, e mostramos pesquisas que analisam as práticas e as propostas de trabalho com objetos matemáticos associados à Análise Matemática, ao Cálculo Diferencial e Integral, à Geometria Analítica e à Álgebra Linear. A metodologia utilizada é a da análise bibliográfica, para tal fazemos uma breve discussão dos trabalhos de Artigue (2004), Gueudet (2008), Dorier (2002), Rogalski (1990), Robert (1998), Azzolini (2012), Mariani (2006), Andrade (2012), Faro (2010), Simião (2010) e Jammal (2011) para compreender como a problemática da transição vem sendo tratada pelas pesquisas e os resultados encontrados. Observamos que nesses trabalhos são discutidas outras pesquisas associadas a essa problemática.
Palabras clave: transição. secundário. superior. matemática
Abstract. In this work we present the study of some work related to the transition between high school and higher education, and we show research that analyze the practices and proposals for working with mathematical objects associated with the Mathematical Analysis, Differential and Integral Calculus, Analytic Geometry and Linear algebra. The methodology used is the bibliographical analysis, for this we make a brief discussion of the work of Artigue (2004), Gueudet (2008), Dinesh (2002), Rogalski (1990), Robert (1998), Azzolini (2012), Mariani (2006), Adio (2012), Faro (2010), Sen (2010) and Jammal (2011) to understand how the problem of transition has been treated by the research and the results found. We observed that these works are discussed further research associated with this problem.
Key words: transition. secondary. superior. mathematics

Introdução

Nesse trabalho apresentamos o resultado dos estudos sobre o estado da arte das pesquisas relacionadas à transição entre o Ensino Médio e o Ensino Superior, apontaremos, mais especificamente, os trabalhos de pesquisa que se preocupam em estudar as práticas e propostas de ensino e aprendizagem com os objetos matemáticos associados à Análise Matemática, ao Cálculo Diferencial e Integral, a Geometria Analítica e a Álgebra Linear. Para tal consideramos as noções matemáticas desenvolvidas no Ensino Médio que servem de ferramentas para o desenvolvimento das disciplinas citadas acima no Ensino Superior.

Assim, para desenvolver a pesquisa efetuamos uma revisão da literatura que permitiu identificar trabalhos que tratam mais especificamente da noção de função tanto no Ensino Medi como no Ensino Superior e outros, cujos objetos de estudo são as noções de Geometria Analítica e Álgebra Linear para o Ensino Superior e as noções de matrizes e sistemas lineares para o Ensino Médio. Encontramos, ainda, pesquisas mais teóricas sobre a transição como a de Artigue (2004) e Gueudet (2008).

Apresentamos aqui, primeiro as pesquisas teóricas seguidas dos trabalhos sobre funções, geometria analítica, álgebra linear, matrizes e sistemas lineares. Por fim, traremos considerações a respeito da existência de poucas pesquisas que tratam especificamente do objeto matemático

função, sobretudo, do desenvolvimento desse conteúdo matemático tanto no Ensino Médio quanto no Ensino Superior.

Observamos que no Brasil as avaliações institucionais têm mostrado que a noção de função apresenta grandes dificuldades para os estudantes que terminam o Ensino Médio e é consenso entre os professores de Cálculo Diferencial e Integral do Ensino Superior que, em geral, os estudantes não dispõem dos conhecimentos prévios necessários, o que conduz a um grande número de reprovações, em particular, na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral e Álgebra Linear.

No Brasil, os cursos da área de exatas, em geral, introduzem uma disciplina de nivelamento no primeiro ano do Ensino Superior, mas quase sempre o que se faz é reproduzir o trabalho já realizado no Ensino Médio, sem uma articulação com as disciplinas que irão utilizar os conhecimentos sobre função, que se supõe tenham sido trabalhados no Ensino Médio, o que não tem causado o impacto necessário como podemos constatar por meio das pesquisas de Andrade (2006), Andrade (2012) e Azzolini (2012).

O mesmo ocorre para a disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear no Ensino Superior brasileiro onde os conhecimentos sobre matrizes, determinantes, sistemas lineares e geometria analítica no plano já desenvolvidos no Ensino Médio, em geral, não são utilizados como conhecimentos prévios para a introdução dos novos conhecimentos como podemos evidenciar nos trabalhos de Faro (2010), Simião (2010) e Jammal (2011).

Assim, nossa pesquisa tem como objetivo identificar temas de pesquisa que vem sendo desenvolvidos em relação à questão da transição entre o Ensino Médio e Superior no Brasil e em outros países de forma que possamos utilizar resultados de trabalhos já desenvolvidos e propor novas pesquisas que nos auxiliem a auxiliar os estudantes na transição entre as etapas escolares escolhidas para a pesquisa.

Observamos ainda que o estudo das pesquisas existentes possa nos auxiliar também na escolha do referencial teórico mais adequado para o desenvolvimento de novos temas associados à questão da transição entre o Ensino Médio e Superior e a propor estudos comparados como o de Dias, Artigue, Jahn e Campos (2010) que ao comparar o estudo das funções no Ensino Médio brasileiro e francês identificam as semelhanças e diferenças entre as duas culturas educativas sobre o estudo das funções na transição entre o Ensino Médio e Superior. Elas concluem que as influências contextuais são, em geral, invisíveis para aqueles que ficam dentro de um determinado sistema educacional, portanto é crucial considerá-las quando se deseja realizar um trabalho de colaboração produtiva e também para enfrentar evoluções dentro de um determinado sistema.

Apresentamos a seguir a metodologia utilizada para esse trabalho.

Metodologia

A metodologia utilizada é a da análise bibliográfica que foi realizada por meio de publicações nacionais e internacionais sobre a transição entre os Ensinos Médio e Superior desenvolvidas, mas especificamente, no Brasil e na França. A escolha de desses países se deve ao fato de termos um projeto colaborativo de estudos sobre a transição.

Para tal fazemos uma breve discussão dos trabalhos de Artigue (2004), Gueudet (2008), Dorier (2002), Rogalski (1990), Robert (1998), Azzolini (2012), Mariani (2006) e Andrade (2012) para compreender como a problemática da transição vem sendo tratada pelas pesquisas e os resultados encontrados. Observamos que nesses trabalhos são discutidas outras pesquisas associadas a essa problemática.

Resultados

O trabalho de Artigue (2004) aborda o tema considerando o desafio imposto pelas questões associadas à transição entre o Ensino Médio e o Ensino Superior identificando para tal: a massificação do ensino, a introdução das mudanças tecnológicas, o desgaste da imagem da ciência e o fato da educação, apesar de ter um valor fundamental, levar à uma concepção que a torna uma mercadoria, submetendo, assim, os sistemas educativos às regras de mercado.

Artigue (2004) salienta também que os desafios ultrapassam o tratamento matemático e didático, mas ela afirma só ter condições de tratar algumas questões sob esta ótica. Após observar que a Matemática é apresentada como um edifício bem estruturado que possibilita um desenvolvimento e uma expansão constante, a autora considera esta imagem como parcial, pois a Matemática pode ser vista também como uma cultura.

Seguindo essa reflexão, a autora cita o trabalho de Hall (1998 apud Artigue 2004) que pondera sobre a existência de três níveis na cultura matemática, a saber:

- o *nível formal* que corresponde às crenças sobre o que é a matemática, quais são suas ferramentas e os métodos que a legitimam;
- o *nível informal* que está associado aos esquemas de ação e de pensamento, às formas não explícitas de desenvolver, de pensar e raciocinar em matemática que estão associadas à experiência e à prática;
- o *nível técnico* que corresponde às técnicas institucionalizadas e às teorias, isto é, à parte explícita do conhecimento matemático.

Na sequência, Artigue (2004) avalia que as fontes que permitem compreender como funcionam essas culturas são os programas, os textos oficiais e livros didáticos. Além destes, há ainda as ferramentas de avaliação e as observações diretas de estudantes e do funcionamento das diferentes classes.

Artigue (2004) observa que existem restrições relativas aos momentos e à introdução dos conceitos que fazem com que os estudantes tenham diferentes meios para que possam experimentar e conjecturar em função das situações que lhes são propostas e das especificidades de seus cursos. Existe ainda uma diversidade de dispositivos de ensino que tornam mais difícil a estruturação dos saberes aliado com a peculiaridade de diferentes professores para cada dispositivo. A autora salienta a dificuldade enfrentada pelos professores, em função de sua formação universitária e da necessidade de conduzir um ensino pluridisciplinar.

Isso conduz Artigue (2004) a ponderar que, para os estudantes, a cultura se caracteriza pelo encontro de diversos domínios e problemas de forma superficial, o que não permite que os discentes operacionalizem, estabilizem e estruturem seus conhecimentos. Ela observa ainda que as práticas pedagógicas que contribuem para fortalecer essas dificuldades.

A partir dessas reflexões, Gueudet (2008) faz uma síntese de pesquisas em didática da matemática sobre a transição entre Ensino Médio e Ensino Superior, estudando especialmente aquelas associadas à entrada na universidade.

Gueudet (2008) faz um estudo das pesquisas existentes por meio das categorias por ela consideradas, isto é, as quatro diferentes formas de olhar a questão da transição, a saber: o *olhar sobre o modo de pensar*, que corresponde aos saberes intrinsecamente mais complexos os quais necessitam de novos modos de pensar, o *olhar sobre a organização dos conhecimentos* que corresponde à nova organização em rede dos conhecimentos, que coloca em evidência a necessidade de fazer alusão às novas práticas de referência, o *olhar sobre a linguagem e os modos de comunicação* que corresponde a empregar uma linguagem matemática diferente, que exige novos símbolos e um novo tipo de discurso e finalmente o *olhar centrado na instituição*, observando que a matemática praticada no Ensino Médio é diferente daquela que será trabalhada no Ensino Superior.

Já Dorier (2002) coloca em evidência as dificuldades dos estudantes em Álgebra Linear enfatizando que não se pode dar uma solução milagrosa para vencer todas as dificuldades em aprender e ensinar Álgebra Linear, o autor ressalta ainda que para melhorar o ensino e a aprendizagem da matemática não se pode recorrer apenas a uma remediação válida para todos os processos cognitivos e matemáticos, pois estes são muito mais complexos que tal visão idealista/simplista.

Rogalski (1990) discute as mudanças em termos de novo tipo de estudante e diferentes objetivos para o ensino, observa a existência de mudanças sociais constantes que conduzem a um Ensino Médio científico mais democrático, aumentando o número de estudantes que têm acesso a este, mas, ao mesmo tempo, alguns discentes surgem menos preparados, o que conduz a um empobrecimento dos conteúdos matemáticos.

O autor aponta uma necessidade de transformação do Ensino Superior que leve em conta as dificuldades observadas pelos professores em relação aos seus estudantes, quais sejam: preferem copiar ao invés de compreender, falta interesse pelos comentários epistemológicos ou históricos, aceitam o que é proposto sem questionamentos próprios, não se interessam por obras matemáticas, procuram receitas para as avaliações no lugar de compreender a profundidade dos diferentes conceitos, possuem conhecimentos compartimentados em pequenas fatias que não possibilitam que se operem as relações entre eles, não pensam jamais nos erros ou contradições como fontes de questões que conduzam a uma melhor compreensão.

Robert (1998) trata, mais especificamente, das novas práticas de referência e apresenta os seguintes exemplos para o trabalho esperado dos estudantes: em relação às demonstrações em matemáticas, ela observa que, no Ensino Superior, essas se tornam mais longas e podem levar em conta dois tipos de raciocínios análogos, para uma mesma demonstração, existem vários argumentos mais ou menos interligados que podem dificultar a identificação de seu papel na mesma.

Robert (1998) ressalta ainda que o implícito do verdadeiro ou falso corresponde a uma dificuldade incontornável e os quantificadores podem tornar-se indispensáveis; mas não é fácil saber anteriormente se é o caso de utilizá-los. Ela salienta que não podemos demonstrar tudo, uma vez que é preciso considerar o nível de conceituação que nos encontramos, pois cada nível pode ser visto como uma prateleira em um campo conceitual de conhecimentos matemáticos, que corresponde a uma organização coerente de uma parte desse campo. Esta é caracterizada pelo objeto matemático apresentado de uma determinada forma pelos teoremas sobre esses objetos e pelos métodos a eles associados que possibilitam a solução de problemas e situações que os estudantes encontram em diferentes momentos do processo de ensino e aprendizagem.

Dessa forma, dependendo do nível de conceituação, podemos ser conduzidos a mudar o que deve ser justificado, a considerar as diferenças de tempo de trabalho dos estudantes, a escolher uma ou mais aplicações para um mesmo teorema e a considerar certa disponibilidade dos conhecimentos esperada dos estudantes, a qual deve ser explicitada pelos professores.

Robert (1998) explicita ainda que, entre as práticas dos especialistas, isto é, dos matemáticos de profissão, as que podem ser consideradas como necessárias para o desenvolvimento dos estudantes são: o caráter disponível de um grande número de conhecimentos, de sua organização e da relação entre eles. O especialista dispõe notadamente de vários tipos de questionamentos, pois, para ele, existem sistemáticas, mesmo que implícitas como, por exemplo, as questões de estrutura, homogeneidade, coerência, integração sobre o caráter local ou global, finito ou infinito, questões de existência, unicidade, exaustividade, a diferença, entre outras.

Robert (1998) observa ainda que os especialistas recorrem a situações de referência que lhes são suficientemente familiares, possibilitando observar as anomalias, testar hipóteses e conjecturar. Além disso, a autora ressalta que a escrita em matemática é uma atividade importante do trabalho do matemático, pois gera uma dinâmica de questionamentos mais precisos imposta pelas exigências de rigor.

Em função das práticas dos especialistas, Robert (1998) faz algumas considerações sobre as atividades esperadas dos estudantes na transição entre o Ensino Médio e o Ensino Superior, a saber: a atividade de escrever torna-se primordial e conduz a exigências suplementares da parte dos professores; e o trabalho pessoal exige do estudante um tempo considerável para o trabalho em casa e para as demonstrações em matemática que variam de acordo com os diferentes cursos.

As práticas dos especialistas apresentadas por Robert (1998) e as atividades esperadas dos estudantes na transição entre o Ensino Médio e o Ensino Superior permitem considerar a observação abaixo, feita por Gueudet (2008), que ressalta as dificuldades encontradas pelos estudantes para iniciar, controlar e validar seu raciocínio quando enfrentam um novo problema ou uma nova situação.

Como exemplo, Gueudet (2008) cita a pesquisa de Battie (2003 apud Robert 1998) que ao propor a tarefa aos estudantes: "demonstrar que raiz de 2 não é racional", observa que para os mesmos faltam automatismos, iniciativas e eles têm ainda dificuldade em raciocinar por absurdo. Segundo Gueudet (2008), o que falta para os estudantes em relação ao raciocínio aritmético são as dimensões organizadoras e operatórias e os meios de controle dos resultados encontrados. Ela observa ainda que, nesse caso, o processo de transição é longo, pois necessita que se construa uma rede de situações de referência, e que se adquira experiência matemática, como foi possível identificar na proposta de Robert (1998) sobre as práticas a serem desenvolvidas pelos estudantes.

O estudo de Azzolini (2012), que trata das relações institucionais esperadas e existentes na transição entre os ensinos Fundamental, Médio e Superior no Brasil, mostra que os estudos sobre funções está centrado nas funções polinomiais, em particular, nas funções afim e quadrática com

ênfase no estudo das questões de representações desses objetos matemáticos e nos procedimentos que possibilitam o trabalho algébrico quando da introdução de Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Superior o que parece dificultar o desenvolvimento dessa disciplina.

Consideramos ainda a pesquisa de Mariani (2006) que explicita a transição Ensino Médio e Superior por meio da análise dos conhecimentos sobre a noção de função mobilizados pelos estudantes de um curso de "Introdução ao Cálculo Diferencial e Integral" e que é compatível com os resultados de Azzolini.

Consideramos também o trabalho de Andrade (2012), que pesquisa particularmente a noção de função exponencial, mostrando que apesar dessa noção ter uma vida ativa nas propostas institucionais e nas macroavaliações do Ensino Médio, um questionário passado entre os professores dos Ensinos Médio e Superior, mesmo com um número reduzido de respostas, parece mostrar a necessidade de revisitar esse conteúdo de forma contextualizada nas disciplinas que utilizam a ferramenta função exponencial no Ensino Superior.

Fazemos ainda uma breve referência ao trabalho de Faro (2010) sobre os conhecimentos relacionados à noção de sistemas de equações lineares supostos disponíveis quando se considera a transição entre os Ensinos Médio e Superior que mostra que para se ter êxito no processo de ensino e aprendizagem da noção de sistemas de equações lineares, se faz necessário um trabalho bem articulado entre professores e estudantes, bem como entre estudantes e estudantes, pois há tarefas que ficam completamente a cargo dos professores e outras dos estudantes, em particular, aquelas que exigem a articulação da noção de sistemas de equações lineares com outros conhecimentos da própria matemática e das outras ciências, o que demanda dos estudantes autonomia para cuidar de seu próprio desenvolvimento.

O trabalho de Simião (2010) sobre a noção de matriz na transição entre o Ensino Médio e Superior ressalta que o estudo da noção de matrizes, suas operações e propriedades, assim como os procedimentos associados à sua introdução no Ensino Médio, podem ser utilizados para alavancar o ensino da disciplina de Álgebra Linear, pois os resultados deste estudo mostram que essas noções são consideradas nas relações institucionais existentes e cobradas nas macroavaliações, enquanto ferramentas explícitas para a execução de tarefas associadas a outras noções matemáticas desenvolvidas no Ensino Médio. Portanto, este trabalho pode servir de apoio para a introdução da Álgebra Linear em IR^n no Ensino Superior, mas é preciso avançar na pesquisa, de forma a encontrar novas tarefas e novas práticas que permitam levar em conta as novas organizações dos conhecimentos, as novas formas de pensar matematicamente, as novas linguagens e os novos modos de comunicação próprios da disciplina e da formação matemática dos futuros professores de matemática que, na realidade, correspondem às novas expectativas

institucionais impostas pela própria disciplina de Álgebra Linear, quando de sua introdução no Ensino Superior.

Finalmente, o trabalho de Jammal (2011) sobre as representações externas utilizadas no estudo de ponto e retas no plano no Ensino Médio conduziu a autora a considerar a necessidade de uma melhor articulação de conhecimentos no Ensino Médio se queremos que os estudantes sejam capazes de enfrentar novas situações. É preciso ainda ponderar como uma perspectiva para o futuro a proposta de identificação dos conhecimentos prévios para um grupo de estudantes que iniciam o Ensino Superior e com base nesses conhecimentos elaborar um curso de Geometria Analítica que lhes permita utilizar de forma consciente as diferentes representações externas de ponto, reta e plano, distinguindo os diferentes espaços de trabalho, sendo capazes de escolher o melhor método a utilizar em função das representações internas que eles dispõem. Além disso, ao manipular ao utilizar as representações externas nas técnicas disponíveis, é necessário que os estudantes possam planejar, executar, justificar e controlar o trabalho matemático em jogo.

Observamos que apresentamos apenas alguns resultados de pesquisas francesas e brasileiras, mas nos trabalhos considerados encontramos referências a diversas pesquisas de pesquisadores de outros países, em particular, nos estudos de Artigue (2004) e Gueudet (2008) que tratam as questões da transição de um ponto de vista mais teórico e global.

Os estudos brasileiros ao abordar essa questão da transição entre o Ensino Médio e Superior dão ênfase às necessidades locais na tentativa de encontrar novos meios de ação que permitam modificar a atual situação do ensino

Conclusão

Os trabalhos citados correspondem a uma rápida demonstração da importância do estudo da transição entre as diferentes etapas de ensino, em particular, entre o Ensino Médio e Ensino Superior, e a atenção que vem sendo dada pelos pesquisadores de Educação Matemática nos diferentes países em relação à investigação sobre diferentes olhares para a questão da transição entre as diferentes etapas escolares por considerarem que essas pesquisas correspondem a um meio de identificar dificuldades e propor ações didáticas adequadas aos diferentes grupos de estudantes, pois mesmo se algumas dificuldades e problemas são muito próximos é preciso adequar às ações em função dos conhecimentos prévios dos estudantes, da cultura dos países em que vivem e das necessidades específicas dos cursos superiores a que eles se dirigem.

Referência bibliográfica

Andrade, S. N. (2012). Expectativas institucionais relacionadas à transição entre o Ensino Médio e Superior para o caso da noção de função exponencial. Tese de doutorado não publicada, UNIBAN – Universidade Bandeirante Anhanguera. Brasil.

Andrade, S. N. (2006). Possibilidades de articulação entre as diferentes formas de conhecimento: a noção de função afim. Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática não publicada, UNICSUL – Universidade Cruzeiro do Sul. Brasil.

Artigue, M. (2004). *Le défi de la transition secondaire-supérieur. Que peuvent nous apporter les recherches en didactique des mathématiques?.* Acesso em 13 de fevereiro de 2013 de http://pedagogie.ac-toulouse.fr/math/liaisons/post_bac/informations/colltoulouse.pdf

Azzolini, A. (2012). *A noção de função quadrática na transição entre os ensinos fundamental, médio e superior*. Dissertação de Mestrado não publicada, UNIBAN – Universidade Bandeirante Anhanguera. Brasil.

Dias, M. A.; Artigue, M.; Jahn, A. P. e Campos, T. M. (2010). A comparative study of the secondary-tertiary transition. In: *Proceedings Conference of the International Group for the Psychlogy Mathematics Education* 2, 129-136. Belo Horizonte: PME.

Dorier, J. L. (2002). Teaching Linear Algebra at University. ICM-International Congress of Mathematicians. Beijin.

Faro, S. D. (2010). *Os conhecimentos supostos disponíveis na transição entre o ensino médio e o ensino superior:* o caso da noção de sistemas de equações lineares. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática não publicada, UNIBAN – Universidade Bandeirante Anhanguera. Brasil.

Gueudet, G. (2008). Investigating secondary-tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics* 67(3), 237-254.

Jammal, E. F. (2011). *Os ostensivos e não ostensivos utilizados no estudo das noções de ponto e reta no plano no ensino médio*. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática não publicada, UNIBAN – Universidade Bandeirante Anhanguera. Brasil.

Mariani, R.C.P. (2006). *Transição da educação básica para o ensino superior: a coordenação de registros de representação e os conhecimentos mobilizados pelos alunos no curso de Cálculo*. Tese de doutorado não publicada, PUC-SP. Brasil.

Rogalski, M. (1990). Quels etudiant, quels objectifis d'enseignement? In: Enseigner Autrement les mathematiques en DEUG A première année. Brochure de la commission Inter-Irem. França: IREM.

Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* La Pensée Sauvage, Grenoble, 18(2), 139-190.

Simião, F. (2010). *A noção de matriz na transição entre o ensino médio e o superior.* Dissertação de Mestrado em Educação Matemática não publicada, UNIBAN – Universidade Bandeirante Anhanguera. Brasil.

DE LOS PROBLEMAS PRÁCTICOS A LOS FORMALES: UNA TRANSICIÓN NECESARIA EN EL AULA DE CLASES

Javier García-García
Universidad Intercultural del Estado de Guerrero México
libra_r75@hotmail.com

Resumen. El presente escrito resume una experiencia en relación con la resolución de problemas prácticos y formales en el aula de clases con diversidad cultural. Los resultados que se describen, por una parte derivan de García (2012) investigación desarrollada por el autor con niños hablantes de Tu'un Savi (mixteco) y por otro lado, se discuten las evidencias recabas de una actividad desarrollada con estudiantes universitarios bilingüesal abordar la noción de área de un polígono. Ambas experiencias indican que es necesaria la transición de los problemas prácticos a los formales en el aula de clases como un medio para significar los objetos matemáticos que se abordan.
Palabras clave: problemas prácticos y formales, resolución de problemas, diversidad cultural
Abstract. This paper summarizes an experience in relation to practical and formal problem solving in the classroom with cultural diversity. The results reported, first derived by García (2012), research developed by the author with children speaking Tu'un Savi (mixteco); thesecond results are taken up an activity developed bybilingual university students when to address the notion of apolygon area. Both experiences indicate that the transition from the practical problems to the formal problems in the classroom, as a means to signify tomathematical objects the addressed in class.
Key words: practicaland formal problem, solvingproblem, cultural diversity

Introducción

El contexto juega un papel importante en la resolución de problemas(Carraher, Carraher y Schliemann, 2007; Blanco y Blanco, 2009; García, 2012;García, 2013). En ese sentido, las evidencias indican que existe un desajuste entre la matemática enseñada en la escuela y el uso que los alumnos hacen de lo aprendido en la vida cotidiana (Carraher *et al,* 2007; Blanco y Blanco, 2009).En relación con los contextos, Martínez (2006) reconoce la existencia de tres: simulado, real y evocado. Sin embargo, por cuestiones de espacio, no se discute lo que encierra cada contexto; pero se cree que es posible identificar cómo resuelve el niño los problemas planteados en los contextos evocado o real, sin necesidad de escenificar, en el caso del primero o,recurrir al puesto donde participa el niño en la compra-venta, en el segundo. Asimismo, se comparte en este estudio que la lengua materna también juega un papel importante en la resolución de problemas (García, 2012; García, 2013), al menos en un aula con diversidad cultural. Sin embargo, además del contexto y la lengua materna, otro factor que incide en el rendimiento del alumno tiene que ver con la *familiaridad* o *no* de los conceptos que evoque el enunciado del problema y que están relacionados con el contexto real o formal.

Entonces, partiendo de la premisa de que en el rendimiento del alumno influye el contexto, la lengua materna y la familiaridad de los conceptos evocados en la situación, se reconoce al menos, la existencia de dos tipos de problemas: formales y prácticos. Ante esta cuestión, se busca responder la pregunta:¿qué papel deben jugar los problemas prácticos y formales en el aula de

clases? La cual se discute en este escrito mediante evidencias empíricas, buscando mostrar si es posible partir de los prácticos en el aula de clases, sin necesidad de recurrir al lugar real donde el alumno participa en la resolución de problemas cotidianos.

Elementos teóricos y método de investigación

En el estudio se adopta un marco conceptual; se define problema formal y práctico. En relación con el término problema, este es entendido como aquella tarea o situación que reúne los siguientes componentes:

- Existe una demanda o acción a realizar; para la cual hay una persona o un grupo de personas que quieren o necesitan cumplimentarla. La demanda será adecuada al nivel de formación de la(s) persona(s).
- Hay un proceso por poner en juego para cumplir la demanda, pero que en primera instancia parece desconocido; es decir, re requiere realizar cierto proceso de análisis para comprender lo que se pregunta y la situación en general.
- La situación puede tener varios, uno o ningún resultado final, lo cual deberá determinar la persona haciendo uso de alguna estrategia (García, 2012; García, 2013).

Por su parte, los problemas básicamente pueden ser de dos tipos:

- **Formal**: si es una situación cuyo contexto *no es familiar* para el alumno; es decir, en su enunciado evoca conceptos que resultan ajenos a lo conocido por él dado que no es parte de su cotidianidad o relacionados con su formación.
- **Prácticos**: si es una situación cuyo contexto *es familiar* para el alumno; es decir, evoca sólo conceptos conocidos por él o relacionados con su formación. De esta manera, la cuestión planteada en el problema es comprensible en su cultura.

Por la distinción anterior, se puede argumentar que los problemas contenidos en los libros de textos de primaria corresponden en su mayoría a *problemas formales,* puesto que evocan conceptos no familiares para un alumno hablante de una lengua étnica; mientras que los segundos, los resuelven en su cotidianidad, por ejemplo, en actividades como la compra-venta, cultivo, en la cría y venta de ganados, etc.

Por otra parte, el presente estudio es de corte descriptivo (Hernández, Fernández y Baptista, 2010). Para discutir la pregunta que rige este escrito, se toman dos referentes:

- El caso de los niños de primaria hablantes de una lengua étnica: fueron 13 alumnos *Tee Savi* (mixtecos) de 4°, 5° y 6° grado de una escuela bilingüe multigrado; resultados retomados de una investigación realizada por el autor (García, 2012).
- El caso de estudiantes universitarios: participan 13 estudiantes de cuarto semestre de la carrera de ingeniería forestal de la Universidad Intercultural del Estado de Guerrero (UIEG). Entre ellos, algunos hablaban el *Tu'un Savi* (mixteco), *Mé'phaa*(tlapaneco) y español; cursaban la asignatura de Geometría y trigonometría.

A los niños de primaria se les plantearon problemas escritos (formales y prácticos) y verbales (solo prácticos) de tipo aritmético. Los verbales se plantearon de manera grupaly en la lengua materna de los alumnos. Mientras que a los universitarios se les planteo una actividad (grabada) relacionada con el cálculo de área de un polígono cuyo perímetro era una variable. Estos estudiantes se organizaron en 5 equipos de dos integrantes y uno de tres.

Por cuestiones de espacio, no se muestran los problemas planteados a los niños de primaria; pero se retoman aquellos que permiten argumentar la idea central de este escrito (presentados en el análisis de resultados).En el caso de los universitarios, resolvieron el siguiente problema:

> Imagina la siguiente situación. Te piensan regalar un terreno, y para ello, te proporcionan una cuerda (mecate) de longitud *l*; tú debes determinar la forma que más te guste, así como sus dimensiones. Dibuja la forma que elegirías para tu terreno, de tal forma que tenga la mayor área posible. Justifica ampliamente tu respuesta.

El problema anterior, tuvo por objetivo identificar los argumentos de los estudiantes al resolverlo, así como los conocimientos que ponen en juego, dado que ya habían cursado la asignatura de álgebra, por ello, se les da una longitud variable. Por el nivel de formación de los alumnos, se podría concebir el problema anterior como de tipo *práctico*.

Análisis de resultados

Por cuestiones de espacio, los resultados que se presentan enseguida corresponden solo a los grados cuarto y quinto de primaria; se retomaun problema formal escrito y uno verbal práctico por cada grado.

- Cuarto grado.

Un niño de este grado en la resolución de un problema formal (Fig. 1), realiza lo siguiente:

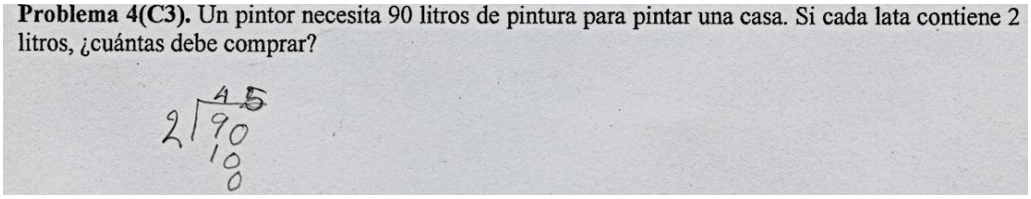

Problema 4(C3). Un pintor necesita 90 litros de pintura para pintar una casa. Si cada lata contiene 2 litros, ¿cuántas debe comprar?

Fig. 1. Resolución dada por el alumno.

Para que el alumno pudiese resolver el problema anterior, fue necesario primero traducir el enunciado a su lengua materna (*Tu'un Savi*). Después de esa traducción –que permite argumentar que la lengua materna influye en el estudiante para que entendiera el problema-, el alumno ubica los datos y selecciona laoperación que a su ver le permite resolver el problema; enseguida, opera identificando los datos que requiere para ello y; finalmente, aunque no responde directamente la pregunta planteada en el problema, sabe distinguir que 45 es la cantidad de latas de pintura que se debecomprar. Este es un caso donde se resuelve exitosamente un problema; sin embargo, existen varios casos donde se observan algunas dificultades.

Ahora bien, enseguida se muestra un extracto (del video-grabación realizado) cuando un estudiante de 4° grado resuelve un problema práctico.

> **Entrevistador:**[…] tengo $20 pesos y compro un litro de frijol que cuesta $12 el litro. ¿Cuánto me darán de cambio?
>
> **Alumno:** ¿Qué es *uxi uvi*? [Que es la traducción de 12 en mixteco]
>
> **Entrevistador:**doce [diciéndoselo en español]
>
> **Alumno:** Bueno. [Después de un rato dice:] ¡Ocho!
>
> **Entrevistador:** ¿Qué hiciste?
>
> **Alumno:** Una suma

En este ejemplo, se observa que el alumno tiene dificultades para reconocer los números en *Tu'un Savi*(mixteco)*;* por ello, pide que se le traduzca al español. Posterior a ello, resuelve la situación propuesta mediante un modelo que construye a base de barritas (*Fig. 2*):

Fig. 2. Modelo construido con barritas.

El caso en cuestión, representó 20 barritas y sobre la base de ellas realiza un conteo hasta 12, cuando llega a esta cantidad subraya la barrita que la representa e inicia a contar ahora las barritas que sobran para dar su respuesta final. El hecho de que el estudiante responda a que sus acciones obedecen a una *suma*, es porque realiza la suma de las barritas sobrantes.

En el argumento que ofrece el niño de su respuesta, se observa que existe cierta influencia de la escuela en su manera de proceder. Asimismo, muestra *preferencia* por el uso de este modelo (de barritas) en la resolución de otros problemas.Sin embargo, en otros *problemas prácticos*los niños de este grado, recurren al *cálculo mental*para hallar la solución.

Entrevistador:… ¿Qué más venden?

Alumno 2: Guamúchil

Entrevistador: Bueno. ¿A cuánto lo venden?

Alumno 2: A cinco pesos.

Entrevistador: ¿La bolsa?

Alumno 2: Sí.

Entrevistador: Bueno. Si quiero comprar cuatro bolsas. ¿Cuánto deberé pagar?

Alumno 1: veinte.

Entrevistador: ¿Cómo le haces? [Para saber que se debe pagar 20]

Alumno 1: Una suma.

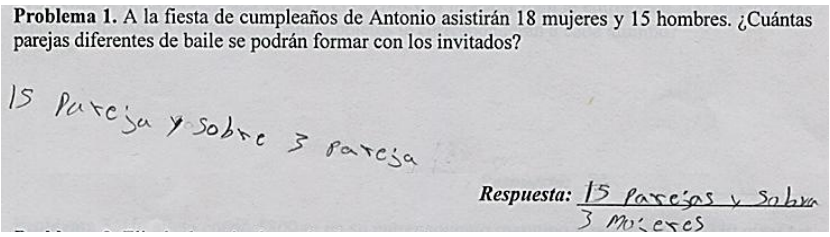
E: ¿Qué sumas?

Alumno 2: cinco, diez, quince, veinte.

El problema práctico presente en la cuestión anterior es: *si el precio por bolsa de guamúchiles es $5 pesos. ¿Cuánto deberé pagar por 4 bolsas?* El alumno realiza un cálculo mental, donde su proceder obedece a la siguiente lógica $T_1 = 5 + 5 = 10,\ T_2 = 10 + 5 = 15,\ T_f = 15 + 5 = 20$, donde T_i indica el total en distintos momentos del cálculo mental que efectúa.

❖ Quinto grado.

En este grado se muestra el siguiente problema formal (Fig. 3), donde se observa dificultad del alumno para resolver el problema.


Problema 1. A la fiesta de cumpleaños de Antonio asistirán 18 mujeres y 15 hombres. ¿Cuántas parejas diferentes de baile se podrán formar con los invitados?

15 Pareja y sobre 3 pareja

Respuesta: 15 parejas y sobra 3 mujeres

Fig. 3. Resolución de un problema formal.

En la figura anterior, se ilustra que pese a que el problema se tradujo a la lengua maternadel alumno, le pareció *no familiar*; por lo que a falta de un mayor análisis de la situación, la resuelve sin asegurarse de que su respuesta sea correcta, le bastó con que parezca una respuesta lógica.

Errores como estos se presentaron en otros problemas formales. En cambio, en la resolución de problemas prácticos verbales, los alumnos no presentan dificultades como en el caso anterior. Sin embargo, en la resolución que ofrecen, se identifica cierta influencia de la escuela y de su *práctica cotidiana*. Por ejemplo:

> **Entrevista:** [...] *Don Pedro tenía 120 chivos hace unos meses; pero nacieron otros 31 recientemente. ¿Cuántos chivos tiene ahora?*, ¿cómo le hacemos para saber cuántos chivos tiene don Pedro?
>
> **Alumno 1:** Hacemos una suma.
>
> **Entrevistador:** Y ¿Cuál es el resultado?
>
> **Alumno 1:**ciento cincuenta y uno.
>
> **Entrevistador:** Ahora, si de esos ciento cincuenta y uno se murieran once. ¿Cuántos les quedaría?
>
> **Alumno 1:**ciento cuarenta.
>
> **Entrevistador:** ¿Qué hiciste para saberlo?
>
> **Alumno 1:** Una resta.
>
> **Entrevistador:** ¿Cómo sabes que se debía hacer una resta?
>
> **Alumno 1:** Porque me dice que [...]*murieron.*
>
> **Entrevistador:** Bien.

El alumno 1 responde *casi* de manera inmediata a la cuestión que se le plantea; sin embargo, para dar su respuesta recurre a un cálculo a lápiz y papel, realizando siguiente cálculo:

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r}120\\31\end{array}\\ \hline -\begin{array}{r}151\\11\end{array}\\ \hline 140 \end{array}$$

Los problemas *prácticos* también permiten identificar la relación inversa existente entre operaciones como multiplicación y división, desde la perspectiva del alumno. Esto se observa enseguida:

> **Entrevistador:**[…] *Llevo a vender dulces a la Ciudad de Ayutla. Tengo veintisiete dulces y los debo empaquetar en bolsas de tres dulces. ¿Cuántas bolsas necesitaré?* ¿Qué debo hacer para responder a esta pregunta?
>
> **Alumno 1:** Una división.
>
> **Entrevistador:** Aja y ¿Qué obtienes como resultado?
>
> **Alumno 3:** Nueve.
>
> **Entrevistador:** ¿Cómo sabes que es correcto ese resultado?

Alumno 3: Con una comprobación.

Entrevistador: Y ¿cómo haces la comprobación?

Alumno 3: Multiplicación.

Entrevistador: ¿Multiplicación? Y ¿Qué multiplicas?

Alumno 3: El número que está arriba (se refiere al cociente, puesto que realiza la operación en su libreta)

Entrevistador: ¿Entonces qué números multiplicas?

Alumno 3: El nueve con el tres.

De esta forma, el alumno 3 relaciona la multiplicación como operación inversa de la división. Valiéndose de ello, verifica la validez de la solución dada a un *problema práctico*. Particularmente, los niños de este grupo y grado, *prefirieron* utilizar lápiz y papel en los cálculos efectuados, argumentando que sólo en operaciones sencillas podían hacerlo mentalmente. De esta manera, se observa una mayor influencia de la escuela en los procedimientos de estos estudiantes.

❖ El caso de los estudiantes universitarios.

En los estudiantes universitarios se observaron distintas acciones y explicaciones en el momento de resolver la actividad. Se identificó que sus explicaciones giran en torno a dos aspectos: algunos comparando áreas, evocando a un contexto formal; mientras que otros sin importar mucho la parte formal, recurrían más a explicaciones derivadas de la realidad. Enseguida se precisarán, las dos vías de solución observadas:

Evocando aspectos meramente formales

El equipo (un alumno hablante del español y un *Mé'phaa*) que procede de esta forma, gira su explicación *comparando de áreas* de distintos polígonos (Fig. 4) para finalmente, presentar aquél que consideran es de área máxima.

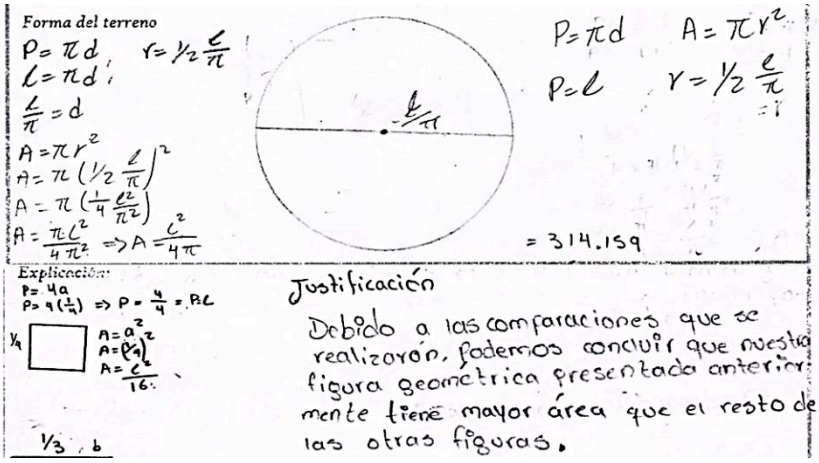


Fig. 4.Figura de área máxima según el equipo y el cálculo de su área.

En la *figura 4*se observa que el equipo primero encuentra el radio del círculo, puesto que el perímetro está dado como *l;* después calculan el área de esta figura.Si bien la figura solo muestra el cálculo del área de un círculo y la explicación ofrecida por el equipo, también calcularon el área de otras figuras para dar su respuesta. Para cerciorarse de su resultado asignaron valores a *l* y de esta forma compararon sus resultados.

Evocando aspectos de la realidad

Los equipos que evocan aspectos de la realidad, en su solución ofrecen variadas figuras; pero el punto medular de su explicación radica *en que* (según ellos) *la mayoría de los terrenos tienen* dicha forma (Fig. 5).

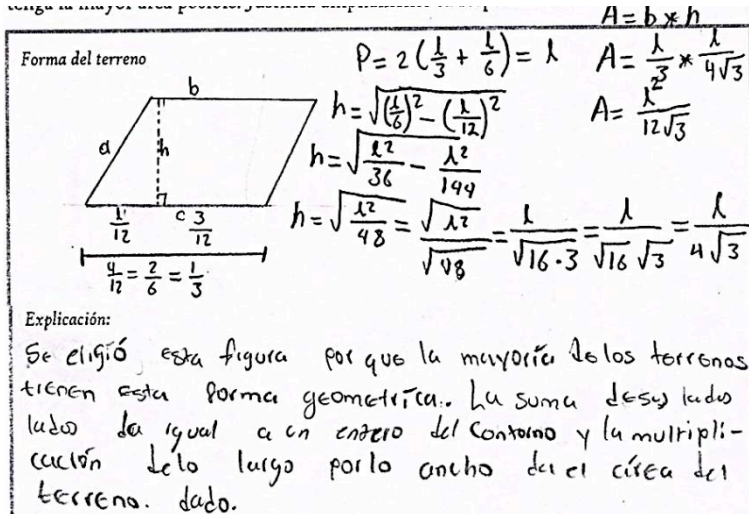


Fig. 5. Polígono de área máxima según un equipo que evoca la realidad en su explicación.

Los equipos que ofrecen esta explicación –evocando a la realidad-, parten del cálculo del área de un polígono que tiene la forma de algún terreno que han visto en la cotidianidad; pero sin hacer comparaciones de área de múltiples figuras geométricas.

A manera de conclusión

Las evidencias recabadas permiten plantear algunas reflexiones. En efecto, el contexto, la lengua materna y la *familiaridad* que los alumnos tienen con los conceptos evocados en los problemas, determinan su rendimientoen la resolución de estas actividades. En el caso de los niños, el hecho de presentar problemas prácticos en su lengua materna, permitió que mostraran procedimientos que *naturalmente* utilizarían en actividades cotidianas cuando resuelven problemas, particularmente el cálculo mental y el conteo, tomando como apoyo sus dedos. Si bien, en el escrito no se muestra mayor evidencia delos procedimientos utilizados por los niños en los *problemas formales,* vale señalar que estos muestran un menor rendimiento en estos en comparación con los prácticos (ver García, 2012). En el caso de los estudiantes universitarios, al plantearles un *problema práctico* suelen recurrir a *situaciones familiare*spara explicar sus resultados o bien a cuestiones meramente matemáticas (formales). Si bien hace falta profundizar en el desempeño de estos estudiantes en *problemas formales,* vía la práctica se ha observado que tienen serias dificultades en la resolución de estas situaciones. Por las evidencias recabadas, principalmente del nivel básico, se acepta en este estudio que los *problemas prácticos* debieran servir para hacer emerger los procedimientos que utilizan los niños en actividades extraescolares. Esto puede ser aprovechado en la resolución de *problemas formales,* como una vía para mejorar el rendimiento de los alumnos en este tipo de situaciones.

Finalmente, se concluye que la transición de los problemas prácticos a los formales, no solamente es válida sino necesaria, al menos en el nivel básico, para significar los objetos matemáticos que se abordan. En el nivel universitario, partir de los problemas prácticos a los formales, permitiría una mayor participación de los estudiantes en las discusiones grupales; favoreciendo el desarrollo de una mejor actitud en la clase de matemáticas, como se constató al momento de discutir los resultados que presentaron los equipos participantes.

Referencias bibliográficas

Blanco, B. y Blanco, L. J. (2009). Contextos y estrategias en la resolución de problemas de primaria. *Revista Números, 71,* 75-85.

Carraher, T., Carraher, D. y Schliemann, A. (2007). En la vida diez, en la escuela cero: Los contextos culturales del aprendizaje de las matemáticas. En T. Carraher, D. Carraher, y A. Schliemann (Eds.), *En la vida Diez, en la escuela cero*, 25-47. México: Siglo XXI Editores.

García, J. (2012). *Estrategias en la resolución de problemas aritméticos: el caso de los niños mixtecos*. Tesis de maestría no publicada, Universidad Autónoma de Guerrero. México. Disponible en http://www.etnomatematica.org/publica/trabajos_maestria/Tesis_javier.pdf

García, J. (2013). La resolución de problemas formales y prácticos: un estudio con niños Tee Savi. *Revista números, 84,* 25-45.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación*. México: editorial McGraw-Hill Interamericana.

Martínez, M. (2006). Contextualización y enseñanza de las matemáticas en la educación primaria. En Cantoral, R., Covián, O., Farfán, R., Lezama, J. y Romo, A. (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte iberoamericano,* 613-642. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.- Díaz de Santos.

CONSTRUCCIÓN COGNITIVA DE LA RAÍZ CUADRADA

Mauricio Gamboa Inostroza, Marcela Parraguez González y Patricia Vásquez Saldías
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso Chile
maurigamboa@gmail.com; marcela.parraguez@ucv.cl; patricia.vasquez@ucv.cl

Resumen. Con base en la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema), desarrollada por Dubinsky y sus colaboradores (Asiala et al.,1996) y considerando un estudio epistemológico de la raíz cuadrada, el cual da a la luz cuatro (4) aspectos histórico epistemológicos del objeto, antecedentes en investigaciones reportadas, estudio del currículum y textos, proponemos una Descomposición Genética (DG) de la raíz cuadrada - modelo cognitivo mediante el cual un estudiante puede construir un concepto - que permite explicitar aquellas construcciones y mecanismos mentales, que hipotéticamente un estudiante pone de manifiesto, al construir la raíz cuadrada como objeto. Para testear la viabilidad de la DG teórica propuesta, utilizamos el ciclo metodológico que viene aplicando exitosamente el grupo RUMEC en sus investigaciones, con el fin de documentar la DG respecto de las construcciones y mecanismos mentales que muestran los estudiantes al construir el objeto en cuestión.
Palabras clave: APOE, descomposición genética, raíz cuadrada
Abstract. Based on APOS theory (Action, Process, Object and Schema), developed by Dubinsky and colleagues (Asiala et al., 1996) and considering an epistemological study of the "square root" (which was to release four (4) epistemological historical aspects of the object), background investigations reported, study the curriculum and texts, we propose a genetic decomposition (GD) of the square root –cognitive model by which a student can build a concept– that allows clarifying those mental constructions and mechanisms, a student who hypothetically shows, to build the square root as object. To validate the proposed theoretical genetic decomposition, we use the cycle being used successfully methodological RUMEC group in their research, in order to document the GD regarding mental constructs and mechanisms that show the students to build the object.
Key words: APOS, genetic descomposition, square root

Introducción

Algunos antecedentes de la investigación

Esta investigación se sitúa en la construcción cognitiva del concepto matemático raíz cuadrada en estudiantes de enseñanza media (16-18 años). La problemática emerge en la experiencia docente, al identificar una serie de fenómenos en la actividad matemática de estudiantes y profesores con respecto a la raíz cuadrada, entre ellos: a) Le asignan un doble signo al calcular la raíz cuadrada de un número; b) Declaran que números no cuadrados perfectos, no tienen "raíz exacta" y en general lo expresan aproximado como un decimal y; c) Confunden la idea de raíz cuadrada, con la idea de raíz de una ecuación.

Lo anterior, además es confirmado por otras investigaciones realizadas en el ámbito de la Didáctica de la Matemática, como por ejemplo Colín (2005) en México, Bulhea y Gómez (2008) en España-Rumania y, Vidal (2009) en Chile, denotando que no equivalen a hechos locales solamente. En Vidal (2009) se expone que los textos de estudio de circulación nacional (Chile) para la enseñanza de la matemática en el nivel secundario, generan estos fenómenos al alejarse en demasía del saber sabio en el momento de la transposición didáctica. Al respecto, se tiene el caso del texto Santillana de 3° medio, en el cual se presenta de buena manera la definición de la raíz

cuadrada, pero luego se desarrolla la idea de raíz de un polinomio (Muñoz y Darrigrandi, 2011, p.17). Desde nuestro estudio epistemológico, podemos destacar que los aspectos en los que se desenvuelve la raíz cuadrada son cuatro: Geométrico, Aritmético, Algebraico y Funcional. Queda claro que en una primera instancia su nacimiento es geométrico (raíz cuadrada como un trazo). Según Vidal (2009), en el siglo V a.C. con la aparición del teorema de Pitágoras surge la necesidad de buscar tríos pitagóricos lo que induce a la idea de una operación inversa a la de elevar al cuadrado. La raíz cuadrada como operador aritmético aparece basándose en la idea de los números Euclidianos, pero no se encuentra explícitamente un proceso –inverso al de elevar al cuadrado– como en el ámbito geométrico. Se tienen antecedentes de que los babilónicos usaban tablillas que contenían multiplicaciones y operaciones inversas con números. El desarrollo algebraico y funcional es posterior, siendo este último netamente analítico hasta el siglo XIX.

Para este trabajo el foco de indagación está centrado en la construcción mental de un concepto matemático, por ende se utilizará la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema) como referente teórico, que tiene como principio entender cómo se aprende la matemática, observando los fenómenos que ocurren en los alumnos que intentan construir un concepto matemático (Salgado, 2007) y en base a esto la pregunta que guía esta investigación es: *¿qué construcciones y mecanismos mentales necesitan mostrar los estudiantes para (re)construir el concepto raíz cuadrada?*

Marco teórico: La teoría APOE

La teoría APOE –Acción, Proceso, Objeto, Esquema– toma como base la epistemología genética de Piaget. Según Kú, Trigueros y Oktaç (2008), esta teoría nace al estudiar el mecanismo de entendimiento de la Abstracción Reflexiva piagetiana, que se refiere a la reflexión sobre las acciones y procesos que se efectúan desde un objeto de conocimiento. Desde el punto de vista de la teoría APOE la construcción del conocimiento pasa por tres etapas básicas: acciones, procesos y objetos, las cuales no necesariamente son secuenciales. Una acción consiste en una transformación de un objeto que es percibida por el individuo como externa y se realiza como una reacción a sugerencias que proporcionan detalles de los pasos a seguir. "Las acciones son más limitadas que otras construcciones mentales, pero son el principio crucial en la construcción del conocimiento" (Dubinsky, 1996, p. 34). Cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, puede *interiorizarse* en un proceso, es decir se realiza una construcción interna que ejecuta la misma acción en la mente del individuo, pero ahora no necesariamente dirigida por un estímulo externo. Un individuo que tiene una concepción proceso de una transformación, puede reflexionar sobre ésta, describirla, o incluso *revertir* los pasos de la transformación sin realizar dichos pasos (Asiala et al, 1996). Cuando un individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso en particular, toma conciencia del proceso como un todo, realiza aquellas

transformaciones (ya sean acciones o procesos) que pueden actuar sobre él, y puede construir de hecho esas transformaciones, entonces está pensando en este proceso como un objeto. En este caso, decimos que el proceso ha sido *encapsulado* en un objeto" (*Ibíd.).* En resumen, el tránsito por las construcciones mentales desde APOE se puede ver de la siguiente manera: se dice que un individuo evidencia una concepción acción cuando solamente es capaz de realizar transformaciones a algún objeto motivado por estímulos externos y no por sí solo. Si este individuo reflexiona sobre estas acciones y las realiza conscientemente, se dice que las acciones se han *interiorizado*, por lo que muestra una concepción proceso. Dos o más procesos se pueden *coordinar* en un nuevo proceso. Cuando surge internamente la necesidad de transformar los procesos desarrollados, el individuo los *encapsula* en objetos, sobre los cuales puede volver a aplicar acciones. Los objetos se organizan en esquemas, que a su vez se relacionan con otros esquemas. El esquema, "es un nivel de mayor elaboración en la comprensión de un concepto matemático y está relacionado de manera coherente en la mente del estudiante." (Asiala et al, 1996, p. 12). Cuando un sujeto se encuentra frente a un problema específico en el ámbito de las matemáticas, evoca un esquema para tratarlo. Al hacerlo, pone en juego aquellos conceptos de los que dispone en ese momento y utiliza relaciones entre esos conceptos. En la *Figura 1* se muestra un diagrama de las construcciones y la abstracción reflexiva.

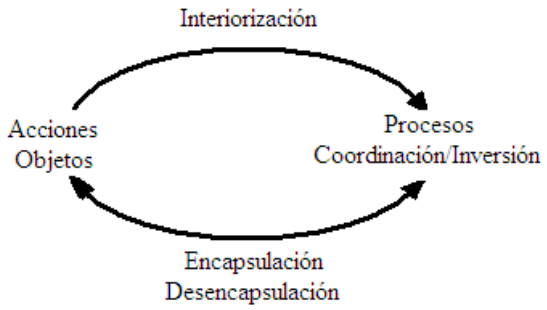


Figura 1: Esquema de la teoría APOE (Asiala et al., 1996

Ciclo de Investigación en APOE

La teoría APOE nos provee de un ciclo de investigación, que se visualiza en la *Figura 2*, el cual integra tres componentes a considerar en el proceso de investigación: (i) análisis teórico, (ii) diseño e implementación de enseñanza, y (iii) observación, análisis y verificación de datos).

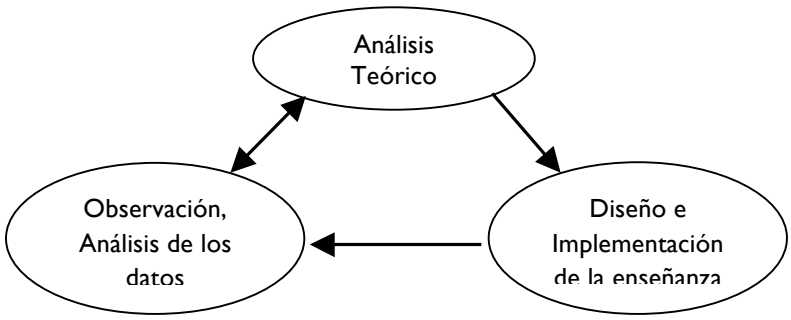


Figura 2: Ciclo de investigación en APOE (Asiala et al., 1996)

El objetivo principal del Análisis teórico es diseñar una Descomposición Genética hipotética, lo que permitirá por medio de la descripción de las construcciones mentales, modelar de manera cognitiva y epistemológica el concepto matemático en estudio (*Ibíd.*).

Descomposición Genética de la raíz cuadrada

Una Descomposición Genética (DG) está definida como un modelo cognitivo donde se describen las posibles construcciones mentales que un estudiante realiza para construir un concepto a partir de ciertas habilidades cognitivas previas. Asiala *et al.*, (1996, p. 7), define la descomposición genética del concepto como *"conjunto de estructuras mentales que pueden describir cómo se desarrolla el concepto en la mente del individuo"*. El análisis teórico dio como resultado una DG hipotética de la Raíz Cuadrada, la cual reporta que un estudiante inicia el estudio desde el aspecto aritmético, haciendo acciones sobre potencias hasta lograr un proceso inverso a la potencia de exponente 2, el cual se debe *coordinar* con un proceso geométrico con el fin de generar un proceso algebraico. El proceso anterior da origen a dos tipos de situaciones en la DG: a) la encapsulación y rotulación del objeto Raíz Cuadrada y, b) la coordinación con el proceso función, en donde se construye un nuevo proceso –el de encontrar las preimágenes de la función cuadrática dadas las imágenes– y que se encapsula en la función Raíz Cuadrada como objeto. En ambas concepciones objeto de la Raíz Cuadrada, el estudiante debe evidenciar la seguridad de la existencia en los números reales (lo cual viene de la construcción de trazos, pues un trazo representa la medida de cualquier número real positivo) y la consideración de un (1) solo resultado al calcular la raíz cuadrada de un número. A continuación se presenta en extenso el resultado de la DG:

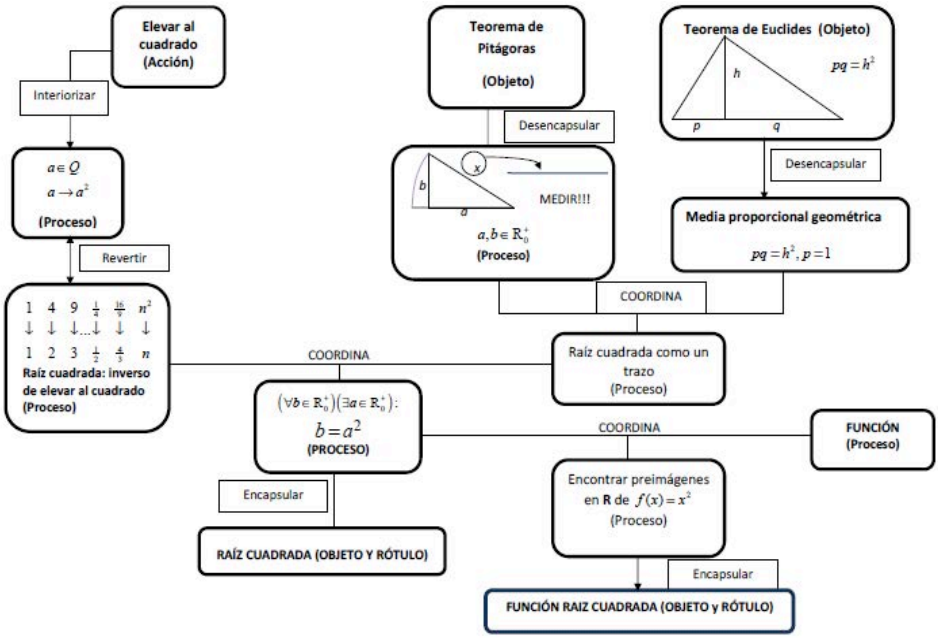


Figura 3: Descomposición Genética de la raíz cuadrada

Instrumentos para recolección de datos

En Roa-Fuentes y Oktaç (2012), se mencionan aspectos como el tiempo y cantidad de integrantes del grupo de investigación necesarios para los seguimientos, como variables que han generado la realización de investigaciones que pasan de la primera a la tercera componente, considerando instrumentos de recolección de datos como cuestionarios y entrevistas. En nuestro caso particular en base a la DG se diseñó un cuestionario para analizar cómo los individuos han construido y/o están construyendo el concepto raíz cuadrada. En la validación del cuestionario se consideró la opinión de expertos en el área de la Didáctica de la Matemática, en este caso el Seminario Cognitivo del Instituto de Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

El análisis de los datos

Los resultados son analizados desde la DG hipotética detectando qué elementos no han sido considerados o cuáles de las construcciones mencionadas hipotéticamente en la DG no se evidencian. La investigación corresponde en un estudio de casos y se trabajó con cuatro casos para documentar la DG hipotética antes expuesta. En la Tabla 1, se detallan las unidades de estudios.

Tabla 1: Clasificación y descripción de los casos de estudio y la unidad de análisis

Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
Estudiantes de 7° semestre de pedagogía en matemática	Profesores egresados de pedagogía en matemática	Profesores con más de 4 años de ejercicio	Estudiantes terminales de enseñanza secundaria
I1, I2, I3, I4, I5, I6, I7,			I18, I19, I20

	I8.	I9, I10, I11, I12, I13.	I14, I15, I16, I17	
	(DG)	(DG)	(DG)	(DG)
Unidad de Análisis	Aplicación de Instrumentos: 1 cuestionario;	Aplicación de Instrumentos: 1 cuestionario;	Aplicación de Instrumentos: 1 cuestionario;	Aplicación de Instrumentos: 1 cuestionario;

Resultados

Tras el análisis de los datos obtenidos de la aplicación del cuestionario se detectaron dificultades para *coordinar* procesos que se dan entre lo geométrico y aritmético, imposibilitando una concepción proceso del aspecto algebraico y con esto una *encapsulación* de la raíz cuadrada y/o la función raíz cuadrada. Una evidencia de esto es la aparición del *fenómeno* del doble signo en 17 de los 20 informantes, por lo que para este trabajo se analizará la pregunta 6 del cuestionario, la cual tenía por intención indagar la concepción acerca del concepto raíz cuadrada (aspecto algebraico y funcional) y en específico la cuestión del doble signo, a saber: *Un libro de texto A afirma que* $"\sqrt{9} = \pm 3"$, *y el texto B afirma que* $"\sqrt{9} = 3"$. *Si tuvieras que enseñar a un amigo, compañero y/o algún otro estudiante, ¿Cuál de los dos libros de texto sería tu apoyo? Argumenta tu elección.*

En la *Figura 4*, se muestra la respuesta de I8 (Informante 8) a la pregunta, quien afirma que en el caso geométrico la raíz cuadrada siempre será positiva, pero no en el álgebra. Esta respuesta evidencia que I8 no ha logrado coordinar los procesos aritméticos y geométricos según la DG hipotética.

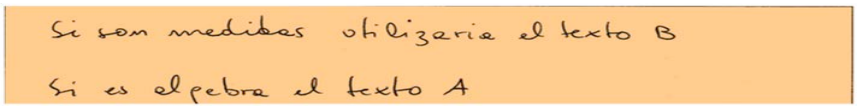

Si son medidas utilizaria el texto B
Si es algebra el texto A

Figura 4: Respuesta de I8 a la pregunta 6 del cuestionario

La *Figura 5* muestra la respuesta de I14 frente a la misma pregunta, muestra un argumento que evidencia la coordinación de los aspectos aritméticos y geométricos para construir una concepción proceso de la raíz cuadrada en el aspecto algebraico.

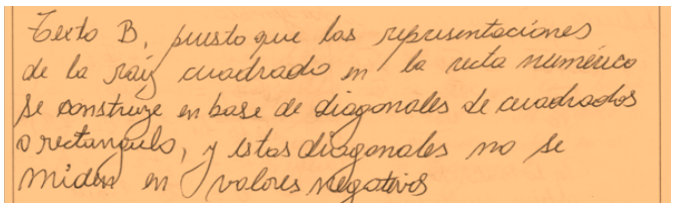
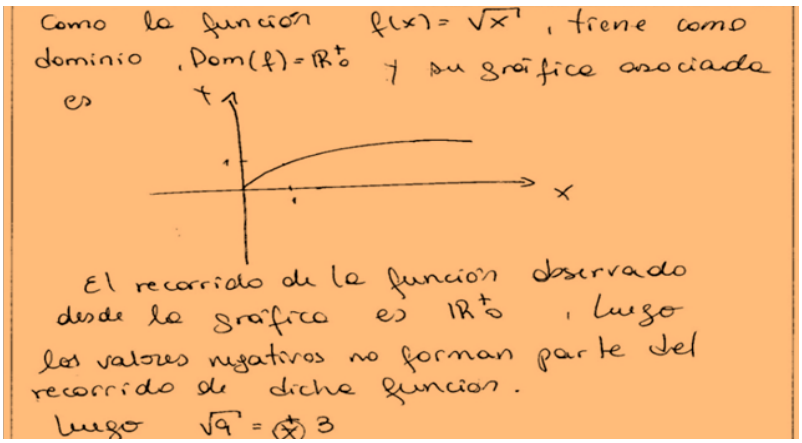

Texto B, puesto que las representaciones de la raíz cuadrada en la recta numérica se construye en base de diagonales de cuadrados o rectangulos, y estas diagonales no se miden en valores negativos

Figura 5: Respuesta de I14 a la pregunta 6 del cuestionario

Los informantes I0 y I7 mostraron respuestas en la que elegían el "texto B" argumentando mediante la función cuadrática, al mencionar el recorrido de esta y con esto la existencia de una

sola imagen para cualquier preimagen. Si bien la elección del texto es correcta, su argumento está basado en un concepto posterior.


Como la función $f(x) = \sqrt{x}$, tiene como dominio, $Dom(f) = \mathbb{R}^+_0$ y su gráfica asociada es

El recorrido de la función observado desde la gráfica es $\mathbb{R}^+_0$, luego los valores negativos no forman parte del recorrido de dicha función.
Luego $\sqrt{9} = \pm 3$

Figura 6: Respuesta de I10 a la pregunta 6 del cuestionario

El informante 20, evidencia una concepción objeto de la raíz cuadrada, pues es capaz de definirla como concepto en base y pone énfasis en las restricciones. Además evidencia tener clara la diferencia entre el concepto de raíz cuadrada y una ecuación cuadrática.

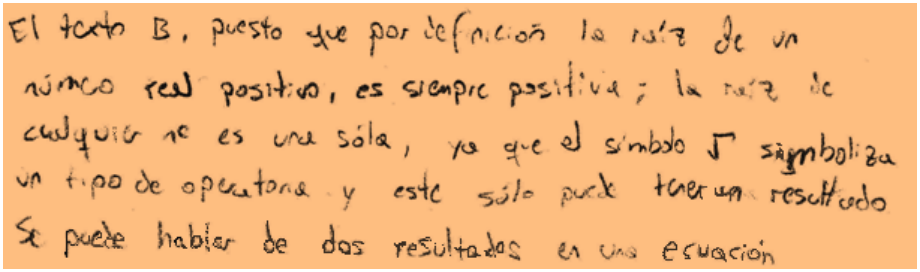

El texto B, puesto que por definición la raíz de un número real positivo, es siempre positiva; la raíz de cualquier no es una sóla, ya que el símbolo $\sqrt{\ }$ simboliza un tipo de operatoria y este sólo puede tener un resultado. Se puede hablar de dos resultados en una ecuación

Figura 7: Respuesta de I20 a la pregunta 6 del cuestionario

Conclusiones

El análisis de los datos del cuestionario y de los casos en particular da cuenta de la presencia de los cuatro aspectos (geométrico, aritmético, algebraico y funcional), pero evidencia la falta de coordinación entre las construcciones mentales expuestas en la DG. Lo anterior indica que la DG hipotética es viable. Los datos indican que cada aspecto presente en la DG hipotética considera una colección de acciones, procesos y objetos, por lo que se puede considerar un esquema para cada aspecto, los cuales deben ser articulados mediante mecanismos de abstracción reflexiva. Los informantes evidenciaron que a partir del proceso inverso de elevar al cuadrado intentan generalizar directamente en lo algebraico, sin establecer una coordinación con otro proceso. En relación a la pregunta 6 del cuestionario, se observan distintas formas de argumentar la elección de un texto para enseñar la raíz cuadrada, en donde solo 3 informantes responden en base al objeto raíz cuadrada. Lo anterior se debe a la falta de coordinación entre los procesos generados en los distintos aspectos epistemológicos, lo cual genera problemas para construir un proceso que

permita hacer la generalización a lo algebraico. Se pudo evidenciar que algunos coordinaban con las funciones, es decir, utilizaban una construcción mental más avanzada, lo que da indicios de que los estudiantes "construyen" muchas de las estructuras mentales, sin tener bien construidas las estructuras previas necesarias, lo que implicaría dificultades para lograr la encapsulación en el objeto.

Referencias bibliográficas

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. In J. Kaput, A. H. Schoenfeld & E. Dubinsky (Eds.*), Research in Collegiate Mathematics Education* II (pp.1–32). U.S.A.: American Mathematical Society

Buhlea, C. y Gómez B. (2008). Sobre raíces y radicales. Efectos de dos culturas de enseñanza (España-Rumania). En Ricardo Luengo, Bernardo Gómez, Matías Camacho, Lorenzo Blanco (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XII. XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática – SEIEM,* SEIEM, SPCE y APM, pp. 217-239. Badajoz: SEEM.

Colin, M. (2005). De la aritmética al cálculo: un estudio transversal de la raíz cuadrada. Tesis de Maestría no publicada.CICATA- IPN. México

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*. **8**(3), 25 – 41.

Kú, D; Trigueros, M; Oktaç, A**.** (2008), Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Educación Matemática* 20 (2), 65-89.

Muñoz, S., Darrigrandi, F. (2011). Matemática 3° Educación Media. Texto del Estudiante. Editorial Santillana del Pacífico S.A. Santiago de Chile.

Roa-Fuentes, S. y Oktaç, A. (2012). Validación de una descomposición genética de transformación lineal: un análisis refinado por la aplicación del ciclo de investigación de APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 15(2), 199 – 232.

Salgado, H. (2007). Conteo: una propuesta didáctica y su análisis. Tesis de maestría no publicada. CICATA – IPN: México.

Vidal, R. (2009), Las raíces y radicales en libros de texto en chile (1969-2009). Un análisis de rupturas epistemológicas como aporte a la Didáctica de las Matemáticas. Tesis doctoral (no publicada), Facultad de ciencias de la Educación, PUCV, Chile.

REFORMA INTEGRAL DE LA EDUCACIÓN BÁSICA. TRANSVERSALIDAD DE CONTENIDOS

Hanssell G. Caballero V., Evelia Reséndiz B. y Ramón J. Llanos P.
Universidad Autónoma de Tamaulipas México
hgcv_caballero@hotmail.com, erbalderas@uat.edu.mx, rjardiel5@hotmail.com

Resumen. En el afán de entrelazar los tres niveles, se presenta la transversalidad en los campos y asignaturas del mapa curricular, con el propósito de trabajar un conjunto de temas ligados entre sí, que potencie la reflexión y el juicio de los alumnos sin perder de vista el sentido formativo de cada asignatura, presentándose una serie de características que se toman en cuenta para lograr dicho objetivo. Se pronuncia una educación integral, potencia el desarrollo de la personalidad y sin olvidar su contexto social, desarrolla orientación humanizadora, generaliza aprendizajes integrales: origina aprecio a la democracia, conocimientos, integra el desarrollo de competencias comprendidas en diversas asignaturas, habilidades y valores, los derechos humanos, la equidad de género, la igualdad en la ciudadanía, respeto por la pluralidad de diversidad, medio ambiente y formar personas autónomas.

Palabras clave: Matemáticas, transversalidad, reforma educativa.

Abstract. With the eagerness to intermix the three levels, mainstreaming occurs in fields and subjects of curriculum map, with the purpose of working a set of interlinked issues, which promotes reflection and judgment of students without losing view of the training effect for each subject, presenting a number of features that are taken into account to achieve the objective. It is pronounced a comprehensive education that enhances the development of personality without forgetting its social context, developing humanizing orientation, generalized integral learning: which creates an appreciation towards democracy, knowledge; integrated skills development included various subjects, skills and values, human rights, gender equality, equal citizenship, respect for the plurality of diversity, environment and to form autonomous people.

Key words: mathematics, transversality, educational reform.

Introducción

La educación básica en México, integrada por el nivel preescolar, primario y secundario ha sufrido entre el 2004 y 2008 una reforma en el currículo que culminó en octubre del 2011 con el Decreto de Articulación de la Educación Básica. El proceso llevó varios años ya que se presentó en el 2004 en el nivel de preescolar, 2006 en secundaria, 2008 en primaria y educación media superior culminando en el 2011 con secundaria y primaria (SEP, 2011).

La reforma antecedente a la Reforma Integral de la Educación Básica (RIEB) fue la llamada plan 93, en el marco del Acuerdo Nacional para la Modernización de la Educación Básica (ANMEB) y uno de los rubros fue la formulación de nuevos planes y programas de estudio de la educación básica.

Para conocer el avance educativo de cada alumno, cada centro educativo y cada entidad, en el 2006, se crea la Evaluación Nacional de Logro Académico de Centros Educativos (ENLACE); ha crecido de manera acelerada abarcando cada vez más grados y asignaturas, pero sólo se aplicaba a la educación básica, pero recientemente se implementó en la educación media superior. Sus

resultados se utilizan como elementos de diagnóstico desde la escuela, en forma individual, zonas, regiones, entidades federativas y país.

En el Plan Educativo Nacional 2007-2012 se presenta la RIEB como una intención política de mejorar los logros educativos del país y cuyo primer objetivo mostrado en el último documento es elevar la calidad de la educación para que los estudiantes mejoren su nivel de logro educativo, cuenten con medios para tener acceso a un mayor bienestar y contribuyan al desarrollo nacional (SEP, 2007). En el afán de entrelazar los tres niveles, se presenta la *transversalidad* en los campos y asignaturas del mapa curricular, con el propósito de trabajar un conjunto de temas ligados entre sí, que potencie la reflexión y el juicio de los alumnos sin perder de vista el sentido formativo de cada asignatura, presentándose una serie de características que se toman en cuenta para lograr dicho objetivo se pronuncia una educación integral, potencia el desarrollo de la personalidad y sin olvidar su contexto social, desarrolla orientación humanizadora, generaliza aprendizajes integrales: origina aprecio a la democracia, conocimientos, integra el desarrollo de competencias comprendidas en diversas asignaturas, habilidades y valores, , los derechos humanos, la equidad de género, la igualdad en la ciudadanía, respeto por la pluralidad de diversidad, medio ambiente y forma personas autónomas.

Los contenidos en educación secundaria están organizados en tres ejes: *Sentido numérico y pensamiento algebraico; Forma, espacio y medida y manejo de la información.* En esta investigación, se hace énfasis en el primer eje *Sentido numérico y pensamiento algebraico.*

Características del programa de Educación Secundaria

Los procesos de globalización se extienden e imponen debido al desarrollo industrial, económico y tecnológico, ponen énfasis en elevar la calidad y producción, lo cual requiere incrementar la productividad humana, basada en sus recursos. Una consecuencia del debate se da en los programas de educación básica que han sufrido reformas, en sus contenidos, en su metodología y en su estructura (OCDE, 2002; UNESCO, 2005; SEP, 2006).

Las instituciones educativas que sustentaron sus planes y programas en base a competencias se basaron en el informe Delors (1996) "La educación encierra un tesoro" en ellos se explican los cuatro pilares de la educación: aprender a conocer, aprender a hacer, aprender a ser y aprender a convivir.

Estos principios acomodan los planes y programas de estudio en el funcionamiento de una mejor calidad, ya que constituyen los principios del aprendizaje para la vida. Delors (1996) afirma que cada uno de los principios ha de tomarse en cuenta de manera equitativa "a fin de que la educación sea para el ser humano, en su calidad de persona y de miembro de la sociedad, una experiencia

global y que dure toda la vida en los planos cognitivo y práctico". Para ello estructura seis tipos de competencias: pedagógicas, sociales, profesionales, técnicas básicas y claves.

En el 2005 aparece el proyecto de "Definición y selección por competencias: bases teóricas y conceptuales" (OCDE, 2005) el cual esboza una nueva tipología de competencias y las define como "la capacidad para responder a las exigencias individuales o sociales o para realizar una actividad o una tarea" (Coll, 2006) en donde los contenidos curriculares promuevan y favorezcan el aprendizaje para que los alumnos lo asimilen y se apropien de él. Cada competencia descansa en una serie de conocimientos, habilidades, actitudes, valores, motivación y otros elementos que pueden ser reunidos para presentarse de una manera efectiva. En el 2006 la Secretaría de Educación Pública define la competencia como algo necesario para el desarrollo y crecimiento de un individuo y para responder a las necesidades de la sociedad de la información y conocimiento a la que se enfrentan.

Las competencias en el Plan y Programa de Estudio de Educación Básica

A partir de la Reforma Educativa en la Educación Secundaria, los programas de estudio son documentos que establecen los propósitos, enfoques, metodologías y criterios para la planeación y evaluación que se pretende lograr en los alumnos en los diferentes niveles educativos, están orientados por cuatro campos formativos:

- Lenguaje y comunicación
- Pensamiento matemático
- Exploración y comprensión del mundo natural y social
- Desarrollo personal y para la convivencia

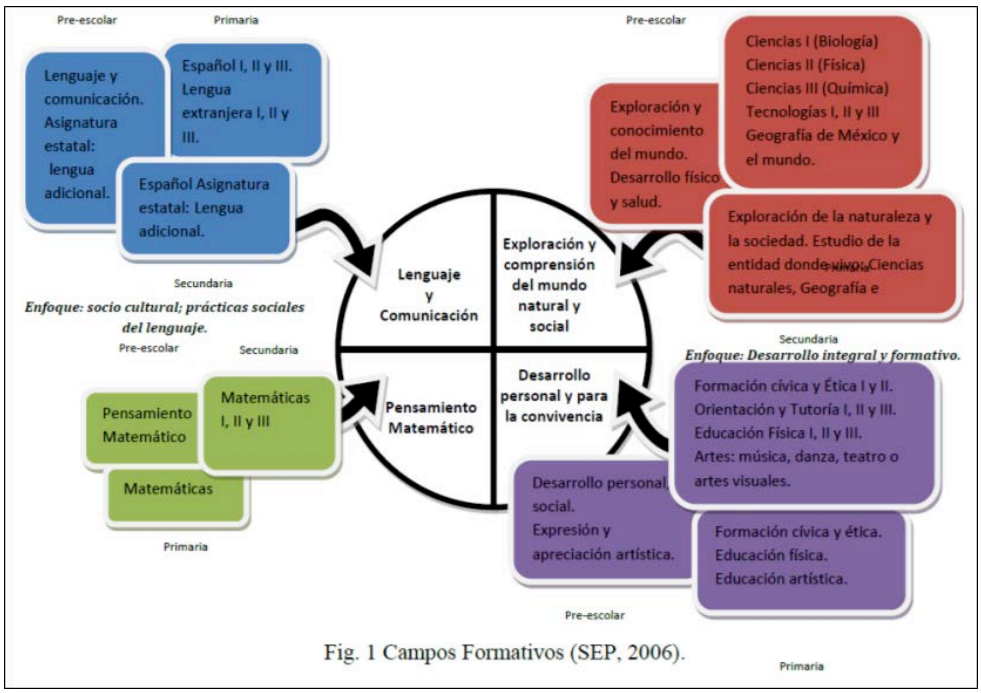


Fig. 1 Campos Formativos (SEP, 2006).

Los cuatro campos formativos de la educación básica (preescolar, primaria y secundaria) se han organizado de forma horizontal y vertical, de tal manera que se permite apreciar la secuencia entre estos campos y asignaturas, pero al ser un esquema no permite apreciar de manera explícita todas las interrelaciones que existen entre ellas. La ubicación de los campos formativos y las asignaturas se centra en sus vinculaciones, así como en la importancia que revisten como antecedente o subsecuente de la disciplina.

Pensamiento numérico y lenguaje algebraico.

En esta fase de su educación, por medio del eje *Sentido numérico y pensamiento algebraico*, los alumnos profundizan en el estudio del álgebra con los tres usos de las literales, conceptualmente distintas: como número general, como incógnita y en relación funcional. Este énfasis en el uso del lenguaje algebraico supone cambios importantes para ellos en cuanto a la forma de generalizar propiedades aritméticas y geométricas.

La insistencia en ver lo general en lo particular se concreta, por ejemplo, en la obtención de la expresión algebraica para calcular un término de una sucesión regida por un patrón; en la modelación y resolución de problemas por medio de ecuaciones con una o dos incógnitas; en el empleo de expresiones algebraicas que representan la relación entre dos variables, la cual, para este nivel, puede ser lineal, cuadrática o exponencial.

Desde este enfoque se pretende que el alumno obtenga una formación matemática para que sea capaz de afrontar las situaciones que se suscitan en su vida diaria manifestando los conocimientos adquiridos así como el desarrollo de las actitudes y habilidades fomentadas en la educación

secundaria. Aunque el panorama no es libre de obstáculos hay que estar preparados para afrontar situaciones problemáticas como las siguientes:

Los alumnos tienen dificultad para encontrar posibles soluciones a problemas planteados. La situación problematizadora se tomará en cuenta en el ambiente del aula para empezar a favorecerlos ya que hay intercambio de opiniones, acuerdos y desacuerdos para reflexionar.

Otra dificultad es la comprensión lectora por carecer del hábito de la lectura, entonces el maestro tendrá que ver o estudiar los posibles conflictos presentados al momento de la interpretación del enunciado.

El factor tiempo para las actividades planeadas, en donde el alumno resuelva con sus propios recursos el problema.

El trabajo en equipo es otra de las situaciones no menos importante, ya que los alumnos presentan una actitud desfavorable a este tipo de actividades y en las cuales el docente debe contar con las herramientas necesarias para que el alumno comprenda un ejercicio en donde los puntos de vista enriquecen el suyo y desarrollan habilidades como la argumentación y competencias como la comunicación y además insistir en la enorme responsabilidad de resolver lo cuestionado, no de manera individual sino colectiva.

Muchos trabajos tratan temas relativos a la detección y a la clasificación de errores y, en general, a las dificultades y obstáculos que encuentran los alumnos que comienzan a estudiar el álgebra. Kieran y Filloy (1989) y Malisani (1993) presentan un resumen bastante completo sobre las principales investigaciones relativas: a los errores que efectúan los alumnos cuando resuelven ecuaciones y problemas algebraicos y a los cambios conceptuales necesarios en la fase de transición entre lo aritmético y lo algebraico.

Las competencias en la matemática.

Rico (2005) encuentra cuatro significados diferentes sobre la noción de competencia, no porque sean significados distintos, sino porque son conceptos diferentes que se han estipulado a un mismo término de forma errónea. Rico (2005) empieza "competencia como dominio de estudio… equivalente a dominio de estudio", en el siguiente significado "conjunto de procesos generales que deben ponerse en práctica al resolver problemas matemáticos", ya que encuentra competencia de manera plural, es decir, competencias. En un tercer lugar aborda las competencias de manera general referente a "la manera en que distintas competencias que se invocan a distintos tipos y niveles de demandas impuestos por distintos problemas matemáticos" (OCDE, 2004), lo que se citó en el segundo lugar, hay un sin número de competencias. En último lugar se habla del nivel de competencia de los alumnos que se expresa en forma de escala y que para Rico (se presenta en el

segundo significado) son competencias generales en donde los alumnos tendrían tareas detalladas que son capaces de realizar.

El informe específica las competencias matemáticas propias de la escuela freudenthaliana, es decir la matematización horizontal y vertical que describieron años atrás autores como De Lange (1987) y en última instancia los expertos de PISA.

Si tomamos la palabra *proficiency* como pericia, sería entonces dentro de las competencias matemáticas como las potencialidades que se actualizan en las acciones de los alumnos que se evalúan y permiten establecer niveles de pericia en las actuaciones.

En cuanto al término *literacy* es el adjetivo de letrado o cultivado, el término mathematical literacy se traduce como alfabetización matemática que es una acción en lugar de una capacidad, pero Rico (2006) dice que: "En los sucesivos documentos se produce un deslizamiento de términos, desde los primeros a los últimos informes, que comienzan por destacar la Alfabetización y concluyen con un mayor uso del término Competencia Matemática". El término se entiende como la capacidad para analizar, razonar y comunicar efectivamente al plantear, interpretar y resolver los problemas en diversos contextos.

En nuestros modelos de competencias no debe aparecer enunciados como "plantear y resolver problemas" como aparece en el informe PISA ya que dentro de nuestro proceso de enseñanza aprendizaje no es una competencia, ya que en el sistema escolar, la competencia consiste en resolver problemas, es decir cuáles son los elementos que lo componen. Es decir para elaborar un modelo de competencia solo hemos descrito que vamos a estudiar, y la clase de función eficaz (resolutor) que se pone en juego para resolver problemas. Como lo señala Polya (1945) en su modelo por fases para la resolución de problemas y por otro lado los componentes del conocimiento y la conducta dados por Schoenfeld (1985) para dar cuenta de las conductas observables de triunfo o fracaso en la resolución de problemas.

Transversalidad de contenidos

Hablar de transversalidad en las escuelas ha sido una evolución rápida, que simboliza lo novedoso del sistema educativo, es un desafío que los profesores de secundaria deben afrontar. Hay desconcierto en esta propuesta, debido a su carácter difuso al tratar de incorporar los contenidos de una asignatura, al desarrollo temático de las otras disciplinas del currículo. Ciertamente ésta inseguridad proyecta una barrera al progreso de la propuesta, que dificulta la armónica articulación con otros. Son abundantes las limitaciones (Carbonell, 1996) a las que nos enfrentamos y de igual manera la de abordar ésta. Sin embargo, la concepción de su término ha pasado por diversos momentos con distintos significados, hasta llegar a lo que representa en la actualidad.

Los temas transversales son: educación ambiental, para la salud y sexual, educación vial, para la paz, para la igualdad de oportunidades, educación multicultural, del consumidor, y la educación moral y cívica es el tema transversal nuclear que se inserta en todas las disciplinas y en todos los demás temas transversales. Uno de los desafíos más importantes que se tiene en estudio es el reconocimiento del valor globalizado del proceso de enseñanza-aprendizaje. Si bien se da actualmente una necesidad innegable de especialización no debería dejarse de lado la formación integral del alumno. ¿Es esto contradictorio con el interés de la educación matemática? ¿Qué es la transversalidad? Colaboraciones como las de Planas y Alsina (2009), tienen el valor del interés de los matemáticos por el desarrollo y popularidad de dicha integración llamada transversal. Desde la educación matemática, Bishop (1999) y Gerdes (1996) y otros enmarcan el tema en la reflexión sobre matemáticas e inculturación, al hablar del profesor como culturizador matemático y la necesidad de formación en ese aspecto.

Después de casi una década de la implementación de la RIEB en México las reformas curriculares implican una nueva forma de trabajo en el aula de modificaciones en las creencias y pensamientos acerca de la educación y sobre el rol en ésta actividad. Estos cambios requieren tiempo para que se consoliden, situación contraria a lo que requiere la reforma: implementación inmediata (Ezpeleta 2004).

Programar con la transversalidad de contenidos en las diferentes áreas curriculares es realmente un desafío sobre todo para los maestros de secundaria. El tema de transversalidad no solo es socializador sino socio-moral, en la reforma del 2006 en la educación secundaria la postura de la Secretaría de Educación Pública los ejes transversales no solo se reduce a una perspectiva moral; este cambio permite que el currículo basado en disciplinas habla sobre ejes temáticos y no de temas, como es el caso del programa de matemáticos donde se muestran tres ejes: sentido numérico y pensamiento algebraico; manejo de información y forma, espacio y medida; los cuales pretenden romper con la lógica tradicional.

La problemática de que la transversalidad exige ir más a allá de la organización por áreas y bloques de contenido que establece el currículo, fracturando –en parte- la lógica disciplinar (Bolívar, 1996). Fernández (1995) de esa misma manera nos dicen que el plan de estudios organizado por disciplinas nos da una percepción fragmentada de la realidad, en aspectos separados entre sí y que se traducen en una división del saber.

Conclusiones

Esté trabajo que se encuentra en proceso, no cuenta con resultados observables en las distintas consignas relacionadas con el eje temático de sentido numérico y pensamiento algebraico cuyos

temas se involucran en las dos primeras sesiones de cada bloque. Se han tomado los temas y subtemas del eje en cuestión en donde los resultados se puedan interpretar de diversas formas de manejar conceptualmente por ejemplo número, incógnita y relación funcional. Este énfasis en el uso del lenguaje algebraico supone cambios importantes para ellos en cuanto a la forma de generalizar propiedades aritméticas y geométricas. Se pone especial énfasis en el uso del lenguaje algebraico supone cambios importantes en cuanto a la de generalizar propiedades aritméticas y geométricas

Hablar de transversalidad en las escuelas, de manera que "empape" las diferentes áreas del currículo, es un reto que el profesor debe afrontar. Existe un desconcierto latente que dificulta su incorporación al desarrollo curricular, sin duda alguna su carácter difuso y porque no, discriminatorio que ha acompañado a su propuesta y hace dudar si nos encontramos ante nuevas áreas, o si son materias que trabajan con diferentes lógicas a la asignatura disciplinar, ciertamente ésta vaguedad proyecta duda sobre la propuesta de transversalidad de contenidos, que dificulta su articulación con otros

Referencias bibliográficas

Bishop, A. (1999). *Enculturación matemática: La educación matemática desde una perspectiva cultural.* Barcelona: Ediciones Paidós Ibérica.

Bolívar, A. (1996): "Non scholae sed vitae discimus: límites y problemas de la transversalidad. *Revista de Educación,* 309, 23-65.

Carbonell, S., (1996). El laberinto de las transversales, aula de innovación educativa. *Revista Interuniversitarios de Formación del Profesorado,* No. 27, 83-94.

Coll, E. (2006). Vigencia del debate curricular. Aprendizajes básicos, competencias yestándares, *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 8 (1), 10-19.

Delors, J. (1996). *La Educación encierra un tesoro*. España: Grupo Santillana de Ediciones.

De Lange, J. (1987). *Mathematics, Insight and Meaning*. Utrecht: OW & OC.

Ezpeleta, J. (2004). Innovaciones educativas. Reflexiones sobre los contextos en su implementación. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 9(21), 403-424.

Fernández, A., (1995) Diseño e integración de programas de educación para la paz en el currículum escolar. *Revista interuniversitaria de formación del profesorado*, 22, 21-28.

Gerdes, P. (1996). Ethnomathematics and Mathematics Education. En A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y Laborde (Eds), *International Handbook of Mathematics Education.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva

psicológica. *Enseñanza de las Ciencias,* 7(3), 229-240.

OCDE (2002). Definition and selection of competences (DeSeCo). Theoretical and conceptual foundations. Recuperado el 18 de enero de 2009 de www.portal-stat.admin.ch/deseco/deseco_strategy_paper_final.pdf

OCDE (2004). *Learning for tomorrow's world: First results from PISA 2003.* Paris: OCDE

OCDE. (2005). Definition and Selection of Competencies: Theoretical and Conceptual Foundations (DeSeCo). Summary of the final report. En Rychen, Dominique y Salganik, Laura (Eds.), Key competencies for a successful life and a well-functioning society. Göttingen, Alemania: Hogrefe & Huber. Recuperado el 17 de agosto de 2010 de http://app.cepcastilleja.org/contenido/ccbb/saber_mas/deseco/5_deseco_final_report.pd

Planas, N., Alsina, A. (2009). *Educación matemática y buenas prácticas. Infantil, primaria, secundaria y educación superior.* Barcelona: Graó.

Pólya, G. (1945). *How to solve it.* Princeton, NJ: Princeton University Press.

Rico, L. (2005). La competencia matemática en PISA. *PNA*, 1(2), 47-66.

Rico, L. (2006). Marco teórico de evaluación en PISA sobre matemáticas y resolución

de problemas. *Revista de Educación*, núm. Extraordinario, 275-294.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving.* Orlando: Academic Press.

SEP (2011). La reforma integral de la educación básica. Recuperado el 25 de julio de 2012 de http://básica.sep.gob.mx/reformaintegral/sitio/index.php?act=rieb

SEP (2007). Programa Sectorial de Educación 2007-2012. México: SEP.

SEP (2006). Programa Nacional de Educación 2006-2012. México: SEP.

UNESCO (2005). Informa Mundial de la UNESCO. Hacia las Sociedades del Conocimiento. Recuperado el 13 de septiembre de 2009 de http://unesdoc.nesco.org/images/0014/001419/141908s.pdf.

NIVELES DE CONSTRUCCIÓN DE SIGNIFICADO DE ALGUNOS SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

María Laura Distéfano, María Andrea Aznar y Marcel David Pochulu
Universidad Nacional de Mar del Plata Argentina
Universidad Nacional de Villa María
mldistefano@fi.mdp.edu.ar, maznar@fi.mdp.edu.ar, marcelpochulu@hotmail.com

Resumen. Este trabajo tiene por objetivo determinar niveles alcanzados por estudiantes en la construcción de significado para algunos símbolos del registro algebraico. Se diseñó un instrumento que fue administrado a estudiantes de primer año de carreras de Ingeniería, Bioquímica, Matemática y Biología de la Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina. El marco teórico que sustenta este análisis es el Enfoque Ontosemiótico. Se definieron algunas funciones semióticas involucradas en este proceso de significación. Los datos relevados ubican a los alumnos en un nivel simbólico que no sería adecuado para permitir una construcción de conocimiento apropiado de algunos objetos matemáticos.

Palabras clave: significado, símbolos, funciones semióticas

Abstract. This paper aims to determine levels achieved by students in the construction of meaning for some symbols in algebraic register. An instrument was designed and administered to first-year students of Engineering careers, Biochemistry, Mathematics and Biology in Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina. The theoretical framework for the analysis is the Onto-Semiotic Approach. Some of the semiotic functions involved in this process of signification were defined. The data surveyed show the students located at a symbolic level that would be inappropriate to allow the construction of proper knowledge of some mathematical objects.

Key words: meaning, symbols, semiotic functions

Introducción

El trabajo tiene por objetivo determinar niveles alcanzados por estudiantes que cursan Matemática en la Universidad, en la construcción de significado para algunos símbolos que con frecuencia son utilizados en el registro algebraico. En particular, se consideraron las representaciones que involucran los símbolos de pertenencia, inclusión, conjunción, disyunción y cuantificadores que están presentes en las prácticas matemáticas que realizaron los estudiantes.

El marco teórico y metodológico que sustenta este trabajo es el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la instrucción matemática (EOS) de Godino, Batanero y Font (2009).

Marco Teórico

Para el EOS, una *práctica matemática* se la define como cualquier acción, expresión o manifestación (lingüística o de otro tipo) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar la solución obtenida a otras personas, validar y generalizar esa solución a otros contextos (Godino, Batanero y Font, 2009). A partir de este constructo surge la noción de *significado*, definido como "el sistema de prácticas operativas y discursivas para resolver un cierto tipo de problemas" (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007, p.7). La falta de concordancia entre los significados otorgados por los distintos actores (personas o instituciones) que intervienen en los

procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática, generan diferencias que dan lugar, en términos del EOS, a un *conflicto semiótico*.

El significado está conformado por un conjunto de *funciones semióticas*, cada una de las cuales asigna a una expresión un contenido, mediante un cierto criterio o regla de correspondencia establecido por un sujeto. Este contenido puede ser un término, expresión, gráfico u otro elemento lingüístico, una situación problema, un concepto o definición, una acción u operación, algoritmo o procedimiento, una argumentación, etc. (Godino, Batanero y Font, 2009).

Antecedentes

La adquisición del lenguaje simbólico matemático ha sido abordada por distintos autores, desde diversas líneas teóricas que abarcan perspectivas psicológicas, enfoques lingüísticos y aspectos didácticos (Hiebert, 1988; Pimm, 1990; Kaput, 1991; Rojano, 1994; Arcavi, 2007; Font, 2001; Alcalá, 2002; Socas, 2007). En todos los casos se destaca la relevancia del dominio del sistema simbólico matemático, su implicancia en la capacidad de resolver tareas problemáticas de un determinado nivel y en la posibilidad de expresar desarrollos y resultados.

En la mayoría de las publicaciones el interés está centrado en los primeros niveles de la educación. Son escasos los antecedentes de estudios realizados en el nivel superior. Entre ellos se puede citar los textos de Camós y Rodríguez (2009) y de Colombano, Formica y Camós (2012), quienes centran su investigación en la exploración y tipificación que los docentes hacen de los lenguajes natural y simbólico al enseñar los conceptos de límite, continuidad y derivabilidad, revelando como problemática la escasa atención que los docentes dan a la conversión entre registros y al uso simultáneo de ambos lenguajes. Distéfano, Urquijo y González (2010), presentan una experiencia de enseñanza para mejorar las habilidades en el registro simbólico con estudiantes ingresantes a las carreras de Profesorado y Licenciatura en Matemática. Lacués Apud (2011) también refiere una experiencia de enseñanza de sistemas matemáticos de símbolos, con alumnos ingresantes a carreras de Ingeniería. En estos dos últimos casos se obtuvo una evaluación positiva de la intervención educativa y se concluye que es posible promover una mayor competencia en los estudiantes en relación con la utilización de símbolos matemáticos.

Metodología

Para analizar el significado que le otorgan los estudiantes a los símbolos que fueron foco de análisis se diseñó un instrumento partiendo de la idea de que el significado de un símbolo está ligado a tres elementos: su identificación, la estructura semiótica de las expresiones en las que está presente y el valor de verdad de las mismas.

En dicho instrumento se propusieron actividades de lectura y escritura de expresiones simbólicas –conversiones entre los registros coloquial y simbólico algebraico– y la asignación de valores de verdad a expresiones representadas en ambos registros. Este instrumento se administró a 100 estudiantes de primer año de las carreras de Ingeniería, Bioquímica, Profesorado y Licenciatura en Matemática y Profesorado y Licenciatura en Biología, de la Universidad Nacional de Mar del Plata (Argentina). Los datos fueron relevados, en cada caso, a mediados del curso de Álgebra.

El análisis de las producciones escritas de los estudiantes se realizó teniendo en cuenta el constructo función semiótica. Se determinaron tres funciones semióticas presentes en el proceso de significación de todos los símbolos analizados.

1. La primera de ellas (F_1) vincula la expresión del símbolo con su expresión coloquial o denominación.
2. La segunda (F_2) se establece entre la denominación mencionada y la estructura determinada por la sintaxis de la representación. Esa sintaxis involucra tanto el orden de los elementos como los roles jugados por ellos.
3. La tercera función semiótica (F_3), es la que relaciona la proposición en la que está presente el símbolo, con su valor de verdad, el cual depende también de los significados de los operandos involucrados.

Como ejemplo se presentan en la Figura 1 estas funciones semióticas para el caso particular del símbolo de pertenencia.

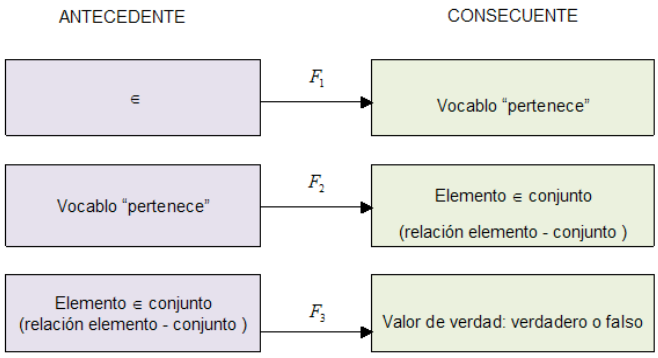


Figura 1. Funciones semióticas para el símbolo de pertenencia

Se analizaron las producciones escritas tomando en cuenta si se evidenció la construcción de cada una de las funciones involucradas en cada ítem.

Posteriormente a la administración del instrumento, se realizaron entrevistas semiestructuradas a algunos de los estudiantes evaluados de cada carrera, complementando y profundizando la información relevada.

Resultados

Para hacer una descripción numérica de los resultados, en cada ítem se discriminaron las funciones semióticas involucradas, asignando en cada caso un 1 o un 0 según se evidenciara que el estudiante la hubiera establecido o no, respectivamente.

Se sumaron los puntajes de las funciones semióticas establecidas en cada ítem, agrupándolos por símbolo. Se dividió esa suma por la cantidad de funciones semióticas involucradas, obteniéndose así una proporción de "establecimiento de funciones semióticas" de cada símbolo.

Asimismo, para tener una idea del desempeño global de cada estudiante en la totalidad de los símbolos, se calculó la proporción de funciones semióticas establecidas en total.

Las proporciones obtenidas se clasificaron en tres categorías: menos del 40 por ciento de las funciones semióticas involucradas; entre el 40 y el 70 por ciento y más del 70 por ciento. En la Tabla 1, se exponen las frecuencias de estudiantes en cada categoría para cada símbolo evaluado, como así también, para la totalidad de los símbolos.

Dado que las proposiciones evaluadas son atómicas o moleculares muy simples, se considera que un alumno manifiesta un significado personal declarado ADECUADO, para cada símbolo, si la proporción de funciones semióticas que estableció supera el 70%. En los casos en que la proporción fluctúa entre el 40% y el 70% se lo clasificará como nivel PARCIALMENTE ADECUADO y, con una proporción menor al 40% INADECUADO.

Tabla 1. Frecuencias de estudiantes en cada categoría para cada símbolo y para la totalidad de los símbolos evaluados.

Símbolos analizados	Individualmente						En forma conjunta
Categorías de proporciones de FS establecidas	$\in$	$\subset$	$\forall$	$\exists$	$\wedge$	$\vee$	
INADECUADO	0%	50%	4%	11%	15%	32%	4%
PARCIALMENTE ADECUADO	14%	21%	47%	26%	53%	31%	59%
ADECUADO	86%	29%	49%	63%	32%	37%	37%

En base a esta consideración y observando la Tabla 1 puede señalarse:

- Únicamente en los casos del símbolo de pertenencia y del cuantificador existencial, más de la mitad de los alumnos evaluados, manifiestan una construcción adecuada de su significado.
- En el caso del cuantificador universal aproximadamente la mitad de los alumnos evidenció un nivel adecuado de significación.

- Es notable que la mitad de los alumnos no puedan establecer ni siquiera el 40% de las funciones semióticas asociadas al símbolo de inclusión, es decir se ubican en un nivel inadecuado. Esto podría deberse a que, en la mayoría de las carreras evaluadas, las prácticas matemáticas de uso de este símbolo son poco frecuentes.
- En los casos de la conjunción y la disyunción también es llamativa la alta frecuencia de estudiantes con dificultades en la significación de estos símbolos a pesar de las numerosas prácticas matemáticas que los involucran.
- En relación a la columna correspondiente a la Totalidad de los símbolos evaluados, es notable que sólo 37 de los alumnos evaluados manifiestan tener un nivel de desempeño simbólico adecuado.

Es notable la frecuencia, con la que se presentaron algunos errores, asociados a la función semiótica F_2 en tareas de lectura, manifestados al aceptar, como "bien escrita" algunas expresiones:

- El 49% de los estudiantes aceptó como bien escrita la expresión $3 \subset \mathbb{Z}$ y el 59% o hizo con la expresión $\mathbb{N} \in \mathbb{Z}$. Estas situaciones podrían deberse a la conjunción de distintas causas. Por un lado, el desconocimiento de las formas de notación conjuntista. Si bien el tema conjuntos fue eliminado de la currícula de la escuela media, en el nivel superior no se lo aborda como tema de enseñanza pero sí se lo aplica. Por otra parte, la confusión entre el uso coloquial del vocablo "incluido" como sinónimo de "perteneciente", que trasladan al ámbito de uso matemático utilizándolos indistintamente.
- El 73% de los estudiantes señaló como bien escrita la expresión $-5 \wedge 4 \in \mathbb{R}$. Esto estaría revelando un "uso coloquial" del símbolo de conjunción utilizado como simple codificación del vocablo "y", mostrando que únicamente se ha establecido la función F1.
- La expresión $\forall \mathbb{N} \quad \mathbb{N}>0$ fue indicada como correctamente escrita por el 58%. Esto, en principio, evidencia el desconocimiento de las reglas de formación de expresiones cuantificadas y, además, podría estar causado por una asociación, símbolo a símbolo, con las componentes de la proposición "todos los naturales son positivos".

En la tabla 2 se muestran algunos ejemplos de errores asociados a falencias en la función F_2 en tareas de escritura.

Tabla2. Errores en las producciones de los alumnos asociados a la función semiótica F_2

Ejemplos de errores en las producciones de los alumnos	Descripción del error
Alumno 62 $3 \in D \quad D=[1;6]$ $3 \subset D \quad D=[1;10]$ Alumno 2 $2 \in \mathbb{N}$ $\sqrt{2} \subset \mathbb{R}$	En las producciones de estos dos estudiantes se manifiesta un conflicto semiótico de tipo cognitivo que se produce al asignar el mismo significado a los símbolos de pertenencia e inclusión.
Alumno5 $\forall x \in \mathbb{N}-\{1\}$ $\exists x / x^2+5=0$ Alumno 1 $\forall K \in \mathbb{R}$ (PARA TODO K que PERTENECE A LOS Nros Reales) $\exists x \in \mathbb{N} / x>0$	En ambos ejemplo se puede apreciar la diferencia en el nivel del manejo de la sintaxis asociada a los cuantificadores. Se observa una mejor escritura de las expresiones en las que figura el cuantificador existencial en tanto que, al ejemplificar el uso del cuantificador universal, ambos alumnos, escriben una expresión que no es proposición.
Alumno 40 $\forall x \in \mathbb{N}\ [p \Rightarrow q \wedge r]$ $\exists x \in \mathbb{Z}\ [p \Rightarrow q \vee r]$	En este caso, el estudiante no vincula la variable cuantificada con un esquema proposicional que la contenga.
Alumno 20 $4 \wedge 5 \in \mathbb{N}$ $4 \vee 5 \in \mathbb{Z}$	Las apariciones de este error fueron detectadas en numerosas producciones. Esto estaría revelando, también en tareas de escritura, un "uso coloquial" del símbolo de conjunción utilizado como simple codificación del vocablo "y".

Respecto de la función F_3 son interesantes de mencionar los siguientes errores hallados:

El alumno, cuya producción en una tarea de lectura se muestra en la Figura 2, pudo convertir al lenguaje coloquial la proposición en la que el cuantificador universal está presente de un modo tácito. Sin embargo, no tiene en cuenta a dicho cuantificador al momento de asignar el valor de verdad, pues le da a la proposición dos valores de verdad posibles de acuerdo a valores de x.

El CUADRADO DE UN NÚMERO ENTERO ES MENOR A 9	Sea $x \in \mathbb{Z}$ $x^2<9$	V si $-3<x<3$ F si $-3>x>3$

Figura 2. Producción del alumno 20 en una tarea de lectura de símbolos

El ejemplo presentado en la Figura 3 corresponde a resoluciones que implicaban tareas de escritura en el ejercicio en el que se solicitaba escribir una proposición *verdadera* en la que figurara el símbolo indicado. En este caso, el estudiante manifiesta un conflicto semiótico cognitivo al usar, indistintamente, los dos conectores o juntores al expresar las soluciones de una ecuación; en la

primera, queda una proposición falsa ya que el valor de la variable no puede ser simultáneamente 1 y –1; sin embargo es posible que el alumno lo asocie a una expresión del tipo "las soluciones de la ecuación son 1 *y* –1", asociación que no realiza en el segundo ejemplo.

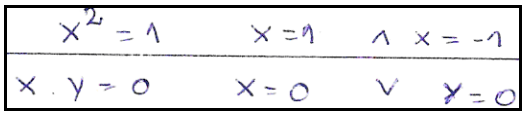


Figura 3. Producción del alumno 57 en una tarea de escritura

Conclusiones

La definición de las funciones semióticas F1, F2 y F3, permitió fragmentar el significado de los símbolos en algunas de sus componentes. Esto posibilitó su uso como herramientas metodológicas para describir y estudiar la construcción del significado de estos símbolos, localizando algunas dificultades. A partir del conteo de las funciones semióticas que se manifestaron como establecidas se definieron proporciones. Las mismas fueron agrupadas en tres categorías consideradas como distintos niveles de adecuación.

Los resultados globales obtenidos revelan que la mayoría de los estudiantes no manifiesta un nivel adecuado en la construcción de los significados de los símbolos evaluados.

Las dificultades más acentuadas se encontraron en la significación de los símbolos de inclusión, disyunción y conjunción. En el caso de la inclusión esta deficiencia podría adjudicarse a la poca frecuencia de uso en las prácticas matemáticas del primer año de estas carreras. Sin embargo, la construcción de su significado es necesaria puesto que, en asignaturas posteriores, será requerido su uso. La situación respecto de los conectivos es diferente pues su uso es habitual en distintas prácticas; algunos de los obstáculos observados podrían estar asociados a la falta de formación en lógica proposicional, en particular a los valores de verdad de las operaciones de conjunción y disyunción. Éste sería el caso de los alumnos de las carreras de Biología y Bioquímica. También se hallaron casos de estudiantes de carreras de Ingeniería o Matemática, que, si bien tuvieron formación en lógica proposicional, no logran transferir espontáneamente los análisis de valores de verdad a contextos externos a las tablas de verdad.

Muchos de los errores más frecuentes están ligados a la sintaxis manifestándose mayoritariamente en las tareas de escritura.

Es evidente que la función F1 es indispensable y previa al establecimiento de cualquier otra función en el proceso de significación. Cabe preguntarse si hay un orden de prioridad en el establecimiento de las demás funciones. Esto será objeto de futuros análisis como así también el estudio del establecimiento de cada tipo de función semiótica de manera global en todos los símbolos.

Referencias bibliográficas

Alcalá, M., (2002). *La construcción del lenguaje matemático*. Barcelona: Grao.

Arcavi, A. (2007). El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. *Uno. Revista de didáctica de las matemáticas*, 44, pp. 59-75.

Camós, C.; Rodríguez, M. (2009). *Exploración del uso de los lenguajes natural y simbólico en la enseñanza de Matemática superior.* Memorias del VI Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (VI Cibem). Chile. Disponible en: http://ebookbrowse.com/articulo-camos-rodriguez-texto-completo-pdf-d36067393. Recuperado: 30/06/11.

Colombano, V., Formica, A., Camós, C. (2012). Enfoque cognitivista. En POCHULU, M. y Rodríguez, M. (compiladores). *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*. 115-152. Editorial Universitaria de Villa María: Villa María.

Distéfano M. L., urquijo, S. y González, S. (2010) Una intervención educativa para la enseñanza del lenguaje simbólico. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 23; 59-71. ISSN 1815-0640.

Font, V. (2001). Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 14, pp. 1-35.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2007). *Pauta de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Recuperado el 12 de agosto de 2011 de: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/pauta_valoracion_idoneidad_5enero07.pdf

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2009). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Recuperado el 12 de agosto de 2011 de: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf

Hiebert, J. (1988). A theory of developing competence with written mathematical symbols. *Educational Studies y Mathematics*, (19), pp.333-355.

Kaput, J. (1991). Notations and representations as mediators of constructive processes. En E. von Glasersfeld (Ed.), *Redical constructivism in mathematics education*, pp. 53-74, Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. Disponible en: http://www.springerlink.com/content/q6n3h0g5vj122068/fulltext.pdf.

Lacués Apud, E. (2011). Enseñanza y aprendizaje de los sistemas matemáticos de símbolos. *Didac*, 55-56, pp. 29-35.

Pimm, D. *El lenguaje matemático en el aula*. Madrid: Morata, 1990.

Rojano, T. (1994). La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 12 (1), pp. 45-56.

Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. *Investigación en educación matemática XI*, pp. 19-52

DIFICULTADES EN EL DISEÑO DE TAREAS CON MODELIZACIÓN

Angela Mora Zuluaga y José Ortiz Buitrago
Universidad de Los Andes-Táchira Venezuela
Universidad de Carabobo-Maracay
ammzuluaga@gmail.com, ortizbuitrago@gmail.com

Resumen. Se presenta un avance de investigación sobre el desarrollo de la competencia de planificación relacionado con las dificultades en el diseño de tareas con modelización. Es un estudio cualitativo interpretativo bajo la metodología de evaluación de programas. Las técnicas utilizadas fueron la observación y entrevista, las cuales se aplicaron a grupos de profesores en formación. Los resultados revelaron que: a) los contenidos de Educación Media no son vistos como generadores de situaciones o fenómenos sino como modelos establecidos, b) los profesores en formación tienden a repetir el modelo de enseñanza bajo el cual se formaron, y, c) los futuros profesores necesitan más formación y experiencia en el diseño de tareas.
Palabras clave: modelización, tareas, planificación
Abstract. This paper is a research in progress about development of planning competencies related to the difficulties in designing modeling tasks. It is a qualitative interpretive study under program evaluation methodology. The techniques used were observation and interview, which teachers groups in training. The results showed that: a) the contents of scholar mathematics are not seen as generators of modeling situations, b) student teachers tend to repeat the teaching model under which they formed, and, c) the future teachers need more training and experience in design tasks modeling.
Key words: modeling, tasks, planning

Introducción

La modelización y las aplicaciones de las matemáticas, han sido tema central en la educación matemática durante los últimos 30 años. Para Blomhøj (2004), la modelización constituye una práctica de enseñanza que focaliza el proceso de enseñanza y aprendizaje en la relación entre el mundo real y la matemática. En este trabajo se conceptualiza como una estrategia de enseñanza que permite la construcción de conceptos matemáticos de forma más comprensiva para los estudiantes.

La modelización como estrategia de enseñanza se configura como un elemento clave en la planificación de unidades didácticas. Por ende, se asume que la formación inicial del profesor de matemáticas debe propiciar experiencias y oportunidades de reflexión y análisis del rol de esta estrategia en la enseñanza de un contenido matemático. En este sentido, Ortiz (2002), Mathews y Redd (2007), y Ortiz, Rico y Castro (2007) sostienen que la modelización permite a los profesores en formación manejar y utilizar conceptos y procedimientos matemáticos haciendo uso de una herramienta dinámica de enseñanza y aprendizaje, en el abordaje de situaciones problema. También permite desarrollar ideas sobre lo que significa enseñar matemáticas y, sobre estrategias y técnicas para la enseñanza de un tema particular.

Por otra parte, para Ortiz (2002) la modelización amplía el conocimiento didáctico, desarrolla el pensamiento del futuro profesor y genera un espacio de reflexión en la construcción del

conocimiento matemático y le permite conectar el contexto de los alumnos con las matemáticas. De este modo los ayuda a percibir que las matemáticas escolares pueden utilizarse para comprender, describir, interpretar y modificar la realidad. En este sentido, Oliveira (2006) refiere que la modelización e la formación del profesor de matemáticas, posibilita el desarrollo de conocimientos matemáticos, brinda una percepción del papel de las matemáticas en la sociedad y propicia el escenario para su integración en su práctica educativa. Por su parte Doerr (2007) sostiene que los profesores de matemáticas en formación necesitan experiencias sobre modelización, las cuales les provean de un rango de contextos y herramientas para la enseñanza y les permitan participar en el análisis de su propia actividad de modelización.

Por lo expuesto anteriormente, en este trabajo se reportan las dificultades que abordan seis grupos de profesores en formación, cuando utilizan la modelización en el diseño de tareas u oportunidades de aprendizaje. El tema abordado está inmerso en una investigación cuya finalidad es analizar el desarrollo de la competencia de planificación de la enseñanza durante la implementación de un programa formativo.

Análisis didáctico y modelización en la planificación de la enseñanza.

La planificación de la enseñanza se asume como una de las competencias del profesor de matemáticas (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez; 2008) que requiere del desarrollo de unas capacidades específicas que le permitan identificar, organizar, seleccionar, y priorizar los significados de los conceptos; establecer las expectativas de aprendizaje y diseñar las tareas para el logro de las mismas; elegir los materiales y recursos, y diseñar las estrategias de evaluación. Se trata de una competencia a desarrollar durante su formación inicial.

Esta competencia, según Gómez (2007), se organiza de acuerdo con los componentes que conforman el análisis didáctico, conceptualizado como el "procedimiento ideal para la planificación, puesta en práctica y evaluación de unidades didácticas" (Gómez, 2007, p. 130). Las actividades y experiencias con la planificación de contenidos matemáticos, tiene dentro de la formación inicial de profesores, la finalidad de propiciar momentos y experiencias donde los futuros profesores reflexionen sobre cómo enseñar un contenido. En este sentido, la planificación de la enseñanza se relaciona y forma parte del conocimiento necesario para aprender a enseñar matemáticas. Enseñar matemáticas requiere el desarrollo de un conocimiento complejo, y en la perspectiva de este estudio, la planificación de la enseñanza constituye una de sus vías de abordaje. Esto por considerar que, la planificación de unidades didácticas a través del análisis didáctico aborda el proceso de aprender a enseñar matemáticas desde la integración de distintos dominios del conocimiento del futuro profesor (disciplinar, didáctico, curricular, entre otros), la aplicación de

dicho conocimiento en situaciones de enseñanza y, la reflexión y análisis de la aplicación de ese conocimiento.

La conceptualización sobre el análisis didáctico que fundamenta el desarrollo de esta investigación se toma de Gómez (2007). El mismo, se conforma por cuatro análisis: de contenido, cognitivo, de instrucción y de actuación, que se interrelacionan y conforman un ciclo mutuamente recursivo. El desarrollo de cada uno de estos análisis utiliza los organizadores del currículo conceptualizados como "aquellos conocimientos que adoptamos como componentes fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas" (Rico, 1997, p. 45). Estos organizadores permiten al profesor recabar, seleccionar y organizar la información necesaria para la planificación de unidades didácticas. En este sentido, el análisis didáctico permite organizar la planificación de la enseñanza de un contenido matemático.

En la planificación de las unidades didácticas, se desarrollaron los tres primeros análisis, pues el estudio en desarrollo no preveía la puesta en práctica de las unidades planificadas por los profesores en formación. Para el de contenido, se tomaron en cuenta los organizadores historia del contenido, estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología. Para el cognitivo, las expectativas de aprendizaje en términos de objetivos de enseñanza y competencia matemática, los errores y dificultades para el aprendizaje de los estudiantes y las tareas. Los organizadores análisis de tareas, materiales y recursos, y estrategias de evaluación, conformaron el análisis de instrucción.

La modelización como estrategia de enseñanza, fundamentó el trabajo realizado para el diseño de las tareas, y su organización. En este sentido, se utilizó la clasificación propuesta por Barbosa (2001), sobre las situaciones, casos o formas de utilización de la modelización en el aula. Estos tres casos, proporcionan opciones a los futuros profesores para el diseño y selección de las tareas durante la planificación de unidades didácticas.

En el primer caso, el profesor elige un tema, simplifica y elabora una situación problemática, presenta los datos necesarios para su resolución, elabora un modelo matemático y deja que los alumnos discutan sobre la solución del problema, orientados por el profesor. En este caso, el docente tiene una mayor participación en la conducción y orientación de las actividades de modelización. En el segundo caso, el profesor propone una situación problemática a ser resuelta por los alumnos con su orientación, y los alumnos son responsables de simplificar la situación problema, recolectar los datos necesarios para su resolución y proporcionar la solución a la situación problema. En este caso existe una menor conducción de las actividades de modelización por parte del profesor. En el tercer y último caso, los alumnos eligen un tema, simplifican y elaboran una situación problemática, recolectan los datos necesarios para su resolución y

proporcionan la solución a la situación problema, es decir, todas las etapas son conducidas por los alumnos con la orientación del profesor. En este caso se evidencia una mayor autonomía de los alumnos en la conducción de las actividades con modelización.

El diseño de las tareas en el marco de la planificación de unidades didácticas debía mostrar todos los usos de la modelización. Sin embargo, los grupos de profesores debieron abordar y enfrentar diversas dificultades de distinta índole que se reportan más adelante.

Metodología

La investigación se enmarca en el enfoque cualitativo desde una perspectiva teórica interpretativa y sigue una metodología de evaluación de programas. Para llevar a cabo la investigación, se diseñó y aplicó un programa formativo denominado *Enseñanza del álgebra utilizando modelización y sistemas de cálculo simbólico* (EAMS), con el que se pretendía contribuir al desarrollo de capacidades asociadas con la competencia de planificación de la enseñanza. Este programa tuvo como componentes principales: la planificación de la enseñanza utilizando el análisis didáctico, la modelización como estrategia de enseñanza y el uso de herramientas tecnológicas como recursos de enseñanza.

Los profesores en formación que participaron en el desarrollo del programa EAMS, eran 27 estudiantes del IX Semestre de la Carrera de Educación Mención Física y Matemática de la Universidad de Los Andes-Táchira de Venezuela. Los futuros profesores conformaron seis grupos compuestos por entre 4 y 5 participantes: Sistemas de Ecuaciones (SEC), Potenciación (POT), Productos notables (PN), Polinomios (POL), Función polinómica (FPOL) e Inecuaciones (INEC). Cada grupo eligió un contenido del Currículo de Matemática de Educación Media venezolana, con la finalidad de planificar una unidad didáctica, utilizando el análisis didáctico como proceso de organización de la planificación de la enseñanza de un contenido matemático. Cada unidad didáctica contemplaba el diseño de tareas utilizando la modelización como estrategia de enseñanza. Se recurrió a procesos de observación y análisis sobre las presentaciones de los grupos relacionadas con el diseño de las tareas.

En este sentido, la información mostrada en este reporte, se obtuvo durante las presentaciones que realizaron los grupos sobre su unidad didáctica, y específicamente, durante la presentación de las tareas u oportunidades de aprendizaje diseñadas. Lo expresado por cada grupo fue grabado en audio y video, con el conocimiento de las partes. La información fue transcrita y codificada para su análisis. Adicionalmente, al finalizar todas las actividades del programa formativo EAMS, se entrevistó a cada grupo. Como parte de esta entrevista, expresaron las dificultades percibidas en

el diseño de tareas con modelización. Con conocimiento de cada grupo, se obtuvo registro de audio de cada entrevista. El mismo fue transcrito y codificado para su análisis.

Para identificar lo expresado por los grupos durante la entrevista, se inicia con el código asignado a cada uno, seguido de la letra E que significa entrevista, y la fecha de realización de la misma. Así, el código SEC.E.06.02.2012, significa que el texto fue expresado por el grupo Sistemas de ecuaciones, durante su entrevista del día seis de febrero de 2012.

Resultados

Con respecto a las entrevistas, el análisis preliminar permite establecer que desde la percepción de los grupos de profesores en formación, estos abordaron y enfrentaron dificultades relacionadas con el diseño de tareas como tal, el modelo de formación vivido y la ausencia de experiencias preliminares en el ámbito de la modelización.

Las dificultades referidas al diseño de las tareas, se relacionaron con la construcción de los enunciados, con la identificación de fenómenos y situaciones para el diseño de estas, con no saber cómo utilizar la información de la fenomenología en la construcción de los enunciados, y con la redacción de tareas sobre las distintas situaciones con modelización. Esto reflejó que los contenidos de Educación Media no eran vistos como generados de situaciones o fenómenos sino como modelos establecidos. En este sentido, los profesores en formación tuvieron dificultades para ver el o los fenómenos que generaban al contenido y después modelar. No lograban realizar la conexión entre situaciones reales y el contenido que trabajaban, para poder redactar enunciados de tareas.

POL.E.23.02.2012: *"Con la modelización se puede organizar eso de la contextualización de las tareas, es una estrategia que permite hacer eso. Lo difícil es identificar los fenómenos y las situaciones del contexto, para utilizarlos en el diseño de las tareas. Eso es lo más complejo de la modelación".*

Con relación a las dificultades asociadas al modelo de formación previo, estas tuvieron que ver con la percepción que las comunidades tenían sobre su formación y sobre el modelo docente que pudieron observar durante su Carrera. De acuerdo con lo expresado por los grupos, el diseño de tareas con modelización les hacía pensar de una manera diferente a la desarrollada durante su formación inicial. Además, expresaron que el modelo docente observado interfería en ese "pensar distinto" pues percibieron que al plantearse una actividad propia del docente como la planificación y el diseño de tareas, intentaban imitar o trabajar del mismo modo que los profesores de su Carrera universitaria o sus profesores de Educación Media. Esto puso en evidencia que los profesores en formación tenían tendencia a repetir el modelo de enseñanza bajo el cual se

formaron. En ese modelo, la modelización y las aplicaciones son poco utilizadas y cuando se hace, se utilizan como complemento y no para dotar de significado a los conceptos.

INEC.E.23.02.2012: *"… la formación que aquí se da* [en la universidad] *es muy tradicional, hemos visto algunas aplicaciones de la matemática que hemos visto aquí, y eso no siempre, es más, muy pocos profesores lo hacen o se preocupan por decirle a uno dónde se aplican los contenidos que están desarrollando. Algunos sólo se dedican a los ejercicios, muy pocas veces a las aplicaciones y nunca a las que podríamos usar en Educación Media. Y tal vez por eso nos costó tanto integrar la modelización, porque nunca la han utilizado con nosotros, no teníamos un modelo a seguir, un ejemplo en nuestra Carrera. Y es que cuando uno va a dar clase o piensa en planificarla, siempre trata de recordar a los que uno cree que son los mejores profesores en la Carrera, y trata de trabajar como ellos, hasta de imitarlos, de hacer lo que ellos hacen".*

De las dificultades sobre el Modelo de formación previo, derivaron o se asocian aquellas relacionadas con la ausencia de experiencias. En este caso, los grupos refirieron que las actividades del programa formativo EAMS los enfrentó por primera vez, al diseño de tareas, a la redacción de enunciados y formulación de problemas; al uso de la modelización como estrategia de enseñanza. De acuerdo con esto, las comunidades sintieron que la ausencia de experiencias con modelización tanto en su formación como en el diseño de tareas, les dificultó pensar en cómo aplicar esta estrategia para redactar unas tareas en el marco de sus unidades didácticas, es decir, les dificultó su práctica con modelización.

SEC.E.06.02.2012: *"Cuando iniciamos con el diseño de las primeras tareas, nos planteábamos situaciones pero no lográbamos encontrar la forma de que al final, se pudiera plantear un sistema de ecuaciones con esas situaciones. Eso fue bastante difícil, porque generalmente estamos acostumbrados a que nos den un enunciado y resolver el problema, pero no a plantear problemas. Era la primera vez que nos enfrentábamos a esa tarea… Nosotros hemos intentado reflexionar y analizar por qué se nos dificultó tanto integrar la modelización en las tareas, a pesar de que se nos mostraron ejemplos variados sobre este aspecto, incluso analizamos esas tareas y analizamos el concepto de modelización. Y terminamos pensado que todo radica en que nosotros no la hemos utilizado para aprender, que en nuestro proceso aquí en la universidad no hemos vivido esa experiencia. Y es que es muy difícil tratar de pensar en hacer algo que nunca hemos hecho, sólo fundamentándonos en las experiencias de otros. Si hubiésemos tenido experiencias previas con modelización, posiblemente no hubiésemos percibido tantas dificultades".*

Con respecto a la observación de las presentaciones y el análisis preliminar de lo expresado por los grupos durante ellas, a las dificultades percibidas por ellos, se puede adicionar que los conceptos sobre matemática, enseñanza y aprendizaje, desarrollados durante su formación inicial, condicionaron su visión sobre la práctica educativa con modelización. En este sentido, sus

concepciones sobre cómo se desarrolla la capacidad de abstracción y su percepción sobre el trabajo en grupo constituyeron limitantes para el abordaje de las tareas con modelización. Su práctica con esta estrategia, se vio influida por sus concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de contenidos matemáticos y, sobre la matemática y el álgebra escolar. Las concepciones de los profesores en formación sobre la enseñanza de la matemática, y además, la falta de familiaridad con esta estrategia de enseñanza generó en los futuros profesores inseguridades para su abordaje didáctico.

Conclusiones

Lo expresado por los grupos, encuentra congruencia con lo afirmado por Barbosa (2001), para quien el profesor en formación debe tener oportunidades para reflexionar sobre experiencias con modelización en el contexto escolar con respecto a su organización, formas de aplicación, dificultades, trabajo de los alumnos, y formas de intervención del profesor, pues la reflexión sobre estos aspectos posibilita la construcción de conocimientos que fundamenten sus prácticas con modelización. De acuerdo con esto, los grupos sintieron que la ausencia de experiencias con modelización tanto en su aprendizaje como para el diseño de tareas, les dificultó pensar en cómo aplicar esta estrategia en el enunciado de situaciones para sus unidades didácticas, es decir, les dificultó su práctica con modelización.

Con resultados preliminares del estudio, se pudo establecer, que los grupos de profesores en formación percibieron las siguientes dificultades para integrar la modelización, como estrategia de enseñanza, en el diseño de tareas u oportunidades de aprendizaje:

- Los contenidos de Educación Media no son vistos como generados de situaciones o fenómenos sino como modelos establecidos. Esto hizo que los profesores en formación tuvieran dificultades para ver el fenómeno que generaba el contenido y después modelar. No lograban realizar la conexión entre situaciones reales y el contenido que trabajaban.
- Los profesores en formación tenían tendencia a repetir el modelo de enseñanza bajo el cual se formaron. En ese modelo, la modelización y las aplicaciones son poco utilizadas y cuando se hace, se utilizan como complemento y no para dotar de significado al concepto.
- La falta de experiencias en el diseño de tareas también estuvo ligada a las dificultades que enfrentaron los profesores en formación. Las mismas se relacionaron con las conexiones entre expectativas de aprendizaje, la dimensión de la competencia matemática a desarrollar, el diseño de la tarea y otros aspectos de la planificación.

Referencias bibliográficas

Barbosa, J. (2001). *Modelagem matemática: concepções e experiências de futuros professores*. Tesis Doctoral. Universidade Estadual Pulista.

Blomhøj, M. (2004). Mathematical Modelling. A theory for practice. En Clarke, B.; Clarke, D.; Emanuelsson, G.; Johnansson, B.; Lambdin, D.; Lester, F.; Walby, A. & Walby, K. (Eds.) *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics* (pp. 145-159). Suecia: National Center for Mathematics Educations.

Doerr, H. (2007). What Knowledge do teachers need for teaching mathematics through applications and modelling?. En Blum, Galbrait, Henn y Niss (Eds). *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI Study.* (pp. 69-78). New York: Springer.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis Doctoral publicada, Universidad de Granada, España.

Mathews, S. y Reed, M. (2007). Modelling for pre-service teachers. En Haines, Galbraith, Blum y Khan (Eds.), *Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics.* (pp. 458-464). Chichester: Horwood Publishing.

Oliveira, A. (2006). *As experiências dos futuros profesores com modelagem matemática*. Trabajo presentado en el III Seminário Internacional de pesquisa en educação matemática. São Paulo, Brasil.

Ortiz, J. (2002). *Modelización y calculadora gráfica en la enseñanza del álgebra. Evaluación de un programa de formación*. Tesis Doctoral, Universidad de Granada, Granada, España.

Ortiz, J., Rico, L. y Castro, E. (2007). Mathematical Modelling: A teacher's training study. En Haines, Galbraith, Blum y Khan (Eds.), *Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics.* (pp. 441-249). Chichester: Horwood Publishing.

Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Ed.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. (pp. 39-59). Barcelona: Ice-Horsori.

Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *Suma*, 58, 7-23.

¿ERRORES U OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS?

Patricia Sastre Vázquez, Alejandra Cañibano y Rodolfo Eliseo D´Andrea
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires Argentina
Pontificia Universidad Católica Argentina. Campus Rosario
pasava2001@yahoo.com.ar, mac@faa.unicen.com.ar, rodolfoedandrea@yahoo.com.ar

Resumen. En el proceso de enseñanza y aprendizaje interactúan muchas variables relacionadas con el contenido de lo que se quiere enseñar, con las características de los participantes de la clase, con el contexto sociocultural, etc. El modelo al cual adhiere el docente incide de manera significativa en la elección de las estrategias didácticas que irá a utilizar. Por lo tanto, es importante que el docente tome conciencia y reflexione acerca de su concepción del proceso de enseñanza y aprendizaje, a fin que su selección se haga con conocimiento de las implicaciones subyacentes a ella. En este trabajo se realiza una revisión de los conceptos: obstáculo epistemológico y error. Se analizan las concepciones que se hallan latentes en ambas definiciones con el objetivo de brindar un marco conceptual útil para diseñar intervenciones didácticas.
Palabras clave: error, obstáculo, concepciones previas, matemática
Abstract. In the process of teaching and learning many variables interact related to the content of what is being taught, with the characteristics of the participants in the class, with the socio-cultural context, etc. The model the teacher follows significantly affects the choice of teaching strategies that will be used. Therefore, it is important that teachers become aware of and reflect on their conception of teaching and learning process, so that their selection is made with knowledge of the underlying implications. In this paper we review the concepts of epistemological obstacle and error. The concepts that are latent in both definitions in order to provide a useful conceptual framework for designing educational interventions are discussed.
Key words: error, obstacle, previous conceptions, mathematics

Error y obstáculo

La noción de error presenta diferentes acepciones como: falta de verdad, incorrección por falta de conocimiento, equivocación, desajuste conceptual o moral, censor de problemas (De la Torre, 1993). Si se consulta el diccionario de la lengua española se encuentra que el vocablo *error* se define, entre otras formas, como: 1) idea u opinión que una persona tiene por buena, cuando, en realidad, es falsa, 2) equivocación, 3) desacierto, concepto o juicio basado en rasgos incorrectos o falsos. Así, podría considerarse que el error es una incorrección que surge de la diferencia entre el valor previsto y el valor real.

Por muchas décadas, durante el proceso de enseñanza aprendizaje, el error ha sido considerado como un elemento cuya aparición no era deseada en absoluto. Si a pesar de ello, durante las actividades, los errores emergían, estos eran rápidamente suprimidos. En la enseñanza tradicional, tanto el docente como los alumnos, conciben a los errores en forma negativa, pretendiendo que estos no se hagan presentes, ignorando todo el potencial que los errores tienen para aportar al proceso de adquisición de conocimientos.

Ante la aparición de errores, la respuesta más común de los profesores es la de brindar más o nueva información relacionada con la respuesta correcta o deseada, es decir, se ofrecen más datos

referidos al modelo a imitar, el cual se considera correcto. En este contexto, el alumno siente al error como algo que es su culpa y que no debiera haber sucedido. En este marco, el proceso de enseñanza y aprendizaje se considera como exitoso si se obtienen productos finales correctos y entonces, dentro de él los errores no tienen cabida, ya que solo entorpecen el proceso.

Bajo la perspectiva de Matz (1980), los errores sistemáticos que cometen los alumnos, en la resolución de problemas, son consecuencia de un frustrado intento por adaptar conocimientos, adquiridos previamente, a una nueva situación. En el mismo sentido, Brousseau, Davis y Werner (1986) señalan, que los errores son el resultado de un procedimiento sistemático imperfecto que el alumno utiliza de modo consistente y con confianza. Según Godino, Batanero y Font (2003): "*Hablamos de error cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar*" (p.69).

Según Popper (1944) no hay fuentes ultimas de conocimiento, todos ellas deben adaptarse y ser sometidas a un examen crítico. El conocimiento no puede partir de la nada, todo conocimiento es producto de la modificación de otro anterior. No existen criterios para reconocer la verdad, pero si para reconocer al error. La claridad y distinción no son criterios de verdad, pero la oscuridad y la confusión son indicadores de error.

En el proceso de adquisición de un nuevo conocimiento matemático ocurre algo similar a lo descripto anteriormente: el nuevo conocimiento toma como base el conocimiento cotidiano que traen los individuos. Así se producen rupturas con las concepciones previas, las cuales muchas veces son falsas o incompletas, para dar lugar a la aparición de nuevas concepciones. Desde este marco teórico, el proceso de enseñanza y aprendizaje se considera como la consecuencia de modificaciones cualitativas de un conocimiento hacia otro conocimiento considerado científico. El conocimiento matemático se construye a partir de la realidad, mediante actos sucesivos de abstracción los cuales desembocan en un nivel en el cual las tareas se realizan con objetos y relaciones que nada tienen que ver con la realidad tangible de la cual se ha iniciado el proceso. Durante este proceso, entonces el individuo debe ir dejando de lado cierto tipo de conocimientos e ir reemplazándolos por otros más evolucionados. Sin embargo los conocimientos anteriores que funcionaban, no son abandonados completamente, sino que se integran al nuevo conocimiento que nace del aprendizaje. En este marco, los errores persistentes son manifestaciones de la inadaptación del conocimiento provocado por la presencia de obstáculos. Los errores son expresiones observables del desempeño de los individuos, y pueden ser útiles para determinar el tipo de comprensión que han alcanzado estos. Las respuestas incorrectas contribuyen a la confección de un diagnóstico para establecer las formas específicas de uso de un conocimiento

matemático, las cuales pueden ser consideradas como indicadores de un tipo concreto de comprensión.

Bell (1976) afirma que a cada error cometido al realizar una tarea encomendada, le corresponde un error de concepción que lo sostiene. Muchos errores no son simples equivocaciones, sino que tienen raíces más profundas. El error es un hecho observable y constatable, y puede ser considerado como un indicador de la presencia de obstáculos, que surgen de la existencia de concepciones erróneas. Rauff (1994) considera que los errores e ideas equivocadas de los alumnos son un conjunto de creencias establecidas por ellos y que el desarrollo de esos errores conduce a soluciones lógicas para los estudiantes.

Para Bachelard (1938) los entorpecimientos o confusiones que comete un alumno en sus procedimientos hacia la búsqueda de una construcción de conocimiento real son obstáculos epistemológicos que determinan simplemente lo "incompleto" del conocimiento del alumno, pero no necesariamente ausencia de conocimiento. En la óptica de Brousseau (1986) el aprendizaje es una adaptación al medio, lo que involucra: rupturas cognitivas, acomodaciones, cambio de modelos o concepciones implícitas y cambio de lenguajes o sistemas cognitivos. A partir de estas ideas, Brousseau introduce el término obstáculo. Según Brousseau (1986) un obstáculo es un conocimiento que ha sido en determinado momento eficiente para resolver algún tipo de problemas, pero que falla cuando se aplica a otro problema. Debido a su éxito previo en cierto tipo de problemas se resiste a ser modificado o a ser rechazado y se convierte en una barrera para un aprendizaje posterior. Se revela por medio de los errores específicos que son constantes y resistentes. Puede entonces, considerase al obstáculo una concepción que ha servido para resolver algún tipo de problema pero que falla cuando se aplica a otro.

Las ideas básicas de Bachelard (1938) enfatizan la importancia que tiene ofrecer una visión de la ciencia mediante los aspectos históricos que han influido en la construcción del conocimiento. Partiendo siempre de una *catarsis intelectual*, el modelo bachelardiano se basa en la idea de *cambio científico*, dentro del cual existen tres categorías bien definidas en el marco de la epistemología: 1) *Obstáculos epistemológicos*; 2) *Rupturas epistemológicas* y 3) *Actos epistemológicos*.

En la vida cotidiana, entre las acepciones para la palabra *obstáculo* se encuentran: 1) lo que se opone al cumplimiento de un propósito, 2) cosa que impide pasar o avanzar y 3) situación o hecho que impide el desarrollo de una acción. En resumen, se considera al obstáculo como un estorbo que impide avanzar hacia un lugar, una situación que impide el desarrollo de una acción. Sin embargo desde la didáctica, el concepto de obstáculo no es tan obvio y su manejo presenta dificultades entre los docentes. En general, el profesor está acostumbrado a revisar el trabajo de sus alumnos teniendo en mente lo que espera que éstos respondan, de acuerdo con lo que él cree

que deben saber. Evalúa lo correcto y lo incorrecto, y no acostumbra analizar el origen de la respuesta, ni el pensamiento existente detrás de su manifestación oral o escrita, ni sus posibles causas. Es decir, el profesor evalúa y explica desde su lógica sin tener en cuenta, en la mayoría de los casos, la lógica de los alumnos. Esto trae como consecuencia que sean pocos los estudiantes que logren satisfacer las expectativas del docente. Una enseñanza que tenga como finalidad lograr que los alumnos construyan sus aprendizajes, debe basarse en la comprensión de los razonamientos de los estudiantes y de las causas de sus dificultades. Es deber del profesor orientar su discurso y las actividades que promueve para conseguir que sus alumnos puedan identificar otras formas de entender los fenómenos, de pensar y de hablar sobre ellos más acordes con los de la ciencia actual. Sin embargo, para ello es necesario un cambio profundo en la forma de entender qué es enseñar y, muy especialmente, en la forma de conceptuar el papel del error en el aprendizaje. Desde esta perspectiva se puede afirmar que enseñar consiste básicamente en ayudar a los alumnos a superar sus errores que son algo totalmente normales y positivos en el proceso de aprender.

En un enfoque constructivista de los procesos de enseñanza y aprendizaje, los alumnos, principales protagonistas del proceso, han de reconstruir sus concepciones, percepciones, actitudes y sentimientos personales y los errores son simplemente pasos intermedios en su elaboración del conocimiento (Azcárate, Serradó y Cardeñoso, 2004). Errores, que en este proceso de reconstrucción de sus ideas, pueden transformarse a veces en obstáculos.

La idea de obstáculo guarda relación con las representaciones o concepciones alternativas de los alumnos pero añade nuevos matices. Los obstáculos epistemológicos son formas de pensar arraigadas, antiguas estructuras tanto conceptuales como metodológicas, que pudieron tener en el pasado cierto valor pero que en el momento actual se contraponen al progreso del conocimiento científico. Estos obstáculos pueden reflejar una ideología dominante en una época determinada (Gómez Moliné et al, 2002). Si bien tales contradicciones pueden ser particulares de algunos pocos individuos, se dice que estamos en presencia de un obstáculo epistemológico cuando el mismo se encuentra más generalizado, extendiéndose dentro de una comunidad o incluso toda una cultura (Bohorquez et al, 2003). Así, en el marco de la teoría de situaciones, el concepto de obstáculo epistemológico queda comprendido en una categoría más amplia, la de obstáculo, que a su vez es un caso particular de otra noción más general, la de concepción. Duroux (1982) propone las siguientes condiciones para poder calificar de obstáculo a una concepción: a) Un obstáculo será un conocimiento, una concepción, no una dificultad ni una falta de conocimiento; b) Este conocimiento produce respuestas adaptadas a un cierto contexto, frecuentemente reencontrado; c) Engendra respuestas falsas fuera de este contexto. Una respuesta correcta y universal exige un

punto de vista notablemente diferente; d) Este conocimiento resiste a las contradicciones con las que se le confronta y al establecimiento de un conocimiento mejor. No es suficiente poseer un conocimiento mejor para que el precedente desaparezca. Es pues indispensable identificarlo e incorporar su rechazo en el nuevo saber y e) Después de tomar conciencia de su inexactitud, el obstáculo continúa manifestándose de forma intempestiva y obstinada.

Conclusiones

Para lograr la adquisición de un nuevo concepto son necesarias muchas actividades durante las cuales existen numerosas posibilidades de que aparezcan errores. El error producido por el alumno surge de la aplicación de alguna estrategia que para él tiene cierta significación, por lo tanto el hecho de intentar una rectificación sin justificación que la respalde, constituye un acto carente de significación para el estudiante. Para lograr un aprendizaje significativo es necesario confrontar al estudiante con la insuficiencia de sus argumentos y las contradicciones en que incurre, es decir instarlo a someter a crítica el conocimiento erróneo y contemplar qué elementos faltan o deben modificarse

El error es el resultado de un razonamiento en el que se han empleado principios o argumentos inadecuados para abordar un problema. En lugar de ser evitado, el error puede constituirse en el punto de partida para abordar el aprendizaje. El error es un indicador de la existencia de una lógica que debería ser explicitada y estudiada. Es un elemento muy importante si el interés está centrado en los procesos más que en el resultado obtenido. Obtener un resultado o una respuesta correcta no es garantía de que el proceso de enseñanza y aprendizaje haya resultado exitoso, ya que el mecanismo mediante el cual se ha obtenido esa respuesta correcta, permanece oculto. Con frecuencia, los alumnos adquieren capacidad para sortear obstáculos con estrategias que diseñan para dar respuestas correctas a casos parecidos, pero sin realmente comprender el problema que se les presenta.

En general, los profesores, frente a los errores de los estudiantes, reaccionan realizando correcciones e intentado hacer desaparecer lo que consideran, hechos no deseables. Sin embargo, muchas veces las respuestas erróneas de los estudiantes no obedecen a equivocaciones, sino que son la consecuencia de la disponibilidad y del uso de los recursos que realizan para dar solución al problema que se les presenta. En pocas palabras, los alumnos formulan sus respuestas de la forma que creen que es más adecuada para las circunstancias presentes. Visto desde este ángulo, parece lícito pensar que las respuestas erróneas, al igual que las respuestas correctas, están llenas de significación. Conocer estas significaciones puede constituirse en un aporte importante para el diagnóstico pedagógico y el desarrollo de metodologías apropiadas.

La evaluación formativa atribuye al proceso de enseñanza y aprendizaje, un papel más trascendental que la mera obtención de un producto. En este contexto, el error constituye un insumo fundamental para el proceso de obtención e interpretación de la información que le permite a la evaluación formativa modificar y mejorar el aprendizaje durante el período de enseñanza. El uso del error se constituye en un gran potencial positivo didáctico, en contraposición a la usual actitud correctora y sancionadora de la pedagogía tradicional.

Ya sea desde una perspectiva conductista o del procesamiento humano de la información, el análisis de los errores en Matemática estuvo limitado, hasta esa época, a una función diagnóstica y reparadora. Los investigadores se preocuparon por clasificar los errores para permitir a los profesores una modificación de las estrategias de enseñanza, con la intención de tornarlas más eficaces, y por ende, reforzar una visión absolutista de la Matemática, en tanto se procuraba dotar a los alumnos de medios que permitieran alcanzar la verdad absoluta y se evitaran los errores.

La diferencia entre error y obstáculo está asociada a la perspectiva desde la cual se sitúa el individuo y, por tanto, al modelo de intervención que desarrolle el profesor durante el proceso de enseñanza. Las teorías conductistas del aprendizaje consideraban al error como el resultado de la ignorancia, de la duda o el azar. Las nuevas tendencias en educación consideran que el error es la consecuencia de un conocimiento anterior que se manifiesta falso o no apropiado a una nueva situación, y en ese marco se refieren a los errores considerándolos como obstáculos. En el marco de una enseñanza constructivista, el error es considerado como una herramienta fundamental para la construcción del conocimiento. El error no es ignorado, ni se intenta eliminarlo, sino que se pretende sacarle provecho, transformándolo en una oportunidad para crear situaciones de aprendizaje.

Todo proceso de instrucción es potencialmente generador de errores. Los obstáculos se revelan por medio de los errores específicos que son constantes y resistentes. Para superar tales obstáculos se precisan situaciones didácticas diseñadas para hacer a los alumnos conscientes de la necesidad de cambiar sus concepciones y para ayudarlos a conseguirlo.

Es importante también anotar que incluso aquellos estudiantes que tienen una actuación aparentemente satisfactoria en Matemáticas, ocultan probablemente serios errores operacionales, estructurales y procesuales de los objetos matemáticos que dificultarán el aprendizaje subsiguiente. En tal sentido, conocer el tipo de error que cometen los alumnos permite al docente seleccionar las estrategias idóneas que optimen su acción y faciliten la superación de los errores mediante la adquisición de un nuevo conocimiento por parte de sus alumnos. Reconocer que los errores pueden deberse a causas epistemológicas y didácticas y no sólo de tipo cognitivo, es un primer paso para encontrar posibles soluciones.

Referencias bibliográficas

Azcárate, P., Serradó, A., Cardeñoso, J.M (2004). Los obstáculos en el aprendizaje del conocimiento probabilístico. *Libro de Resúmenes. XI CEAM*. Huelva. España.

Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. París: Librairie Philosophique J. Vrin.

Bell, A. (1976). *The Learning of General Mathematical Strategies*. Doctoral Dissertation. Shell Center for Mathematical Education. University of Nottingam.

Bohorquez, H., Hernández de Rincón, A. (2003). El razonamiento común: un obstáculo epistemológico en geometría. *Revista de Pedagogía, 24, (69*), 172-186

Brousseau, G. (1986). *Theorisation des Phenomenes d'Enseignament des Mathematiques.* Bordeaux: Thesed'Etat.

de la Torre, S. (1993). *Aprender de los errores. El tratamiento didáctico de los errores como estrategia de innovación*. Madrid: Editorial Escuela Española.

Duroux, A. (1982). *La valeur absolue: difficult´es majeures pour une notion mineure*. Burdeos: Publications de l'IREM.

Godino, J.; Batanero, C. y Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y aprendizaje de la Matemática para maestros.* Granada: Universidad de Granada.

Gómez Moliné, M. R. y Sanmartí Puig, N. (2002). El aporte de los obstáculos epistemológicos. *Educación Química, 13 (1)*, 61– 68.

Matz, M. (1980). Towards a computational theory of algebraic competence. *Journal of Children'sMathematical Behaviour, 3(1)*, 93–166.

Popper, K. (1944). *Conocimiento objetivo. Un enfoque evolutivo*. Madrid: Tecnos.

Rauff, J. V. (1994). Constructivism, factoring and beliefs. *School, Science and Mathematics. 94(8)*, 421 – 426.

UN ACERCAMIENTO FUNCIONAL A LA RESOLUCIÓN DE DESIGUALDADES MATEMÁTICAS

Armando Cuevas V., Arturo Rodríguez E. y Oscar González O.
Centro de investigación y estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional CINVESTAV-IPN. México
ccuevas@cinvestav.mx, oscargoem@gmail.com, roearturo@hotmail.com

Resumen. Recientemente investigadores en matemática educativa han señalado un concepto que representa un reto en el proceso enseñanza-aprendizaje: la resolución de desigualdades matemáticas. En efecto, múltiples artículos de investigación (Bazzini &Tsamir, 2001; Boero & Bazzini, 2004; Linchevski & Sfard, 1991; Tsamir & Almog, 1999, et al.)identifican dificultades en el proceso enseñanza aprendizaje de este concepto y proponenacercamientos que buscan promover una mejora en su enseñanza y aprendizaje. El presente trabajo apunta en esta dirección, se propone establecer un acercamiento funcional a la resolución de desigualdades matemáticas y bajo el marco didáctico Cuevas & Pluvinage diseñar actividades apoyándose en el uso de las tecnologíasdigitales; con todo esto hemos formulado una propuesta de enseñanza que tiene como objetivo favorecer un aprendizaje significativo de este concepto. Adicionalmente proporcionamos datos de experiencia en el aula de nuestra propuesta.
Palabras clave: desigualdades matemáticas, algebra, función
Abstract. Recently, researchers in mathematics education have set their sight on a mathematical concept that represents a challenge in the teaching-learning process for both teachers and students: the resolution of mathematical inequalities. In fact, multiple research articles (Bazzini & Tsamir, 2001; Boero & Bazzini, 2004; Linchevski & Sfard, 1991; Tsamir & Almog, 1999, Tsamir, Tirosh, & Almog, 1998; et. al.) have identified difficulties in the process of teaching and learning of this concept and also have proposed some approaches to promote an improvement. This work points in this direction, we propose a functional approach to solve mathematical inequalities, based on the didactic framework Cuevas & Pluvinage and the use of digital tools. Withall these elements we have designed a didacticalapproach which aims to promotea significative understanding of this concept. Additionally, we provide data froman experience developed in the classroom following our approach.
Key words: inequalities, algebra, function.

Introducción

Durante las últimas décadas, se han desarrollado investigaciones relacionadas con la enseñanza-aprendizaje del álgebra buscando ofrecer propuestas que permitan mejorar la comprensión de la misma y favorecer el complejo paso de la aritmética al algebra en los estudiantes (Filloy, Rojano y Puig, 2008; Rojano, 1990; Sutherland R. 1999; Rojano T, Sutherland R. 1992; Filloy E, Rojano T. 1989; Farfán R. M., Albert, A. 1997). Sin embargo, las desigualdades o inecuaciones son un tema sobre el cual aparentemente los investigadores en educación matemática han puesto poca atención (Bazzini & Tsamir, 2001; Boero & Bazzini, 2004; Linchevski & Sfard, 1991; Tsamir & Almog, 1999, Tsamir, Tirosh, & Almog, 1998), a pesar del uso cotidiano que se les da para mostrar información de análisis clínicos, del clima, entre otras. Así como de las sugerencias de organizaciones como la NCTM que enfatizan que los estudiantes de los grados 9 a 12 deben aprender a representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos, en especial comprender el significado de formas equivalentes de expresiones, ecuaciones, inecuaciones y

relaciones; además de resolverlas con fluidez mediante lápiz y papel y apoyándose en el uso de tecnología (Principles and Standards, 2000).

Antecedentes en el Nivel Medio Superior y Superior

La necesidad de trabajar con desigualdades matemáticas en el aula, surge tan pronto como se consideran los números reales y su orden. Mientras que ordenar los números naturales no ofrece dificultades, tan pronto como se introducen los números enteros surge la necesidad de considerar de qué manera la multiplicación y división por un número negativo, afecta el orden. Con la representación de los números racionales, la tarea de ordenar se vuelve más sofisticada, dado su densidad y continuidad, por ende ya no es sencillo de identificar su orden. Aunado a esto, existen diversos significados y representaciones semióticas para los números racionales (fracciones, razones, proporciones, decimales, etc.). Para tener una representación decimal aproximada de números irracionales, las desigualdades se vuelven imprescindibles; por ejemplo, para el cálculo de raíces reales o para aproximar el valor de π.De manera similar, las desigualdades aparecen en la Geometría Plana cuando se comparan longitudes, ángulos, áreas, etc.opara determinar la existencia o no existencia de ciertas figuras particulares (i.e. desigualdad del triángulo) y en la solución de problemas de optimización.

En México, el tema de las desigualdades matemáticas no se aborda de manera explícita en el programa de estudios de educación secundaria (2006) y solo en algunos casos, como en el estado de Puebla, el tema de desigualdades matemáticas se introduce en la materia Geometría Analítica y Funciones(Programas oficiales de estudio 2006). Sin embargo, este constituye el último tema a tratar y se trata con poca profundidad introduciendo solo el caso de desigualdades lineales. El panorama en la asignatura siguiente, Cálculo Diferencial, no es muy alentador pues el programa de estudios no contempla profundizar en el estudio de desigualdades, es decir no se extiende su estudio para los casos de desigualdades racionales, cuadráticas, de valor absoluto, etc.

No obstante, conforme se desarrolla el curso de Cálculo diferencial se puede notar la gran cantidad de aplicaciones y el uso extensivo que se hace del concepto de desigualdad,para definir: dominio y rango de una función, valor absoluto, las funciones trigonométricas y sus inversas, límite, funciones por partes, el concepto de continuidad, diferenciabilidad, monotonía, concavidad, aproximación de raíces, etc.

Por otra parte en el nivel superior, el tema de desigualdades aparece como una aplicación de los axiomas de orden y de campo de los números reales y por lo general, se estudian desigualdades lineales, cuadráticas, cúbicas y racionales de lineales y cuadráticas. La forma de resolución es haciendo uso de la lógica matemática y el álgebra de conjuntos, mediante métodos y/o procesos

de resolución diferentes a su educación anterior. Cabe mencionar que además tanto la lógica matemática como el álgebra de conjuntos son temas que no se estudian previamente; consecuentemente, el registro de representación semiótico de la lógica es desconocido, así como el del algebra de conjuntos lo queconstituye una dificultad agregada al estudio de las desigualdades matemáticas y su solución en la educación media superior y superior.

Acercamiento funcional y marco didáctico Cuevas & Pluvinage

Ante tal panorama, es necesario proponer un acercamiento que permita a los estudiantes abordar los conceptos involucrados en la resolución de desigualdades matemáticas de tal manera que se favorezcan tanto el aprendizaje de los conceptos así como una destreza operativa. Existen investigaciones en matemática educativa que sugieren que un acercamiento funcional para abordar desigualdades matemáticas puede potenciar la comprensión no solo de los conceptos propios de las desigualdades matemáticas, sino de otros contenidos matemáticos (Boero, 2004). En el mismo sentido se manifiesta Riestra (2009), proponiendo en el estudio del cálculo, iniciar el estudio con funciones sencillas y contemplar el continuo aritmético de manera intuitiva y significativa en contraposición del estudio formal de campo de los números reales. Una propuesta semejante a la de Riestra es la de Huang (2001) quien propone resolver desigualdades de manera funcional utilizando el teorema del valor medio. De esta manera se propone una alternativa para resolver inecuaciones reduciéndolas a ecuaciones del mismo tipo y utilizando el principio (intuitivo) de continuidad para funciones; es decir, de manera funcional. Por su parte, Cuevas y Mejía (2003) presentan en su libro Cálculo Visual una manera de resolver desigualdades mediante un acercamiento funcional y proporcionando además un uso de la tecnología digital de apoyo a su enseñanza.

Esta propuesta no sólo nos parece convincente por facilitar el trabajo operativo, por no requerir de conceptos previos no enseñados, sino porque establece una mayor congruencia con el cálculo diferencial al analizar funciones reales.

Explicitaremos los dos procedimientos para resolver una desigualdad mediante un problema particular en la idea de que esta exposición es sin pérdida de generalización para casos subsecuentes.

Resolver $x^2 - 3x - 10 > 0$

Método tradicional	Acercamiento funcional
Para este método, que se basa en las propiedades de los números reales, lo primero será hallar sus raíces, $r_1 = -2$ y $r_2 = 5$ y después factorizar la expresión:	Para este método analizamos funcionalmente el polinomio $P(x) = x^2 - 3x - 10$.

$x^2 - 3x - 10 = (x-5)(x+2)$

Posteriormente, se deberán analizar los casos en los que el producto es positivo. Cuando: $((x-5)<0) \wedge ((x+2)<0)$ lo que equivale a $(-\infty, 5)\text{I}\ (-\infty,-2) = (-\infty,-2)$

Entonces $CS_1 = (-\infty,-2)$

Cuando: $((x-5)>0) \wedge ((x+2)>0)$ lo que equivale a $(5,+\infty)\text{I}\ (-2,+\infty) = (5,+\infty)$

Entonces $CS_2 = (5,+\infty)$

Finalmente, se opera lógicamente con ambos conjuntos para obtener el conjunto solución de la desigualdad, así $CS = (-\infty,-2) \cup (5,+\infty)$

Primero hallamos sus raíces, $r_1 = -2$ y $r_2 = 5$. Estas dos raíces dividen al dominio de $P(x)$ en los intervalos: $(-\infty,-2) \cup (-2,5) \cup (5,+\infty)$

Luego el problema se reduce a determinar el signo de la función en cada intervalo para determinar dónde $P(x) > 0$.

Así, el conjunto solución de la desigualdad es, $CS = (-\infty,-2) \cup (5,+\infty)$

Por otra parte, el presente trabajo se desarrolló tomando como fundamento la didáctica diseñada por Cuevas y Pluvinage (2003). Por ser una propuesta didáctica para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas dirigidas al nivel medio superior y superior y porque además considera el uso de la tecnología para facilitar propuestas de corte didáctico-pedagógico. Las recomendaciones de las que consta la didáctica Cuevas-Pluvinage se pueden resumir en los siguientes: Es esencial que el estudiante este realizando siempre una acción, por lo que a través de la resolución de problemas específicos, gradualmente dosificados, construya o llegue al concepto deseado; cada vez que se introduzca un concepto se debe partir de un problema contextualizado y que resulte interesante para el estudiante; una vez resuelto un problema el estudiante debe comprobar sus resultados, verificando que tengan un sentido lógico de acuerdo al problema planteado; cada vez que se presenten las operaciones directas asociadas a un concepto, de ser posible, implementar ejercicios que representen a la operación inversa asociada; cuando se proponga un método de resolución de un problema se debe intentar dar una forma alternativa de solución, si esto no es posible, entonces no imponer una forma única de solución; si un concepto se ilustra mediante ejercicios en más de un registro de representación, instrumentar operaciones directas e inversas que promuevan la translación o articulación de los mismos.

Experiencia

Como se ha visto hasta ahora, existen ya una variedad de investigaciones relacionadas con la enseñanza de desigualdades matemáticas donde se describen dificultades y ventajas que ofrecen distintos acercamientos a los conceptos de desigualdad; sin embargo, no se encontró en la

literatura un seguimiento a éstos hallazgos o esfuerzos por conjuntar las diversas propuestas e implementarlas. Este fue uno de los principales motivos por lo que hemos desarrollado una propuesta de enseñanza que incluyelas recomendaciones y toma en cuenta las dificultades halladas por los investigadores en matemática educativa.

La experiencia en el aula,se desarrolló con un grupo de 17 estudiantes de 4to semestre de Bachillerato del estado de Puebla e involucró el diseño y aplicación de una prueba pretest seguida de una serie de actividades que se apoyaron fuertemente en herramientas digitales como el tutor inteligente CalcVisual; software de geometría dinámica y la creación de escenarios didácticos virtuales interactivos (EDVI) para finalizar con una prueba postest. Siguiendo las sugerencias de la didáctica Cuevas y Pluvinage, la primer sección de actividades se dedicó a presentar un problema de contexto cuya modelación matemática permite que el concepto de desigualdad matemática emerja de la interacción del alumno con el EDVI, en particular el de una desigualdad lineal. La siguiente sección de actividades se orientó a introducir a los estudiantes a los conceptos de orden de los números reales; éstas se implementaron a través de dos EDVI donde se propone a los estudiantes determinar el orden de dos números reales representados sobre la recta real; el propio escenario guía la actividad a través de un cuestionario virtual donde a su vez se introduce la notación necesaria. En estas actividades, de acuerdo al marco didáctico, se buscó favorecer la articulación entre los registros de representación numérico, algebraico y gráfico para auxiliar a los estudiantes a determinar qué operaciones son las que afectan el orden de dos números y el significado de los signos “<” y “>”.

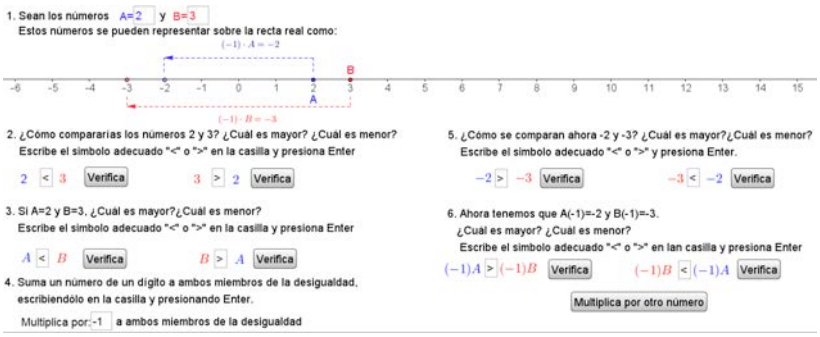


Figura 1. Cuestionario interactivo orden de los números reales y sus operaciones.

La tercera sección de actividades, se centró en la solución del problema planteado en la primera actividad y se introduce a los estudiantes al uso del software tutorial CalcVisual. Esta herramienta permite al estudiante calcular las raíces del polinomio que modela al problema y resolver la desigualdad a través de determinar el signo de la función. En esta actividad se introduce también la notación de intervalos y conjuntos para expresar la solución de la desigualdad. Asimismo se favorece la operación inversa solicitando a los estudiantes que propongan una desigualdad que cumpla con un cierto conjunto solución.

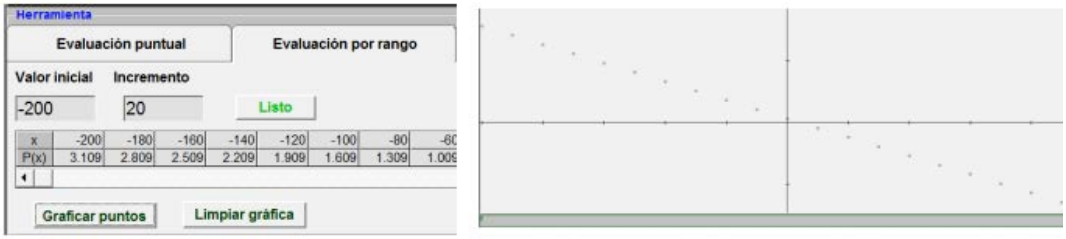


Figura 2. Uso de CalcVisual para aproximar raíces de un polinomio.

De manera similar, la cuarta sección de actividades plantea un problema de contexto cuya solución requiere modelar la situación a través de una desigualdad del tipo $ax + b > cx + d$; en este sentido, el estudiante debe recurrir a los conceptos ya presentados en las actividades anteriores para dar solución al problema.

Por último, la quinta sección de actividades plantea un problema de movimiento uniformemente aceleradocuya solución requiere del planteamiento de una desigualdad cuadrática. Esta actividad se acompaña de un escenario virtual interactivo donde intuitivamente el estudiante puede determinar la velocidad a la que debe viajar un auto para poder frenar antes de colisionar con un obstáculo, posteriormente este escenario sirve para validar la respuesta obtenida por los estudiantes a través del acercamiento funcional.

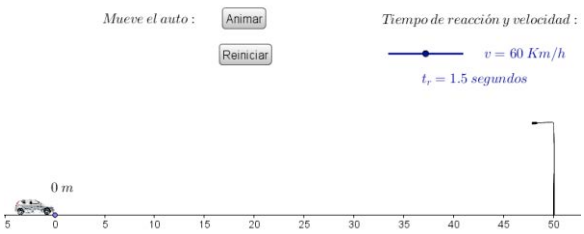


Figura 3. EDVI para introducir el estudio de desigualdades cuadráticas.

Resultados y conclusiones

Los resultados obtenidos tras implementar esta propuesta fueron alentadores, las evidencias obtenidasen la prueba pretest contrastadas con lasobtenidas en cada uno de los cuestionarios de las actividades yla prueba postest sugieren unavancesignificativo en el grupo de estudiantes. Partiendo de los resultados que se recolectaron en la prueba diagnóstico donde se apreciaron claras deficiencias en los alumnos en cuanto a elementos prerrequisito y graves problemas algebraicos, al ir desarrollando las actividades que componen a la propuesta se fueron evidenciando cambios significativos en la forma en que operan hasta lograr que un poco más de la mitad de ellos consolidara su conocimiento sobre el concepto de desigualdad matemática, su solución y algunas de sus representaciones.

Durante la experiencia didáctica realizada, los estudiantes mostraron un avance consistente aplicando propiedades como: $a < b \Leftrightarrow a + c < b + c \ \forall a,b,c \in \Re$, $a < b \ \& \ c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c \ \ \forall a,b,c \in \Re$ y $a < b \ \& \ c < 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c \ \ \forall a,b,c \in \Re$ para simplificar y posteriormente resolver desigualdades lineales. Asimismo una buena parte de ellos logró aplicar lo aprendido en la resolución de desigualdades cuadráticas, tal y como se puede apreciar en las gráficas de las figuras 4.

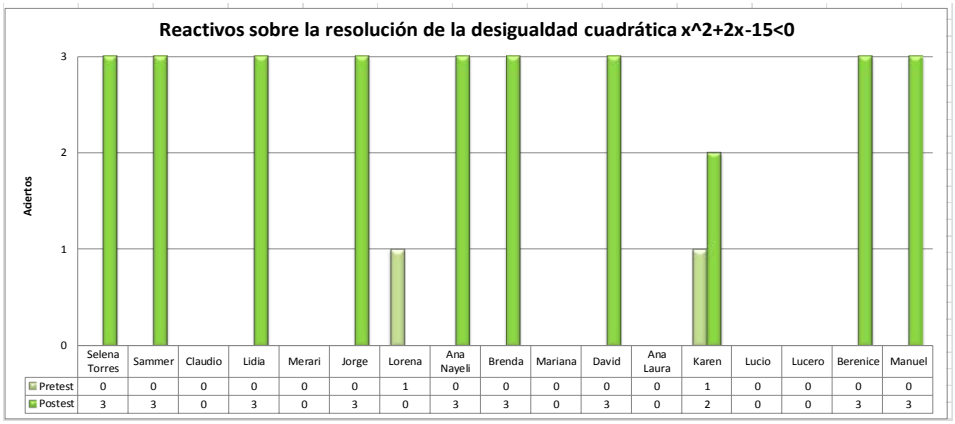


Figura 4. Resultados de los estudiantes al resolver una desigualdad cuadrática.

Este fue sin duda uno de los grandes logros que se obtuvieron con los estudiantes, pues comparando los resultados de la prueba diagnóstico donde solo 2 estudiantes lograron identificar correctamente la solución a una desigualdad cuadrática; se observa quetras desarrollar la actividades, la mayoría de los estudiantes fueron capaces de realizar esta tarea correctamente y lograron expresar la solución de la desigualdad a través de diferentes registros de representación.

Asimismo, más de la mitad del grupo de estudiantes fueron capaces de resolver con éxito una desigualdad cúbica, caso que no se contempló ni se estudió durante las actividades. Estos resultados se muestran en la gráfica de la figura 5.

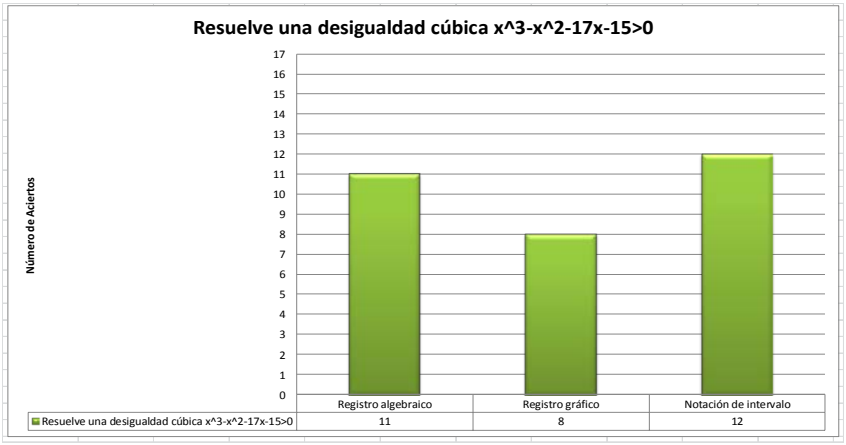


Figura 5. Resultados de los estudiantes al resolver una desigualdad cúbica en diferentes registros de representación

Así pues, más de la mitad de los estudiantes fueron capaces de resolver correctamente un tipo de problema que no se trató durante las sesiones; es decir, estos estudiantes fueron capaces de adaptar sus conocimientos para resolver correctamente tareas distintas a las estudiadas en clase. En conclusión, podemos afirmar que la articulación entre el acercamiento funcional, el marco didáctico y el uso de herramientas digitales permitió a los estudiantes mejorar considerablemente su comprensión y operatividad sobre el concepto de desigualdad matemática y sus conceptos relacionados.

Referencias bibliográficas

Bazzini, L., & Tsamir, P. (2004). Algebraic equations and inequalities: issues for research and teaching. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, I, 137-166.

Bell A, Lins R, Rojano T, Sutherland R. 1999. Perspectives on School Algebra.:278.

Boero, P., & Bazzini, L. (2004). Inequalities in mathematics education: the need for complementary perspectives. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematical Education*, *I*(28), 139-142.

Cuevas, C., & Mejía, H. (2003).*Cálculo visual*. México: Oxford University Press.

Cuevas, C., & Pluvinage, F. (2003). Les projets d'action practique, elements d'une ingeniere d'ensigment des mathematiques. Annales de didactique et sciences cognitive, Vol. 8. IREM Strasbourg. (273-292)

Farfán R.M., Albert, A. (1997). Resolución gráfica de desigualdades usando las supercalculadoras. México: Grupo Editorial Iberoamérica. Segunda Edición.

Filloy, E., Puig, L., & Rojano, T. (2008). *Educational algebra a theorical and empirical approach*. New York, NY: Springer.

Huang, C. (2001). A new look at solving inequalities. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 32(4), 729-733.

Kieran, C. (2004). The equation/inequality connection in constructing meaning for inequality situations. *Proccedings of th 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematical Education*, *I*(28), 143-147.

Linchevski, L. & Sfard, A. (1991). Rules without reasons as processes without objects – The case of equations and inequalities. *Proceedings of PME15*, Assisi, Italy, Vol. II, 317-324.

McLaurin, S. (1985). A unified way to teach the solution of inequalities. *Mathematics Teacher*, 78(2), 91-95.

Riestra, J. A. (2009). Un acercamiento funcional a inecuaciones.*El cálculo y su enseñanza*, Cinvestav del Instituto Politécnico Nacional, México D.F.

Rojano T, Sutherland R. 1992. A new approach to algebra: Results from a study with 15 year olds.Cuarto Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática. Enseñanza del Algebra.

Ruíz, J. Secretaría de educación Pública, *Subsecretaría de educación media superior.*(2010).Matemáticas IV. México, D.F.: SEP.

Sackur, C. (2004). Problems related to the use of graphs in solving inequalities.*Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematical Education, 1*(28), 148-151.

Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and pitfalls of reification - the case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, (26), 191-228.

Sierpinska, A., Georgeana, B., & Pruncut, A. (2011). Teaching absolute value inequalities to mature students. *Educational Studies in Mathematics*, (78), 275-305.

Tsamir, P., & Almog, N. (2001). Student's strategies and difficulties: the case of algebraic inequalities. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 32(4), 513-524.

Tsamir, P., & Bazzini, L. (Ed.). (2002). *Student's algorithmic, formal and intuitive knowledge: the case of inequalities*. Hersonissos, Crete: University of Crete.

Tsamir, P., Tirosh, D., & Sarit, T. (2004). "new errors" and "old errors": the case of quadratic inequalities. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematical Education, 1*(28), 155-158.

ARGUMENTOS DE ESTUDIANTES DE NIVEL MEDIO SUPERIOR EN EL IPN SOBRE FUNCIONES QUE INVOLUCRAN RAÍCES CUADRADAS

María Patricia Colín Uribe, Celia Araceli Islas Salomón y Fernando Morales Téllez
CECYT NB, Instituto Politécnico Nacional México
patricia_c_u@hotmail.com, pcolin@ipn.mx

Resumen. Este trabajo presenta el desarrollo y resultados de una secuencia didáctica aplicada a estudiantes de Nivel Medio Superior en el Instituto Politécnico Nacional sobre el trazo de expresiones que involucran raíces cuadradas. El objetivo es mostrar el tipo de explicaciones que dan los estudiantes cuando se les pide graficar funciones que involucran raíces cuadradas, así como las consideraciones que diversos libros de texto que usualmente se utilizan en los cursos de Cálculo avanzado y Geometría Analítica hacen cuando se trazan funciones o ecuaciones que involucran raíces cuadradas. Por último, trataremos de establecer una relación entre lo que argumentan los estudiantes y lo que consideran los libros de texto en cuanto a la graficación de expresiones de este tipo.
Palabras clave: raíz cuadrada, función, expresión algebraica, gráfica, concepción
Abstract. This paper presents the development and results of a didactic sequence applied to upper middle level students at the Instituto Politécnico Nacional on the stroke of expressions involving square roots. The objective is to show the type of explanations that students give when you are asked graphing functions involving square roots. Also, we will show the findings about the considerations that different textbooks usually used in courses in advanced calculus and analytic geometry when functions or equations that involve square roots are plotted. Finally, we will try to establish a relationship between what students argue and what they see as textbooks for the graphing of expressions of this type.
Key words: square root, function, algebraic expresion, graphic, conception

Introducción

Esta investigación se inscribe en el campo de la Matemática Educativa. En particular, nos interesa entender los procesos de construcción de conocimiento matemático en situación escolar presentes en el Nivel Medio Superior (NMS) del Instituto Politécnico Nacional (IPN).

Este tema de investigación surge de las respuestas que estudiantes de cuarto semestre del NMS en un CECyT del IPN, dan a las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es la gráfica de la función $y^2 = x$?
- ¿Cuál es la gráfica de la función $y = \sqrt{x}$?
- ¿Cuál es la gráfica de la función $y = -\sqrt{x}$?
- ¿Cuál es la gráfica de la función $y = \sqrt{-x}$?,

las cuales, como se documenta en Colin, 2006, evidencían la presencia de la "*costumbre escolar*" de considerar a las operaciones de radicación y potenciación como inversas.

Así, el objetivo fundamental de este trabajo es describir el tipo de explicaciones que dan los estudiantes cuando se les pide graficar funciones que involucran raíces cuadradas, así como

también mostrar cómo es que este tipo de gráficos es tratado en los libros de texto que se utilizan como referentes para impartir las materias de Cálculo y Geometría Analítica en las escuelas de NMS del IPN.

Además, en estos mismos textos buscaremos cómo es que el concepto matemático función es abordado y si es posible, detectar que tipo de explicaciones dan cuando tratan con funciones que involucran raíces cuadradas.

Finalmente, aplicaremos un cuestionario cuyas preguntas tengan que ver con el trazo de expresiones que involucren raíces cuadradas, e interpretaremos las respuestas que dan los estudiantes. Así, nos daremos a la tarea de contestar las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Cómo grafican los estudiantes la función $y^2 = x$, la función $y = \sqrt{-x}$ y la función $y = -\sqrt{x}$?
- ¿Qué dificultades generan en el estudiante los gráficos de estas funciones?
- ¿Qué argumentos dan para justificar el trazo de este tipo de funciones?

Marco Teórico

Nuestro marco teórico es la Teoría de Situaciones Didácticas, pues ésta propone el estudio, control y determinación de las condiciones en las cuales se constituyen los conocimientos matemáticos e implica que el investigador debe participar en la producción (o diseño) de las situaciones didácticas que analiza. (Cantoral y Farfán, 2000).

Para responder a nuestras preguntas de investigación, utilizaremos la siguiente

Metodología

Análisis didáctico

Revisaremos libros de Cálculo, Geometría Analítica y Álgebra con el objeto de mirar cómo es enseñado el tema de graficación de ecuaciones. Los libros que utilizamos serán aquellos que son propuestos por diferentes carreras para el estudio de estas materias. También, revisaremos en estos mismos textos, en el tratamiento de la definición de función y su graficación, así como mirar los ejercicios que involucran expresiones de la forma $y = \sqrt{x + a}$ (en caso de que realmente la traten)

Aplicación de secuencia y análisis de resultados

Aquí mostraremos las preguntas que se les hicieron a los estudiantes en un cuestionario, así como sus respuestas e interpretación de ellas.

Análisis didáctico

Para realizar nuestro análisis didáctico revisamos los libros sugeridos por el Plan y Programa de Estudios de las Unidades de Aprendizaje GEOMETRIA ANALITICA y CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL del IPN.

En primera instancia, revisamos los siguientes libros para documentar cómo es introducido el concepto de *graficación de expresiones algebraicas*.

Nuestro análisis didáctico nos muestra lo siguiente:

a) Lehmann (2000) utiliza el plano cartesiano para la representación gráfica y hace una descripción de las partes que lo forman. No trabaja en el texto con gráficas del tipo $\sqrt{x+a}$. El método que utiliza para la graficación es el de tabulación. (p.5-7,32-34)

b) Granville (2001) utiliza el método de tabulación para la gráfica de ecuaciones. Además, utiliza el cálculo diferencial como otro método de graficación. No utiliza ejemplos que involucren expresiones del tipo $\sqrt{x+a}$ (p. 12, 13,98)

c) Leithold (1987) utiliza el método de tabulación para el gráfico de expresiones matemáticas. Hace uso de ejemplos con expresiones que involucran raíces cuadradas, por ejemplo, al graficar la expresión $y^2 - x - 2 = 0$, la expresa de la forma $y = \pm\sqrt{x+2}$ y el gráfico lo realiza, considerando "por partes" a la expresión, de manera que primero traza la parte correspondiente a $y = +\sqrt{x+2}$ y después, en el mismo plano, la correspondiente a $y = -\sqrt{x+2}$ (p. 18-20)

d) Swokowski (1989) utiliza también el método de tabulación para el gráfico de expresiones matemáticas. Usa ejemplos con expresiones que involucran raíces cuadradas, por ejemplo, el trazo de la expresión $y^2 = x$, el cual realiza por el criterio de simetría, considerando que es una función cuadrática que es simétrica con respecto al eje X, primero traza la parte positiva y después, "refleja" la parte restante. (p. 11,12, 15,16,17)

En segunda instancia, revisamos los siguientes textos con el fin de documentar cómo es introducido el concepto de función y su trazo en el plano cartesiano.

a) Leithold (1987) define a la función como al conjunto de pares ordenados tales que la primera entrada no se repita con un valor diferente en la segunda entrada. En cuanto a la graficación, se utiliza el método de tabulación y en el tratamiento de funciones del tipo $y = \sqrt{x+a}$, sólo se trata un ejemplo en donde se determina el dominio de la función, es decir, para que valores de ***x***, $y = \sqrt{x+a}$ es una función. (p. 50-53)

b) Swokowski (1989) define la función como una regla de correspondencia en donde a cada elemento del dominio le corresponde uno y sólo un elemento del contradominio. El método utilizado para la graficación es la tabulación, y no se encontraron ejemplos de graficación de funciones del tipo $y = \sqrt{x+a}$ (p. 29,33,34)

c) Granville (2001) define a una función de la siguiente manera, "Cuando *dos variables están relacionadas de tal manera que el valor de la primera queda determinado si se da un valor a la segunda, entonces se dice que la primera es función de la segunda*". NO se encontraron métodos para graficar funciones ni ejemplos de graficación de funciones del tipo $y = \sqrt{x+a}$ (p. 98)

d) Spivak (1992) da dos definiciones de lo que es una función; a) como pares ordenados y b) una regla de correspondencia entre elementos del conjunto de los reales. En cuanto a la gráfica de una función, se menciona que debe hacerse por tabulación a través de la localización en el plano de los pares ordenados. No se encontraron ejemplos de graficación de funciones del tipo $y = \sqrt{x+a}$ (p. 49-69)

e) Lehmann (2003) define a una función como "Si dos variables x y y están *relacionadas de tal modo que para cada valor admisible de* ***x*** *(dentro de su dominio), le corresponden uno o mas valores de* **y***, se dice que* **y** *es una función de* ***x***". Se hace una distinción entre lo que es una función uniforme (del tipo $y = 2x+3$) y una función multiforme (del tipo $y = \pm\sqrt{x+a}$). En cuanto a la representación gráfica de las funciones, define a la gráfica de una función como el lugar geométrico formado por todos los puntos cuyas coordenadas satisfacen la función $y = f(x)$. No encontramos ejemplos de trazo de gráficas del tipo $y = \sqrt{x+a}$ (p. 68-69,75-79)

Aplicación de cuestionario y análisis de resultados

En esta parte de nuestra investigación, en base a lo que encontramos en los libros de texto, elaboramos un cuestionario formado por 9 preguntas. Se aplicó a un total de 27 alumnos de cuarto semestre de nivel medio superior del Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos Narciso Bassols del IPN. En este nivel de estudios los estudiantes ya han cursado las unidades de aprendizaje Algebra, Geometría y Trigonometría, Geometría analítica y actualmente cursan Calculo Diferencial. Se esperaban ciertos resultados de cada una de las preguntas aplicadas. Las más representativas de nuestro trabajo son las siguientes:

1) ¿Cuáles son los métodos que conoces para la graficación de funciones?

2) ¿Cuáles de las siguientes gráficas representan una función? (figura 1)

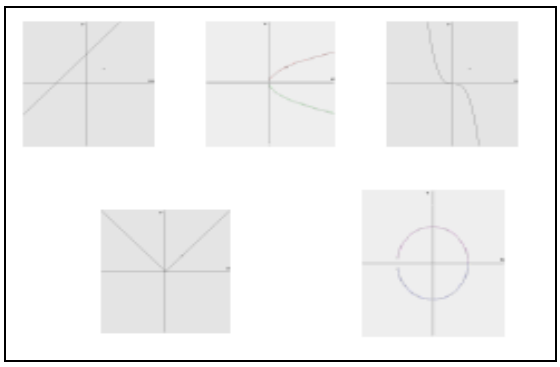


Figura 1

3) ¿Cuáles de las siguientes gráficas representan a la función $y = \sqrt{-x}$? (figura 2)

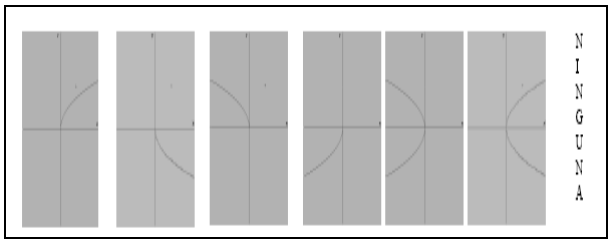


Figura 2

4) ¿Cuáles de las siguientes gráficas representan a la función $y = -\sqrt{x}$? (figura 3)

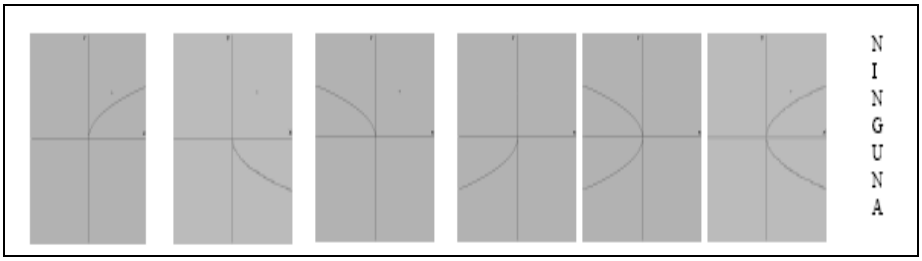


Figura 3

5) ¿Cuál de las siguientes gráficas representa la función $y^2 = x$? (figura 4)

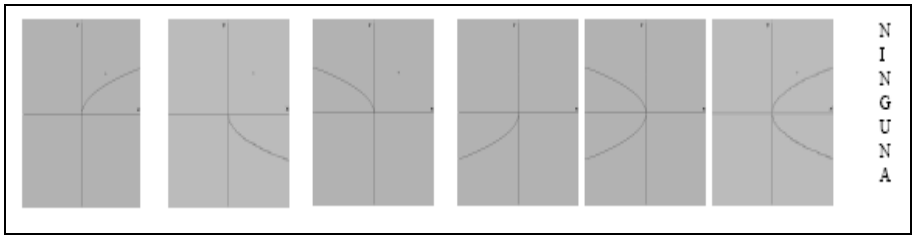


Figura 4

6) ¿Cuál de las siguiente graficas representa la función $y = \sqrt{x}$? (figura 5)

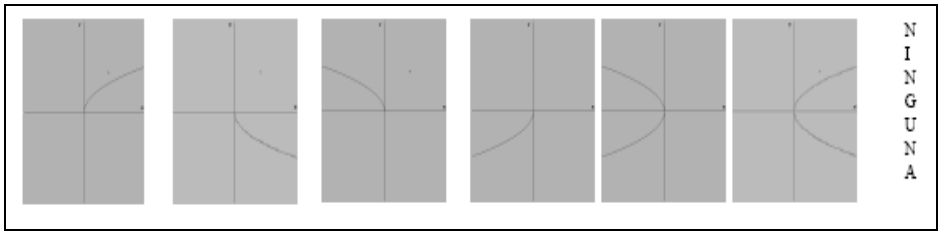


Figura 5

Cada una de nuestras preguntas tiene un objetivo, entre los cuales resaltamos los siguientes

a) Comprobar que el método más utilizado por los estudiantes para la graficación de funciones es el de tabulación.

b) Determinar si únicamente con mirar la gráfica, los estudiantes pueden identificar si representa o no una función.

c) Determinar si pueden identificar de manera visual el dominio y contradomino de la función.

d) Determinar si los estudiantes son capaces de distinguir entre las gráficas de las funciones $y = \sqrt{x}$ y $y^2 = x$ para determinar que no se trata de la misma expresión, por lo que sus gráficas no deben ser las mismas.

Una vez aplicado el cuestionario a los estudiantes, los resultados que obtuvimos fueron los siguientes:

Pregunta 1: El 96 % de los estudiantes respondió que el método de tabulación es el que utiliza como método para graficar funciones. Eso se debe a que es el más utilizado por los libros de texto. (Acuña, 2001)

Pregunta 2: El 90% de los estudiantes identifican por lo menos a una de las gráficas como una función, aplicando la definición de regla de correspondencia. Suponemos que eso se debe también a la definición de función que manejan los libros de texto.

Pregunta 3: El 75% de los estudiantes declaran que NINGUNA es la gráfica de la función, ya que ésta estaría graficada en el plan complejo, pues la raíz que queda siempre será negativa.

Pregunta 4: El 83% de los estudiantes responden que la gráfica es la que se muestra en la figura 6. Probablemente no tuvieron problemas para graficar, pues el signo "menos" se encontraba fuera del radical.

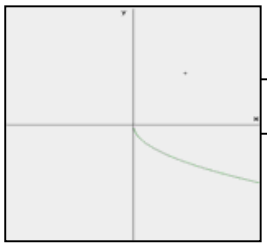


Figura 6

Pregunta 5: El 60% de los estudiantes identifican a la gráfica de la figura 7 como respuesta.

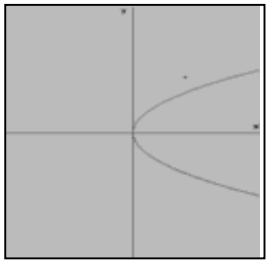


Figura 7

Pregunta 6: El 81% de los estudiantes respondieron que la grafica de la figura 8 como respuesta. Suponemos que esto se debe a que no existe un signo negativo fuera del radical y alumno se dedico a darle valores a "x" para después ubicar la gráfica.

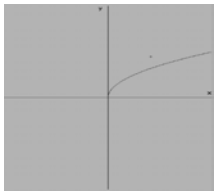


Figura 8

Conclusiones

Nuestras conclusiones son en base a dos aspectos.

En cuanto a los libros de texto:

- En su mayoría, utilizan el método de tabulación para la graficación de ecuaciones y funciones.
- Sólo manejan la definición de función uniforme, pues es la que se utiliza en la mayoría de los libros revisados.
- Los autores de los libros texto saben que hay problemas para graficar expresiones del tipo $ay^2 + bx + c = 0$, pues se trata de una expresión que involucra dos valores (±). El tratamiento para este tipo de gráficos es distinto en por lo menos 2 de ellos:

  a) Leithold (1987) reafirma que se trata de una expresión que involucra dos valores (±). Primero grafica a la expresión con los dos valores y luego la grafica por separado tanto para el valor positivo, como para el valor negativo. (p. 50-53)

b) Swokowski (1989) sólo grafica una parte de la parábola (positiva) y utiliza la simetría para reflejar la otra parte (negativa). Esto lo hace para indicar que esta expresión adquiere dos valores. (p. 29,33,34)

En cuanto a las concepciones de los estudiantes:

- Sólo reconocen una definición de función (función uniforme), pues es la mas utilizada por los libros de texto.
- Grafican por el método de tabulación, y esto se debe a que es el más utilizado por los libros de texto, tal u como Acuña (2001) afirma que el método de tabulación ha sido el único método con el ha contado el profesor y el estudiante para graficar
- Utilizan el método del trazo de verticales para determinar si una gráfica representa una función.
- Los gráficos de expresiones del tipo $y = -\sqrt{x}$ sólo se pueden realizar en el plano complejo. Esto se debe al signo (–) aparece en la expresión.
- La gráfica de la expresión $y = -\sqrt{x}$ está determinada para todo valor de x
- La gráfica de la expresión $y^2 = x$ es una parábola horizontal que abre hacia la derecha. Además, esa gráfica no representa la gráfica de una función.
- La gráfica de la función $y^2 = x$ es la misma que la gráfica de la función $y = \sqrt{x}$ porque representan la misma función pero están expresadas de manera distinta.

Respecto a nuestras preguntas iniciales:

- Los estudiantes grafican a la función $y^2 = x$ como una parábola que abre hacia la derecha; a la función $y = \sqrt{-x}$ no se le puede graficar y la función $y = -\sqrt{x}$ tampoco puede graficarse puesto que involucra un signo de menos (aunque este se encuentre fuera de la raiz)
- Las dificultades que se generan son
  - Los gráficos de expresiones del tipo $y = -\sqrt{x}$ sólo se pueden realizar en el plano complejo. Esto se debe al signo (–) aparece en la expresión
  - La gráfica de la función $y^2 = x$ es la misma que la gráfica de la función $y = \sqrt{x}$ porque representan la misma función pero están expresadas de manera distinta
- Los argumentos de los estudiantes son:

- La gráfica de la función $y^2 = x$ es la misma que la gráfica de la función $y = \sqrt{x}$ porque representan la misma función pero están expresadas de manera distinta
- Los gráficos de expresiones del tipo $y = -\sqrt{x}$ sólo se pueden realizar en el plano complejo.

Referencias bibliográficas

Acuña, C. (2001) Concepciones en graficación, el orden entre las coordenadas de los puntos del plano cartesiano. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 4(3), 203-217

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2000). Teoría de Situaciones Didácticas. En R. Cantoral, R.M. Farfan, F. Cordero, J.A. Alanis, R.A. Rodríguez y A. Garza, *Desarrollo del Pensamiento Matemático* (p.p. 41-44), México: Trillas.

Granville, W. (2001). *Cálculo diferencial e integral*. México: Limusa

Lehmann, C. (2000). *Geometría Analítica.* México: Limusa.

Lehmann, C. (2003). Álgebra. México: Limusa- Noriega

Leithold, L. (1987). *El Cálculo con Geometría Analítica.* México: Harla.

Spivak, M. (1992). *Cálculo Infinitesimal*. México: Reverte.

Swokowski, W. E.(1989). *Cálculo con Geometría Analítica*. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Este trabajo fue realizado en el marco del proyecto:

"Diseño de una secuencia de aprendizaje de la trigonometría en el Nivel Medio Superior". Registro asignado por la SIP del IPN: 20131797.

CREENCIAS DE LOS FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA ACERCA DE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA EN PRIMARIA

Cecilia Rojas Pardo y Alicia Zamorano Vargas
Universidad Alberto Hurtado. Chile
Universidad Autónoma de Barcelona España
cecirojaspardo@hotmail.com, ali.zamorano@gmail.com

Resumen. Esta comunicación aborda la influencia que el profesorado de matemáticas tiene sobre la transición de la primaria a la secundaria. Las investigaciones han tenido como foco principal el profesorado de primaria y para dar una mirada más amplia a la problemática de la transición investigamos al profesorado de secundaria. Para esto hemos optado por indagar en las creencias acerca de la enseñanza de la matemática en primaria que posee un grupo de futuros profesores de secundaria. Aplicamos un cuestionario que nos permitió clasificar sus creencias según diferentes tendencias didácticas. Los resultados nos permiten determinar que sus creencias no están solo en una tendencia didáctica. La consideración de estas creencias durante la formación de los profesores podría ser una herramienta útil para mejorar la formación y en específico la problemática de la transición.
Palabras clave: formación del profesorado, transición, creencias
Abstract. This paper attends the influence that mathematics teachers have in the transition from primary to secondary school. Research has had been mainly focused in primary teachers and to provide a broader view in problems of transition we also analized secondary school teachers. With this aim we have chosen to investigate the beliefs of a group the prospective teacher of mathematics about the mathematics teaching in primary school. We have applied a questionnaire that allowed us to classify their beliefs as different pedagogical trends. Based in our results we have determined that their beliefs do not fall only in one pedagogical trend. Consideration of these beliefs during teacher training be a useful tool to improve teacher preparation specially the problems of transition.
Key words: teacher education, transition, beliefs

Introducción

Investigaciones en Educación Matemática consideran que el papel de los profesores es esencial para la adquisición de una competencia matemática continua. Esta continuidad es la que generalmente se ve alterada cuando los alumnos avanzan de la educación primaria a la educación secundaria. Diferentes autores han puesto relevancia en la influencia que los docentes pueden tener en esta etapa de transición. Las interacciones que el profesorado debe desarrollar en el aula son relevantes y su actuación está influida por las creencias que poseen sobre la enseñanza en estas etapas educativas de transición (McGee, 2003; Thompson, 1992; Ferguson y Fraser, 1998; Fernández, 2011).

En el caso de esta investigación, nuestro interés radica en aportar información a la problemática de la transición. Hasta ahora existen variados estudios que han entregado ideas relevantes a este problema desde la visión del profesorado de primaria (Antúnez, 2007; Sacristán, 1996), pero este trabajo a diferencia de los anteriores, aporta ideas desde la visión del profesorado de secundaria, es decir de aquel que debe continuar con la enseñanza de la matemática. Es por esto que, siguiendo la línea del pensamiento del profesorado, indagamos en las creencias que posee un grupo

de futuros profesores sobre la enseñanza que se realiza en la educación primaria y las clasificamos según tendencias didácticas.

Para realizar esta indagación es que nos apoyamos en investigaciones que tienen relación con la transición entre etapas educativas, donde los cambios de las prácticas educativas pueden ser un obstáculo en el aprendizaje de las matemáticas. Además de relacionar las creencias de los futuros profesores con formas de enseñanza de las matemáticas.

Entonces para introducirnos en el tema de las prácticas de enseñanza es que hemos decidido comenzar por indagar en las creencias del futuro profesorado de secundaria acerca de cómo se enseña matemáticas en la educación primaria y dar una mirada más amplia a la enseñanza de las matemáticas durante la transición.

Transición

Los investigadores que se dedican a estudiar la transición entre etapas educativas comparten y reconocen la idea de que este es un acontecimiento complejo que viven los estudiantes. El proceso de transición tendría al menos dos aristas relevantes de destacar: una visión interna propia del sujeto y otra sociocultural que se construiría con los sujetos con los cuales convive en esta transición (Zittoun, 2004).

Además de diversas dificultades emocionales y sociales que son consecuencia de la transición, está la propia dificultad de las matemáticas escolares. Junto con los nuevos contenidos que se les enseñan, deben enfrentarse a un cambio en las aproximaciones pedagógicas del contenido matemático, es decir las prácticas del profesorado de secundaria. A esto se suma las diferencias entre los centros que los acogen y aquellos cambios que vienen de los propios estudiantes de estas edades, como es sin duda, el paso de la infancia a la adolescencia (Sacristán, 1996, Fernández, 2011).

Ferguson y Fraser (1999) pusieron atención a los estudiantes que pasaron de la primaria a la secundaria en Australia. Estos investigadores verificaron que durante el cambio de un centro de primaria a uno se secundaria se produjeron variaciones en las percepciones tanto positivas como negativas dentro de la escuela, las que se relacionaron con el clima de aula y la interacción profesor-estudiante. Esto les permitió identificar los elementos que enajenan a los estudiantes durante la enseñanza secundaria, como por ejemplo el tipo de liderazgo de los docentes, la relación amigable entre alumnos y docentes y la responsabilidad de los alumnos versus la libertad que comienzan a desarrollar.

Además otro tema a considerar y como menciona McGee (2003), en el caso de Nueva Zelanda, aunque se realizan variadas acciones que intentan mejorar la transición (entre otras se destaca la

existencia de programas de orientación, donde se realizan actividades que informan a estudiantes y padres y se efectúan contratos de ayuda entre escuelas) surgen problemas relacionados con los profesores: estos tienden a repetir temas estudiados en primaria, haciendo caso omiso a la información que entregan algunas escuelas acerca de los contenidos y actividades que los alumnos desarrollaron durante la educación primaria. Además el profesorado de secundaria por lo general desconoce las estrategias de trabajo y enseñanza que se realiza en la escuela primaria.

Esta evidencia, nos justificó nuestra idea primera de investigar a los futuros profesores de secundaria sobre las formas que ellos creen se enseña matemáticas en primaria para luego reflexionar si sus próximas prácticas considerarán las posibles diferencias en las formas de enseñar.

Creencias y práctica del profesorado

Como mencionamos con anterioridad, en el caso de nuestra investigación nos interesamos en las creencias que poseen los futuros docentes, porque variados autores consideran que las creencias son elementos claves que influyen en la práctica del profesor. En particular Ernest (1989), destaca que en la práctica influyen los esquemas mentales del profesor, es decir su sistema de creencias con respecto a la matemática y a su enseñanza y aprendizaje. Siguiendo la línea de investigación de las creencias que es además, se han realizado variados estudios sobre el grado de consistencia entre las creencias que poseen sobre las matemáticas y la práctica docente, encontrando en algunos casos consistencia, aunque en otras han encontrado notable variabilidad. Dada esta diferencia de consistencia entre las creencias es que consideramos válido indagar y caracterizar estas creencias para que en un futuro, el profesorado sea consciente de ellas y pueda actuar en concordancia (o discordancia si es el caso que quiera cambiarlas) cuando realice la enseñanza. En nuestro caso, comenzamos por conocer las verbalizadas a través del cuestionario que aplicamos a los estudiantes y analizando sus resultados.

Por otro lado y complementando las investigaciones sobre las creencias, es que otros autores relacionan las creencias que posee el profesorado con su práctica de enseñanza. Nosotros, en particular, nos hemos apoyado en el trabajo desarrollado por Climent (2002), donde se describen cuatro clasificaciones sobre las creencias de los profesores sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y que se denominan tendencias didácticas. Las tendencias didácticas son cuatro: tendencia tradicional, tendencia tecnológica, tendencia espontaneísta y tendencia investigativa.

La tendencia tradicional se caracteriza por el uso de la exposición magistral como técnica habitual y la utilización del libro de texto como único material curricular. La asignatura está orientada básicamente a la adquisición de conceptos, otorgándole una finalidad exclusivamente informativa, se pone en conocimiento de los alumnos un cierto panorama matemático que se espera aprendan.

En el caso de la tendencia tecnológica, el profesor no expone los contenidos en su fase final, sino que simula su proceso de construcción, apoyado habitualmente en medios técnicos. Además sigue una programación cerrada, con una secuencia que emana de los aspectos estructurales de la disciplina. Interesan tanto los conceptos como los procesos lógicos que los sustentan. Se otorga a la asignatura una finalidad informativa, un carácter práctico que permite su aplicación a otros ámbitos de la matemática. El aprendizaje se realiza utilizando la memoria, donde el dinamizador del aprendizaje se basa en la lógica propia de la matemática.

Por otro lado, la tendencia espontaneísta, se caracteriza por una propuesta por parte del profesor de actividades de manipulación de modelos, a través de las cuales se espera se produzca, eventualmente, un conocimiento organizado. No interesan tanto los conceptos, pero sí los procedimientos y el fomento de actitudes positivas hacia el trabajo escolar. El profesor piensa que se aprende cuando el objeto de aprendizaje, que surge aleatoriamente del contexto produciéndose dicho aprendizaje de manera espontánea cuando este está inmerso en situaciones que propician el descubrimiento.

Por último, la tendencia investigativa está caracterizada por la organización, por parte del profesor, del proceso que llevará al alumno a la adquisición de unos conocimientos determinados, a través de su investigación. Interesan tanto la adquisición de conceptos como el desarrollo de procedimientos y el fomento de actitudes positivas hacia la propia materia y el trabajo escolar en general. Los objetos de aprendizaje, tienen la capacidad de ser aplicados en contextos diferentes de donde fueron aprendidos.

A partir de las características de estas tendencias sobre la enseñanza de las matemáticas en la escuela es que se elaboró un instrumento que incluyera ideas concretas de enseñanza de las matemáticas. Este instrumento fue extraído de una investigación previa (Zamorano, 2011)

Instrumento y recogida de datos

El instrumento que hemos utilizado para recoger la información referente a las creencias de los futuros profesores de matemáticas lo hemos escogido de un trabajo de investigación realizado en la Universidad Autónoma de Barcelona, en el marco de la obtención del grado de Máster en Investigación en Didáctica de las Matemáticas. Utilizamos uno de los cuestionarios de ese trabajo y lo adaptamos al vocabulario para el contexto chileno.

Este cuestionario está compuesto por tres apartados que indagan acerca de las creencias sobre las distintas maneras de enseñar los contenidos matemáticos que utilizan los profesores en la educación primaria, siguiendo las ideas expuestas por Climent acerca de las tendencias didácticas presentes en la enseñanza de la matemática en la escuela.

En los tres ítems aparecen situaciones, de las cuatro tendencias didácticas, que ocurren mientras se enseña matemáticas en la educación primaria. El primer ítem contiene imágenes, donde los futuros profesores deben valorar de 1 a 4. El segundo ítem está conformado por frases donde deben marcar con Sí o No. Y el tercer ítem está compuesto por aseveraciones que deben valorar entre el 1 y el 4, como en el primer ítem.

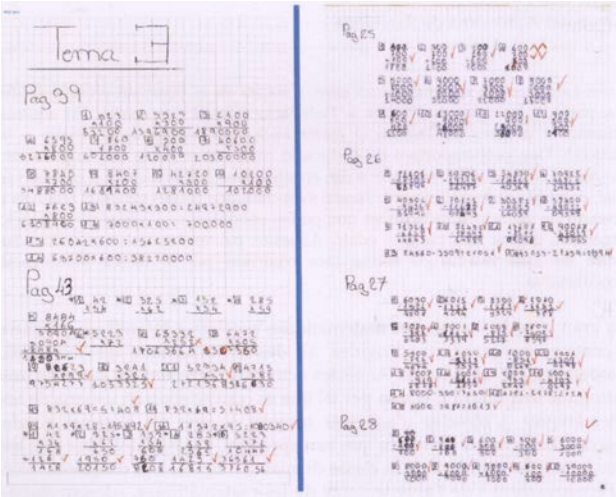
La siguiente tabla indica las cuales de las imágenes o aseveraciones corresponden a cada una de las tendencias didácticas.

Ítem 1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8								
Ítem 2	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7									
Item 3	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	3.10	3.11	3.12	3.13	3.14	3.15	3.16

Tabla 1: Descripción de los ítems del cuestionario

- Tendencia Tradicional
- Tendencia Tecnológica
- Tendencia Espontaneísta
- Tendencia Investigativa

Por ejemplo el sub-ítem 1.4 corresponde a una imagen con características de la tendencia tradicional, es un listado de ejercicios:



El sub-ítem 2.3 corresponde a la tendencia tecnológica, por el apoyo de la enseñanza en medios técnicos:

		Sí	No
2.3	Los materiales manipulativos en enseñanza básica fundamentalmente se utilizan para		

	motivar.		

El sub-ítem 2.6 corresponde a la tendencia tecnológica, por las tareas que propician el descubrimiento por parte de los alumnos:

2.6	La exploración abierta de tareas permite que los estudiantes descubran la matemática.		

Y el sub-ítem 3.9 corresponde a la tendencia investigativa, donde el material busca capacidades matemáticas a través de las conjeturas.

3.9	Uso de material para conjeturar o descubrir propiedades.				

Por tanto los sub-ítem correspondían a diferentes situaciones de enseñanza que apuntaban a ejemplificar las cuatro tendencias didácticas, para así indagar en sus creencias sobre la enseñanza de la matemática en primaria.

Este cuestionario fue aplicado en una universidad chilena a 17 estudiantes que se encontraban cursando el quinto semestre de la carrera de Pedagogía en Matemáticas. De estos estudiantes, 13 de ellos han participado de una actividad curricular de acercamiento a la realidad educativa en centros educativos, denominadas Experiencias Laborales, por lo que además de su experiencia como alumnos, se han acercado a diferentes prácticas docentes de la escuela.

Análisis y discusión de resultados

Para analizar los resultados nos hemos fijado en las medias de las respuestas por cada tendencia. Hemos considerado que un promedio igual o mayor a tres, indicaría que está de acuerdo con que esas formas de enseñar se utilizan en la enseñanza de la matemática en primaria.

Un promedio mayor o igual a dos y menos que tres nos indicaría que no hay consenso acerca de la enseñanza de la matemática en primaria. Y un promedio menor a dos, nos indicaría que su creencia acerca de la enseñanza de la matemática no pasa por la tendencia.

En la siguiente tabla aparecen los resultados por tendencia.

Tendencia	P>3 Promedio mayor a 3	2≤P≤3 Promedio igual o mayor a 2 y menor de 3	P<2 Promedio menor a 2
Tradicional	9/17 = 52%	8/17 = 48%	0/17 = 0%
Tecnológica	6/17 = 35%	11/17 = 65%	1/17 = 5%
Espontaneísta	4/17 = 24%	9/17 = 52%	4/17 = 24%
Investigativa	7/17 = 41%	6/17 = 35%	4/17 = 24%

Tabla 2: Respuestas de los estudiantes por tendencia

Como podemos observar de la tabla 2, la tendencia tradicional es la que tiene mayor valoración respecto de las respuestas que entregan los estudiantes. El 52% considera que las clases de primaria de matemáticas siguen mayoritariamente las características de una enseñanza tradicional. La siguiente tendencia que presenta un alto porcentaje de mayor acuerdo es la Tecnológica. Un 35% tiene un promedio mayor a 3 y un 65% un promedio entre 2 y 3 Esto indica que creen que muchas de las acciones y tareas desarrolladas para enseñar matemáticas siguen las características de una tendencia tecnológica.

En cambio las dos restantes tendencias, son muy equitativas en sus porcentajes de aceptación. La tendencia tecnológica corresponde a un 24% con promedio mayor a tres y un 52% con una media entre dos y tres y un 24% con una menor adhesión a las características de este modelo de enseñanza.

Por último la tendencia investigativa presenta un promedio de 41% con mayor grado de aceptación y un 35% medianamente de acuerdo. Y al igual que la tendencia anterior, un 24% considera que no se utilizan sus formas de enseñar.

De estas tablas podemos concluir que los estudiantes de pedagogía en matemáticas para enseñanza secundaria creen que las clases de matemáticas en primaria son diversas, pero que en su mayoría siguen características de una enseñanza de tipo tradicional. Seguidas muy de cerca por las características de una enseñanza de tipo tecnológica. Las características de la enseñanza espontaneísta y tecnológica son las menos consideradas, un hecho relevante es que los porcentajes que tienen promedio menor a 2 son cercanos a un 25% de los resultados.

Conclusión

En primer lugar podemos concluir que necesitamos hacer conscientes a los profesores para que en el futuro profesional reflexionen sobre su práctica. En particular creemos que podrían considerar la problemática de la transición como una variable que interviene en el aprendizaje de sus alumnos y que ellos pueden contribuir a un aprendizaje más eficaz en el nivel educativo de secundaria.

Cómo se observó en la tabla 2, la mayor parte de nuestros futuros profesores creen que la enseñanza de las matemáticas en primaria sigue características de una enseñanza tradicional, por lo que se hace necesario reflexionar sobre el trabajo colaborativo que debe existir entre colegios donde se encuentren los últimos niveles de primaria y los primeros de la secundaria.

También creemos que se debe dar mayor importancia a la transición y mirar y reflexionar sobre las mallas de las carreras de Pedagogía en Matemáticas constantemente, esto apoyado en recientes investigaciones que entregan evidencia sobre el Conocimiento del horizonte matemático, el cual podría aportar a la discontinuidad de los aprendizajes matemáticos.

Como continuación de esta investigación, luego de analizar y clasificar sus creencias, trabajaremos con ellas durante su transición a través de la conciencia de ellas para beneficiar el proceso de enseñanza que realicen estos futuros profesores.

Referencias bibliográficas

Antúnez, S (2007). *La transición entre etapas: Reflexiones y práctica*. Barcelona. Graó

Climent, N. (2002). *El desarrollo profesional del maestro de Primaria respecto de la enseñanza de la matemática. Un estudio de caso*. (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Huelva. España

Ernest, P. (1989). The Knowledge, Beliefs and Attitudes of the Mathematics Teacher: a model. *Journal of Education for Teaching: International research and pedagogy*. 15 (1), 13-33.

Ferguson, P.D. & Fraser, B.J. (1998). Student gender, school size and changing perceptions of science learning environment during transition from primary to secondary school. *Research in Science Education*, *28*(4), 387-397.

Fernández, C. (2011). *Continuity in mathematics education. Mathematics teachers in the trasition to secondary school*. Universidad Autónoma de Barcelona. Recuperado en marzo 2013 de https://www.educacion.gob.es/teseo/imprimirFicheroTesis.do?fichero=25364

Mc Gee, C., Ward, R., Gibbons, J., Harlow, A. (2003). *Transition Secondary School: A Literature Review*. Report to the Ministry of Education. University of Waikato. Recuperado en marzo de 2013 de http://www.researchgate.net/publication/45626499_Transition_to_secondary_school_A_literature_review

Sacristán, J. (1996). *La transición a la escuela secundaria: Discontinuidades en las culturas escolares*. Madrid. Morata.

Thompson, A. (1992). Teacher's Beliefs and Conceptions: A Synthesis of Research. En Grouws, D.A: (Ed) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (pp. 127-146). New York: McMillan and NCTM.

Zamorano, A. (2011). *Creencias de los futuros profesores de secundaria sobre la enseñanza de la matemática en educación primaria*. Universidad Autónoma de Barcelona. Recuperado en marzo de 2013 de http://www.uab.es/servlet/BlobServer?blobtable=Document&blobcol=urldocument&blobheader=application/pdf&blobkey=id&blobwhere=1331797233901&blobnocache=true

ESTUDIO DE LA PRIMERA REPRESENTACIÓN EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Alma Alicia Benítez Pérez y Martha Leticia García Rodríguez
CECyT 11 , IPN México
ESIME Zacatenco, IPN
albenper@gmail.com, martha.garcia@gmail.com

Resumen. La presente investigación identifica las estrategias para re-interpretar o modificar la primera representación con la cual se inicia el proceso de resolución de problemas, empleados por estudiantes del primer semestre del Nivel Medio Superior. Para el análisis de la producción de los alumnos se analizaron a través de cuatro momentos, lo cual permitió identificar los indicadores que contribuyeron para valorar los procedimientos desarrollados. A nivel de resultados, hay un desarrollo manifiesto de capacidades y habilidades, así como un desempeño eficiente en el uso de conceptos en las diferentes representaciones. Los registros y las transcripciones de las clases fueron analizados considerando un modelo particular de la investigación cualitativa, empírico / experimental.
Palabras clave: representaciones, conexiones, tratamientos, estrategias
Abstract. This research identifies strategies to re-interpret or modify the first representation which starts the process of problems solving, students employed by the first half of Middle Level Superior. For the analysis of the production of the students were analyzed through four stages, which allowed us to identify the indicator that contributed to evaluate the procedures developed. In terms of results, there is a clear development of skills and abilities, and efficient performance in the use of concepts in different representations. The records and transcripts of classes were analyzed considering a particular model of qualitative research, empirical/experimental.
Key words: representations, connections, treatments, strategies

Introducción

Los programas de estudio a nivel bachillerato y particularmente los programas de los CECyT´s (Centro de Estudios Científicos y Tecnológico), mencionan la importancia de promover el desarrollo de competencias matemáticas, lo que implica el fortalecimiento de habilidades del pensamiento tales como: análisis, interpretación y síntesis para impulsar la elaboración de conjeturas, la identificación de invariantes y la posibilidad de su generalización. En este proceso de construcción, las representaciones adquieren un papel importante, pues de ellas depende las estructura cognitiva en el estudiante.

El dominio de los conceptos matemáticos está directamente relacionado con el conocimiento de sus principales representaciones y el significado de cada una de ellas, así como con las reglas internas que las estructuran y en su articulación. Desde ésta perspectiva el papel que adquiere las representaciones en la resolución de problemas es fundamental, ya que dinamiza el proceso de solución permitiendo al estudiante dar sentido a la información que le brinda el problema y operar con ella hasta dar respuesta a la exigencia del mismo. Específicamente, la primera representación que se emplea para dar inicio a la resolución de la solución es definitiva, pues es el puente entre la percepción del problema y el proceso de solución, durante éste proceso influyen varios elementos como son: el contexto de la situación, la formulación del problema, las ideas previas del

estudiante, las condiciones dentro de las cuales el problema está inmerso etc. Elementos que son determinantes para que el estudiante pueda re-interpretar o modificar la primera representación, cuyo tratamiento conlleva a identificar información para hacer inferencias y seleccionar los factores relevantes que posteriormente beneficiará en la abstracción del análisis e interpretación de las partes y su integración, dando lugar a la síntesis y a la conclusión del problema. Por lo que la primera representación tendrá subsecuentemente el acompañamiento de múltiples representaciones diseñadas con la finalidad de enriquecer el contenido que contribuya en el proceso, por ejemplo: ilustrar el enunciado del problema, formalizar el problema dentro del dominio matemático, aplicar estrategias de solución etc., de tal manera que el acompañamiento de las representaciones diseñadas en el curso de la resolución del problema estarán influencias por el tratamiento que se realice en la primera representación.

La presente investigación tuvo como propósito identificar y analizar las estrategias que el alumno emplea, cuando se promueven actividades que ponderan el uso de múltiples representaciones, así como el planteamiento de preguntas y la reformulación del problema, que apoyen la re-interpretación o modificación de la primera representación, con la finalidad de enriquecer su tratamiento y la posibilidad de fortalecer el proceso de solución de l situación.

Marco teórico

Durante las dos últimas décadas se ha manifestado el interés por el uso de las representaciones por parte de los maestros y estudiantes como como herramienta para abordar la resolución de problemas (Castro, 2008; DeBellis y Goldin, 2006), además, el uso de múltiples representaciones pueden ser utilizadas para impulsar de manera reflexible la comprensión de conceptos y procesos (Cuoco y Curcio, 2001). De hecho Rico (2000) considera que el éxito en matemáticas implica el uso de diversas representaciones mentales, que comprendan varios aspectos del concepto relacionados entre sí. De ahí la importancia de la articulación de las diferentes representaciones.

El buen uso de las representaciones aporta un conjunto flexible de herramientas para resolver problemas y apreciar la consistencia de la matemática, particularmente el aprendizaje en el Nivel Medio Superior (NMS) destaca que los alumnos logren tener buen conocimiento de las distintas formas de representar y con ello la posibilidad de su articulación, permitiendo el fortalecimiento de la elección de la representación idónea en forma espontánea durante la resolución de problemas. En la elección de la representaciones apropiadas por parte de los estudiantes ofrece la posibilidad de aprender a valorar las ventajas y desventajas de las diferentes formas de representación (Schultz y Waters, 2000), y a emplearlas como herramientas para la resolución de problemas. En este sentido el primer acercamiento con la primera representación que inicia el proceso de resolución del problema en operación, sigue un acompañamiento de representaciones

diseñadas con la misma finalidad del proceso. Por ejemplo: ilustrar el enunciado del problema, formalizar el problema dentro del dominio matemático, aplicar una estrategia de solución etc., de tal manera que el acompañamiento de las representaciones gráficas diseñadas en el curso de la resolución del problema está determinado por la primera representación (Benítez, 2009).

Metodología

El propósito de la experiencia educativa fue proporcionar al estudiante diversas situaciones para explorar la información que encierran las representaciones, empleando tratamiento que permitieron evidenciar su contenido, para re-interpretar o modificar la primera representación. La experiencia educativa se llevó a cabo con un grupo de 50 alumnos (grupo 1IM17) del C.E.C.y T. No. "Wilfrido Massieu" del NMS, que cursaban el primer semestre del ciclo escolar. Las edades de los alumnos fluctuaban entre 15-16 años. Se impulsó la metodología de la resolución de problemas en el aula, a partir de las ideas previas del estudiante se llevó a cabo diversas discusiones a nivel equipo y en plenaria, con la finalidad de verificar y resaltar su conjeturas lo cual permitió que alumno expusiera sus explicaciones para justificar las afirmaciones que consideró pertinentes en la situación problemática. La observación del estudio se llevó a cabo durante un semestre escolar (18 semanas) para detectar las cualidades del fenómeno de estudios. Las observaciones en el estudio se desarrollaron a nivel global registrando los siguientes eventos: Bitácora del curso. Al término de cada sesión el investigador anotaba los elementos más relevantes, para su análisis, lo cual permitía reorganizar o bien estructurar la siguiente sesión y grabaciones de las clases, específicamente cuando los equipos expusieron su trabajo ante el grupo, para validar sus procedimientos y resultados.

La triangulación de la información se fundamentó en los resultados e interpretación del estudio. Lo anterior se obtuvo a través de los hallazgos que se encontraron en la fuente A (reporte escrito por equipo), fuente B (discusión grupal), fuente C (reportes escritos de actividades extramuro), y con la fuente D (observaciones en clase), permitiendo comparar información proveniente de diferentes escenarios.

Diseño de las Actividades. Se realizó previamente un análisis del contenido matemático a tratar en el curso. El propósito fue identificar las líneas principales durante la experiencia, las cuales son: lenguaje algebraico, modelación, ecuaciones y funciones, permitiendo el planteamiento de modelos lineales y cuadráticos en situaciones concretas. Estas líneas fueron la guía para diseñar las actividades. Algunas de las actividades fueron piloteadas en el curso de álgebra, anterior al de la experiencia, para examinar su potencial o bien las dificultades que presentaban lo alumnos.

Análisis

Los elementos que guían el análisis fueron:

- Identificar el tratamiento de la primera representación en la resolución de problemas.
- Identificar las estrategias que el alumno del Nivel Medio Superior emplea para enriquecer la primera representación.

A continuación se muestra la actividad que los alumnos desarrollaron, la cual fue videograbada:

LOS CICLISTAS: De dos puntos A y B que se encuentran separados una distancia de 105 km, salieron simultáneamente dos ciclistas al encuentro uno de otro. Se encontraron 1 h 45 min después de iniciado el recorrido. Cada uno siguió su camino sin detenerse. Después de 3 min del encuentro el primer ciclista que iba a 40 km/h, se encontró con otro ciclista que venía a su encuentro por el mismo camino. El tercer ciclista luego de encontrarse con el primero, continúo su camino sin detenerse y alcanzó al segundo ciclista en el punto C, en el cual se hubiera encontrado el primer y el segundo ciclista, si la velocidad del primero hubiera sido 20 km/h menos y la del segundo 2 km/h más original.

a) *¿Cuáles son las distancias que recorren los ciclistas 1 y 2 durante 1h 45min?*

b) *¿Cuál es la distancia entre el punto donde se encuentran el primer ciclista y el segundo, y el punto donde se encuentra el primer ciclista con el tercer?*

c) *¿Cuáles son sus velocidades?*

d) *¿Cuál es la modificación de las velocidades originales de los ciclistas?*

e) *¿Cuál es la distancia recorrida en 3 minutos por el segundo ciclista?*

f) *¿Cuál es la distancia recorrida por el segundo ciclista para llegar al punto C?*

g) *¿A qué velocidad iba el tercer ciclista?*

Durante el análisis de las actividades se identificaron cuatro momentos:

- El primer momento referida a una fase de apropiación en la cual el alumno atiende aspectos que son parciales, aunque relevantes, ya que inicia construyendo preguntas parciales a la situación.
- El segundo momento construye la representación pictórica, la cual opera y modifica a través de la discusión con sus compañeros, lo que le permite reexaminar la situación para establecer nuevas preguntas.
- El tercer momento se presenta el descubrimiento de nueva información y reformulación del problema original, para enriquecer la representación o bien para re-interpretar la situación.

- El cuarto momento se presenta cuando el estudiante establece conexiones con la información ya identificada y la formulación de nuevos eventos en la situación.

Análisis y Resultados

En términos generales los alumnos identificaron información parcial de la lectura del texto para describir la trayectoria de los ciclistas durante el primer momento. Para el segundo momento el estudiante empleó la representación pictográfica explorando la situación a través de episodios, lo que contribuyó para identificar el recorrido de los ciclistas, la Figura 1 muestra la representación pictográfica bajo el supuesto de que el segundo ciclista partió del punto B y el primero partió del punto A.

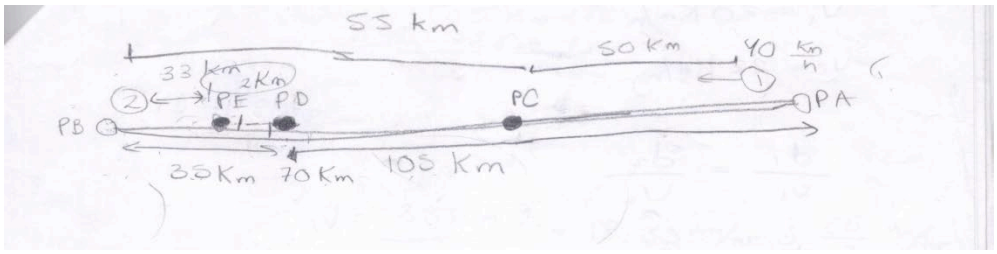


Figura. 1. Exploración de la Representación Pictográfica

Al intervenir el profesor los alumnos identifican nueva información, lo que les permitió releer el problema nuevamente. Los alumnos continuaron explorando la representación gráfica pero ahora explorando la representación gráfica (Ver Figura 2). En este punto se consideró que el problema planteado aún estaba vago e impreciso, lo que originó que el profesor presionará a los alumnos para replantear la situación.

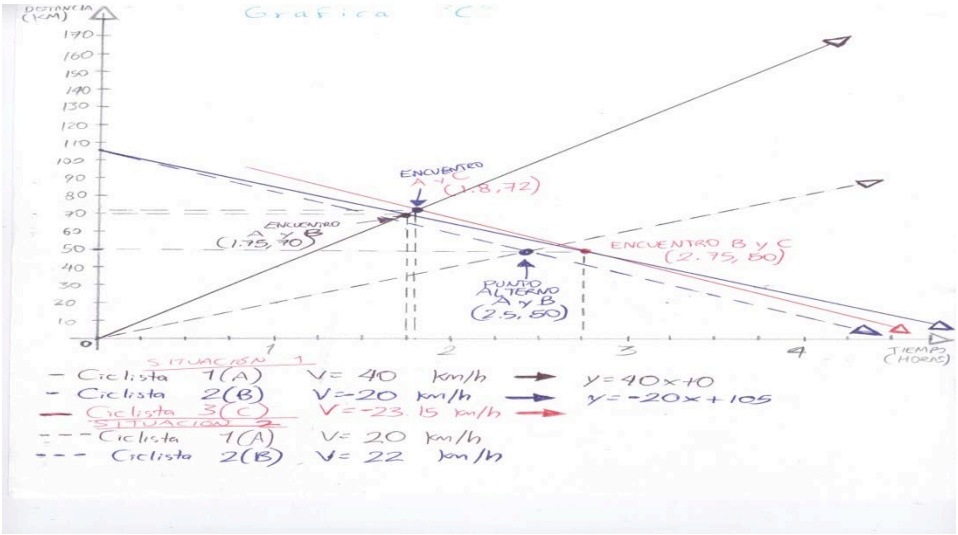


Figura 2. Exploración de la Representación Gráfica

Durante el tercer momento el alumno reconsideró la información obtenida y re-interpretó la información para construir la representación gráfica, en este momento surge una idea que será importante en el seguimiento del problema, como lo mencionan:

Martín: *Bueno del 105 y aquí del punto 0, van a coincidir en algún punto en la hora 1.75, determinamos que coinciden a la altura de 70 km; es donde ambos se encuentran. Pero trazamos unas gráficas y nos dio unas figuras como estas, como la línea verde y la línea azul; esto ¿Qué nos representa? que el ciclista A su distancia recorrida es hacia arriba, en cambio el ciclista B iba en disminución de la distancia recorrida para encontrarse aquí, cada uno iba en sentido contrario y se encontraron a los 70 km a la hora con 45 minutos después de haber iniciado sus resultados.*

Lo cual permitió la re-interpretación del contenido de la representación gráfica para construir las expresiones algebraicas (Ver Figura 3) que modelan el comportamiento de los movimientos basados en la información obtenida, para conformar el cuarto momento en donde el alumno emplea al menos dos representaciones para su exploración.

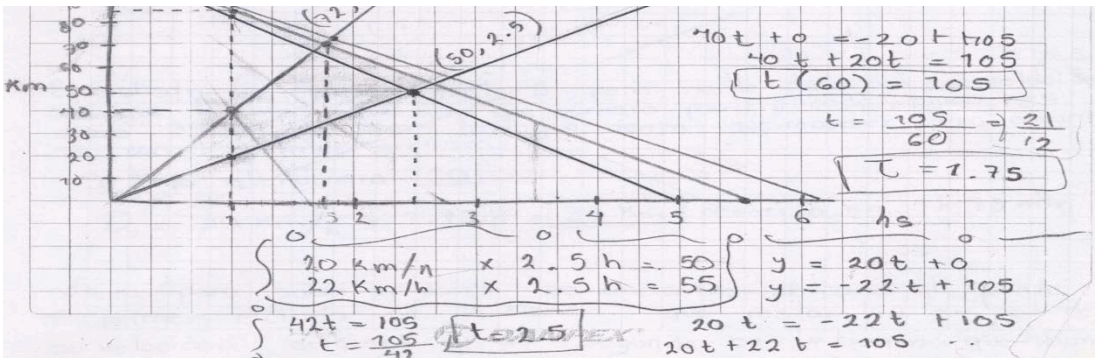


Figura 3. Exploración de la Representación Gráfica y Algebraica

La nueva información no es conectada con la información previamente identificada, el cambio de perspectiva en los estudiantes se produce por el interrogatorio del docente y por la interacción con las tareas. Ambos elementos propician que los alumnos se den cuenta que la nueva información ocasiona la modificación del problema original. La formulación parece estar ligado con el seguimiento el problema, esto se aprecia cuando el alumno está manipulando los movimientos de los ciclistas y explica los diferentes episodios. El proceso de formulación de problemas muestra una complejidad pues surgen dificultades o concepciones falsas que obstaculizan la formulación del problema. El cambio de percepción del evento para identificar nuevos aspectos no se presenta de manera inmediata, no obstante durante la misma interacción fue posible superar las dificultades que se presentan. La formulación del problema aparece estar entrelazado al seguimiento, es decir, surge conjetura para ser interpretada por los estudiantes de lo cual surge un abanico de preguntas que permitirán robustecer la representación o bien emplear otra representación para enriquecer

la conjetura. El lenguaje fue otro factor utilizado por los alumnos, para expresar las ideas que van emergiendo en el proceso de formulación.

A continuación se presentan los cuatros momentos con sus respectivos indicadores identificados durante la experiencia (Ver Cuadro 1).

Cuadro 1. Identificación de los indicadores durante la Experiencia

Momentos	Indicadores
I	Representaciones Verbales ❖ Lectura en voz alta el texto. ❖ Los alumnos leen el texto en voz baja. ❖ El estudiante expone el problema con su lenguaje personal.
II	Representación Pictórica ❖ Dibuja con lápiz y papel la representación pictográfica. ❖ Opera con la representación ❖ Verbaliza las diferentes representaciones pictográficas construidas.
III	Representación Algebraica ❖ Expone una expresión algebraica e identifica las variables. ❖ Verbaliza las relaciones y menciona las posibles formas de resolverla. ❖ Modifica o elimina la expresión algebraica
	Representación Gráfica ❖ Expone una gráfica e identifica algunos puntos ❖ Establece el comportamiento de la situación. ❖ Verbaliza las relaciones y menciona el comportamiento del trazo. ❖ Modifica o elimina el trazo
	Representación Numérica ❖ Establece diferentes tablas numéricas. ❖ Propone tratamientos para extraer información. ❖ Verbaliza los resultados y propone posibles formas de resolución.
IV	Conexiones entre la Representaciones Verbal-Pictórica. ❖ Establece conexiones entre la representación pictórica con su lenguaje personal. ❖ Transforma o modifica una representación pictórica de acuerdo a una nueva interpretación del enunciado. ❖ Establece relaciones entre el enunciado y una representación pictórica, ❖ Representa elementos pictóricos mientras lee el enunciado del problema.
	Conexiones entre la representaciones pictográfica- simbólica. ❖ Formula una expresión desde una representación pictórica. ❖ Establece relaciones entre una expresión simbólica y una representación pictórica ❖ Realiza cambios la representación pictórica construida debido a resultados obtenidos

	simbólicamente. ❖ Modifica expresiones simbólicas debido a resultados obtenidos en representación pictórica o a una nueva representación pictórica
	Conexiones entre las representaciones gráfica –algebraica ❖ Construye una representación gráfica a partir del texto. ❖ Establece una expresión algebraica del trazo. ❖ Realiza cambios en la expresión algebraica de acuerdo con el comportamiento del trazo. ❖ Modifica la expresión algebraica.
	Conexiones entre las representaciones numérica –algebraica-grafica ❖ Identifica elementos en las representaciones ❖ Establece conexiones entre el contenido de las representaciones. ❖ Modifica el contenido de las representaciones. ❖ Realiza cambios la representación numérica construida debido a resultados obtenidos en las representaciones algebraica y gráfica. ❖ Modifica expresiones simbólicas debido a resultados obtenidos en las representaciones numérica y gráfica.

Principales hallazgos:

- ❖ Identificación de la primera representación: verbal y pictórica
- ❖ Transformación o modificación de la representación pictórica de acuerdo a una nueva interpretación del enunciado.
- ❖ Reconocimiento de la formulación de una expresión o parte de ella con lápiz y papel desde una representación pictórica o realización de una representación pictórica desde una expresión simbólica.
- ❖ Reconocimiento de cambios o eliminación de la representación pictórica previamente construida debido a resultados obtenidos simbólicamente.
- ❖ Asignación de símbolos a una representación pictórica.
- ❖ Transforma o modifica una expresión simbólica debido a una nueva interpretación del enunciado.
- ❖ Reformula el enunciado de una manera diferente debido a algún resultado obtenido en una expresión simbólica.
- ❖ Reconocimiento de una variable a alguna parte del enunciado.

Las autoras agradecen el apoyo otorgado por la Secretaría de Investigación y Posgrado del IPN, a través de las investigaciones con números de registro 20130860 y 20111060

Referencias bibliográficas

Benítez, A. (2009). Estudio de la primera representación gráfica de ecuaciones algebraicas en contexto. *Revista Innovación Educativa* 9(46), 41-50.

Castro, E. (2008). Resolución de problemas. Ideas, tendencias e influencias en España. En R. Cuoco A. y Curcio, F. (Eds.) (2001). *The roles of representations in school mathematics.* Reston, Virginia: The National Council of Teachers of Mathematics

DeBellis, V. y Goldin, G. (2006). Affect and meta-affect in mathematical problem solving: a representational perspective. *Educational Studies in Mathematics, 63,* 131-147.

Luego, B. Gómez, M. Camacho y L.J. Blanco (Eds), *Investigación en Educación Matemática XII* (pp. 113-140). Badajoz: SIEM.

Rico, L. (2000). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática. *IV Simposio SEIEM*. Huelva, España.

Schultz J. y Waters M. (2000). Why representation? *Mathematics Teacher,* 3(6), 448-453.

DIAGNÓSTICO EN ESTUDIANTES DE NUEVO INGRESO A NIVEL SUPERIOR: COMPETENCIAS Y DIFICULTADES MATEMÁTICAS

Landy Sosa Moguel, Isabel Tuyub Sánchez y Eddie Aparicio Landa
Universidad Autónoma de Yucatán México
smoguel@uady.mx, isabel.tuyub@uady.mx, alanda@uady.mx

Resumen. En el presente escrito se reportan algunas competencias y dificultades matemáticas detectadas en estudiantes universitarios del sureste de México. Los datos se obtuvieron con una prueba diagnóstica de conocimientos y habilidades matemáticas, analizándolos tanto cuantitativa como cualitativamente para obtener información sobre niveles de competencia matemática mediante el método de Indicadores de Desempeño Clave. El tipo de dificultades identificadas se inscriben principalmente en la falta de reconocimiento y entendimiento de la entidad conceptual de los saberes matemáticos y la traducción de información a lenguaje matemático simbólico. Se detectó además mejoría en indicadores de desempeño en competencias matemáticas tales como predecir y el transitar entre representaciones semióticas.
Palabras clave: rendimiento académico, competencias matemáticas dificultades
Abstract. In this paper are reported some mathematical skills and difficulties detected in university students from southeastern Mexico. The data were obtained with a diagnostic test of mathematical knowledge and skills and through quantitative and qualitative analysis of mathematical competence levels by the method of Key Performance Indicators. The difficulties identified encompassed mainly a lack of recognition and understanding of conceptual entity of mathematical knowledge and the translation of information to symbolic mathematical language. Also it detected improvement in performance indicators such as mathematical skills to predicting and to transiting between semiotic representations.
Key words: academic achievement, mathematics competences, difficulties

Introducción

La reprobación y rendimiento académico en matemáticas han sido examinados en diversas investigaciones en Matemática Educativa bajo el reconocimiento de su naturaleza multifactorial y en la búsqueda de correlaciones significativas entre variables personales, escolares y socioculturales (Salas, Domínguez y Farfán, 2011; Cárdenas, 2013), identificándose como mayor factor de impacto en el desempeño matemático de los estudiantes aquellas variables referidas a los propios procesos de enseñanza aprendizaje de las matemáticas (Aparicio, Jarero y Ávila, 2007).

Los métodos estadísticos de regresión múltiple, minería de datos y estudios multinivel proveen de indicadores del papel que ejercen multifactores de tipo socioeconómico, de orientación vocacional, actitudinal, sociocultural, institucional, familiar, contexto socio-escolar, cognitivo y emocional en el logro académico en matemáticas (Lozano, 2003; Garbanzo, 2007; Salas, *et al*, 2011; Cárdenas, 2013), pero resultan insuficientes para detectar las variables cualitativas que son intrínsecas al proceso de aprendizaje matemático y que permitan no solo describir, sino hallar posibles explicaciones del nivel de adquisición de los saberes matemáticos en los jóvenes escolares.

En educación superior, la reprobación en matemáticas es un problema adherido al rendimiento académico en bachillerato, pues el promedio y desempeño matemático en este nivel educativo, en

tanto indicadores de los conocimientos y habilidades matemáticas adquiridas, influyen en la trayectoria y rendimiento escolar a nivel licenciatura (Cú, 2005; Aparicio, 2012). Así, el nivel de construcción de conocimientos y desarrollo de habilidades matemáticos en bachillerato obedece a procesos de difusión institucional de los saberes que se erigen en escenarios de enseñanza explícita de objetos matemáticos preexistentes, en los que se sitúa a los estudiantes en contextos ajenos a su significación y por tanto, impactan en su rendimiento académico matemático en educación superior (Aparicio, Jarero, Ordaz y Sosa, 2009).

Dicho así, si bien se reconoce que factores personales, académicos y socioculturales constituyen un referente para analizar el aprovechamiento académico en matemáticas, en esta investigación se intentó aportar información sobre las variables cualitativas relacionadas con los conocimientos y habilidades matemáticas que inciden en el desempeño matemático a nivel superior. En tal dirección, el objetivo de este estudio consistió en analizar y describir cualitativamente el tipo de competencias y dificultades matemáticas presentes en estudiantes que inician sus estudios universitarios.

El estudio se desarrolló en coordinación con el Departamento de Competencias Básicas de una Universidad del Sureste mexicano con el propósito de establecer acciones para implementar un programa de acompañamiento académico en cursos de matemáticas.

Método

El instrumento empleado consistió en una prueba diagnóstica de matemáticas para el desarrollo de una *Evaluación basada en criterios* (Blanco, 2004), esta prueba se implementó a 122 estudiantes de nuevo ingreso a la Universidad. Como parte de la información solicitada y analizada estuvo el género, edad, bachillerato de procedencia, recursos empleados para estudiar, desempeño en matemáticas de bachillerato por área, formas de estudio preferidas y actividades extraescolares.

La prueba se conformó con sesenta reactivos de opción múltiple organizados en cuatro bloques correspondientes a las áreas de Álgebra, Geometría Plana, Trigonometría y Geometría analítica, y Precálculo, elaborados a partir de identificar los contenidos conceptuales y procedimentales de los programas de matemáticas en bachillerato. En cada reactivo se consideraron las siguientes variables:

1) Tipo de reactivo: Conceptual (C), Procedimental (P) o Resolución de problemas (R);
2) Nivel de demanda cognitiva: Baja, Media o Alta; y
3) Competencia matemática.

El estudio se desarrolló a través de un análisis cuantitativo con mediciones estadísticas sobre la cantidad y porcentaje de respuestas correctas, según el programa educativo, área matemática y variables socioculturales de la población, a la par de un análisis cualitativo del tipo de conocimientos y habilidades matemáticas en los jóvenes. Asimismo se obtuvieron indicadores de competencia matemática por medio del método de *Indicadores de Desempeño Clave* (KPI, por sus siglas en inglés) aplicado en la industria, educación, administración, evaluación de servicios, y otros campos profesionales.

Los indicadores obtenidos a partir de este método representan un nivel de cumplimiento esperado para cada competencia y en su determinación se consideran los conocimientos y habilidades inmersos en los reactivos de las competencias a evaluar y el porcentaje de la población que se espera que los respondan de forma acertada. En la Tabla 1 se muestran las competencias matemáticas valoradas en el estudio, la cantidad total de reactivos en los que se hace presente y el porcentaje de esos reactivos que se espera sean respondidos correctamente.

Tabla 1. Competencias matemáticas y niveles de logro asignados

Clave	Competencia	C1	C2	C3	Total	Indicador	% Esperado
ILA	Interpretación del lenguaje común al algebraico	2	0	0	2	1	60%
RC	Representar/Construir	13	1	0	14	1	60%
SEA	Simplificar expresiones algebraicas	10	1	0	11	1	60%
ERM	Establecer relaciones matemáticas	28	4	1	33	1	40%
MTI	Manejo y tratamiento de información	1	1	0	2	1	40%
ARG	Argumentar	0	11	0	11	1	40%
TRR	Transitar entre registros de representación	5	4	0	9	1	40%
MMT	Modelación matemática	1	8	4	13	1	30%
PMT	Predicción Matemática	0	0	5	5	1	30%
RMT	Razonamiento matemático (inductivo/deductivo)	0	7	5	12	1	30%
		60	37	15	112		

El proceso de análisis e interpretación de los indicadores para cada competencia es análogo al que se ejemplifica enseguida para la de Establecer relaciones matemáticas (ERM) en la Licenciatura de Lengua inglesa. De los 122 estudiantes que presentaron la prueba, en promedio 9.9 de dicha licenciatura respondieron correctamente los 33 reactivos asociados a la competencia. Ellos debían responder el 40% de dichos reactivos, obteniéndose como Indicador de desempeño clave (KPI):

$$\text{Indicador de ERM} = \left(\frac{9.9}{33}\right)\left(\frac{1}{0.40}\right)(1) = 0.75$$

Por tanto, se concluye que los estudiantes no poseen la competencia en el nivel esperado. En el siguiente apartado de resultados se presentan todos los indicadores por competencia y licenciatura que se determinaron.

Dificultades y competencias matemáticas

Los resultados evidencian un aprovechamiento académico mínimo de los conocimientos y habilidades matemáticas del bachillerato en relación con lo establecido en los programas y perfil de egreso de bachillerato. En la Tabla 2 se muestran datos cuantitativos de los resultados de la prueba

diagnóstica, en ésta el porcentaje promedio de respuestas correctas se ubicó entre el 28% y 30% por área.

Tabla 2. Respuestas correctas por programa educativo

Programa	Cantidad de estudiantes	Mínima	Máxima	Promedio	Desviación estándar
Gestión de servicios turísticos	19	8	21	16	3.372
Lengua inglesa	29	11	24	18.03	3.253
Manejo de recursos naturales	21	8	25	17.29	3.67
Sistema comerciales	53	6	33	17.60	4.728

Aquellos reactivos (9 de 60) en que el porcentaje promedio de respuestas correctas fue mayor al 40% denotan la adquisición de definiciones y técnicas algebraicas de simplificación y desarrollo de expresiones, adheridas más a aspectos procedimentales que conceptuales. En Álgebra, por citar un ejemplo, los estudiantes simplifican operaciones directas con expresiones algebraicas y resuelven ecuaciones tanto lineales como cuadráticas dadas en su forma general, pero manifiestan deficiencias para aplicar propiedades y simplificar expresiones con radicales, exponentes (principalmente, literales) o fraccionarias, e interpretar problemas verbales con ecuaciones, tal como se señala en los siguientes resultados del análisis cualitativo:

Tabla 3. Conocimientos-habilidades y dificultades en Álgebra

Reactivo	Saberes matemáticos		Tipo / complejidad
2	Conocimientos y habilidades matemáticas (Promedio de respuestas mayor o igual al 40%)	Reconoce las leyes de los exponentes sobre operaciones tales como multiplicación y potenciación, pero no con radicales.	C-Alta
12		Resuelve ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + bx + c$	P-Baja
13		Efectúa *cálculos* de proporciones y porcentajes numéricamente. *Resuelve* problemas de sistemas de ecuaciones lineales	R-Media
1	Dificultades matemáticas (Promedio de respuestas menor o igual al 20%)	Dificultad para simplificar expresiones algebraicas. Tendencia de pensamiento lineal. Extrapolación incorrecta de la cancelación de factores comunes en numerador y denominador	P-Alta
4		Dificultad de análisis y abstracción de propiedades generales. Desconocimiento de propiedades de los radicales.	C-Alta
7		Factorizar algebraicamente diferencias de cuadrados con un término binomio	P-Media

10		Desarrollar binomios al cuadrado. Dificultad para establecer relaciones numéricas en lenguaje algebraico.	C-Media
15		Interpretar y resolver problemas que involucran ecuaciones cuadráticas	R-Alta

El nivel de aprovechamiento académico en bachillerato de los jóvenes de nuevo ingreso se caracteriza por la operatividad en procesos de simplificación directa y el reconocimiento de propiedades matemáticas en lo explícito, que mengua el entendimiento de la estructura semántica de los saberes matemáticos y de formas de pensamiento para codificar o decodificar información matemáticamente en la resolución de problemas, ambas indispensables para la trayectoria escolar universitaria.

La dificultad para reconocer el sentido conceptual en la estructura de los saberes matemáticos por encima de lo operacional, se detectó como factor de interferencia en la interpretación y representación de propiedades o relaciones matemáticas. Por ejemplo, en Precálculo se encontró dificultad para reconocer las características de distintos tipos de funciones (sea de forma verbal, numérica, algebraica o gráfica), resolver desigualdades de una o dos variables, así como para establecer relaciones entre variables y modelar matemáticamente con funciones. Para el caso de consignas sobre la función cuadrática, solamente el 17% reconoció la variación lineal en los variables como característica de dicha función (Reactivo 51)

51. Tipo de función que es $f(x)$ si se sabe que al evaluarla en los valores 1, 2 y 6, se tuvieron como resultado los valores 2, 6 y 42, respectivamente.

A. Lineal

B. Cuadrática

C. Cúbica

D. No sé determinar la respuesta

Imagen 1. Reactivo 51: Área Precálculo: función cuadrática, tipo Conceptual

Asimismo, la interpretación y representación de relaciones entre cantidades numéricas para generar un modelo algebraico cuadrático de una situación variacional (Reactivo 59) fue realizada correctamente por el 20% de la población.

59. El dueño de un puesto de revistas ha estimado el número de compradores que podría tener de cierta revista si disminuye su precio. Tales estimaciones se presentan en la tabla siguiente:

Disminución del precio (en pesos)	Precio de cada revista (en pesos)	Cantidad de compradores
0	24	8
1	23	10
2	22	12
3	21	14
⋮	⋮	⋮

Si el ingreso lo determina el producto del precio de cada revista por el número de compradores, ¿cuál sería una expresión algebraica que permita estimar el mayor ingreso?

A) $y = 2x^2 + 6x - 8$

B) $y = -x^2 + 22x + 40$

C) $y = -2x^2 + 40x + 192$

D) No sé determinar la respuesta

Imagen 2. Reactivo 59: Área Precálculo: Función cuadrática, tipo Resolución de problemas

Con respecto a las competencias matemáticas, según su índice de complejidad, los estudiantes mostraron mejor desempeño y capacidad en el desarrollo de recursos para transitar entre registros de representación (TRR) y predecir matemáticamente (PMT). En la competencia PMT, los estudiantes tuvieron mejor desempeño que lo esperado (véase la Tabla 4), esto significa que la mayoría de los estudiantes respondió dos de los cinco reactivos (14, 43, 56, 57 y 58) en los que se valoraba esta competencia, pese a su complejidad y que alguno de estos involucraban otras competencias como ERM y MMT.

Sin embargo, el nivel de competencia matemática se halló abajo de lo esperado en aquellas como interpretar del lenguaje común al algebraico, establecer relaciones matemáticas, representar y construir.

Tabla 4. Resultados en porcentaje de los KPI de competencias matemáticas por licenciatura

	ILA	RC	SEA	ERM	MTI	ARG	TRR	MMT	PMT	RMT
Lengua Inglesa	60%	40%	49%	75%	91%	83%	114%	97%	136%	88%
Sistemas Comerciales	50%	42%	50%	74%	80%	86%	105%	94%	121%	79%
Manejo de Recursos Naturale	56%	42%	47%	71%	83%	76%	109%	106%	124%	77%
Gestión de Servicios turístico	57%	44%	37%	71%	86%	84%	74%	93%	119%	76%

Conclusiones

En el estudio se infiere que el avance en conocimientos y razonamientos matemáticos de los jóvenes, está referido principalmente al carácter procedimental de la matemática en cuanto a un mayor cúmulo y dominio de técnicas de resolución de tareas operacionales. Se asume entonces que para el desarrollo de nociones y competencias matemáticas de los jóvenes que ingresan a la

educación superior, se hace necesario un proceso de reconceptualización de los saberes vía la conexión de la dimensión conceptual, operativa y pragmática de estos.

Particularmente se reconoce en las actividades de predicción, modelación y representación matemática, una posibilidad de significar y articular tales dimensiones, pues los estudiantes muestran mayor movilización de recursos matemáticos y evidencian mayor nivel de competencia en la resolución de reactivos que incluyen este tipo de actividades.

Referencias bibliográficas

Aparicio, E.; Jarero, M. y Ávila, E. (2007). La reprobación y rezago en Cálculo. Un estudio sobre factores institucionales. *Premisa. Revista de la Sociedad Argentina de Educación Matemática, 9*(35), 3-12.

Aparicio, E.; Jarero, M.; Ordaz, M. y Sosa, L. (2009). Discurso y práctica docente en matemáticas: Un estudio exploratorio en bachillerato. *Revista iberoamericana de educación matemática. UNIÓN 18*, 58-72.

Aparicio, E. (2012). Rendimiento escolar en matemáticas. En C. Dolores y M. García (Eds.). *¿Hacia dónde reorientar el currículum de matemáticas del bachillerato?* (pp. 23-36). D.F., México: Plaza y Valdés Editores.

Arias, F., Chávez, A. y Muñoz, I. (2006). El aprovechamiento previo y la escuela de procedencia como predictores del aprovechamiento futuro: un caso. *Enseñanza e investigación en Psicología 11* (1), 5-22.

Blanco, O. (2004). Tendencias en la evaluación de los aprendizajes. *Revista de Teoría y Didáctica de las Ciencias Sociales 9*,111-130.

Cárdenas, G. (2013). *Un análisis del contexto del estudiante como predictor del perfil matemático en bachillerato*. Tesis de licenciatura no publicada, Universidad Autónoma de Yucatán, México.

Cu, G. (2005). El impacto de la escuela de procedencia del nivel medio superior en el desempeño de los estudiantes en el nivel universitario. *Revista Electrónica Iberoamericana sobre la Calidad, Eficacia y Cambio en Educación, REICE 3*(1), 764-769. Recuperado el 10 de Septiembre de 2013 de http://www.ice.deusto.es/RINACE/reice/Vol3n1_e/Res_Cu.htm.

Garbanzo, G. (2007). Factores asociados al rendimiento académico en estudiantes universitarios, una reflexión desde la calidad de la educación superior pública. *Revista Educación 31*(1), 43-63.

Jarero, M. y Aparicio, E. (2011). La evaluación en matemáticas. El caso de la prueba escrita. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 24,* 123-130. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, A. C.

Salas, E.; Domínguez, T. y Farfán, R. (2011). Logro educativo: Prueba ENLACE México 2008. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 24,* 79-86. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, A. C.

EN EL PRIMER AÑO DE CARRERAS UNIVERSITARIAS ¿ES LA MATEMÁTICA UN PROBLEMA PARA LOS ESTUDIANTES? IMPORTANCIA DE COMPETENCIAS ESPECÍFICAS

Silvia Martínez, Nydia Dal Bianco, María Cristina Martín y Fernando López Gregorio.
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de La Pampa. Argentina
smartinez@exactas.unlpam.edu.ar, dalbianco@exactas.unlpam.edu.ar, maritamartin11@gmail.com, flopezgregorio@gmail.com

Resumen. Los contenidos de la Matemática para carreras no afines en los primeros años de la Universidad, y de acuerdo a los programas en vigencia, son en general muy extensos, no así el tiempo para su desarrollo.
En general un gran porcentaje de estudiantes que ingresan a la Universidad presenta dificultades en el aprendizaje de la Matemática, problemática común en distintas casas de estudio.
A través de encuestas y diagnósticos se detectan limitaciones en competencias básicas, como la comprensión de situaciones–problemas, técnicas de solución y dominio del lenguaje específico. Esta situación es analizada, en el presente trabajo, a través de dos problemas sobre funciones.
El logro de ciertas competencias puede ser generado por procesos de intervención pedagógica, teniendo como objetivos, el diseño e implementación de estrategias para un aprendizaje significativo de los conceptos matemáticos con la aplicación de los recursos tecnológicos actuales
Palabras clave: estudiantes-competencias-aprendizaje- problemas-estrategias
Abstract. The contents of the Mathematics unrelated careers in the early years of the University, and according to the programs in place are generally very extensive, but not the time to develop. In general, a large percentage of students entering the University presents difficulties in learning mathematics, common problems in different houses of study. Through surveys and diagnostic limitations in basic skills, such as understanding of problem situations, troubleshooting techniques and domain-specific language is detected. This situation is analyzed in this paper through two problems about functions. Achieving certain tasks can be generated by processes of pedagogical intervention, with the objectives, design and implementation of strategies for meaningful learning of mathematical concepts with the application of current technology resources.
Key words: students-skills-learning- strategies-problems

Introducción

La Matemática, en cuanto a contenidos básicos, es una disciplina importante en los primeros años de las carreras que se dictan en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de La Pampa (UNLPam). El sistema vigente permite el ingreso sin cursos de nivelación obligatorios, solamente se dictan breves cursos introductorios antes de cada ciclo lectivo y de carácter optativo.

Los alumnos ingresantes en general, adolecen de competencias básicas como autonomía en el aprendizaje, hábitos y actitudes ante el estudio, lenguaje matemático, interpretación y resolución de situaciones–problemas, como se ha registrado en diagnósticos y encuestas. Funciones es un tema presente en los planes de estudio de todas las carreras que se dictan en la Facultad, y por el papel fundamental que tienen en numerosas aplicaciones, se abordan problemas que integran contenidos y competencias con un amplio intercambio de registros.

Marco teórico

La educación se enfrenta a instancias de fracaso en el ingreso a la Universidad, como así también al importante desgranamiento por abandono o retraso progresivo en el avance en las distintas carreras, al no cumplir los estudiantes con las exigencias académicas mínimas en los primeros años de estudio.

Ante esta compleja situación se consideran las competencias académicas basadas en el carácter secuencial, progresivo y de espiral del desarrollo de la formación académica en el nivel superior. Teniendo en cuenta que este nivel necesita desenvolverse sobre la base de una formación previa, requiere que las competencias para el ingreso y permanencia en la Universidad sean un punto de partida para que el sujeto se construya desde un querer, un saber y un poder hacer, desarrollando saberes y procesos cognitivos fundamentales para cursar satisfactoriamente los primeros años.

Según el grado de generalidad de las competencias académicas se pueden clasificar en generales y específicas. Las primeras, a su vez, se subdividen en básicas y transversales, considerando competencias básicas las que implican el desarrollo de saberes complejos y generales necesarios en diversas actividades intelectuales, como por ejemplo, la comprensión lectora y la interpretación y resolución de situaciones problemáticas. Las transversales tienden a lograr la autonomía en el aprendizaje y destrezas cognitivas que generen un pensamiento crítico. Por otro lado, las competencias específicas permiten un desempeño satisfactorio en una determinada carrera o en carreras afines (Zalba y Gutiérrez, 2006).

La competencia matemática requiere familiaridad con los tipos de problemas, y los recursos disponibles para su solución, dominio y fluidez en el uso de los recursos lingüísticos y operatorios. (Godino, 2002).

Por otro lado, el aprendizaje de las funciones es uno de los principales objetivos en la enseñanza del Análisis Matemático o Cálculo y su importancia se debe a que es fundamental para la comprensión de conceptos tales como continuidad, límite o derivada de funciones, entre otros. La noción de función, considerada como elemento unificador, generalizador y de naturaleza modelizadora, ha sido objeto de numerosas investigaciones en Didáctica de la Matemática, que contemplan diversos aspectos de la problemática planteada en el proceso de enseñanza - aprendizaje sobre funciones. Se reconoce que es un concepto complejo debido a que se expresa en una multiplicidad de registros y genera diferentes niveles de abstracción y de significados. (Azcárate y Deulofeu, 1990).

Duval (1998) trata la importancia de la *representación* en Matemática, estableciendo que no es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a ella, definiendo los

registros de representación como un medio de expresión que se caracterizan por sus signos propios y la forma en que estos se organizan.

Conceptualizar un objeto matemático no puede ser sólo la automatización de ciertos algoritmos o la comprensión de nociones, sino que implica una coordinación de registros de representación que es una de las condiciones fundamentales para el aprendizaje de las funciones. La ausencia de coordinación no dificulta toda la comprensión, pero favorece sólo en parte las transferencias y los aprendizajes posteriores.

En el aprendizaje de la Matemática, la adquisición de un concepto depende en gran parte de la capacidad para reconocer e interpretar una representación del mismo. En esto juega un papel importante el lenguaje utilizado. En particular, en el tratamiento del tema de funciones, y partiendo de la idea de una función como expresión de una dependencia entre variables, consideramos fundamentales los siguientes registros de representación: verbal, tabular, gráfico y algebraico. (Duval, 1998)

Desarrollo

Los estudiantes de Matemática para carreras no afines deben adquirir destrezas para analizar y resolver situaciones problemáticas reconociendo conceptos y propiedades, distintas formas de representación y aplicar técnicas operatorias para su resolución. También, deben saber seleccionar y usar métodos de prueba, emplear el lenguaje coloquial y simbólico para comunicar y presentar argumentos válidos que expresen sus ideas matemáticas.

Para analizar e interpretar diversas situaciones, las funciones constituyen una herramienta de notoria utilidad. Hechos de la vida real en su comportamiento pueden ser descriptos con la utilización de una función lineal como modelo, mientras que las funciones cuadráticas permiten diseñar modelos de situaciones referidas a distintas áreas como la Física, la Biología, la Economía, la Astronomía, la Comunicación y la Geometría, entre otras. También las funciones exponenciales, en cuanto describen magnitudes que crecen o decrecen rápidamente, constituyen una herramienta fundamental con ejemplos en Física, Biología, Medicina, Economía y varias disciplinas más. En cuanto a las funciones logarítmicas, su importancia, en general, está dada por su vinculación con las leyes exponenciales. Las funciones trigonométricas se utilizan para explicar fenómenos que se repiten en períodos o ciclos, por ejemplo mareas, latidos del corazón, movimiento de las cuerdas de un instrumento, la luz, etc., e inclusive, son aplicadas para diseñar instrumentos de medición en la Medicina. (Azcárate y Deulofeu, 1990).

Una actividad necesaria para los estudiantes es aquella en la que deben aprender a realizar conversiones en distintos registros, por lo que, la coordinación entre ellos es de vital importancia

para el desarrollo del pensamiento y para la superación de distintas dificultades en el aprendizaje. (Duval, 1999)

En la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UNLPam, se dicta un curso optativo de Matemática para los alumnos que inician estudios universitarios, en el que se repasan contenidos básicos, en particular el de funciones. En las primeras clases de la asignatura los estudiantes completan un diagnóstico a fin de obtener respuestas específicas e información sobre como abordarían situaciones problemáticas de esa temática. Entre las respuestas dadas destacamos las siguientes: *"…trabajamos mucho función lineal…", "…recuerdo las parábolas que nos hacían representar…", "…nunca vi la función logarítmica…", "…en trigonometría recuerdo seno y coseno…"*

Ante la situación problema a resolver en el diagnóstico, los estudiantes mostraron algunos tratamientos y planteos, intentando realizar bosquejos, gráficos y hallar las respuestas a las consignas. Por ejemplo, dado un ejercicio debían mostrar en forma algebraica y gráfica la solución a un sistema formado por una ecuación lineal y otra cuadrática. En este caso, la mayoría trabajó con precisión en el registro gráfico y en general, pocos obtuvieron los puntos de intersección en el registro algebraico al tener que resolver el sistema correspondiente. (García García, 2003).

El aprendizaje se va desarrollando en forma gradual, en las clases teóricas a partir de los conocimientos previos que los alumnos tienen de su etapa de aprendizaje anterior, del curso de nivelación que algunos realizaron y presentando definiciones, propiedades y reglas lógicamente estructuradas. La competencia matemática requiere el dominio de los sistemas matemáticos disponibles y la capacidad para desarrollarlos ante las necesidades de resolver nuevos problemas. (Godino, 2002)

En las clases prácticas se trabajó en forma individual y grupal, observando los docentes el *"mecanicismo"* que muestran los estudiantes con frecuencia, la búsqueda de la aplicación de "*una determinada fórmula"* o el *"tratar de recordar o buscar una receta*", que según ellos solicitan considerando que así han "aprendido" anteriormente la matemática.

Los docentes responsables del práctico presentaron dos problemas, como una aplicación de funciones, tal que en la resolución de los mismos, los estudiantes debían realizar un intercambio de registros, poner en juego determinadas competencias y aplicar los recursos tecnológicos como la plataforma Moodle (instalada en el ámbito de la Facultad) y los que proveen algunos software tales como GeoGebra, WinPlot, Wolfram Alpha, entre otros. Estas herramientas facilitan la coordinación e interacción entre los diferentes registros de representación.

Problema 1: Proceso de respiración

En el proceso de la respiración se alternan períodos de inhalación y exhalación que se pueden describir mediante la fórmula f(t)= 0,6 sen(π/2)t, siendo t el tiempo medido en segundos y f(t) el caudal de aire en el tiempo t medido en litros por segundos.

a) Hallar el tiempo en que se completa un ciclo, una exhalación, o una inhalación.

b) Hacer el gráfico de la función para dos ciclos completos, y

c) Hallar: i) los lapsos en que el caudal de aire es positivo y los lapsos en que el caudal de aire es negativo; ii) Los instantes en que el caudal de aire es nulo, máximo o mínimo.

Solución:

Es de destacar en este problema la importancia de la comprensión lectora y la interpretación para su resolución. (Zalba y Gutiérrez, 2006).

El docente sugería al estudiante la necesidad de recurrir a los apuntes de clase y bibliografía, por ejemplo en la búsqueda de conceptos básicos de trigonometría como la función seno y los parámetros que determinan período, amplitud de la onda e intervalos de negatividad y positividad, respectivamente.

a) Para hallar el tiempo en que se completa un ciclo, se aplicó la fórmula correspondiente al período, trabajando en el registro algebraico.

Como el período es $T = \frac{2\pi}{B}$

Sustituyendo *B* por el valor π/2, obtenemos $T = \frac{2\pi}{\pi/2} \rightarrow T = 4$ que corresponde a un ciclo.

El tiempo de inhalación coincide con el de exhalación y es de 2 segundos.

b) En la resolución gráfica se utilizó el software GeoGebra (que permite realizar construcciones tanto con puntos, vectores, segmentos, rectas, secciones cónicas y funciones), a fin de visualizar y analizar lo solicitado en el apartado y facilitar además la interacción entre los diferentes registros semióticos de representación. (Duval, 1998).

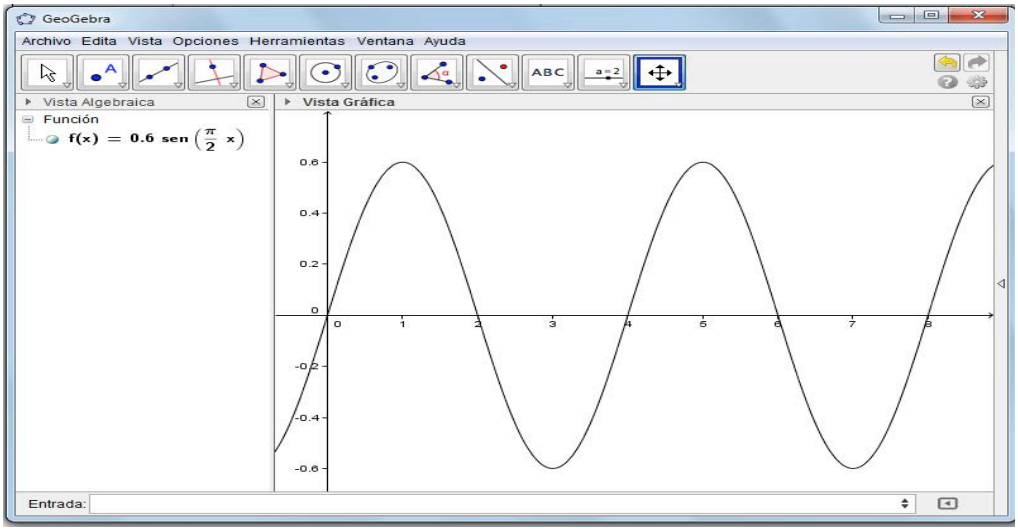


Figura 1: Gráfico del proceso de respiración realizado con GeoGebra

c) i) Para responder a esta consigna se analizó el registro gráfico que se muestra en la Figura 1, observando que el caudal de aire es positivo en el tiempo transcurrido entre 0 y 2 seg y entre 4 y 6 seg. Y el caudal de aire es negativo entre 2 y 4 seg y entre el sexto y octavo segundo.

ii) También se visualizó que el caudal de aire se anula en los puntos en que la gráfica de la función seno interseca al eje de las abscisas, correspondiendo a cero, dos, cuatro, seis y ocho segundos, siendo las coordenadas del máximo caudal (1; 0.6) y (5; 0.6) y las del mínimo (3; -0.6) y (7; -0.6).

Estos problemas de aplicación a la Biología, Física, Química, están en las guías de Trabajos Prácticos como estrategia para un aprendizaje significativo y con el objetivo de adquirir competencias tales como la comprensión lectora, la interpretación y resolución de situaciones problemáticas.

Problema 2: El encuentro de dos automóviles

Dos automóviles circulan en el mismo sentido por la Ruta N° 35 y cuando pasan por el puesto policial Padre Buodo, se registran los siguientes datos:

Auto A: Velocidad: 120km/h, aceleración: -40km/h2

Auto B: Velocidad: 80km/h, aceleración: 0

a) Determinar si volverán a encontrarse, en qué momento y a qué distancia del puesto policial.

b) Graficar los resultados de a) en un sistema de ejes cartesianos.

c) Si el auto A tuviera una aceleración de -80km/h2 ¿cuánto tardaría el auto B en alcanzar al A y a qué distancia del puesto policial sucedería el encuentro?

Solución:

En esta situación problemática es fundamental la interpretación de cada consigna, como así también, el proceso recordatorio (del docente al alumno), de los conceptos básicos de la Física, en particular el referente a problemas de encuentro dados en la unidad de Cinemática. La interacción entre registros y la utilización del software matemático

WinPlot completa la interpretación y resolución en forma algebraica-gráfica del problema dado. (Duval, 1998).

a-b) Usando WinPlot se construyeron las gráficas de las posiciones de ambos autos en función del tiempo transcurrido desde su paso por Padre Buodo. Se aplicaron las fórmulas de cinemática, con el intercambio de registros, del verbal al algebraico, para expresar las funciones de desplazamiento correspondientes a cada vehículo.

Siendo "x" el tiempo en horas, para el Auto A: f(x) = 120 x – 20 x^2 (en rojo en el gráfico), y para el Auto B: g(x) = 80 x (señalado en azul).

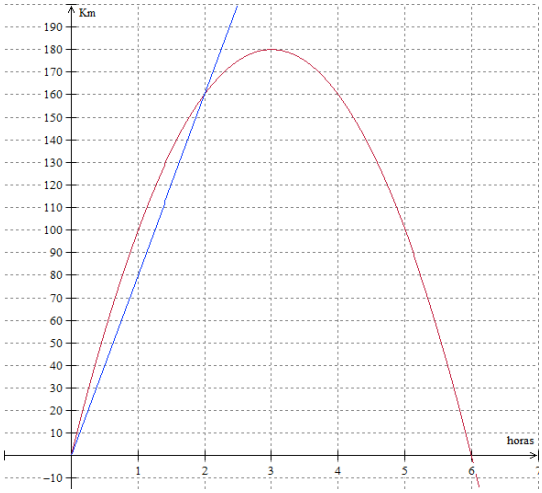


Figura 2. a-b) Encuentro del Auto A y el Auto B a las 2 hs y a 160 km de Padre Buodo

El registro gráfico permitió comprobar que, si ambos autos continúan por la misma ruta, volverían a encontrarse en 2 horas y a unos 160 km de Padre Buodo (Figura 2.a-b). Mientras el Auto A pasó a mayor velocidad, al ir desacelerando, será alcanzado por el Auto B, que a pesar de ir más lento, mantiene su velocidad constante.

En el registro algebraico, planteado el sistema de ecuaciones e igualando las distancias, se obtuvo la ecuación $120x - 20x^2 = 80x$ agrupando y factorizando resulta $20x(2-x) = 0$.

Las soluciones indican que, los autos se encontraron a las 0 horas (al pasar por Padre Buodo) y a las 2 horas, que es el resultado esperado. Así, en ese momento, cada auto avanzó respectivamente 160 km, ya que:

Auto A: $f(2) = \frac{120km}{h}.2h - 20\frac{km}{h^2}4h^2 = 160km$

Auto B: $g(2) = \frac{80km}{h}.2h = 160km$

c) En caso de que el Auto A desacelera a 80 Km/h^2, el pasaje del registro verbal al algebraico quedó así expresado:

Auto A: $f(x) = 120\,x - 40\,x^2$ (en rojo)

Auto B: $g(x) = 80\,x$ (en azul)

Encontrándose los vehículos una hora después a 80 km del Puesto Policial Padre Buodo. El registro gráfico realizado con WinPlot se muestra en la Figura 3.c).

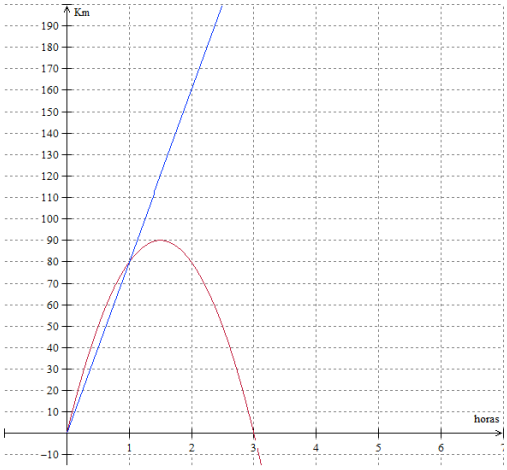


Figura 3. c) Encuentro del Auto A y el Auto B cuando A desacelera.

Toda situación problemática demanda algún proceso de reflexión y toma de decisiones necesarias para resolverla, que en términos de Polya, significa "buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido, pero no alcanzable en forma inmediata".

Con los problemas de aplicación a las ciencias se ha logrado motivar a los estudiantes, integrar conceptos y disciplinas, resignificar la matemática, trabajar en forma cooperativa y adquirir nuevas competencias y habilidades, formalizando el uso de recursos tecnológicos.

Conclusiones

Para afianzar y desarrollar competencias específicas hacia la matemática es importante generar procesos de intervención pedagógica, a fin de que el estudiante, además de adquirir autonomía en el aprendizaje, obtenga hábitos y actitudes ante el estudio, consolidando y transfiriendo los conocimientos aprendidos, que le permitan interpretar y resolver situaciones en diferentes contextos.

También se muestra que cuando se utiliza el potencial que brindan las nuevas tecnologías, como complemento de los recursos tradicionales, se optimiza el tiempo, se favorece la interacción entre registros y la apropiación gradual de determinados conceptos.

Referencias bibliográficas

Azcárate, C. y Deulofeu, J. (1990). *Funciones y Gráficas.* Madrid: Editorial Síntesis S. A.

Brousseau, G., (1983). *Los obstáculos epistemológicos y los problemas de la enseñanza.* México: Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN.

Duval, Raymund. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. *Investigaciones en Matemática Educativa II*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (1999*). Semiósis y pensamiento humano. Registros semióticos de aprendizajes intelectuales*. Medellín: Universidad del Valle.

García García, J. (2003). *Didáctica de las ciencias. Resolución de problemas y desarrollo de la creatividad.* Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Godino, J. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathemathiques. 14 (3),*325-355.

Godino, J. (2002). Competencia y comprensión matemática: ¿qué son y cómo se consigue?. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas. (29),* 9-19.

Polya, G. (1997). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Editorial Trillas.

Santaló, L., Brousseau, G. y Saiz, I. (1994). *Didáctica de Matemáticas aportes y reflexiones*. Buenos Aires: Paidós Educador.

Zalba, E. M., y Gutiérrez, N. B. (2006). *Una aproximación a la educación basada en competencias en la formación universitaria.* Mendoza: Universidad Nacional de Cuyo.

FRACCIONES Y VIDEOJUEGOS. ¿UNA RAZÓN PARA JUGAR?

Alfonso Olvera, Alfredo Martínez, Freddy Villamizar y Hugo Estrada
Cinvestav – IPN México
aolverav@cinvestav.mx

Resumen. Los videojuegos son un medio válido de aprendizaje pues, además de aprovechar las propiedades didácticas de la lúdica, permiten involucrar al jugador de manera natural en situaciones que en la vida real no resultan significativas o sencillas de recrear. El presente trabajo propone el diseño de Aritban, un videojuego educativo, como promotor de un conjunto de estrategias de comparación de fracciones que permitan a los estudiantes fortalecer su noción de tamaño de los números racionales. Asímismo, se reporta una primera experiencia con un grupo de estudiantes de 12 años de edad, que mostraron un cambio de estrategias de comparación de fracciones luego de 200 minutos de jugar Aritban.
Palabras clave: fracciones, orden, tamaño, videojuegos, motivación
Abstract. Videogames are a valid learning medium since, in addition to exhibiting the didactic properties of play, they naturally involve the player in situations that in real life are not as meaningful or easy to recreate. The educational videogame Aritban was designed to promote a set of strategies for fraction comparison that may lead students to strengthen their notion of rational number size. A first experience shows a group of 12 year old students change their fraction comparison strategies after 200 minutes of playing Aritban.
Key words: fractions, order, size, videogames, motivation

Introducción

Las dificultades que los estudiantes experimentan al enfrentarse a las fracciones han sido explicadas principalmente por las diferencias estructurales existentes entre los números enteros y los números racionales. Es un consenso general que los números racionales pueden ser caracterizados como un conjunto de subconstrucciones matemáticas relacionadas entre sí pero distintas en su fenomenología y, por lo tanto, su función (ver, por ejemplo, Behr, Harel, Post y Lesh, 1993; Freudenthal, 1983; Kieren, 1988).

Desde una perspectiva didáctica, un entendimiento completo de los números racionales requiere de la comprensión de cada una de sus subconstrucciones y de la integración de todas ellas. En el salón de clases, se pretende perseguir este objetivo mediante actividades que involucran a los estudiantes en situaciones que les ayudan a construir cada una de las facetas del número racional, por medio de las diversas interpretaciones de la grafía A/B de las fracciones asociadas a cada una de las subconstrucciones de los números racionales.

En la práctica, sin embargo, las actividades propuestas suelen limitarse a la idea de que una fracción representa una cantidad como parte de un todo, en un sentido de inclusión en el que la parte es necesariamente elemento del todo (Cortina y Zúñiga, 2008), perdiendo por completo el corazón del esquema de las fracciones: el que A sea n veces tan grande como B implica que B es una enésima parte de A.

Lo anterior, que es una consecuencia del cambio de paradigma desde los números enteros, que hablan del cuánto, a las fracciones, que hablan del qué tanto, confunde a los estudiantes que por primera vez observan cómo la multiplicación puede "hacer más chico" y la división puede "hacer más grande" a algo.

El objetivo del videojuego Aritban, cuyo diseño se expondrá más adelante, es proponer al estudiante actividades que promuevan un conjunto de estrategias de comparación de fracciones, que a su vez les ayuden a formar esta noción, más compleja, de tamaño.

La noción de tamaño

Varios autores han señalado que el reconocimiento de equivalecias y la noción de que una cosa es más grande que otra precede fenomenológicamente a cualquier operación aritmética (ver, por ejemplo, Behr, Wachsmuth y Post, 1984; Freudenthal, 1983). Esto concuerda con las observaciones hechas por Piaget y Szeminska (1987), quienes postulan que los niños atraviesan las etapas a) de evaluación global de conjuntos o cantidades continuas, b) de correspondencia de elementos o propiedades como altura y espacio cubierto, pero aún sin equivalencia durable, y c) correspondencia numérica con equivalencia necesaria, mucho antes de estar preparados para considerar una colección como una reunión de unidades de la forma 1 + 1 + 1 + …

Consecuentemente, se ha sugerido que la instrucción sobre operaciones aritméticas con fracciones debe posponerse para priorizar los conceptos de orden y equivalencia durante los primeros años de educación (Bezuk y Cramer, 1989; Cramer, Post y del Mas, 2002). Ambos conceptos, orden y equivalencia, están asociados a la noción de tamaño.

Una apropiada noción del tamaño de las fracciones se evidencia en, por ejemplo, la capacidad de un estudiante para juzgar la suma de 2/3 y 1/6 como menor que 1 (Cramer, Post y del Mas, 2002), o para estimar la suma de 6/7 y 9/8 en 2, sin la necesidad de recurrir a los algoritmos usuales con lápiz y papel, de la misma manera que un estudiante que ha desarrollado una secuencia numeral anidada (Olive, 2001) no requiere de algoritmos con lápiz y papel para juzgar que la suma de 38 y 42 es menor que 100.

Comparación de fracciones

Los números racionales, en su calidad de números, poseen una propiedad de tamaño y, por lo tanto, pueden compararse y ordenarse según su tamaño. Sin embargo, y debido a la complejidad de la construcción de los números racionales, cuando se habla de estrategias de comparación más comúnmente se hace referencia a una comparación de fracciones que a una comparación de números racionales.

Como lo expone Freudenthal (1983), las situaciones de repartición, en las cuales usualmente una persona entra en contacto por primera vez con los números racionales, pueden dar origen a las expresiones, por ejemplo, 1/2, 2/4, 3/6, etc. Todas ellas hacen referencia al mismo objeto matemático, el número racional a cuya clase de equivalencias pertenecen, pero emergen de manera natural de situaciones distintas. En realidad lo que se compara son los tamaños de los números racionales, pero la comparación se realiza a través de fracciones y, de hecho, todas las operaciones aritméticas con números racionales aprendidas en la escuela se realizan sobre la grafía A/B de las fracciones, es decir, sobre una composición numerador-denominador.

Behr, Wachsmuth, Post y Lesh (1984) detectaron cuatro estrategias de comparación de fracciones comúnmente desarrolladas por los estudiantes, a las que denominaron a) del mismo numerador, b) del mismo denominador, c) transitiva, y d) residual, que no dependen de métodos comúnmente revisados en la secuencia curricular tradicional, como la búsqueda de un denominador común o el algoritmo del producto cruzado.

Las estrategias del mismo numerador y del mismo denominador se apoyan en la relación inversa que existe entre el número de partes iguales en que se puede dividir una unidad y el tamaño de cada una de esas partes. Comparar dos fracciones con el mismo denominador implica comparar piezas que son del mismo tamaño, de modo que el factor decisivo es la cantidad de piezas. Comparar dos fracciones con el mismo numerador implica comparar conjuntos con el mismo número de piezas pero de tamaños diferentes para cada conjunto, de modo que el factor decisivo es el tamaño de la pieza, es decir el tamaño de la fracción unitaria.

Lúdica

Un juego es siempre intrínsecamente motivante, es decir, no requiere de recompensas externas a la propia mecánica del juego, aunque ellas existan. Esto es así al menos para quien verdaderamente considera a determinada actividad un juego. Pero aunque el juego carece de cualquier fin externo a él, sí tiene, por otro lado, propósitos internos, y en su análisis sobre el trabajo de Sutton-Smith, Pellegrini (1995) los resume en cuatro divisiones: propósito de progreso, propósito de poder, propósito de fantasía y propósito de recreación.

De particular interés al diseño de actividades didácticas son el propósito de progreso, que radica en la esencia del juego como medio para desarrollar el conjunto de habilidades, ya sean físicas, mentales o sociales, requeridas para vencer en él; y el propósito de recreación, que se centra en ofrecer al jugador una experiencia en la cual desee permanecer debido a la gran felicidad y satisfacción que percibe de la actividad que realiza.

El videojuego

Tomando en consideración los cuatro propósitos de la lúdica, podemos delimitar el concepto de juego y decir que un juego consiste en un conjunto de actividades en que se involucran voluntariamente uno o más participantes en una lucha por cumplir ciertas condiciones de éxito en el marco de un conjunto de reglas definidas para tiempos y espacios finitos.

El videojuego es, por extensión, un juego en que el jugador interactúa con los elementos de un entorno virtual a través de una interfaz electrónica.

El término virtual se refiere a que el entorno no está presente físicamente, sino que es simulado por medio de un equipo de vídeo y sonido, en ocasiones incluso de dispositivos electromecánicos que permiten al usuario percibir movimiento "como si estuviera allí". Pero hablando en términos generales, los entornos virtuales no necesariamente simulan la realidad como es, sino que se toman ciertas licencias según el aspecto del objeto o situación que el desarrollador desea enfatizar.

Es decir, en un entorno virtual se puede, a diferencia de lo que sucede en la realidad misma, ignorar tantos aspectos de la realidad como convenga a una particular interpretación de determinado objeto o situación, suspendiendo las estrictas consecuencias de la acción y ofreciendo la oportunidad de interactuar con tantos y tan variados escenarios como se necesite o se desee. Por lo tanto, si bien existen videojuegos que entre sus objetivos cuentan con una simulación muy aproximada de la realidad, es posible encontrar también aquellos que simulan una realidad no real en nuestro mundo, en el sentido de postular leyes físicas y situaciones diferentes a las que el jugador experimenta día a día.

El diseñador del videojuego educativo puede aprovechar esta flexibilidad para cuidar que las actividades que el jugador realiza, como advierte Dondlinger (2007), estén alineadas tanto con la fantasía que es marco para la experiencia del videojuego como con las habilidades que se desean desarrollar.

El videojuego Aritban

Dickey propone (2006) que un ritmo lento de juego es más propicio para la observación y la reflexión, que es un elemento indispensable para que el contenido educativo tenga un impacto sobre el jugador. Con esto en mente, se consideró el popular videojuego de puzzle Sokoban, cuyo objetivo es empujar cajas, una a la vez y sin posibilidad de tirar de ellas, hasta lugares designados dentro de un laberinto reducido en el menor número posible de pasos, y se agregó el requerimiento de acomodar los objetos en orden de menor a mayor.

Cada nivel de Aritban es un reto por ordenar rocas etiquetadas con fracciones de menor a mayor entre dos pilares. Cada conjunto de fracciones, representadas por rocas etiquetadas, es elegido como promotor de un modelo específico de comparación de fracciones, tomando como base los

modelos de comparación de fracciones descritos por Behr y sus asociados (Behr, Wachsmuth, Post y Lesh, 1984).

Modelos de comparación de fracciones

Se tomó por tanto la siguiente secuencia de modelos. RI indica la posibilidad de encontrar una razón numerador-denominador entera, RE indica la posibilidad de encontrar una razón numerador-numerador o denominador-denominador entera. Entre paréntesis se da el ejemplo de un par de fracciones que pueden ordenarse bajo este modelo:

La fracción es mayor si el denominador es el mismo y el numerador es mayor. (2/4 < 3/4).

La fracción es mayor si el denominador es menor y el numerador es el mismo. (4/3 < 4/2).

Cualquier fracción impropia es mayor que cualquier fracción propia. (2/3 < 5/3).

Al compararse con una cantidad mayor que ambas fracciones, es mayor la fracción más cercana a esa cantidad. Caso RI RE (1/2 < 3/4).

Al compararse con una cantidad mayor que ambas fracciones, es mayor la fracción más cercana a esa cantidad. Caso RI (4/12 < 6/16).

Al compararse con una cantidad menor que ambas fracciones, es menor la fracción más cercana a esa cantidad. Caso RI RE (4/2 < 12/5)

Al compararse con una cantidad menor que ambas fracciones, es menor la fracción más cercana a esa cantidad. Caso RI (16/6 < 12/4).

Al compararse con una cantidad mayor que ambas fracciones, es mayor la fracción más cercana a esa cantidad. Caso RE (4/12 < 6/16).

Al compararse con una cantidad menor que ambas fracciones, es menor la fracción más cercana a esa cantidad. Caso RE (4/3 < 16/9).

Entre cualesquiera dos fracciones puede proponerse una fracción intermedia que ayude a distinguirlas con claridad. (2/5 < 4/7).

Al avanzar por los niveles de Aritban el jugador debe descubrir estos modelos de comparación de fracciones para encontrar la solución. Esta secuencia crece en dificultad para el jugador, según lo reportan Karplus, Pulos y Stage (1983).

La experiencia

En 2011, en el contexto del curso de Maestría en Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, se observó la experiencia

que un grupo de cinco estudiantes de primer año de secundaria, alrededor de los 12 años de edad, tuvo con Aritban. Esta estudio se realizó en la Ciudad de México bajo la supervisión de la Dr. Olimpia Figueras y la Dr. Silvia Mayén, asesoras del curso de Metodología de la investigación.

Se les pidió a los estudiantes que resolvieran un test antes y después de 200 minutos de juego, en un lapso de tiempo total de dos semanas. El objetivo de estos tests fue registrar diferencias en la estrategia de comparación de fracciones antes y después de la experiencia de juego.

Un estudiante, durante el pretest, intentó auxiliarse de la recta numérica para encontrar una fracción mayor que 1/9 y menor que 1/8, pero la dificultad para identificar con precisión intervalos iguales tan pequeños sobre la recta le impidió reconocer si 1/9 era menor o mayor que 1/8. En el postest, al proponerle que encontrara una fracción ubicada entre 1/6 y 1/7, y luego de otro intento fallido por construir una recta numérica lo suficientemente precisa, el estudiante busca fracciones equivalentes para facilitar su tarea. No atreviéndose a escribir 6.5/42 como una fracción entre 6/42 y 7/42, multiplica una vez más para obtener 12/84 y 14/84, y finalmente escribe 13/84. No es claro si el estudiante, en el postest, reconoce que 13/84 se ubica entre 1/6 y 1/7, o si piensa que las transformaciones que ha efectuado lo han trasladado a una situación diferente de la inicial.

Otros estudiantes cambian también de alguna manera sus estrategias, pasando del uso de rectángulos para indicar partes de un todo o rectas numéricas de construcción complicada a expansiones decimales o búsqueda de fracciones equivalentes, pero sólo el estudiante que se ha descrito logra encontrar una equivalencia de fracciones útil para resolver el ítem.

Aunque no es claro el motivo por el que los estudiantes han decidido desechar sus anteriores estrategias y buscar nuevas, una modificación al diseño actual de Aritban debería permitir identificar estas transiciones de preferencia por una estrategia u otra, y se considera positivo que los estudiantes intenten descubrir nuevas estrategias de comparación luego de su experiencia con Aritban.

Los estudiantes se mostraron entusiasmados e interesados en continuar jugando una vez que las dos semanas de prueba concluyeron. Al término del postest todos mencionaron que sentían haber aprendido matemáticas y que les gustaría seguir aprendiendo de esa manera.

Todos mostraron una mejora gradual en su desempeño con Aritban, lo que es notable, pues no se hizo ningún tipo de intervención pedagógica durante el juego. El cambio se debió al desarrollo de una habilidad para ordenar fracciones, una habilidad para resolver laberintos, al estudio voluntario de fracciones con el objeto de mejorar en el juego, o a alguna combinación de estas proposiciones, que en ningún caso resulta poco deseable.

Conclusiones

La mecánica de juego de Aritban es una muestra del beneficio que pueden aportar los videojuegos a la didáctica de las matemáticas, y por lo tanto parece absurdo continuar ignorando el diseño de videojuegos educativos como herramienta viable y legítima en la educación.

La evidencia apunta a que, al no poder avanzar de un nivel a otro utilizando un razonamiento que consideraban suficiente, y posteriormente un método de prueba y error, la interacción con Aritban incitó a los estudiantes a replantear sus estrategias de comparación de fracciones, atreviéndose incluso a probar algunas de esas nuevas estrategias en el postest.

De la bibliografía revisada hasta el momento no parece existir un estudio previo que utilice un videojuego educativo de estas características para trabajar con algún aspecto relacionado con las fracciones. Será necesario entonces un estudio que dé mayor seguimiento a estos u otros participantes.

Referencias bibliográficas

Behr, M., Harel, G., Post, T., y Lesh, R. (1993). Rational numbers: Towards a semantic analysis – emphasis on the operator construct. En T. Carpenter, E. Fennema y T. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 13-47). NJ: Erlbaum.

Behr, M., Wachsmuth, I., Post, T., Lesh, R. (1984). Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15(5), 323-341.

Bezuk, N., y Cramer, K. (1989). Teaching about fractions: What, when, and how. En P. Trafton (Ed.), *National Council of Teachers of Mathematics 1989 Yearbook: New Directions For Elementary School Mathematics* (pp. 156-167). VA: NCTM.

Cortina, J. Zúñiga, C. (2008). Ratio-like comparisons as an alternative to equalpartitioning in supporting initial learning of fractions. En O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sepulveda, *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX Vol. 2* (pp. 385-392). México: Cinvestav-UMSNH.

Cramer, K., Post, T., y del Mas, R. (2002). Initial fraction learning by fourth and fifth grade students: A comparison of the effects of using commercial curricula with the effects of using the Rational Number Project curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(2), 111-144.

Dickey, M. (2006). Game design narrative for learning: Appropriating adventure game design narrative devices and techniques for the design of interactive learning environments. *Educational technology research and development*, 54(3), 245–263.

Dondlinger, M. (2007). Educational video game design: A review of the literature. *Journal of applied educational technology*, 4(1), 21-31.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* NY: Kluwer Academic.

Karplus, R., Pulos, S., Stage, E. (1983). Proportional reasoning of early adolescents. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 45-90). FL: Academic Press.

Kieren, T. (1988). Personal knowledge of rational numbers - Its intuitive and formal development. En J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 162-181). VA: NCTM.

Olive, J. (2001). Children's number sequences: An explanation of Steffe's constructs and an extrapolation to rational numbers of arithmetic. *The Mathematics Educator*, 11(1), 4-9.

Pellegrini, A. (1995). *The future of play theory: A multidisciplinary inquiry into the contributions of Brian Sutton-Smith*, NY: New York Press.

Piaget, J., y Szeminska, A. (1987). *Génesis del número en el niño.* Buenos Aires: Guadalupe.

DESARROLLO DE ACTITUDES HACIA EL ESTUDIO DE LAS MATEMÁTICAS EN EDUCACIÓN SECUNDARIA. SU RELEVANCIA EN EL LOGRO DE APRENDIZAJES ESPERADOS

Santiago Ramiro Velázquez, Josip Slisko Ignjatov y Hermes Nolasco Hesiquio
Secretaría de Educación Guerrero México
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Universidad Autónoma de Guerrero
sramiro@prodigy.net.mx, jslisko@fcfm.buap,nolascohh.@hotmail.com

Resumen. En este artículo hacemos un estudio de las actitudes hacia el estudio de las matemáticas en educación secundaria y su relevancia en el logro de aprendizajes esperados. Consideramos que en los documentos de apoyo didáctico hacen falta explicaciones acerca de lo que son dichas actitudes y evidencias de su relación con los aprendizajes. El objetivo de esta investigación es explicar las actitudes hacia el estudio de esta asignatura y mostrar evidencias de su importancia en el logro de los referidos aprendizajes. De manera que reportamos un estado del arte sobre actitudes y trabajo con alumnos y profesores de este nivel educativo, que revelan por una parte la necesidad de la formación de actitudes hacia el estudio de las matemáticas y por otra, evidencias de su relación con el logro de aprendizajes esperados. Los procesos y resultados confirman cierta correspondencia entre el desarrollo de actitudes positivas hacia el estudio de las matemáticas y el logro de aprendizajes esperados.
Palabras clave: actitudes, aprendizajes esperados, contextos auténticos
Abstract. In this paper, we study the attitudes towards the study of mathematics in secondary education and its importance in achieving learning outcomes. We believe that teaching supporting documents need for explanations about what are these attitudes and evidence of its relationship with learning. The objective of this research is to explain attitudes toward the study of this subject and show evidence of their importance in the achievement of those learning. Sowe report a state of the art on attitudes and work with students and teachers at this level, they reveal on the one hand the need for the formation of attitudes toward the studyof mathematics and other evidence of their relationship to achievement of learning outcomes. The processes and results confirm some correspondence between the development of positive attitudes towards the study of mathematics and the achievement of learning outcomes.
Key words: attitudes, expected learning, authentic contexts

Introducción

En este trabajo se dan a conocer avances de una investigación sobre las actitudes hacia el estudio de las matemáticas en educación secundaria (AHEM), considerando su relevancia en el logro de aprendizajes esperados. El objetivo de este trabajo es explicar las actitudes hacia el estudio de esta asignatura y mostrar evidencias de su importancia en el logro de los referidos aprendizajes.

Sostenemos que en los documentos de apoyo didáctico de educación secundaria los planteamientos de partida sobre actitudes son adecuados, no obstante hacen falta explicaciones acerca de lo que son y evidencias que constaten su papel en el logro de aprendizajes esperados. De ahí la necesidad de investigar en este ámbito.

De acuerdo al Diccionario Enciclopédico Grijalbo, Panton (1995), una actitud es postura, situación y disposición de los diferentes estados anímicos de una persona.Se puede considerar que esta idea de actitud es adecuada pero incompleta. Compartimos con Gómez (2002) la tesis de que los

aspectos que componen una actitud son el cognitivo, el afectivo y el conductual. El primero se refiere a las preconcepciones e ideas que tiene el alumno acerca de las matemáticas, el afectivo consiste en los sentimientos que esta asignatura produce y el conductual está formado por las disposiciones y acciones hacia las matemáticas.

Para el logro del objetivo de la investigación se hizo un estudio del estado del arte a fin de explicar posiciones sobre actitudes hacia el estudio de las matemáticas y sus implicaciones en el logro de los aprendizajes esperados, planteados en los programas de estudio. En este apartado se analizaron tesis de grado, artículos científicos, textos y diversas fuentes que abordan las AHEM y/o sus implicaciones en el logro de aprendizajes esperados. Centramos el análisis de estas fuentes en los aspectos conceptuales sobre actitudes y sus enfoques en términos del logro de aprendizajes o formación de ciudadanos plenos.

También se hizo trabajo de campo en diversas etapas, en la primera etapa realizamos un estudio de casos, para ello ocho profesores de escuelas secundarias de Acapulco, Guerreo, hicieron un análisis de problemas planteados en los libros de texto, clasificándolos en problemas en contextos auténticos y problemas en contextos artificiales.Se parte del supuesto de que los problemas en contextos auténticos producen actitudes positivas, en tanto que los de contextos artificiales generan actitudes negativas en los alumnos.

Sobre contextos consideramos las aportaciones de Palm (2006) referentes a una clasificación de problemas contextualizados y explicaciones de la teoría de las situaciones de tareas auténticas, de tal forma que se revelan las maneras de cómo la situación real debe estar inmersa en el problema propuesto. En este sentido Alsina (2010) describe la relevancia de las matemáticas para la vida cotidiana al considerar que en la escuela deben instrumentarse prácticas sociales sobre aplicar matemáticas como personas saludables, como consumidores y como ciudadanos.

Con respecto a los contextos artificiales asumimos lo sostenido por Santanero (2011) quien constata que lo artificial está presente en los libros de texto y es de dos tipos. El primero consiste en que los problemas se enmarcan en una situación posible, pero los datos y relaciones entre ellos son irreales. En el segundo tipo se plantean problemas que consideran escenarios y actuaciones que las personas jamás imaginarían o llevarían a cabo.

En la segunda etapa del trabajo de campo, 20 alumnos resolvieron algunos de los problemas seleccionados por los profesores, con el propósito de verificar el supuesto referido en líneas anteriores. Los alumnos fueron seleccionados al azar por los propios profesores, se les convenció de participar en esta actividad y concluida la solución de los problemas opinaron acerca de los aportes de la experiencia a su formación personal.

En la tercera etapa del trabajo de campo se valoró el desempeño en el estudio de las matemáticas, de los alumnos participantes en la segunda etapa, por medio de sus diarios de clases. Esta valoración considera la calidad de los procesos y resultados de las tareas y situaciones propuestas a los alumnos, en términos de lo esperado.

Estado del arte

En educación secundaria se sostiene que "En la asignatura matemáticas, se busca que los niños y jóvenes asuman una actitud positiva hacia el estudio de esta disciplina" (SEP, 2006, p. 7). Por su parte los actuales programas de estudio, SEP (2011) de este nivel educativo, incluyen actitudes hacia el estudio de las matemáticas de manera amplia, al considerar que el alumno desarrolle una concepción positiva de sí mismo en el ámbito de las matemáticas incluyendo el gusto y la inclinación por el discurso y los procesos matemáticos. De igual modo la formación de un pensamiento matemático en términos de conceptos, juicios, razonamientos e intercambio de saberes y experiencias. Nosotros afirmamos que el interés de los alumnos por construir, aplicar y difundir saberes matemáticos, la búsqueda permanente del conocimiento y la responsabilidad de sus acciones, constituyen actitudes positivas. Al contrario, la indiferencia, la escolarización, el rechazo y la imposición de criterios dan cuenta de actitudes negativas (Velázquez y Nolasco, 2009).

Compartimos la tesis sostenida en el programa de estudio SEP (2011) en el sentido de que una manera de formar y desarrollar actitudes positivas hacia las matemáticas en alumnos de educación secundaria, es por medio del análisis de descubrimientos científicos y obras trascendentes que benefician a la sociedad, " Recomendamos a la y el docente la búsqueda, exposición y discusión de anécdotas históricas y noticias de interés para la sociedad actual" (SEP, 2011, p. 94).

Alsina, Fortuny y Pérez (1997) consideran que las actitudes pueden ser sobre apreciación de las matemáticas y la organización y hábitos de trabajo en esta asignatura. Desde nuestro punto de vista esta posición está en consonancia con las ideas expresadas en líneas anteriores, y va más allá en el acercamiento a las matemáticas. En este sentido Callejo, Goñi, Alsini, Civil, Giménez, Gómez. Planas y Vanegas (2010) estructuran una propuesta de aprender y enseñar matemáticas para formar ciudadanos plenos. Por su parte López (2012) sostiene que cuando una persona logra comprender su razón de ser y estar en un grupo de estudio de las matemáticas, ejerce su responsabilidad sobre la contribución al mejoramiento del grupo y de la sociedad.

Valero (2006) de manera implícita aborda el estudio de actitudes al considerar que la escuela es un espacio de formación que puede hacer que los alumnos desarrollen un pensamiento crítico. De manera que hagan una lectura objetiva de la información que se da en diversos medios, que

muchas veces se presenta tergiversada para favorecer a un determinado sectorde la sociedad. Compartimos esta tesis al sostener que uno de los propósitos fundamentales de la escuela consiste en la formación de ciudadanos plenos e incorruptibles. En esta formación las matemáticas pueden evidenciar sus potencialidades al encaminarse al desarrollo del pensamiento matemático, que necesariamente es crítico.

Velázquez, Slisko y Nolasco (2012) hacen referencia a las AHEM al considerar que los problemas en contextos artificiales generan una falsa idea de lo que son las prácticas matemáticas, porque muestran una acción repetitiva sin ningún significado para los alumnos, contraria a lo que se hace con las tareas y problemas matemáticos, donde hay que buscar el conocimiento planteando conjeturas y asegurarlo con argumentos. Si se trabaja con sentido matemático los alumnos activan procesos cognitivos, sociales y emocionales, encaminados al desarrollo de su pensamiento.

Juárez, (2010), realiza un amplio estudio sobre actitudes y el rendimiento en matemáticas en alumnos de telesecundaria, durante los tres años que permanecen en este subsistema educativo. Sus hallazgos revelan que los alumnos muestran inestabilidad en lo referente al gusto por las matemáticas y autoconfianza en esta asignatura, ya que en algunos momentos aumenta este interés y autoconfianza y en otros disminuye.

Rodríguez y Gómez (2013) al hacer un estudio sobre factores afectivos en el aprendizaje de las matemáticas revelan que las emociones de los estudiantes dependen de las tareas matemáticas propuestas y de la interacción discursiva entre pares y docentes.

> Las estudiantes sienten impotencia, malestar, incomodidad, aburrimiento en cursos de matemáticas donde la metodología del profesor no cubre sus expectativas educativas y de convivencia. Los datos indican que las cuatro estudiantes han mejorado su actitud hacia las matemáticas, sus creencias, valoraciones y sobre todo sus emociones con la profesora, el trabajo de esta docente generó interés, entusiasmo en las estudiantes. En algunos casos provocó menos rechazo hacia las Matemáticas (Rodríguez y Gómez, 2013, p. 95).

Schoenfeld (2006) considera que mirar a las matemáticas como útiles, importantes, dinámicas y eficaces, es condición necesaria para desempeñarse con éxito en la solución de problemas.Esta mirada la hace el alumno cuando valora usos y significados de saberes matemáticos y su relevancia en la vida social.

Polya (1974) expresa, la precisión y el rigor, como actitudes matemáticas que se caracterizan por lo válido, coherente y comunicable de los procesos y producciones de los alumnos. En esta tesis

está inmersa la idea de AHEM ya que para cumplir con las referidas características se necesita que los alumnos activen sus procesos de organización y hábitos de trabajo en las matemáticas.

En las ideas expuestas en los párrafos anteriores se puede ver un acercamiento a lo que son las AHEM y su relevancia en el logro de aprendizajes esperados, ya que si se pasan por alto, solo se obtendrá en el mejor de los casos, un aprendizaje efímero y forzado por la necesidad de cumplir una normatividad escolar.

Resultados

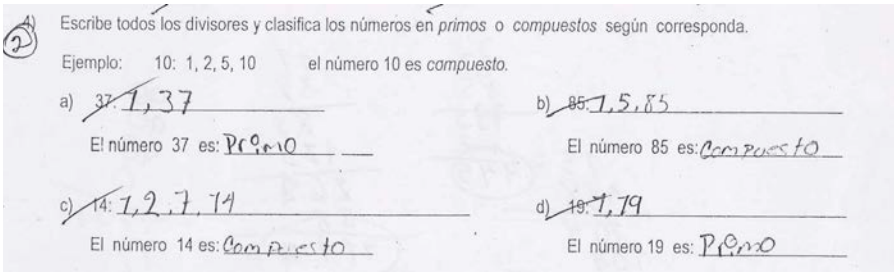
Enel estudio del estado del arte destaca el análisis de los problemas planteados en los libros de texto oficiales de matemáticas en correspondencia con los contextos y situaciones en los que se ubican, y su relevancia en la generación de actitudes positivas o negativas hacia el estudio de las matemáticas en los alumnos. En una 1ª tendencia se ubican investigaciones como las de Palm (2006) sobre la teoría de situaciones de tareas auténticas. En una 2ª tendencia sobresalen trabajos sobre matemáticas, actitudes y formación ciudadana. Como los de Callejo et al (2010) referentes a enseñar y aprender matemáticas para formar ciudadanos plenos, y Alsina (2010) en el ámbito de las matemáticas en la vida cotidiana y su importancia en la calidad de vida.En una 3ª tendencia se leen trabajos referentes a la relación entre las AHEM y el logro de aprendizajes. Como el de Juárez, (2010) y el de Rodríguez y Gómez 2013. Finalmente se miran investigaciones sobre la validez, coherencia y relevancia de las matemáticas en la solución de problemas. En este caso se ubican los trabajos de Schoenfeld (2006) y Polya (1974).

En el análisis de problemas planteados en los libros de texto los profesores seleccionaron 16 problemas de contextos auténticos y 20 de contexto artificiales. En el primer tipo de problemas, ubican aquellos que modelan situaciones de la física como movimiento rectilíneo uniforme, uniformemente acelerado y caída libre de los cuerpos. De la misma manera consideran los problemas que requieren de una solución para la toma de decisiones, los referentes a la lectura de gráficas, oferta-opciones de pago, impuestos y vida saludable. En los problemas en contextos artificiales consideran los que son repetitivos y los que se acompañan de pistas para resolverlos.

En lo que corresponde a la segunda etapa del trabajo de campo cada alumno resuelve un problema de contexto auténtico y otro de contexto artificial, sus opiniones sobre el primer tipo de problemas coinciden en que son interesantes y les generan dudas que los hacen pensar y buscar caminos de solución. Por su parte sobre los problemasde contextos artificiales sostienen que son aburridos y que cuando se acompañan de pistas tienen demasiado texto que los confunden.

En la tercera etapa del trabajo de campo hasta al momento se han analizado producciones de los alumnos de 7° grado referentes al apartado "7.2.1. Formulación de criterios de divisibilidad entre

2, 3 y 5. Distinción entre números primos y compuestos" (SEP, 2011, p. 32). Los resultados muestran un buen logro de los aprendizajes esperados al responder de manera óptima a situaciones de divisibilidad y clasificación de números en primos y compuestos. Así se revela en la fig. 1.


2) Escribe todos los divisores y clasifica los números en *primos* o *compuestos* según corresponda.

Ejemplo: 10: 1, 2, 5, 10 el número 10 es *compuesto*.

a) 37: 1, 37
El número 37 es: Primo

b) 85: 1, 5, 85
El número 85 es: Compuesto

c) 14: 1, 2, 7, 14
El número 14 es: Compuesto

d) 19: 1, 19
El número 19 es: Primo

Figura 1

También se tienen resultados preliminares sobre el trabajo de los alumnos de 9° grado que muestran un desempeño exitoso, particularmente al resolver problemas referentes al apartado "9.3.6. Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera" (SEP, 2011, p. 49). Donde logran una buena lectura de gráficas, de manera que hacen explicaciones utilizando el concepto de pendiente, al revelar como cambia la gráficaen base al comportamiento de la situación que representa.Esta afirmación se evidencia en la figura 2 donde se plantea un problema de lectura de gráficas, ahí dos alumnas muestran sus respuestas que son las esperadas en la relación de la situación 3 con la gráfica a) y en la situación 1 con la gráfica b). En tanto que las relaciones que establecen entre la situación 2 con la gráfica c) y la situación 4 con la gráfica d), no son las esperadas.

Por su parte los argumentos que soportan las respuestas esperadas referidas en el párrafo anterior se muestran en la fig. 3, estos argumentos reflejan una asociación de lo rápido y lo lento con el concepto de pendiente.En la fig. 4 se miran los argumentos sobre las respuestas diferentes a las que se esperaban, en las que también se muestra la asociación antes referida pero no se corresponden con la situación representada.

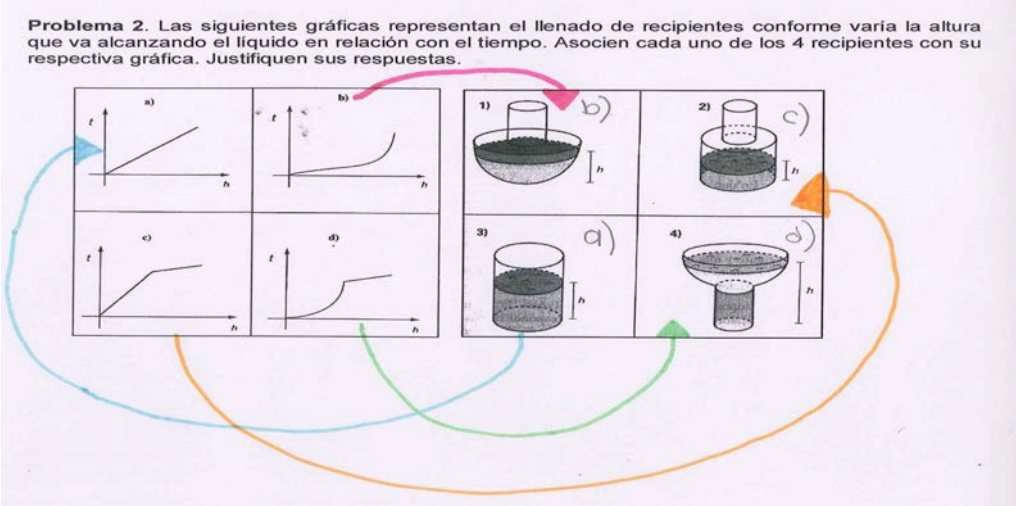
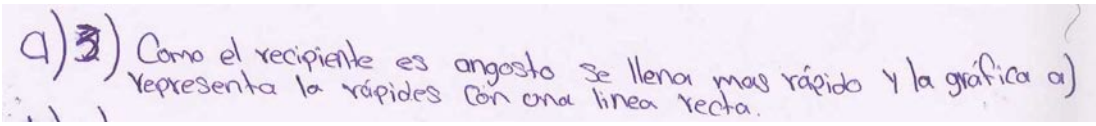


Figura 2


a) 3) Como el recipiente es angosto se llena mas rápido y la gráfica a) representa la rápides con una linea recta.

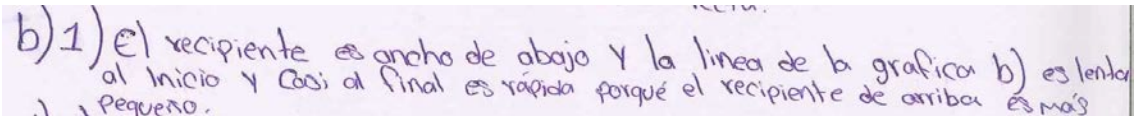
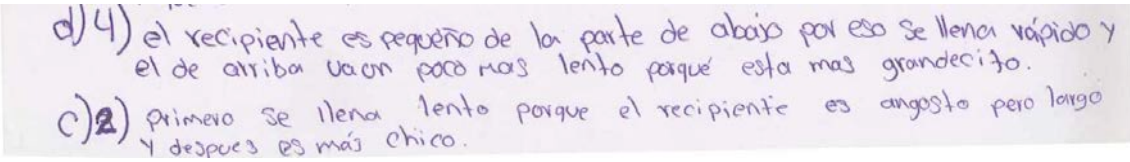

b) 1) El recipiente es ancho de abajo y la linea de la grafica b) es lenta al inicio y casi al final es rápida porqué el recipiente de arriba es más pequeño.

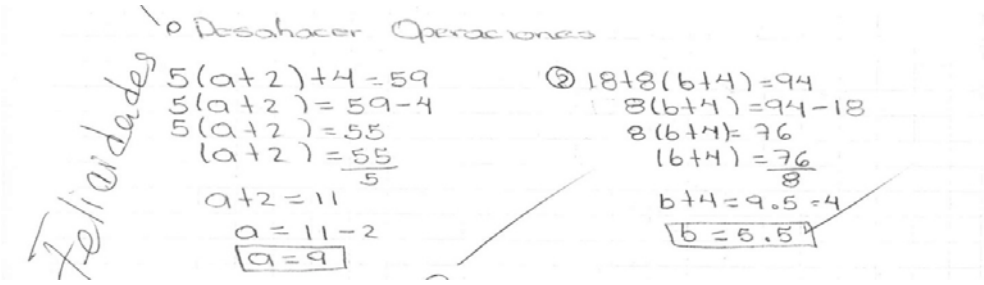
Figura 3


d) 4) el recipiente es pequeño de la parte de abajo por eso se llena rápido y el de arriba va un poco mas lento porqué esta mas grandecito.

c) 2) primero se llena lento porque el recipiente es angosto pero largo y despues es más chico.

Figura 4

Otra evidencia está en las producciones de los alumnos participantes que ahora inician el 9° grado, muestran un desempeño exitoso en el aseguramiento de saberes previos al trabajo con ecuaciones cuadráticas, como se refleja en la fig. 5.


Desahacer Operaciones

Validadas

$5(a+2)+4=59$
$5(a+2)=59-4$
$5(a+2)=55$
$(a+2)=\frac{55}{5}$
$a+2=11$
$a=11-2$
$\boxed{a=9}$

② $18+8(b+4)=94$
$8(b+4)=94-18$
$8(b+4)=76$
$(b+4)=\frac{76}{8}$
$b+4=9.5=4$
$\boxed{b=5.5}$

Figura 5

Reflexiones finales

Consideramos que la conceptualización que hacemos sobre las actitudes hacia el estudio de las matemáticas y la descripción de sus componentes afectivos, cognitivo y conductual, así como su

relevancia en la formación del alumno a fin de que las matemáticas formen parte de su vida, constituyen una base de orientación para su desarrollo.

La participación de los alumnos y profesores en el trabajo de campo confirma el supuesto de que los problemas de contextos auténticos producen actitudes positivas, en tanto que los de contextos artificiales producen actitudes negativas. A la vez sus producciones al resolver tareas y problemas matemáticos, muestran evidencias de que la formación de actitudes positivas hacia el estudio de las matemáticas contribuye al logro de aprendizajes esperados.

Referencias bibliográficas

Alsina, C. (2010). Matemáticas para la ciudadanía. En M. Callejo y J. Goñi (Coords.). *Educación matemática y ciudadanía* (pp. 89-102). Barcelona, España: Graó.

Alsina, C. Fortuny, J. y Pérez, R. (1997). *¿Por qué geometría?. Propuestas didácticas para la ESO*. Madrid, España: Síntesis.

Callejo, M. ;Goñi, J. ; Alsini, C. ; Civil, M. ; Giménez, J. ; Gómez. I. ; Planas, N. y Vanegas, Y. (2010). *Educación matemática y ciudadanía*. Madrid, España: Graó.

Gómez, I. (2002). *Matemática emocional*. Madrid, España: Narcea

Juárez, J. (2010). *Actitudes y rendimiento en matemáticas. El caso de telesecundaria*. D. F, México: Díaz de Santos.

López, E. (2012, 16 de Junio). Corrupción y moral. *LaJornada, Guerrero*, p. 2.

Pantón, G. (1995). *Diccionario enciclopédico Grijalbo*. Bogotá, Colombia: Grijalbo.

Palm, T. (2006). Word problems as simulation of real-world situations.A proposed framework.*For the Learning of Mathematics* 26 (1), 42 – 47.

Polya, G. (1974). *Cómo plantear y resolver problemas*. D.F, México: Trillas.

Rodríguez, C. y Gómez, I. (2013). Factores afectivos e identidad en el aprendizaje de la matemática escolar. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 26, 89-97. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Santanero, J. (2011). *Contextualización de los problemas en los libros de texto de matemáticas para secundaria*. Tesis de licenciatura no publicada, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

Secretaría de Educación Pública. (2006). *Programas de estudio de matemáticas en educación secundaria*. D. F, México: Autor.

Secretaría de Educación Pública. (2011). *Programas de estudio de matemáticas en educación secundaria*. D. F, México: Autor.

Schoenfeld, A.(2006). Method.In F.Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 1-64). New York, USA: MacMillan.

Valero, P. (2006). ¿De carne y hueso?: La vida social y política de la competencia matemática. Recuperado en Dic. Del 2011 de www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-110766_archivo_pdf.pdf.

Velázquez, S. y Nolasco, H. (2009). Rediseño del discurso matemático escolar en la educación secundaria. *Sinergia* 1 (2), 26-31.

LA COMPUESTA DE DOS SIMETRÍAS CON EJES SECANTES, ¿ES UNA ROTACIÓN?: UNA REFLEXIÓN DESDE LA TEORÍA LOS MODOS DE PENSAMIENTO

Károl Lisette Rueda Gómez yMarcela Parraguez González
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso Chile
karol_lisette_matematicas@hotmail.com, marcela.parraguez@ucv.cl

Resumen. La investigación que reportamos, da cuenta de un estudio sobre la comprensión del concepto compuesta de dos simetrías con ejes secantes que se ha instalado sobre docentes en formación, bajo un enfoque cognitivo, donde se utiliza los modos de pensamiento de Anna Sierpinska como marco teórico y, un estudio de casos como diseño metodológico. Este objeto matemático forma parte de los contenidos propuestos en los programas oficiales de Chile, con un marcado énfasis en las técnicas artísticas. Nuestra problemática de investigación se sitúa al abordar este concepto matemático solamente a través de forma práctica y algunos intentos por recurrir a lo analítico. Afirmamos que estas técnicas no son suficientes para lograr una comprensión profunda del concepto, cuando decimos comprensión profunda, estamos pensando que el docente pueda comprender la compuesta de dos simetrías con ejes secantes en los modos: *Sintético Geométrico* (Movimiento rígido en el plano), el *Analítico Aritmético (*Transformación isométrica*) y* el *Analítico Estructural (*Rotación).
Palabras clave: la teoría de los modos de pensamiento, simetría, rotación, composición de funciones
Abstract. | The research we are reporting, gives account to a study on the understanding of the concept composed of two symmetries with intersecting axes that have been taught to teachers in training. The concept focuses on a cognitive approach including Anna Sierpinska's theoretical framework, and case studies on methodological design. The composition of two symmetries with intersecting axes were found immersed within the subjects of isometric transformations, those of which form part of the content in the official Chilean programs with a strong emphasis on technical or artistic practices. Our research is centered around the mathematical concept only through the practical form and some intentions to reoccur analytically. We confirm that these techniques are insufficient to achieve a profound understanding of the concept. When we say profound understanding, we believe teachers can understand the composition of two symmetries with intersecting axes in the following ways: *Synthetic Geometry* (Rigid movement in the plane), *Analytic Arithmetic* (Isometric transformation) and *Analytical Structure* (Rotation).
Key words: the theory of the thought modes, symmetry, rotation, composition of functions

Introducción

El término transformación isométrica o isometría, está asociado a la transformación de una figura (o un cuerpo geométrico) que conserva su forma, dimensiones y ángulos, cuya clasificación se derivada del concepto transformación geométrica, el cual está estrechamente ligado al álgebra lineal. Por alguna razón este hecho ha sido ignorado en los programas de estudio de MINEDUC 1998, asociando el contenido solo a representaciones artísticas, sin profundizar en su trasfondo conceptual y su gran cantidad de aplicaciones. Las isometrías fueron introducidas en los programas de estudio chileno de matemática de 1998 como la unidad Transformaciones Isométricas, ubicada en el nivel de primero medio (MINEDUC, 1998). En ese entonces se planteaba como objetivo que los estudiantes debían caracterizar la traslación, simetría y rotación de figuras en un plano, diseñar composiciones sencillas que incorporan traslaciones, simetrías y rotaciones, y reconocer simetrías, rotaciones y traslaciones en la naturaleza y en obras de arte tales como las de M.C.Escher, lo que claramente asociaba el contenido con la asignatura de Artes Visuales, pero no con otro ámbito de la propia disciplina.

En el actual Marco Curricular chileno (MINEDUC, 2009), en el nivel 1° año medio, dos de los objetivos fundamentales son referentes a este objeto matemático, los cuales indican que los alumnos sean capaces de:

- Identificar regularidades en la realización de transformaciones isométricas en el plano cartesiano, formular y verificar conjeturas respecto de los efectos de la aplicación de estas transformaciones sobre figuras geométricas. (MINEDUC, 2009, p.180). Este objetivo fundamental es además un objetivo fundamental transversal (OFT) el cual indica que la enseñanza de este objeto matemático debe centrarse en: Comprender y valorar la perseverancia, el rigor y el cumplimiento, la flexibilidad y la originalidad (MINEDUC, 2009, p.180).
- Comprender los conceptos y propiedades de la composición de funciones y utilizarlos para resolver problemas relacionados con las transformaciones isométricas (MINEDUC, 2009, p.180).

Estos dos objetivos fundamentales están inmersos en el eje de Geometría y en el eje de Álgebra en los siguientes contenidos mínimos obligatorios:

Geometría:

- Formulación de conjeturas respecto de los efectos de la aplicación de traslaciones, reflexiones y rotaciones sobre figuras geométricas en el plano cartesiano y verificación, en casos particulares, de dichas conjeturas mediante el uso de un procesador geométrico o manualmente.
- Relación del concepto de congruencia de figuras planas con las transformaciones isométricas; formulación y verificación de conjeturas, en casos particulares, acerca de criterios de congruencia en triángulos; y, utilización de estos criterios en la resolución de problemas y en la demostración de propiedades en polígonos.

Álgebra:

- Estudio de la composición de funciones, análisis de sus propiedades y aplicación a las transformaciones isométricas.

Según lo propuesto por el curriculum, en este nivel los estudiantes deben aprender el concepto desde un enfoque visual, algebraico y sistémico donde predomina la geometría sintética, la geometría analítica y el reconocimiento de invariantes que caracteriza a cada transformación isométrica y las composiciones que se establezcan entre ellas

Problemática de investigación y objetivos

El objetivo planteado en el nivel de 1° año medio, esto es, que los alumnos sean capaces de "Comprender los conceptos y propiedades de la composición de funciones y utilizarlos para

resolver problemas relacionados con las transformaciones isométricas" (MINEDUC, 2009, p.180) no ha sido alcanzado según los antecedentes de investigación.

A partir de lo expuesto, surge la siguiente pregunta de investigación. El concepto de composición de de simetrías con ejes secantes que prevalece en los docentes de matemática que imparten la asignatura en estos niveles ¿permite movilizar este objeto matemático, entre sus diferentes definiciones: cómo movimiento rígido, cómo transformación isométrica o cómo Rotación?

Objetivo general de investigación

Ofrecer un conjunto de sugerencias didácticas basadas en nuestra investigación para la enseñanza del concepto compuesta de dos simetrías con ejes secantes.

Objetivos específicos:

1. Indagar en los modos de comprender la compuesta de dos simetrías con ejes secantes que prevalecen en los docentes de matemáticas, y explorar si estos modos permiten movilizar este objeto matemático en sus distintas definiciones.
2. Indagar en los elementos de la matemática que propician el tránsito entre las distintas definiciones de la compuesta de dos simetrías con ejes secantes: cómo movimiento rígido, cómo transformación isométrica y cómo una rotación.

Marco teórico

Los Modos de Pensamiento (Sierpinska, 2000), es una teoría que nace en el seno del álgebra lineal, con la intención de hacer más explícito el pensar teóricamente los conceptos que la componen, proponiendo para ello tres modos de pensamiento, que se pueden reportar desde el desarrollo histórico epistemológico del álgebra lineal y que están presentes en otros conceptos matemáticos hoy en día:

- El modo de pensamiento sintético-geométrico (SG) los objetos son pensados en su forma más intuitiva, por ejemplo cuando se piensa la composición de dos simetrías como un movimientrígido, (figura 1).
- En el modo de pensamiento analítico-aritmético (AA) los objetos matemáticos son pensados a través de relaciones numéricas. Por ejemplo, las figuras son pensadas como un conjunto de pares ordenados (x, y), los ejes de simetría como ecuaciones generales de las rectas $y = mx + b$ y las imágenes simétricas son pares ordenados (x_o, y_o) que cumplen condiciones establecidas, (figura 1).
- En el modo analítico–estructural (AE) los objetos son pensados a través de las propiedades que estos poseen o los axiomas que permiten explicarlos, (figura 1).

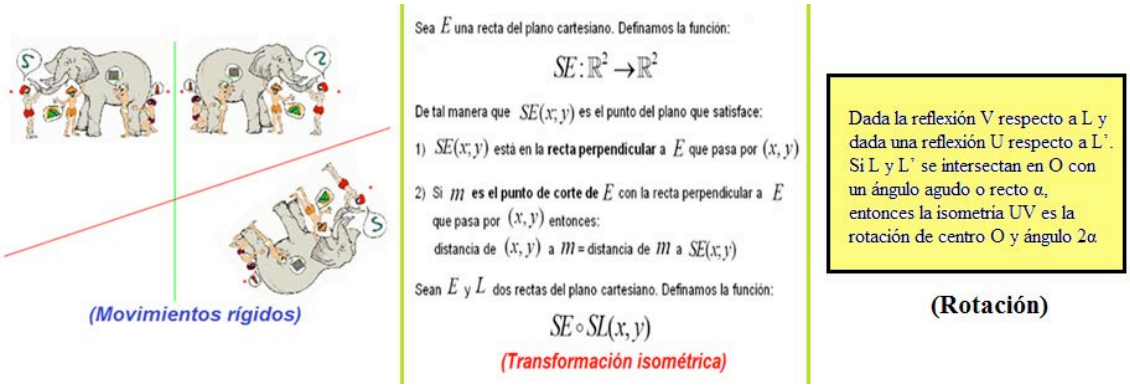


Figura 1. Muestra los tres modos de pensar la compuesta de dos simetrías con ejes secantes.

Cada uno de los modos de pensamiento permite una mirada diferente del objeto matemático, lo cual conduce a distintas comprensiones del mismo; cada uno de ellos no constituyen etapas en el desarrollo del pensamiento algebraico, sino que por el contrario, son igualmente útiles, cada uno en su propio contexto, para propósitos específicos y sobre todo cuando están interactuando.

Metodología de investigación

Se considera un estudio de casos como diseño metodológico (Arnal, Del Rincón y Latorre, 1992).

Caso 1: Un estudio exploratorio realizado a 56 estudiantes de buen rendimiento de la escuela de desarrollo de talentos, Universidad de Chile, facultad de Economía y Negocios. En el presente año (2013) cursan tercer año de enseñanza Media. Este grupo de informantes pertenece a distintos establecimientos de la Región Metropolitana, los cuáles fueron seleccionados por la universidad debido a su excelente rendimiento académico. A ellos se tuvo acceso, ya que uno de los autores que suscribe este documento laboraba como ayudante de geometría para la Escuela de desarrollo de Talentos. Se evidenció la existencia de un obstáculo didáctico en la enseñanza de este objeto matemático, a partir de los resultados obtenidos en la implementación del cuestionario exploratorio.

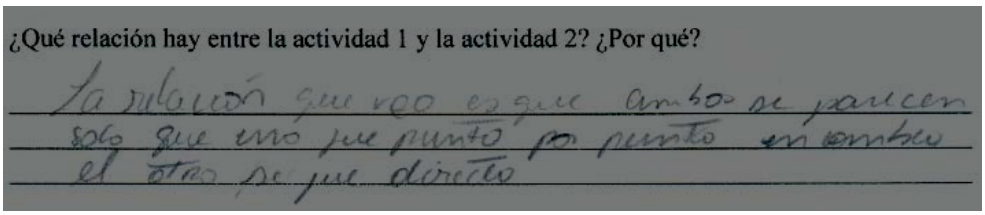
Caso2: Este caso de estudio lo conforman 14 docentes de matemática de Chile, que cursan estudios de Maestría en didáctica de la matemática. Elegimos estos docentes porque consideramos importante evidenciar los modos de comprender la simetría con ejes secantes que predominan en los docentes de matemática, las posibles conexiones que logran establecer entre los distintos modos y los elementos de la matemática que ponen en juego. Además, son los informantes adecuados para establecer si la falta de una comprensión estructural de la compuesta de dos simetrías con ejes secantes en los estudiantes, se debe o no a un obstáculo didáctico.

Resultados de la investigación

Los resultados de investigación se derivan de aplicar cuestionarios a los casos de estudios. A modo de ejemplo presentamos lo acontecido con una pregunta del cuestionario para cada caso de estudio.

El **caso 1** es evidencia empírica que sustenta la problemática de investigación planteada. Es decir, los estudiantes no logran comprender la compuesta de dos simetrías con ejes secantes desde sus propiedades como lo proponen los planes y programas de estudio. Los estudiantes logran realizar la composición de dos simetrías con ejes secantes y la rotación de un punto respecto a otro (actividad 1 y 2 del exploratorio), pero al momento de establecer relaciones entre estos dos conceptos (actividad 3) no logran comprender de forma estructural lo que sucede, es decir, no ponen de manifiesto las propiedades que definen el comportamiento de dos simetrías con ejes secantes y su relación directa con el concepto de rotación. Por ejemplo en la actividad 3 del cuestionario: exploratorio; uno de los 56 estudiantes responde lo que muestra la figura 2.

Actividad 3 ¿Qué relación hay entre la actividad 1 y la actividad 2? ¿Por qué?


¿Qué relación hay entre la actividad 1 y la actividad 2? ¿Por qué?

La relación que veo es que ambos se parecen solo que uno fue punto por punto en ambos el otro fue directo

Figura 2. Respuesta de estudiante 1, actividad 3 del cuestionario exploratorio.

El **caso 2** muestra que en general los docentes de matemática tienen un dominio en cuanto a la comprensión de la compuesta de dos simetrías con ejes secantes desde un SG, es decir, se les facilita determinar gráficamente el simétrico de un punto o una figura a través de la composición de dos simetrías con ejes secantes, sin embargo, en cuanto al modo de pensar AE, los docentes en general muestran grandes dificultades en su comprensión, puesto que al plantearles una actividad en el modo AE, como por ejemplo la actividad 4 del cuestionario aplicado a docentes de matemática, no son capaces de recurrir a las propiedades que definen a la composición de dos simetrías con ejes secantes para resolverla (figura 3).

Actividad 4: Sea *A* un punto y *P* el punto de intersección de dos ejes de simetría. La medida del ángulo formado entre los ejes de simetría es 30° (en sentido horario). Sea B el simétrico de A respecto al primer eje, y sea C el simétrico de B respecto al segundo eje. Teniendo en cuenta que ninguno de los puntos A, B y C están contenidos en los ejes de simetría. Hallar los ejes de simetría y hallar los puntos B y C.

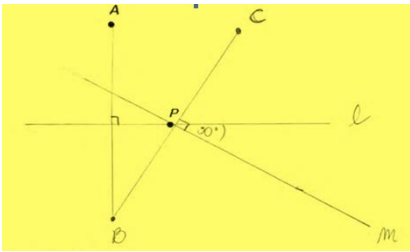


Figura 3. Respuesta informante 19, actividad 4 cuestionario aplicado a docentes de matemática.

En los docentes que desarrollaron el cuestionario, con frecuencia se evidencio el siguiente error: no reconocen los invariantes de la composición en sí (distancia, punto de intersección de los ejes y el ángulo comprendido entre ellos), sino que recurren a los invariantes de la simetría (distancia, punto medio, perpendicularidad), como se muestra en la figura 4.

Figura 4. Respuesta informante 111, actividad 4 cuestionario aplicado a docentes de matemática.

Sugerencias didácticas

A partir de los resultados obtenidos en nuestra investigación, entregamos un conjunto de sugerencias didácticas para el aprendizaje del concepto composición de dos simetrías con ejes secantes.

Iniciar la enseñanza con actividades donde los estudiantes transiten entre los modos SG-AE, para ello recomendamos que el aprendiz inicialmente realice la composición de un punto en el espacio respecto a ejes secantes, ya que, les permite enfocarse en los invariantes que prevalecen respecto al punto de intersección de los ejes, y además, en el orden que se debe respetar al componer funciones.

Posterior a ello, se recomienda diseñar actividades que propicien un modo de pensar la compuesta de dos simetrías con ejes secantes desde el modo AA, tomando inicialmente como ejes de simetría el eje X, el eje Y, la recta Y = X, pero a su vez, potenciar actividades donde los ejes de simetría puedan ser cualquier recta en el plano cartesiano, con el fin de dar otra mirada al objeto matemático y a su vez relacionarlo con diferentes contenidos analíticos, tales como: función, rectas perpendiculares, punto medio, distancia entre dos puntos, punto de intersección, los cuales se ven

reducidos a la **visualización** cuando se trabaja tomando **únicamente** como referencia a los ejes de simetría el eje x y el eje y o la recta $y = x$. Paralelo a ello, es recomendable fomentar la articulación entre los modos AA y SG.

Luego de ello, se sugiere plantear actividades que propicien las conexiones entre los modos SG-AE en el plano cartesiano, con los elementos propios de la geometría analítica. Para ello se recomienda trabajar inicialmente la composición de un par ordenado (x, y) respecto a rectas secantes, por las razones especificadas en el primer párrafo. El objetivo de establecer estas conexiones entre los modos SG-AE y AA es escudriñar otra forma de comprender este objeto matemático y lograr una comprensión profunda con la articulación de los tres modos. Por otra parte, el tratamiento analítico **no** convencional que propone esta investigación sobre el concepto de composición de dos simetrías con ejes secantes permite actividades que propicien el tránsito del modo AE al AA sistematizar este objeto matemático con conceptos tales como: distancia, ángulos, triángulos, circunferencia, relaciones trigonométricas, ecuaciones y sistemas de ecuaciones con dos incógnitas.

Conclusiones teóricas y reflexiones finales

Al inicio de nuestra investigación nos planteamos las siguientes interrogantes, dos interrogantes.

En relación a la primera interrogante, evidenciamos que los docentes comprenden la compuesta de dos simetrías con ejes secantes como un caso particular de simetría, es decir desde las propiedades exclusivamente de la simetría axial, sin tener en cuenta el vínculo que guarda este objeto matemático con el concepto de rotación. Por lo cual, los datos de la investigación dan cuenta de las grande dificultades que presentan los docentes en transitar desde el modo AE al modo SG, así mismo, transitar desde el modo AE al modo AA. Según estos resultados, argumentamos que el concepto de composición de dos simetrías con ejes secantes que prevalece en los docentes de matemática no permite movilizar este objeto matemático entre sus diferentes definiciones, en consecuencia, los docentes no poseen una comprensión profunda de este objeto matemático, por ende los estudiantes tampoco la tienen.

En relación a la segunda interrogante, planteamos que los elementos de la matemática que promueven el tránsito entre los modos de comprender la compuesta de dos simetrías con ejes secantes obedecen principalmente a estructuras, como se explica a continuación: Para transitar de SG a AE, se requiere de la comprensión de la definición de la compuesta de dos simetrías con ejes secantes como una rotación. Desde AE-SG, los conectan los invariantes de distancia y ángulo respecto al punto de intersección de los ejes de simetría. Desde SG - AA partir de los invariantes que se dan entre un punto y su simétrico. Desde AA – SG necesitamos de conceptos vistos de

forma analítica, tales como: ecuación de la recta, rectas perpendiculares, punto de intersección, punto medio, distancia entre dos puntos, y desarrollo algorítmicos de sistemas de ecuaciones. Desde AE - AA requerimos de conceptos como: distancia entre dos puntos en el plano cartesiano, ángulos, triángulos, ecuación de la circunferencia, relaciones trigonométricas, ecuaciones y sistemas de ecuaciones con dos incógnitas.

Referencias bibliográficas

Arnal, J., Del Rincón, D., y Latorre, A. (2003). *Bases metodológicas de la investigación educativa*. Barcelona: Labor.

Ministerio de educación, Unidad de curriculum y evaluación (1998). Matemática. Programa de Estudio Primer Año Medio. Ministerio de educación. Chile.

Ministerio de educación, Unidad de curriculum y evaluación (2009). Matemática. Programa de studio Primer Año Medio. Ministerio de educación. Chile.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. En J.-L.Dorier (ed.), *On the Teaching of Linear Algebra*. Kluwer Academic Publishers, 209-246.

TRATAMIENTO DE LA CONTINGENCIA DESDE EL DESARROLLO DE LA COMPETENCIA DE ARGUMENTACIÓN EN EL AULA DE MATEMÁTICAS

Horacio Solar Bezmalinovic y Jordi Deulofeu
Universidad Católica de la Santísima Concepción — Chile
Universidad Autónoma de Barcelona — España
hsolar@ucsc.cl, jordi.deulofeu@uab.cat

Resumen. En este estudio articulamos la gestión de la competencia de argumentación con el tratamiento de la contingencia. Presentamos un estudio de casos de dos profesoras de primero básico que han planificado una misma actividad de introducir el sobre conteo en los alumnos. Al comparar los dos casos, hay un tratamiento diferente de la contingencia en el aula que se puede explicar desde la importancia que le da cada profesora a la competencia de argumentación. Concluimos el análisis con la idea de que tener como finalidad el desarrollo de una competencia, contribuye el tratamiento de la contingencia.
Palabras clave: competencias matemáticas, argumentación matemática; knowledge quartet, contingencia
Abstract. In this study we address the competence argument management related to thecontingency treatment. We present a case study of two teachers of first grade that have planned one activity to introduce students to counting. By comparing the two cases, there is a different treatment of contingency in the classroom that can be explained through the importance given by each teacher to the argument competence. We conclude the analysis with the idea that having as purpose the development of a competency,supports to the contingency treatment.
Key words: mathematical competence, mathematical argumentation, knowledge quartet, contingency

Introducción

Actualmente una de las problemáticas de mayor relevancia en el área de didáctica de la Matemática es la formación de profesores. (Shulman, 1987) fue uno de los primeros investigadores en abordar esta problemática acuñando la noción de "Conocimiento pedagógico del contenido" (PCK, por sus siglas en inglés).Ball y sus colegas han considerado esta noción como punto de partida para determinar cuál es el conocimiento matemático para la enseñanza, proponiendo el concepto de "conocimiento matemático para la enseñanza" (MKT, por sus siglas en inglés), el cual genera orientaciones para plantear la Formación inicial docente en educación básica para la enseñanza de la matemática (Hill, Ball, & Schilling, 2008).

Continuando con esta línea de investigación, Rowland y sus colegas han propuesto una modelo con algunas similitudes al MKT, para caracterizar los elementos necesarios que requiere un profesor de matemáticas(Rowland, Huckstep, &Thwaites, 2005).Estos autores han propuesto el KnowledgeQuartet (KQ), que se caracteriza por cuatro dimensiones: fundamentos, transformación, conexión y contingencia; identificando los eventos en las clases de matemáticas, con especial referencia a los contenidos que se enseñan, y los conocimientos relacionados con las matemáticas a los que los profesores recurren.

Pensamos que la investigación en didáctica de la matemática en torno a la formación de profesores ha puesto más el acento en la planificación de clases, desarrollando modelos didácticos específicos para el diseño de unidades didácticas;por ello, el gran aporte del KQ es que permite abordar elementos de la gestión de aula en la formación de profesores, lo que no había sido tenido en cuenta en las propuestas anteriormente nombradas.

En base a nuestro interés por abordar la gestión del aula en la formación de profesores de matemáticas, de las cuatro dimensiones del KQ nos interesa indagar en la contingencia, que hace referencia a aquellas situaciones que aparecen en el aula y que no se han planificado.

Por otra parte, a partir de los trabajos que hemos desarrollado en la línea de competencias matemáticas, se ha conformado el grupo de investigación "Competencias Matemáticas" (COMMAT), que contempla tres grandes líneas de investigación: dimensión curricular, desarrollo de competencias en los alumnos, y formación del profesorado (Solar & Ortiz, 2011). En relación a la formación de profesores se ha caracterizado una metodología de trabajo docente de formación de profesores para el desarrollo de competencias matemáticas(Solar, Espinoza, Rojas, Ortiz, González, & Ulloa, 2011;Solar, Rojas, Ortiz, & Ulloa, 2012), tales como la modelización, la resolución de problemas, la representación, la argumentación y la comunicación, competencias que ya fueron señaladas por Niss y colegas en el proyecto curricular KOM, en Dinamarca (Niss & Højgaard, 2011).

En base estos antecedentes, queremos establecer relaciones entre el desarrollo de competencias en el aula y el tratamiento de la contingencia por parte del profesor en el aula de matemáticas. En particular la pregunta que guía esta problemática es ¿de qué manera el desarrollo de competencias en el aula puede facilitar el tratamiento de la contingencia?

Marco teórico

El marco teórico desarrolla los aspectos esenciales para fundamentar el estudio: la noción de contingencia en el KnowledgeQuartet (KQ) y la competencia de argumentación matemática.

La noción de contingencia en el Knowledge Quartet (KQ)

El KnowledgeQuartet (KQ) (Rowland et al., 2005) es una teoría de base empírica que distingue entre diferentes tipos de conocimiento matemático: fundamentos, transformación, conexión y contingencia. Los *fundamentos* se asocian al conocimiento del contenido matemático del profesor y al conocimiento teórico sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Transformación* es la dimensión más similar a la conceptualización de Shulman del conocimiento pedagógico del contenido, es decir, cómo toma un profesor su propio conocimiento de los contenidos y lo transforma en formas que sean accesibles a los alumnos. En esta dimensión se

presta especial atención del profesor al uso de representaciones, ejemplos, explicaciones y analogías. Una tercera dimensión es la *conexión*, que tiene relación con las acciones que un profesor realiza para provocar conexiones entre diferentes objetos matemáticos, y anticipar dificultades y errores típicos en un tema determinado. Dado que no todos los aspectos de la lección pueden ser previstas, la *contingencia* es la dimensión que se centra en las acciones del profesor en momentos imprevistos e inesperados. Dentro de cada una de las cuatro dimensiones existen categorías que identifican aspectos específicos de la enseñanza de las matemáticas a tener en cuenta en la planificación, implementación y evaluación.

En particular, para este estudio se profundiza en la cuarta dimensión de contingencia, que hace referencia a aquellas situaciones que aparecen en el aula y que no se han planificado. Rowland y colaboradores la han caracterizado a partir de cuatro indicadores: responder a las ideas de los alumnos, desviación de la agenda, reflexión del profesor, respuesta a la disponibilidad de una herramienta o recurso. Estas categorías emergentes han sido caracterizadas inicialmente por Rowland et al. (2005), no obstante aún están en proceso de validación y en el transcurso del tiempo han sido modificadas en otros estudios(Rowland, Turner, Thwaites, & Huckstep, 2009; Rowland & Ruthven, 2011). En la web http://www.knowledgequartet.org/ se puede encontrar las actualizaciones a las categorías de cada una de las dimensiones del KQ, evidenciando que aun los indicadores están en proceso de construcción y validación.

Competencia de Argumentación

En general, los análisis de argumentación en el aula se sustentan en el modelo argumentativo propuesto por Toulmin(1958), que sigue un proceso lineal desde los datos hasta las conclusiones. Esta secuencia consta de seis elementos: Datos, Conclusión, Garantía, Respaldo, Calificador modal, Refutadores(Goizueta & Planas, 2013). Para estudiar la argumentación en el aula de matemáticas, Krummheuer, (1995)propone una secuencia de argumentación basado en el modelo argumentativo de Toulmin. Sin embargo, reduce el sistema original a cuatro elementos: datos, garantía, respaldo y conclusión.

Para nuestro análisis interpretamos los componentes del modelo argumentativo de Toulmin como procesos matemáticos. En efecto, nuestro estudio se enfoca en la caracterización de los procesos matemáticos que aparecen en la argumentación, a diferencia del tipo de análisis que realizan Krummheuer y otros autores que han seguido a Toulmin para estudiar la argumentación en el aula de matemáticas, que se centran en la secuencia argumentativa. A diferencia de Krummheuer, se considera como base el modelo argumentativo original de Toulmin, para así poder discutir en nuestra propia investigación qué papel juegan todos los procesos que conforman la estructura argumentativa.

En Solar, Azcárate&Deulofeu (2012) se muestra un estudio realizado en un curso de 8° básico, sobre qué procesos argumentativos de la estructura de Toulmin emergen en la implementación de una unidad didáctica de interpretación de graficas funcionales. Se obtuvo como resultado agregar un procesos denominado"interpretación"a la estructura argumentativa de Toulmin.

Metodología

La metodología utilizada se enmarca en un enfoque cualitativo interpretativo, orientado a describir, interpretar y entender el significado de los fenómenos sociales, intentando darles sentido desde el significado que las propias personas les atribuyen a dichos fenómenos (Merriam, 1998). Esto nos permite entender, desde el discurso y la práctica de los profesores, tanto los procesos de argumentación como los tipos de contingencia que emergen en el aula.

Como diseño metodológico hemos considerado un estudio de casos de dos profesoras de primero básico (Patricia y Victoria) que para planificar sus clases se han apoyado en una unidad didáctica común de números. Para introducir el sobre conteo las dos profesoras han considerado la actividad de la unidad didáctica denominada "echando fichas en una caja", que consiste en echar primero 8 fichas, contando de una en una, en una caja opaca para que los niños no puedan ver en su interior, y luego la profesoraecha otras 5 fichas. El problema consiste en determinar la cantidad de fichas que hay en la caja, sin contarlas. Por medio de una observación no participante, registramos la clase de las dos profesoras en que se gestionó esta actividad.

Análisis de los datos

A continuación se presentan episodios de cada una de casos analizados, Patricia y Victoria, que son analizados desde el punto de vista del tratamiento de la contingencia, y por otro lado, desde el desarrollo de la argumentación.

Caso Patricia

En la clase de Patricia, se echan primero 8 fichas en una caja una a una, el episodio comienza cuandoPatricia comienza en echar las segunda colección de fichas.

Patricia: miren, contemos (la profesora comienza a echar las fichas una a una en la caja)

Alumnos: 1, 2, 3, 4 y 5.

Patricia: Ya pregunta, ¿Yo eche primero cuántas fichas?

Alumnos: ocho

Patricia: Luego eche

Alumnos: cinco

Patricia: ¿hay más fichas de cuando eche 8 fichas? ¿o hay menos?

Alumnos: menos.

Patricia: ¿hay más (énfasis) o menos?

Alumnos: más

Patricia: más ¿cierto?, por qué hay más

Marcela 1: porque hay 13

Patricia: ¿por qué hay más?

Alumnos: porqué hay 13

Patricia: ¿por qué hay 13?

Marcela: porque.. (hace una leve pausa, y otros alumnos comienzan a intervenir

Carlos: porque 8 más 5 son 13

Patricia: ¿por qué 8 más 5 son?

Alumnos: 13

En el episodio se puede aprecia que una vez que Patricia ha echado las 5 fichas restantes, ella pregunta: ¿hay más fichas de cuando eche 8 fichas? ¿o hay menos?Los niños responden que hay menos fichas y ante esta situación, Patricia decide repetir la misma pregunta poniendo especial énfasis en la palabra más, a partir de lo cual los niños modifican su respuesta y dicen que hay más fichas. A continuación una de las niñas (Marcela), responde que hay 13 fichas, y ante la pregunta de Patricia ¿por qué hay 13?, Marcela se queda dubitativa y otro niño (Carlos) responden: porque 8+5 son 13.

Podemos analizar el episodio descrito desde el punto de vista del desarrollo de la argumentación y desde el tratamiento de la contingencia. Ante momentos claves para el desarrollo de la argumentación tales como ¿por qué es 13?, Patricia no da el espacio para que Marcela argumente su respuesta y en consecuencia podemos decir que la argumentación no es promovida por Patricia. Por otra parte, hay dos momentos en los que aparece una situación de contingencia: la primera respuesta del curso, al decir menos fichas en vez de más, y el segundo momento cuando Marcela no es capaz de argumentar su respuesta. En estos dos momentos Patricia no se ha desviado de su agenda y en consecuencia no ha hecho un tratamiento de la contingencia.

Caso Victoria

En la clase de la profesora Victoria se echan primero 8 fichas en una caja opaca y luego se echan 5, y ante la pregunta de cuántas fichas hay en total, Victoria se encuentra con diversas respuestas de sus alumnos. Una vez que escucha varias de ellas, elige a tres niños (Ricardo, Carlos y Arturo) con respuestas diferentes para que pasen a la pizarra en donde se encuentra una cinta numerada.

Victoria ¿Cuántas fichas teníamos al inicio? (le pregunta a Ricardo)

Alumnos: respuesta confusa, algunos dicen 8 y otros dicen 0

Victoria: no, lo que dijo él, el dice que 0. A ver y ¿cuántas agregamos

Ricardo: 5

Victoria: a ver

(Ricardo comienza a contar en la cinta numerada de la pizarra, sitúa el dedo en el número 1 y da cinco saltos, terminando en 6)

Victoria: ya, (se dirige a Carlos) ¿cuántas fichas teníamos en el inicio?

Carlos: 0

Victoria: cero, y ¿cuántas agregamos?

(Carlos comienza a contar , iniciando en 1 y termina en 5)

Victoria: haaa ya., y ud. (señala a Arturo) ¿cuántas fichas teníamos al inicio?

Arturo: 8

Victoria: 8

Arturo: y agregamos 5 (sitúa el dedo en el 8), uno, dos, tres, cuatro cinco. (Cuenta uno a uno hasta llegar a 13)

Victoria: ¿cuánto te dio?

Alumnos: 13

Victoria: ya, ¿qué paso con estos amigos? (señala a Ricardo, Carlos y Arturo) ¿Quien tiene la razón?

Alumnos: Arturo

Victoria: él (señala a Arturo) ¿y por qué la tiene él? A ver ud.

Javier: porque los demás contaron desde el 1 y como no escucharon muy bien contaron hasta el 5 (en la cinta numerada de su mesa, el dedo lo mueve desde el 1 hasta el 5)

Victoria: ha, no escucharon bien (pregunta a Arturo) ¿cuántas laminas habían al inicio?

Patricio: 8

Valentina: (señala a Ricardo) ¿y ud. cuántas me dijo que habían al inicio?

Ricardo: 0

Victoria: 0 ¿y ud. cuántas me dijo que habían al inicio?.

Carlos: 0

Victoria: ¿y qué pasó con ellos entonces?

Alumnos: se confundieron

Valentina: se confundieron ¿Pero ellos se saben los números? Se los saben, pero se confundieron.

En el episodio Ricardo dice que inicialmente hay 0 fechas y se agregan 5 fichas, y ante la pregunta de Victoria de como lo hizo, Ricardo comienza a contar en la cinta numerada de la pizarra, situando el dedo en el número 1 y da cinco saltos, terminando en 6. Victoria no comenta el resultado erróneo y se dirige a Carlos que también considera que al inicio hay 0 fichas y se agregan 5; ante la misma pregunta de Victoria de como lo hizo, Carlos comienza a contar en la cinta numerada, iniciando en 1 y terminando en 5. Victoria tampoco hace comentarios y ahora se dirige a Arturo quien dice que al inicio hay 8 fichas y se agregan 5, y ante la misma pregunta de cómo lo hizo, Arturo sitúa el dedo en el 8 y cuenta uno en uno hasta llegar a cinco, situando el dedo en 13. Victoria ahora pregunta al curso quien tiene la razón, y Javier responde que Arturo, explicando que los otros contaron desde el 1 y como no escucharon muy bien contaron hasta 5.

Desde el punto de vista de la argumentación, vemos que Victoria gestiona que se expliciten diferentes respuestas, con sus respectivos procedimientos, y promueveque otros niños argumenten a propósito de las soluciones erróneas expuestas por sus compañeros. Por otro lado, en un análisis de la contingencia, podemos decir que a Victoria no le preocupa desviarse de la agenda, promueve la participación de sus alumnos y trata los errores de los alumnos, al tiempo que aborda la argumentación sobre ellos. Estos indicadores nos permiten afirmar que Victoria realiza un tratamiento de la contingencia en el aula.

Comparación de los casos

Al comparar los dos casos, podemos señalar que en el aula de Patricia no se aprecia un tratamiento de la contingencia, a diferencia del aula de Victoria. Este hecho lo podemos explicar desde la importancia que le da cada profesora a la competencia de argumentación. Desde nuestro punto de vista, Patricia tiene como propósito desarrollar procedimientos para resolver problemas yle otorga poca importancia a la argumentación; esto tiene como consecuencia que no toma en consideración los errores ni las ideas espontáneas de los niños. En cambio para Victoria sí es relevante que los niños desarrollen la argumentación en el aula, lo que se manifiesta preguntando el resultado a diferentes niños, cuestionando el proceso de resolución y no mostrando autoridad en las respuestas.

Conclusiones

Concluimos el análisis de estos casos con la idea de que tener como finalidad el desarrollo de una competencia, en este caso la argumentación, contribuye el tratamiento de la contingencia, puesto que la profesora considera los indicadores de la contingencia como medios para el desarrollo de la competencia. De este modo, el desvío de la agenda o la gestión de los errores de sus alumnos permiten el desarrollo de la argumentación en los alumnos, ya que dicho desarrollo permite que

se facilite un espacio de interacción en el aula y con ello se promueva el tratamiento de la contingencia, en el sentido que el profesor la tome en consideración y actúe de acuerdo con ella.

El estudio presentando es una primera aproximación a la relación entre el desarrollo de competencias en el aula y el tratamiento de la contingencia. Para un próximo proyecto hemos decidido centrarnos en la competencia de argumentación para establecer relaciones con el tratamiento de la contingencia, mediante una problemática de indagar en los elementos desencadenantes que promueven la argumentación en el aula, y establecer relaciones entre dichos desencadenantes con el tratamiento de la contingencia.

Referencias bibliográficas

Goizueta, M., & Planas, N. (2013). Temas emergentes del análisis de interpretaciones del profesorado sobre argumentación en clase de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias, 31* (1), 61-78.

Hill, H., Ball, D. L., & Schilling, S. (2008). Unpacking "pedagogical content knowledge": Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39* (4), 372-400.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. En P. C. Bauersfeld (Ed.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (págs. 229-269). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Merriam, S. B. (1998). *Qualitative research and case study applications in education.* San Francisco: Jossey-Bass Publishers.

Niss, M., & Højgaard, T. (2011). *Competencies and Mathematical Learning: Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark.* IMFUFA tekst n. 485/2011. Roskilde: Roskilde University.

Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: the knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education* (8), 255-281.

Rowland, T., Turner, F., Thwaites, A., & Huckstep, P. (2009). *Developing primary mathematics teaching.* London: SAGE.

Rowland, T., & Ruthven, K. (2011). *Mathematical Knowledge in Teaching.* London and New York: Springer.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review, 57* (1), 1-22.

Solar, H., Espinoza, L., Rojas, F., Ortiz, A., González, E., & Ulloa, R. (2011). *Propuesta metodológica de trabajo docente para promover competencias matemáticas en el aula, basadas en un Modelo de Competencia Matemática (MCM).* FONIDE 511091. Santiago: Mineduc.

Solar, H. R., & Ortiz, A. (2011). Competencias matemáticas: Una línea de investigación. *XIII CIAEM - Conferencia Interamericana de Educación Matemática.* Recife: CIAEM.

Solar, H., Azcárate, C., & Deulofeu, J. (2012). Competencia de argumentación en la interpretación de gráficas funcionales. *Enseñanza de las Ciencias, 30* (3), 133-154.

Solar, H., Rojas, F., Ortiz, A., & Ulloa, R. (2012). Reflexión docente y competencias matemáticas: un modelo de trabajo con docentes. *RECHIEM: Revista Chilena de Educación Matemática, 6* (1), 257-267.

Toulmin, S. (1958). *The uses of argument.* Cambridge: Cambridge University Press.

DIFICULTADES EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS QUE INVOLUCRAN UN ENFOQUE ALGEBRAICO

Carlos Oropeza Legorreta, José Isaac Sánchez Guerra y Carlos Oropeza Ugalde
Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán-UNAM México
coropeza96@hotmail.com, joejade@hotmail.com, lambo.r.gini@hotmail.com

Resumen. Nuestro estudio pretende dar a conocer las dificultades que los estudiantes enfrentan al resolver problemas de corte algebraico. En este trabajo se reportan algunas experiencias recopiladas en diversos cursos de álgebra para estudiantes de ingeniería, así como de un taller y un diplomado relacionados con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En la selección de los problemas se consideraron las recomendaciones vertidas por Polya (1998). Algunos de los resultados obtenidos ponen de manifiesto, que la carencia en el manejo de conceptos básicos de algebra, provoca en la mayoría de los casos que los estudiantes no logren relacionarlos con nuevos conceptos.
Palabras clave: dificultades, problemas algebraicos, estrategias, solución
Abstract. Our study aims to introduce the difficulties that students face up to solve algebraic problems. In this paper we report some experiences collected in several courses about algebra for undergraduate students, as well as a workshop and a diplomat both related with teaching and learning of mathematics. In the selection of problems we are considerate the recommendations made by Polya (1998). Some of the results obtained show that the lack in handling basic concepts of algebra causes in most cases that students fail to relates them with new concepts.
Key words: difficulties, algebraic problems, strategies, solution

Introducción

En las escuelas de ingeniería en México, es común escuchar la opinión tanto de profesores como de estudiantes que los programas de estudio son extensos y atienden con poco énfasis el proceso de construcción de conceptos, análisis, argumentación y creación de ideas, propiciando con ello una visión reduccionista de dichos programas. Al parecer, existe el común denominador de centrar la atención de los cursos en la solución de ejemplos que en su mayoría incluyen soluciones algorítmicas. Ha sido reconocido también que las dificultades de aprendizaje del álgebra son multifactoriales, por ello consideramos que promover la consolidación de fundamentos académicos sólidos pueden ser una oportunidad de desarrollo para los estudiantes de licenciatura. Por otra parte, varias investigaciones sobre álgebra hechas en el marco del PME se han centrado en la manera como los estudiantes enfocan la resolución de ecuaciones. Los enfoques usados se pueden clasificar en tres tipos: a) intuitivo, b) sustitución por tanteo, y c) formal. Los enfoques de resolución intuitivos incluyen el uso de hechos numéricos, técnicas de recuento y métodos de recubrimiento. En cuanto a los problemas verbales de álgebra (caso que nos ocupa en este trabajo), se emplean con cierta regularidad estrategias informales que no involucran símbolos algebraicos, de modo que en ocasiones se emplean los procedimientos de ensayo y error para encontrar la respuesta. Mayer (1985) considera que los alumnos pueden trasladar el conocimiento de una estrategia informal a la representación numérica de la ecuación algebraica para encontrar la

solución; sin embargo, los procesos de transición resultan difíciles para aquellos (Heffernan y Koedinger, 1997; Mayer, 1982; Nathan, Kintsh y Young, 1992). Toda vez que hemos revisado que los fundamentos algebraicos son necesarios para el desarrollo adecuado de un curso de álgebra en escuelas de ingeniería, nos dimos a la tarea de reflexionar y analizar la manera de cómo poder recobrar evidencias que nos permitan primero fundamentar la necesidad de profundizar nuestro estudio, y segundo poder estructurar diseños de situaciones didácticas que promuevan la solución de problemas desde diversas estrategias, incluida la del uso de tecnología. Nuestro planteamiento inicia con la exploración del tipo de respuestas que los estudiantes hacen al resolver problemas con estructuras verbales y de la caracterización de las dificultades que éstos enfrentan.

Fundamentación

El constructivismo reconoce las aportaciones del conocimiento informal en la construcción del conocimiento matemático. Este conocimiento se considera de manera intuitiva sin un aprendizaje formal; es un resultado de la interacción previa que se forma en contextos no establecidos para el aprendizaje de los principios del álgebra, por lo que el conocimiento informal se debe emplear para desarrollar el conocimiento formal de los aspectos semánticos y sintácticos de álgebra. Por tanto, los alumnos comprenden que los principios de álgebra son resultado del conocimiento humano, y se adquieren en la educación secundaria cuando se comprende la relación entre los conceptos de álgebra, su historia informal y el desarrollo del conocimiento matemático previo a través de la aritmética. Por tanto, la abstracción comienza a construirse cuando el método de un procedimiento se expresa en términos algebraicos a = b. Las literales se convierten en una representación simbólica de una función cuyo conocimiento se construye previamente a través de la acción con materiales concretos que facilitan un procesamiento lógico y abstracto, pero las representaciones individuales suelen ser construidas por el mismo alumno con un sentido peculiar debido a su propia experiencia y competencia de aprendizaje. Así, construye el significado de los problemas de álgebra de acuerdo a su comprensión de las relaciones entre los símbolos que suponen una conexión con materiales o entidades concretas.

Connell (1995) encuentra tres orientaciones en la construcción del pensamiento algebraico. La primera implica que los alumnos comienzan usando herramientas parciales para elaborar una herramienta global. La segunda supone que con el uso de la herramienta parcial los alumnos pueden crear y nombrar variables que sustituyen a los objetos; en ese momento surge el que un objeto o evento se puede presentar en una forma arbitraria señalada por una variable. La tercera considera una relación entre los símbolos adquiridos y la solución del problema. Luego entonces, la habilidad para formar alguna representación del problema genera un pensamiento que integra el conocimiento intuitivo con el conocimiento formal. Cuando esto sucede, se afirma que los

alumnos llegan a adquirir una comprensión adecuada de los principios de álgebra y de las situaciones del problema que se pueden resolver mediante un procesamiento arbitrario de sus dimensiones, aunque las variables sean desconocidas parcialmente.

La descripción algebraica requiere combinar las herramientas y el pensamiento. Ello puede ocurrir en cinco niveles (Kaput, 1995, 2000): *a)* generalización y formalización de patrones de razonamiento aritmético, *b)* manipulación de formalismos guiada por sintaxis, *c)* estructuras abstraídas de cálculos y relaciones, *d)* funciones, relaciones y variación conjunta y *e)* modelado de lenguajes. En este sentido, Koedinger, Alibali y Nathan (1999) argumentan que los alumnos realizan una transición de la aritmética al álgebra mediante la representación. Por ende, las representaciones son importantes en las etapas tempranas del desarrollo algebraico. El fracaso de los alumnos en los problemas numéricos de álgebra revela serias dificultades con su sintaxis y semántica, y los errores que cometen aparecen en la comprensión y manipulación de expresiones algebraicas. En cuanto a los problemas verbales de álgebra, se puede afirmar que los alumnos no solucionan estos problemas convirtiéndolos en ecuaciones para luego solucionar la ecuación; en lugar de esto, emplean más a menudo estrategias informales que no involucran símbolos algebraicos, de modo que en ocasiones emplean los procedimientos de ensayo y error para encontrar la respuesta.

La relación de las representaciones informales ocurre en correspondencia con los problemas de álgebra simples, mientras que las representaciones formales mantienen una relación con los problemas de álgebra complejos. Ello significa que a medida que los problemas se hacen más complejos, las estrategias informales tienen limitaciones.

En seguida se caracterizan las 4 fases que Polya (1998) menciona en la resolución de problemas:

1.- Comprensión del problema. La persona que va a solucionar el problema deberá poder separar las principales partes del problema que son, la incógnita, los datos y la condición. Se debe considerar estas partes atentamente, repetidas veces y bajo diversos ángulos. Si hay alguna figura relacionada al problema, se debe *dibujar* y destacar en ella las incógnitas y los datos. Es necesario dar nombres a dichos elementos y por consiguiente *introducir una notación* adecuada.

2. Concepción de un plan. Se tiene un plan cuando se sabe, al menos a "grosso modo", qué cálculos, qué razonamientos o construcciones se habrán de efectuar para encontrar la incógnita. Lo esencial en la solución de un problema es el concebir la idea de un plan.

3. Ejecución del plan. Para lograrlo, hace falta el concurso de toda una serie de circunstancias: conocimientos ya adquiridos, buenos hábitos de pensamiento, concentración, paciencia, etc. Se debe verificar cada paso del plan concebido y asegurarse de su exactitud.

4. Visión retrospectiva. Reconsiderando la solución de un problema, reexaminando el resultado y el camino que condujo a ella, se podrían consolidar los conocimientos y desarrollar aptitudes para resolver problemas. Es recomendable verificar la solución, especialmente si existe un medio rápido e intuitivo de asegurar la exactitud del resultado o del razonamiento. Al reconsiderar la solución de un problema se presenta la oportunidad de investigar sus relaciones. Polya (1998) menciona también:

> *"Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero en la solución de cada problema, hay un cierto descubrimiento. El problema que se plantea puede ser modesto pero si pone a prueba la curiosidad que induce a poner en juego las facultades inventivas, si se resuelve por propios medios, se puede experimentar en cuanto el descubrimiento y el goce del triunfo… por ello, un profesor de matemáticas tiene una gran oportunidad. Si dedica su tiempo a ejercitar a los alumnos en operaciones rutinarias, matará en ello el interés, impedirá su desarrollo intelectual y acabará desaprovechando su oportunidad. Pero si por el contrario, pone a prueba la curiosidad de sus alumnos planteándoles problemas adecuados a sus conocimientos, y les ayuda a resolverlos por medio de preguntas estimulantes podrá despertarles el gusto por el pensamiento independiente y proporcionarles ciertos recursos para ello".* (p. 218)

Método

La recopilación de la información es producto de tres puestas en escena de los problemas seleccionados. En dos diplomados impartidos para profesores de bachillerato en la UNAM y un taller impartido en el cuarto Congreso Internacional sobre la Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán. En total se trabajó con aproximadamente 50 profesores. Durante su desarrollo se les solicito la solución en forma individual de tres problemas uno a uno. Se les pidió bosquejar su solución a partir de su propuesta esquematizada; posterior a ello, modelar las ecuaciones y finalmente su solución. Después se pidió la conformación de los diferentes equipos de trabajo para que se discutieran de esta forma sus propuestas y, una vez unificadas sus opiniones, exponer los planteamientos al resto del grupo. Al término de la participación de cada uno de los equipos se dio tiempo para efectuar una retroalimentación a manera de conclusión.

A continuación se muestran algunas imágenes, en las cuales se dan evidencias de los desarrollos analizados, los cuales son la base de la exploración que hemos realizado. Los problemas que se plantearon fueron tomados de Perelman (1978) y se muestran las soluciones propuestas a algunos de ellos por uno de los profesores participantes en el taller antes mencionado.

Problema 1. A ambas orillas de un río crecen dos palmeras, la una frente a la otra. La altura de una es de 30 codos, y la de la otra, de 20. La distancia entre sus troncos, 50 codos. En la copa de cada palmera hay un pájaro. De súbito los dos pájaros descubren un pez que aparece en la superficie del agua, entre las dos palmeras. Los pájaros se lanzaron y alcanzaron el pez al mismo tiempo. ¿A qué distancia del tronco de la palmera mayor apareció el pez? Suponer que los dos pájaros vuelan a la misma velocidad.

En la siguiente figura se puede ver la propuesta de solución presentada.

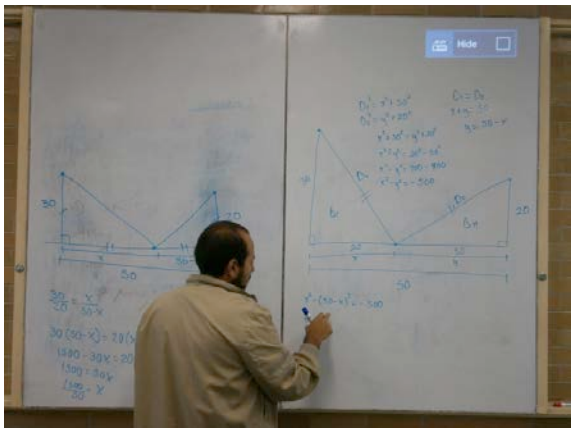


Figura 1. Propuesta de solución al Problema 1.

Se puede apreciar que se comienza con una representación visual del problema, del cual se derivan desarrollos algebraicos con los cuales se llega a la solución.

Problema 2. Un artel de segadores debía segar dos prados, uno tenía el doble de superficie que el otro. Durante medio día trabajó todo el personal del artel en el prado grande; después de la comida, una mitad de la gente quedó en el prado grande; y la otra mitad trabajó en el pequeño. Durante esa tarde fueron terminados los dos tajos, a excepción de un reducido sector del prado pequeño, cuya siega ocupó el día siguiente completo a un solo segador. ¿Con cuántos segadores contaba el artel?

La siguiente figura muestra una propuesta de solución.

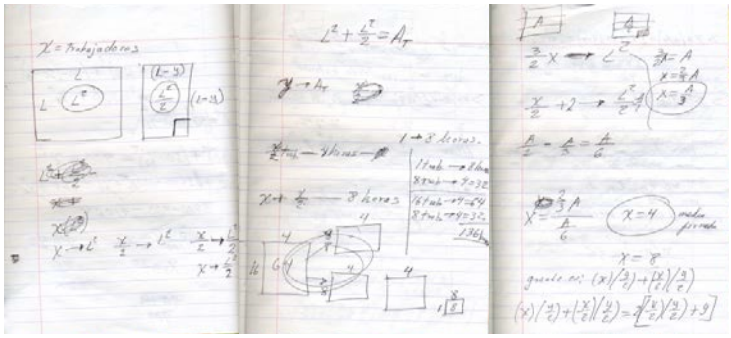


Figura 2. Propuesta de solución al Problema 2.

En este caso se propone más de una representación tanto visual como algebraicamente, viendo el problema desde distintos puntos de vista. Cada representación aporta de manera significativa evidencias para llegar a la solución.

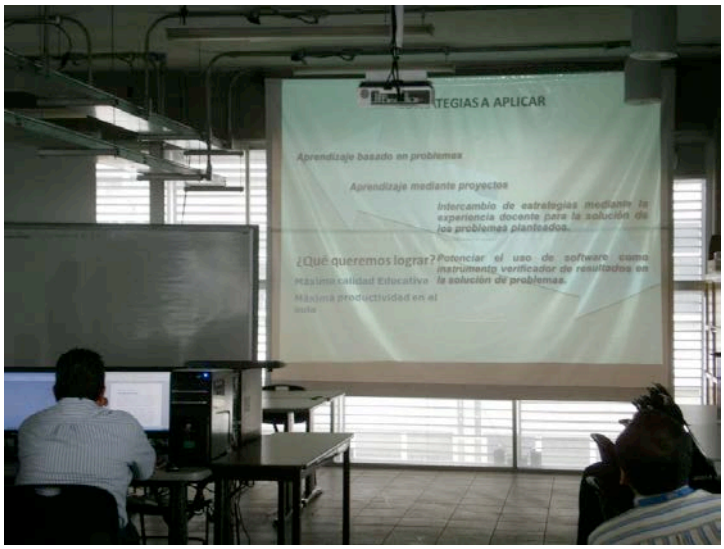


Figura 3. Objetivos y propuesta metodológica implementada por participantes.

En la figura 3 se puede apreciar el planteamiento de solución de manera resumida por un equipo participante en el diplomado impartido para profesores de nivel bachillerato. Es necesario mencionar que la propuesta se estructuró después de haber vivenciado un trabajo en equipo y consensado una solución a los problemas planteados.

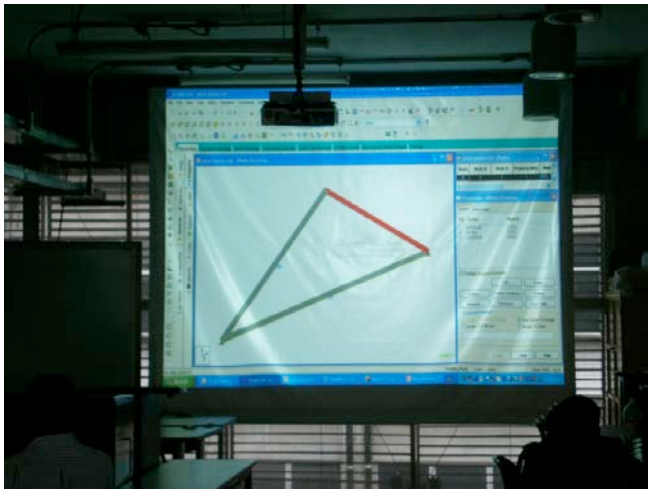


Figura 4. Uso del software como un instrumento verificador de resultados.

Cabe señalar que la puesta en escena de las actividades preparadas para el taller impartido incluye la propuesta del uso de software matemático para la verificación de los resultados (figura 4) obtenidos de manera analítica, por lo que en los comentarios siguientes de algunos profesores participantes en estas actividades se menciona esta situación.

Por otro lado queremos declarar que por motivos de espacio ya no fue posible incluir mayor número de imágenes para continuar con nuestra explicación. También se dejarán abiertas interrogantes con la intención de que los estudiantes reflexionen sobre los tan socorridos métodos mecanicistas. Esto sin dejar de lado lo relevante que resulta hacer un uso adecuado del álgebra.

Hasta el momento continuamos realizando algunas modificaciones en cuanto a las condiciones en que los grupos de trabajo resuelven los problemas: tiempo de resolución, número de integrantes, apoyos a los cuestionamientos que hacen durante la actividad, etc.

Consideraciones finales

Actualmente estamos conscientes que hace falta consolidar y tener mayor precisión en la estructura de nuestro trabajo. Sin embargo, con la participación en esta modalidad estamos seguros de encontrar una serie de recomendaciones que utilizaremos para retroalimentar nuestro trabajo.

Por otra parte se vuelve necesario y sumamente relevante enfatizar en la fortaleza que puede alcanzar un alumno, al potenciar racionalmente sus fundamentos algebraicos.

Las matemáticas implican, por tanto, estructuras y relaciones que deben manifestarse a partir de experiencias concretas. Las tareas del aprendizaje de las matemáticas involucran innumerables componentes que tienen su origen en la jerarquía de la experiencia y en cada una de las etapas del desarrollo psicomotor del pensamiento cuantitativo.

Referencias bibliográficas

Connell, M.L. (1995). *A constructivist use of technology in pre-algebra.* Paper presented at the Seventeenth Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education. Columbus, OH, October 21-24.

Heffernan, N. y Koedinger, K.R. (1997). The composition effect in symbolizing: therole of symbol production vs. text comprehension. En M. G. Shafto y P. Langley (Eds.): *Proceedings of the Nineteenth Annual Conference of the Cognitive Science Society* (pp. 307-312)

Kaput, J. (1995). *A research base suppporting long term algebra reform?* Paper Presented at the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Columbus, OH, October 21-24.

Kaput, J. (2000). *Teaching and learning a new algebra with understanding*. Arlington, VA: National Science Foundation.

Koedinger, K.R., Alibali, M.W. y Nathan, M.J. (1999). *A developmental model of algebra problem solving: trade-offs between grounded and abstract representations*. Paper presented at the Annual Conference for American Educational Research Association. Montreal, May 23-26.

Mayer, R. (1982). Different problem-solving strategies for algebra word and equation problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 8*, 448-462.

Mayer, R. (1985). Mathematical ability. En R. J. Sternberg (Ed.): *Human abilities: An information processing approach* (pp. 127-150). New York: Freeman.

Nathan, M.J., Kinstch, W. y Young, E. (1992). A theory of algebra word problema comprehension and its implications for the design of computer learning environments. *Cognition and Instruction, 9*, 329-389.

Perelman, Y. (1978). *Álgebra recreativa*. Moscú: Ed. Mir.

Polya. G, (1998). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Ed. Trillas.

UN MÉTODO PARA IDENTIFICAR NIÑOS MATEMÁTICAMENTE TALENTOSOS

Zeidy Margarita Barraza García y José Luis Soto Munguía
Universidad de Sonora México
zeidy.barraza@gmail.com, jlsoto@gauss.mat.uson.mx

Resumen. El siguiente trabajo expone los avances de un método propuesto para identificar niños matemáticamente talentosos en base al desarrollo de sus habilidades matemáticas, tales como la generalización y la abstracción. Las bases teóricas y metodológicas del trabajo están fundamentadas en las concepciones del psicólogo ruso V.A. Krutetskii. Nuestro objetivo más general es bosquejar un programa de intervención para dichos niños, el cual formaría parte de un proyecto educativo entre la Secretaría de Educación y Cultura del Estado de Sonora y la Universidad de Sonora.
Palabras clave: talento matemático, habilidades matemáticas
Abstract. The following paper presents the progress of a method proposed to identify "mathematical gifted children" based on the development of mathematical abilities, such as generalization and abstraction. The theoretical and methodological work is founded on the ideas of the Russian psychologist V. A. Krutetskii. Our broader goal is to outline an intervention Program for such children, which form part of a collaborative educational project between the Ministry of Education of the Sonora State Government and our University.
Key words: mathematical gifted children, mathematical abilities

Introducción

En algunos países, sobre todo en aquellos con economías más desarrolladas, la atención tanto a niños con dificultades de aprendizaje como a los que muestran habilidades sobresalientes, ha sido desde las últimas décadas una prioridad para las autoridades educativas; particularmente estos últimos son atendidos con la expectativa de que se conviertan en los futuros cuadros científicos, técnicos o artísticos.

El presente trabajo está enfocado en aquellos niños que muestran un desarrollo sobresaliente de sus habilidades matemáticas y que llamaremos aquí matemáticamente talentosos (MT).

Las razones para interesarnos en este tema son diversas, desde aquellas relacionadas con la equidad y calidad educativa, hasta la importancia que tiene para el país la promoción de las carreras científicas y tecnológicas.

Ante el interés creciente por el tema, algunas instituciones como la UNESCO, han definido su posición sobre la congruencia entre equidad y atención de niños talentosos. Al respecto, Machado (2004) afirma que:

Toda persona tiene derecho a recibir una educación que desarrolle al máximo sus capacidades y le permita su proyecto de vida. Hacer efectivo ese derecho implica asegurar el principio de igualdad de oportunidades, es decir proporcionar a cada uno las ayudas y recursos que requiere, en función de sus características y necesidades individuales (p. 9).

Los organismos responsables de promover el desarrollo de la ciencia en México, han emprendido diversas estrategias para aumentar la cantidad y mejorar la calidad de nuestros científicos, pero dichas estrategias están orientadas principalmente a los estudiantes de licenciatura o posgrado, es decir, estudiantes que ya han decidido dedicarse a la ciencia.

Sin duda, estas estrategias han sido importantes para mejorar las condiciones en las que se están formando los futuros científicos mexicanos, pero no abordan de manera directa el problema del poco crecimiento de la matrícula, en las escuelas de ciencias. En la Universidad de Sonora, por ejemplo, los estudiantes inscritos en la División de Ciencias Exactas y Naturales no llegan al 5% del total y estudian la Licenciatura en Matemáticas apenas 95 estudiantes de una población estudiantil de 25000 (Universidad de Sonora, 2011).

Si bien es cierto, en nuestro pais se han promovido programas con el propósito de atender a niños sobresalientes desde la décadas de los ochentas del siglo pasado, esos programas están dirigidos a promover el desarrollo de niños que han mostrado algún talento sobresaliente en cualquier área científica o artística. Sin embargo, muchos autores, incluyendo a Krutetskii, mencionan que las habilidades altamente desarrolladas por un alumno, dentro del área de las matemáticas, pudieran no estar desarrolladas en otras áreas. Un niño, por ejemplo, que tiene muy desarrollada la habilidad matemática para generalizar podría no generalizar de igual manera en otras áreas del conocimiento (Krutetskii, 1978). Por lo tanto, nos referiremos al concepto conjunto de matemáticamente talentoso y no al talento como tal.

En este trabajo se parte de la convicción de que se requieren estrategias para identificar y atender el talento matemático de alumnos en edades tempranas, para así potencializar sus habilidades matemáticas.

En este orden de ideas, se presentan aquí los primeros resultados sobre un método para identificar a niños MT. El problema de la identificación de niños MT, forma parte de un proyecto más general, que incluye la caracterización y posterior atención de niños MT.

Propósitos

Nuestro propósito principal, en lo que respecta al proyecto completo de investigación, consiste en identificar a niños que muestran características de talento matemático, observando sus habilidades durante los procesos de resolución de problemas. Se espera que los resultados de esta investigación permitan bosquejar un programa de intervención para estos niños, un espacio para potencializar sus habilidades matemáticas y fortalecer aquellas que pudieran presentar un menor desarrollo. Lo anterior es importante, porque el proyecto no se limita a clasificar niños con mayor o menor talento matemático, nuestro fin además de identificarlos, es describir el nivel de

desarrollo de sus habilidades. La idea es utilizar esta descripción para delinear un programa de intervención que permita potencializar sus habilidades y que estas no se pierdan con el paso del tiempo. Tal como mencionan diversos autores, los niños con talento matemático con frecuencia pierden el interés en la materia, a causa del aburrimiento que les produce la resolución de problemas matemáticos resueltos cotidianamente en sus aulas.

El presente artículo está centrado solamente en la descripción del método diseñado para identificar a niños MT, el cual se enmarca dentro del proyecto de investigación mencionado anteriormente.

Referencias teóricas

Al momento de definir o describir al talento como una sola característica, se presentan, diversos y muy variados significados. Sin embargo, en virtud del propósito ya descrito, de nuestra investigación, necesitamos restringir el término talento a otro más específico, aquél que se refiera solo al área de las matemáticas. Por lo tanto, no se profundizará en el significado de talento, sino en el significado conjunto del término talento matemático.

En lo que respecta a las referencias teóricas y metodológicas, nuestro trabajo se basa en las ideas del psicólogo ruso V.A. Krutetskii (1976), él describe a los niños matemáticamente talentosos como aquellos que poseen habilidades altamente desarrolladas, las cuales se pondrán de manifiesto durante el proceso de resolución de problemas matemáticos. La clave para definir el talento matemático, es la conceptualización del término habilidad, que Krutetskii (1976, p. xiii) define como "un rasgo personal que permite a uno realizar una tarea dada rápida y correctamente, en contraste con un hábito o destreza, que es característico de la propia actividad."

Dentro de los resultados de la investigación realizada por este psicólogo, se menciona que el talento matemático es caracterizado por medio de un pensamiento generalizado, acortado y flexible en el ámbito de las relaciones matemáticas, de los números y de las literales usadas simbólicamente.

Nuestro punto de partida en la metodología, es la actividad mostrada durante la resolución de problemas matemáticos, sin embargo, de éstos existe una gran diversidad, desde aquellos basados en el conocimiento, utilizados cotidianamente para la enseñanza de objetos matemáticos en las clases escolares, hasta problemas que requieren de una mayor creatividad y que representan un mayor reto para los niños. Los problemas en los que centraremos nuestra atención son los segundos, a saber, aquellos en los que la falta de conocimientos específicos (por ejemplo, el volumen de un prisma determinado) no representan un impedimento para su resolución, sino

problemas que propicien el uso de las habilidades matemáticas tales como la generalización y la abstracción.

Además, es bien sabido que a pesar de tener un programa de matemáticas generalizado para todas las escuelas del país, los niños no reciben la misma formación, por lo tanto no tendrán el mismo acceso a ciertos conocimientos específicos. A propósito de esto último, Krutetskii señala la necesidad de igualar las condiciones de los estudiantes proponiendo problemas que evoquen estos conocimientos.

Método de identificación

El método propuesto combina la aplicación de cuestionarios escritos con entrevistas semiestructuradas y para su diseño hemos seleccionado primeramente algunas de las habilidades matemáticas estudiadas por Krutetskii, como son la generalización, flexibilidad en el pensamiento, habilidad para acortar el razonamiento, abstracción, traducción de problemas verbales a planteamientos matemáticos y celeridad en el razonamiento. Aunque Krutetskii señala el desarrollo de las primeras tres como reveladoras del talento, hemos incluido también otras, en virtud de las dificultades existentes en la práctica para aislar las que nos interesan en mayor medida.

El método está centrado en las habilidades antes mencionadas y se ha diseñado en las siguientes fases:

Fase 1: Diseño de un cuestionario de identificación y del *baremo* correspondiente.

Fase 2: Prueba piloto del cuestionario.

Fase 3: Diseño de una entrevista a los niños seleccionados con la prueba piloto.

Fase 4: Prueba piloto de la entrevista.

Fase 5: Refinamiento del cuestionario, del *baremo* y de la entrevista.

El objetivo del cuestionario es que los niños pongan en juego sus habilidades matemáticas en la resolución de problemas. En análisis de las respuestas no se reduce a identificar respuestas y procedimientos correctos, se trata además de buscar las ideas "brillantes" y originales registradas por los estudiantes. Con fines de ponderar los procesos de resolución, se elaboró un baremo para cada problema, donde en términos generales se le asignó al estudiante: un punto si entendió el problema, dos puntos si planteó alguna estrategia útil, tres puntos si la respuesta es correcta y un punto extra si el estudiante mostró alguna "idea brillante", con lo que nos referimos a ciertas respuestas que resaltan la creatividad y originalidad del alumno. Aunque la puntuación obtenida por un estudiante, no es determinante para seleccionarlo como talentoso, la aplicación masiva de

los cuestionarios requiere de un primer proceso de selección que permita analizar con detalle solamente los cuestionarios más interesantes.

Cada problema del cuestionario está diseñado con el propósito de identificar el nivel de desarrollo de una habilidad, aunque el proceso de resolución pudiera revelar alguna otra.

A manera de ejemplo, mostramos en la Figura 1 el primer problema del cuestionario, con el que se pretende observar el nivel de desarrollo de la habilidad para generalizar a través de la detección de patrones.

1.- Observa las siguientes figuras. ¿Cuántos cuadrados serán necesarios para construir la figura que ocupa el lugar 15?

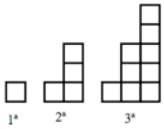


Figura 1

La primera prueba piloto del cuestionario se aplicó a 120 alumnos de 5to y 6to grado (11 y 12 años de edad) de una escuela privada de la localidad, la aplicación tuvo una duración de 30 a 45 minutos y se les pidió a los estudiantes que al resolver los problemas trataran de dejar la mayor evidencia escrita. Las respuestas de los estudiantes fueron utilizadas para afinar la redacción de algunos problemas y para sustituir algunos de ellos, si fuera necesario. En particular, dos de estos problemas fueron sustituidos porque no resultaron apropiados para la identificación de habilidades. El análisis global de las respuestas nos permitió seleccionar dos estudiantes, que obtuvieron 17 puntos de un total de 18, con los que con los que se realizó la prueba piloto de la entrevista.

Cada entrevista está basada en la hoja de respuestas del alumno. Las preguntas se han formulado problema por problema, bajo el siguiente criterio: si la respuesta ha sido correcta, las preguntas se han formulado para profundizar en el conocimiento de las habilidades del estudiante; si el problema se resolvió incorrectamente, entonces las preguntas se centraron en la detección de las dificultades enfrentadas por el alumno, con el propósito de establecer el nivel de desarrollo de las habilidades involucradas. Así entonces, si el problema fue resuelto correctamente, las preguntas se hicieron en las dos etapas siguientes:

Etapa 1: Se le hicieron una serie de preguntas para profundizar acerca de las habilidades utilizadas para resolver el problema y para responder algunas dudas que se tuvieron sobre las estrategias planteadas durante la revisión de su cuestionario.

Etapa 2: Se le propuso un problema más complejo dónde pudiera poner a prueba la habilidad de la generalización y algunas otras habilidades que se especificarán más detalladamente en la descripción, o un problema que mejore la percepción que tenemos de las estudiantes sobre la habilidad o habilidades mostradas en el cuestionario.

Asimismo, si el problema no fue resuelto correctamente entonces las secuencia de preguntas se hizo también en dos etapas:

Etapa 1: Se le planteó una serie de variantes sobre el problema para que el alumno muestre en qué nivel de desarrollo se encuentra su habilidad y a cuál logró llegar con la ayuda del maestro entrevistador. Además, se intenta aquí profundizar en el razonamiento que lo condujo a la respuesta, pretendiendo después que el alumno tome una estrategia adecuada.

Etapa 2: Una vez resuelto correctamente el problema, se planteó un problema semejante para verificar si puede transferir el método de solución al nuevo problema. Aquí por semejante, nos referimos a problemas que pongan en juego habilidades matemáticas similares.

A cada uno de los entrevistados se les instruyó para que "pensaran en voz alta" las explicaciones dadas por escrito, de tal manera que al final pudiéramos obtener en la videograbación la mayor información en imágenes y voz. La entrevista nos permitió distinguir en cada uno de los estudiantes las habilidades más desarrolladas y aquellas que se encuentran en un nivel de desarrollo bajo o medio. Asimismo, se aclararon las dudas que teníamos sobre el proceso de resolución de algunos estudiantes.

Conclusiones

Los resultados obtenidos hasta ahora en la presente investigación son optimistas, por lo menos en lo que se refiere a la expectativa de contar con un método que sistematice la identificación de niños con talento matemático. Las pruebas piloto han mostrado cierta consistencia entre el cuestionario y la entrevista, al menos en el sentido de que la Entrevista ha ratificado que los niños que resultaron mejor evaluados en el cuestionario, poseen habilidades matemáticas altamente desarrolladas. Es necesario refinar el espectro de problemas que podrán presentarse en las siguientes pruebas, los problemas usados no integrarían un cuestionario definitivo, porque no se pretende proponer un cuestionario de identificación único, sino una serie de cuestionarios que puedan ser modificados cada vez que se pretenda una aplicación masiva en nuestra región. Ya que, como mencionamos anteriormente, uno de los propósitos de nuestra investigación, es delinear un programa de intervención para niños talentosos, para el cual es necesaria la identificación de cientos de niños MT, durante cada ciclo escolar.

Referencias bibliográficas

Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren.* Chicago, EEUU: The University of Chicago Press.

Machado, A.L. (2004). Presentación. En M. Benavides, A. Maz, E. Castro, & A. Blanco (Eds.), *La educación de niños con talento en Iberoamérica* (pp. 9-13). Santiago: UNESCO.

Universidad de Sonora (2011), [base de datos]. Hermosillo, Sonora: Dirección de Servicios Escolares. Recuperado el 20 de Junio del 2012 de

http://www.planeacion.uson.mx/sie/alumnos/res_poblacion_his.php

PARADOXO DE ZENÃO: DIFERENTES INTERPRETAÇÕES PARA UMA COMPREENSÃO CONSTRUTIVA

Lúcia Cristina Silveira Monteiro
Universidade Federal de Alagoas Brasil
lucia.csmonteiro@uol.com.br

Resumen. Nesse trabalho será apresentada uma investigação teórico/filosófica acerca de um problema encontrado na história da matemática, conhecido como paradoxo de Zenão. Serão versadas diferentes interpretações desde a mais antiga e outras, incluindo: lógica, poesia, linguagem matemática atual, uma interpretação do ponto de vista físico, e, interpretações inéditas do problema. Para análise e construção das propostas foram utilizadas a noção de complementaridade nas ciências e o conceito de criatividade. Concluímos que problemas desse tipo aparentam ser excelentes ferramentas para compreensão construtiva dos conceitos implícitos e explícitos envolvidos nessas interpretações.
Palabras clave: paradoxo de Zenão, pensamento recursivo, complementaridade, novos problemas
Abstract. In this work we present an investigation theoretical / philosophical about a problem encountered in the history of mathematics, known as Zeno's paradox. Be versed different interpretations since the earliest and others, including: logic, poetry, current mathematical language, an interpretation of the physical point of view and unpublished interpretations of the problem. For analysis and construction tenders were used the notion of complementarity in science and the concept of creativity. We conclude that such problems appear to be excellent tools for constructive understanding of implicit and explicit concepts involved in these interpretations.
Key words: paradox of Zeno, recursive thinking, complementarity, new problems

Introdução

Esse trabalho é um projeto para a construção da tese de Doutorado do programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Bandeirante de São Paulo, sob orientação do professor pesquisador Dr. Michael Friedrich Otte, com foco nas interpretações do paradoxo de Zenão. Nessa investigação identificamos diferentes compreensões desse paradoxo, encontradas na história antiga e recente.

Uma preocupação fundamental na Educação Matemática é com os objetivos a que devem alcançar essa ciência, na formação do indivíduo. A Educação Matemática deve voltar-se para a resolução de problemas? Para compreensão das estruturas de seus objetos? Para compreensão de relações entre objetos e/ou fenômenos? Para percepção de objetos Matemáticos ao nosso redor? Para o desenvolvimento do pensamento científico? Para promover desenvolvimento humano? Para aprender a pensar logicamente? Para o exercício do pensar analítico? Como desvendar essa natureza da Educação Matemática através da Educação Matemática?

Muitos direcionamentos podem ser explorados à busca da compreensão acerca do - a que deve servir a Educação matemática. Todas as questões citadas acima, sob algum aspecto, estão relacionadas aos processos de desenvolvimento da Matemática. Precisamos identificar quais questões não podem deixar de ser consideradas quanto aos direcionamentos para a Educação Matemática.

As perguntas sem respostas, os problemas que incitam diferentes interpretações e que fazem parte das motivações que levaram e levam ao desenvolvimento de novos conhecimentos científicos e que revelam a natureza do pensamento matemático são excluídos da maioria das abordagens no ensino de matemática. Nesse trabalho a partir das interpretações sobre o problema de Zenão, problema fundamental para as reflexões sobre o processo de desenvolvimento da matemática, desde a Grécia antiga, e que continua instigando reflexões, buscaremos compreender como esse tipo de problema pode ajudar a revelar através da Educação Matemática, a natureza do conhecimento matemático.

O paradoxo de Zenão: diferentes interpretações

As primeiras argumentações que conhecemos a respeito da obra de Zenão são, segundo Otte (2003), devido a Aristóteles que as expôs a fim de refutá-las. Com referência ao livro de Aristóteles, o núcleo do paradoxo de Zenão é a ideia de que, para Aquiles recuperar o atraso com a tartaruga, deve primeiro realizar um número infinito de atos. O problema, à descrição da época, aparece apresentado da seguinte forma: suponhamos que Aquiles corre dez vezes mais rápido que a tartaruga e lhe dá cem unidades de medidas à frente antes de iniciar uma corrida. A fim de ganhar, Aquiles deve primeiro compensar o seu espaço inicial, ou seja, a vantagem de cem unidades dada à tartaruga, mas quando ele faz isso e chega ao ponto onde a tartaruga começou, essa, teve tempo para avançar dez unidades. Novamente, enquanto Aquiles corre mais dez unidades, a tartaruga avança uma unidade adiante, depois, Aquiles corre uma unidade e a tartaruga avança um décimo da unidade, e assim por diante, sem fim.

Outra interpretação encontrada na antiguidade para o mesmo paradoxo diz - antes que se cubra o espaço entre dois pontos tem-se que cobrir a metade desse espaço, e antes a metade da metade desse espaço, e assim sucessivamente, criando-se a ideia de que não seria possível sair do ponto. Nesse sentido, o problema de Zenão é colocado como um paradoxo do movimento.

Aristóteles negou a possibilidade do problema de Zenão ser um paradoxo em razão da sua concepção sobre *continuidade ininterrupta do movimento como um todo*. Para Aristóteles, assim como para Platão, matéria e espaço é a mesma coisa, portanto, nem espaço nem o contínuo são considerados como um objeto, e, espaço ou tempo é uma relação. Aristóteles não admitia ser possível analisar o movimento em *pedaços*, de forma discreta, como propõe essas primeiras interpretações do problema.

Mais tarde Galileu interpreta esse movimento em termos de duas séries de intervalos correspondentes nas escalas de tempo e distância, e atualmente, um passo essencial dado pela

Matemática é uma sintetização dessas correspondências que são tratadas como um objeto matemático, no caso, uma fórmula algébrica.

A interpretação matemática atual com maior destaque é através da convergência de uma série geométrica infinita. Esse modelo representa uma *fórmula* para *solucionar* o paradoxo, mas muitos discordam dessa compreensão unilateral, visando unicamente um resultado.

Uma interpretação física do problema dada por Otte (2012), adota um ponto de vista relacional, entendendo que se Aquiles corre dez vezes mais rápido que a tartaruga, embora a tartaruga esteja uma unidade à frente, para as fases seguintes, para cada distância *x (x>0)*, percorrida por Aquiles, a tartaruga avança a $f(x) = 1 + x/10$ unidades.

O movimento da tartaruga em relação a Aquiles nos permite reproduzir o paradoxo em um novo nível por causa de seu duplo caráter. O aspecto contínuo do movimento não contradiz a perspectiva discreta.

Esse movimento pode ser interpretado como uma função linear com ambos os movimentos, de Aquiles e da tartaruga, uniformes: $f(x) = ax + b,$ isto é, quando Aquiles atinge *x*, a tartaruga estará em $f(x)$. O problema: em que ponto Aquiles realmente recupera o atraso com a tartaruga, agora é interpretado como, "qual é o ponto fixo de $f(x)$?" o ponto fixo fora pode ser calculado simplesmente como uma função das constantes *a* e *b*: resolvendo $x = f(x) = ax + b,$ temos, $x = ax + b$. Então, $b/1 - a$. Se considerarmos a $f(x)$ acima, ou seja, $f(x) = 1 + x/10$, temos $a = 1/10$ e $b = 1$. Temos, quando $x = f(x),\ x = 10/9$. Verificando no Geogebra a representação da intersecção das retas $f(x) = x$, e, $f(x) = ax + b$, acontece no ponto (1,11 ; 1,11), em uma aproximação para duas casas decimais, pois sabemos que $\frac{10}{9}$, é uma dízima periódica. Outros autores, em diferentes áreas, apresentam interpretações da ideia fundamental do argumento de Zenão com foco principal no pensamento recursivo, ou seja, a repetição interrupta de um padrão conhecido, inerente a compreensão do problema. Por exemplo, Borges (2008) e Borges (2009), respectivamente nas suas obras *o aleph* e *o livro de areia* apresenta apelo ao pensamento recursivo para expressar suas ideias. Em *o aleph*, Borges se refere a um baú em um porão que contém todo o universo. Nessa exposição, ele faz uma analogia com a correspondência de pontos existentes em um espaço finito com os pontos encontrados em um espaço infinito. O espaço finito é o interior do baú, preenchido de artefatos. Ele menciona o fato de que o universo todo tem pontos correspondentes dentro do baú. No livro de areia, Borges cria a possibilidade da existência de um livro com infinitas páginas idealizando o livro como um sólido composto por infinitos planos. Nas duas situações, Borges atenta para o fato de que a transferência da ideia

matemática para artefatos humanos, degenera para pensamentos considerados incompreensíveis nos estados de lucidez humana, sugerindo que a busca das tais impossibilidades podem levar à devaneios sem lógica.

Ryle (1993), na sua obra *Dilemas,* aponta diferenças existentes nesse raciocínio recursivo, quando é aplicada em diferentes situações, como por exemplo, em um computador, subordinado a um programa que leve a um padrão de repetição, numa corrida como a de Aquiles e a Tartaruga, ou na subdivisão de um bolo com seu volume conhecido.No tratamento dado ao paradoxo no diálogo - *O que a Tartaruga disse para Aquiles*, ao fazer uma análise na perspectiva da lógica pura, Carroll (1895) em sua publicação afirma que mesmo o mais perfeito sistema de axiomas não são suficientes para determinar a verdade de um sistema da lógica. Para esse argumento ele usa a proposição de Euclides, dizendo: (A) coisas que são iguais a mesma coisa são iguais entre si; (B) os dois lados de um triângulo são iguais a uma mesma coisa; (Z) Os dois lados de um triângulo são iguais. Muitos concordam que (Z) segue logicamente de (A) e (B). Carrol questiona sobre a possibilidade de um leitor que ainda não aceitou (A) e (B) como verdade, aceitar uma sequência de proposições como validade. E, em uma tentativa de convencer logicamente esse outro tipo de leitor, Aquiles, nesse diálogo construído por Carroll, diria para a tartaruga: agora eu vou escrever como eu dito: (A) coisas que são iguais a mesma coisa são iguais entre si; (B) os dois lados de um triângulo são iguais a uma mesma coisa; (C) se A e B são verdade Z deve ser verdade. (Z) Os dois lados de um triângulo são iguais. A tartaruga diz: eu posso aceitar A, B e C como verdade e não aceitar Z, posso não? Você pode, Aquiles adimitiu, ainda que o evento seja possível, mas eu posso acrescentar mais uma proposição, (D) se A e B e C são verdade, Z deve ser verdade.

Otte explica que o ponto de partida deste problema é o pressuposto de que toda proposição implica imediatamente em si própria. Se eu digo *p é verdadeiro*, isto significa *p* é verdadeiro. Nada é adicionado à proposição *p* pelas palavras *é verdade*. Nada é adicionado para provar afirmando que a proposição está correta. Caso contrário, entrará em regressão infinita e ficará presa à argumentação de Zenão.

Aqui nesse trabalho buscaremos respaldo na literatura cientifica para propor que a compreensão dos diferentes pontos de vista deve ser considerada, objetivando construir uma abordagem construtiva através da complementaridade das interpretações do problema.

Complementaridade

A noção de complementaridade tem sido usada em Matemática e em outros campos da Ciência, visando reter aspectos essenciais do desenvolvimento cognitivo e epistemológico dos conceitos científicos e matemáticos. Uma atitude complementarista, afirma Otte (2003) é consequência da

impossibilidade de definir a realidade matemática se a considerarmos como sendo independente da atividade do conhecimento em si. "[...] A prática matemática, que tem progressivamente se libertado de esquemas metafísicos e ontológicos desde Cantor e Hilbert, requer uma abordagem complementarista – talvez mais do que qualquer campo de conhecimento a fim de que seja adequadamente compreendida." (OTTE, 2003, p.204)

Ao tentar explicar o conceito de complementaridade, Otte (2003) o resume como sendo a perseguição e explicação de um fenômeno universal ou geral em suas manifestações particulares e aponta que, dessa forma é possível conceber a polaridade entre aritmética e geometria como uma primeira visualização da ideia de complementaridade na Matemática. Em sua explicação, expõe uma distinção entre dualidade e complementaridade destacando o papel da atividade na relação entre sujeito e objeto do conhecimento, dizendo que,

> Quando se deseja progredir da dualidade ou polaridade como ainda ocorre em Kant, para uma genuína complementaridade, pela qual cada um dos elementos polares tanto se diferencia do outro como o abrange, então, é preciso, colocando a atividade como a essência da relação sujeito-objeto, procurar descrever a dinâmica dessa atividade como uma entidade independente, que se diferencia tanto da consciência quanto da realidade objetiva. Esta dinâmica fundamenta-se exatamente na complementaridade entre os meios e os objetos do conhecimento [...] (Otte, 2003, p.224).

Nessa dinâmica entre o sujeito, objeto e atividade destacam-se também aspectos implícitos a essa dinâmica, como a *criação*, pois, "o ser humano, em cada ação efetiva, vê algo real e, em cada percepção de formas, vê algo ilusório. Ambos os aspectos, no entanto, são complementares e ocorrem em cada atividade criativa" (Otte, 1993, p. 234).

Criatividade, problemas e representações

Vygotsky esclarece que atividade de imaginação criativa se completa pela cristalização da imagem em uma forma externa e afirma que a atividade criativa da imaginação depende primariamente de quão rica e variada é a experiência prévia que a pessoa armazenou no seu cérebro. Ele considera que essa atividade é uma função vitalmente necessária.

Otte (1993) afirma que o processo criativo opera na interação entre variação e repetição. Uma teoria sendo uma interpretação de um fenômeno é também um processo de criar uma interpretação da interpretação dada, e assim por diante.

Construção de variações e repetições da ideia de Zenão

Buscando refletir sobre uma ação efetiva e formas que representem o paradoxo de Zenão para construirmos abordagens complementares e buscarmos despertar realidade e imaginação, enveredaremos por uma aventura na construção de problemas usando noções intrínsecas ao paradoxo de Zenão, que envolvam ação e percepção em diferentes contextos, tomando como base o pensamento recursivo à divisão de um objeto matemático sempre reduzido a metade. *Problema 1*: tomemos uma superfície retangular e a dividamos por dois. Teremos uma nova superfície com a metade da área da primeira. Tomemos a nova superfície e novamente a dividamos à metade, e repitamos o processo indefinidamente. Qual a soma dessas áreas divididas à metade? Que noções matemáticas surgem ao interpretarmos cada um dos problemas?

Outra interpretação diante da mesma configuração sugere a abordagem do *Problema 2*: Podemos observar o *problema 1* e perguntarmos: e se juntarmos todos esses pedaços continuamente, e analisarmos, comparando o contorno das duas figuras, ou seja, o contorno ou perímetro, da primeira superfície retangular tomada e o contorno ou perímetro da superfície gerada pela junção dos pedaços da área subdividida, a que conclusão poderíamos chegar?

Problema 3: Considerando esse mesmo problema anterior, o *problema 2*, em que o perímetro tende ao infinito, e colocando-o em um contexto significativo, por exemplo: Se a superfície quadrilátera do *problema 2* fosse uma obra pictórica, construída em pedaços, seria possível percorrer toda parede de uma sala retangular com perímetro conhecido, subdividindo essa obra, sempre em sua metade? Quais seriam as dimensões das menores telas?

Problema 4: Como representar um conjunto de polígonos cujas metades não existem?

Problema 5: Se as subdivisões dos problemas anteriores fossem colocadas em um software de geometria e aritmética, qual seria a *lógica* na construção do problema?

Que diferentes noções matemáticas são necessárias para construção de possíveis respostas para os problemas citados?

Resultados parciais

Ao se pensar em versões repetidas e ao mesmo tempo variadas de um paradoxo percebemos que se admite uma infinidade de interpretações e representações. Também são admitidas explorações dos conceitos envolvidos na elaboração das interpretações que possam alimentar a compreensão construtiva desses signos/objetos. A cada interpretação dada precisamos estimular ações para que os níveis mais elaborados, concretos e abstratos sejam vislumbrados e assim, em alguns momentos atingidos.

Para os propósitos desse trabalho o destaque é a proposta da construção de outras variações do problema, em diferentes níveis, estimulando a reflexão e conduzindo a *ação criativa*. Para Otte (p.47, 1993), "todo ato criativo, portanto, consiste em ver um *A* como um *B*, um martelo como parte de um pêndulo, um movimento como uma função matemática, uma força como um vetor ou justamente a imagem de um cachimbo como um cachimbo".

Ao destacar a importância da complementaridade entre diferentes interpretações em torno de uma mesma ideia, me aproprio de um comentário de Otte, citando Gregory Bateson (1972) e destaca.

> Toda vez que nos orgulhamos de ter encontrado uma nova forma rigorosa de pensamento ou de apresentação, ou toda vez que começamos a enfatizar bastante o "operacionalismo", a lógica simbólica ou qualquer desses irrecusáveis sistemas de direcionamento, perdemos um pouco da capacidade de pensar novos pensamentos. E, naturalmente toda vez que nos armamos contra o rigorismo estéril do pensamento e apresentação formais e deixamos nossos pensamentos correrem livres, perdemos igualmente. No meu ponto de vista, os progressos do pensamento científico nascem da ligação de um pensamento rigoroso com um pensamento livre, e esta combinação é a ferramenta mais valiosa da ciência (Bateson apud Otte, 1993, p.236).

Assim, salientamos a importância da complementaridade entre diferentes interpretações de um problema que admita conexões e diferenciações entre um pensamento rigoroso e um pensamento livre, tendo como finalidade a elaboração de uma compreensão construtiva dos objetos da matemática.

Referências bibliográficas

Bateson, G. (1972). *Steps to an ecology of mind*. New York: Ballantine Books.

Borges, J. L. (2008). *O aleph*. Editora Companhia das Letras. São Paulo. Brasil.

Borges, J. L. (2009). *O livro de areia*. Editora Companhia das Letras. São Paulo. Brasil.

Carroll, L. (1895). *Carroll's paradox*. Recuperado em 05 de setembro de 2007 de http://www.mathacademy.com/pr/prime/articles/carroll/index.asp

Otte, M. (1990). *Arithmetic and geometry*: Some Remarks on the concept of complemetary. In Studies in Philosophy and Education. Netherlands: Kluwer Academic Publishers. n° 10. pp 37-62.

Otte, M. (1993). *O Formal, o social e o subjetivo*. São Paulo - Brasil: Unesp.

Otte, M. Russell B. (2001). *Introduction to mathematical philosophy*. In: Educação

Matemática Pesquisa. São Paulo: EDUC, v.3, PP. 11-55.

Otte, M. (2003). *Complementarity, sets and numbers*. Educational studies in mathematics. Alemanha: Kluwer Academic Publishers. v.53, p. 203-228.

Otte, M. (2012). *A Realidade das Idéias*: uma perspectiva epistemológica para a Educação Matemática. Cuiabá, Brasil: Editora EdUFMT.

Ryle, G. (1993). *Dilemas*. Cap. III. Aquiles e a tartaruga. Trad. Álvaro Cabral. São Paulo, Brasil: Martins fontes.

Russell, B. (1966). *Nosso conhecimento do mundo exterior*: estabelecimento de um campo para estudos sobre o método científico em filosofia. trad. De R. Haddock Lobo. São Paulo, Brasil: Editora Nacional.

Russell, B. (1974). *Introdução à filosofia da matemática*. Tradução Giasone Rebuá. Rio de Janeiro: Zahar Editora.pp. 9-66.

Vygostky, L.S. *et al* (1988). *Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem*. São Paulo. Brasil: Editora ícone.

Vygotsky, L. S. (2000). *A formação social da mente*. São Paulo, Brasil: Editora Martins Fontes.

Wertheimer, M. (1945). *Productive thinking*. New York: Harper.

EL SEMINARIO REPENSAR LAS MATEMATICAS, LA MIRADA DE UN ESTUDIANTE DE BACHILLERATO DEL PIFI

David Alfonso Romero y Liliana Suárez Téllez
Instituto Politécnico Nacional México
darbunk24@gmail.com, lsuarez@ipn.mx

Resumen. El Seminario Repensar las Matemáticas ha podido generar un importante interés en los docentes que siguen sesión a sesión la transmisión en línea, tomando ideas de los investigadores que presentan su trabajo, teniendo una retroalimentación con otros participantes del foro, compartiendo ideas y opiniones, lo cual muestra un avance en este campo (Matemática educativa) en cuanto a las metas previamente propuestas por los organizadores de dicho proyecto, por lo cual, la importancia en la continuidad del proyecto así como la difusión entre instituciones, profesores y alumnos serán el impulso para continuar con el SRM.
Palabras clave: seminario, foros, sesiones, repensar.
Abstract. Rethink the Mathematics' Seminary has generated an important interest in teachers, who follow the online transmission every session, taking searchers' ideas shown in their works, having a feedback with different participants in the forum, sharing ideas and opinions, which shows a step forward in this field (Educative Mathematic) as regards the goals previously suggested by the project organizers, for that reasons the importance in the continuity of the project as well as the diffusion among institutions, teachers and students will be the impulse to continue with the Rethink the Mathematics' Seminary.
Key words: seminary, forum, session, rethink

¿Qué es el Seminario Repensar las Matemáticas?

El Seminario Repensar las Matemáticas (SRM) es parte de un proyecto multidisciplinario del Instituto Politécnico Nacional en México (Torres, J.L. 2011) integrado por 3 repensares más: Repensar la Bioquímica (Luna, *et al*, 2011), Repensar la Cultura Financiera (Navarro y Cruz, 2011) y Repensar la Comunicación.

El caso particular del Repensar las Matemáticas busca alternativas para que los docentes de diversas instituciones de México de nivel Medio Superior y Superior puedan reflexionar acerca de técnicas, diseños de enseñanza y diversas formas de trabajo para sus estudiantes en base a los trabajos de diferentes investigadores, Ramírez, *et al*, 2009, Salinas y Alanís, 2009, Ruiz y Albert, 2006.

Actualmente el SRM cuenta con más de 60 sesiones divididas en 8 ciclos, en los cuales se han mostrado avances en matemática educativa tanto en instituciones de nivel medio superior (NMS) así como en el nivel superior. De esta forma, investigadores de diferentes partes del país muestran estrategias, ya sea sobre la manera de enseñar un tema en el salón de clases, la fiabilidad en el uso de TIC como herramientas para la resolución de problemas en el salón de clases, incluso sobre los estilos de aprendizaje que cada alumno presenta y cómo ayuda (o afecta) a la práctica docente.

Acciones del SRM

Cada sesión que se muestra en el SRM se puede seguir en línea mediante la página web, http://repensarlasmatematicas.wordpress.com/, para cada sesión se cuenta con un foro de discusión en donde participantes del seminario pueden interactuar entre sí junto con el investigador, por lo cual hay una retroalimentación significativa para una mayor comprensión. La difusión en internet es uno de los puntos clave para que el Repensar las Matemáticas sea considerado como una forma clara para que los profesores, no únicamente de México, ya que han participado investigadores de diversos puntos de América Latina, por lo cual podemos tener una visión unificada que muestra algo muy importante, la problemática de cómo enseñar Matemáticas por parte de los profesores es algo presente en diferentes partes del globo, puesto que los alumnos tienen formas diferentes de aprender, por esa razón muchas veces una estrategia didáctica que funcionó en un grupo, no funcionará en otro, pues cada grupo es un mundo, tienen una forma de pensar y actuar, por ello, ¿qué mejor que un investigador calificado que muestre técnicas que traen resultados para que los alumnos absorban, sino todos los datos, la mayoría de ellos?

Así mismo, no únicamente se presentan datos y técnicas que ayudan a los profesores de Matemáticas, sino que ha habido investigaciones que entran en todo tipo de rubros, pues se dan técnicas para que cualquier profesor, de cualquier institución, nacionalidad e independientemente de la materia que imparta, ayudará para mejorar su calidad de enseñanza. Tomando en cuenta esto, hay que remarcar el ímpetu de cada participante que a lo largo de cada ciclo y sesión sigue la transmisión y participa en los foros de discusión, puesto que podemos observar el interés de docente para dar un mejor servicio como profesor y guiar a los alumnos por el camino correcto en la ruta del conocimiento, pues si el alumno ve que el profesor estudia para ser un mejor enseñante, el alumno dará un mayor esfuerzo y estudiará para ser un mejor aprendiz. Así mano a mano, profesor y alumno, dan pauta para que haya un incremento en el nivel de educación, puesto que a los alumnos se les enseña a aprender, pero para ello los profesores deben saber enseñar, por ello tenemos esta herramienta que es el Seminario Repensar las Matemáticas.

Por ello explicar la labor que tiene un alumno participante en el SRM resulta algo relevante, ya que desde sus inicios este proyecto ha estado dirigido a los docentes, principalmente a aquellos que se desempeñan en el área de las matemáticas, así que la interrogante es la función de los alumnos de nivel medio superior involucrados.

¿Quién es un alumno PIFI?

El Instituto Politécnico Nacional, mediante la Secretaría de Investigación y Posgrado (SIP-IPN), les da la oportunidad a los alumnos de la institución a adentrarse como investigadores mediante el Programa Institucional de Formación de Investigadores (PIFI), de manera que los alumnos

seleccionados pueden trabajar junto con alguno de los docentes investigadores del IPN. De esta manera es como han llegado alumnos a participar en las investigaciones y trabajo realizado por los docentes organizadores del SRM.

Esta participación de los alumnos PIFI es diversa, ya que no realizan trabajos como meros espectadores, sino como otros participantes. Esto es, dar lectura de los documentos de referencia que cada sesión tiene, ver el video de ésta y participar en el foro de discusión junto con el resto de participantes del SRM (docentes en la gran mayoría), por lo cual el aprendizaje y noción de las investigaciones realizadas para la mejora en la enseñanza de las matemáticas.

Con esto, como opinión de un alumno PIFI, muestra el gran interés para que las nuevas generaciones aprovechen todas y cada una de las oportunidades que se les brinda a los jóvenes del nuevo milenio, por ello, el observar directamente el trabajo por la mejora en la enseñanza de las matemáticas, ser parte de ello da razón para continuar y esforzarse para que el SRM continúe con el trabajo realizado durante 8 ciclos.

Mirada de un PIFI sobre el SRM

Como alumnos involucrados en el PIFI, cada individuo tiene como objetivo adentrarse, comprender y satisfacer las necesidades que se le exigen debido a la importancia de poder adentrarse en la investigación desde una edad temprana en un país con poco índice de investigadores como lo es México, representa una tarea interesante para poder adentrar a nuevos estudiantes a la rama, no por el simple hecho de incrementar la cantidad de investigadores, sino para poder mostrar los conocimientos, estudios, resultados e investigaciones que se llevan a cabo por parte de grupos de personas enfocados, a manera de estudio directo con el trabajo del SRM, en Matemática Educativa.

Por esa razón, el adentramiento directo en las sesiones del SRM, observar el proceso pre-transmisión (contacto con investigadores, lectura de archivos e referencia, difusión), trabajo realizado durante la sesión y, posteriormente, el trabajo realizado con la capturación de datos, respuesta a los docentes en el foro de discusión, moderación del sitio web y, nuevamente preparar todo para poder mostrar a los docentes interesados en el proyecto las nuevas investigaciones en Matemática Educativa para que puedan tomar ideas directo a su salón de clases.

Finalmente, comprobando la acción del SRM, siendo partícipe directo por parte de un alumno del PIFI, se puede afirmar el entusiasmo e interés (directamente, de otros alumnos involucrados del PIFI) mostrado para ser parte del equipo que lleve (y adentre) a más alumnos al camino de la investigación.

Referencias bibiográficas

Luna, V.H., Suárez, L. y Ortega, P. (2011). Seminario Repensar la Bioquímica: Transferencia de una innovación educativa. *Memorias de Virtual Educa 2011*. 1-17.

Navarro, M. y Cruz, M. (2011). Transferencia de una innovación educativa: Seminario Repensar la Cultura Financiera. *Memorias de Virtual Educa 2011*. 1-17.

Ramírez, D., M. H., González, C., G. Á., & Miranda, V., I., (2009). Detección y análisis de errores conceptuales en estudiantes de física de nivel universitario utilizando el sistema 4MAT. *Latin American Journal of Physics Education*, 3(1), 93- 101. Recuperado de http://www.journal.lapen.org.mx

Ruíz, H., B., & Albert, H., A., (2006), "Un estudio exploratorio sobre las dificultades de los estudiantes con la noción de variable aleatoria", *Proceedings of Seventh International Conference on Teaching Statistics*.

Salinas, P., & Alanís, J., A., "Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa", Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 12(3), 355-382, Noviembre 2009.

Suárez, L. (2013). Protocolo del Proyecto Multidisciplinario. La innovación didáctica en el currículo potencialmente, centrada en la interdisciplinariedad, aplicado para las áreas de matemáticas, física, bioquímica, cultura financiera y comunicación. Registro Secretaria de Investigación y Posgrado No. 1571. Documento de trabajo IPN.

Torres, J.L. (2011) Protocolo del Proyecto Multidisciplinario. Uso de los resultados de la investigación en la docencia: Matemáticas, Comunicación, Bioquímica y Cultura Financiera. Registro Secretaria de Investigación y Posgrado No. 1335. Documento de trabajo IPN.

EJECUCIÓN EN FLUIDEZ VERBAL Y RAZONAMIENTO LÓGICO MATEMÁTICO: UN ACERCAMIENTO A LA RELACIÓN DESEMPEÑO LINGÜÍSTICO RENDIMIENTO MATEMÁTICO

José Gabriel Sánchez-Ruiz, E. Alejandro Escotto-Córdova, Ana Ma. Baltazar-Ramos y Miriam Gpe. Ruiz-Tafoya
FES Zaragoza-Universidad Nacional Autónoma de México México
josegsr@unam.mx; aescotto@unam.mx; juveka_mx@yahoo.com.mx

Resumen. Se estudió el papel de la fluidez verbal (FV), como uno de los componentes del lenguaje, sobre el razonamiento lógico matemático, el cual hemos observado es un adecuado indicador del rendimiento escolar en matemáticas. Se trabajó con FV porque una alteración en ella confirma un trastorno del lenguaje. De una muestra inicial de 295 estudiantes universitarios seleccionados mediante un muestreo por conglomerados se escogieron a 67. Se aplicó una prueba neuropsicológica de FV y un test de razonamiento lógico. Se encontraron mayores competencias lingüísticas en alumnos con más alto rendimiento en matemáticas-estadística. Se analizan sus implicaciones para la enseñanza-aprendizaje de la estadística.
Palabras clave: razonamiento lógico-matemático, fluidez verbal
Abstract. We studied the role of verbal fluency (for short in spanish FV), as one of the components of language, on mathematical logical reasoning. The FV can be an adequate indicator of student achievement in mathematics. We chose worked with FV because an alteration it confirms a language disorder. From an initial sample of 295 college students selected by cluster sampling were chosen to 67. A neuropsychological test FV was applied and the logical reasoning test. We found higher linguistic skills in students with higher achievement in mathematics-statistics. It discusses their implications for the teaching and learning of statistics.
Key words: reasoning logical-mathematical, verbal fluency

Introducción

Es indiscutible que las matemáticas son necesarias en todos los ámbitos de la vida. En tal sentido, autores entre otros como Gil, Blanco y Guerrero (2006) consideran que las matemáticas son una parte esencial de la formación básica que han de compartir todos los miembros de la sociedad contemporánea. De hecho personajes de la historia de la ciencia han subrayado la importancia de esta disciplina, en particular, como Galileo quien mencionaba que la matemática es el lenguaje en el que estaría escrito el libro de la naturaleza, en particular al decir que el Universo está formulado en el lenguaje de las matemáticas y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es humanamente imposible entender una sola de sus palabras y que sin ese lenguaje navegamos en un oscuro laberinto (Arana, 2000). A pesar de las implicaciones de las planeamientos anteriores existe un alto índice de fracaso escolar en dicha disciplina en nuestro país tal como lo evidencian diversas evaluaciones tanto a nivel nacional como internacional, entre otras: La Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares (ENLACE); el Segundo y Tercer Estudio Regional Comparativo y Explicativo, el segundo aplicado en el 2006 y el tercer estudio en el año actual; y el Programme for International Student Assessment PISA, aplicado durante varios años, promovido por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico. Aunque cabe mencionar que en otros países se vive una situación parecida en el

aprendizaje de las matemáticas, por ejemplo, en España donde en sus evaluaciones nacionales el rendimiento es peor cada vez más (Jimeno, 2002).

Diversos factores parecen influir en el rendimiento escolar: variables socioeconómicas o distales (como la escolaridad de los padres del estudiante) y variables personales (como las actitudes y la motivación al estudio del alumno). Si bien existen estudios que exploran el papel de algunos componentes del lenguaje y el razonamiento sobre el rendimiento académico destaca que no abordan específicamente el rendimiento en matemáticas y que los participantes han sido estudiantes de educación primaria (Mejía y Escobar, 2012).

Shum, Conde, Díaz, Martínez y Molina (1990) al estudiar la relación entre lenguaje y, como uno de sus componentes, la fluidez verbal (FV) con el rendimiento académico, sugieren que el éxito escolar está determinado por factores intelectuales destacando que entre ellos el lenguaje desempeña un papel esencial en el aprendizaje escolar. El trabajo de Arán-Filippetti (2011) apoya dichos resultados.

Allegri, Mangone y Fernández-Villavicencio (1997) definen la fluencia verbal como la capacidad para producir un habla espontáneamente fluida, sin excesivas pausas, ni fallas en la búsqueda de palabras. El concepto de FV está asociado a la concepción de inteligencia, como en la perspectiva multifactorial propuesta por Thurstone en la que se identifican siete aptitudes primarias que conforman esta, entre otras: la comprensión verbal, la fluidez verbal y la velocidad perceptiva. Pero también se concibe ligada a otras capacidades, como a la creatividad. La FV es una tarea de producción lingüística que requiere la activación de una serie de mecanismos de acceso al léxico. De hecho una alteración de la FV confirma una alteración en el componente de fluidez del lenguaje (Ribeiro, De Mendonca y Guerreiro, 2006). La FV involucra varias capacidades cognitivas como la atención focalizada y sostenida, la velocidad de procesamiento de información, la inhibición de respuestas y la memoria de trabajo. Desde la perspectiva neuropsicológica es importante porque representa un referente importante para examinar las funciones ejecutivas (FE) que consisten en un conjunto de habilidades cognitivas de orden superior, reguladas por los lóbulos frontales del cerebro, mediante las cuales un individuo consigue un objetivo. La noción de FE permite explicar alteraciones cuya base no es de naturaleza estrictamente psicológica ni ambiental sino que podría radicar en el cerebro. Los tipos de FV más referidos son la FV semántica (nombrar palabras que pertenezcan a una categoría determinada) y la FV fonológica (generar palabras que comiencen con una letra determinada), ambas imponen una demanda a los procesos ejecutivos. La FV se operacionaliza mediante el número de palabras producidas dentro de una determinada categoría que se puede evocar en un tiempo limitado.

El objetivo de este trabajo consistió en explorar, en la categoría de variables personales, el papel de la fluidez verbal (FV), como uno de los componentes del lenguaje, sobre el razonamiento lógico matemático, el cual en otros estudios encontramos que es un adecuado indicador del rendimiento escolar en matemáticas por la fuerte correlación que tienen. Se trabajó con FV porque una alteración en ella confirma un trastorno en el componente de fluidez del lenguaje (Ribeiro et al., 2006) aparte de un posible deterioro cognitivo.

La principal justificación del trabajo se encuentra en planteamientos como los siguientes: los individuos con trastornos específicos de aprendizaje exhiben alteraciones en uno o más de los procesos psicológicos básicos involucrados en la comprensión o la utilización de los lenguajes hablado o escrito. Estos se manifiestan en trastornos de la atención, el pensamiento, el habla, la lectura, la escritura, el deletreo o la aritmética.

Asimismo, el reconocimiento en distintos trabajos del lenguaje como un tema particularmente importante en la enseñanza y el aprendizaje de la estadística y que el lenguaje constituye usualmente el principal medio para comunicar las ideas estadísticas, por el cual los estudiantes construyen su conocimiento y el medio para procesar ideas (Rangecroft, 2002; Rumsey, 2009; entre otros).

Método

Sujetos: De un grupo de 295 estudiantes universitarios seleccionados mediante un muestreo por conglomerados se escogieron a 67 alumnos. Se aplicaron algunos criterios de exclusión, principalmente para evitar que participaran estudiantes repetidores del curso de la asignatura de estadística y que padecieran algún problema neurológico.

Instrumentos: 1) Para caracterizar el desempeño en FV se aplicó una subprueba de la BANFE (Flores, Ostrosky y Lozano, 2012) que es una batería neuropsicológica compuesta por un conjunto de 15 pruebas neuropsicológicas para evaluar ampliamente y con precisión alteraciones de tres zonas de la corteza cerebral responsables de capacidades cognitivas superiores: atención y memoria, entre otras. En la BANFE la FV considera la capacidad de generar verbos en un tiempo límite; y 2) El Test de Razonamiento Lógico (TRL, Acevedo y Oliva, 1995) es una prueba de razonamiento formal de lápiz y papel de 10 ítems extensos de opción múltiple. El TRL evalúa los esquemas operatorios de proporcionalidad, control de variables, probabilidad, correlación y combinatoria, con dos ítems por cada esquema.

Procedimiento: A todos los sujetos se les aplicaron la subprueba de FV de la BANFE y el TRL. Se les proporcionó el tiempo necesario para que las respondieran, en especial la BANFE cuya aplicación es forzosamente individual.

En la prueba de fluidez verbal las instrucciones dadas fueron: *Ahora, mencionarás la mayor cantidad de verbos (o acciones) que puedas en un minuto, los debes decir en infinitivo (se pueden dar ejemplos como jugar o correr), comienza*". Se cuantifica el tiempo indicado para realizar dicha tarea. Esta prueba permite evaluar varios indicadores de la FV: Aciertos (total de verbos correctamente mencionados, sin incluir intrusiones ni perseveraciones), Intrusiones (palabras que no sean verbos, tales como sustantivos, pronombres, adverbios, etc.) y Perseveraciones (la cual consiste en mencionar dos o más veces un mismo verbo).

Resultados

Se analizaron los datos obtenidos en las pruebas aplicadas. En el TRL los estudiantes de alto rendimiento tuvieron un desempeño mejor en comparación a los de bajo rendimiento (Tabla 1).

Tabla 1.- Estadísticos de la prueba de razonamiento lógico matemático distribuyendo a los sujetos por su rendimiento

Tipo de rendimiento en razonamiento lógico-matemático	Media	Desviación típica
Bajo rendimiento	7.45	1.85
Alto rendimiento	9.40	2.28

Se encontraron diferencias significativas entre las medias en TRL de los sujetos de ambos grupos de rendimiento (t = -3.66, gl= 60, p < .001). Se calificaron los aciertos, las perseveraciones y la ejecución total en la prueba de FV, siguiendo los criterios indicados en la BANFE para calcular las puntuaciones y las categoría de diagnóstico obtenidas según la ejecución en FV de cada sujeto. Se calcularon distribuciones de frecuencia de los sujetos en las categorías de diagnóstico de acuerdo a sus calificaciones en la prueba de razonamiento, la cual representa una estimación útil del rendimiento en matemáticas de los estudiantes. La Figura 1 muestra la distribución por grupo de rendimiento en las diferentes categorías de diagnóstico. Es pertinente mencionar que estas categorías solo refieren niveles de déficit en fluidez verbal, aunque sugieren la necesidad de valoraciones neuropsicológicas más especializadas para diagnosticar algún problema de naturaleza orgánica.

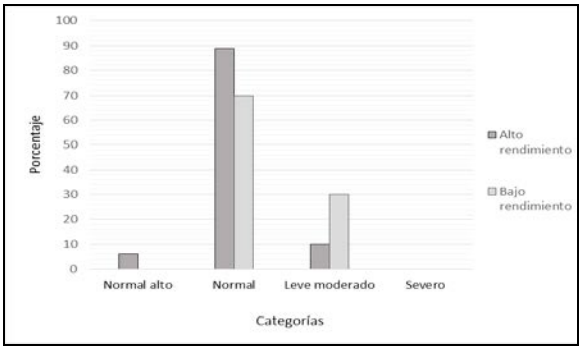


Figura 1- Distribución porcentual en las categorías de diagnóstico de Fluidez Verbal por tipo de rendimiento en RLM.

Conclusiones

La importancia de este tipo de trabajos radica en indagar en otro tipo de factores alternativos a los referidos tradicionalmente como los influyentes en el rendimiento matemático a nivel escolar, entre ellos, la atención, la inteligencia, entre otras.

Los resultados en general muestran mayores competencias lingüísticas en alumnos con más alto rendimiento en matemáticas, con base en su desempeño en el TRL. Aunque en perseveraciones ocurre lo mismo destaca que, aunque en un porcentaje mínimo, hubo alumnos de AR en la categoría de déficit severo. Al analizar las posibles implicaciones de abordar estas temáticas, y de los resultados obtenidos en este trabajo, para la enseñanza-aprendizaje de la estadística se considera inicialmente que la principal es que podría promoverse un mejor rendimiento al identificar y modificar el influjo de ciertas variables sobre el aprendizaje de los alumnos.

Se ha encontrado que la alteración de la fluidez verbal confirma una alteración en el componente de fluidez del lenguaje y una alteración en el componente de comprensión auditiva (Ribeiro, De Mendonca y Guerreiro, 2006), así como en el componente de denominación por confrontación visual, y es asimismo indicativa de alteración de las funciones ejecutivas, dada la relación existente entre la fluidez verbal y el funcionamiento del lóbulo frontal. Esta idea, que la tarea constituye un buen indicador de disfunción ejecutiva, ha sido documentada por varios autores, entre ellos Henry y Crawford (2004).

* Trabajo financiado por la DGAPA-PAPIME, UNAM (Proyecto No. PE302111).

Referencias bibiográficas

Acevedo, D. J. A., y Oliva, M. J. Ma. (1995). Validación y aplicaciones de un test de razonamiento lógico. *Revista de Psicología General y Aplicada. 48*, 3, 339-351.

Allegri, R., Mangone, C. y Fernández-Villavicencio, A. (1997). Spanish Boston Naming Test Norms. *Clinical Neuropsychology. 11*, 416-20.

Arana, J. (2000). ¿Es la naturaleza un libro escrito en caracteres matemáticos? *Anuario Filosófico. 33*, 43-66.

Arán-Filippetti, V. (2011). Fluidez verbal según tipo de tarea, intervalo de tiempo y estrato socioeconómico en niños escolarizados. *Anales de Psicología*, *27* (3), 816-826.

Flores, J. C., Ostrosky-Shejet, F. y Lozano, A. (2012). *BANFE. Batería de funciones frontales y ejecutivas.* México: Manual Moderno.

Gil, N., Blanco, L., y Guerrero, E. (2006). El dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas. *Revista electrónica de Investigación Psicoeducativa, 8*, 47-72.

Jimeno, P. M. (2002). *Al otro lado de las fronteras de las matemáticas escolares. Problemas y dificultades en el aprendizaje matemático de los niños y niñas de tercer ciclo de Primaria.* Tesis de doctorado, Facultad de ciencias de la educación, Universidad de Málaga (España).

Henry, J. D., y Crawford, J. R. (2004). A Meta-Analytic review of verbal fluency performance following focal cortical lesions. *Neuropsychology, 18* (2), 284-295.

Mejía, Q. E., y Escobar, M. H. (2012). Caracterización de procesos cognitivos de memoria, lenguaje y pensamiento, en estudiantes con bajo y alto rendimiento académico. *Diversitas: Perspectivas en Psicología, 8*, 1, 123-138.

Rangecroft, M. (2002).The language of statistics. *Teaching Statistics, 24* (2), 34–37.

Ribeiro, F., De Mendonca, A. y Guerreiro, M. (2006). Mild cognitive impairment: deficits in cognitive domains other than memory. *Dementia and Geriatric Cognitive Disorders. 21*, 284–290.

Rumsey, D. J. (2009).Watching our language when we teach statistics. *Journal of Statistics Education, 17* (1). Recuperado de http://www.amstat.org/publications /jse/v17n1/rumsey. html

Shum, G., Conde, A., Díaz, C., Martínez, F., y Molina, L. (1990). Lenguaje y rendimiento escolar: un estudio predictivo. *Comunicación, lenguaje y educación. 5,* 69-79.

DEL RECONOCIMIENTO DE PATRONES A LA GENERALIZACIÓN

Noelia Londoño Millán, Alibeit Kakes Cruz y Ana Lilia Álamo Acevedo
Universidad Autónoma de Coahuila México
noelialondono@uadec.edu.mx, alibeitkakes@uadec.edu.mx, lili.alamo@hotmail.com

Resumen. En este artículo se dan a conocer una serie de dificultades algebraicas que presentan los estudiantes de nivel medio superior cuando se enfrentan a situaciones de identificación de patrones, así como para construir expresiones algebraicas que representen un proceso de generalización. En el estudio participaron alumnos de diferentes semestres de bachillerato tecnológico, quienes ya habían aprobado el primer curso de algebra elemental, el cual habían recibido durante el primer semestre de su plan de estudios. Los resultados ponen de manifiesto en alto porcentaje, la idea que tienen los alumnos de siempre representar lo que debería ser una expresión general como una expresión particular. Por otro lado es persistente la incoherencia existente entre un patrón hallado y su respectiva expresión simbólica.
Palabras clave: variable, interpretación, hallar patrones, generalización
Abstract. This paper discloses a series of algebraic problems, presented by high school level students, when faced with situations of identifying patterns, also to build algebraic expressions that represent a generalization process. The study involved students from different semesters of technical high school, who had approved the course of elementary algebra during the first semester. The results show a high percentage; the idea that students have always represented what should be general expression as a particular expression. On the other hand is persistent inconsistency between a pattern found and their respective symbolic expression.
Key words: variable, interpretation, find patterns, generalization

Introducción

Son varias las investigaciones que se han realizado en torno al concepto, interpretaciones y usos de las variables (Álamo 2012, Ursini, Trigueros y otros 2005, Kieran 1983, Kücheman 1978, entre otros) y cada una de ellas coincide en la presencia de dificultades y diferentes interpretaciones que los alumnos otorgan a las letras.

Se considera que durante su paso por la escuela cada alumno debería estar en condiciones de identificar las variables que intervienen en cierto problema, identificar los cambios que se manifiestan en las variables (patrones) y las relaciones entre las variables, y poder representarlas mediante expresiones algebraicas, que correspondan a la situación planteada y no ver el álgebra como una fusión de números y letras que se operan siguiendo un conjunto de leyes incomprensibles. Se espera que al algebra que se estudia proporcione herramientas que le permitan identificar reglas de procesamiento, esto se logrará empezando por relaciones funcionales sencillas como funciones en un estado preliminar como son las lineales y cuadráticas (NCTM 2000).

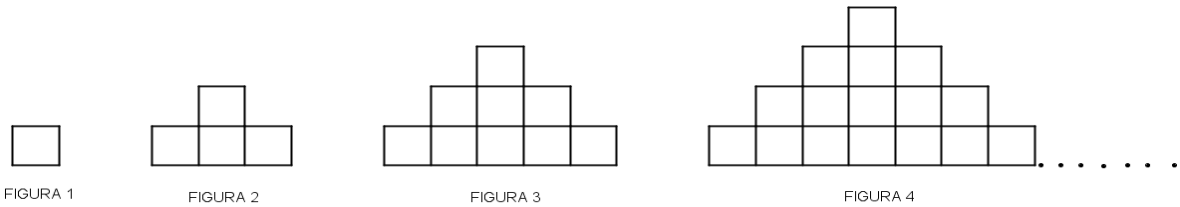
El marco teórico utilizado en la investigación corresponde a la interpretación de la letra, que de acuerdo a Kücheman (1978) se trata de: letras ignoradas, letras como objetos, letras evaluadas, letras como incógnitas específicas, letras como números generalizados y letras como variables. En este estudio se ha centrado la atención en las letras como números generalizados, en el cual se

entiende la letra no como un número particular sino como un conjunto de números, representados en ella. Se esperaba que siendo alumnos del nivel medio superior, habiendo cursado y aprobado los cursos de algebra de la secundaria y el curso de algebra en el bachillerato tuvieran elementos que les permitiera, sino a todos, por lo menos a la mayoría, encontrar las expresiones algebraicas plantadas en cada problema.

Aspecto metodológico

Sobre las personas: Esta investigación se llevó a cabo en el centro de estudios técnicos industrial y de servicios (Cetis No. 48) de la ciudad de Saltillo, Coahuila, México. Esta institución se ubica en la colonia Valle de las Flores y ofrece el bachillerato técnico de tres años con las siguientes especialidades: administración, administración de recursos humanos, laboratorista químico, soporte y mantenimiento de equipo de cómputo e informática. Los alumnos estaban cursando 2°, 4° y 6° semestre. Sus edades fluctuaban entre los 16 y 19 años de edad. Todos, 130 alumnos, habían cursado y aprobado la asignatura de algebra elemental en el nivel medio superior.

Sobre el instrumento: Se diseñaron y aplicaron de forma individual varias actividades tendientes a identificar los diferentes usos de las variables y aquí se reporta solamente lo que respecta a la identificación de la variable como número general. Convencidos que el álgebra y la geometría son áreas complementarias, se propusieron actividades que involucran situaciones geométricas, proporcionando en cada pregunta información gráfica y escrita: En la primera se dan cuatro figuras en las cuales van aumentando el número de cuadrados de lado una unidad, cada alumno individualmente debía contarlos, hacer los registros en una tabla, observar, comparar y encontrar la cantidad de cuadrados para la figura enésima. Como se observa a continuación:

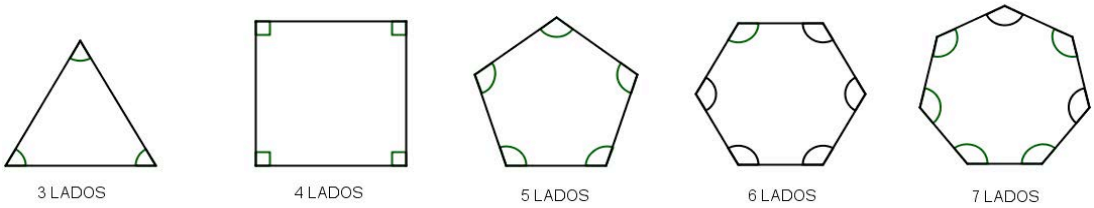


No. de Figura	1	2	3	4	5	7	n
Cantidad de cuadrados de lado 1	1						

Figura1. Primer problema

En la segunda pregunta se pretendió que los alumnos lograran encontrar el patrón existente entre el la suma de los ángulos internos de un polígono y los lados del mismo. Se esperaba que generalizara el resultado, es decir, pudieran expresarlo simbólicamente. Ver figura 2.

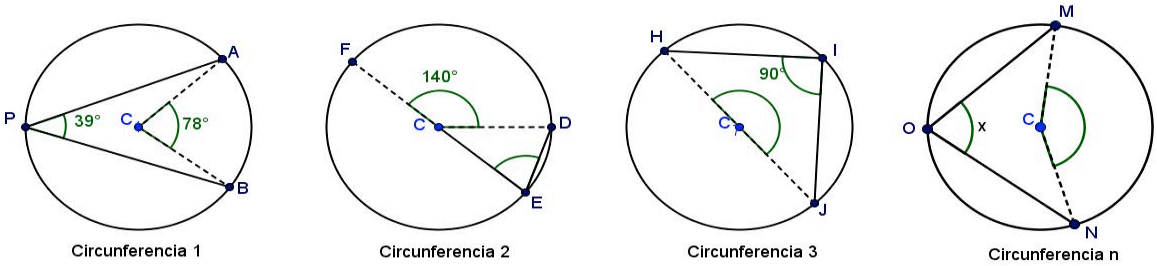
Enunciado: De acuerdo al número de lados de los polígonos que se te muestran, indica la suma total de sus ángulos internos en la tabla que se te presenta:



No. de Lados	3	4	5	6	7	n lados
Suma de ángulos internos	180°					

Figura 2. Segundo problema

Otra actividad que desarrollaron fue identificar el teorema del ángulo central a partir de la información proporcionada. Lo que se esperaba era que el alumno a través de la observación y aplicando un proceso deductivo encontrara los patrones, presentes en este teorema y pudieran representarlos mediante una expresión algébrica. Ver figura 3.



	Circunferencia 1	Circunferencia 2	Circunferencia 3	Circunferencia n
Ángulo central	$\angle ACB = 78°$	$\angle FCD = 140°$	$\angle HCJ =$	$\angle MCN =$
Ángulo inscrito	$\angle APB = 39°$	$\angle DEC =$	$\angle HIJ = 90°$	$\angle MON = x$

Figura 3. Problema tres

Posterior a cada problema se dejó un espacio para que cada alumno explicara, usando sus propias palabras, cómo resolvió el problema.

Otra fuente de información utilizada en la investigación fue la entrevista clínica que se aplicó a algunos alumnos luego que habían respondido el cuestionario.

Discusión de resultados

Luego de analizar los resultados de cada una de las actividades planteadas, de forma cuantitativa y cualitativa, se realizaron varias entrevistas a los alumnos mediante las cuales pudieron expresar más a detalle y profundidad lo que habían contestado en la prueba escrita. En la siguiente tabla se puede observar los resultados cuantitativos obtenidos en cada una de las actividades planteadas, notándose mayormente un mal desempeño en el problema de generalización sobre la suma de los

ángulos internos de un polígono. Las respuestas fueron clasificadas en dos rubros, por un lado el resultado numérico y por el otro la argumentación proporcionada por el alumno.

Tabla 1. Resultados cuantitativos obtenidos a través de la prueba escrita.

RESPUESTAS						
No. de Problema	Tabla			Argumentación		
	Correcta	Incorrecta	No contestó	Correcta	Incorrecta	No contestó
1	35%	65%	0%	44%	56%	0%
2	2%	93%	5%	11%	87%	2%
3	26%	66%	8%	46%	40%	4%

A continuación de presentan algunas respuestas obtenidas de los estudiantes, en donde se pone en evidencias varias categorías de respuestas: la primera hace referencia a los alumnos que logran hallar el patrón y pueden generalizar el resultado, además dan una explicación coherente con el proceso seguido y usan las variables correspondientes como se observa en los tres ejemplos siguientes:

No. de Figura	1	2	3	4	5	7	n
Cantidad de cuadrados de lado 1	1	4	9	16	25	49	nxn

Explica con tus palabras cómo resolviste el problema.

viendo que en los 3 primeros se sacaba el resultado multiplicando por si mismo el número, así lo hice susesivamente

No. de Lados	3	4	5	6	7	n lados
Suma de ángulos internos	180°	360°	540°	720°	900°	(n-2)180

Explica con tus palabras cómo resolviste el problema

Encontre una Regla al Numero de lados le Reste -2 y lo multiplique x 180

	Circunferencia 1	Circunferencia 2	Circunferencia 3	Circunferencia n
Ángulo central	$\angle ACB = 78°$	$\angle FCD = 140°$	$\angle HCJ = 180°$	$\angle MCN = x+x$
Ángulo inscrito	$\angle APB = 39°$	$\angle DEF = 70°$	$\angle HIJ = 90°$	$\angle MON = x$

Explica con tus palabras cómo resolviste el problema

El angulo central es el doble del angulo inscrito.

Otra categoría de respuesta corresponde a aquello alumnos, que aunque encuentran el patrón no están en capacidad de construir una expresión general que relacione las variables que intervienen, en vez de ello particularizan para el enésimo resultado. Por ejemplo:

No. de Figura	1	2	3	4	5	7	n
Cantidad de cuadrados de lado 1	1	4	9	16	25	49	64

Explica con tus palabras cómo resolviste el problema.

multiplique esto y me base para hacerlo

1 x 2 = 2 x 2 = 4
1 x 3 = 3 x 3 = 9
1 x 4 = 4 x 4 = 16
1 x 5 = 5 x 5 = 25
1 x 7 = 7 x 7 = 49
1 x 8 = 8 x 8 = 64

No. de Figura	1	2	3	4	5	7	10 n
Cantidad de cuadrados de lado 1	1	4	9	16	25	49	100

Explica con tus palabras cómo resolviste el problema.

Este problema lo hice multiplicando el nº de figura por ese mismo número para que saliera la cantidad de cuadrados del lado 1.

No. de Lados	3	4	5	6	7	n lados
Suma de ángulos internos	180°	360°	540°	720°	900°	1080°

Explica con tus palabras cómo resolviste el problema

le reste el nº 2 al nº de los lados x 180° y sale el 1er nº el procedimiento fue sume, reste y multiplique.

Otra categoría corresponde a los alumnos que lograron comprende el patrón, logran expresar con palabras el resultado correcto, sin embargo no cuentan con la capacidad para construir una expresión algebraica apropiada:

	Circunferencia 1	Circunferencia 2	Circunferencia 3	Circunferencia n
Ángulo central	$\angle ACB = 78°$	$\angle FCD = 140°$	$\angle HCJ = 180$	$\angle MCN = (x)^2$
Ángulo inscrito	$\angle APB = 39°$	$\angle DEF = 70$	$\angle HIJ = 90°$	$\angle MON = x$

Explica con tus palabras cómo resolviste el problema

si quiero sacar el angulo central, se multiplica el angulo inscrito por 2, y si quiero sacar el angulo inscrito se divide el angulo central por 2.

Para este caso la expresión multiplicar por dos la expresa como elevar al cuadrado.

Por último se hallan los alumnos con dificultades para hallar el patrón y por tanto no logran hallar la expresión para la figura enésima, los cuales representan la mayoría de alumnos que participaron en el estudio.

No. de Figura	1	2	3	4	5	7	n
Cantidad de cuadrados de lado 1	1	4	9	16	25	37	55

Explica con tus palabras cómo resolviste el problema.

con una regla de 3 simple.
Tome los dos primeros datos los sume y tome el no figura que seguia y lo sume y me salio el re-sultado asi ausesivamente 1+1+2=4

No. de Figura	1	2	3	4	5	7	n
Cantidad de cuadrados de lado 1	1	4	9	16	25	36	49

Explica con tus palabras cómo resolviste el problema.

Dependiendo la cantidad anterior de numero cuadrados le suma en forma jerarquica y consecutiva un numero impar

Conclusiones

El estudio permitió descubrir las siguientes dificultades de los alumnos, al pasar de la identificación de patrones a la generalización:

- Los alumnos que participaron en el estudio no encuentran dentro de su lenguaje algebraico una expresión que represente lo que se pide de manera correcta esto se pone en evidencia cuando completa la tabla en forma correcta para valores específicos.
- La mayoría de los alumnos hacen uso de la variable en su forma más elemental, desde de la perspectiva de Kücheman, como es la particularización.
- Dificultad en el desarrollo de sintaxis algebraica. Se encontraron varios casos en los cuales los alumnos a través de la entrevista clínica podían hablar del problema, presentar una solución dialogada correcta, pero cuando se les pidió expresar eso mismo por escrito perdían la noción de las ideas y no tenían elementos para hacerlo o simplemente lo expresaban con operaciones equivocadas.
- Los resultados hallados permiten expresar que los alumnos a pesar de haber aprobado varios cursos de algebra elemental, no cuentan, en la preparatoria con herramientas algebraicas que les permita llegar al proceso de generalización.

- De acuerdo a los resultados obtenidos se puede afirmar que no hubo diferencia significativa entre las respuestas dadas por alumnos de segundo semestre y sexto semestre.

Referencias bibliográficas

Álamo, A. (2012). *Errores frecuentes que cometen los estudiantes del bachillerato tecnológico de los usos de la variable de acuerdo al modelo 3uv*. Tesis de maestría no publicada. Universidad Autónoma de Coahuila: México.

Kieran, C., & Chalouh, L. (1993).The transition from arithmetic to algebra. In D. T. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics* (pp. 179-198).New York: Macmillan.

Kücheman, D. (1978). Children´s understanding of numerical variables. *Mathematics in school* 7. No. 4.

NCTM. (2000). *Principios y estándares para la educación matemática*. Traducción Manuel Fernández Reyes. Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales: España.

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D. y Trigueros, M. (2005). *Enseñanza del álgebra elemental. Una propuesta alternativa*. México: Trillas.

UNA ESTRATEGIA PARA EL DESARROLLO DEL SENTIDO NUMÉRICO EN ESTUDIANTES EN CONDICIÓN DE EXTRAEDAD

Nelssy Jiménez Díaz y Faberth Díaz Celis
Universidad Distrital Francisco José de Caldas Colombia
nelssyj@yahoo.com, faberthd@yahoo.com

Resumen. El Programa Procesos Básicos (PB) que vincula a los niños y niñas en condición de extra edad que no saben leer, escribir, sumar y restar, es un caso particular de los programas de inclusión que se están realizando en algunos países de Latinoamérica. Los propósitos establecidos por el Programa PB en Colombia, incluyen el diseño, acompañamiento y ajuste permanente de las estrategias didácticas incluidas en los libros de los estudiantes y en los procesos de formación de los docentes. El presente artículo reporta las investigaciones sobre el diseño, implementación y evaluación de la Estrategia para el desarrollo del sentido numérico del Programa Procesos Básicos, que se ha llevado a cabo durante cuatro años en las instituciones educativas oficiales de Bogotá y del departamento de Antioquia.
Palabras clave: sentido numérico, inclusión, extraedad, trayectorias de aprendizaje
Abstract. The Basic Processes Program (BPP) is a program that attends children older than the normal age for elementary school and that can't read, write, add and subtract. This is a particular case of the inclusion programs that are being carried out in some countries of Latin America. The purposes established by the BPP in Colombia include the design, following and permanent adjustment of both, the teaching strategies included in the student's books and the teacher training to work with this students. This paper presents the research results on the design, implementation and evaluation of the Strategy for the development of the number sense in the context of the BPP, the research had place during four years in the public schools of Bogota and in the public schools in the department of Antioquia.
Key words: number sense, inclusion, overage, learning trajectories

Introducción

Inclusión en los primeros grados de escolaridad

Los países latinoamericanos, en su mayoría, han registrado avances en cuanto al acceso a la educación preescolar, primaria y secundaria, durante la primera década del presente siglo (Cepal, 2010). A pesar de ello, en los países de la región, una proporción muy elevada de niños y niñas sigue abandonando tempranamente el sistema escolar y un alto porcentaje de los adolescentes desertan antes de completar el ciclo medio de educación, sin haber alcanzado el capital educacional y las destrezas requeridas para mantenerse fuera de la pobreza durante la vida activa. Los sistemas educativos de buena parte de los países de Latinoamérica comparten, según Espíndola & León (2002: 40), los siguientes rasgos: insuficiente cobertura de la educación preescolar, elevado acceso al ciclo básico, y escasa capacidad de retención tanto en los niveles preescolar y primario como en el secundario.

Como lo señala la Cepal (2010), la repetición y el retraso escolar, fenómenos que con alta frecuencia generan la deserción escolar, unidos a un bajo nivel de aprendizaje de los contenidos básicos de la enseñanza, se constituyen en los principales obstáculos que los sistemas educativos de la región deben salvar. Los efectos actuales son negativos y se acumulan a lo largo del ciclo

escolar, incidiendo en las oportunidades de bienestar de las generaciones siguientes, sobre todo entre los sectores más pobres de la población.

El concepto de inclusión escolar total, plena y oportuna como derecho de los ciudadanos, se plantea desde la perspectiva de la política y la gestión del sistema educativo en los países latinoamericanos, con el propósito de buscar estrategias que disminuyan el fracaso escolar de los niños, niñas y adolescentes que viven en situación de pobreza,. Según Farías, Fiol, Kit & Melgar (2007), la inclusión por su carácter *total*, debe procurar atención a la totalidad de la población desde el acceso hasta el completamiento de la escolaridad obligatoria; por ser *oportuna*, requiere cubrir las etapas en el tiempo previsto y con satisfacción de las necesidades básicas; y por ser *plena*, necesita ofrecer experiencias educativas con calidad y pertinencia, partiendo desde la "riqueza" de las oportunidades que ofrezca el sistema y evitando generar propuestas de menor calidad para los sectores de inclusión más difícil.

En el caso colombiano, el Gobierno Nacional instituyó un marco jurídico de la inclusión educativa que, entre otros principios, establece la obligatoriedad de garantizar a las poblaciones diversas y en situación de vulnerabilidad, el derecho a educarse en instituciones educativas abiertas e incluyentes. Se definió un Índice de Inclusión (MEN, 2009), que plantea una revisión permanentemente del plan de estudios para realizar "los ajustes pertinentes que permitan hacerlo accesible a todos los estudiantes, incluso a aquellos que presentan una situación de vulnerabilidad como desplazamiento y analfabetismo" (p. 20), a la vez que se solicita que los docentes implementen, por un lado, diferentes opciones en didácticas flexibles para facilitar el aprendizaje de cada uno de los estudiantes de acuerdo con sus características y necesidades, y por otro, que los mismos docentes ajusten su práctica pedagógica al ritmo y estilo de aprendizaje de cada uno de sus estudiantes, incluyendo la población en situación de vulnerabilidad.

Surgen en este contexto, preguntas de investigación relacionadas con las problemáticas del nivel de educación preescolar descritas para Latinoamérica en general y para Colombia en particular: ¿Qué ajustes al plan de estudios son necesarios para hacerlo accesible a todos los estudiantes de los primeros niveles de educación y así contribuir a la disminución de las tasas de repetición y de retraso escolar?¿Qué estrategias didácticas flexibles, contribuyen a facilitar el aprendizaje de los estudiantes de los primeros niveles de educación y pueden mejorar la cobertura de la educación preescolar, aumentando la capacidad de retención educativa? ¿Qué materiales ayudan a los docentes a ajustar su práctica pedagógica al ritmo y estilo de aprendizaje de cada uno de los estudiantes y fortalecen la inclusión escolar total, plena y oportuna para los niños, niñas que no han alcanzado los primeros niveles de educación y que se encuentran en situación de vulnerabilidad?

El presente artículo reporta los avances de las investigación relacionadas con el diseño de estrategias didácticas que favorecen el desarrollo del sentido numérico, adelantadas por Jiménez, N. y por Díaz, F. en la maestría en Educación de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, que contribuyen a dar respuestas a las preguntas enunciadas en el párrafo anterior.

La metodología de Diseño

La metodología utilizada es la Investigación de Diseño, a partir de experimentos de enseñanza, mediante la construcción de Trayectorias de Aprendizaje (TA) sobre el desarrollo del pensamiento numérico, que responden a las exigencias de aprendizaje de los niños y niñas en condiciones de extra edad. La extra edad ocurre cuando un niño o niña tiene dos o tres años más, por encima de la edad promedio, establecida por la Ley General de Educación, para cursar un determinado grado. Las Trayectorias de Aprendizaje (TA) sobre lo numérico sirvieron, a los investigadores, como predicciones documentadas sobre los caminos por los que el aprendizaje se puede movilizar y les proporcionaron un criterio racional para decidir, la Estrategia que ellos consideraron la mejor conjetura de cómo podía avanzar el aprendizaje (Simón & Tzur, 2004).

La Investigación de Diseño, como metodología de tipo cualitativo, buscó analizar el aprendizaje en contextos de clase, mediante la observación de algunos dispositivos didácticos, a la vez que indagó sobre las razones por las que un diseño de instrucción moviliza el aprendizaje y sugirió formas con las cuales puede ser adaptado a estudiantes en condición de extra edad. (Cobb & Gravemeijer, 2008).

Para el experimento de enseñanza, siguiendo las orientaciones de Steffe & Thompson, (2000), se diseñó, implementó y ajustó una secuencia de actividades de enseñanza (Estrategia para el desarrollo del pensamiento numérico), en la que participaron los investigadores, los docentes y los estudiantes. Se mantuvo una comunicación entre ellos, mediante encuentros periódicos, con el propósito de experimentar de primera mano la construcción del conocimiento por parte de los estudiantes; la construcción del conocimiento del profesor, sobre la construcción de los estudiantes; y la construcción de los investigadores, sobre la construcción del conocimiento de docentes y estudiantes y sobre sus interacciones.

Siguiendo a Clements & Sarama (2009) se consideraron dos de las tres partes de una TA: 1) Las metas o propósitos de aprendizaje de lo numérico, asumidos como el conjunto de los conceptos y habilidades que son matemáticamente centrales y coherentes con el pensamiento de los niños y niñas, y consistentes con los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas propuestos por el Ministerio de Educación Nacional (2006) para el desarrollo del pensamiento numérico de los estudiantes de primero a tercer grado, y 2) Un conjunto de actividades instruccionales para ser

desarrolladas durante un año académico, distribuidas en cuatro periodos y organizadas en ciclos de quince días.

Las niñas, niños y jóvenes del programa

La Estrategia para el desarrollo del sentido numérico se ha implementado desde el año 2011, en más de 50 instituciones educativas oficiales de Bogotá y del departamento de Antioquía, mediante el Programa Procesos Básicos (PB), el cual incluye el aprendizaje de la lectura, la escritura, el desarrollo del pensamiento lógico matemático y el desarrollo socio afectivo, para atender a niños, niñas y jóvenes en condiciones de extra edad que no tiene aprobados sus primeros grados de educación básica primaria. Según los datos representativos de los cuatro años de implementación, el Programa PB, durante el año 2013, atendió 1577 estudiantes, con un promedio de 22 estudiantes por aula, (con una distribución por género de 67% de niños y 33% de niñas). La distribución por edades de la población para el año 2013, se presenta en ocho grupos: 1) Menores de 9 años: 51 estudiantes de procedencia indígena Emberá; 2) De 9 años: 338 estudiantes; 3) De 10 años: 439 estudiantes; 4) De 11 años: 332 estudiantes; 5) De 12 años: 206 estudiantes; 6) De 13 años: 103 estudiantes; 7) De 14 años: 51 estudiantes; 8) De 15 años: 22 estudiantes; y 9) De 16 años: 5 estudiantes.

En cuanto al tipo de población, 227 estudiantes (17%) se encuentra en condición de desplazamiento, 21 estudiantes son niños o niñas trabajadoras y 30 viven en hogares del Instituto Colombiano de Bienestar Familiar (ICBF). Los menores trabajadores lo hacen con sus padres como vendedores ambulantes, recicladores o en plazas de mercado y una gran mayoría asume el cuidado de sus hermanos menores y los oficios de la casa. Esto tiene una incidencia en la vida escolar, por un lado faltan mucho a la institución educativa porque tienen que trabajar y no tienen tiempo para realizar las tareas escolares. Algunos estudiantes proceden de zonas de conflicto y son víctimas de la violencia social, generalmente tienen miedo, son introvertidos y no quieren hablar de ellos ni de sus familias.

Un número representativo de niñas y niños han vivido la experiencia de la calle, esto les ha dado el manejo de otras reglas y códigos, por ejemplo, frente a situaciones difíciles saben tomar decisiones rápidas; se resisten y cuestionan las decisiones de los adultos; algunos acuden al robo como forma de supervivencia; un buen número defiende a los compañeros de su grupo, generalmente con agresión verbal o física.

Las docentes del Programa reconocen las diferencias de sus estudiantes, sin embargo, desde lo socio-afectivo generalizan aspectos como la baja autoestima con la que la mayoría de ellos ingresa a la institución educativa, consideran que las niñas y niños de menor edad (menores de 11 años)

son menos agresivos y presentan interés por el estudio. Por otra parte reconocen que muchos de ellos son alegres, solidarios y tienen un saber acumulado dado por su mayor cantidad de experiencias de vida. Sin embargo, en sus rostros algunos muestran tristeza.

Los referentes sobre el sentido numérico

En el marco del programa PB, la Estrategia para el desarrollo del sentido numérico hace parte del Eje del Pensamiento Lógico matemático. De forma general, potenciar el pensamiento lógico matemático, siguiendo a Castaño et al. (2007a), "tiene que ver con ayudar a los niños y jóvenes a construir y apropiarse comprensivamente de las herramientas simbólicas y tecnológicas propias del grupo en el que se convive, así como las producidas por las comunidades matemáticas, que los haga sujetos cada vez más capaces de establecer relaciones y operar con éstas en diferentes situaciones y contextos, para conocer y actuar creativa y críticamente como ciudadanos." (p. 31). Es decir, el desarrollo del pensamiento lógico matemático en general, y el desarrollo del sentido numérico en particular, les ayudará a los estudiantes del programa PB a rescatar la importancia de sus conocimientos locales, lo que les permitirá acercarse al conocimiento matemático universal.

La Estrategia para el desarrollo del sentido numérico para niños en condición de extra edad fomenta su desarrollo, mediante una secuencia de actividades que ayudan, a construir en sus pensamientos verdaderas herramientas intelectuales, que les permiten comprender y actuar en una gran variedad de situaciones con diferentes tipos de números. El desarrollo del sentido numérico involucra complejas operaciones intelectuales, tales como: dar cuenta de las cantidades; coordinar las diferentes operaciones y relaciones posibles en un sistema, con el fin de calcular nuevas cantidades y establecer nuevas relaciones a partir de unas conocidas; manejar diferentes formas de representar los números y transformar unas en otras; hacer estimaciones de la medida de una magnitud y del valor de un cálculo; identificar regularidades; comprender el sentido de una propiedad e identificar los límites en que esta es posible, etc. En síntesis se trata de lograr construcciones mentales que permiten comprender y resolver problemas que involucran los sistemas numéricos.

La Estrategia para el desarrollo del sentido numérico y sus dispositivos didácticos

Teniendo en cuenta las características del desarrollo del sentido numérico, se diseñó una estrategia fundamentada en la acción y reflexión, la cual se concretó en un material escrito que dio forma a los cuatro libros del estudiante (Jiménez & Díaz, 2011).

Desde la perspectiva de la acción y reflexión, el desarrollo del pensamiento lógico matemático, se centra en la configuración de una comunidad de estudio en la que no se transmiten contenidos, sino en la que se desarrolla el pensamiento como tal, esto implica didácticamente una forma de

trabajo en el aula de clase, que asegura la acción en compañía del lenguaje y la reflexión sobre la acción hasta lograr la estructuración de los conceptos y de las relaciones que se establecen entre ellos. (Von Glasersfeld, 1995)

En los Lineamientos Curriculares para el Área de Matemáticas del MEN (1998) se establece que la interacción social dentro del aula, proporciona las respuestas a las preguntas sobre cómo desarrollan los niños su capacidad para construir el número y cómo inventan la aritmética. La posibilidad del intercambio de experiencias y el compartir de avances personales que se validan con otros, permiten modelar situaciones, razonar y comunicar la construcción de los estudiantes.

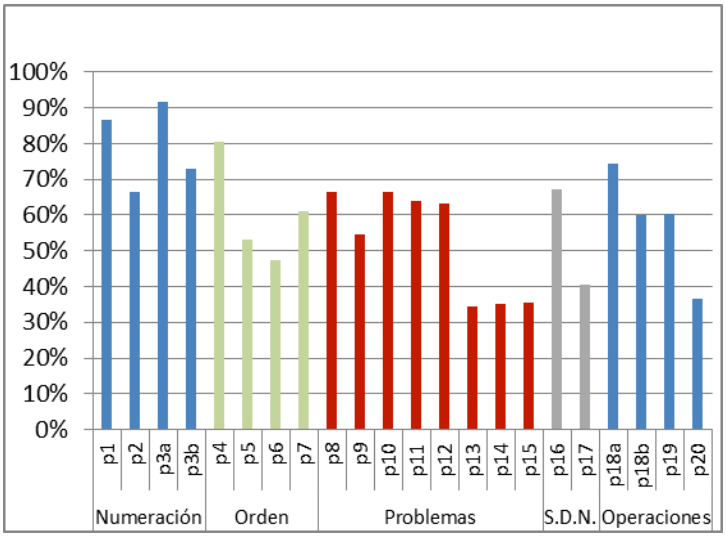
De acuerdo a lo anterior, el material elaborado para el desarrollo del sentido numérico propone cinco momentos metodológicos: 1) actividades de juego, 2) ejercicios para potenciar las funciones cognitivas, 3) actividades que ayudan a representar las relaciones matemáticas, 4) estrategias para la solución de problemas y 5) actividades de síntesis y seguimiento.

Para la identificación del nivel del sentido numérico alcanzado por los estudiantes, se aplicaron dos pruebas escritas: una a manera de diagnóstico y otra de contraste al final del año académico. Las pruebas constan de 22 preguntas abiertas y se aplicaron en periodos de 2 horas, a los de los estudiantes que iniciaron y terminaron el Programa de PB.

Asumiendo que el sentido numérico desarrollado por los estudiantes es demasiado complejo para ser abarcado con todo el rigor por unas pruebas escritas, resueltas en un tiempo limitado, se tomó la decisión de indagar únicamente sobre los siguientes aspectos en las dos pruebas: aspectos de conteo, lectura y escritura de números (Numeración), manejo de las relaciones mayor que y menor que (Orden), capacidad para plantear y resolver problemas aditivos (Problemas), representación mediante el uso sistema decimal de numeración (S.D.N.), y ejercitación de procedimientos de suma y resta (Operaciones). Esta decisión tuvo en cuenta las metas del programa PB, el perfil de salida de los estudiantes, la malla curricular propuesta y la secuencia de actividades incluidas en los libros del estudiante.

Para la interpretación de los resultados de las dos pruebas, se consideraron múltiples factores que intervienen en el desempeño de los estudiantes cuando hacen una actividad que pretende evaluarlos (Castaño et al, 2007b). En el caso presente, la aplicación de un instrumento de carácter escrito está intervenida por factores de significación y de contextualización, que favorecen las manifestaciones de la comprensión o las ocultan y existen factores actitudinales y emocionales que pueden obstaculizar o favorecer el uso de los esquemas adecuados, por parte del estudiante en el momento de tratar de resolver una situación.

Los resultados de los cinco aspectos evaluados a los estudiantes en la prueba diagnóstica se muestran en la gráfica 1. Los rendimientos obtenidos en el aspecto de la Numeración (conteo, lectura y escritura de números) muestran que para los estudiantes del Programa PB, este aspecto es menos complejo y abstracto que los demás. Es posible inferir que la mayoría de los estudiantes que ingresan al Programa pueden identificar la lista de números cardinales y la usan para contar objetos y hacer conteo verbal.



Gráfica 1. Porcentaje de estudiantes que contestan correctamente las preguntas sobre los aspectos evaluados del Sentido Numérico.

Los puntajes de las preguntas que tratan sobre los otros cuatro aspectos, muestran una desviación relativamente alta, lo que sugiere que los estudiantes del Programa ingresan con un nivel heterogéneo dado por sus diferentes experiencias previas.

El contraste entre los resultados de las dos pruebas escritas (Díaz, 2012) aplicadas a los estudiantes, evidenció su avance en el uso de procedimientos de suma y resta y en la comprensión del Sistema Decimal de Numeración. También los estudiantes mostraron avances significativos en la resolución de problemas aditivos.

Resultados

Algunas evidencias de los procesos de evaluación del diseño y la aplicación de la Estrategia para el desarrollo del sentido numérico (Díaz, 2012), realizados con docentes y estudiantes, permiten establecer que unos y otros: manifiestan aceptación sobre las secuencias didácticas propuestas en los libros; consideran que las actividades generan expectativas por alcanzar las metas propuestas, a medida que avanzan; reconocen que el uso de actividades con material concreto, posibilita el descubrimiento y la estructuración del pensamiento en los estudiantes; y expresan que la Estrategia ofrece una secuencia y presencia de retos continuos, que fortalece y estimula las habilidades de pensamiento en los estudiantes.

Los docentes del Programa PB, además, reconocen que la Estrategia permite el estudio individual y en equipos de estudiantes, en los diferentes momentos proporcionados y desarrolla en ellos la capacidad de reflexión y la construcción social del conocimiento.

A nivel de las metas del Programa, la Estrategia diseñada incluye dispositivos didácticos que aseguran el avance en el manejo conceptual que se requiere y están relacionadas con los estándares nacionales propuestos para los estudiantes de las aulas regulares.

En la lectura de los resultados de las pruebas aplicadas, se observó que los estudiantes ingresan al Programa PB con un manejo del sentido numérico vinculado a las experiencias que les brinda la cotidianidad y que se diferencia de los niveles de manejo que tienen los estudiantes que ingresan a las aulas regulares, con 4 o 5 años de edad menos. La prueba diagnóstica y la prueba final de contraste muestran una alta dispersión entre los resultados de los grupos de las diferentes instituciones educativas, los cuales parecen estar relacionados con el nivel de comprensión e implementación que tiene el docente encargado del grupo.

La interpretación y análisis de los resultados de las pruebas aplicadas, indican que la Estrategia para el desarrollo del sentido numérico, junto con la intervención educativa que proporciona el Programa PB, logra que los estudiantes movilicen su pensamiento hacía niveles que les permiten ingresar a las aulas regulares y así mantenerse en el sistema educativo. Los resultados obtenidos validan la pertinencia y eficacia de la Estrategia diseñada.

Cómo proyección del proceso de Evaluación, es pertinente adelantar investigaciones que indaguen sobre algunos aspectos del sentido numérico que no están incluidos en la Estrategia actual (como la subitización y la estimación), así como una evaluación usando un referente externo, es decir, un Programa con características similares, que permita la cualificación del diseño de las metas, las actividades y la secuencia de niveles de aprendizaje, por las que avanza el sentido numérico de los estudiantes.

Referencias bibliográficas

Castaño, J., & Forero, A. (2006). Construcción del conocimiento matemático escolar, algunos aportes desde la Psicología (2006). En: *Saber, Sujeto y Sociedad. Una década de Investigación en Psicología*. Bogotá: Editorial Javeriana.

Castaño, J., Forero, A., Díaz, F., Oicatá, A, & Castro, A. (2007a). *Orientaciones curriculares para el campo del Pensamiento Matemático*. Bogotá: SED.

Castaño, J., Díaz, F., Oicatá, A, & Castro, A. (2007b). *Resultados de las pruebas comprender de matemáticas. Grados 5° y 9°. Primera aplicación. Análisis Comprensivo*. Bogotá: SED.

Cobb, P. & Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. En Kelly, A. E., Lesh, R. A., & Baek, J. Y. (Eds.), *Handbook of design research methods in education: Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching* (pp. 68–95). New York: Routledge.

Cepal (2010). Panorama Social de América Latina 2010. Santiago de Chile: CEPAL.

Clements, D. H., & Samara, J. (2009). *Early childhood mathematics education research.* New York: Routledge.

Díaz, F. (2012). *El desarrollo del pensamiento numérico en estudiantes en condición de extra edad del Programa Procesos Básicos.* (Tesis de maestría). Universidad Externado de Colombia, Bogotá, Colombia.

Espíndola, E. & León, A. (2002). La deserción escolar en América Latina: un tema prioritario para la agenda regional. *Revista Ibero americana de Educación*. 30. Recuperado de http://www.rieoei.org/rie30a02.htm

Farías, M., Fiol, D., Kit, I., & Melgar, S. (2007). *Todos pueden aprender. Propuestas para superar el fracaso escolar.* Buenos Aires: Unicef.

Jiménez, N., & Díaz, F. (2011). *Procesos básicos. Pensamiento lógico matemático*. Bogotá: SED.

Ministerio de Educación Nacional. MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá: MEN.

Ministerio de Educación Nacional. MEN. (1998) *Lineamientos curriculares para el área de matemáticas*, Bogotá, MEN.

Ministerio de Educación Nacional (2009). *Índice de inclusión*. Bogotá: MEN.

Simon, M. & Tzur R. (2004). Explicating the Role of Mathematical Tasks in Conceptual Learning: En Elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory. *Mathematical thinking and learning,* 6(2), 91-104.

Steffe, L. & Thompson, P. (2000). Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements. En Kelly, A.E. y Lesh, R.A. (Eds.). *Handbook of research design in mathematics and science education.* (pp. 267-306). Mahwah: NJ: LAE.

Von Glasersfeld, E. (1995). A Constructivist Approach to Teaching. En L.P. Steffe & J. Gale (Eds), *Constructivism in Education* (pp.3-16). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates

ANÁLISIS DE ENUNCIADOS DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS PARA LA ESCUELA SECUNDARIA

Elisa Petrone, Mariela Cirelli, Natalia Contreras, Natalia Ferrari y Natalia Sgreccia
Universidad Nacional de Rosario Argentina
Colegio San Bartolomé
Universidad Austral
Universidad Nacional de Rosario.
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas
epetrone@fceia.unr.edu.ar, cirelli@fceia.unr.edu.ar, ncc@fceia.unr.edu.ar, natalia.ferrari@gmail.com, sgreccia@fceia.unr.edu.ar

Resumen. La resolución de problemas está ampliamente aceptada por los teóricos para abordar procesos de enseñanza pero, al parecer, se encuentra escasamente implementada en las aulas. Los datos del presente estudio están constituidos por 45 enunciados de problemas matemáticos para la escuela secundaria que fueron propuestos por los 38 asistentes al Curso de Posgrado y Capacitación Docente "Enseñar Matemática mediante problemas en la escuela secundaria" desarrollado hacia fines del año 2010. Tales enunciados se analizan mediante las siguientes categorías de análisis: claridad semántica; precisión matemática; cantidad de información; registro de representación; contenido involucrado; vinculación con la realidad; momento de utilización. Se ha podido evidenciar que se requiere trabajo formativo en la redacción y selección de los enunciados de problemas para la clase de Matemática.
Palabras clave: enunciados, problemas matemáticos, capacitación docente
Abstract. Problem solving is widely accepted by theorists to address teaching processes but, apparently, is poorly implemented in the classroom. The data of this study consist of 45 mathematical problem statements for secondary school which were proposed by the 38 people who attended to the Graduate and Training Course "Teaching Mathematics through problems in the secondary school" developed by the end of 2010. Such statements are analyzed by the following categories of analysis: semantic clarity; mathematical precision; amount of information; register of representation; content involved; link with reality; time of use. It was shown that a training work is required in the writing and selection of statements problems for Math class.
Key words: statements, mathematical problems, teacher training

Introducción

La resolución de problemas está ampliamente aceptada por los teóricos para abordar procesos de enseñanza pero, al parecer, se encuentra escasamente implementada en las aulas (Álvarez Caneda, Alonso Berenguer y Gorina Sánchez, 2012; Petrone, Sgreccia, Contreras, Mascó, Crevacuore, Ferrari y Reynoso, 2010). El proyecto de investigación en el que se inscribe este reporte pretende indagar acerca de esta problemática. Su objetivo general es generar conocimientos que orienten sobre los modos más apropiados de desarrollar acciones de formación inicial y continua de profesores en Matemática para la enseñanza en la escuela secundaria utilizando la resolución de problemas.

En el marco de un Curso de Posgrado y Capacitación Docente, denominado "Enseñar Matemática mediante problemas en la escuela secundaria", desarrollado hacia fines del año 2010, se trataron diversos aspectos relativos a dicho tópico.

Encuadre teórico

De Guzmán (1993) señala razones de la importancia de la utilización de la resolución de problemas en la enseñanza de la Matemática, entre las que cabe destacar: es lo mejor que puede proporcionarse a los jóvenes, la capacidad autónoma para resolver sus propios problemas; el trabajo se puede hacer atrayente, divertido, satisfactorio, autorrealizador y creativo; muchos de los hábitos que así se consolidan tienen un valor universal, no limitado al mundo de las matemáticas; es aplicable a todas las edades.

A pesar de ello, y como fuera mencionado, la metodología de resolución de problemas no halla aún un espacio importante de implementación en las aulas. Al respecto Gaulin (2001) menciona algunas dificultades como causa de este fenómeno: el profesor no ha sido formado para enseñar a resolver problemas; muchos profesores manifiestan no sentirse capacitados sobre cómo implementar esas ideas que circulan con relación a la enseñanza mediante problemas; hay diferentes concepciones sobre lo que significa la resolución de problemas como estrategia de enseñanza y de aprendizaje en el aula. Entre ellas:

- *A través de la resolución de problemas*: los problemas se utilizan como herramienta para introducir un nuevo concepto matemático.
- *Para la resolución de problemas*: los problemas se presentan como espacios de aplicación de conceptos matemáticos ya aprendidos.
- *Sobre la resolución de problemas*: se enseñan estrategias de resolución.

El Curso de referencia procuró fortalecer la primera de estas concepciones, por un lado debido a que enseñar matemática mediante esta metodología resulta beneficioso para el aprendizaje de los alumnos y por otro lado por considerarse la menos desarrollada desde las prácticas áulicas y propuestas didácticas.

Metodología de la investigación

La investigación que aquí se comparte adopta un enfoque cualitativo y tiene alcance descriptivo (Hernández Sampieri, Fernández Collado y Baptista Lucio, 2006). El diseño del estudio es empírico no experimental y de tipo transversal (Bravin y Pievi, 2008).

Los datos están constituidos por 45 enunciados de problemas matemáticos para el nivel educativo correspondiente a la escuela secundaria (alumnos en una franja etaria de 13 a 18 años). Tales enunciados fueron propuestos por los 38 asistentes al Curso (31 profesores en Matemática y 7 estudiantes de Profesorado en Matemática).

Al final del primer encuentro (de un total de ocho de duración que abarcó el Curso) se solicitó a los participantes que para el siguiente trajeran uno o dos enunciados de problemas que suelen utilizar, o utilizarían, en sus clases. En el segundo encuentro se recogieron los enunciados de los problemas solicitados y se les comunicó que se trabajaría con ellos en un próximo encuentro. El equipo de investigación compiló los enunciados de los 45 problemas recogidos (P-1 a P-45) y en el tercer encuentro lo entregó a los participantes informándoles que debían analizarlos para el siguiente. En el cuarto encuentro se trabajó en forma conjunta en el análisis de los enunciados de los problemas. A partir del intercambio en el grupo-clase fueron emergiendo componentes a considerar para el análisis de los enunciados de los problemas:

1. claridad semántica;
2. precisión matemática;
3. cantidad de información;
4. registro de representación;
5. contenido involucrado;
6. vinculación con la realidad;
7. momento de utilización.

Tales componentes se constituyeron, por un lado, en la versión seminal de las categorías de análisis empleadas en esta investigación y por el otro en instrumentos didácticos para los docentes a la hora de planificar actividades de enseñanza y de evaluación.

Además, en un quinto encuentro se solicitó a los participantes que expresaran por escrito, en forma individual y anónima, los aprendizajes logrados a partir del análisis de enunciados de problemas (Petrone, Sgreccia, Mascó, Crevacuore, Contreras, Ferrari y Reynoso, 2011).

Principales resultados

Se presentan aquí algunos enunciados de problemas que los participantes compartieron en el Curso de referencia y que ellos utilizan o utilizarían con sus estudiantes de escuela secundaria. Es de esperar, por ello, que los mismos estén entre los "favoritos" por parte de los docentes.

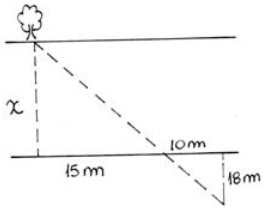
En tales enunciados, de acuerdo a cada una de las siete categorías de análisis presentadas, se destacan aspectos a fortalecer. Algunos de estos aspectos fueron tratados grupalmente en el Curso de referencia y otros fueron surgiendo en el análisis posterior del equipo de investigación.

En el enunciado:

(P-28) *Un técnico en computadoras cobra $10 por su visita a domicilio más $12 por hora trabajada. ¿Cuánto será el costo de su visita si trabaja 3 hs? ¿Y si trabaja sólo una hora? ¿Cuánto cobrará si trabaja x horas?*

Se utiliza una misma palabra (visita) con dos sentidos diferentes, lo cual resta claridad semántica al enunciado.

Un ejemplo de falta de precisión matemática se encuentra en el siguiente enunciado:



(P-20) *Fernando necesita medir el ancho del canal y para ello toma, desde una de las orillas, las medidas indicadas en el esquema. ¿Cómo hace para calcular el ancho del canal con los datos que tiene? ¿Qué resultado obtiene?*

Se puede apreciar que faltan explicitar datos, como por ejemplo, que las rectas representadas horizontalmente son paralelas entre sí, que los segmentos representados verticalmente son paralelos entre sí y perpendiculares a las rectas horizontales. Por otro lado, si bien el esquema es sólo representativo de la situación las medidas de los segmentos indicadas en el esquema no guardan relación con la longitud que se indica para los mismos, por ejemplo el segmento que mide 18 metros tiene en el dibujo una longitud menor al segmento que mide 15 metros. Además, las preguntas del problema resultan ambiguas.

La información que se presenta en el enunciado no es un aspecto menor. A veces los datos son los justos y necesarios, a veces sobran datos y a veces faltan (como en el enunciado anterior). Esto también cabe para la consigna que se le da al resolutor: qué se desea que la persona haga ante tal situación. Así, en el enunciado:

(P-8) *En un triángulo isósceles BAC, la bisectriz del ángulo externo de A, es paralela al lado desigual BC.*

falta la cuestión a resolver, es decir, la pregunta o consigna de acción dirigida al alumno.

Otro ejemplo es:

(P-37) *Para completar los litros que corresponden a 10 personas, Mariel sumó dos veces los litros que corresponden a 4 personas y le agregó 3/2 l. ¿Es correcto lo que hizo? ¿Hay otra forma de encontrar ese valor?*

Se puede advertir que resulta confuso, faltan datos y claridad en la redacción.

Claro está que los datos ofrecidos no deberían ser inconsistentes entre sí, como sucede en la siguiente situación:

(P-25) *Una escalera de 3 metros de largo se apoya contra una pared formando un ángulo de 70° con el piso. El pie de la escalera debe estar a 1,20 metros de la pared. a. ¿A qué altura sobre la pared se debe apoyar su extremo superior? b. ¿Cómo habrá que ubicarla para que su extremo superior se apoye a 2,30 metros de altura? ¿Y a 1,40 metros de altura?*

Esto sirve para subrayar la necesidad de resolución previa por parte del docente, lo cual también le puede dar indicios acerca del orden para realizar las preguntas, si es que la situación presenta más de una. Por ejemplo, en el enunciado:

(P-7) *José tiene una empresa de alfombrados y le encargaron alfombrar un salón de 630 m². A la mañana del primer día, alfombró 2/7 del salón y a la tarde 2/5 del resto. Lo que falta lo dejará para el segundo día. a. ¿Cuántos metros cuadrados le falta alfombrar? b. ¿Qué fracción alfombró el primer día? c. Si trabaja al mismo ritmo que el día anterior. ¿Le alcanzará la mañana del segundo día para terminar con el trabajo?*

Resulta atinado intercambiar entre sí la primera pregunta con la segunda. Además, hay ambigüedades que invalidan las consignas de acción: en b., cuando se pide la "fracción" alfombrada el primer día, no se especifica respecto de qué total; en c. la palabra "ritmo" parece aludir a "velocidad" con lo cual debería contarse, no sólo con el dato de la cantidad de metros alfombrados, sino también con la cantidad de tiempo que trabajó a la mañana y a la tarde para poder dar respuesta a esta consigna.

También hay problemas que se pueden abordar mediante diversas estrategias de resolución, involucrando diferentes contenidos conceptuales y procedimentales, tales como el siguiente:

(P-16) *Si un número es divisible por 3, ¿su cuadrado será también divisible por 3?*

Resulta beneficioso que el docente conozca y prevea este hecho que, en parte, estará sujeto a las secuenciaciones de actividades que viene desarrollando en su curso. En este sentido, un mismo problema puede utilizarse en distintos momentos del tratamiento de un contenido, según la intencionalidad docente, como es el caso de:

(P-2) *Melisa tiene 3 años más de la mitad de los que va a tener Belén el año que viene. Hoy por hoy Belén lleva a Melisa 6 años. ¿Cuántos años tiene cada una?*

Algunos problemas, como el siguiente, son didácticamente inadecuados por varias razones:

(P-4) *El trueque indio: En una tribu de indios utilizan caracoles como monedas. Sabemos que 3 espejos y 2 arcos han costado 7 caracoles y un arco ha costado 6 caracoles. ¿Cómo averiguar cuántos caracoles hay que dar por cada arco? Nota: Utilizado como actividad*

disparadora para Sistemas de Ecuaciones Lineales con 2 incógnitas. Realizado en grupos de 3 o 4 alumnos.

La respuesta está contenida explícitamente en uno de los datos del problema, o sea, no habría nada que pensar ni resolver. Si se quisiera, además, averiguar cuántos caracoles (tomado como unidad de pago) habría que dar por cada espejo (avanzando hacia la idea de "sistema de ecuaciones con dos incógnitas") resulta que esa cantidad es un número fraccionario negativo. Así, la intención de "vincular con la realidad" pierde todo sentido.

Resultados globales de la muestra recogida

En cuanto a la vinculación con la realidad, fue posible reconocer que sólo la quinta parte de los problemas propuestos pertenece al ámbito intra-matemático. El resto (la gran mayoría) involucra personas y objetos concretos en alguna situación relativamente cotidiana.

El registro de representación predominante fue el coloquial. La quinta parte incluye, además, al registro gráfico, en el que se realizan bocetos de dibujos matemáticos que portan información. Sólo dos casos incluyen al registro tabular entre sus datos y el simbólico algebraico está ausente.

Seguidamente se muestran los contenidos matemáticos a los que se detectó que aluden los problemas recolectados. Entre paréntesis se muestra la cantidad de ellos que hacen referencia a cada contenido, un mismo problema puede estar contemplado en más de una categoría.

- proporcionalidad directa (8);
- sistemas de ecuaciones (6);
- fracciones (5); trigonometría (5);
- área; ecuaciones (4);
- perímetro (3); volumen (3);
- elementos de triángulos (2); combinatoria (2); semejanza de triángulos (2); construcciones geométricas (2);
- ángulos (1); divisibilidad (1); números enteros (1); coordenadas cartesianas (1); crecimiento exponencial (1); factorización de polinomios (1); interpretación del gráfico de una función (1); números complejos (1); optimización (1).

Conclusiones

Cabe mencionar que la actividad de referencia (que los participantes del Curso compartan enunciados de problemas que suelen usar en sus clases) sirvió para profundizar el grado de conciencia acerca de los elementos a tener en cuenta en los problemas que los docentes en

Matemática les proponen a sus alumnos (Petrone, Sgreccia, Mascó et al., 2011). Tales elementos se sintetizaron en las categorías de análisis que aquí se esbozaron.

A continuación se mencionan algunas de las reflexiones surgidas en el marco del Curso y enriquecidas por los aportes del equipo de investigación en relación a las consideraciones que deben tenerse al momento de pensar una propuesta de enseñanza aprendizaje basada en problemas (Petrone, Sgreccia, Contreras et al., 2011).

Es deseable que los docentes:

- Seleccionen situaciones problemáticas que constituyan un desafío para los alumnos aprovechando su carácter motivador, pero que a su vez, que puedan ser abordadas a partir de sus conocimientos previos para que no se constituyan en promotoras del desánimo.
- Anticipen posibles dificultades y preguntas que surjan durante la resolución y organicen sugerencias para orientar a sus alumnos. Para ello, es fundamental que resuelvan estas actividades previamente.
- Reflexionen sobre las habilidades que se busca desarrollar y si las actividades propuestas son adecuadas y acordes para lograr ese fin.
- Redacten clara y correctamente los problemas atendiendo a su claridad semántica, y precisión matemática.
- Propongan problemas de complejidad gradualmente creciente teniendo en cuenta el momento del proceso para el que son más adecuados.

Por consiguiente, deberían evitar:

- Plantear problemas innecesariamente complejos.
- Subestimar el nivel intelectual de los alumnos.
- Redactar problemas con enunciados confusos o incompletos.
- Incorporar datos que generen contradicciones o no explicitar datos necesarios para la resolución de las situaciones.
- Plantear situaciones problemáticas muy alejadas de la realidad.

En cuanto a las decisiones didácticas involucradas en la actividad de resolución de problemas, caben algunas reflexiones:

Se considera que constituye una decisión (fundamentada) del docente cuánto se destina a trabajar sobre las vinculaciones entre las distintas formas de resolución de un problema, en función de para qué sirve. Incluso, a partir de un problema inicial pueden surgir muchos (otros) problemas (situaciones más generales o más particulares, relativizadas según el universo en el que cada uno se mueve), producto de ir metiéndose cada vez más en el problema, donde se van realizando restricciones o adaptaciones a la pregunta original. Por ejemplo, ante la consigna "determinar qué cuadrilátero se forma al unir los puntos medios de un cuadrilátero dado", precisar condiciones adicionales sobre los datos del problema para lograr que el cuadrilátero que se obtiene cumpla determinadas características, por ejemplo "tener sus lados congruentes", "tener sus ángulos congruentes", "tener pares de lados paralelos". También, a partir de interrogantes que van surgiendo, pueden quedar algunas cuestiones "para seguir pensando" e ir retomándolas luego. El problema original se puede ir modificando dependiendo de la reflexión que se realice en la clase. Esto es, surgen nuevos problemas a partir de lo que emerge en la clase.

Así, por ejemplo, el problema originalmente presentado:

> (P-38) *Claudia compró un terreno en un country y quiere instalar allí una pileta de natación rectangular. El arquitecto le dijo que, para que el diseño sea armonioso, su pileta debe tener el doble de largo que de ancho y los entendidos opinan que la profundidad debe ser la mitad del ancho. Para hacer un presupuesto, averigua que el material para las paredes y el piso cuesta \$75 el m^2; la soldadura para las juntas \$40 el m; la excavación y colocación \$50 el m^3 y el traslado de materiales \$100.*
>
> *a) ¿Cuánto costará a Claudia una pileta de 5m de ancho?*
>
> *b) Si Claudia dispone de \$10000, ¿puede construir una pileta de 8 m de largo?*
>
> *c) ¿Cuáles son las dimensiones de la pileta más grande que puede construir con \$5665?*

Puede tener sus variantes si parte de los datos del enunciado se presentan mediante un esquema representando la pileta en cuestión. Los costos, dados como números, podrían sustituirse por letras. Se les da así forma de variables y el problema involucra de manera más explícita al álgebra. Otros interrogantes se pueden agregar, como por ejemplo: *En otra empresa el costo de los materiales es de \$80 el m^2, \$35 el m^3 y \$120 el traslado de materiales, ¿cuál de las dos empresas conviene?*

Aquí aparece entonces la importancia del tiempo (o momento) asignado a las puestas en común de las producciones de los alumnos en la clase, acorde con una concepción de aprendizaje no-lineal, que tiene idas y vueltas, y que tiene que ver también con prácticas instaladas (en docentes y alumnos) tanto en la vida cotidiana como en las experiencias escolares previas. Una parte del

trabajo matemático es decidir qué cosas (conocimientos, relaciones, instrumentos) utilizar, lo cual tiene que ver mucho con las preguntas que van generando los alumnos. Ciertos momentos son cruciales y pretender acelerarlos no permite aprovechar en su totalidad sus riquezas, ya que es trascendente que cada uno haga su propia síntesis, a partir de los elementos con los que cuenta. Así, aparecen distintos momentos de trabajo matemático en la clase: el de producir una respuesta y el de producir una explicación o justificación de esa respuesta, de comunicar al resto (docente y compañeros). Se trata de decisiones didácticas que ponen el eje en "hacer Matemática" en la clase.

Para finalizar, queremos destacar que la mayoría de los docentes participantes del Curso expresaron la importancia de contar con espacios destinados a la puesta en común de sus propuestas a fin de que, a partir de la interacción con sus pares, surjan aspectos enriquecedores de sus propias prácticas de enseñanza.

Referencias bibliográficas

Álvarez Caneda, M.Y., Alonso Berenguer, I. y Gorina Sánchez, A. (2012). Dinámica del razonamiento inductivo en la resolución de problemas matemáticos. Una propuesta didáctica. En R. Flores (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 25, 625-634

Bravin, C. y Pievi, N. (2008). *Documento metodológico orientador para la investigación educativa*. Buenos Aires: Ministerio de Educación.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, P. (2006). *Metodología de la investigación*. México DF: Mc Graw Hill.

Gaulin, D. (2001). Tendencias actuales de la resolución de problemas. *Sigma, 19*, 51-63.

Guzmán, M. de (1993). Enseñanza de la Matemática. En D. Gil y M. de Guzmán. *Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. Tendencias e Innovaciones* (pp.62-81). Madrid: Popular / Ministerio de Educación y Ciencia de España.

Petrone, E., Sgreccia, N., Contreras, N., Mascó, P., Crevacuore, N., Ferrari, N. y Reynoso, E. (2010). Enseñar Matemática mediante problemas en la escuela secundaria. *Conexión: Revista de Investigaciones y Propuestas educativas, 8*, 185-194.

Petrone, E., Sgreccia, N., Contreras, N., Mascó, P., Crevacuore, N., Ferrari, N. y Reynoso, E. (2011). *La Enseñanza de Matemática usando Resolución de Problemas*. Ponencia presentada en las VI Jornadas Nacionales de Matemáticas. La Rioja.

Petrone, E., Sgreccia, N., Mascó, P., Crevacuore, N., Contreras, N., Ferrari, N. y Reynoso, E. (2011). *Una experiencia de capacitación docente en enseñanza de la Matemática a través de*

problemas: análisis de enunciados. Ponencia presentada en las IV Jornadas de Educación Matemática y I Jornadas en Investigación en Educación Matemática. Santa Fe.

RED DE COLABORACIÓN EN INVESTIGACIÓN DE LA EDUCACIÓN ESTADÍSTICA

José Armando Albert, María Inés Rodríguez, Sergio Hernández, José Luis Torres, Hugo Alvarado, Noelia Bertorello, Gisela Albrecht y Ana María Ruiz.

Tecnológico de Monterrey	México
Universidad Veracruzana	
Instituto Politécnico Nacional	
Universidad Nacional de Río Cuarto	Argentina
Universidad Nacional del Litoral	
Universidad Católica de la Santísima Concepción	Chile

albert@itesm.mx, mrodriguezbriguet@gmail.com, shg5712@gmail.com, jeluistg@yahoo.com.mx, alvaradomartinez@ucsc.cl, noelia_bertorello@hotmail.com, giselaalbrecht@hotmail.com, anamaruiz5@hotmail.com

Resumen. Nuestro grupo de trabajo busca iniciar una red de colaboración de grupos de investigación en educación de la probabilidad y Estadística a nivel iberoamericano bajo la tutela de la RELME. El interés por la educación estadística no es nuevo, pues desde principios de la década de los 90's el International Statistical Institute (ISI) fundó la International Association for Statistical Education (IASE). Desde entonces muchas acciones se han seguido a favor de la educación estadística, sin embargo, hacen falta iniciativas que ayuden a la interacción y colaboración de los grupos regionales de educación estadística iberoamericanos.

Palabras clave: educación estadística; investigación; red colaborativa

Abstract. Our work group looking to start a collaborative network of research groups in probability and statistics education at an Iberoamerican level under the tutelage of the RELME. The interest on statistical education is not new, because since the early 90's the International Statistical Institute (ISI) founded the International Association for Statistical Education (IASE). Since then many actions have been followed for statistical education, however, we need initiatives that help the interaction and collaboration of regional groups of Iberoamerican statistical education.

Key words: statistical education; research; collaborative network

Introducción

La presente propuesta de Grupo de trabajo busca iniciar la formación de una red de colaboración de grupos de investigación e innovación en educación de la probabilidad y Estadística a nivel iberoamericano, bajo la tutela de RELME y conocer a través de algunos de sus representantes las líneas de investigación y publicaciones relevantes de sus equipos.

El interés por la educación estadística no es nuevo, desde principios de la década de los 90's el International *Statistical Institute* (ISI) funda la *International Association for Statistical Education* (IASE) y desde entonces muchas acciones se han seguido a nivel internacional a favor de la educación estadística. Existen también, espacios de publicación como *Statistics Education Research Journal* (SERJ), proyectos de difusión como el *International Statistical Literacy Project* (ISLP) y congresos como el *International Conference on Teaching Statistics* (ICOTS) entre otros. Otras comunidades de estadísticos también han estado interesadas en la educación estadística como la *American Statistical Association* (ASA) que mantiene vínculos de colaboración con el ISI y la IASE. También desde la Didáctica de la Matemáticas se han interesado, tal el caso del *International Committee on Matematical Instruction* (ICMI) que mantiene en sus eventos Mesas de trabajo tales como las *IASE*

Round Tables (2004, 2008, 2012) y las *Joint ICMI/IASE Study*. Por su parte, el *International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME) tiene desde 1994, un grupo temático en educación estocástica.

Esta iniciativa de Grupo de discusión tiene el propósito que RELME pueda contar con un grupo temático permanente de educación estadística. Diversos esfuerzos regionales iberoamericanos se han realizado, tal es el caso de la *Asociación Mexicana de Estadística* (AME) que ha fundado recientemente su rama educativa y ya incluye en sus espacios de reunión anual un grupo temático de enseñanza de la Estadística (Albert, Cuevas, Pinto y Hernández, 2012). También la *Escuela de Investigación en Matemática Educativa* (EIME), en los últimos años, ha mantenido su interés por apoyar la investigación en esta área a través de un grupo temático. En su última reunión, diciembre de 2012, este grupo temático convocó a formar una red de grupos de investigación nacional y asistieron poco más de 10 grupos de diversas instituciones educativas y de investigación (Ruiz et al., 2012). Esfuerzos semejantes se están haciendo en otros países, tal el caso de la *Sociedad Argentina de Estadística* (SAE) que desde sus orígenes tiene como uno de sus objetivos tomar conciencia e impulsar la educación estadística en sus distintos niveles educativos, creando en 2006 el *Grupo de Enseñanza de la Estadística* (GENE) como una sección dentro de su organización. Desde entonces en sus coloquios anuales se incluye entre los temas de interés la Enseñanza de la Estadística. En su XXIX Coloquio de 2011 hizo un Encuentro Regional de Alfabetización Estadística con la participación de panelistas de Uruguay, Colombia, Chile y Argentina. Por su parte, la Asociación Brasileña de Estadística (ABE) también se ha mostrado interesada en la educación estadística, de hecho fue anfitriona del ICOTS 7 (2006) en colaboración con la IASE, en Salvador Bahía, y difunde a través de su portal investigaciones y eventos relativos a educación estadística. De manera semejante, se pueden identificar en los demás países latinoamericanos comunidades de estadísticos y de educadores en estadística haciendo un esfuerzo por responder a la demanda social de formación de estudiantes y también de profesionales que requieren de la estadística, como el caso del *Congreso Latinoamericano de Sociedades de Estadística* (CLATSE) que se realiza cada dos años entre las asociaciones de estadísticos de varios países latinoamericanos donde la temática educativa está incluida. Es por eso que este grupo de trabajo pretende ofrecer un espacio a equipos de investigación y difusión de la estadística, de darse a conocer y de establecer una agenda de colaboración para constituir una red latinoamericana de cooperación y fomento de la investigación educativa en estadística y de la cultura estadística.

Mecánica de trabajo

En Relme27 la mecánica del grupo de trabajo consistió en:

(1) Presentación del grupo de investigación por un representante, su línea de investigación y publicaciones relevantes;

(2) Discusión sobre la formación de una Red de colaboración latinoamericana;

(3) Discusión sobre la vinculación de la Red con la IASE;

(4) Resultados de la reunión.

A continuación, con el propósito de conocer a los miembros de la red, así como sus líneas de trabajo que faciliten la conformación de redes colaborativas, se presentan algunos de los grupos participantes.

México

En México se desarrolla la investigación en didáctica de la estadística desde diversos grupos y niveles educativos, así como de redes colaborativas. A continuación se muestran algunos de ellos.

Grupo de Investigación en educación estadística del Tecnológico de Monterrey.

Armando Albert, Blanca Ruiz, Tomás Sánchez, Eusebio Olivo, Ma. Guadalupe Tobías.

Los primeros trabajos de investigación del grupo comenzaron en colaboración con Carmen Batanero, (Ruiz, Albert y Batanero, 2003). En esos trabajos se hizo un primer acercamiento desde las componentes cognitiva y de enseñanza de la variable aleatoria. En Ruiz (2006) se hizo un avance significativo al conocimiento del problema. Estas investigaciones reportan que históricamente surgieron dos concepciones diferentes de la variable aleatoria: como *magnitudes aleatorias* (Laplace, Poisson, Parzen) que son los resultados numéricos de un fenómeno aleatorio y como *variables aleatorias* (Kolmogorov, Petrov, Lyapunov, entre otros), ambas vigentes en las prácticas de ingeniería y ciencia. También se identificó el predominio de la concepción de magnitud aleatoria como obstáculo para el surgimiento formal de la variable aleatoria y su naturaleza funcional. Con el trabajo de Sánchez, Albert y Ruiz (2011) se da continuidad a esta línea al abordar a la media muestral como *estadístico*. Entretanto, Olivo (2008) estudió la comprensión de los intervalos de confianza en estudiantes de ingeniería y concluyó que hay una necesidad de vincular las distribuciones muestrales con la inferencia estadística, cosa difícil de lograr sin la visualización de la media muestral como una variable aleatoria. Por otra parte, en una propuesta de actividad para explorar la construcción del razonamiento inferencial en estudiantes del Tecnológico, Sánchez, Albert y Ruiz (2011) encontraron que los estudiantes, a través de muestreos sucesivos, pueden concebir una muestra aleatoria como un bloque aleatorio, pero tienen dificultades para asociarlas a una función de ellas, que es el estadístico de medias muestrales, como otra variable con su propia distribución de probabilidad.

Actualmente las investigaciones de este equipo se enfocan en tres direcciones, (1) la profundización sobre la epistemología del devenir histórico de la variable aleatoria, (2) el reconocimiento de la estadística en las prácticas de uso de las comunidades de ciencia e ingeniería y (3) la planeación y diseño de actividades y proyectos que puedan responder tanto a la construcción del conocimiento de los estudiantes como a las exigencias curriculares de nuestra institución. También se busca la inclusión de más profesores de Probabilidad y Estadística en proyectos de investigación e innovación educativas.

Red de investigación en educación de la probabilidad y estadística (RIEPE)

Sergio Hernández, Blanca Ruiz, Armando Albert, Jesús Pinto, Humberto Cuevas. Universidad Veracruzana, Tecnológico de Monterrey (2), Universidad Autónoma de Yucatán, Instituto Tecnológico de Chihuahua II.

Se trata de un esfuerzo coordinado desde la *Asociación Mexicana de Estadística* (AME) por crear y consolidar una red colaborativa de grupos de investigación en educación estadística. La iniciativa tuvo como punto de partida los grupos temáticos que ofrece la Escuela de Invierno en Matemática educativa de 2011 y 2012.

Por una parte, se observó que aún se está lejos de conformar una comunidad de colaboración debido a varios problemas, entre los que destacan los siguientes: (1) Los grupos de trabajo colegiado trabajan relativamente aislados, (2) No existe un consenso respecto de los problemas torales que aquejan la educación estocástica en todos los niveles educativos y (3) Es indispensable diseñar nuevos espacios y mecanismos de interacción entre las diversas comunidades epistémicas que cultivan estas disciplinas, además de perfeccionar las ya existentes. Pero por otra, se hace indispensable un espacio de la interacción entre los profesores e investigadores en educación estadística en México, ya que la socialización de su experiencia docente, la difusión de sus hallazgos de investigación y el debate continuo sobre las mejores prácticas en el campo de la estadística, la probabilidad y el análisis de datos, permitirá diseñar y poner en práctica didácticas innovadoras y sus mecanismos para difundirlas y debatirlas entre pares.

Aprovechando los actuales avances en el uso de las tecnologías de la información y la comunicación, se consideró adecuado crear un portal web que fuera interactivo y flexible para los integrantes de la red. Es importante destacar que desde el inicio se consideró necesario que la red contara con el aval de un organismo colegiado de reconocido prestigio. La AME, es el máximo referente en México y cuenta con un alto grado de aceptación por otros organismos y comunidades epistémicas internacionales, por lo que la planeación, organización y configuración de

la red se efectuó siguiendo rigurosamente los lineamientos académicos, metodológicos y formales que esta distinguida asociación exigió. Es así que, en 2012, la AME avaló la creación de la RIEPE.

Red de Investigación e Innovación en Educación Estadística y Matemática Educativa

José Luis Torres Guerrero y Blanca R. Ruiz Hernández, Instituto Politécnico Nacional, Tecnológico de Monterrey.

La Red de Investigación e Innovación en Educación Estadística y Matemática Educativa (RIIEEME) es una red de profesores-investigadores, principalmente del Instituto Politécnico Nacional, de México, pero en la que también hay integrantes de otras instituciones educativas. Al principio estuvo formada por profesores del área de matemáticas, pero después se integraron de otras disciplinas como es la bioquímica, la química, la pedagogía y la cultura financiera. Nuestras actividades se sustentan en cinco supuestos: los problemas importantes de la educación son problemas de sistema; para avanzar en su solución el protagonista es el cuerpo académico; las estrategias de mejora deben apuntar preferentemente hacia el aprendizaje; se hace uso del conocimiento generado por la investigación de didácticas específicas; y, la viabilidad de planes de mejora depende de la conformación de redes de agentes educativos que se responsabilicen de proyectos de innovación e investigación educativas.

Los esfuerzos en investigación e innovación se centran en el diseño de actividades de aprendizaje y en el estudio, diseño e implementación de innovaciones educativas. Especialmente hay interés por estudiar la simulación y la variable aleatoria.

Se ha participado en la elaboración de paquetes didácticos para el bachillerato, así como el diseño e implementación del Seminario Repensar las Matemáticas (SRM), que ya va en su octavo ciclo con algo más de 60 sesiones.

Entre los propósitos inmediatos RIIEEME planea continuar con el diseño e implementación de actividades de aprendizaje en probabilidad y estadística, así como en otras áreas de matemáticas, pero también en bioquímica y cultura financiera para incluir, en lo posible, actividades multidisciplinarias.

Chile

Hugo Alvarado Martínez, Universidad Católica de la Santísima Concepción

La investigación en educación estadística es incipiente en el contexto universitario, en cuanto a los procesos de aprendizaje de los estudiantes y la forma de abordar su enseñanza. Las distribuciones muestrales es un tópico de la estadística considerada difícil para los estudiantes universitarios, ya que conjuga muchos conceptos asociados, diversos tipos de lenguaje y representaciones, propiedades, procedimientos y argumentos. En este contexto, durante ocho años, se ha estudiado

el significado de algunas nociones de estadística y la necesidad de diseñar e implementar nuevos dispositivos didácticos, situado desde la perspectiva del Enfoque Ontosemiótico. En particular, hemos analizado la comprensión teórica y práctica de las distribuciones muestrales y su alcance en la estimación de parámetros por intervalos de confianza en estudiantes universitarios, al finalizar una experiencia de enseñanza basada en la simulación y de forma algebraica.

Los resultados del estudio, con base en nuestra visión teórica, muestran la complejidad de la comprensión del objeto "distribución muestral", caracterizada por los aciertos, dificultades y errores de comprensión de conceptos y propiedades vinculadas al tema. Además, hemos intentado completar los estudios de investigación sobre procesos de estudio del teorema central del límite. Se ha establecido los intervalos de confianza como un campo de problemas dentro de las distribuciones muestrales, mediante la selección adecuada de la distribución muestral en la estimación de parámetros. (Alvarado, H. Galindo, M. & Retamal. L., 2013)

Muchos de los conceptos y propiedades observadas con estudiantes universitarios, pueden ser analizados experimentalmente en el contexto escolar. La introducción de elementos de análisis didáctico en la enseñanza de la estadística en tópicos clásicos de la educación superior nos conducen a investigar sobre las discontinuidades de estadística y su didáctica entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria, y acerca de las actitudes y conocimientos de probabilidad y estadística en los profesores de matemáticas.

Argentina

Grupo de investigación en Educación Estocástica. Universidad Nacional del Litoral

Noelia Bertorello, Gisela Albrecht, Liliana Tauber.

Este grupo ha llevado a cabo diversos trabajos de investigación enmarcados en Proyectos de investigación de la UNL, desde el año 2002.

En el periodo 2006-2009, se desarrolló uno de estos proyectos titulado: *Estudio sobre la comprensión de los significados de conceptos estocásticos en alumnos del profesorado en Matemática y de sus implicancias en la práctica docente en la EGB y el Polimodal.*

Algunos de los resultados que se han logrado determinar a partir de este proyecto han sido:

- Detectar los conflictos y dificultades de comprensión básicos de los alumnos en relación con los conceptos estadísticos descriptivos y exploratorios.
- Identificar errores y omisiones de los conceptos estocásticos básicos en los libros de texto.
- Elaborar secuencias didácticas centradas en conceptos estocásticos básicos.

- Elaborar, implementar y analizar una encuesta basada en la lectura e interpretación intuitiva de resúmenes gráficos y numéricos.

En el periodo 2009-2012, el título del proyecto llevado a cabo fue: *Alfabetización Estadística en la Educación Formal,* el cual formaba parte de un programa de investigación de redes dirigido a: la Alfabetización Científica de la ciudadanía. A partir de este proyecto, se identificaron los nexos entre la estadística como metodología y la alfabetización del ciudadano en distintas profesiones. De esta manera, se trabajó con profesionales y estudiantes de las Ciencias Económicas y de las Ciencias Agropecuarias. Primeramente, se detectaron actitudes, creencias y obstáculos en la comprensión de las ideas estocásticas fundamentales de los profesores de matemática en ejercicio que se desempeñan en distintos niveles de la educación formal.

En la actualidad se está desarrollando el proyecto titulado: *La inferencia informal como objetivo central de la educación estadística en estudiantes universitarios*.

Sus objetivos generales son:

- Elaborar un marco teórico sobre pensamiento estadístico basado en dos ideas fundamentales de la inferencia estadística informal: aleatoriedad y variabilidad.
- Realizar un estudio exploratorio centrado en la detección de las concepciones estocásticas utilizadas por estudiantes universitarios al resolver actividades centradas en la generación de las dos ideas fundamentales mencionadas en el objetivo anterior.
- Realizar un estudio de casos que permita identificar distintos tipos de razonamientos utilizados por estudiantes universitarios al enfrentarse a tareas de inferencia informal.

Grupo de docentes investigadores de la Universidad Nacional de San Juan

Ana María Ruiz, Adriana Mallea, Myriam Herrera.

Actualmente el grupo está a cargo del dictado de cátedras de Estadística y Probabilidad, en particular, en carreras de formador de formadores (profesorados de nivel medio y superior).

Las líneas de investigación y de acción del grupo están centradas en la problemática de la enseñanza-aprendizaje de la estadística y probabilidad en los niveles preuniversitarios.

Para dar respuesta a los interrogantes sobre el qué, el cómo y cuándo trabajar estas temáticas en los niveles primario y medio se han desarrollado proyectos de investigación tales como: *Diseño Curricular y Metodológico sobre la enseñanza de la Estadística y Probabilidad en la Educación General Básica (1° y 2° Ciclos)* y *Diseño Curricular y Metodológico sobre la enseñanza de la Estadística en el Nivel Polimodal (Medio)*

Entre los productos más destacados de estos proyectos se pueden mencionar, libros y capítulos de libros (Mallea, A., Herrera, M.; Ruiz A.M., 2003) como también una tesis de Maestría. La investigación realizada en dicha tesis ha revelado que, aunque la instrucción formal actual parece reducir la proporción de estudiantes que sostienen conceptos erróneos respecto al comportamiento del azar, un número sustancial de estudiantes con entrenamiento formal continúa teniéndolos y muchos son debido a la instrucción recibida. (Ruíz, A.M.; Rodríguez, M.I., 2010)

Esto define la necesidad de seguir con las líneas de acción de capacitación de docentes en ejercicio y futuros docentes. Razón por la cual, el grupo participa activamente en la capacitación de docentes de los distintos niveles educativos mediante el dictado de cursos y talleres en la provincia y como profesores invitados en congresos nacionales e internacionales. Se refuerza la formación de profesores de matemática incluyéndose el análisis didáctico de contenidos estadísticos en diversas asignaturas del currículo.

Para el proyecto de investigación trianual próximo el grupo se propone analizar variables que influyen en el desgranamiento en el nivel superior para lo cual se van a considerar cohortes de alumnos de carreras que se estudian en las facultades: Facultad de Filosofía, Humanidades y Artes y Facultad de Ciencias Exactas, de la UNSJ.

Grupo de investigación de la enseñanza de la Estadística. Universidad Nacional de Río Cuarto

Héctor Agnelli, María Inés Rodríguez, María Inés Herrera, Adriana Magallanes.

Los miembros del equipo desarrollan actividades de docencia, investigación y extensión en el Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Exactas, siendo responsables del dictado de las asignaturas de Estadística, Probabilidad y Diseño Experimental de todas las carreras de la Facultad, entre ellas del Profesorado de Matemáticas. Esta actividad académica los puso en conocimiento de algunas dificultades en el aprendizaje y enseñanza de la disciplina, motivándolos a investigar y estudiar desde inicios de la década anterior distintas problemáticas relacionadas con el tema, que condujeron a realizar algunas tesis de maestría en Didáctica de la Matemática, como así también de estadística Aplicada. Además se han obtenido de distintos organismos nacionales e internacionales, subsidios para llevar a cabo varios proyectos de investigación, algunos de los cuales son:

- La probabilidad en la escuela media.
- Estudio teórico y experimental sobre dificultades conceptuales, procedimentales y metodológicas de la estadística experimental a nivel universitario.

- La Estadística Inferencial a Nivel Universitario: estrategias innovadoras para el desarrollo del razonamiento estadístico
- Inferencia Bayesiana.
- Razonamiento acerca del valor p y de la significación estadística
- Remuestreo e Inferencia Estadística.

Como síntesis de nuestras investigaciones podemos decir respecto a las pruebas de hipótesis, que la presencia de tres enfoques, el de Fisher, el de Neyman y Pearson y el Bayesiano, no siempre reconciliables, traen dificultades didácticas singulares que hay que tomar en cuenta en su enseñanza. Por otra parte, las dificultades sobresalientes del valor p tales como: la ilusión de la demostración probabilística por contradicción; atribuciones erróneas sobre su demostración de teorías verdaderas; creencias como la de que pequeños valores de p constituyen evidencia a favor de la replicación de los resultados o que se trata de un efecto de tratamiento de gran magnitud, ponen en alerta a profesores e investigadores para mejorar la enseñanza actual de la inferencia estadística. (Rodríguez, M.I.; Agnelli, H.; Albert, A., 2010).

Es recomendable que durante el desarrollo de los cursos, se ponga más énfasis en los aspectos conceptuales en los que se basa la inferencia estadística, seleccionando estrategias de enseñanza activa que eviten la simple transferencia de habilidades técnicas y conduzcan en cambio, a priorizar el desarrollo del razonamiento conceptual y la interpretación.

Consideramos que es importante hacer conocer las controversias que aún persisten acerca de los distintos enfoques relativos a las pruebas de hipótesis, mostrar sus diferencias y explotar las capacidades de cada uno. (Rodríguez, M.I.; Albert, A.; Agnelli, H., 2009). En particular, parece oportuno introducir la metodología bayesiana como una alternativa, no necesariamente antagónica, a la inferencia frecuencial clásica.

Conclusiones

Como resultado del Grupo temático se acordó iniciar una Red Latinoamericana de Investigación en Educación Estadística (RELIEE), para lo cual se hizo la petición formal de pertenencia de la Red al Clame. Se redactaron los estatutos básicos y se conformó un comité directivo de la Red, de dos años de vigencia, con el propósito de diseñar e implementar un plan de trabajo. También se elaboró una base de datos que permitirá mantener la comunicación y se convino en dar prioridad en la agenda a cuatro puntos: conocimiento (de los grupos, su producción y líneas de trabajo), organización (interna y de colaboración), comunicación permanente y compromiso de participar activamente en la siguiente RELME.

Referencias bibliográficas

Albert, J. A., Cuevas, J. H., Pinto J. E. y Hernández, S. (2012). Elementos para la formación de una comunidad de práctica de enseñanza e Investigación en educación estadística. En *Foro XXVII Nacional de Estadística*. México: UAEM.

Alvarado, H., Galindo, M. & Retamal, L. (2013). Comprensión de la distribución muestral mediante configuraciones didácticas y su implicación en la inferencia estadística. *Enseñanza de las Ciencias*, 31(2), 75-91.

Mallea, A., Herrera, M., Ruiz, A.M. (2003). *Estadística en el nivel Polimodal*. San Juan, Argentina: Ed. Universidad Nacional de San Juan.

Olivo, E. (2008*). Significados del intervalo de confianza en la enseñanza de la ingeniería en México*. Tesis doctoral sin publicar. Granada, España: Universidad de Granada.

Rodríguez M.I., Albert, A., Agnelli H. (2009). Pruebas de hipótesis y el valor p: usos e interpretaciones.En *Memorias de la XII Escuela de Invierno en Matemática Educativa*. 104-117.

Rodríguez M.I., Agnelli, H. y Albert A. (2010). Pruebas de hipótesis estadísticas: algunas consideraciones para la práctica docente. En *Revista de Educación Matemática de la UMA* Vol.25.1. 2010. Disponible en: http://www.notiuma.santafe-conicet.gov.ar

Ruíz A. M. & Rodríguez M.I (2010). Estudio comparativo sobre heurísticas utilizadas por estudiantes. *Revista de Educación Matemática de la UMA* Vol. 25(1). Disponible en: http://www.notiuma.santafe-conicet.gov.ar

Ruiz, B., Albert, J. A. y Batanero, C. (2003). Hacia una didáctica de la variable aleatoria. *27o. Congreso nacional de estadística e investigación de operaciones*. Lérida, España.

Ruiz, B. (2006). *Un acercamiento cognitivo y epistemológico a la didáctica de la variable aleatoria* (Tesis de Maestría). México: CICATA-IPN.

Ruiz, B., Albert, J. A., Hernández, S., Pinto J., Sánchez, E., Inzunza, S., Maldonado, E. (2012). Estadística, probabilidad y análisis de datos: grupos de trabajo en México. En *Memoria de la XV Escuela de Invierno en Matemática Educativa*. México: Red de Cimates A.C., 480-493.

Sánchez, T., Albert, J. A. y Ruiz, B. (2011). Elementos cognitivos del estadístico como variable aleatoria: el caso de la media. PUAB, México: *Encuentro Internacional de Enseñanza en Didáctica de la Probabilidad y Estadística I*. 67-75.

FATORES MOTIVACIONAIS NA AUTORREGULAÇÃO DA APRENDIZAGEM DE ESTATÍSTICA DE ESTUDANTES DE PSICOLOGIA

[1]Felipe Franco Gabriel; [2]Maria Helena Palma de Oliveira
Universidade Bandeirante de São Paulo Brasil
[1]felipe.gabriel@gmail.com; [2] mhelenapalma@gmail.com

Resumen. Estudou-se os fatores motivacionais na utilização de estratégias na autorregulação da aprendizagem de Estatística de 167 estudantes de Psicologia de São Paulo. A autorregulação é a capacidade de gerir por si mesmo projetos, progressos e estratégias diante de tarefas e obstáculos. Processos afetivos e processos cognitivos desenvolvem-se de modo relacional. A maioria dos estudantes não utiliza estratégias de atenção na aprendizagem de Estatística, utiliza-as para outras disciplinas do curso. Os estudantes apresentam sentimentos negativos em relação à Estatística. Devido à falta de motivação, os estudantes de Psicologia não elaboram comportamentos autorregulatórios para a aprendizagem de Estatística.
Palabras clave: autorregulação; estratégias de atenção; aprendizagem de estatística; fatores motivacionais;estudantes de psicologia
Abstract. We studied the motivational factors in the use of self-regulation strategies in the learning of Statistics of 167 Psychology students of São Paulo. Self-regulation is the ability to manage by yourself projects, strategies and progress on tasks and obstacles. Affective processes and cognitive processes develop themselves relationally. Most students do not use strategies of attention in the learning of Statistics, using them to other course subjects. Students have negative feelings towards Statistics. Due to lack of motivation, psychology students do not develop self-regulatory behaviors to learning Statistics.
Key words: self-regulation; strategies of attention; statistics learning; motivational factors; students of psychology

Introdução

Este estudo buscou analisar os fatores motivacionais na construção e utilização de estratégias no processo de autorregulação da aprendizagem de estatística de estudantes de um curso de Psicologia de universidade privada de São Paulo. Os dados foram coletados em 2012. As análises partiram de uma abordagem sociohistórica que considera a autorregulação da aprendizagem como a capacidade do sujeito gerir por si mesmo projetos, progressos e estratégias diante de tarefas e obstáculos. Nesse sentido, as estratégias são ações deliberadas para alcançar objetivos específicos, implicando tanto recursos cognitivos quanto recursos motivacionais que envolvem a tarefa (Rosário, Perez e Gonzáles-Pienda, 2004).

A autorregulação da aprendizagem estatística pode permitir ao aluno obter níveis mais altos de letramento estatístico, necessários para o exercício da cidadania. Pensando em uma pessoa adulta, que vive em uma sociedade industrializada, Gal (2002) define letramento estatístico como a inter-relação de dois componentes: competência para interpretar e avaliar criticamente a informação estatística, os argumentos relacionados aos dados ou a fenômenos estocásticos; competência para discutir ou comunicar as reações para tais informações estatísticas, como entendimentos do significado da informação, opiniões sobre as implicações desta informação ou considerações sobre a aceitação das conclusões fornecidas (Gal, 2002).

Ser letrado estatisticamente auxilia o indivíduo a entender fenômenos e tendências de relevância social e pessoal tais como as taxas de criminalidade, o crescimento populacional, a produção industrial, o aproveitamento educacional, etc. (Gal, 2002). Os muitos contextos em que o letramento estatístico pode ser ativado indica que a maioria dos adultos são consumidores (ao invés de produtores) da informação estatística.

Salvador aponta uma certa relação entre o tipo de motivação e os enfoques de aprendizagem que os alunos adotam em uma atividade determinada de aprendizagem. A motivação mais intensa para a aprendizagem gera enfoque em maior profundidade. Salvador ((1994) chama a atenção, no entanto, para o caráter dinâmico dessa relação que é "forjada e modificada no decorrer da atividade de aprendizagem" (p.153).

Referencial teórico

Para Vygotsky (1995), os processos afetivos e os processos cognitivos não se desenvolvem de modo independente, desenvolvem-se de modo relacional. "A relação entre eles não é, no entanto, algo já formado e constante: surge ao longo do desenvolvimento e também se modifica" (p.131).

Conforme afirma Wertsch (1988), a consciência é o componente mais elevado na hierarquia vigotskiana. São dois os seus subcomponentes*: "o intelecto e a afetividade"* (p. 197). Assim, para Vygotsky, o desenvolvimento cognitivo e a afetividade formam um mesmo processo. Não é possível estudá-los com base na dicotomia, pois Vigotsky toma como unidade de análise a relação indivíduo-sociedade. Nem cognição, nem afetividade podem ser construídas pela determinação unilateral de um dos elementos.

Vygostsky (1995) destaca que "o pensamento propriamente dito é gerado pela motivação, isto é, por nossos desejos e necessidades, nossos interesses e emoções. Por trás de cada pensamento há uma tendência afetivo-volitiva" (p. 129).

O desenvolvimento do comportamento autorregulado, segundo Vygotsky (1978), necessita de três condições fundamentais: 1) orientação do plano intersubjetivo (social) para o plano intrasubjetivo (individual); 2) domínio de ferramentas culturais específicas; 3) envolvimento socioemocional com à tarefa.

O estudante ao interagir com o outro o faz no convívio com uma sociedade e apropria-se dos instrumentos transmitidos culturalmente, que irão auxiliá-lo em seu aprendizado. Esses instrumentos, assim como qualquer aprendizado, em um primeiro momento situam-se no plano intersubjetivo, ou seja, nas relações sociais e, conforme vão sendo apropriados, internalizam-se, passam para o plano intrasubjetivo. Nesse processo, primeiro o estudante passa por processos controlados pelo meio social (regulação) para depois avançar para ações do próprio planejamento,

execução e avaliação do que é proposto, ou seja, autorregula o seu comportamento (Vygotsky, 1995). O estudante por meio das ferramentas adquiridas na interação com o meio, passa do estágio de regulação externa assistida para a autorregulação interna (Vygotsky, 1978). Nessa perspectiva, o contexto interacional é essencial sobre o envolvimento afetivo do indivíduo com a tarefa, fazendo-o, estrategicamente, planejar e organizar as ferramentas e as informações que irá utilizar até concluir o seu objetivo.

Nas relações interacionais, "o meio social mostra-lhe quais estratégias são apropriadas ao seu objetivo de aprendizagem" (Oliveira; Gabriel; Kataoka, 2012) e o indivíduo vai gradualmente dominando essas ferramentas. Conforme (Fino, 2001), o estudante, aos poucos, adquire maior responsabilidade cognitiva sobre suas ações e gradualmente interioriza os procedimentos e os conhecimentos envolvidos; torna-se cada vez mais autorregulado na tarefa ou na habilidade.

O controle, consciente e reflexivo, do comportamento é importante na elaboração da autorregulação e é desenvolvido pela linguagem (Vygotsky, 1995). A linguagem é o primeiro meio pelo qual a cultura é transmitida e o primeiro veículo para a manifestação do pensamento e, posteriormente, da autorregulação. É por meio da linguagem que se dá o controle e a planificação das ações, que desempenham importante função reguladora no início do desenvolvimento da autorregulação e das funções mentais superiores (Vygotsky, 2003).

A apropriação de um sistema de signos culturais, expresso, por exemplo, em um idioma, por meio de comunicações verbais, permite que o pensamento passe a existir. Para Vygotsky (1995), a linguagem regula o pensamento e por meio de signos verbais, torna-o existente, pois o "pensamento não é simplesmente expresso em palavras; é por meio delas que ele passa a existir (p.108). A capacidade de simbolização propiciada pela internalização da linguagem permite a elaboração mental da ação e o planejamento sobre as diferentes partes que a compõe. Nesse sentido, o indivíduo consegue, por meio do pensamento, de maneira consciente e intencional, elaborar, organizar seus planos de ação e as estratégias que o ajudem em seu aprendizado.

Estratégias de aprendizagem são ações deliberadas para alcançar objetivos específicos; são respostas pessoais relativas às tarefas a serem realizadas, não se constituem como um guia pré-estabelecido; são ações selecionadas e aplicadas com flexibilidade à tarefa e envolvem recursos cognitivos e motivacionais; podem ser aplicadas a diferentes tipos de tarefas escolares para facilitar a apropriação do conhecimento (Rosário; Perez; Gonzáles-Pienda, 2004).

A atenção, como as demais capacidades especificamente humanas, é desenvolvida por fatores históricos e culturais, bem como pelo próprio desenvolvimento ontogenético. Veer e Valsiner (1996) destacam que os adultos fazem uso de meios externos para direcionar a atenção,

posteriormente internalizam esses instrumentos culturais e tornam-se capazes de selecionar uma informação necessaria, de assessorar os programas seletivos de ação e de manter controle permanente sobre eles. Segundo Luria (1979), o uso da atenção pode ser arbitrário ou involuntário. "O involuntário (...) é instintivo e é comum ao homem e ao animal. A atenção arbitrária é inerente ao homem" (p.11).

A interação é entendida como partilha, cooperação e confronto de informação, de conhecimentos e de posicionamentos que dinamizam a representação mental das tarefas, bem como repercutem no controle das atividades cognitivas e metacognitivas (Bilimória e Almeida, 2008).

A interação, expressa pela mediação social, é fundamental na teoria de Vigotski e é base do conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) definido como a distância entre o nível de desenvolvimento real, determinado pela capacidade de solução de problemas de modo independente, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado pela da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração de companheiros mais capazes (Vigotski, 2003). O nível de desenvolvimento potencial tem caráter interativo e social.

Método

Participaram desta pesquisa 167 alunos de graduação do bacharelado do curso de Psicologia, do período noturno de uma instituição particular na Grande São Paulo que concluíram a disciplina de Estatística no ano de 2011. Os dados foram coletados nos meses de junho e agosto de 2012.

Os alunos responderam a 4 instrumentos do tipo lápis e papel: questionário de perfil, escala de estratégias de atenção e de interação.

O questionário de perfil continha 15 perguntas que traçavam a identidade socioeducativa do aluno, abordando sua trajetória escolar, opinião sobre a importância, o sentimento e a idéia da Estatística bem como experiência com esta disciplina, além de questões a respeito da interação entre alunos e entre aluno e professor.

A escala de estratégias de atenção e de interação foi elaborada com 15 afirmativas, sendo 6 questões relativas a subescala de atenção e 9 questões relativas a subescala de interação e uma questão aberta. Para cada afirmativa, as possibilidades de resposta são: sempre (S), quase sempre (QS), quase nunca (QN) e nunca (N), em que será atribuída pontuação de 4 até 1 para as afirmativas positivas e de 1 até 4 para as afirmativas negativas, como representado no quadro 2.

A técnica multivariada de análise fatorial foi utilizada para descrever a estrutura de dependência dos itens da escala de estratégias de atenção e de interação sobre a qual serão identificadas suas respectivas dimensões.

A análise na pontuação geral nas duas escalas de acordo com as variáveis a serem levantadas no questionário de perfil foi feita por meio dos testes F (ANOVA). Quando o efeito da variável estudada foi considerado significativo, utilizou-se o teste F, as médias das categorias foram comparadas pelo teste Tukey, com nível de significância de 5%. Esse mesmo procedimento foi utilizado para analisar a pontuação na escala geral de acordo com as categorias de cada uma das questões do teste estatístico.

Para todas as análises foi utilizado o software SPSS (Statistical Package for Social Science), versão 15.0.

Resultados e discussões

A questão 6 do questionário de perfil buscou entender qual seria o principal motivo da escolha pelo curso de graduação. Dos respondentes, 78,7% (129) disseram que o principal motivo foi ser o curso que sempre quiseram fazer, 1,2% (2) responderam que foi pelo curso ter mercado de trabalho ou foi por exigência do trabalho atual e 1,8% (3) disseram que não sabiam o que queriam fazer. O restante, 18,3% (30), assinalou que ser por outro motivo e, na maior parte das explicações, foi pela identificação com a área e por gostar do tema. Esses resultados evidenciam que praticamente todos os participantes têm um envolvimento emocional positivo com o curso.

A questão 7 buscou saber se havia disciplinas na graduação que o estudante mais gostava e quais seriam. Dos 163 estudantes, 84,7% (138) responderam que existem tais disciplinas e 15,3% (25) que não. As disciplinas que os estudantes citaram foram bem diversificadas e as que continham alguma relação com o uso ou com o conhecimento prévio de algum conhecimento estatístico foi de 13,04% (18), tendo somente 2,17% (3), citado diretamente à disciplina de Estatística.

A questão 8 tem relação com a resposta relatada na questão 7, perguntando qual o principal motivo de gostar da disciplina apontada, 68,7% (101) responderam que o conteúdo da disciplina é muito importante/atrativo para a formação e para sua formação geral e 30,0% (44). Afirmaram ainda que metodologia, materiais didáticos e professor tornam a disciplina atrativa. Isso demonstra que os estudantes gostam das disciplinas por saberem que o conteúdo aprendido é atrativo e importante para a sua formação geral e pela forma como pode aprender o conteúdo, seja por materiais didáticos ou pela atuação do professor. Evidencia-se que o envolvimento socioemocional dos estudantes motiva o interesse pela matéria e influencia no significado que a mesma agrega e na forma como se dão as relações no contexto de sala de aula.

A questão 12 pergunta sobre a importância que o estudante atribui à Estatística para sua formação profissional. Dos 163 estudantes, 10,8% (15) consideram nada importante, 40,7% (68) como pouco importante e 47,3% (79) como importante ou muito importante. Nota-se que a maior parte dos

estudantes considera a Estatística importante ou muito importante, ou de alguma forma importante para sua formação profissional. Essa informação evidencia o significado que o indivíduo faz sobre a disciplina e sua compreensão de alguma forma do uso da Estatística em sua vida.

A questão 13 busca entender qual é o primeiro sentimento e a primeira idéia que o estudante tem em relação à Estatística. A tabela 1 mostra que seevidenciam sentimentos negativos 68,9% (111) de medo, raiva, desespero, angústia.

Tabela 1: Categorias do primeiro sentimento do estudante em relação à Estatística

Categorias do primeiro sentimento do estudante em relação à Estatística	Porcentagem (%)
Sentimento negativo: medo, raiva, desespero, angústia	68,9
Sentimento positivo: gosto, afinidade, aprendizado, importante	10,6
Não sentimento: contas, cálculo, números, média	11,2
Indiferença: nenhum, indiferença, descaso, neutro	9,3

Fonte: Arquivo Pessoal

Em relação à primeira idéia que passava na mente do estudante no momento em que ouvia a palavra Estatística, a Tabela 2 mostra que 43,3% (71) relacionaram a conteúdos de caráter matemático ou estatístico. Evidencia-se que 44,5% trazem a negatividade de afeto ou a postura de confrontação.

Tabela 2: Categorias da primeira idéia do estudante em relação à Estatística

Categorias da primeira idéia do estudante em relação à Estatística	Porcentagem (%)
Conteúdo matemático ou estatístico: números, cálculos, contas, pesquisa	43,3
Processo mental: pensar, fazer conta, calcular, raciocinar	12,2
Afetiva: fugir, desconforto, chato, medo	32,9
Contestação do seu uso / Questionamento: nada a ver com o curso, não serve para nada, porque aprender algo que usarei tão pouco, cálculos complexos e muito pouco usados no dia-a-dia	11,6

Fonte: Arquivo Pessoal

Outra medida utilizada na avaliação da viabilidade da escala de atenção e de interação foi análise fatorial. O MAS variou de 0,423 a 0,662. O coeficiente alfa de Cronbach geral que foi de 0,668. Esse valores demonstram uma consistência interna da escala e podem ser considerados de medianos para cima, o que indica que uma dada variável pode ser explicada pelas demais (Barroso; Artes, 2003).

A análise fatorial determinou 5 dimensões da escala e a nomeação dos fatores foi realizada em função da melhor representação do conjunto das estratégias de ação dos estudantes em cada uma

delas. Segundo esse modelo de análise fatorial, a escala de estratégias de atenção e de interação apresenta 5 dimensões: 1. *interação com o professor*, 2. *interação com os colegas*, 3. *autorregulação pela atenção: Estatística*, 4. *autorregulação pela atenção: outras disciplinas* e *ação imediatista.*

Neste trabalho, discutimos a terceira e a quarta dimensões: *autorregulação pela atenção: Estatística* e *autorregulação pela atenção: outras disciplina, que* reuniram os itens Q1 (A1) e Q3 (A3) e Q2 (A2) e Q4 (A4). Essas dimensões expressam comportamentos autorregulados pelo uso de estratégias de atenção. São parecidas, o que difere é o foco: disciplina de Estatística ou outras disciplinas.

A primeira (A1) e a terceira (A3) questões buscavam entender se os estudantes utilizavam ações estratégicas para estudar Estatística: buscar textos, informações e explicações adicionais; preparar os materiais, trabalhos ou ler os textos com antecedência. 89,2% e 72,4% quase nunca ou nunca realizam essas ações, demonstrando baixo padrão autorregulatório da aprendizagem de Estatística envolvendo as estratégias de atenção. Essas ações não se mantêm quando perguntados sobre as mesmas ações estratégicas na segunda (A2) e na quarta (A4) questões que se referem à outras disciplinas. Praticamente todos os estudantes, 90,4% e 88,0%, sempre ou quase sempre realizam ações estratégicas de atenção para aprofundar o seu aprendizado.

Considerações finais

Grande parte dos estudantes sabe da importância que a Estatística tem para sua formação, porém isso não traz como conseqüência um bom engajamento emocional para a aprendizagem. Em sua maior parte, os estudantes contestam o uso da Estatística e consideram a disciplina chata ou aversiva. Os resultados evidenciam uma postura negativa dos estudantes em relação à Estatística, seja em relação ao sentimento ou em relação à ideia que têm sobre a disciplina.

Significativo número de sujeitos relatou ter dificuldades e medo ao aprender, o que talvez possa sugerir uma falta de regulação externa do meio social que traga uma segurança e um significado maior para a explanação dos conteúdos em Estatística. A dificuldade que o estudante tem para entender pode gerar sentimentos como medo, insegurança e raiva, pois sabe que os conteúdos de Estatística serão cobrados e, provavelmente serão aplicados profissionalmente.

Poucos estudantes relataram diretamente o gosto pela disciplina de Estatística, porém apontaram disciplinas em que é necessário o uso de algum conhecimento básico em Estatística. Ao responder sobre o motivo de gostar de alguma disciplina, a maior parte relatou que é porque a mesma é atrativa ou importante para sua formação e o restante afirmou que são as metodologias em sala de aula e o professor quem tornam a disciplina interessante.

O significado que os estudantes dão ao aprendizado, seja porque consideram a disciplina atrativa ou porque o professor a tornou atrativa, é o que leva o estudante a se engajar em ações mais

estratégicas ao aprender. O envolvimento emocional gerado por essas significações ajudam o estudante a aprender, pois é regulado mais pelo meio que gera os motivos para desenvolver estratégias de autorregulação da aprendizagem.

A falta de engajamento afetivo e a falta de sentido para a aprendizagem de Estatística pode deixar os estudantes perdidos, com poucas regulações e motivações para aprender. Isso pode ser consequência de uma falta de contato maior com a disciplina e do desconhecimento de sua aplicação no contexto profissional e na vivência como cidadão.

A maior parte dos estudantes demonstrou que existem disciplinas na graduação que eles gostam e que o motivo de gostarem é que são disciplinas importantes e atrativas para a sua formação profissional. Os resultados mostraram que o estudante tem motivos e engajamento maior com as disciplinas de que gosta e por isso constroi ações estratégicas para buscar informações fora do contexto de sala de aula e para preparar os materiais necessários que aprofundam seu aprendizado.

Outro fator importante: a maior parte dos estudantes apresentou sentimentos negativos em relação à Estatística e alguns questionaram o seu uso. Dessa maneira, é possível inferir que, devido à falta de sentido e de envolvimento afetivo e motivacional com a disciplina, não elaboram comportamentos de buscar maiores informações sobre a mesma fora do contexto de sala de aula, ficando limitados somente ao contexto interacional presente nas ações em sala de aula. As ações estratégicas de atenção somente ficaram evidentes quando os estudantes atribuíram algum sentido e motivo à disciplina que cursavam, demonstrando que ao se envolver emocionalmente com o aprendizado, os mesmos elaboram comportamentos autorregulatórios.

Ficaram evidentes comportamentos autorregulados de estratégias de atenção na aprendizagem de outras disciplinas do curso de Psicologia, mas o mesmo não se evidenciou para a autorregulação de estratégias de atenção para a aprendizagem da disciplina de Estatística. Os resultados foram ao encontro da afirmação de Vygotsky de que os processos afetivos e os processos cognitivos não se desenvolvem de modo independente, desenvolvem-se de modo relacional. No caso deste estudo, há que se considerar o sentimento e ideia negativos em relação à disciplina, que revelaram a importância dos fatores afetivos e motivacionais para o desenvolvimento de estratégias de autorregulação da aprendizagem da disciplina de Estatística.

Referências bilioagráficas

Barroso, L. P.; Artes, R. (2003). Análise multivariada. In: Reunião Anual da RBRAS, 48.; SEAGRO,10, Londrina. *Anais*… Lavras: UFLA, v.1.

Bilimória, H.; Almeida, L.S. 2008. Aprendizagem auto-regulada: fundamentos e organização do Programa SABER. *Psicol. esc. educ. vol.12*, n,1, p.13-22 [online]. Disponível em <http://pepsic.bvs-psi.org.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1413-

Fino, C.N. (2001). Vygotsky e a Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP): três implicações pedagógicas. *Revista Portuguesa de Educação, vol.14*, n°. 2.

Gal, I. (2002). *Adult´s Statistical Literacy: Meanings, Components, Responsabilities. International Statistical Review,* v. 70, n. 1, p. 1-25.

Luria, A. R. *Curso de psicologia geral.* Rio de Janeiro: Civilização Brasileira S.A., v. 3. Oliveira, M.H.P.; Gabriel, F.F.; Kataoka V.Y. (2012). A interação professor-aluno na construção de estratégias de autorregulação da aprendizagem de estatística. *Anais da XXV Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.* Brasil: Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais - PUC/Minas.

Rosário, P., Perez, J.C., Gonzáles-Pienda, J.A. (2004). Historias que enseñan a estudiar y aprender. *Revista Eletrônica de Investigación Psicoeducativa*, v. 2 (1), p.131-144.

Salvador, Cesar C. (1994). *Aprendizagem escolar e construção do conhecimento*. Porto Alegre: Artes Médicas.

Veer, R.; Valsiner, J. (1996). *Vygotsky: uma síntese.* São Paulo: Loyola.

Vygotsky, L. S. (2003). *A formação social da mente*. 6. ed. São Paulo: Martins Fontes.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: the development of higher mental processes.* Cambridge, Ma: Harvard University Press.

Vygotsky, L. S. (1995). *Pensamento e linguagem*. São Paulo, Martins Fontes.

Wertsch, James. (1988). *Vigotsky y la formacion social de la mente*. Barcelona: Paidós.

INTERACCIÓN ENTRE OBJETOS MATEMÁTICOS Y REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS EN DIFERENTES ESCENARIOS DE APRENDIZAJE. DISEÑO DE SITUACIONES DIDÁCTICAS

Nydia Dal Bianco, Silvia Martínez, Fabio Prieto, Mariela L. Ambrosino y Matías A. Juárez
Universidad Nacional de La Pampa Argentina
dalbianco@exactas.unlpam.edu.ar; smartinez@exactas.unlpam.edu.ar;prieto.fabio@gmail.com; marielalisambrosino@yahoo.com.ar; matiasjuarez88@hotmail.com

Resumen. Consideramos que desde nuestras prácticas docentes y teniendo en cuenta la diversidad de los objetos matemáticos, sus significados y representaciones, es posible diseñar estrategias de enseñanza a fin de lograr una adecuada aprehensión de los mismos. La coordinación de diversas actividades con aplicaciones propias de la Matemática como las vinculadas a las ciencias en general, contribuye a modificar la visión negativa que algunos alumnos poseen de esta disciplina y a disminuir la deserción que frecuentemente se produce en los primeros años de la Universidad.
En la búsqueda de soluciones a esta problemática y en el marco de un proyecto de investigación que desarrollamos en la UNLPam, implementamos actividades con los estudiantes, que contribuyeron a resignificar los contenidos propios de Matemática, fomentar el trabajo autónomo y fortalecer capacidades como: argumentar, relacionar, aplicar, entre otras
Palabras clave: enseñanza - propuestas didácticas - representación – sentido
Abstract. We see from our teaching practices and taking into account the diversity of mathematical objects, their meanings and representations, that it is possible to design teaching strategies in order to achieve an adequate apprehension of them.
The coordination of various activities with applications characteristic of Mathematics, as those related to science in general, contribute to change the negative view that some students have of this discipline and to decrease dropouts which frequently occur in the early years at the University.
In the search for solutions to this problem within the framework of a research project developed at the UNLPam, we have implemented activities with our students that have contributed to resignify mathematical contents, encourage autonomous work and strengthen capabilities such as arguing, associating, and applying, among others.
Key words: teaching - didactic proposals - representation - sense

Introducción

El presente trabajo se circunscribe a diferentes propuestas de enseñanza implementadas en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de La Pampa, con alumnos de primer año de Química y Biología que cursaban Matemática; de las que se han seleccionado tres por ser consideradas como las más significativas y que sintetizan el accionar de un proceso llevado a cabo en varios ciclos académicos.

Las propuestas didácticas fueron diseñadas utilizando una plataforma virtual de aprendizaje (Moodle) a la que se accede a través de la página web de la Facultad, que sirvió como complemento de apoyo a las clases presenciales.

Como herramienta de apoyo se utilizó el software GeoGebra por ser un software libre, de fácil acceso, que brinda la posibilidad de interactuar dinámicamente entre los diferentes registros de representación y que cuenta con gran variedad de aplicaciones diseñadas cooperativamente.

Marco teórico

El proyecto, en términos generales sigue los lineamientos de la teoría cognitiva de las representaciones semióticas de Duval, que tiene como ideas más importantes las siguientes:

- Para acceder a los objetos matemáticos es necesario utilizar un sistema de representación semiótico.
- No se debe confundir al objeto matemático en sí con su representación semiótica.
- En Matemática utilizamos diferentes registros de representación semiótica como por ejemplo: algebraico, gráfico, tabular, verbal.
- Para lograr un efectivo aprendizaje de un concepto, es necesario que el alumno sea capaz de cambiar y coordinar diferentes registros de representación, es decir convertir la representación de algún concepto de un sistema semiótico a otro.

Ante la necesidad de analizar un objeto matemático en su totalidad, el docente, en su proceso de transposición didáctica, acude a innumerables representaciones. Por ello se debe diferenciar el objeto matemático propiamente dicho de su representación específica, incluso el mismo objeto puede ser representado de diferentes maneras. Este proceso, que para el docente resulta casi habitual, no siempre es espontáneo e inmediato para el estudiante, pues requiere de varias acciones mentales como comprender, analizar, sintetizar, transferir. Es así que hemos implementado con los estudiantes, actividades que propicien el desarrollo de estas acciones dirigidas por el docente.

Por otro lado, uno de los objetivos esenciales y al mismo tiempo una de las dificultades principales de la enseñanza de la Matemática es precisamente que lo que se enseña esté cargado de significado y tenga sentido para el alumno. Para cumplir con dicho objetivo y según Polya, una situación problemática demanda algún proceso de reflexión y toma de decisiones necesarias para resolverla. Según este autor, las cuatro etapas esenciales para la resolución de un problema son:

Comprender el problema: Separar las principales partes del problema, la incógnita, los datos, la condición. Si hay alguna figura relacionada al problema debe dibujarse destacando en ella la incógnita y los datos. También se puede plantear la pregunta ¿es posible satisfacer la condición?, esperando en este momento una respuesta provisoria o una mera conjetura.

Trazar un plan para resolverlo: Relacionar el problema con problemas semejantes, también con resultados útiles, y determinar si se pueden usar problemas similares o sus resultados (aquí se

subraya la importancia de los problemas análogos), si se puede enunciar el problema de otra forma o plantearlo en forma diferente nuevamente.

Poner en práctica el plan: Al ejecutar el plan, comprobar si cada uno de los pasos realizados son correctos, pensar qué se consigue con esto, explicar las operaciones matemáticas que se aplican y si surge alguna dificultad, volver al principio, reordenar las ideas y probar de nuevo.

Comprobar los resultados: supone la confrontación del resultado obtenido con el enunciado del problema, y su contraste con la realidad que queríamos resolver. A partir de reconsiderar la solución, reexaminar el resultado, consolidar conocimientos y desarrollar nuevas aptitudes.

Desarrollo

Desde la cátedra de Matemática que se dicta para las carreras de Profesorado en Ciencias Biológicas y Profesorado en Química, durante distintos ciclos lectivos, se recopilaron y analizaron producciones realizadas por los estudiantes y sus representaciones en las distintas instancias de evaluación. Se comenzó con un diagnóstico, luego con la resolución de trabajos prácticos y exámenes parciales, siendo este análisis un punto de partida para tomar decisiones e intervenir en el proceso de enseñanza- aprendizaje.

Con respecto a las representaciones que tienen acerca de Matemática, se ha observado en los distintos ciclos lectivos que no la consideran propia de su plan de estudios, lo que se manifiesta en determinadas actitudes de desinterés y apatía, que incide en forma directa en su rendimiento académico.

Al mismo tiempo se detectaron diferentes errores que se clasificaron de acuerdo a los diferentes registros de representación: algebraico, gráfico, verbal y tabular. Siendo que los mismos no siempre se traducen en una ausencia de conocimientos, sino que algunos constituyen un elemento de información sobre las concepciones que tienen los alumnos, hemos considerado necesario reveerlos y analizarlos para diseñar nuevas estrategias.

Como las herramientas del software Geogebra facilitan la interacción entre los diferentes registros de representación se lo incorporó en el diseño de actividades que incluyen temas de la currícula, en particular el de funciones, prioritario y básico para interpretar las siguientes unidades del programa. Una actividad consistía en ingresar la fórmula de una función determinada debiendo estudiar los diversos parámetros, los desplazamientos, dominio, imagen, visualizar los ceros, asíntotas, monotonía y simetrías. La otra fue diseñada con el objeto de que el alumno asocie la gráfica con la ecuación correspondiente a cada una de las funciones estudiadas.

A continuación, a modo de ejemplo se muestra uno de los problemas de aplicación en Química propuesto en el Trabajo Práctico de Funciones:

Desintegración de sustancias radioactivas

Las sustancias radiactivas como el Uranio, se desintegran transformándolas en otras sustancias y lo hacen con mayor o menor rapidez según la sustancia. Suponiendo que tenemos un kilogramo de Uranio que se desintegra reduciéndose a la mitad cada año, el resto de la sustancia no desaparece, sino que se transforma en otra sustancia química distinta.

a) Hallar una expresión para calcular la masa de Uranio cuando han pasado t años.

b) Mostrar en una tabla las variaciones de la masa de Uranio en función del tiempo, considerando hasta t = 10.

c) Realizar un gráfico utilizando los datos de la tabla anterior.

El problema se resolvió siguiendo los cuatro pasos propuestos por Polya, para profundizar el análisis de la resolución de problemas, generando herramientas que favorezcan el aprendizaje autónomo.

Comprensión del problema: Reconocer cuáles son los datos, las incógnitas, la variable dependiente e independiente.

Datos: t = 0 años; masa inicial de Uranio = m_0 = 1 kg.

t = 1 año; masa de Uranio = m_1 = ½ kg.

Incógnita: masa de Uranio después de t años.

Variable dependiente: masa de Uranio.

Variable independiente: tiempo en años.

Plan para su resolución: Comparar la situación con otro problema similar, concebir un plan para resolverlo, el cual puede no ser único; definir la relación entre las variables.

Comparar con la técnica de datación del Carbono 14, y proponer hallar la masa de Uranio desde t = 0 hasta t = 10 dividiendo sucesivamente a la mitad la masa de Uranio del año antecedente.

Ejecución del plan: se concluye que la relación entre las variables es una función exponencial.

$$
\begin{array}{ll}
t = 0 & m_0 = 1 \\
t = 1 & m_1 = 1 \cdot \frac{1}{2} \\
t = 2 & m_2 = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\
\ldots & \\
t = 10 & m_{10} = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}
\end{array}
$$

$$\boxed{m_t = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t}$$

En esta etapa se aplican propiedades de la potenciación de números reales.

Para dar respuesta al ítem siguiente de realizar la tabla y el gráfico, se propone utilizar el software GeoGebra, como herramienta que permite integrar la resolución de problemas con el uso de recursos informáticos.

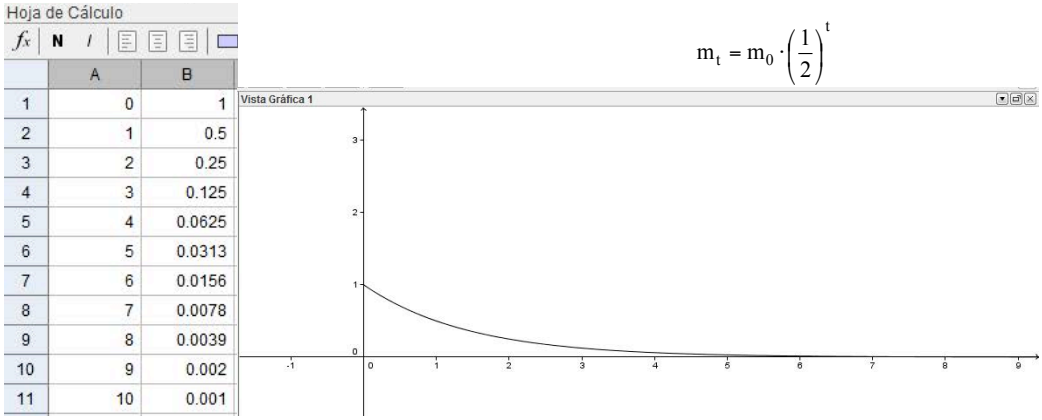


Figura 1: Gráfica de la función

Confrontación de resultados: El desarrollo detallado de la desintegración de Uranio, que anteriormente se presenta, no es la forma más apropiada, aunque válida, de resolución del problema. El cálculo hasta t = 10 demanda operaciones no esenciales a la respuesta, sin embargo este razonamiento posibilita obtener la relación entre las variables, creando habilidades para resolver problemas similares.

La restricción del dominio de la función, visible en el registro gráfico de la misma, requiere del alumno una interpretación en la que debe articular conocimientos de Matemática y Química.

Otra experiencia que resultó del diseño e implementación de una estrategia didáctica basada en el uso de las nuevas tecnologías, consistió en utilizar la plataforma Moodle y el software GeoGebra para el tema de Secciones Cónicas.

Mostramos una de las actividades del trabajo que debían resolver los alumnos para luego presentar las soluciones en un documento de texto a través de la plataforma virtual. Por esta misma vía, recibían las devoluciones correspondientes, proceso que se reiteraba hasta llegar a la solución correcta en cada uno de los ejercicios.

Para promover la participación activa de los alumnos en la construcción de conocimientos, quienes optaban por esta modalidad de trabajo y completaban una autoevaluación, eran eximidos de rendir este tema en el correspondiente examen parcial de la asignatura.

Ecuación Canónica de la Elipse

Deslizar los puntos h, k, a, b y observar la ecuación de la elipse.

a) ¿Qué sucede si hacemos variar los puntos h y k? ¿Cómo se relacionan h y k con la ecuación?

b) ¿Qué sucede si hacemos variar los puntos a y b? ¿Cómo se relacionan a y b con la ecuación? ¿Qué valores no pueden tomar?

c) ¿Qué ocurre si: a > b; b > a; a = b?

d) Encontrar una relación entre los valores de a, b y c. Calcular la excentricidad.

e) Hacer click con el botón derecho del mouse sobre el punto P luego elegir la opción: activar trazo, para borrar gráfico anterior, luego volver a activar el trazo para uno nuevo.

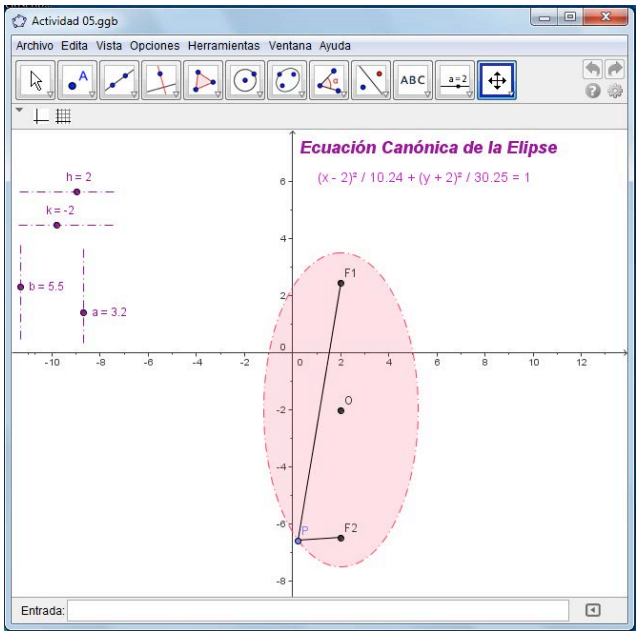


Figura 2: Gráfica realizada con GeoGebra – Ecuación Canónica de la Elipse.

En la Figura 2, se muestra la correspondencia entre los registros gráfico y algebraico obtenidos a partir de la variación de los diversos parámetros, que los estudiantes modificaban interactuando con el software.

En general los alumnos que participaron de la experiencia manifestaron su conformidad hacia la metodología de trabajo que los mantuvo motivados, además de permitirles realizar los gráficos con facilidad y lograr una mejor comprensión de los temas estudiados. Si bien mencionaron algunas desventajas como el hecho de tener que trabajar "solos", no obstante indicaron que el material de estudio fue suficiente para responder las consignas y solicitaron continuidad en la aplicación de esta metodología en otros temas.

En la cátedra de Matemática se trabaja con el programa de Tutorías Académicas, implementado en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de La Pampa, a partir

del año 2007. Participan desde ese año dos alumnos avanzados en las carreras de los Profesorados de Biología y Química respectivamente.

Los tutores académicos contribuyeron con los docentes en la indagación de las distintas representaciones que tienen los ingresantes sobre Matemática a partir de los diagnósticos iniciales. También participaron en el diseño de las actividades descriptas, como así también en la resolución de trabajos prácticos aplicando herramientas informáticas a fin de promover la adquisición de hábitos y actitudes para un aprendizaje autónomo.

Conclusiones

La integración de temas desarrollados en la asignatura Matemática y su aplicación en situaciones concretas vinculadas con las carreras de los Profesorados en Biología y Química, permitió que los estudiantes resignifiquen esta disciplina en sus respectivos planes de estudio.

El uso de la plataforma virtual combinada con el software GeoGebra, facilitó la interacción entre diferentes registros de representación de los objetos matemáticos. Con estos recursos que ofrecen las nuevas tecnologías e integrando adecuadamente los materiales didácticos, se puede mejorar gradualmente el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Al mismo tiempo destacamos que la participación del tutor académico, coordinador de grupos y nexo en la relación docente-alumno, contribuyó a promover la adquisición de hábitos y actitudes para un aprendizaje autónomo con estudiantes de carreras no matemáticas.

Referencias bibliográficas

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques, 7(2)*, 33-115.

Brousseau, G. (1983). *Los obstáculos epistemológicos y los problemas de la enseñanza.* México: Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN.

Chevallard, Y. (1997). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires: Aique.

Chevallard, I.,Bosch, M. y Gascon J. (1997). *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.* España: ICE-HORSORI. Universidad de Barcelona.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. *Investigaciones en Matemática Educativa II*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos de aprendizajes intelectuales*. Medellín: Universidad del Valle.

García García, J. (2003). *Didáctica de las ciencias. Resolución de problemas y desarrollo de la creatividad.* Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Godino, J. (1999). *Perspectiva Semiótico - Antropológica de la Didáctica de las Matemáticas.* Granada: Facultad de Ciencias de la Educación.

Godino, J. (2001). *Análisis Semiótico y Didáctico de los procesos de instrucción Matemática.* Recuperado el 4 de Julio de 2013 de www.ugr.es/~godino/ doctorado/Documentos.htm.

Godino, J. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathemathiques, 14 (3)*, 325-355.

Monereo, C. y Pozo, J. I. (2003). *La universidad ante la nueva cultura educativa. Enseñar y aprender para la autonomía*. Madrid: Síntesis.

Onrubia, J. (1996). Aprendizaje y construcción de conocimientos en la educación secundaria obligatoria. *Revista Signos, 7 (18)*.

Parra, C. y Saiz, I. (1994). *Didáctica de Matemáticas. Aportes y reflexiones.* Buenos Aires: Paidós.

Polya, G. (1997). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Editorial Trillas.

Santalo, L., Brousseau, G, y Saiz, I. (1994). *Didáctica de Matemáticas aportes y reflexiones*. Buenos Aires: Paidós.

EVALUACIÓN DE LOS APRENDIZAJES EN MATEMÁTICA

Ana Duarte Castillo
Universidad Nacional Abierta Venezuela
aduarte@una.edu.ve , duarteann@gmail.com

Resumen. El propósito de la presente investigación cualitativa fue elaborar instrumentos de evaluación que respondan a categorías de conocimiento matemático (comunicación, representación y definición) establecidas por Moya (2008), y analizar la aplicación de tales instrumentos, en estudiantes, desde la Educación Matemática Crítica (Skovsmose, 1999; Mora, 2005; Becerra, 2005; Frankenstein, 2006). Los participantes fueron estudiantes (13-15 años) de Educación Media General. Este estudio se realizó en dos etapas. Para efectos de este trabajo haremos referencia a la primera, la cual consistió en el desarrollo de un proyecto factible (Dubs, 2002) que contó inicialmente con una investigación documental, seguida de un diagnóstico de necesidades para finalizar con el diseño de una propuesta (Kaufman, 1973). Entre los resultados obtenidos se encuentran: (i) Una quiebre en la concepción prescriptiva de presentar la evaluación, como un examen cerrado con preguntas desvinculadas y descontextualizadas. (ii) Reflexión de situaciones socio-culturales que suceden en la realidad.
Palabras clave: evaluación en matemática, conocimiento matemático
Abstract. In order to develop instrument of evaluation that respond to mathematic knowledge categories (communication, representation, and definition) established by Moya (2008), and analyze the instruments application, in students, from critical mathematical education (Skovsmose, 1999; Mora, 2005; Becerra, 2005; Frankenstein, 2006), this researcher was performed. The participants were students of middle school (13 and 15 years old). This study was performed in two stages. For purposes of this paper we will refer to the first, which consisted in development of a feasible project (Dubs, 2002); that initially had a documentary research, followed by a needs assessment, to finality with the design of a proposal (Kaufman, 1973). Among the results obtained are: (i) A break in the conception prescriptive present the evaluation, as a closed examination and decontextualized unrelated questions. (ii) Reflection of socio-cultural situations that happen in reality.
Key words: assessment in mathematics, mathematical knowledge

Introducción

En este artículo se hace referencia al problema de la evaluación de aprendizajes en matemática, específicamente a la concepción técnica con la cual se realiza, debido a que se convierte en un proceso que se ejecuta al final de la enseñanza. Una de las preocupaciones del estado venezolano, en los últimos años ha sido la construcción de un diseño curricular pertinente, acorde con los diferentes procesos de cambio que surgen en la complejidad de una sociedad en continua transformación (Mendoza, 2010). Esta preocupación ha llevado al Ministerio del Poder Popular para la Educación, organismo encargado de las políticas educativas de la República, a la publicación de un conjunto de documentos como el Currículo Nacional Bolivariano. En donde se concibe a la matemática de manera más amplia, describiéndola desde la interdisciplinariedad y en relación con el entorno sociocultural e histórico (Serrano, 2009; Mendoza, 2010). De la misma manera que Skovsmose (2000) hace referencia a que la matemática debe ayudar a identificar y evaluar los problemas sociales-culturales presentes en la sociedad, acompañado de una reacción ante situaciones sociales problemáticas. Esto obedece a una Educación Crítica de las Matemáticas (Skovsmose, 1999; Mora, 2005; Becerra, 2005; Frankestein, 2006). Sin embargo, en las aulas venezolanas, en el área de matemática, el modelo que ha predominado en la educación media

general (bachillerato) está centrado en características totalmente diferentes a las antes mencionadas. Como las que se describen a continuación: El docente expone e introduce los conceptos, nociones, da ejemplos y coloca una serie de ejercicios. El estudiante escucha, está siempre atento, interviene; se ejercita (Fandiño, 2006), como ocurre en muchos países (Cockcroft, 1985). Este modelo está orientado totalmente hacia la ejecución de técnicas. (Bishop, 1999), donde la enseñanza de la matemática se ha convertido en repetitiva, mecánica y sin sentido social para los estudiantes. Una enseñanza basada en el paradigma del ejercicio (Skosvmose, 1999). La evaluación de los aprendizajes no escapa de esta concepción. Existen en Venezuela investigaciones que coinciden con la idea de que la evaluación en matemática necesita una reconceptualización. Una de ellas es la investigación realizada por García (2003) en donde se encontró que tanto el Currículo Básico Nacional, como la Resolución No. 1 del Ministerio de Educación y la Ley de Universidades, presentaban incongruencias teóricas y prácticas en los procesos educativos, específicamente en la evaluación del desempeño estudiantil, que obstaculizaban cualquier iniciativa para cambiar el rumbo de los procesos de aprendizaje-enseñanza hacia nuevas concepciones, teorías y prácticas pedagógicas. Por lo cual, elaboró un concepto alternativo sobre la evaluación de los aprendizajes matemáticos, donde el estudiante tenga un papel protagónico, tomando en consideración el enfoque constructivista, hermenéutico, de la complejidad, de la psicología sociohistórica y de la pedagogía crítica del aprendizaje. Y, a partir de tal concepto, diseñar actividades evaluativas que respondan a aspectos como el talento matemático integral de los estudiantes. En la investigación realizada por Moya (2008), se propone un modelo de evaluación para la educación superior, el cual nace en la práctica. Esta investigación plantea la necesidad de trabajar con una nueva conceptualización de la evaluación en matemática, tomando en consideración los modelos epistemológicos que están presentes en la enseñanza de la matemática, los modelos docentes que están presentes en el aula de clase y cómo la evaluación favorece el desarrollo del conocimiento matemático en los estudiantes. Para lo cual, establece una serie de categorías que dan pistas sobre el desarrollo del conocimiento matemático en los estudiantes.

Por lo que la evaluación debe internalizarse como un proceso de análisis que permita conocer cuáles son las ideas de los estudiantes, los errores en los que tropiezan, las principales dificultades con las que se encuentran, los logros más importantes que han alcanzado (Santos, 1999). Es decir, moverse del paradigma del ejercicio a escenarios de investigación que inviten a los estudiantes a involucrase en procesos de exploración, explicación y resolución de problemas (Skosvmose, 1999). Debido a lo antes descrito, este estudio tiene por objetivos elaborar instrumentos de evaluación que respondan a categorías de conocimiento matemático (comunicación, representación y definición) desde la Educación Matemática Crítica

Método de Estudio

Esta investigación de tipo cualitativa presento dos etapas bien definidos. Para efectos de este trabajo haremos referencia a la primera, la cual consistió en la elaboración de un proyecto factible, definido por el Manual de Trabajos de Grado Maestrías y Tesis Doctorales (UPEL, 2006) como "investigación, elaboración y desarrollo de una propuesta de un modelo operativo viables para solucionar problemas, requerimientos o necesidades de organizaciones o grupos sociales; puede referirse a la formulación de políticas, programas, tecnologías, métodos o procesos" (p. 21). Dado que elaboramos instrumentos de evaluación que corresponden a unas categorías de conocimiento matemático (la comunicación, la representación y la definición), establecidas por Moya (2008). Apoyado en una investigación de tipo documental, en donde delineamos paradigmas de conocimiento matemático, de modelos docentes en el aula de matemática y de modelos de evaluación en matemática; de igual forma sus posibles conexiones e interrelaciones. Posteriormente, ejecutamos un diagnóstico de necesidades definido por Kaufman (1973) como "un análisis de discrepancias determinado por las dos posiciones extremas de: ¿Dónde estamos actualmente? y ¿Dónde deberíamos estar?" (p. 63). Para finalmente, realizar el diseño de la propuesta.

Análisis de necesidades

Según Kaufman (1973) un análisis de necesidades es una discrepancia mensurable del producto entre –lo que es- y –lo que debe ser- y a los datos obtenidos se les asigna un orden prioritario (p.64). Este tipo de discrepancia depende del nivel en que las necesidades son analizadas. Para efectos de este estudio emplearemos el modelo inductivo.

Ahora bien, uno de los fines de la educación, establecidos en el artículo 15, numeral primero es:

> Desarrollar el potencial creativo de cada ser humano para el pleno ejercicio de su personalidad y ciudadanía, en una sociedad democrática basada en la valoración ética y social del trabajo liberador y en la participación activa, consciente, protagónica, responsable y solidaria, comprometida con los procesos de transformación social y consustanciada con los principios de soberanía y autodeterminación de los pueblos, con los valores de la identidad local, regional, nacional, con una visión indígena, afrodescendiente, latinoamericana, caribeña y universal (LOE, 2009; p.10)

En este numeral se pone en evidencia que la educación debe formar un tipo ciudadano que sea capaz de desenvolverse en una sociedad democrática, participativa, protagónica, multiétnica, pluricultural; y con una alta conciencia social y activa participación ciudadana, descritos con mayor

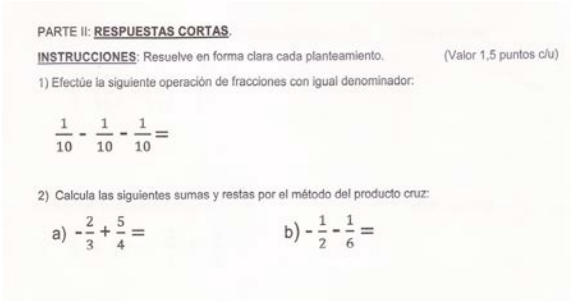
detalle en el preámbulo de la Constitución de la República Bolivariana (2000). Pero ¿cuáles son las características de ese tipo de ciudadano? La respuesta a esta interrogante la encontramos en el Proyecto Nacional Simón Bolívar 2007-2013, en la directriz III, referida a la democracia protagónica revolucionaria, en donde:

> es necesario que los individuos se organicen para lograr las ventajas que otorga la asociación cooperativa, es decir, transformar su debilidad individual en fuerza colectiva, teniendo en cuenta que el establecimiento de la organización no implicará menoscabo de la independencia, autonomía, libertad y poder originario del individuo (p. 14)

Por lo cual, una de las características del nuevo ciudadano es una necesidad del bienestar colectivo o bien común como guía de la sociedad. Desde la educación, una estrategia para cristalizar lo planteado anteriormente es "convertir los espacios escolares, en espacios para la enseñanza y la práctica democrática" (Proyecto Nacional Simón Bolívar 2007-2013, p.17). Para ello es necesario: (a) Impulsar e incentivar la formación docente; (b) Promover la participación escolar en actividades de la comunidad e (c) Incentivar el comportamiento y los valores democráticos. Ahora bien, ¿cómo podemos convertir los espacios escolares, en espacios para la enseñanza y la práctica democrática en donde reina una enseñanza, específicamente en matemática, que tienden a ofrecer a los estudiantes el producto de la idea matemática más que el proceso del pensamiento matemático (Skemp, 1980)? ¿En dónde se presenta el contenido matemático descontextualizado?

Los niveles de abstracción, descontextualización y desvinculación total, con los cuales se aborda los diferentes objetos matemáticos en la clase; social y culturalmente distantes de la cotidianidad de los estudiantes, acentúan las dificultades para su enseñanza; y en consecuencia para su aprendizaje. (Rossetti, 2005). Situación que no es diferente al momento de la evaluación, esto debido a que la evaluación es vista como la manera de verificar el logro de los objetivos planificados. A continuación presentamos, en el gráfico 1 y gráfico 2 a manera de ejemplo, algunos tipos de pregunta empleadas por profesores, al momento de realizar la evaluación.

Gráfico 1. Modelo de ítems


PARTE II: RESPUESTAS CORTAS.

INSTRUCCIONES: Resuelve en forma clara cada planteamiento. (Valor 1,5 puntos c/u)

1) Efectúe la siguiente operación de fracciones con igual denominador:

$$\frac{1}{10} - \frac{1}{10} - \frac{1}{10} =$$

2) Calcula las siguientes sumas y restas por el método del producto cruz:

a) $-\frac{2}{3} + \frac{5}{4} =$ b) $-\frac{1}{2} - \frac{1}{6} =$

Gráfico 2. Modelo de ítems

I PARTE: Defina (1pto c/u)

a. Magnitud escalar:

b. Vector:

c. Magnitud vectorial:

d. Norma de un vector:

II PARTE: Responda colocando un circulo en la letra V si su respuesta es verdadera o un circulo en la F si su respuesta es falsa. (1pto c/u)

1.- Los elementos de un vector son módulo, dirección y sentido V F

2.- Dos vectores son opuestos si tienen el mismo modulo, la misma dirección y el mismo sentido V F

3.- El extremo del vector que no tiene flecha se llama origen de vector V F

4.- La longitud de un vector se denomina modulo V F

5.-La dirección de un vector queda determinada por los puntos cardinales V F

En el gráfico 1 y 2, se evidencia que lo que se está evaluando es la reproducción de un algoritmo, lo cual obedece a un modelo que se enmarca en el paradigma del ejercicio. (Skosvmose, 1999). En estos ejemplos se refleja el tipo de pregunta que emplean algunos profesores de matemática al momento de realizar evaluaciones, las cuales no dan evidencia de las matemáticas necesarias en un mundo cambiante.

Moreno y Ortiz (2008) realizaron un estudio referido a las creencias que tienen los docentes respecto a la evaluación en matemática, emplearon técnicas cualitativas como el estudio de casos. Obteniendo que los docentes consideran al proceso evaluativo como la manera de adquirir información sobre el rendimiento académico de los estudiantes con la finalidad de ser promovido a un grado superior. Además, los docentes asocian la evaluación con colocar una nota y con realizar un examen. Como podemos evidenciar, estos resultados, muestran una visión bastante limitada del proceso evaluativo. Además, no se toma en cuenta la evaluación formativa, proceso que ayuda a los estudiantes a desarrollar habilidades matemáticas importantes. Lo que no ayuda mucho en la cristalización de los fines descritos en la Ley Orgánica de Educación vigente.

Después de presentar la situación anterior, nos preguntamos ¿Por qué estudiar matemática? ¿Son verdaderamente importantes? La respuesta la encontramos tanto en el informe Cockcroft (1985) en donde se puntualizan la necesidad de estudiar matemática en un mundo en constante transformación como el que vivimos.

Los argumentos del informe Cockcroft (1985) se presentan en el cuadro 1.

Utilidad de la matemática	En términos de los conocimientos Aritméticos
	Una base para el desarrollo científico y la tecnología moderna.
	Creciente uso de las técnicas matemáticas como una herramienta de gestión del comercio y la industria.
	Un medio de comunicación que es poderoso, preciso, conciso y sin ambigüedades
Profesor de matemática tiene la tarea de	Posibilitar que cada alumno desarrolle, dentro de sus capacidades, la comprensión y destrezas matemáticas ara la vida adulta, para el trabajo y para los posteriores estudios y aprendizajes.
	Hacer consciente al alumno que las matemáticas le proporciona un poderoso medio de comunicación.
	Proporcionar a cada alumno la matemática que puede necesitar al estudiar otras asignaturas

Cuadro 1. Necesidad de la matemática, según Cockcroft (1985)

Estos argumentos nos dan una idea bastante clara de la importancia de aprender matemática en nuestra sociedad, pero no una matemática que simplemente obligue a los estudiantes a la memorización de algoritmos vacíos sin ninguna vinculación con el entorno. Ahora bien, con base en lo antes mencionado la evaluación de los aprendizajes, debe aportar información útil a profesores y estudiantes sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje. En el caso del profesor, información que le ayude a identificar no solo si los estudiantes están aprendiendo, si no que le ayude al desarrollo de habilidades matemáticas , con la finalidad de cambiar las estrategias empleadas o cambiar totalmente la planificación de uno o varios objetos matemáticos determinados. Mientras que en el caso de los estudiantes les de indicios sobre su desempeño con actividades retadoras. Por lo cual, la evaluación de los aprendizajes debe ser vista desde una dimensión critica, que esta entendida como un proceso y no como un momento final, en donde la mejora no viene solamente de un perfeccionamiento matemático de los instrumentos sino de la transformación de su valor y de su uso como proceso que fomente el conocimiento matemático a todos los estudiantes.

Resultados

A partir de lo descrito en el diagnóstico de necesidades consideramos como algo preciso e importante que los profesores y profesoras dispongan de ciertos descriptores, referidos a categorías de conocimiento matemático, al momento de realizar instrumentos de evaluación.

Moya (2008) identificó, entre otras más, una categoría referida al conocimiento matemático, la cual llamó aprendizaje matemático que comprende las siguientes subcategorías: (a) Comunicación eficaz, (b) Representar y resolver y (c) Definir, conjeturar y demostrar; para efectos de nuestro estudio solo haremos referencia a las categorías presentadas en el cuadro 2. A partir de estas

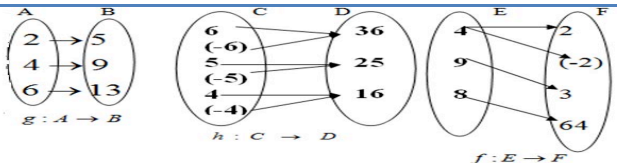
subcategorías realizamos instrumentos de evaluación, pero antes fue necesario establecer algunos descriptores que nos guiaron en la elaboración de los ítems, los cuales se presentan en el cuadro 2.

	Descriptores
Comunicación eficaz	- Explicar ideas y relaciones de forma clara. - Exponer un procedimiento matemático.
Representar objetos matemáticos	- Construir los objetos matemáticos de diferentes maneras. - Transformar una representación en otra diferente.
Definir	- Usar correctamente el lenguaje matemático.

Cuadro 2. Descriptores de las Categorías según Moya (2008)

En el caso de la comunicación, este proceso ayuda a dar significado y permanencia a las ideas y además de hacerlas públicas. Cuando se estimula a los estudiantes a pensar y razonar acerca de la matemática y a comunicar a otros los resultados de su pensamiento, oralmente o por escrito, aprenden a ser claros y convincentes. Comunicar en matemática quiere decir que se es capaz de utilizar vocabulario, su forma de notación y su estructura para expresar y entender ideas y relaciones. En este sentido, la comunicación matemática es parte importante del conocer y usar la matemática. Mientras que la representación de objetos matemáticos se ha entendido como todas aquellas herramientas —signos o gráficos— que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y con las cuales los sujetos particulares abordan e interactúan con el conocimiento matemático, es decir, registran y comunican su conocimiento sobre la matemática. Mediante el trabajo con las representaciones las personas asignan significados y comprenden las estructuras matemáticas, de ahí su interés didáctico (Radford, 1998; citado en Rico, 2009). Y finalmente definir en matemáticas se considera como una secuencia de palabras o una definición verbal del concepto, fruto de su evolución histórica. Se podrá distinguir entre las definiciones formales, convenidas y aceptadas por la comunidad científica de los matemáticos en un momento dado (que se suelen encontrar escritas en los libros), y las definiciones personales que utilizan las personas (estudiantes, profesores, matemáticos) como interpretación, construcción o reconstrucción de una definición formal (Giménez y Camacho, 2003). A continuación presentamos las actividades evaluativas elaboradas con base en un solo descriptor, según los contenidos matemáticos estudiados en segundo año de Educación Media General.

Descriptor	**Los descriptores son: Explicar ideas y relaciones de forma clara y Exponer un procedimiento matemático.**
	1. ¿Cómo le explicarías, a un amigo que te llama por teléfono, la definición de una función Biyectiva? 2. ¿Qué observas en cada uno de las siguientes relaciones?



Actividad Evaluativa

3. A continuación se presenta una tabla tomada del Ministerio del Poder Popular para la Agricultura y Tierras referida a la producción de Cacao en los diferentes Estados Venezolanos. Responda las siguientes preguntas.

Producción (kg)Cacao

Código	Entidad Federal	Producción (kg)
1	Distrito Capital	5100
2	Amazonas	72700
3	Anzoátegui	7950
4	Apure	456870
5	Aragua	161250
6	Barinas	264749
7	Bolívar	85455
8	Carabobo	175205
9	Cojedes	11850
10	Delta Amacuro	737440
11	Falcón	1610
12	Guárico	6059
13	Lara	5891
14	Mérida	2959212
15	Miranda	5597055
16	Monagas	476575
17	Nueva Esparta	1255
18	Portuguesa	37010
19	Sucre	10150715
20	Táchira	367509
21	Trujillo	61581
22	Yaracuy	22818
23	Zulia	171592
24	Vargas	39081

VII CENSO AGRICOLA NACIONAL (MAYO 2007 / ABRIL 2008)
Ministerio del poder popular para la Agricultura y Tierras

a) ¿Cuál es el Estado que tiene mayor producción de Cacao?
b) ¿Cuál es el Estado que tiene menor producción de Cacao?
c) ¿En qué lugar se ubica el Estado Miranda, en cuanto a producción de Cacao?

Breve descripción

En estas interrogantes era necesario que los estudiantes expresaran claras explicaciones, evidenciando de esta manera un aprendizaje matemático.

Cuadro 3.Algunos Ítems de la categoría Comunicación Eficaz. Elaboración propia.

Discusión

Este estudio contribuyo en la construcción de evaluaciones diferentes a las tradicionales, esto produjo una grieta en la concepción prescriptiva de presentar la evaluación, como un examen cerrado de preguntas desvinculadas y descontextualizadas. En las preguntas aplicadas no se solicitaba la reproducción de un algoritmo, sino las evidencias de otras habilidades, como la comunicación, la representación; esto demuestra que la matemática no es puro sacar cuentas, y que esa no es su esencia; sino que la esencia de la matemática está en los razonamientos, que ayudan en la toma de mejores decisiones. Otro elemento importante fue el hecho que se acreditó a la evaluación en matemática como un proceso que se realiza desde el inicio; más no un momento final de la enseñanza y aprendizaje. Que debe estar acompañado de creatividad, una motivación continua y además debe fomentar en los estudiantes un pensamiento divergente, que los ayudará en la Resolución de problemas matemáticos. Estas evaluaciones contribuyen en la reflexión de situaciones socio-culturales que suceden en la realidad. Como por ejemplo: ¿Por qué más del 50% de la población está ubicada en 9 estados?

Referencias bibliográficas

Becerra, R. (2005). La Educación Matemática Critica-Orígenes y perspectivas. En C.D. Mora (Comp.), *Didáctica Critica, educación critica de las Matemáticas y Etnomatemática*. (pp. 165-203). La Paz: Campo Iris.

Bishop, A. (1999). *Enculturación Matemática*. Buenos Aires: Paidós.

Cockcroft, W. (1985). *Las Matemáticas si Cuentan. Informe Cockcroft*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Dubs, R. (2002). El proyecto Factible: Una modalidad de Investigación. *SAPIENS*, 3 (2), 1-18.

Fandiño M, (2006). *Currículo, Evaluación y Formación Docente en Matemáticas*. Bogotá: Didácticas Magisterio.

Frankestein, M. (2006). Reading the World with Maths: Goals for a Criticalmathematical Literacy Curriculum. En E. Gustein y B. Peterson (Edit.) *Rethinking Mathematics.Teaching Social Justice by the Numbers*. (pp.19-30).Wisconsin: Rethinking Scool

García, S. (2003). La Evaluación del Aprendizaje Matemático desde una Perspectiva Constructivista. Tesis doctoral no publicada, Universidad Central de Venezuela. Venezuela.

Giménez, C. y Camacho M. (2003). Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 10(2), 135 - 149

Kaufman, R. (1973). *Planificación de Sistemas Educativos*. México: Trillas

Ley Orgánica de Educación (2009) Gaceta Oficial de la República Bolivariana de Venezuela N° 5.929 Extraordinaria.

Mendoza, O (2010). Componente matemático del diseño curricular del sistema educativo bolivariano. *Integra Educativa*, 3(2), 117-131

Mora, C. (2005). Didáctica crítica y educación crítica de las matemáticas. En: C. D. Mora (Comp.). *Didáctica crítica, educación crítica de las matemáticas y Etnomatemática.* (pp. 17-164). La Paz: Campo Iris.

Moreno, I. y Ortiz, J. (2008). Docentes de Educación Básica y sus Concepciones acerca de la Evaluación en Matemática. *Revista Iberoamenricana de Evaluación Educativa*, 1(1), 141-154

Moya, A. (2008). Elementos para la construcción de un modelo de evaluación en matemática para el nivel de educación superior. Tesis doctoral no publicada, Instituto Pedagógico de Caracas. Venezuela.

Rico, L. (2009) Sobre las Nociones de Representación y Comprensión en la Investigación en Educación Matemática. *PNA*, 4(1), 1-14

Rossetti, C. (2005).La Educación Matemática, el contexto sociocultural y las estrategias cooperativas. En C. D. Mora (Comp.) *Didáctica Critica, educación critica de las Matemáticas y Etnomatemáticas.* (pp. 205-241). La Paz: Campo Iris.

Santos, M. (1999). *Evaluar es Comprender*. Buenos Aires: Magisterio del Río de la Plata.

Serrano, W. (2009). *Las Actividades Matemáticas, el saber y los Libros de Texto: Necesidad de una visión Socio-Cultural y Critica*. Bolivia-Venezuela: Fondo Editorial Ipasme

Skemp, R. (1980). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Morata.

Skovsmose, O. (1999). *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica*. Bogotá: Una empresa docente.

Skovsmose, O. (2000) Escenarios de Investigación. *EMA*, 6(1), 3-26

LA LECTURA Y LA INTERPRETACIÓN EN LA UNIVERSIDAD

Ana María Vozzi, Cristina Lorena Zelaya Galera y María Belén Celis
Universidad Nacional de Rosario. Argentina
amvozzi@fceia.unr.edu.ar, cristzelaya@yahoo.com.ar, mbcelis@fceia.unr.edu.ar

Resumen. La presente experiencia se encuadra en el trabajo de investigación "El libro de texto como factor coadyuvante en la producción de conocimientos" (1ING332) dirigido por la Profesora Martha Elena Guzmán, que se desarrolla en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (FCEIA) UNR.
En nuestra tarea diaria como docentes observamos las dificultades que se le presentan a un gran porcentaje de los alumnos a la hora de interpretar una consigna, un enunciado, un teorema, una definición, etc. Es por esta razón que en esta experiencia áulica queremos indagar sobre algunos de los procesos cognitivos que se desarrollan en el alumno al momento de de leer un enunciado matemático.
De acuerdo a esto planificamos dos actividades de distinto formato a realizar el mismo día con los alumnos de una comisión y observamos las diferentes interpretaciones de un mismo teorema.
Palabras clave: lectura, matemática, universidad
Abstract. In this paper, we present an experience that fits into de research work about "The textbook as a contributing factor in the production of knowledge" (1ING332) led by Prof. Martha Elena Guzmán, developed at the Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (FCEIA) UNR.
In our daily work as teachers we observe the difficulties that an important percentage of students in interpreting a slogan, a statement, a theorem, a definition, etc.. For this reason, we investigate some of the cognitive processes that develop in students when reading a mathematical statement.
Accordingly planned two activities different format to perform the same day with students of a classroom and observe at the different comprehensions of the same theorem.
Key words: reading, mathematics, university

Marco teórico

En reiteradas oportunidades hemos discutido con compañeros docentes la falta de lectura por parte de los alumnos, la cual se pone de manifiesto tanto en parciales orales como en los escritos. En ambas ocasiones notamos la falta de comprensión en lo que leen como así también las grandes dificultades a la hora de expresarse.

Esta problemática nos muestra la falta de hábito de lectura, las dificultades para comprender lo leído y la escasa capacidad de atención y de decodificación.

Carlino (2012) en su libro "Escribir, leer y aprender en la universidad", expresa que la tarea académica, en la que los profesores solemos ubicar a los alumnos en clase es la de escuchar nuestras explicaciones y tomar apuntes. Asimismo, esperamos que los estudiantes lean la bibliografía proporcionada. Es decir, concebimos nuestro rol como transmisores de información; recíprocamente, los alumnos se ven a ellos mismos como receptores de nuestro conocimientos.

En esta habitual configuración de la enseñanza el que más aprende en la materia es el docente (Hogan, 1996) ya que la mayor actividad cognitiva queda de su parte. En este esquema, sólo el alumno que por su cuenta está capacitado y motivado para aprender es el que verdaderamente

aprende; quien no sabe o no está motivado apenas se instruirá para tratar de salir airoso en los exámenes (Biggs, 1998).

Carlino (2012) considera, y adherimos a ello, que es labor del docente ayudar al alumno a adueñarse de cualquier contenido y para ello tienen que reconstruirlo una y otra vez, y la lectura y la escritura son herramientas fundamentales para lograr este proceso de transformación del conocimiento. Los alumnos necesitan leer y escribir para participar activamente y aprender.

Dado que nuestra experiencia se realiza en la Universidad, adherimos a la posición que expresa Carlino (2012), al considerar que los textos académicos universitarios difieren notablemente de los textos que suelen utilizarse en el nivel secundario, es por esto que quisimos indagar acerca del impacto que produce en los alumnos el formato con el que se encuentran al enfrentar una determinada lectura. Muchas veces las dificultades de los alumnos para comprender lo que leen en la Universidad no sólo se deben a la falta de hábito de estudio o de carecer de una "técnica" elemental y generalizable de lectura, sino que al ingresar a los estudios superiores se ven enfrentados a nuevas culturas escritas.

Desarrollo de la actividad

Planificamos dos actividades a realizar el mismo día con 39 alumnos de una comisión de la materia Álgebra y Geometría II de las carreras de Ingeniería de la facultad a la que pertenecemos. El tema que se trabajó fue espacio nulo y nulidad, del cual se tomaron dos definiciones y un teorema, estos no habían sido vistos aún en la clase teórica. Sin embargo los conocimientos previos necesarios, como ser resolución de sistemas de ecuaciones y dimensión de un espacio vectorial ya habían sido desarrollados en clases anteriores. Es decir, los alumnos estaban en condiciones de enfrentarse solos a la actividad, la cual requería una interpretación de nuevos conceptos aplicando los conocimientos previos.

Ambas actividades difieren en el formato de presentación, la actividad 1 corresponde al esquema que presenta el libro "Fundamentos de Álgebra lineal" de Larson-Falvo, texto con el que se trabaja en las clases tanto prácticas como teóricas. La actividad 2 tiene un formato más detallado, resaltando las definiciones y diferenciándolas del teorema, esta actividad fue armada por nosotros.

En los cuadros siguientes se muestran dichas actividades, tal cual se presentó a los alumnos:

Actividad 1:

Lee el siguiente teorema y luego resuelve la actividad propuesta

Teorema: Sea A una matriz mxn. Entonces el conjunto de todas las soluciones del sistema lineal homogéneo asociado a A es un subespacio de R^n, llamado espacio nulo de A y es denotado por N(A).

La dimensión del espacio nulo de A es la nulidad de A.

Actividad: Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -5 & 0 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & -5 & -9 \end{pmatrix}$ hallar el espacio nulo de A y la nulidad de A.

Actividad 2:

Lee las siguientes definiciones y el teorema con detenimiento, luego resuelve la actividad propuesta:

Definición: Sea A una matriz mxn. Llamamos **espacio nulo de A** al conjunto de todas las soluciones del sistema de ecuaciones lineales homogéneo $Ax = 0$, y es denotado por $N(A)$. Es decir:

$$N(A) = \{x \in R^n / Ax = 0\}$$

Teorema: El espacio nulo de una matriz A mxn es un subespacio vectorial de R^n.

Definición: La dimensión del espacio nulo de A se llama **nulidad de A**.

$$\dim(N(A)) = \text{nulidad}(A)$$

Actividad: Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -5 & 0 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & -5 & -9 \end{pmatrix}$, hallar:

a) el espacio nulo de A, $N(A)$.

b) la nulidad de A.

Con la intención de analizar los resultados hemos armado los siguientes cuadros que reúnen y detallan la información extraída de los escritos de los alumnos y que consideramos útil para nuestro estudio:

Análisis de las respuestas:

1) Cantidades:

En la Tabla 1 se muestra una clasificación de las respuestas desarrolladas por los alumnos y las cantidades correspondientes a cada actividad.

Respuestas (total 39)	Actividad 1 (total 22)	Actividad 2 (total 17)
Correctas	5	1
Incompleta (hace bien N(A), pero interpreta mal la nulidad)	7	1
Incorrecta (interpreta mal la cantidad de variables)	1	1
Incorrecta (escalona bien la matriz pero no interpreta)	5	10
Incorrecta	4	3
No responde	0	1

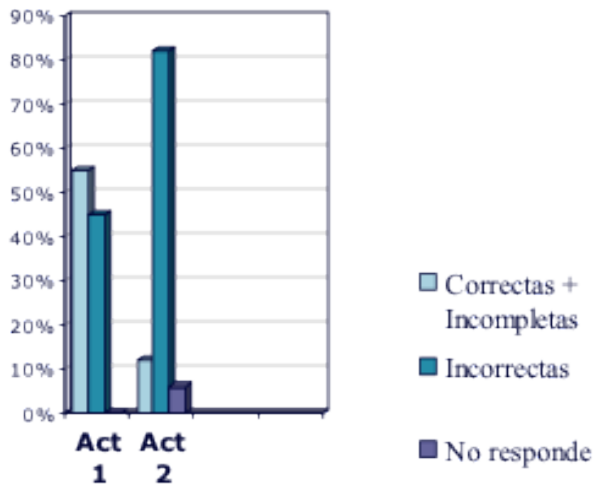
Tabla 1. Tipos de respuestas

2) Porcentajes:

Tabla 2.

Respuestas	Act. 1	Act. 2
Correctas + Incompletas	55 %	12 %
Incorrectas	45 %	82 %
No responde	0 %	6 %

Gráfico 1. Porcentajes



Conclusiones

Dado que los conocimientos previos para el desarrollo de estas actividades habían sido tratados con anterioridad, nos centramos en el análisis de la interpretación de los enunciados propuestos en cada actividad.

Nuestras expectativas apuntaban a que los mejores resultados se iban a dar en la actividad 2, puesto que la presentación de la misma era más detallada y explicativa, sin embargo, los resultados difirieron de lo esperado. Pudimos observar que los alumnos que resolvieron la actividad 1 interpretaron mejor lo pedido, posiblemente esto se deba a que pudieron relacionarlo con lo planteado en el libro y así seguir el ejemplo propuesto en el mismo, ya que presentaba el mismo formato.

También observamos que casi todos los alumnos escalonaron la matriz, aunque luego de eso no supieron cómo usarlo para completar la actividad, quizás esto se deba a que el trabajo "mecánico" les resulta más sencillo y ya era familiar para ellos.

Si bien el enfoque de cada actividad es diferente consideramos ambos válidos, sólo difieren en la presentación. Creemos que a la hora de interpretar influye tanto la trayectoria del lector como el formato de lo que se lee. Cuando el lector inexperto (los alumnos) aborda la tarea de leer una definición y/o un teorema, generalmente lee la prosa como tal y le resulta sumamente dificultoso identificar los elementos que los componen. Esto se hace evidente cuando el alumno muestra dificultades para aplicar lo leído en alguna actividad.

Podemos concluir que un gran número de alumnos no ha alcanzado aún un nivel de lectura comprensiva que les permita, como ya dijimos, reconstruir lo tácito de los enunciados, extraer ideas, reflexionar sobre lo leído (preguntarse porque?, dar un ejemplo) relacionando e integrando con los conocimientos previos.

Como la comprensión de un texto constituye una parte importante del proceso de aprendizaje, es fundamental que desde nuestro lugar de docente aportemos a la construcción del mismo asumiendo nuestra responsabilidad en "como leen nuestros alumnos".

Cabe aclarar que la actividad a la cual nos referimos en este trabajo forma parte de un conjunto de actividades destinadas a promover en los alumnos la lectura y la escritura en las clases de matemática. Con respecto al resto de las experiencias, algunas ya fueron publicadas en otros trabajos y otras están siendo analizadas para su próxima publicación.

Referencias bibliográficas

Biggs, J. (1998). What the student does; teaching for enhanced learning in the `90s. *Actas de la Conferencia Internacional Anual de la Sociedad Australasia para la Investigación y el Desarrollo de la Educación Superior*. Auckland.

Carlino, P. (2012). *Escribir, leer y aprender en la Universidad. Una introducción a la alfabetización académica.* (Sexta reimpresión). Buenos Aires: Fondo de Cultura Económica S.A.

Hoggan, C. (1996). Getting students to do their reading, think about it and share their ideas and responses. En J. Abbot y L. Willcoxson, L. (comps.). *Teaching and Learning Within and Across Disciplines* (pp. 79-81). Perth: Australia.

Larson, R. y Falvo, D. (2010). *Fundamentos de Álgebra Lineal.* (Sexta Edición). México, D.F.: Cengage Learning.

ACERCAMIENTOS A LA ALEATORIEDAD EN LA ENSEÑANZA OBLIGATORIA

Teresita Méndez Olave y Leonora Díaz Moreno
Universidad de Los Lagos Chile
tmendez@ucm.cl , leonora.diaz@ulagos.cl

Resumen. Exploramos el pensamiento aleatorio de niños, aplicando a cuatro estudiantes 6 situaciones en formato visual, para validar la pregunta ¿Qué conocimiento de aleatoriedad surgen desde las historias de futuro que estudiantes, entre 10 a 12 años construyen? La metodología es estudio de casos y se analizan textualidades, considerando al conocimiento y pensamiento matemático como construcciones culturales desarrolladas a través de la acción individual y compartida (Candela, 1999, p 276; Díaz / Castro 2011); y a las nociones de aleatoriedad surgidas desde sus conocimientos informales. Concluimos que los niños identifican implícitamente variables que pueden influir en el resultado incierto de cada situación.
Palabras clave: historias de futuro, suceso aleatorio, suceso determinista
Abstract. We explore the random thoughts of children, applying to four students six situations in visual format, to validate the question: What knowledge of randomness arise from the student's stories of future, between 10 to 12 years built? The methodology is a case study and textualities analyzed, considering the knowledge and mathematical thinking as cultural constructions developed through individual and shared action (Candela, 1999, p 276; Diaz / Castro, 2011); and notions of randomness arising from their informal knowledge. We conclude that children implicitly identify variables that could influence the uncertain outcome of every situation.
Key words: future stories, randomness event, determinist event

Problemática

Los actuales currículos de matemática escolar coinciden, desde hace algún tiempo, en introducir el concepto de aleatoriedad y la noción de probabilidad como uno de los tipos de pensamiento matemático a desarrollar en la educación obligatoria, adoptando modelos didácticos que transitan desde la utilización, como recurso epistémico, del juego asociado a artefactos como las tómbolas, dados, monedas y ruletas hasta modelos de toma de decisiones. (Biehler y Pratt, 2012, p. 821) en los que los métodos numéricos y la determinación del espacio muestral se constituyen en obstáculos (Vásquez y Parraguez, 2011, p. 573 – 581), para el desarrollo de las difíciles situaciones escolares con las que se pretende relacionar la construcción del pensamiento probabilístico.

Durante los primeros niveles del ciclo básico, las actividades propuestas en los programas de estudio del currículo chileno, centradas en la recolección y organización de datos a través de situaciones de juego, que es un contexto aleatorio, no permiten caracterizar lo aleatorio de cada situación. En 4° básico (niños de 9 a 10 años) las actividades del programa sugieren argumentar sobre lo predecible o no de un evento, lo que tampoco es suficiente para reconocer su naturaleza aleatoria. En el final del ciclo, 6° básico, las actividades buscan cuantificar sucesos posibles y favorables utilizando el diagrama de árbol y asociar la probabilidad a la fracción entre casos favorables y posibles, pasando por la experimentación y la faceta frecuentativa de la probabilidad. Lo que deja en evidencia la invisibilidad de la noción aleatoriedad, en este currículo.

Los estándares orientadores, para futuros profesores de educación básica, señalan la importancia de considerar las particularidades de los escolares en la preparación e implementación de la enseñanza, entre las que se encuentran el desarrollo psicocognitivo, sociocultural, sus experiencias como el dominio de conocimientos, habilidades y competencias respecto a la disciplina. Este último aspecto, que es fundamental para un aprendizaje significativo, contrasta con la debilidad de los conocimientos disciplinarios y pedagógicos de los profesores, Ortiz y otros 2012 y López 2006, reportan la dificultad de los profesores al enfrentarse a conceptos nuevos para ellos, como los de probabilidad, citado por Ortiz (2006) y Stohl 2005 documenta que muchos profesores fallaban al implementar el enfoque experimental dado que las tareas propuestas consideraban muestras pequeñas en las que no se alcanzaba a apreciar la estabilización de la frecuencia.

Estos resultados evidencian una problemática en el triángulo didáctico, que relaciona las complejidades del saber a enseñar, la probabilidad; la débil preparación con la que enfrentan la enseñanza los profesores de educación básica, producto de una insuficiente o nula formación en el área y la importancia de una formación ciudadana que permita a las personan tomar las mejores decisiones bajo incertidumbre en los distintos ámbitos de su vida.

Favorecer una enseñanza que surja desde la modificación consciente de las ideas previas de los estudiantes y de las reorganizaciones que implica este cambio conceptual, comienza por indagar en los conocimientos sobre aleatoriedad que surgen desde las historias de futuro que elaboran 4 estudiantes frente a situaciones con ciertos niveles de incerteza. Conocer y describir tales relatos en estudiantes de 10 a 12 años proporciona información para comprender como razonan en escenarios de incerteza e identificar experiencias que faciliten la comprensión de esta noción y su reconocimiento en diferentes contextos. El problema de este estudio se formula en términos de la pregunta: ¿Qué conocimiento de aleatoriedad surgen desde las historias de futuro que estudiantes, entre 10 a 12 años construyen?

Antecedentes

Una de las nociones centrales en la construcción de pensamiento probabilístico es el concepto de aleatoriedad. Quien comprende la distinta naturaleza de los fenómenos que conforman la realidad tiene grandes ventajas en los complejos procesos atribuidos al estudio de la probabilidad. Esta noción, como bien han señalado Azcárate y otros (1998, p 86), es ambigua, compleja y habitualmente es considerada como un concepto obvio sin que su significado sea analizado con profundidad. Ellos plantean la hipótesis de que determinados tipos de concepciones, pueden ser un claro obstáculo para la comprensión de la naturaleza probabilística de ciertos aspectos de la realidad. El concepto de suceso aleatorio, se presenta como un aspecto fundamental para contribuir al desarrollo de una cultura probabilística. La vida cotidiana está plagada de sucesos

aleatorios, entre ellos están: los accidentes, el número de personas que acudirán a un concierto, sacarse la lotería o los viajes. Este tipo de sucesos, aun cuando muchos de ellos dependan de decisiones individuales, pueden ser estudiados como aleatorios. La capacidad de reconocimiento y tratamiento de los sucesos aleatorios depende del nivel de reconocimiento de la incertidumbre y la complejidad presentes en los fenómenos; es decir, de la comprensión de la noción de azar (Azcárate, et al, 1998, p.86).

Por otra parte, los estudios de Piaget - Inhelder señalan que el concepto de aleatoriedad no puede ser acomodado antes de la etapa operacional. Otras preocupaciones sobre aspectos didácticos propuestos en los currículos escolares, que adoptan el enfoque de la probabilidad clásica, estimándose en términos de lo frecuentativo o subjetivo, son informados por Burril y Biehler 2011 y anteriormente Konold 2007, (citados por Biehler y Pratt 2012, p. 820) por lo que proponen a los investigadores, incursionar en el área del riesgo basado en decisiones.

Pratt, 2011, p.820; propone desarrollar mayor investigación que permita fundamentar planes de estudio que escapen a las limitaciones de los enfoques centrados en monedas, dados y ruletas ya que, Eicher y Vogel 2012 (citado por Biehler 2012, p. 821) sostiene que los estudiantes no podrían alcanzar, niveles importantes de cognición, debido a la simplicidad de la tarea las que pudieran ser un obstáculo para reconocer su naturaleza aleatoria.

El enfoque didáctico propuesto por Abrahamson, basado en el razonamiento perceptivo, proporciona una alternativa a la experimentación como recurso epistémico inicial que habrá que ir dejando de lado para dar paso a la conceptualización. Pfannkuch y otros enfatizan las imágenes, reconociendo el poder de las percepciones iniciales y el modelado para mejorar el razonamiento. Ellos promueven el uso de imágenes en un diseño de enseñanza que comienza con la comprensión de muestreo a los 14 años aproximadamente.

Estos resultados constatan el interés de identificar las experiencias que durante los primeros años de escolaridad podrían facilitar el aprendizaje de la probabilidad. En este reporte nuestro interés es explorar y analizar las concepciones sobre aleatoriedad que subyacen a las predicciones que, niños entre 10 y 12 años, formulan utilizando imágenes visuales.

Marco teórico

Se consideran las contribuciones de Candela (1999, p 276) sobre la construcción contextual de significados que surge a partir del discurso, pudiendo producir múltiples versiones según la situación en la que se realiza. Concordamos con la concepción vygotskiana (1987, citado por Candela1999, p 276) que atribuye un rol fundamental al lenguaje como medio social para modelar el pensamiento y al discurso y a la comunicación en la construcción de conocimiento científico. El

sostiene que los conceptos difieren según el contexto, y que en el caso de los cotidianos, entre los que se encuentran los de la cultura extraescolar, se adquieren por procesos inductivos, a partir de la percepción y dependen de historias individuales. De Azcarate y otros (1998, p 91) adoptamos la clasificación de tipos de argumentos explicativos, de la que destacamos el fenómeno de causalidad, asociado a explicaciones en función de factores causales o de ausencia de control y el fenómeno frecuencial, que se apoya en la lectura frecuencial que se realiza del fenómeno.

En el lenguaje cotidiano lo aleatorio está relacionado con lo casual, lo azaroso, lo aventurado, fortuito y la duda, entre otros sinónimos. En el discurso teórico el estudio de los fenómenos aleatorios se le atribuye a la probabilidad, y se caracterizan porque son fenómenos naturales cuyo resultado está fuera de control y dependen del azar. Así, en condiciones similares de realización, ellos pueden dar lugar a varios resultados, sin que pueda ser previsible enunciar con certeza cuál de éstos va a ser observado en la realización del experimento o fenómeno. Para Ayer (1974) un fenómeno se considera aleatorio si se comporta de acuerdo al cálculo de probabilidades.

Desde esta perspectiva, nos apoyamos en Batanero (2005, p 252 - 256), ella distingue 3 concepciones que se han desarrollado en la evolución de esta noción:

Clásica: asocia la aleatoriedad con la equiprobabilidad; Frecuencial: asocia la con la convergencia entre las frecuencias esperadas y las observadas en experimentos aleatorios y Complejidad absoluta: Relaciona la aleatoriedad con la imposibilidad de establecer patrones en secuencias de experimentos aleatorios.

Metodología

Participantes y Contexto: En esta exploración participan 4 niños cuyas edades fluctúan entre 10 y 12 años, de un colegio particular subvencionado de Curicó, quienes a partir de 2° básico se han estado aproximando al lenguaje y a las características de la noción de aleatoriedad, según el programa oficial. Los niños tienen cursado 4°, 5° y 6° año básico respectivamente. El estudio se sustenta en seis situaciones desarrolladas al mismo tiempo. Se utilizaron imágenes para que los niños elaboraran historias de futuro (predicciones), para caracterizar la aleatoriedad de la situación, pronunciarse sobre cuán posible era su historia, utilizando una escala de 1 a 9 en que 1 significa imposible que ocurra y 9 absolutamente posible, y justificarla. Las respuestas de los niños quedaron consignadas en papel.

Las preguntas están asociadas a conceptos básicos de la probabilidad, suceso, aleatoriedad y predicción, en el sentido de historias de futuro y son analizadas desde las textualidades de los estudiantes, en las que describen sus concepciones en las predicciones que elaboran.

Se esperaba que las respuestas provinieran desde la experiencia ante situaciones pasadas similares pero reconociendo cierto grado de incertidumbre en cada caso si correspondía. Dado que adherimos a la concepción de situación aleatoria como caracterizada por no poder afirmar con absoluta certeza lo que va a suceder, porque depende del azar, se espera que ante todas las situaciones, los niños construyan historias de futuro en torno a lo que visualiza y las fundamenten. Por razones de espacio solo se consideraran tres de las situaciones propuestas, para este artículo.

La primera situación refiere a esta imagen en la que debe predecir lo que sucederá en el instante siguiente, y justificarla.

Se espera que responda que: *El niño más grande le va a quitar la pelota al más chico; que este seguro de su predicción y la cuantifique como más que posible, lo que significaría que se fija en la posición de los jugadores e indique que es posible que esto ocurra porque el jugador más grande puede empujar al más pequeño, ya que lleva el brazo cerca de la espalda del más chico, y quitarle la pelota. Si no está seguro de su predicción lo cuantificará con muy poca posibilidad o poco posible, elaborando una justificando, lo que indica que considera implícitamente la presencia de distintas variables que no se pueden controlar.* La segunda situación, muestra dos imágenes de basquetbolistas anotando un punto con el balón, se espera que a la pregunta ¿Qué tiene de común estas jugadas?, responda: *Que es un juego de basket y que en ambos casos el jugador anotará un punto y que este absolutamente seguro de la ocurrencia de esta predicción.* Lo que indica que reconoce que la situación tiene una única respuesta y significa que está completamente determinada. La tercera situación corresponde a un juego en que seis niños ubicados en círculo se tiran una pelota, sin un orden determinado, a la pregunta: Si uno de tus amigos tiene la pelota ¿sabrías, en ese momento, si te la va a tirar a ti?, se espera que responda *No;* que califique su respuesta con muy posible, y que Justifique: *Porque se la puede tirar a cualquier compañero porque el juego no tiene un orden.*

Análisis de los resultados

En todas las situaciones los niños construyen historias de futuro cualificándolas de acuerdo a los criterios presentados. Las siguientes tablas muestran las textualidades y el análisis de ellas.

Situación 1	N1 (11 a)	N2 (12 a)	N3 (10 a)	N4 (10 a)
Escribe lo que crees que sucederá en el instante siguiente	El niño número 3 (derecha en la lámina) se va a caer.	Yo creo que sucederá que el jugador 3 (derecha) le meterá un gol al equipo contrario	En el instante puede pasar que anotara un gol o perdería, depende de la jugada que haga.	El niño n° 2 (del medio) pateara la pelota
¿Es seguro que esto ocurra?	Segura de su respuesta	Sí, yo creo que sucederá Puede o no ser posible	Si porque en la mayoría ocurre	Es posible
Coloca puntaje	6	(5)	8	6
Justifica	Porque el niño número 2 está empujando al niño 3	Puede o no ser posible porque no se puede ver el futuro en lo que sucederá después	Yo puse ese puntaje porque lo que he visto en algunas veces sucede eso	Es posible porque el n°1 (de espalda en la foto) está más lejos y el n° 3 está a la misma distancia
Se observan dos tipos de historias, N1 y N4 construyen historias particulares y de suceso absoluto – lo que se percibe como no reconociendo la aleatoriedad – N2 y N3 construyen historias más generales las que refieren a identificar, en la situación, algunos elementos que pueden incidir en el resultado de la jugada, que no pueden controlar y que influyen en sus predicciones. Estas dos repuestas obedecen al reconocimiento implícito del azar en la situación. Si se analizan los puntajes asociados a las historias construidas por los niños, 3 de 4 aceptan la aleatoriedad de la situación, sin embargo las justificaciones de N1 y N4 ponen en evidencia la concepción determinista de su pensamiento.				

Tabla 1: producciones de los niños en la situación 1 y su análisis posterior

Situación 2	N1 (11 a)	N2 (12 a)	N3 (10 a)	N4 (10 a)
¿Qué tienen de común estas jugadas?	Los dos van a hacer una jugada (encestar)	Lo que tienen en común estos jugos es que los 2 van a encestar una jugada, también los 2 se tratan de basketball	Lo común es que los dos van a encestar en el aro de basquetbol	Ambos están cerca del aro y ambos aran un punto
¿Es seguro ...?	Sí	Sí	Sí	Posible (en el sentido de absolutamente posible) Sí
Coloca puntaje	9	Muy posible (8)	9	6 (en el sentido de 9)
Justifica	Porque los dos van a encestar	Porque los 2 se ven en la foto que están asestando la pelota de basketball	Yo puse ese puntaje porque lo que se ve en la imagen es eso.	Porque en ambas ganara
Elaboración historia común. Justificaciones absolutas desde lo que se observa en la imagen Reconocimiento del suceso seguro. No hay duda -incertidumbre				

Tabla 2: producciones de los niños en la situación 2 y su análisis posterior

Situación 3	N1 (11 a)	N2 (12 a)	N3 (10 a)	N4 (10 a)
¿Sabrías en ese momento que te la lanzará?	No	No se	Si	No sabría
Coloca puntaje	9	1	9	3
Justifica	Porque se tiran de diferentes formas	Porque no se sabe a quién de los 5 amigos se lo va a tirar a otro	Yo puse ese puntaje *porque yo he jugado ese juego, lo sé si me mira o la posición que ponga de su brazos si me apunta yo ya sabré queme la lanzará*	Porque no sabría si me la tiran a mi
3 de 4 niños Reconocen implícitamente la aleatoriedad en reglas del juego y la incertidumbre de saber si les llegara la pelota. Hay un reconocimiento del desorden en las reglas del juego N3 no reconoce la aleatoriedad y ofrece justificaciones causales que refieren a frecuencia de la situación				

Tabla 3: producciones de los niños en la situación 3 y su análisis posterior

Conclusiones

Se constata la elaboración de predicciones, a través de sus historias de futuro, asociando grados de incerteza que se interpretan como adecuados, a las situaciones lo que indica que identifican su naturaleza aleatoria. Se reproduce el fenómeno de causalidad, reportado por Azcarate y otros 1998, que se interpreta de la falta de certeza de las historias que construyen y en la analogía con

experiencias anteriores, lo que se constata cuando el niño explica frecuentemente *"porque yo he visto que algunas veces sucede eso o así ha pasado cuando he jugado"*.

En respuestas como: *"no se puede ver el futuro"; "el juego no tiene orden,"* se interpreta como la identificación implícita de distintas variables que pueden influir en el resultado de una situación aleatoria, lo que permitiría intencionar la diferenciación entre lo aleatorio y lo determinista; estas últimas permiten la construcción de una única historia, mientras que las aleatorias dan lugar a historias con matices diferentes, lo que revela su naturaleza. En la situación tres, los estudiantes reconocen la aleatoriedad como influencia del caos en sus reglas, por lo que se presenta como apropiada para modelar, en este nivel, la incerteza.

Se aprecia que 2 de 4 niños tienen un pensamiento aleatorio más desarrollado, ya que sus justificaciones revelan la consideración de distintas variables para fundamentar las historias que construyen, lo que indica las diferencias cognitivas en el estadio preoperatorio.

Desatacamos el rol de las imágenes como medio de expresión de las predicciones que los estudiantes, que permitieron capturar con mayor sensibilidad la naturaleza de las situaciones, aproximándose a planteamientos reportados, como los de Abrahamson y Pfannkuch.

Referencias bibliográficas

Azcárate, P., Cardeñoso, J.M. Porlán, R. (1998). Concepciones de futuros profesores de primaria sobre la noción de aleatoriedad. Enseñanza de las Ciencias 16 (1), 85 – 97

Batanero, C. (2005) Significados de la probabilidad en la educación secundaria. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 8 (3), 247–263.

Biehler • Pratt 2012, Research on the reasoning, teaching and learning of probability and uncertainty, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 819 - 923

Candela, A. (1999) Prácticas discursivas en el aula y calidad educativa. Revista Mexicana de Investigación Educativa, vol. 4, n° 8, 273-298. México.

Díaz, L. y Castro, I. (2011) Articulando prácticas para las fracciones con redes conceptuales. Ponencia in extenso en Actas de la XIII CIAEM, Recife, Brasil.

Méndez, Díaz (2012), Acepciones de aleatoriedad en tres grupos diferenciados, Actas de las Jornadas Nacionales de Educación Matemática. Chile.

Mineduc 2012 Bases Curriculares ciclo básico - Programas de curso ciclo básico

Ortiz, Batanero, Contreras 2012, Conocimiento de futuros profesores sobre la idea de juego equitativo, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 15, Vol. 1, 63 – 91

Vásquez, Parraguez (2011), Construcción del concepto Probabilidad: Una mirada perspectiva desde la teoría APOE, 25 Acta Latinoamérica de Matemática Educativa p. 573 – 581

UNA MIRADA COGNITIVA A LAS TRANSFORMACIONES LINEALES. ARTICULACIÓN ENTRE LAS INTERPRETACIONES: MATRICIAL Y FUNCIONAL

Isabel Maturana Peña y Marcela Parraguez González
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso Chile
isamatup@hotmail.com, marcela.parraguez@ucv.cl

Resumen. Fundamentamos nuestro estudio en la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema), como marco teórico referencial y una propuesta de investigación, en la que reconocemos diferentes interpretaciones del concepto transformación lineal, las que hemos denominado interpretación funcional y matricial. Nos propusimos documentar las construcciones y mecanismos mentales que los estudiantes ponen en práctica en la articulación de las interpretaciones del concepto transformación lineal. Haciendo uso de la metodología propia de APOE y el grupo RUMEC, diseñamos descomposiciones genéticas para cada interpretación. En su dimensión metodológica es un estudio de caso. Las evidencias obtenidas dan cuenta, que para los estudiantes próximos o que han construido el objeto transformación lineal, existe una prevalencia en el conocimiento residual para la interpretación matricial, lo que resulta contradictorio, pues este es la resultante de una simplificación de la interpretación funcional.
Palabras clave: Articulación, Matriz, Transformación Lineal, APOE
Abstract. We base our study on APOS theory (Action, Process, Object, Schema) as theoretical framework and a research proposal, which recognize different interpretations of the linear transformation concept, which we call functional and matrix interpretation. We set out to document the construction and mental mechanisms that students put into practice in the articulation of the concept of linear transformation interpretations. Using the methodology of APOE and RUMEC group, we designed genetic decompositions for each performance. In its methodological dimension is a case study. The evidence obtained realize that for students coming or have built in order linear transformation, there is a prevalence in knowledge for interpreting residual matrix, which is contradictory, because this is the result of a simplification of the functional interpretation.
Key words: Articulation, matrix, Linear Transformation, APOS

Introducción

Nos propusimos, como objetivo de investigación, indagar las construcciones y mecanismos mentales que los estudiantes ponen en juego para la (re)construcción del concepto transformación lineal; reconoceremos, en el concepto, componentes de origen funcional y matricial, entendiendo cada uno de estos componentes como diferentes interpretaciones de una misma definición.

La enseñanza del álgebra lineal es un tema que se encuentra presente en la mayoría de los programas de matemática para carreras como ingeniería, licenciatura y pedagogía en ciencias; por otra parte existen numerosas investigaciones que ofrecen evidencias sobre las dificultades que poseen los estudiantes para comprender los conceptos relativos al álgebra lineal, según Dubinsky, Dauterman, Leron y Zazkis (1994) el problema central radica en que, en esta materia, el estudiante debe hacer uso de conceptos abstractos, pero su tendencia es a trabajar con procedimientos mecánicos, limitando su comprensión sobre los conceptos involucrados. En particular sobre el concepto de transformación lineal la documentación hasta ahora obtenida da cuenta que representa un obstáculo mayor; son diversas las investigaciones en matemática

educativa que han abordado su problemática de aprendizaje, por ejemplo, el estudio de Roa y Oktaç (2010)proporcionó como resultado una descomposición genética del concepto, que consideró dos formas de construcción. Por otra parte, Montiel y Batthi (2010) abordan la problemática de enseñanza de los conceptos de la matriz cambio de base y la representación matricial de las transformaciones lineales, bajo el enfoque ontosemiótico, centrando su atención en el rol de problemáticas semánticas y gestuales en la interacción en el aula. Ambos son ejemplos de investigaciones recientes, que por separado abordan las problemáticas de aprendizaje del concepto transformación lineal, relacionadas a las interpretaciones funcional y matricial respectivamente. Nuestra propuesta apunta a establecer una primera aproximación a la construcción del esquema del concepto transformación lineal, esto es considerando la construcción de estas dos interpretaciones fundamentalmente como objeto.

Fundamentación teórica APOE

La investigación usó la teoría APOE desarrollada por Dubinsky y el grupo de investigación RUMEC(Research in UndergraduateMathematicsEducationCommunity). Actualmente en Arnon, Cottril, Dubinsky, Oktaç, Roa, Trigueros y Weller (2014) se presentan los elementos de la teoría y su uso en investigaciones en Educación Matemática. Dubinsky se basa en la abstracción reflexiva de Piaget para describir la construcción de objetos mentales, y distingue varios tipos de mecanismos: interiorización, coordinación, encapsulación, y reversión. Estos originan diferentes construcciones (mentales): acciones, procesos, objetos, esquemas (APOE).

Consideremos un fragmento *F* de conocimiento matemático. Un individuo posee una concepción acción de *F* si las transformaciones que hace sobre él se realizan paso a paso, obedeciendo a estímulos que son y percibe como externos. Él interioriza la acción en una concepción proceso de *F* si puede realizar una operación interna que hace esencialmente la misma transformación enteramente en su mente, sin necesariamente recorrer todos los pasos específicos. Si piensa en un proceso como un todo, y realiza y construye transformaciones sobre su totalidad a encapsulado el proceso en una concepción objeto de *F*. Un esquema de aquel trozo es una colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados consciente o inconscientemente en la mente del individuo en una estructura cognitiva coherente. Una descomposición genética, DG, describe en detalle los aspectos constructivos de *F* para explicitar un camino factible de su aprendizaje en términos de construcciones y mecanismos mentales.

Diseño metodológico de la investigación

Incorporaremos a la metodología propia de la teoría APOE el estudio de caso, pues son particularmente apropiados para realizar investigaciones en un determinado periodo de tiempo,

identificando los distintos procesos interactivos que conforman la realidad de su enseñanza-aprendizaje (Arnal,Del Rincón y Latorre, 1992). Las unidades de estudio son alumnos chilenos de una universidad del país, estudiantes de la carrera de pedagogía en matemática. La selección de los estudiantes de esta unidad de estudio trabajada como "caso", se vinculan con las siguientes categorías e indicadores: estudiantes exitosos académicamente, experiencias previas, avance curricular, ejercitan ampliamente en matemática, estudiantes voluntarios, heterogeneidad en los procesos de formación de los estudiantes, accesibilidad de los investigadores. Se trabajó con una unidad de análisis de 20 estudiantes, atendiendo a los criterios antes señalados y se diseñaron protocolos de entrevistas semi-estructuradas, previstas por la teoría las que se grabaron. Por otra parte es preciso aclarar que al caso de estudio se le aplicará el ciclo de investigación previsto en la teoría APOE, el cual establece: un análisis teórico, conocido como (DG); un diseño, basado en la descomposición genética teórica, y aplicación de instrumentos; seguido de un análisis y verificación de datos.

El diseño de investigación

Dentro del diseño se consideró realizar dos descomposiciones genéticas, una para la interpretación funcional y otra para la interpretación matricial, del concepto transformación lineal, que a continuación presentaremos parte de sus relatos. Para desarrollar la investigación se presentó a los estudiantes del caso un cuestionario por interpretación (matricial y funcional), con diez preguntas, cinco por interpretación, el cual se entregó en una carpeta a los estudiantes, donde el orden para dar respuesta a las preguntas quedó abierto a sus criterios.

Descomposiciones genéticas hipotéticas

A continuación presentamos parte central de los relatos de las DG propuestas:

- DG de la interpretación funcional:

Bajo la hipótesis de la teoría APOE y las nociones matemáticas sobre transformaciones lineales, sostenemos que, para que un estudiante llegue a construir el concepto de transformación lineal como una construcción mental objeto, es necesario que muestre una construcción mental objeto de los conceptos: espacio vectorial real de dimensión finita y función sobre un conjunto, de esta forma consideramos dos espacios vectoriales *V* y *W* sobre el cuerpo de los números reales (*R*), con dimensiones finitas, digamos *n* y *m* respectivamente; y el concepto función sobre conjuntos, es decir $f: A \rightarrow B$, donde $x \rightarrow f(x)$. Desde estas construcciones mentales objetos desencapsularemos como procesos, los espacios vectoriales *V* , *W* y el concepto de función, además de considerar la combinación lineal como un proceso dentro de los espacios vectoriales, de la siguiente forma $\forall v, v_1, v_2 \in V; \alpha_i \in R$ y $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in V$.Paso seguido se tiene una

coordinación por la restricción de la función definida sobre conjuntos a espacios vectoriales, de esta forma se tiene una construcción proceso del concepto de función entre espacios vectoriales, posteriormente tenemos dos coordinaciones del proceso antes mencionado y los vectores en los espacios dados, uno, a través de la combinación lineal de vectores en el espacio de partida y el otro el reconocimiento que las imágenes de la función son vectores del espacio de llegada. Se da, así una coordinación por la restricción de la función definida sobre conjuntos a espacios vectoriales, de esta forma se tiene una construcción proceso del concepto de función entre espacios vectoriales, posteriormente tenemos dos coordinaciones del proceso antes mencionado y los vectores en los espacios dados, uno, a través de la combinación lineal de vectores en el espacio de partida y el otro el reconocimiento que las imágenes de la función son vectores del espacio de llegada.

Los anteriores procesos serán coordinados por la igualdad, para obtener el proceso que define la transformación lineal, y encapsular como un objeto que posteriormente se rotula como transformación lineal.

- DG de la interpretación matricial:

Relato de la descomposición genética referida a la interpretación matricial, esto es la matriz asociada a la transformación lineal (MATL).Bajo la hipótesis de la teoría APOE y las nociones matemáticas sobre MATL, sostenemos que: para que un estudiante llegue a construir la MATL como objeto, es necesario que muestre una construcción objeto del concepto espacio vectorial de dimensión finita, de esta forma consideramos dos espacios vectoriales *V* y *W*, con dimensiones finitas: digamos *n* y *m* respectivamente, para luego, desencapsular de este objeto; por una lado bases ordenadas $B=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ y $B'=\{w_1,w_2,\ldots,w_m\}$ de los espacios *V* y *W* respectivamente como procesos y la pertenencia de un vector *w* al espacio vectorial *W*, también como proceso. Paso seguido se dan dos coordinaciones de los procesos antes mencionados a través, uno de la transformación lineal y el otro por medio de la combinación lineal de vectores. Específicamente, la primera coordinación, mediante la transformación lineal, es entre los procesos de las bases ordenadas *B* y *B'*de *V* y *W* respectivamente, donde se calculan mediante la transformación lineal las imágenes de los vectores de la base *B*. La segunda coordinación es entre los procesos base ordenada B' de *W*, con la pertenencia de un vector *w* a *W*, se coordina a través de la combinación lineal de vectores, dando origen al proceso de expresar w como combinación lineal de los vectores de la base ordenada *B'* de *W*, este nuevo proceso se encapsula en el objeto coordenada de vector w en la base B', es decir, $[w]_{B'}$. Por otra parte, y a continuación la DG, da cuenta de la desencapsulación de los objetos matriz rotulada de coordenadas y las coordenadas de un vector *v* de *V,* ambos objetos desencapsulados como procesos son coordinados por el producto matricial,

formando una matriz resultante de dicho producto, es decir $[T]_B^{B'}[v]_B$ lo cual es un proceso el que se podrá encapsular en un objeto matricial y posteriormente rotular como $[T(v)]_{B'}$.

En búsqueda de evidencias empíricas para la DG

Realizamos un análisis a priori y uno a posteriori para cada pregunta del cuestionario, con la intención de documentar las construcciones y mecanismos mentales dispuestos en las descomposiciones genéticas.Hemos seleccionado dos preguntas del cuestionario, una por cada interpretación, para mostrar parte de las evidencias obtenidas.

Pregunta seleccionada correspondiente a la interpretación funcional

Pregunta 4.-*Encuentre la transformación lineal* $f: R^2 \to R^2$ *talque f(1,1)=(-5,3) y f(-1,1)=(5,2). Para esta transformación lineal ¿Es posible determinar f(1,2)?*

La pregunta tiene por propósito obtener evidencia de la forma en que la combinación lineal es usada como elemento coordinador de las construcciones mentales que un estudiante pone en juego al coordinar los procesos provenientes de la preservación de la estructura algebraica del dominio en el recorrido. La construcción mental que da cuenta este tramo es proceso para la construcción de la igualdad de las imágenes dadas por la transformación lineal. Como el vector (1,2) es combinación lineal de los vectores (1,1) y (-1,1), y la función es una transformación lineal se tiene: $f(1,2) = \frac{3}{2}f(1,1) + \frac{1}{2}f(-1,1)$, por lo que se obtiene: $f(1,2) = \frac{3}{2}(-5,3) + \frac{1}{2}(5,2) = (-5,\frac{11}{2})$.

Pregunta seleccionada correspondiente a la interpretación matricial

Pregunta 3:*Sea* $T: \mathrm{M}_2(R) \to R^2$ *transformación lineal definida por T=(a+ b-c, d).Considere B=* $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\right\}$ *base de* $\mathbf{R^3}$ *y* $B_2=\{(1,1),(0,1)\}$ *base de* $\mathbf{R^3}$*. Determine* $[T(\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix})]_{B2}$.

La intención de la pregunta, es proponer al estudiante una situación que lo aparta de la dimensión del cálculo numérico, por lo que en su respuesta daría muestra de una construcción proceso del concepto coordenada de un vector general. Es un paso previo a la generalización necesaria para la construcción de la matriz asociada a la transformación lineal. Por lo que su respuesta esperada: $T\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} = (a+b-c,d)$, un estudiante debería coordinar el concepto de función con el de vector para calcular la imagen anterior, luego para encontrar las coordenadas, deberá

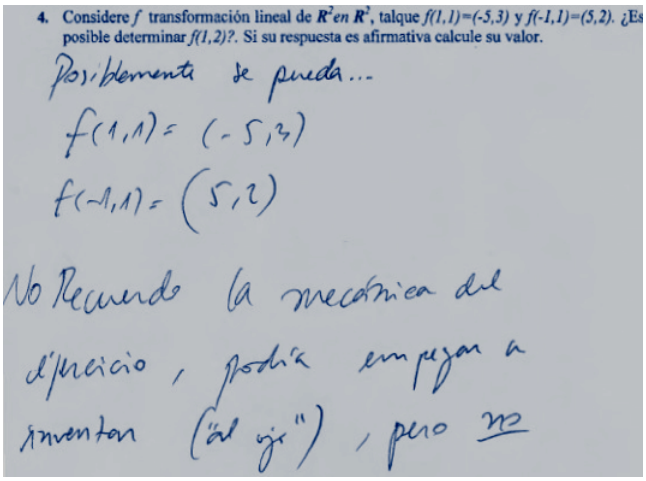
escribir el vector imagen como combinación lineal de la base B_2, esto es $(a+b-c,d)=\alpha(1,1)+\beta(0,1)$, de donde $\alpha=a+b-c$ y $\beta=d-a-b+c$.Por lo que se tiene $\left[T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right]_{B_2}=\begin{bmatrix} a+b-c \\ d-a-b+c \end{bmatrix}$.

El desempeño de los estudiantes y análisis a posteriori

Con el fin de mostrar ejemplos de los datos obtenidos, se presenta, a continuación una selección del trabajo realizado por los estudiantes del caso a las preguntas antes descritas.

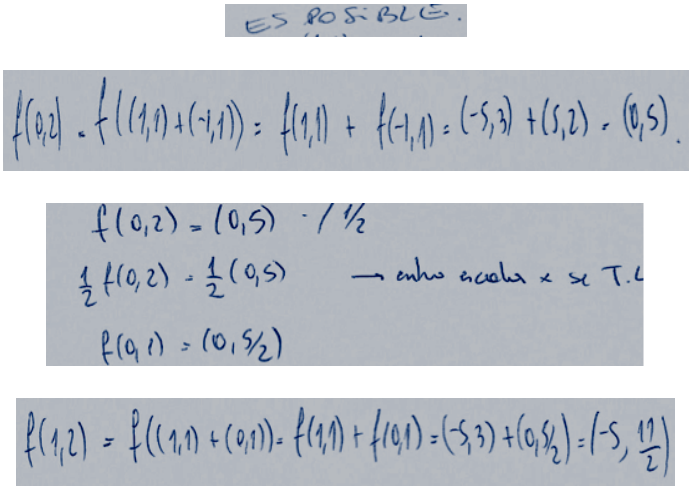
Análisis a posteriori Pregunta 4 interpretación funcional

La figura 1 muestra, cómo el estudiante E2 tiene dificultades en la coordinación de los procesos para la construcción del concepto transformación lineal en su interpretación funcional. Esto es, al no escribir al vector (1,2) como combinación lineal de los vectores (1,1) y (-1,1) y aplicar la transformación lineal. Desde la DG interpretación funcional, podemos argumentar que E2, no coordina los procesos relacionados con la igualdad, al señalar no recordar un teorema que hace explicita esta relación –el teorema fundamental del algebra lineal–.


4. Considere f transformación lineal de R^2 en R^2, talque $f(1,1)=(-5,3)$ y $f(-1,1)=(5,2)$. ¿Es posible determinar $f(1,2)$?. Si su respuesta es afirmativa calcule su valor.

Posiblemente se pueda...
$f(1,1)=(-5,3)$
$f(-1,1)=(5,2)$
No Recuerdo la mecánica del ejercicio, podría empezar a inventar ("al ojo"), pero no

Figura 1. Respuesta que realiza el E2 a la pregunta 4de la interpretación funcional.


ES POSIBLE.

$f(0,2)=f((1,1)+(-1,1))=f(1,1)+f(-1,1)=(-5,3)+(5,2)=(0,5)$.

$f(0,2)=(0,5)\ /\ 1/2$
$\frac{1}{2}f(0,2)=\frac{1}{2}(0,5)$ → entro escalar x se T.L
$f(0,1)=(0,5/2)$

$f(1,2)=f((1,1)+(0,1))=f(1,1)+f(0,1)=(-5,3)+(0,5/2)=(-5,\frac{11}{2})$

Figura 2. Respuesta que realiza el E9.

En la figura 2, se muestra cómo E9 da respuesta a la pregunta 4, mostrando una construcción objeto del concepto TL en su interpretación funcional, pues para coordinar los conceptos de base con el de función entendiendo que es la propiedad que define a la transformación lineal, mediante la combinación lineal, debió desencapsular los procesos antes descritos.

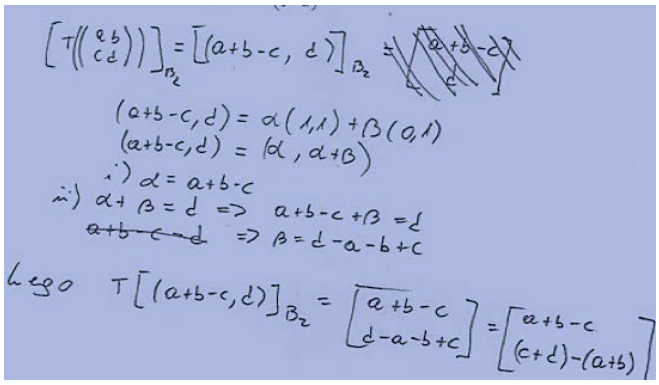


Figura 3 Respuesta de E3 a la pregunta de la interpretación matricial

La figura3, muestra la respuesta del E3, donde las coordenadas del vector imagen $(a+b-c,d)$ en la base B_2 son obtenidas mediante la resolución de un sistema de ecuaciones lineales.Esto es, E3nos muestra que y rotula la construcción objeto del concepto coordenadas de la imagen un vector.

Sobre la articulación

En búsqueda de organizar las evidencias recopiladas en la investigación, ordenamos en tablas por; interpretación - pregunta - estudiante- concepto y construcción mental, desde allí se extrajo información relevante sobre cómo se construye el concepto transformación lineal. A continuación un resumen sobre los estudiantes del caso que mostraron en sus respuestas a ambas interpretaciones las construcciones mentales próximas a la construcción objeto. Además se proporciona información referida a él orden en que seleccionaron sus preguntas, esto es las preguntas de la interpretación matricial (M) y funcional (F).

Tabla 1. Fuente de datos investigación.

Estudiante	Orden en que se respondió al Cuestionario	Construcción mental mostrada Interpretación Funcional	Construcción mental mostrada Interpretación Matricial	Se destaca en ambos cuestionarios
E3	MF	Proceso	Objeto	
E4	FM	Objeto	Objeto	Ambos
E5	MF	Proceso	Acción	
E9	MF	Objeto	Objeto	Ambos
E10	MF	Proceso	Proceso	
E13	MF	Acción	Proceso	
E15	FM	Proceso	Proceso	
E18	MF	Proceso	Proceso	

La explicación dada por los estudiantes al orden de selección es que les "resulta más fácil". Por otra parte, del total de los estudiantes del caso (20), 11 eligieron la configuración FM y 9 la MF,

casi la mitad de los estudiantes, por lo que podríamos concluir que el orden no es determinante en la construcción del concepto, pero en tabla 1 se muestran a los mejores, y de estos 6 eligieron la configuración MF, y sólo 2 la configuración FM, por lo que el orden en general de selección podría dar información como estos han construido el esquema del concepto transformación lineal.

Algunas conclusiones

Interpretación Funcional: Las evidencias obtenidas para la interpretación funcional, dan cuenta que los estudiantes que no logran construir como objeto el concepto transformación lineal dicen: no recordar la definición de transformación lineal, esto es se encuentran en una construcción mental acción, pues requieren del incentivo externo para dar respuesta a estas preguntas. Por otra parte están los estudiantes que dan evidencias de poseer una construcción proceso, estos recuerdan la propiedad, pero no coordinan la igualdad que define a la transformación lineal en el sentido de lo descrito en nuestra descomposición genética, esto es la coordinación mediante la igualdad para preservar la estructura algebraica del espacio vectorial de partida en el espacio de vectorial de llegada.

Interpretación Matricial: Las evidencias en el caso de estudio indican que el concepto de coordenadas de la imagen de un vector, por medio de una transformación lineal no representa dificultad a los estudiantes, sin embargo la generalización de este, es un obstáculo para alcanzar la construcción objeto de la matriz asociada a la transformación lineal, tal como la búsqueda de coordenadas en un objeto general. De esta forma en la construcción de la interpretación matricial, los dos temas substantivos, según los datos del estudio, vale decir, transformación lineal y matriz de coordenadas, son ignorados por el estudiante, quien se dedica inmediatamente a comprobar que la operación entre la matriz cambio de base y las coordenada del vector en una determinada base, den la igualdad esperada.

Sobre la articulación de estas dos interpretaciones del concepto transformación lineal, se vislumbró una relación que afecta la construcción del esquema del concepto, esto es la interpretación matricial como un esquema que asimila a la interpretación funcional, pero que se construye con el concepto transformación lineal.

En generalhemos de considerar que las descomposiciones genéticas propuestas para la investigación dan cuenta: para la interpretación funcional de algunas perspectivas no contempladas en investigaciones sobre la temática de aprendizaje del concepto transformación lineal, por ejemplo sobre la igualdad proveniente de la preservación de la estructura algebraica aditiva

mediante el concepto de combinación lineal (homomorfismo). Para el caso de la descomposición genética de la interpretación matricial es la primera propuesta que muestra sus evidencias.

Referencias bibliográficas

Arnal, J. del Rincón, D., y La Torre, A. (1992). *Investigación educativa: fundamentos y metodología*. Barcelona: Labor.

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory. A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education.* New York: Springer.

Dubinsky, E.,Dauterman, J., Leron, U. y Zazkis, R. (1994). On learning fundamental concepts of GroupTheory. *Educational studies in Mathematics*, 27, 267-305.

Montiel, M., y Bhatti, U. (2010). Advanced mathematics online: Assessing particularities in the online delivery of a second linear algebra course. *Online Journal of Distance Learning Administration*, *13*(2).Distance Education Center.

Roa, S., y Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 13 (1)*, 89-112.

LA FORMACIÓN DE CONCEPTOS EN LA RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES NO LINEALES

Marta Caligaris, Georgina Rodríguez y Lorena Laugero
Facultad Regional San Nicolás. Universidad Tecnológica Nacional Argentina
gie@frsn.utn.edu.ar

Resumen. Un estudiante no necesariamente utiliza la definición cuando decide si un objeto matemático es ejemplo o contraejemplo de un concepto determinado, sino que generalmente toma la decisión basándose en una imagen que se hizo del mismo. Por lo tanto, es aconsejable comenzar la enseñanza de cada concepto presentando diversos ejemplos mediantes los cuales los alumnos puedan formarse una adecuada imagen. Este trabajo tiene como objetivo presentar la secuencia didáctica que se diseñó para la comprensión de los conceptos que se hallan involucrados en la resolución numérica de ecuaciones no lineales, ofreciendo experiencias y ejemplos. También se mostrarán los resultados obtenidos tras su aplicación.
Palabras clave: concepto, definición, imagen, ecuaciones no lineales
Abstract. When deciding whether a mathematical object is an example or counterexample of a particular concept , students do not necessarily use the definition, but that decision is usually based on "their image" of it, that is to say, the one that they have constructed. Therefore, it is advisable to begin teaching a concept showing several examples, so as students can build an adequate image of it. This work aims to present the teaching sequence was designed to understand the concepts that are involved in the numerical solution of nonlinear equations, providing experiences and examples. The results obtained after its implementation are also shown.
Key words: concept, definition, image, nonlinear equations

Introducción

Muchas veces, en la práctica docente, se nota la diferencia que existe entre los conceptos concebidos y formulados por la matemática formal y las interpretaciones que los alumnos hacen de los mismos. Así, resulta importante analizar los mecanismos que los estudiantes ponen en juego en el proceso de construcción de un concepto matemático para así poder elaborar secuencias didácticas que contribuyan a tal fin.

En el estudio de la formación de conceptos matemáticos se destacan Vinner y Tall. Para explicar este proceso, introducen los términos "definición del concepto" e "imagen del concepto" (Vinner, 1991; Tall y Vinner, 1981).La definición de un concepto consiste en una serie de palabras que se utilizan para especificarlo. Todos los conceptos matemáticos, excepto los primitivos, tienen definiciones formales. Pero el alumno no necesariamente utiliza la definición cuando decide si un objeto matemático es un ejemplo de un concepto, sino que toma la decisión, en general, basándose en su imagen del mismo, es decir, en el conjunto de todas las imágenes mentales y las propiedades y procesos asociados por él al concepto, algo no verbal que se ha ido formando a lo largo de los años por medio de diversas experiencias. No obstante, esta imagen no es necesariamente coherente en cuanto a su contenido: puede incluir aspectos contradictorios, de los que los estudiantes no son conscientes.

La problemática de Tall - Vinner

Según Vinner (1991), durante el proceso de formación de conceptos, la relación entre imagen y definición del concepto es recíproca. Sin embargo, la enseñanza de un concepto matemático generalmente está dada por la presentación de la definición formal y se espera que la imagen de ese concepto se forme a partir de la misma. Reaccione como reaccione el sistema de asociación cuando se plantea un problema, se supone que no es posible formular una solución sin antes consultar la definición del concepto. Este es, por supuesto, el proceso deseable. Desafortunadamente, no es lo que ocurre en la práctica.

Por esta razón, es aconsejable comenzar la enseñanza de un concepto presentando diversos ejemplos y contraejemplos con los que los alumnos puedan formar una imagen del mismo. Incluso, si el concepto no es muy complicado, el docente puede pedirles que sugieran su propia definición.

Un sujeto adquiere un concepto cuando construye una imagen de él ya que se considera que conocer una definición, no garantiza la comprensión de dicho concepto (Vinner, 1991).Un mismo estudiante puede reaccionar de distintas maneras ante un mismo concepto en diferentes situaciones. Tall y Vinner (1981) utilizan el término "imagen evocada del concepto" para describir lo que se recuerda en un contexto dado.

En cuanto a la definición del concepto, estos autores hacen una importante diferenciación entre la definición institucional o formal del concepto y la definición que construye el estudiante, es decir, su definición personal. La definición del concepto hace referencia a una conformación de palabras utilizadas para especificar el concepto. Un individuo puede aprenderla por repetición o, más significativamente aprenderla y relacionarla, en un mayor o menor grado, con el concepto como un todo. También puede ser una reconstrucción personal de una definición. En este caso, la conformación de palabras que el estudiante utiliza es una manifestación de la imagen evocada del concepto. De esta manera, una definición personal del concepto puede diferir de su definición formal.

Apoyados en lo anteriormente expuesto y en observaciones empíricas, Tall y Vinner, identifican algunos problemas en el aprendizaje de conceptos matemáticos que se manifiestan como desarticulaciones entre el concepto personal, la definición institucional del concepto y la definición personal. Álvarez y Delgado (2002), denominan estos problemas como "Problemática Tall – Vinner":

- La imagen del concepto puede presentar incoherencias, al activarse o ponerse en juego en diferentes situaciones.

- Entre la imagen del concepto o concepto personal que construye el sujeto y el concepto matemático institucional se pueden presentar desadaptaciones matemáticas, relativas a la forma en que el sujeto apropia el significado socialmente compartido del concepto matemático.
- Es frecuente que los estudiantes no dispongan de la definición personal de un concepto matemático que han estudiado. No obstante, aun cuando la tengan y aun si la definición que verbalizan concuerda con la definición institucional, ésta puede estar desarticulada, sin que tenga efectos en la acción del sujeto.

Estos tres problemas permiten explicar porqué, en determinadas situaciones, un alumno puede dar evidencias de comprensión de un concepto y, en otras no.

Estos autores introducen también los conceptos de "estabilidad", "adaptabilidad" y "coherencia". Una definición personal, relativa a un concepto matemático, es estable en la medida en que la persona verbaliza una definición sobre el concepto en forma consistente y equivalente en diferentes situaciones. Una definición personal estable se llama bien adaptada matemáticamente si es equivalente a la definición institucionalizada. La coherencia de la definición se refiere al grado de articulación que tiene dicha definición personal con la acción, es decir con la imagen evocada del concepto.

Por lo tanto, comprender un concepto implica construir una imagen asociada, pero esta comprensión se constituye en un concepto personal bien constituido matemáticamente en la medida en que el sujeto dispone de una definición personal estable del concepto, coherente y bien ajustada a la definición matemática del concepto.

La resolución numérica de ecuaciones no lineales

La necesidad de obtener la solución de una ecuación no lineal se presenta con frecuencia al resolver problemas de ingeniería. De allí la importancia de que los alumnos de estas carreras adquieran las habilidades necesarias para resolver este tipo de ecuaciones.

Uno de los principales obstáculos que se presenta en la enseñanza del Análisis Numérico es la dificultad que tienen los alumnos para comprender la esencia de la materia. Ésta es una asignatura que tiene características propias ya que no existen siempre "verdades" aplicables a todas las situaciones y porque la pertinencia o no de utilizar diversas herramientas para resolver un problema depende fuertemente del contexto en el cual se va a utilizar (Montero, Astiz, Medina, Vilanova, Rocerau y Vecino, 2003).En particular, en la resolución numérica de ecuaciones no lineales, los alumnos tienen inconvenientes para resolver este tipo de ecuaciones debido a que están acostumbrados a trabajar con "precisión" y se desconciertan cuando tienen que resolver

situaciones donde existe cierto grado de incertidumbre (Montero et al., 2003). Esta situación se debe a que, desde la enseñanza elemental de la matemática, hasta el nivel medio superior, se priorizan los métodos determinados sobre los aproximados (Rodriguez y Sierra, 2012). Además, sienten inseguridad cuando deben elegir el método numérico más pertinente para obtener la solución de una determinada ecuación no lineal porque ponen en juego sus conocimientos teóricos, su intuición y experiencia.

Por esta razón, es necesario que los alumnos, en su proceso de aprendizaje, no sólo adquieran la definición de los conceptos que se hallan involucrados en la resolución numérica de una ecuación no lineal, sino también que formen una adecuada imagen de los mismos. Así, podrán abordar sin dificultad las distintas situaciones que se le presenten.

Metodología de trabajo

La metodología que se aplicó corresponde a un estudio de caso, con un enfoque centrado en lo cualitativo pero sustentado en aportes cuantitativos. Para el desarrollo de esta metodología de trabajo, se seleccionaron como grupos de estudio a los estudiantes que concurren al curso de Análisis Numérico correspondiente a las carreras de Ingeniería Industrial, Electrónica y Mecánica en el ciclo lectivo 2013.

En los tres cursos, para la enseñanza de la unidad "Resolución numérica de ecuaciones no lineales", se diseñó e implementó una secuencia de actividades para facilitar la comprensión de los conceptos que se hallan involucrados en el tema, ofreciendo ejemplos pertinentes. Para ello, durante la discusión teórica del tema, se utilizó una de las ventanas personalizadas que constituye el Laboratorio Virtual de Análisis Numérico (Caligaris, Rodríguez y Laugero, 2010).

Por medio de la ventana personalizada que se muestra en la Figura 1, los alumnos pudieron obtener los resultados de las situaciones propuestas, de una manera rápida y sencilla. Esto se debe a que la capacitación que se necesita para utilizar esta ventana es mínima debido a que fue diseñada de manera que presente una interfaz muy simple de interpretar y manipular. Esto posibilita a los alumnos concentrarse en los conceptos matemáticos que el docente quiere destacar, sin necesidad de realizar cálculos rutinarios.

La ventana personalizada de Resolución de ecuaciones no lineales permite obtener una aproximación de una raíz de una ecuación no lineal utilizando los siguientes métodos: Bisección, Newton, Secante y Regula-Falsi (Burden y Faires, 2002; Chapra y Canale, 2004; Mathews y Fink, 2000). Para ello, se deben ingresar la expresión que involucra la ecuación, la tolerancia deseada, la cantidad máxima de iteraciones y la derivada primera de la función asociada a la ecuación. Esto se debe a que dicho software, al trabajar numéricamente, no calcula la derivada de cualquier función

en forma simbólica y, para poder obtener una aproximación de la solución de la ecuación no lineal por medio del método de Newton, se requiere de la evaluación de dicha derivada en cada iteración.

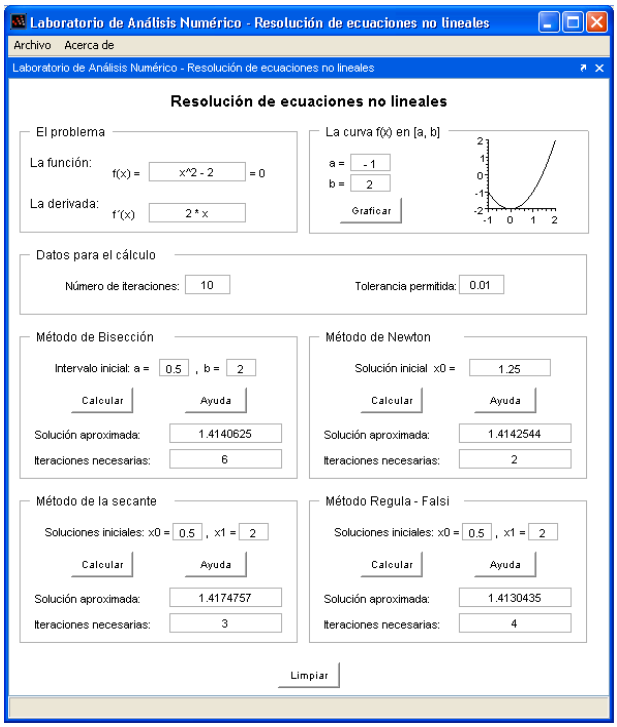


Figura 1. Ventana personalizada de Resolución de ecuaciones no lineales

Todos los métodos requieren de uno o más datos iniciales para su ejecución. Estos se pueden estimar observando un gráfico de la función asociada a la ecuación, que se puede obtener con el botón **Graficar**. Para mostrar los resultados en la ventana personalizada, basta con ingresar los datos necesarios para cada método, y pulsando en el botón **Calcular** correspondiente, se obtiene una aproximación y la cantidad de iteraciones utilizadas. Si con la cantidad de iteraciones máxima o la tolerancia permitida no se alcanza la aproximación deseada, aparece un mensaje de alerta informando al usuario que debe aumentar la cantidad de iteraciones o cambiar la tolerancia permitida. Como ejemplo, se muestran a continuación algunas actividades de la secuencia didáctica diseñada, con el objeto de focalizarse en los conceptos de convergencia, solución aproximada, solución exacta y orden de convergencia.

Actividad 1. (Esta actividad tiene como objetivo que los alumnos adquieran los conceptos de solución exacta y solución aproximada)

Resolver la ecuación $8.x^3 - 6.x^2 - 16.x = 12$ utilizando los métodos disponibles de la ventana personalizada. Tomar como intervalo inicial [0;1] y como punto inicial $x_0 = 1$.

¿Siempre se obtiene una solución aproximada de la ecuación cuando se aplica un método numérico? ¿Es posible obtener la solución exacta? En caso afirmativo, ¿en qué casos?

Actividad 2. (Esta actividad tiene como objetivo que los alumnos adquieran el concepto de convergencia)

Calcular la solución de la ecuación $x^{10} - 1 = 0$. Emplear el método de bisección y de Newton. Tomar como intervalo inicial [0;3] y como punto inicial $x_0 = 0,1$.

¿Siempre se obtiene una solución con la precisión que se desee cuando se aplica un método numérico? Si la función asociada a la ecuación presenta un mínimo cerca de la raíz que se quiere calcular, ¿qué método es el que garantiza la convergencia? ¿Por qué?

Actividad 3. (Esta actividad tiene como objetivo que los alumnos adquieran el concepto de orden de convergencia)

Determinar la solución de la ecuación $\text{sen}(x) = x^2$ utilizando los métodos disponibles de la ventana personalizada. Tomar como intervalo inicial [0,75;1] y como punto inicial $x_0 = 1$.

Establecida una determinada tolerancia, ¿cuál es el método más eficiente para obtener una aproximación de la solución de dicha ecuación? ¿Por qué?

Cualquiera sea la ecuación que se quiera resolver, ¿es posible realizar generalizaciones con respecto a la eficiencia de los métodos de obtención de raíces?

Una vez finalizada la unidad, se aplicó a las tres comisiones un cuestionario donde se le formularon preguntas abiertas. Para responderlas, los alumnos tuvieron que apelar tanto a la definición como a la imagen que formaron de cada uno de los conceptos involucrados en el tema. A continuación, por cuestiones de espacio, sólo se mostrará una de las preguntas que formó parte del cuestionario, cuyas respuestas serán analizadas en la siguiente sección.

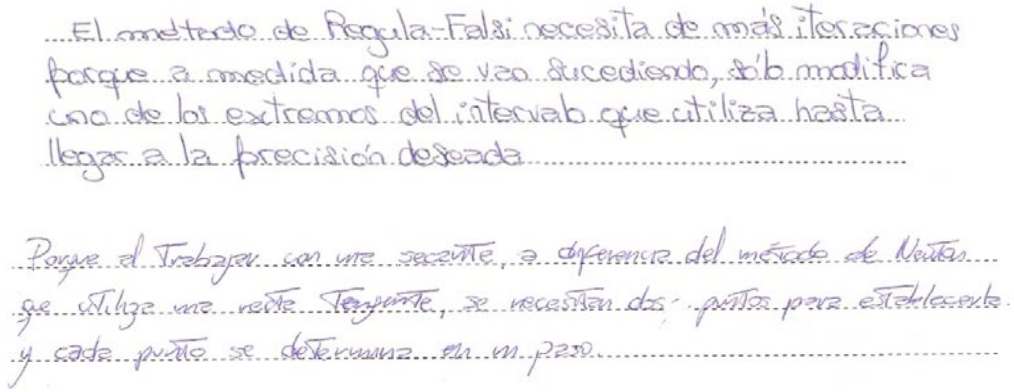
✓**Pregunta 2.**La siguiente tabla muestra la cantidad de iteraciones que se necesitaron al aplicar el método de Regula – Falsi y de Newton para obtener la solución numérica positiva de la ecuación $x^2 - 2 = 0$ con una precisión determinada. Explicar por qué razón, cualquiera sea la precisión establecida, el primer método necesita de una mayor cantidad de iteraciones para obtener la aproximación deseada.

Precisión deseada	Cantidad de iteraciones	
	Regula - Falsi	Newton
0,01	3	2
0,0001	5	3

0,00001	7	3

Análisis de los resultados

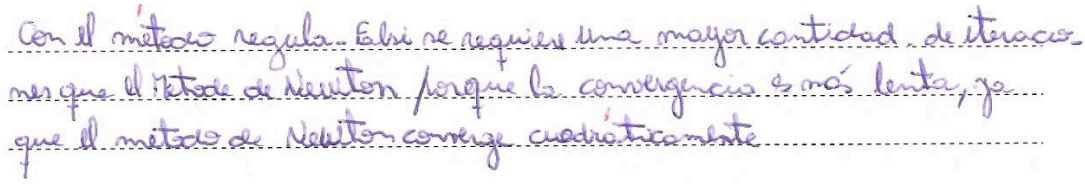
De la totalidad de los cuestionarios realizados, el 82 % de los alumnos pudo explicar por qué razón el método de Newton, para el ejemplo presentado, requiere de menos iteraciones para obtener la aproximación deseada con una determinada precisión. Esta situación pone de manifiesto que estosestudiantes, al poder recurrir al concepto de orden de convergencia para fundamentar la respuesta, han comprendido el concepto matemático involucrado. A continuación, se muestran algunas de las respuestas de aquellos alumnos que no respondieron correctamente la pregunta planteada.

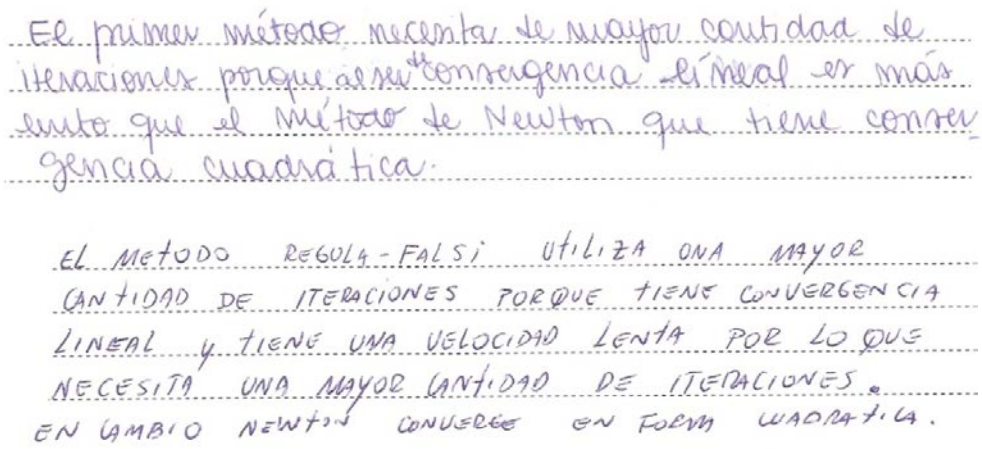

...El metodo de Regula-Falsi necesita de más iteraciones porque a medida que se van sucediendo, sólo modifica uno de los extremos del intervalo que utiliza hasta llegar a la precisión deseada.....

Porque al Trabajar con una secante, a diferencia del método de Newton que utiliza una recta Tangente, se necesitan dos puntos para establecerla y cada punto se determina en un paso.....

Figura 2. Respuestas incorrectas dadas por los alumnos ante la Pregunta 2.

Si bien la mayoría pudo indicar que, el método de Regula – Falsi requiere de más iteraciones para lograr una determinada aproximación por tener un menor orden de convergencia, algunos alumnos no pudieron expresar que no basta la convergencia cuadrática del método de Newton para justificar la eficiencia del mismo. El punto inicial que se tome, las características que presenta la función asociada a la ecuación que se quiere resolver y el tipo de cero o raíz que se quiere calcular (múltiple o simple), son factores que también influyen en la rapidez con que un método logra una determina aproximación. En la Figura 3, se muestran algunas respuestas dadas por los alumnos, que no están completas.


Con el método regula-Falsi se requiere una mayor cantidad de iteraciones que el Metodo de Newton porque la convergencia es más lenta, ya que el método de Newton converge cuadráticamente.....


El primer método necesita de mayor cantidad de iteraciones porque su convergencia lineal es más lento que el método de Newton que tiene convergencia cuadrática.

EL METODO REGULA-FALSI UTILIZA UNA MAYOR CANTIDAD DE ITERACIONES PORQUE TIENE CONVERGENCIA LINEAL y TIENE UNA VELOCIDAD LENTA POR LO QUE NECESITA UNA MAYOR CANTIDAD DE ITERACIONES.
EN CAMBIO NEWTON CONVERGE EN FORMA CUADRATICA.

Figura 3. Respuestas dadas por los alumnos ante la Pregunta 2.

Conclusiones

A partir de los resultados obtenidos en los cuestionarios realizados por los alumnos, se puede concluir que un importante porcentaje de estudiantes ha comprendido adecuadamente algunos conceptos matemáticos involucrados en la resolución de ecuaciones no lineales. Por medio de la secuencia didáctica propuesta, la mayoría de los alumnos pudo construir conceptos personales bien constituidos matemáticamente.

Con el objetivo de que todos los alumnos comprendan los conceptos de convergencia, solución aproximada y solución exacta se continúa a lo largo del curso utilizando estrategias similares en las siguientes unidades. De esta manera, los alumnos podrán disponer de definiciones personales estables, coherentes y bien ajustadas a la definición matemática delos conceptos involucrados en el análisis numérico.

Referencias bibliográficas

Álvarez, J. y Delgado, C. (2002). The Tall – Vinner problem. An operative reformulation. En Cockburn, A. y Nardi, E. (Eds), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics* (1), 261. UK: University of East Anglia.

Burden, R. y Faires, D. (2002). *Análisis Numérico*. México: Int. Thomson Editores.

Caligaris, M., Rodríguez, G. y Laugero, L. (2010). Laboratorio de Análisis Numérico. En Cukierman y Virgili (Comp). *La tecnología educativa al servicio de la educación tecnológica. Experiencias e investigaciones en la UTN* (pp. 583-606). Buenos Aires: edUTecNe.

Chapra, S. y Canale, R. (2004). *Métodos numéricos para ingenieros*. México: Mac Graw – Hill.

Mathews, J. y Fink, K. (2000). *Métodos Numéricos con Matlab.* Madrid: Prentice Hall.

Montero, Y., Astiz, M., Medina, P., Vilanova, S., Rocerau, M. y Vecino, M. (2003). Un asistente matemático en la enseñanza de la resolución numérica de ecuaciones no lineales por el método de punto fijo. En Delgado Rubí, J. (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 16(1), 94-99. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Rodríguez, F. y Sierra, M. Lagrange y la resolución de ecuaciones numéricas: perspectiva histórica epistemológica. (2012). En Flores, R. (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 25, 209-216. México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Tall, D., y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151-169.

Vinner, S. (1991).The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En Tall, D. (Ed), *Advanced Mathematical Thinking*, (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

METODOLOGÍA PARA EL DISEÑO DE ACTIVIDADES DIDÁCTICAS BASADAS EN MODELACIÓN MATEMÁTICA

María del Consuelo Macias González y Avenilde Romo Vázquez
Tecnológico de Estudios Superiores de Cuautitlán, Izcalli. México
Instituto Politécnico Nacional.
ingconsuelomacias10@hotmail.com, avenilderv@yahoo.com.mx

Resumen. La modelación matemática ha ido ocupando un lugar importante tanto en los planes y programas educativos como en la investigación en Matemática Educativa. Con el objetivo de generar actividades didácticas basadas en modelación matemática adaptadas a la formación de futuros ingenieros. Se propuso una metodología para el diseño de actividades didácticas que consta de cuatro fases y que se apoya en el modelo praxeológico extendido de la Teoría Antropológica de lo Didáctico.
Palabras clave: Metodología, modelación matemática, actividades didácticas
Abstract. Mathematical modeling has been filling an important place in the plans of educational programs and Mathematics Education research. With the objective to create learning activities based on mathematical modeling adapted to the training of future engineers, we consider educational activities by a math teacher in a course of Teaching Mathematics model. They proposed a methodology for the design of educational activities consisting of four phases steps, which is based on the model and the method praxeological method, extending with the anthropological didactic theory.
Key words: Methodology, mathematical modeling, learning activities

Introducción

La mayoría de las formaciones de futuros ingenieros siguen un modelo de formación que se divide en dos grandes tipos: básica y de especialidad. Los cursos de matemáticas ocupan un lugar importante en número de horas dentro de la formación básica. Esta es señalada como generadora de herramientas útiles para la formación de especialidad, por lo cual la antecede, y para la práctica profesional. Diferentes investigaciones han mostrado que las necesidades matemáticas del ingeniero se han modificado con la omnipresencia de programas computacionales que permiten realizar el trabajo matemático que antes se hacía a lápiz y papel (Kent y Noss 2002; Kent, 2007; Alberti et. al. 2010; y Romo-Vázquez 2009 y 2010). Estas y otras investigaciones (Pollak 1988 y Bissell 2002) reconocen que en la práctica existen dos tipos de necesidades matemáticas: avanzadas (requieren nociones matemáticas avanzadas) para comprender los modelos matemáticos y básicas (técnicas y procedimientos matemáticos básicos) para operacionalizar los modelos matemáticos. Bissell (2000 y 2002) reconoce que el uso de modelos matemáticos en la práctica no atiende a una construcción del modelo matemático sino a diferentes refinamientos y adaptaciones para situaciones específicas. Para abordar este problema de investigación en Macias (2012) se analizó primeramente el programa de álgebra lineal del Tecnológico de Estudios Superiores de Cuautitlán Izcalli, lo que nos permitió ver que en sus objetivos se reconoce a la modelización matemática (asociada al uso de modelos lineales) como la que permite caracterizar muchos de los

fenómenos de la ingeniería. El interés de enseñar esta materia es que los estudiantes puedan modelar dichos fenómenos, resolver problemas de aplicación e interpretar soluciones. Aunque no se precisan los dispositivos didácticos que lo permitirían, consideramos que estos elementos son de suma importancia en la formación de especialidad y en la práctica de los ingenieros.

Considerando la problemática antes expuesta, uno de los objetivos que condujo la investigación de Macias (2012) fue el de proponer una herramienta metodológica para el diseño de actividades didácticas de modelización matemática para una formación de ingenieros. Dicha metodología se basa en el modelo praxeológico extendido Castela y Romo (2011), el cual presentamos a continuación.

El modelo praxeológico extendido

En el modelo praxeológico clásico propuesto por Chevallard (1999) se reconoce a la praxeología [**T, τ, θ, Θ**], como una unidad mínima de análisis de la actividad humana, sus cuatro componentes son: tipo de tarea ***T***, técnica ***τ***, tecnología ***θ*** y teoría ***Θ***. La tarea es lo que se hace, la técnica es la manera en que se hace, la tecnología es un discurso que produce, justifica y explica la técnica, la teoría a su vez produce, justifica y explica la tecnología. El modelo praxeológico extendido considera, a diferencia del clásico, dos componentes tecnológicas: teórica θ^{th} y práctica θ^{P}. Particularmente, la componente práctica es un discurso que tiene seis funciones que permiten, describir, validar, explicar, facilitar, motivar y evaluar el uso de técnicas matemáticas en referencia a instituciones usuarias, no necesariamente matemáticas. El modelo puede expresarse de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} T, \tau, \begin{matrix} \theta^{th}, \Theta \\ \theta^{p} \end{matrix} \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow P(S) \\ \leftarrow Iu \end{matrix}$$

Donde *P(S)* designa la institución productora de saberes e I_u la institución usuaria de dichos saberes. Asumimos que para resolver tareas en contextos extra-matemáticos el ***uso*** de saberes y más precisamente de modelos matemáticos, se hace mediante técnicas matemáticas validadas por saberes matemáticos θ^{th}. El uso de la técnica (reconocimiento de la naturaleza de la tarea, elección de la técnica más óptima, reconocimiento del contexto en el que se usa, adaptaciones de la técnica al contexto, etc.) es validado por saberes prácticos θ^{P}, legitimados por I_u.

Las seis funciones de la componente tecnológica práctica se precisan en Castela y Romo (2011). Asumimos que el uso de saberes y modelos matemáticos se hace mediante técnicas matemáticas que provienen del modelo mismo y/o de otros saberes matemáticos. La adaptación de modelos matemáticos para resolver tareas no matemáticas exige además de tecnologías teóricas, tecnologías prácticas producidas por I_u. Estas tecnologías prácticas permitirán validar la elección

del modelo matemático para resolver tareas no matemáticas, asegurar su eficacia en contextos extra-matemáticos, determinar los elementos contextuales/prácticos necesarios para poder adaptar/trasponer/usar dicho modelo. Asimismo, estas tecnologías permiten interpretar los resultados obtenidos a través del modelo en relación al contexto en el que se está utilizando.

Dentro del modelo praxeológico extendido las validaciones teóricas (matemáticas) están intrínsecamente relacionadas con las validaciones prácticas, separarlas corresponde sólo a un objetivo metodológico que permita describir su naturaleza. Tanto la noción de praxeología como el modelo praxeológico extendido nos permiten sustentar la metodología desarrollada para el diseño de actividades didácticas de modelación, la cual presentamos a continuación.

Metodología para el diseño de actividades basadas en modelización matemática

Para el diseño de actividades didácticas basadas en modelización matemática se proponen cuatro fases:

1. Elección del contexto extra-matemático (aunque podría considerarse un contexto matemático) de la actividad
2. Naturaleza de la actividad, problema, ejercicio, praxeología mixta
3. Elegir y describir el modelo matemático en uso
4. Describir los conocimientos y técnicas matemáticas necesarias para resolver la actividad

1) Elección del contexto de la actividad

Las actividades didácticas basadas en modelización matemática pueden ser propuestas en contextos no matemáticos, la elección del contexto podría hacerse buscando que éste sea cercano al estudiante, de manera que le permita asociar un significado contextual al modelo matemático en uso. Es decir, se asume que los conocimientos sobre el contexto podrían favorecer la generación/construcción de conocimientos/significados sobre el modelo matemático en uso. Aunque lo anterior parece tener sentido y puede ser apoyado en diferentes teorías didácticas, puede resultar muy complejo en los niveles básico y medio superior, pues no es fácil encontrar un contexto que sea cercano a cada estudiante del grupo. En el nivel universitario podría decirse que las matemáticas se enseñan por considerarlas una disciplina útil tanto para la formación básica como para la de especialidad, a menos que sea una formación de futuros matemáticos. Por lo que una alternativa sería investigar sobre el uso de modelos matemáticos en las disciplinas de especialidad y/o en la práctica. Una complejidad que tendría que enfrentarse es que tanto las disciplinas como la práctica obedecen a sus propias lógicas y por tanto es necesario comprenderlas, al menos en cierta medida, para poder elegir el contexto de uso de dichos modelos.

2) Naturaleza de la actividad, problema, ejercicio, praxeología mixta

Las actividades de modelización pueden contener praxeologías matemáticas y/o praxeologías mixtas. Una praxeología matemática está compuesta por una tarea matemática (consigna), que se resuelve a través de una técnica matemática (manera de hacer/procedimiento), justificada, validada, explicada por una tecnología matemática (lo que valida la manera de hacer) y ésta a su vez por una teoría matemática (que valida de manera más general la tecnología y por tanto la técnica).

Una praxeología mixta puede contener elementos matemáticos y no matemáticos. Por ejemplo, una tarea no matemática resuelta a través de una técnica matemática, solicita por tanto una validación matemática pero también validaciones no matemáticas relativas a la naturaleza de la tarea. Sin embargo, este tipo de praxeologías va a solicitar a su vez validaciones no matemáticas, de tipo experimental por ejemplo o validaciones relacionadas al contexto en el que se inscribe la tarea. La componente tecnológica (justificación/explicación/validación) en este caso puede ser matemática es decir teórica θ^{th} y/o práctica θ^{p}.

Dependiendo del tipo de praxeologías podrá explicitarse la componente teoría Θ relacionada a la tecnología teórica, la cual sería una teoría de la disciplina matemática o bien de la matemática escolar. Asimismo, dependiendo del tipo de tarea y del contexto que la produce habrá una instancia, no exactamente teórica, pero que valide de manera más general la tecnología práctica.

Caracterización de tipo de tareas

- Tareas matemáticas

Las tareas matemáticas son consignas que solicitan una técnica (resolución) y una solución matemática. Por ejemplo:

Encontrar los máximos y mínimos de la función $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$

Esta tarea requiere que se encuentren máximos y mínimos, para realizarla es necesario movilizar los conceptos de máximos y mínimos así como las técnicas matemáticas asociadas a éstos. Otro ejemplo es:

Determina las ecuaciones de la tangente y normal en su punto de inflexión a la curva:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 7x + 1$$

Para realizar esta tarea, al igual que la anterior, es necesario movilizar tanto conceptos como técnicas matemáticas. En este ejemplo en particular, se requieren los conceptos de ecuaciones de la tangente y normal, punto de inflexión a una curva.

- Tareas no matemáticas

En este tipo de tareas la consigna no es matemática, puede requerir o no del uso de una técnica matemática para realizarla. Algunos ejemplos de tareas no matemáticas:

- Cruzar la calle

- Comprar un helado
- Elegir un programa de televisión
- Dormir la siesta

- Tareas matemáticas en contextos no matemáticos

En este tipo de tareas aparecen en un contexto no matemático, para la tarea en la que se requiera una técnica matemática para su resolución no necesariamente parece de manera explícita. Por tanto, requieren un entendimiento del contexto para reconocer la necesidad de utilizar una técnica matemática para resolver la tarea en cuestión. Su resolución requerirá por tanto un conocimiento de la técnica matemática pero también del contexto, dicho de otra manera requerirá una adaptación de la técnica para realizar este tipo de tarea.

Algunos ejemplos de este tipo de tareas se presentan a continuación.

- Estudiar la actividad eléctrica del cerebro
- Modelar un motor a corriente continua

Este tipo de tareas puede asociarse a las tareas escolares que aparecen en los libros de matemáticas reconocidas como "aplicaciones de matemáticas".

3) Elegir y describir el modelo matemático en uso

Describir el modelo en uso permitirá evidenciar las razones relativas al contexto extra-matemático por las cuales dicho modelo se ha elegido para resolver tareas del contexto extra-matemático. Interrogarse sobre los elementos que validan el uso del modelo y en qué condiciones, permitirá comprender qué elementos contextuales deben considerarse en el diseño de las actividades didácticas. Por ejemplo, muchos de los modelos matemáticos se usan en condiciones "ideales", lo que permite resolver ciertas tareas con mayor facilidad matemática, requiriendo luego la adaptación de las soluciones obtenidas al contexto de aplicación. Dicha adaptación es hecha en base a ciertos elementos que la validan y nos parece muy importante reconocer esos elementos para el diseño de la actividad didáctica, particularmente para analizarlos y ver en qué medida podrían ser considerados para un contexto de aula. Reconocer las explicaciones del uso, permite saber qué representa cada elemento del modelo, en qué medida el modelo utilizado permite modelar el contexto (o parte de éste). Analizar los elementos que favorecen el uso del modelo nos parece evidenciará elementos del proceso de modelización matemática, en el cual no sólo importa que el modelo matemático permita resolver un problema del contexto extra-matemático sino que esa resolución sea la menos compleja y la más cómoda para el usuario. Por tanto, es importante reconocer los elementos que favorecen el uso y analizar la manera en que podrían ser considerados en el diseño de la actividad didáctica. De la misma manera, es necesario analizar los elementos motivadores del uso del modelo, esta fase nos

parece que medular para el diseño de las actividades didácticas para la formación de futuros ingenieros.

4) Describir los conocimientos y técnicas matemáticas necesarias para resolver la actividad

Por último consideramos necesarios describir las tareas que conforman la actividad de modelización matemática, las técnicas disponibles o que se deben generar para poder realizar estas tareas. De la misma manera, es necesario describir las tecnologías que sustentan dichas técnicas. Esta descripción debe hacerse desde un punto de vista didáctico por lo que es necesario explicitar el objetivo de cada tarea que conforma la actividad, la técnica que permite resolverla y sobre todo que elementos permiten validarla, explicarla y justificarla. Es importante considerar la naturaleza de las validaciones, pues éstas serán matemáticas (teóricas) para sustentar la técnica matemática, pero seguramente surgirán otro tipo de validaciones relativas a la adaptación de la técnica al contexto de la tarea y sobre todo a la actividad de modelar. Este análisis de las actividades permitirá anticipar lo que los estudiantes harán al resolver la actividad y de manera más general el lugar que puede ocupar en su implementación escolar.

Una primera experimentación de la metodología

Esta metodología fue objeto de una primera experimentación siguiendo dos fases: 1) Analizar modelos matemáticos en un contexto de ingeniería biomédica; 2) Proporcionar la metodología y el análisis del contexto de la ingeniería biomédica a un grupo de profesores de matemáticas y solicitarles el diseño de actividades didácticas basadas en modelización matemática.

La primera fase tiene que ver con comprobar la factibilidad del análisis de modelos matemáticos en uso en un contexto ingenieril. En esta fase, conjuntamente con ingenieros biomédicos de la Universidad de Guadalajara, se profundizó en el análisis del método de Separación Ciega de Fuentes (Blind Separation Sources –BSS) en el cual se utilizan vectores y matrices. Una vez analizado y descrito el método de la BSS se procedió a la segunda fase de prueba de la metodología, en la cual se buscaba comprobar si a partir de un contexto de uso analizado (disponible) era posible diseñar las actividades didácticas basadas en modelización matemática. Para llevar a cabo esta segunda fase se consideró a un grupo de profesores de matemáticas alumnos de la maestría en Matemática Educativa del Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada (CICATA, unidad Legaria). En uno de los cursos de la maestría, se les proporcionó a los profesores una descripción del método de la BSS y la metodología para el diseño de actividades didácticas basadas en modelización matemática.

Los participantes del curso produjeron actividades que constituyen una base para el desarrollo de secuencias didácticas que pueden ser llevadas al aula. Es decir, las actividades por los profesores son el resultado de una primera transposición del método de la BSS para ser adaptado a condiciones de enseñanza de las matemáticas del nivel en el que labora el profesor (participante del curso). Esta

transposición parece efectuarse sobre la descripción de la BSS dada y sobre investigaciones que cada uno realiza para comprender el principio del método y diseñar actividades aptas a los cursos que imparten. Para ilustrar lo anterior, presentamos una tarea que propone Luis, participante del curso: Esta información proviene de la mezcla de diversas fuentes de origen cerebral. Propón una manera de separar la información inicial X en la combinación de otras representaciones más simples.

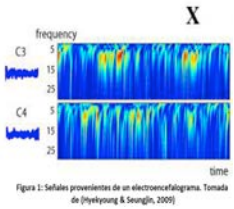


Figura 2. Imagen que muestra el profesor Luis en su actividad

La tarea propuesta es muy general y no presenta el principio del método, pero el profesor Luis menciona antes de proponer la actividad que pedirá a los estudiantes hacer una investigación sobre la BSS. El mismo profesor presenta una reflexión en este sentido, señalando que esta tarea es abierta, amplia y que podría ser enfrentada de maneras diversas sin necesariamente lograr el objetivo que él se propone, acercarlos al principio de la BSS.

Por ejemplo, se podría presentar una de las matrices que resultan de la observación de las señales en un EEG (Figura 1) y plantear a los estudiantes que, de manera preliminar, intenten proponer una estrategia para hacer separaciones de los registros del EEG. Seguramente, esta tarea no sea nada sencilla. Se piensa que existan quienes propongan separar la información por colores, por segmentos, etc. Como se puede inferir, este puede ser un inicio bastante significativo en torno, a lo que implicará posteriormente transformar una matriz en la suma o producto de otras. Y es que en esencia, para "separar" una matriz de esa manera, es necesario proponer la separación y luego realizar procesos que validen el resultado.

Las actividades propuestas por los profesores adoptan en lenguaje praxeológico para ser propuestas y en ese sentido consideramos que la metodología pone a su disposición una herramienta para expresar las actividades. Sin embargo, dichas actividades no constituyen, como lo mencionamos anteriormente, actividades que puedan ser llevadas al aula sino actividades en el proceso de diseño. El curso de procesos nos parece constituyó un marco institucional propicio para probar la metodología, pues los profesores tienen condiciones y recursos dentro del mismo curso que hace que la utilicen. Sin embargo, como todo curso existe un tiempo para cada actividad y eso no permite que los profesores empleen más tiempo en el diseño, ni tengan un espacio más amplio para retroalimentarse entre pares para producir actividades didácticas que puedan aplicarse en el aula. Esto nos motivó a elegir una de las actividades propuestas y desarrollar una secuencia que aparece en Macias (2012). Consideramos que esta propuesta

metodológica abre una perspectiva para el diseño de actividades basadas en modelización que tomen como base el análisis de modelos matemáticos en uso. Sin embargo, cada una de las fases requiere de ser profundizada y cotejada con experimentaciones experimentales de la secuencia producida en el aula.

Referencias bibliográficas

Alberti, M. (2010). Mathematics for Engineering and Engineering for Mathematics. En M. Alberti, S. Amat, S. Busquier, P. Romero y J. Tejada (Eds). *ICMI 20: Educational Interfaces between Mathematics and Industry*. http://co122w.col122.mail.live.com/default.aspx?wa=wsignin1.0

Bissell, C.C. (2000). Telling tales models, stories and meanings, *For the learning of mathematics, 20(3),* 3—11.

Bissell, C.C. (2002). Histoires, héritages et herméneutique (la vie quotidienne des mathématiques de l'ingénieur, *Annales des Ponts et Chaussées, 107-8*, 4–9

Blum, W. Galbraith, L., Henn, H. y Niss, M. (2007). *Modelling and Applications in Mathematics Education*. New York: Springer

Castela C. et Romo-Vázquez, A. (2011). Des mathématiques a l'automatique : étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 31(1). 79-130.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19 (2), 221- 266.

Congedo, M., Gouypailler, C. & Jutten, C. (2008). On the blind source separation of human electroencephalogram by approximate joint diagonalization of second order statistics. *Clinical Neurophysiology*, 119(12). 2677–2686.

Kachenoura, A. (2006). *Traitement Aveugle de Signaux Biomédicaux*. Traitement du signal et telecommunications, L'Universite de Rennes 1, France.

Kent, P. (2007). Learning Advanced Mathematics: The case of Engineering courses. contribution to the NCTM Handbook chapter: Mathematics thinking and learning at postsecondary level. In Lester, K., F. (Ed.), *Second handbook of research on 88 mathematics teaching and learning: a project of the National Council of Teachers of Mathematics*. (pp. 1042-1051). Charlotte, NC: Information Age Pub

Kent, P., & Noss, R. (2002). The mathematical components of engineering expertise : The relationship between doing and understanding mathematics. *Proceedings of the IEE Second Annual Symposium on Engineering Education: Professional Engineering Scenarios 2* (pp.39/1 -39/7). London U.K.

Macias, C. (2012). *Uso de las nuevas tecnologías en la formación matemática de ingenieros*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Pollak H. O. (1988). Mathematics as a service subject- why? In A. G. Howson et al. (Eds), *Mathematics as a service subject.* pp.28-34. Cambridge: Cambridge University Press (Series : ICMI study).

Romo-Vázquez, R., Velez-Perez, H., Ranta, R., Louis-Dorr, V., Maquin, D. & Maillard, L. (2012). Blind source separation, wavelet denoising and discriminant analysis for EEG artefacts and noise cancelling, Biomedical Signal Processing and Control, 7(4). 389-400.

¿CÓMO GENERAR HABILIDAD PARA DEMOSTRAR?

Rodolfo Eliseo D´Andrea y Patricia Sastre Vázquez
Pontificia Universidad Católica Argentina. Campus Rosario. Argentina
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires
rodolfoedandrea@yahoo.com.ar, pasava2001@yahoo.com.ar

Resumen. El estudiante universitario de Argentina tiene dificultades para comprender, reproducir y generar demostraciones matemáticas, confundiendo acciones como demostrar y verificar. El objetivo de este trabajo es reflexionar en torno a la aplicación de una propuesta didáctica consistente en un proceso metodológico que propicia en el estudiante universitario el abordaje de la prueba matemática. Esta propuesta basada en otras, que se describen en este trabajo, intenta evitar saltos cognitivos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la demostración, facilitando el acceso del estudiante y generando aprendizaje constructivo.
Palabras clave: verificación, demostración, aprendizaje constructivo
Abstract. The university student of Argentina has difficulties to comprise, reproduce and generate mathematical proof, confusing the actions like proving and verify. The objective of this paper is to reflect on the implementation of a didactical proposal consisting of a methodological process that allow in student a comprehensive boarding of the mathematical proof. This proposal based on others, described in this paper, tries to avoid cognitive leaps in the teaching and learning of proof, providing student access and generating constructive learning.
Key words: verification, proof, constructive learning

Introducción

El estudiante universitario de Argentina, tiene dificultades para comprender, reproducir y generar demostraciones matemáticas, confundiendo acciones como demostrar y verificar. El estudiante procede, en general, cuando se le pide una prueba, desde el empirismo ingenuo (Balacheff, 2000), considerando que la prueba consiste en la exhibición de algunos casos particulares sin un criterio formado al hacerlo. Los estudiantes, en muchos casos, cuando le es requerida una prueba que el docente ya expuso en clase, vuelven a recurrir a la verificación ignorando lo expuesto. Por otro lado, están aquellos que repiten lo que el docente realizó pero de modo mecánico y sin comprensión. Azcárate Giménez (1995) considera que cuando el estudiante reproduce una prueba exhibida por el docente en clase, en general, lo hace de forma ritual intentando imitar al discurso escuchado.

Cabe preguntarse entonces: ¿Es necesario enseñar a demostrar?; ¿Con qué objetivo?; ¿Cómo es posible guiar al estudiante para que sea capaz de respetar el proceso deductivo cuando realiza la demostración de proposiciones matemáticas?; ¿Qué estrategias pueden utilizarse para que realice este proceso desde el razonamiento y no desde la memoria repetitiva?

El objetivo de este trabajo es reflexionar en torno a la aplicación de una propuesta didáctica consistente en un proceso metodológico que propicia en el estudiante universitario el abordaje de la demostración matemática. Esta propuesta basada en otras, que se describen más adelante, intenta

evitar saltos cognitivos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la demostración, facilitando el acceso a la prueba y generando aprendizaje constructivo.

La prueba matemática

En Matemática existen dos tipos de proposiciones verdaderas. Las que no requieren ser demostradas, denominadas axiomas. Por otro lado están las que requieren ser demostradas, que si son trascendentes dentro de la comunidad matemática se las considera estrictamente un Teorema, ya que las mismas expresan resultados claves de avance científico dentro de esta ciencia pero, hay otras que no tienen esta categoría aunque son importantes para llegar a la formulación de un teorema y que requieren de la prueba para el sostén de su verdad y son simplemente proposiciones. Tanto las proposiciones últimas citadas y los teoremas constan de hipótesis, tesis y demostración. La Hipótesis es una suposición que permite inferir una consecuencia; debe destacarse que la hipótesis incluye también las denominadas "hipótesis implícitas" que son todos los conocimientos previos que se tienen al momento de establecer la hipótesis de la proposición a probar. La Tesis es una proposición mantenida con razonamientos, que son los que determinan la estructura de la demostración.

La Demostración es la argumentación utilizada para sostener la veracidad de una proposición matemática verdadera. Quiénes determinan esa estructura son los 'eslabones' argumentativos que constituyen la cadena del razonamiento que constituye la demostración. En definitiva, son los pasos necesarios para resolver (o llegar) a probar la verdad que postula la tesis.

Para demostrar un teorema 'no hay recetas', cada uno que se presenta es una situación nueva, pero existen ciertos lineamientos o pautas a seguir que constituyen los métodos a aplicar en diferentes situaciones. Asimismo, a cada momento se presentan situaciones diferentes que requieren de ingenio, destreza y algo que sí es común y que se requiere siempre: Raciocinio y capacidad deductiva como consecuencia y una importante capacidad de abstracción.

Las propuestas didácticas de tres investigadores

Leron (1983) propone un método para la demostración, denominado "estructural", inspirado por las ideas informáticas que surgieron en los ochenta y repercutieron indiscutiblemente para posteriores avances. La idea básica que subyace es presentar las demostraciones en clase en diferentes niveles de gradualidad, procediendo desde las ideas elementales de la prueba hacia la conclusión, de manera escalonada y fragmentada. La ventaja principal de presentar así una demostración es que permite una comunicación más fluida generando en el estudiante un aprendizaje significativo. A diferencia de la prueba tradicional que se desarrolla desde la hipótesis a la tesis, la prueba estructural se desarrolla como un 'diagrama de flujo', focalizando determinadas partes de la prueba, de forma de facilitar la comprensión de estas, con el objetivo de generar la comprensión global de la prueba completa.

Solow (1992) sostiene que si se tiene que realizar una demostración del tipo: si A entonces B, se dice que se usa un *método progresivo*, tomando A como cierto llegamos a B, y que se usa uno *regresivo* cuando se busca un método para demostrar que B es verdadero, partiendo del supuesto de que B es verdadero. Ambos métodos se relacionan entre sí cuando se trabaja con B de tal forma que se llega a A y luego se toma A y se llega a B, obteniéndose así el método conocido como regresivo-progresivo. El proceso regresivo se inicia preguntando: ¿Cómo o cuándo puedo concluir que la proposición B es verdadera? El proceso de demostración se comienza regresivamente, planteando lo que Solow denomina: "pregunta de abstracción" que consiste siempre en un planteo de la forma: "¿Cómo o Cuándo puedo concluir que la proposición B es verdadera?". La pregunta debe ser formulada de un modo abstracto y sin hacer referencia alguna al problema concreto que generó. La respuesta a la pregunta de abstracción es un proceso de dos fases. Primero hay que dar una respuesta abstracta, para después aplicar esta respuesta a la situación específica. La forma en que sea formulada esta pregunta juega un papel decisivo. Por ejemplo, si tiene que probarse que el cuadrado de todo número entero par es par, la pregunta de abstracción sería para el planteo de esta prueba: ¿Cómo puedo demostrar que un número al cuadrado es par? Se puede responder esta pregunta en términos no tan abstractos, diciendo que esto puede ocurrir cuando se puede expresar al número como el producto de 2 por otro entero.

En virtud de observar que en la formación de profesores de Matemáticas cubanos existían dificultades en el aprendizaje de demostraciones geométricas, Bravo y Arrieta (2003) propusieron un sistema de acciones para la enseñanza de las mismas, lo cual impulsó a la búsqueda de herramientas metodológicas que condujeran a ideas novedosas en su enseñanza. En sus trabajos se presentan estrategias y los resultados de la aplicación de estas con el objeto de generar la habilidad 'demostrar' en el estudiante de profesorado. En el marco teórico de su trabajo, estudiaron algunas aportaciones teóricas sobre estrategias didácticas junto al importante papel que juega la resolución de problemas en el proceso de enseñanza de la Matemática.

La propuesta didáctica de D´Andrea y otros, basada en Leron, Solow y Bravo Arrieta

El lenguaje matemático tiene tres facetas claramente definidas: coloquial, que se expresa a través del lenguaje natural del individuo; visual, que se expresa a través de un simple diagrama a mano alzada a una gráfica que puede ser realizada por un software y finalmente el lenguaje simbólico propio de la Matemática.

La epistemología de la Matemática se basa en el raciocinio y la abstracción, que en el estudiante requieren de un entrenamiento en el conocimiento y la adquisición de destrezas en el Lenguaje Matemático.

Como producto de la investigación llevada a cabo por D´Andrea, Curia y Lavalle (2012) sobre el razonamiento deductivo utilizado por estudiantes de Ciencias Naturales e Ingeniería, en el proceso de validación de proposiciones matemáticas, se generó un diagnóstico que permitió la construcción de una propuesta didáctica consistente en un proceso metodológico que propicia en el estudiante universitario el abordaje de la demostración matemática.

Esta investigación tuvo una instancia experimental consistente en la realización de encuestas a profesores de una facultad de Ingeniería y Ciencias para conocer como desarrollaban la didáctica de la demostración y como la habían recibido en el aula, también, pero en su etapa de estudiantes. La etapa experimental de la investigación también incluía la aplicación de una serie de ejercicios a los estudiantes con el objeto de conocer como estos validaban, además de una encuesta que indagaba acerca de como abordaban el estudio de las demostraciones; si las comprendían y si eran capaces de generar nuevas, entre otras cuestiones.

Estos trabajos de campo generaron un diagnóstico, que postula lo siguiente:

> El estudiante ingresante a Carreras de Ciencias Naturales e Ingenierías requiere en los cursos de Matemática del currículo de la carrera elegida comprender la demostración de proposiciones y teoremas. Tiene profundas dificultades para comprenderlas, y más aún para reproducirlas, producto del retardo del desarrollo del pensamiento formal y la supresión de desarrollos teóricos en el área matemática en el ciclo medio. A esto se suma la experiencia personal de los docentes que valoran la formación recibida en la demostración de proposiciones y teoremas pero que paralelamente reniegan de aprendizajes memorísticos implícitos en estas cuestiones y como consecuencia de estas experiencias y la reticencia de los estudiantes a incorporar estos contenidos debilitan estos procesos en el aula y por ende a la Matemática, al no exponer debidamente la epistemología que le es propia. (D´Andrea *et al*, 2012, p.130)

Inspirándose en las propuestas de Leron (1983), Solow (1993) y Bravo Estévez (2003), se establece una propuesta didáctica consistente en un proceso metodológico que permite conducir y encuadrar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la demostración matemática. La propuesta se perfila a través de una serie de estrategias didácticas presentadas como una secuencia de tareas. El objetivo de esta secuencia de tareas tiene como objetivo lograr un aprendizaje comprensivo, significativo y constructivo con una perspectiva implícita que permita desarrollar un pensamiento lógico en el estudiante que pueda ser extrapolado a otras disciplinas. Si bien la secuencia de tareas es eminentemente conductista, su aplicación cotidiana en el desarrollo de los diferentes cursos de Matemática, puede finalmente conducir a una actitud constructivista del estudiante, ya que tal secuencia induce al fortalecimiento de

una habilidad 'dormida' en este y es la actividad 'demostrar'. Para el desarrollo en clase de la actividad consistente en la demostración de una proposición verdadera, que permita una secuencia inmediata de apropiación como consecuencia de la comprensión, se sugiere seguir las siguientes etapas:

1. **Comprensión y Apropiación del Lenguaje Matemático.** Esta etapa es el prolegómeno a las siguientes y consiste en permitir al estudiante el acceso, comprensión y apropiación del Lenguaje Matemático. Para un acercamiento efectivo del estudiante a este Lenguaje, el docente deberá diseñar y seleccionar estrategias y material didáctico que apunten a un aprendizaje constructivo y comprensivo. La comprensión y apropiación del lenguaje requiere que el estudiante conozca:

La utilización de conectores proposicionales: conjunción; disyunción inclusiva y exclusiva; implicación y doble implicación; negación. Las condiciones que pueden presentarse en una implicación o condicional. Las implicaciones asociadas que se hallan implícitas en un condicional cualquiera. Las reglas fundamentales del álgebra de proposiciones: Involución; De Morgan; Negación de una implicación, entre otras. Los métodos de demostración de implicaciones.

Los contenidos citados deben ser expuestos con una profusa cantidad de ejemplos, extraídos de contenidos del ciclo medio que son revisados, usualmente, en el curso propedéutico que antecede el inicio de las Carreras de grado universitarias. Carece de sentido el planteo de las etapas siguientes, si el estudiante no tuvo la posibilidad de acceder al Lenguaje Matemático. Esta etapa debe ser el comienzo de los cursos iniciales de Matemática de la carrera escogida por el estudiante.

2. **Presentación del teorema o proposición a demostrar:** En este punto se presenta al estudiante el teorema o proposición a demostrar, en su estructura formal.

Las tres etapas siguientes tienen órdenes indistintos y esto obedece a que el estudiante puede apropiarse de la comprensión de la proposición a demostrar desde la perspectiva de su propio lenguaje, la visualización o la simple acción de la verificación.

3. **Interpretación coloquial:** En esta etapa se propone al estudiante que intente explicar coloquialmente, lo expuesto formalmente en el ítem anterior. Con esta etapa se generaría la comprensión desde el lenguaje coloquial. Esta etapa constituye la parte crucial del proceso de aprendizaje, ya que el estudiante intentará apropiarse del significado de la proposición desde su propio lenguaje.

4. **Verificación:** En esta etapa el estudiante es instado por el docente a verificar por sí mismo la proposición a demostrar debiendo generar mínimamente dos ejemplos. Ejemplos que no deben ser elegidos aleatoriamente, sino teniendo en cuenta que deben cumplir lo planteado por la hipótesis de la proposición.

5. **Visualización:** En esta etapa, el estudiante nuevamente es instado por el docente, pero esta vez a visualizar la proposición a demostrar. La visualización puede ser una interpretación geométrica si así correspondiera, a través de un simple esquema, dibujo, figura a mano alzada o a través del software. La proposición podría no tener una interpretación geométrica, pero un esquema visual que muestre la secuencia de lo que expresa conceptualmente, puede contribuir notablemente a su comprensión.

6. **Simbolización:** Luego de la explicación coloquial, la verificación y la visualización, entonces debe retomarse la estructura formal de la proposición a demostrar. La comprensión de la expresión simbólica de la proposición a demostrar ya tiene otra accesibilidad para el estudiante, penetrando de esta forma en el proceso de abstracción, imprescindible para llevar a cabo la prueba formal.

7. **Elementos vitales de la proposición:** En esta etapa el estudiante debe identificar la hipótesis de la proposición a demostrar; las hipótesis implícitas y la tesis.

8. **Contenidos implícitos de la proposición:** En esta etapa el estudiante deberá identificar que estructuras conceptuales están implícitas en la proposición a demostrar. Esto de alguna manera está incluido en la etapa anterior en las hipótesis implícitas.

9. **Abstracción:** En esta etapa, el docente guía al estudiante en la formulación de la clásica pregunta de abstracción postulada por Solow (1993) en su método regresivo–progresivo. Esta pregunta, en la exposición de la proposición a demostrar, debe ser formulada al grupo de estudiantes con el objetivo de generar discusión y planteos personales.

10. **Guía Secuenciada de la demostración:** Si la proposición a demostrar, es en extremo constructiva y compleja de modo que el estudiante no pueda abordarla por sí mismo, es recomendable la presentación secuenciada y detallada de la misma a la manera del método estructural sugerido por Leron.

Si la proposición no requiere de grandes artificios para la construcción de su prueba, es importante invitar al estudiante a llevarla a cabo por sí mismo, a través de una Guía Secuenciada de instrucciones que contemplen el paso a paso de la prueba en cuestión para, propiciar la construcción de esos razonamientos de forma autónoma. Esta Guía Secuenciada permitirá observar la demostración una vez realizada desde una perspectiva global hacia perspectivas más focalizadas, posibilitando la construcción de la prueba, generando aprendizajes comprensivos y significativos y no un conocimiento inerte sin interacción. Se recomienda que si la proposición reviste complejidad, el docente la exponga detalladamente, y al finalizarla invite al estudiante a que intente reproducirla de forma aproximada con la Guía Secuenciada antes descripta, o bien que él mismo la genere, o también, que elabore una serie de preguntas relacionadas a la argumentación que conduce a la prueba. Esta serie de preguntas también

podría ser un disparador inicial para el estudiante a los efectos de la construcción del razonamiento que constituye la prueba.

La idea que subyace a esta Guía, es que el planteo de las pruebas no sea una instancia formal, sino que se integre a la práctica cotidiana. Es decir, que la práctica tradicional, no esté formada por clásicos ejercicios de aplicación de las estructuras conceptuales y las proposiciones asociadas a estas o simplemente aplicación de algoritmos sino, que la teoría se articule con la práctica de forma natural.

Ejemplos:

1. ¿Cómo puede probarse que el cociente entre dos números complejos, expresado en forma polar, es otro número complejo cuyo módulo es el cociente de los módulos y su argumento es la diferencia de los argumentos de los complejos dados?

Guía Secuenciada: Considerar que el cociente entre dos números complejos z y z' arroja un cierto resultado (darle un nombre simbólico) y despejar luego z o z' en función de los otros dos. Expresar ambos miembros de la igualdad planteada, en forma polar y luego de tener en cuenta la propiedad del producto de números complejos en forma polar. Considerar la definición de igualdad entre números complejos, correspondiente al formato polar. Aplicada la definición, deben despejarse los valores del módulo y el argumento del número complejo resultado del cociente al cual se le otorgó un nombre al comienzo de la prueba. Tener presente que tal definición debe considerarse particularmente para $k = 0$.

2. Se consideran a continuación, una de las tres proposiciones que constituyen la totalidad de este teorema. Este contempla, según sea el signo de la primer derivada, que la función sea creciente, decreciente o constante. Si $f: [a, b] \to R$ es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) entonces, cualesquiera sea $x \in (a, b): f'(x) > 0 \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en (a, b). ¿Cómo puede demostrarse que la función de la hipótesis es estrictamente creciente si la función derivada primera es positiva?

Guía Secuenciada: Considerar la función de la hipótesis, y un subintervalo de la misma, que puede llamárselo, por ejemplo: $[x, y] \subset [a, b]$. Luego, aplicar a la función f el teorema del valor medio del Cálculo Diferencial en el subintervalo considerado, previa verificación del cumplimiento de las hipótesis del teorema citado. Posteriormente analizar el signo de la expresión obtenida y teniendo en cuenta la hipótesis sobre el signo de $f'(x)$ y la definición de función estrictamente creciente, se podrá arribar a la tesis.

Conclusiones

El estudiante cuando comienza a familiarizarse con la demostración, tiene dificultades para comprender la exposición del proceso deductivo de la demostración de las proposiciones matemáticas que realiza el profesor en el aula. Sin embargo, es consciente acerca de lo requerido por este, cuando pide una demostración, comprendiendo que la verificación no es el proceso adecuado para establecerse como prueba. No obstante, recurre a la verificación ni bien encuentra dificultades, posiblemente debido al hecho que en la cotidianeidad y en las ciencias experimentales la verificación es el método de prueba usual. Este proceso se repite una y otra vez, y no de forma aislada. Se trata de una reacción muy general, cuando el estudiante no puede llevar a cabo una prueba o no se le ocurre como generarla.

La propuesta didáctica presentada de D´Andrea *et al* (2012) intenta que el estudiante genere una actitud reflexiva frente a la instancia de la prueba. Y también permite que este pueda abordarla en su significación global, que incluye la comprensión del significado de la proposición a demostrar, desde las tres facetas que constituyen el Lenguaje Matemático. La etapa correspondiente a la Guía Secuenciada, es una alternativa interesante que permite conducir al estudiante hacia el objetivo, pero también es una 'muletilla' que con el tiempo debe ser dejada para poder permitir el desarrollo mental autónomo de este. En caso contrario, el estudiante dependerá de esto de forma tal que le será imposible llegar a generar los razonamientos y argumentaciones por sí mismo, que implícitamente se encuentran en las demostraciones.

Se está analizando y como consecuencia, investigando en el presente la posibilidad de generar a partir de la propuesta presentada, otras asociadas que permitan que el estudiante desarrolle otros tipos de argumentaciones, no solo desde la perspectiva deductiva sino desde otras que forman parte de la epistemología matemática.

Referencias bibliográficas

Azcárate Giménez, C. (1995). *Procesos de pensamiento matemático avanzado. Definiciones, demostraciones, ¿Por qué?, ¿Cuándo?, ¿Cómo?*. Barcelona: Departamento de Didáctica de la Matemática y Ciencias Experimentales, Universidad Autonóma de Barcelona.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá: una empresa docente y Universidad de Los Andes.

Bravo Estévez, L. y Arrieta, J. (2003). Una estrategia didáctica para la enseñanza de las demostraciones geométricas: resultados de su implementación. En E. Castro Martinez (Ed), *Investigación en Educación Matemática: séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, 7,* 153 – 160. España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

D´Andrea, R.E.; Curia, L.; Lavalle, A. (2012). *Razonamiento deductivo y validación en estudiantes universitarios.* Alemania: Editorial Académica Española.

Leron, U. (1983). Structuring Mathematical Proofs. *The American Mathematical Monthly, 90, (3),* 174 – 185.

Solow, D. (1992). *Cómo entender y hacer demostraciones en Matemáticas*. México: Limusa. Noriega Editores.

AUTORREGULANDO EL APRENDIZAJE DEL CÁLCULO

Patricia Villalonga de García, Susana González de Galindo, Susana Mercau de Sancho y Marta Marcilla
Universidad Nacional de Tucumán Argentina
pvillalonga@fbqf.unt.edu.ar, sgalindo@fbqf.unt.edu.ar, s_mercau@yahoo.com.ar, mmarcill@yahoo.com.ar

Resumen. En el Proyecto "Estrategia didáctica que valoriza la regulación continua del aprendizaje en aulas multitudinarias de Matemática", se construyeron criterios orientadores del desarrollo metacognitivo, derivados de teorías cognitivas. Se utilizaron los instrumentos, diario del profesor, cuestionario a alumnos y exámenes para verificar si la estrategia favoreció tales criterios.
Este trabajo analiza los resultados de la implementación de una evaluación formativa para valorar el desarrollo de las habilidades: recodificar, interpretar y controlar. Fue bajo el porcentaje de alumnos con grado de desarrollo alto en las dos primeras habilidades. El 100% realizó el control de errores. Faltaría triangular todas las evidencias.
Palabras clave: estrategia didáctica, habilidades matemáticas, autorregulación.
Abstract. Guided criteria of metacognitive development derived from cognitive theories were elaborated in the project "Didactic strategy that values the continuous regulation of learning in massive classes of Mathematics". The instruments used were the teacher´s notebook, questionnaires to students and tests to check if the strategy favored such criteria.
In this work the result of the implementation of a formative evaluation was analyzed in order to value the development of the following skills: recode, interpret and control. It showed that the percentage of students with a high development grade in the first two skills was low. The 100% of them did the control of mistakes. What is missing would be to triangulate all the evidences.
Key words: teaching strategy, math skills, self-regulation

Introducción

Los docentes de Matemática I, asignatura del primer cuatrimestre de primer año de una Facultad de ciencias, se enfrentan a problemas generados por aulas masivas. El exceso de contenidos del currículo lleva a conceder en las clases escaso tiempo a la reflexión y al diálogo. En relación al lenguaje matemático, se aprecian dificultades con el significado y uso correcto de los símbolos. En el año 2010 los estudiantes eran alrededor de 400, siendo la relación docente alumno 1/80 en clases prácticas y 1/400 en clases teóricas. Las evaluaciones, realizadas mediante pruebas de papel y lápiz, se implementaron mediante tres pruebas parciales y un examen final integrador. Todos estos problemas constituyeron un obstáculo para la adquisición de aprendizajes significativos e influyeron en la calidad de la enseñanza y evaluación del aprendizaje. Intentando dar solución a esta problemática se viene trabajando desde el año 2008 en el Proyecto: "Estrategia didáctica que valoriza la regulación continua del aprendizaje en aulas multitudinarias de Matemática", aprobado por el Consejo de Investigaciones de la Universidad Nacional de Tucumán.

En trabajos anteriores se identificaron una serie de criterios que orientan el desarrollo metacognitivo de la Matemática. Los mismos fueron derivados del marco teórico elaborado y se constituyeron en referentes para este Proyecto. Se elaboró y validó un material curricular con una serie de estrategias didácticas para desarrollar en el aula la unidad: *Límite de una función.* Para evaluar globalmente la estrategia se recogió información mediante: encuestas a docentes y alumnos, registros del diario del profesor y análisis de las actividades matemáticas realizadas

(González de Galindo y Villalonga de García, 2010; Villalonga de García, González de Galindo y Mercau de Sancho, 2014; Villalonga de García, González de Galindo y Mercau de Sancho, 2012; González de Galindo, Villalonga de García, Marcilla y Holgado de Mejail, 2012; González de Galindo, Holgado de Mejail y Villalonga de García, 2013).

Este trabajo presenta los resultados de la implementación en el aula, de un instrumento destinado a autorregular el aprendizaje de los estudiantes

Marco teórico

En un trabajo anterior se construyó un modelo guía para construir actividades matemáticas que promuevan la autorregulación y favorezcan el desarrollo de la metacognición (Villalonga de García, González de Galindo y Mercau de Sancho, 2012). Se identificaron los siguientes criterios orientadores:

El docente en sus clases debe desarrollar actividades matemáticas que:

Criterio 1: revisen el grado de alcance de los prerrequisitos de aprendizaje e ideas previas. *Criterio 2*: favorezcan la comunicación de los objetivos. *Criterio 3*: promuevan la conexión entre contenidos. *Criterio 4:* desarrollen la flexibilidad para expresar contenidos matemáticos empleando distintos sistemas de representación semiótica: verbal, simbólico o gráfico. *Criterio 5*: desarrollen la potencia matemática del estudiante (NCTM, 1995). *Criterio 6*: aprovechen el error para promover el aprendizaje. *Criterio 7*: permitan apreciar la utilidad de la Matemática en la vida diaria y en las ciencias. *Criterio 8*: ayuden a tomar conciencia de los logros alcanzados en el aprendizaje. *Criterio 9*: favorezcan la apropiación de los criterios de evaluación. *Criterio 10:* fomenten la interacción social en el aula. *Criterio 11:* promuevan una actitud positiva hacia la Matemática.

Referentes teóricos considerados para el análisis de la tarea desarrollada por los estudiantes

Para el estudio del desarrollo de los ítems del instrumento de evaluación formativa, motivo de la tarea de los estudiantes, se consideró el concepto de *Sistema Básico de Habilidades Matemáticas*. Según Talízina (1989) no es posible separar el saber del saber hacer, dado que siempre saber, es saber hacer algo; no puede haber un conocimiento sin una habilidad, sin un saber hacer. Atendiendo a esta premisa, Hernández definió el *Sistema Básico de Habilidades Matemáticas*, posteriormente ampliado, a través de las cuales es posible resolver problemas matemáticos en su acepción amplia. Este sistema está conformado por las siguientes habilidades: *Definir, Demostrar, Identificar, Interpretar, Recodificar, Graficar, Algoritmizar, Calcular, Modelar, Comparar, Resolver, Aproximar, Optimizar* y *Controlar* (Hernández Fernández et al, 2001).

El conjunto de los procedimientos generales matemáticos se presenta como una totalidad imprescindible para el trabajo con la Matemática y sus modelos, constituyendo un sistema de naturaleza jerárquica. Así, cada procedimiento o combinación de ellos, puede ser considerado como un sistema.

Metodología

El *objetivo* de este trabajo es presentar los resultados de la implementación en el aula de un instrumento destinado a realizar evaluación formativa y autorregular el aprendizaje.

En un trabajo anterior se presentó el diseño y validación mediante juicio de expertos, de tal *instrumento* (González de Galindo y Villalonga de García, 2010). Presentaba la gráfica de una función y 5 proposiciones (Apéndice). El alumno debía analizarlas y contestar si existía error en base a la inspección de la gráfica. Si lo encontraba, debía explicar en qué consistía y escribir la proposición correcta. Con esta tarea se pretendía evaluar si el alumno: a) tenía flexibilidad para interpretar gráficamente entes matemáticos expresados en lenguaje simbólico; b) identificaba gráficamente el valor de los límites laterales de una función en un punto; c) entendía la condición de existencia del límite de una función en un punto; d) advertía que el valor del límite de una función en un punto no depende del valor de la función en ese punto; e) reconocía que un salto en un punto de la gráfica de una función implicaba la no existencia del límite de la función en ese punto; f) tomaba conciencia de los errores cometidos y la manera de enmendarlos.

El trabajo en el aula se desarrolló así: Los alumnos resolvieron la situación planteada, en forma individual y anónima. Luego cada estudiante intercambió su producción con un compañero. Intercambiadas las producciones, el docente explicó, en la pizarra, cada apartado de la actividad, brindando los criterios de corrección. Terminada la instancia de co- evaluación, cada protocolo volvió a su dueño, para que reflexionara sobre sus errores y luego escribiera un texto explicitando el origen de su error. Finalmente todos los protocolos se entregaron al docente (González de Galindo y Villalonga de García, 2010).

Para analizar los protocolos de los estudiantes se tomó una *muestra* aleatoria sistemática de 69 alumnos.

Marco teórico metodológico

Para sistematizar el análisis de los protocolos de los estudiantes se siguieron los principios teóricos metodológicos que se presentan muy sintetizados a continuación (Samaja, 2003).

Dado que todo objeto real de investigación en ciencias sociales posee un gran número de atributos, relaciones y contextos, es necesario que el indagador, en base a modelos preexistentes

al acto investigativo (consecuencias de la historia personal, intuiciones, experiencia y circunstancias, o sea la *preconcepción modelizante,* efectúe una reducción de su complejidad explicitando qué aspectos relevantes de sus componentes tendrá en cuenta y qué *procedimientos* concretos usará para llevar a cabo su descripción. Es decir, debe construir un *objeto modelo*. El denominado *objeto modelo*, queda delimitado por los distintos tipos de unidades de análisis escogidas para la investigación, mediante la aplicación del conjunto de *variables* que se seleccionen para describir el objeto real de la indagación, propio de cada tipo de *unidad de análisis* (Samaja, 2003).

Metodología para analizar los protocolos de los estudiantes

El estudio realizado fue de tipo descriptivo. Se escogió como *unidad de análisis* la respuesta al ítem. La *variable* considerada relevante se denominó *Desarrollo de habilidades.* Las *dimensiones* consideradas fueron: *Recodificar, Interpretar y Controlar.*

Definición conceptual de la variable Desarrollo de habilidades y de sus dimensiones

1. *Desarrollo de habilidades*: grado alcanzado por el estudiante en el desarrollo de las habilidades matemáticas consideradas como una totalidad.

Las *dimensiones* estudiadas para esta variable fueron:

1.1. *Recodificar:* "*transferir la denominación de un objeto de un lenguaje matemático a otro*" (Delgado, 2001, p. 74).

1.2. *Interpretar*: "*atribuir significado a una expresión matemática, la que adquiere sentido en función del propio objeto matemático o del fenómeno real que se trate*" (Delgado, 2001, p. 73).

1.3. *Controlar*: "*Monitorear, evaluar y regular un conjunto de informaciones con relación a objetivos prefijados, a los efectos de tomar decisiones en el abordaje y resolución de un problema*" (Hernández Fernández et al, 2001, p. 113).

Evaluación del *desarrollo de habilidades* matemáticas

Para evaluar la variable *Desarrollo de habilidades* matemáticas en el alumno se siguió el siguiente procedimiento:

a) Listado de los errores cometidos por los estudiantes en la prueba.

b) Evaluación del grado de desarrollo alcanzado por cada alumno en las habilidades *Recodificar* e *Interpretar.*

Se construyó un indicador *I* para obtener una medida del grado de desarrollo (GD) alcanzado en las habilidades *Recodificar* e *Interpretar.* Para ello se analizó en cada protocolo el desarrollo de cada

ítem. Si la recodificación efectuada era correcta se asignaba el valor uno a la variable *Recodificar*, de lo contrario se asignaba el valor cero. Para cada alumno, se definió el indicador *I* promediando los valores asignados a la variable *Recodificar* en los cinco ítems de la prueba. De igual manera se procedió para valuar la variable *Interpretar*. El GD de cada habilidad se midió en escala ordinal y se consideró: GD Bajo si: $0 \leq I \leq 0{,}3$; GD Mediano si: $0{,}3 < I < 0{,}7$ y GD Alto si: $0{,}7 \leq I < 1$. De esta manera, *I* resultó ser un indicador normalizado entre cero y uno: $0 \leq I \leq 1$.

c) Evaluación del grado de desarrollo alcanzado en la habilidad *Controlar*

Se analizaron las respuestas a la pregunta abierta: "*Si encuentras error, explica cuál es y escribe la afirmación correcta*". Siguiendo a Taylor y Bogdan (1987) se realizó el siguiente tratamiento de los datos articulado sobre la comprensión de los mismos y rastreo de sentido buscando las dimensiones fundamentales en los hechos descriptos:

- *Lectura cuidadosa y relectura de las respuestas*, con el objetivo de dejarse impregnar por la información para identificar tendencias relevantes.
- *Delimitación de los temas*, derivados de manera inductiva, a partir de las tendencias detectadas.
- *Determinación de nuevas dimensiones de estudio,* apoyándose en los temas delimitados y en el marco teórico y experiencia de las docentes.
- *Codificación de todos los datos.* La asignación de los datos al sistema resultante de dimensiones encerró una vertiente interpretativa. Una lectura atributiva permitió asignar cada registro escrito por el alumno a una de ellas, recurriendo a un sistema de identificación que hizo rápida y fácil la siguiente fase.
- *Separación de los datos en las diversas dimensiones.* Siguiendo las recomendaciones de Taylor y Bogdan (1987) se registraron también las expresiones de los alumnos.

Resultados

1. Listado de los errores cometidos en la prueba

Los errores que se presentaron con mayor frecuencia fueron:

- Concluir erróneamente acerca de la existencia (o no) del límite sin analizar el valor de los límites laterales.
- Interpretar que el valor del límite es el valor que asume la función en un número. Ídem con los límites laterales.
- Interpretación errónea a partir del gráfico del valor del límite de una función. Ídem con los límites laterales.

- Errores en el uso del lenguaje simbólico: desconocimiento de la escritura correcta del símbolo "no existe", omisión del símbolo de función al escribir el límite o los límites laterales.
- Errores al calificar y justificar una afirmación.
- Omitir la calificación de la proposición aun cuando la respuesta era correcta.
- No interpretar la consigna.

2. Generación de las dimensiones de la variable *Controlar*

De la lectura de las respuestas a la pregunta abierta surgieron los siguientes *temas*: "Propuesta de mecanismos de autorregulación, Advertencia de error en el concepto de límite y en el cálculo de los límites laterales, Advertencia de la necesidad del cálculo de límites laterales frente a un salto de la gráfica de la función, Toma de conciencia del error y su corrección, Toma de conciencia de falta de estudio, Toma de conciencia de errores a enmendar para poder avanzar en el aprendizaje, Contribución de la tarea para descubrir otras forma de obtener la solución, Necesidad de afianzar el aprendizaje de lectura de gráficos, Falta de tiempo para realizar la tarea."

Delimitados los nuevos temas, apoyándose en principios del marco teórico y en la experiencia de las docentes se determinaron las siguientes *dimensiones de estudio* para la variable *Controlar*: a) Toma conciencia del error y lo enmienda en ese momento; b) Toma conciencia que podrá enmendar el error después de estudiar el tema; c) No cometió error pero la tarea contribuyó a ver otras formas de llegar a la respuesta; d) El error cometido permitió descubrir mecanismos de autorregulación.

Codificación de los datos: La asignación de los datos al sistema resultante de dimensiones y subdimensiones encerró una vertiente interpretativa. Una lectura atributiva permitió asignar cada registro a una de ellas, recurriendo a un sistema de identificación que hizo rápida y fácil la *separación de los datos en las diversas dimensiones.* Se reunieron los datos codificados pertenecientes a cada dimensión y subdimensión, registrándose las expresiones volcadas por los alumnos.

3. Grado de desarrollo alcanzado por cada alumno en las habilidades Recodificar e Interpretar

Desarrollo de las habilidades Recodificar e Interpretar

Fue muy bajo el porcentaje de alumnos con GD alto en ambas habilidades como se evidencia en la siguiente Tabla:

Distribución de frecuencias del valor del indicador I para valorar el GD de las variables Recodificar e Interpretar		
Valor de I	Vble. *Recodificar*	Vble. *Interpretar*
$0 \leq I \leq 0,3$	29 (42%)	27 (39 %)
$0,3 < I < 0,7$	23 (33%)	22 (32 %)
$0,7 \leq I < 1.$	17 (25 %)	20 (29 %)

4. Grado de desarrollo alcanzado en la habilidad *Controlar*

El 100 % de los estudiantes realizó la tarea de control de la actividad realizada.

Algunos registros textuales levantados de los protocolos de los estudiantes que dieron origen a las dimensiones de la variable *Controlar* fueron:

- *Toma conciencia del error y lo enmienda en ese momento*:

"Me equivoqué porque no sabía un buen método de justificación. Ahora lo comprendo", "Pensé que en el concepto de límite debía considerar el valor de la función en el punto", "Mis errores fueron producto de analizar mal la condición de existencia del límite…Pero recalco que en este trabajo logré despejar algunas dudas, logrando así un mejor manejo del tema", "En algunos casos como en los puntos b y c tenía confusión con los puntos abiertos y cerrados".

- *Toma conciencia que podrá enmendar el error después de estudiar el tema*:

"Mi error fue falta de lectura de la teoría y ejercitación, tendré que hacerlo para entender bien el tema, …", "Considero que me falta aún corregir la manera de justificar y de expresarme mediante símbolos matemáticos…", "... Tengo que afianzar más los conceptos y la lectura de gráficas".

- *No cometió error pero la tarea contribuyó a ver otras formas de llegar a la respuesta*:

"A este tema lo entiendo muy bien y me gusta. También me ayudó a ver otras formas de justificación"; "Las respuestas estaban bien pero afiancé los conceptos aprendidos e incorporé algunos como qué significa el salto finito".

- *El error cometido permite descubrir mecanismos de autorregulación:*

"Tomé conciencia de mis errores … cada vez que tenga una actividad debo pulirla hasta que entienda lo que dice la consigna y escribir al lado todo con palabras", "Esta experiencia me sirvió para darme cuenta de que tengo que prestar más atención al analizar los gráficos para no cometer errores al intentar hacer las cosas rápido", "Sí tomé conciencia los errores que cometí, porque después de ver la corrección en el pizarrón me di cuenta que debo estudiar y prestar más atención a las clases teóricas"

La lectura de estos registros indica que la actividad propuesta favoreció el control de la tarea.

Conclusiones

De acuerdo a los resultados, la experiencia realizada resultaría adecuada como estrategia de autoevaluación a implementar en aulas masivas, dado que disminuye la tarea de corrección del docente y el tiempo de implementación no supera los 50 minutos.

Actividades semejantes a las aquí presentadas podrían llevarse a cabo para realizar la integración de los contenidos de cada unidad de la asignatura Matemática I. También, es aplicable en aulas del Nivel Medio y Superior de esta u otras disciplinas.

Estos resultados constituyen un aporte para obtener las conclusiones del proyecto mediante triangulación de evidencias con datos de otras fuentes.

Referencias bibliográficas

Delgado, J. R. (2001). Los procedimientos generales matemáticos. En H. Hernández Fernández, J. R. Delgado Rubí y B. Fernández de Alaíza (Eds), *Cuestiones de Didáctica de la Matemática. Conceptos y procedimientos en el educación Polimodal y Superior* (pp. 69-87). Argentina: Homo Sapiens.

González de Galindo, S. y Villalonga de García, P. (2010). Metacognición: diseño de un material curricular para aulas multitudinarias. *Revista electrónica de Investigación en Educación en Ciencias 5 (2),* 58-68.

González de Galindo, S., Holgado de Mejail, L. y Villalonga de García, P. (2013). *Regulación continua del aprendizaje del cálculo y rendimiento académico en alumnos universitarios de primer año.* Comunicación presentada en la XXVII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Buenos Aires.

González de Galindo, S., Villalonga de García, P., Marcilla, M. y Holgado de Mejail, L. (2012). *Diario del profesor: instrumento para analizar la práctica docente de matemática*. En prensa. Acta de la X Conferencia Argentina de Educación Matemática (2014). Buenos Aires.

Hernández Fernández, H., Delgado Rubí, J., Valverde Ramírez, L. y Rodríguez Hung, T. (2001). Un recurso metacognitivo para resolución de problemas en matemática: el autocontrol. En H. Hernández Fernández, J. R. Delgado Rubí y B. Fernández de Alaíza (Eds). *Cuestiones de Didáctica de la Matemática. Conceptos y procedimientos en la educación Polimodal y Superior* (pp. 107-120). Argentina: Homo Sapiens.

N.C.T.M. (1995). *Assessment Standards for School Mathematics*. Recuperado el 11 de abril de 2003 de http://standards.nctm.org/Previous/AssStds/index.htm.

Samaja J. (2003). *Epistemología y metodología. Elementos para una teoría de la investigación científica.* 3° edición. 3° reimpresión. Buenos Aires: Eudeba.

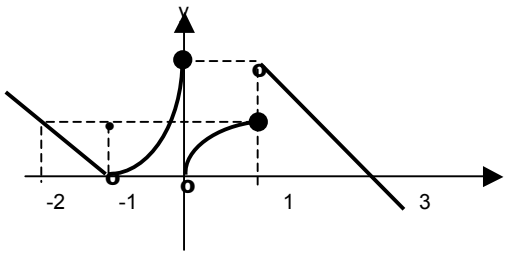
Talízina, N. (1989). Citado por Pérez Pantaleón, G. (1997). *Un sistema didáctico para la enseñanza de la matemática en la carrera de Arquitectura sustentado en el enfoque histórico-cultural y aspectos de la psicología cognitiva*. Tesis de maestría no publicada, Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría. La Habana-Cuba.

Taylor S. y Bogdan R. (1987). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación. La búsqueda de significados.* Barcelona: Paidós.

Villalonga de García, P., González de Galindo, S. y Mercau de Sancho, S. (2014). Estrategia didáctica que favorece la metacognición en aulas masivas: Encuesta a alumnos. *Revista Archivos de Bioquímica, Química y Farmacia. 23(1),* 9-21.

Villalonga de García, P., González de Galindo, S. y Mercau de Sancho, S. (2012). *Construcción de un modelo que orienta, en el área matemática, el desarrollo de la metacognición.* En prensa. Acta de la X Conferencia Argentina de Educación Matemática (2014). Buenos Aires.

Apéndice



Dada la gráfica de la función f, analiza si existe error en las siguientes afirmaciones. Si encuentras error, explica cuál es y escribe la afirmación correcta:

$a)\ \lim_{x\to -1} f(x)=1$ $\qquad$ $b)\ \lim_{x\to 0^+} f(x)\ existe$

$c)\ \lim_{x\to 0^+} f(x)\ \ no\,existe$ $\qquad$ $d)\ \lim_{x\to 1} f(x)=2$

$e)\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$

¿PRUEBA DE HIPÓTESIS, INTERVALO DE CONFIANZA O PRUEBA DE SIGNIFICANCIA?

Gudelia Figueroa Preciado, Irma Nancy Larios Rodríguez y María Elena Parra Ramos
Universidad de Sonora México
gfiguero@gauss.mat.uson.mx, nancy@gauss.mat.uson.mx, meparra@gauss.mat.uson.mx

Resumen. En estadística, técnicas inferenciales como son intervalos de confianza, prueba de hipótesis y pruebas de significancia, son ampliamente utilizadas para hacer inferencias acerca de ciertas características de una población. Aunque este material ocupa gran parte de los cursos básicos de estadística de nivel universitario, es común que en la práctica se haga un uso indistinto de estas técnicas. El presente trabajo surge de advertir esta problemática, pues es usual observar que se plantean hipótesis nulas y alternativas durante el transcurso de un análisis, se malinterpreta la información que proporciona un intervalo de confianza y se considera el p-valor como un número mágico, cuya sola magnitud permite emitir conclusiones, sin la necesidad de información adicional. En este trabajo se sugiere realizar un análisis exhaustivo de las similitudes y diferencias entre estas técnicas inferenciales y se propone una sencilla metodología que se apoya en el uso de simulaciones realizadas en el software R, que facilitan un análisis detallado de los resultados obtenidos.
Palabras clave: Significancia, p-valor, nivel de confianza
Abstract. In statistics, some inferential procedures like confidence intervals, test of hypothesis and significance tests are widely used to make inferences about some characteristics of a population. Although this material constitutes a fundamental part of an undergraduate course, it is common to observe, in practice, a misuse of these techniques. Our proposal comes up when observing that is usual to set up a null and an alternative hypothesis in the course of an analysis, that is very common to misunderstand the information that a confidence interval provides, and also it is very usual to consider a p-value like a magic number that will allow us to take a decision with no need of an aditional information. In this work we suggest to perform an exhaustive analysis concerning the differences and simmilarities between these inferential techniques and we propose a simple methodology that relies on the use of computer simulations made in the R sofware, because these facilitate to make a detailed analysis of the obtained results.
Key words: Significance, p-value, confidence level.

Introducción

El análisis inferencial es una herramienta fundamental en las investigaciones de muchas disciplinas científicas. Sin embargo, es común observar que se desconoce cuándo o porqué utilizar alguna técnica en particular. Por ejemplo, se usa indiscriminadamente tanto un intervalo de confianza como una prueba de hipótesis, o bien una prueba de significancia. Más aún, estas técnicas se llevan a cabo de manera mecánica y los resultados obtenidos muchas veces se interpretan de una manera ligera, lo que conduce a tomar decisiones equivocadas. Pocas veces se advierte que el uso de una u otra técnica depende del objetivo del estudio y que los alcances y limitaciones de los resultados obtenidos, están estrechamente ligados con la técnica utilizada.

Al finalizar un curso de estadística, es común observar que muchos estudiantes plantean hipótesis estadísticas tan sólo porque quieren mostrar si los resultados observados son "estadísticamente significativos" con respecto a cierta hipótesis. Consideran que el p-valor, constituye un resultado mágico que permite distinguir entre efectos reales y efectos que pudieran ser resultado del azar y es usual que terminen el curso sin asociar la relación que existe entre los valores que toma un

intervalo de confianza y el rechazo o no de una hipótesis nula. Por otra parte, es en realidad preocupante las interpretaciones erróneas que muchas veces dan a un intervalo de confianza o al p-valor de una prueba. Algunos creen que éste último representa la probabilidad de que la hipótesis nula sea cierta, dada la muestra observada; cuando en realidad representa la probabilidad de observar esa muestra, si la hipótesis nula fuera cierta.

Advertir esta problemática conduce a preguntarnos si como docentes hemos dejado de lado aspectos importantes, como el inducir en el estudiante una exploración y análisis entre las semejanzas y diferencias de estos métodos de inferencia estadística y el saber cuándo y porqué utilizarlos. Una discusión sobre algunas diferencias y similitudes entre pruebas de significación y pruebas de hipótesis, la expone Batanero (2001) y es material fundamental que debiera incluirse en los cursos de estadística, pues esclarecería la problemática filosófica de la inferencia estadística. Por otro lado, el analisis sugerido debiera realizarse sobre la base de problemas reales que pueden trabajarse como proyectos de clase; con ellos se puede mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la estadística (Batanero & Díaz, 2005), pues permiten rescatar qué se quiere probar, qué pregunta debe contestarse, qué técnica es la más adecuada al problema, etcétera. Así pues, se pretende que el estudiante pueda resolver no sólo los problemas de aplicación planteados durante el curso, sino también aquellos a los que pudiera enfrentarse en su quehacer profesional. Actualmente es necesario que se incluya el uso de software estadístico en el análisis de datos, pues por una parte es cada vez más común el trabajar grandes conjuntos de datos y por otra, el estudiante debe saber identificar qué resultados arroja el software utilizado y poder interpretarlos correctamente.

Para abordar la problemática planteada se proponen dos actividades en las que se utiliza el software estadístico R, tanto en el proceso de simulación de las muestras como en la aplicación de la técnica inferencial seleccionada. Con estas actividades se pretende que el estudiante pueda elegir la técnica inferencial adecuada y logre hacer una correcta interpretación de los resultados que ésta arroje.

Referente teórico

Es común observar publicaciones científicas donde se hace un uso indiscriminado de pruebas de hipótesis, sin reflexionar acerca de si son en realidad el método más adecuado para analizar los datos en estudio. Según señala Clark (2004), una vez que el estudiante o investigador aprende a utilizar las pruebas de hipótesis, no vacila en aplicarlas libremente. Cuando una prueba de hipótesis es en realidad lo más adecuado, debe cuidarse el no basar la conclusión en la simple observación de la magnitud de una variable aleatoria, como es el p-valor. Este puede indicar que existen resultados significativos que lleven a tomar una conclusión, para la cual debiera integrarse más información que la proporcionada por ese único valor. Es común observar que muchas veces se

memoriza una regla consistente en observar si el p-valor es mayor o menor que el nivel de significancia establecido para la prueba y éste es el único sustento para tomar la decisión. El hacer eso y plantear hipótesis sin fundamentación alguna, suele llevar a conclusiones que pueden carecer de sentido, como el afirmar que la esperanza de vida de un actor es mayor cuando éste gana un Oscar (Wood, 2012), o bien que la probabilidad de procrear hijos con piel oscura es mayor de 0.3, si la madre bebe más de 15 tazas de café al día.

Debe aclararse que una prueba de hipótesis no proporciona información acerca de la magnitud de un efecto, esto es, puede haber dos muestras con la misma media muestral y sólo una de ellas arrojar resultados significativos, debido al tamaño de la muestra. Es decir la distancia entre la media poblacional y la media muestral puede ser la misma, pero las muestras conducen a p-valores diferentes. Kochanski (2005) enfatiza que los intervalos de confianza son el equivalente de encapsular varias pruebas de hipótesis, ya que si el intervalo de confianza no incluye el valor establecido en H_0, entonces en la prueba de hipótesis se rechazará H_0, y viceversa. Es importante analizar que un intervalo de confianza explica, con su amplitud, la incertidumbre debida al error muestral. Abdelhamid (2005) señala también que una característica importante del intervalo de confianza es que puede ser utilizado como una prueba de hipótesis e inferir el valor de p asociado a ésta.

Garfield y Ben-Zvi (2008) abordan de manera muy amplia las dificultades que tienen los estudiantes en la interpretación de técnicas inferenciales e indican que investigaciones recientes sugieren que se puede comprender mejor la inferencia estadística mediante el uso de herramientas tecnológicas y actividades de simulación. Sin embargo, añaden que el uso de estas herramientas de simulación no serán suficientes si no están vinculadas a conceptos de inferencia estadística.

Metodología

Para abordar la problemática planteada, se proponen dos actividades. En la primera de ellas se simulan muestras de dos diferentes tamaños, con las cuales se calculan intervalos del 90 y 95 por ciento de confianza. La actividad pretende mostrar que a mayor tamaño de muestra, se espera mejor cobertura del intervalo y que la amplitud de éste será más pequeña. Por otra parte, a mayor nivel de confianza, la amplitud del intervalo aumentará. La segunda actividad plantea un problema de aplicación con el cual se pretende mostrar la relación existente entre intervalo de confianza y prueba de hipótesis, así como la diferencia entre nivel de significancia y p-valor. Con este problema se muestra que un mismo conjunto de datos puede sustentar muchas hipótesis nulas y de la igual manera, un mismo conjunto de datos permite también rechazar varias hipótesis nulas. La comprensión de esto último se facilita calculando los p-valores correspondientes de cada una de las pruebas efectuadas y graficando éstos.

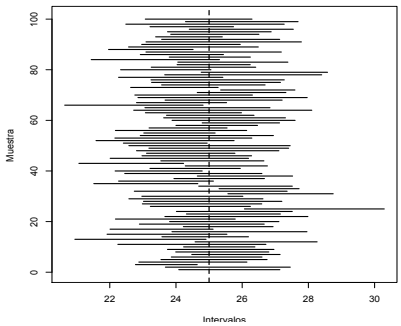
Las actividades anteriores deben estar complementadas con un análisis detallado, donde para cada problema en particular se analicen preguntas como: ¿qué utilizar? ¿Un intervalo de confianza, una prueba de hipótesis o bien una prueba de significancia? Si se selecciona una prueba de hipótesis, ¿qué plantear en la hipótesis nula? Si acaso se selecciona un intervalo de confianza ¿que ventajas tiene sobre el p-valor de una prueba de significancia?

El desarrollo de las dos actividades propuestas se puede realizar en aproximadamente dos horas clase. La experiencia ha mostrado resultados satisfactorios, pues al final del curso el estudiante es más analítico al tomar la decisión de cuál técnica inferencial utilizar para un problema particular y al mismo tiempo está más consciente en cuanto los alcances y limitaciones de los resultados obtenidos.

Aunque la propuesta presentada en este trabajo ha sido probada con un grupo de 25 estudiantes del área de Ciencias Exacta y Naturales durante el semestre 2012-2, no se ha realizado aún una experimentación estructurada metodológicamente, puesto que estamos en la etapa de retroalimentación de la misma, sin embargo esta va a ser experimentada durante el 2013 mediante un estudio de casos, utilizando diversas técnicas de recopilación de información como son hojas de trabajo, archivos del software del trabajo realizado por los estudiantes, videograbaciones, entre otras. Los análisis que se pretenden realizar son de corte cualitativo.

Primera actividad

Se simularon 100 muestras aleatorias de tamaños 10 y 50, de una distribución normal con media $\mu = 25$ y desviación estándar $\sigma = 3$. Para cada una de estas muestras se calculó un intervalo del 90 y del 95 por ciento de confianza, para la media de la distribución. Se contabilizó la cobertura empírica, esto es el número de intervalos que cubren el parámetro $\mu = 25$, esto con la finalidad de mostrar la interpretación frecuentista que proporciona un intervalo de confianza y que además el estudiante observe que, por lo general, a mayor nivel de confianza se tiene mayor cobertura ya que el intervalo de confianza es más amplio, y que al aumentar el tamaño de muestra la amplitud del intervalo de confianza disminuye. Estos resultados pueden observarse en las Figuras 1, 2, 3 y 4.



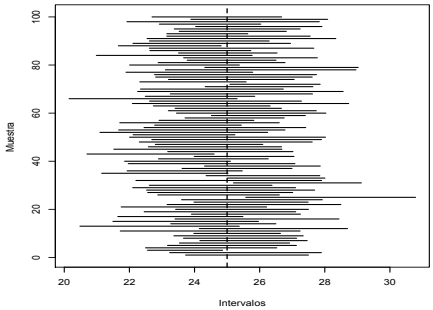


Figura 3. Intervalos del 90% confianza, n=10, cobertura=88

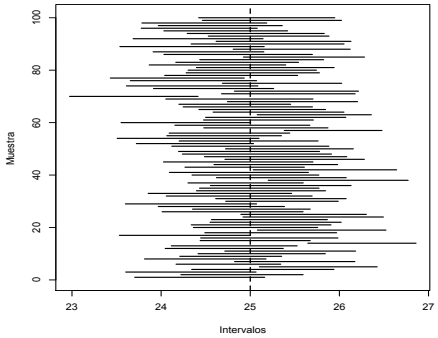


Figura 4. Intervalos del 95% de confianza, n=10, cobertura=93

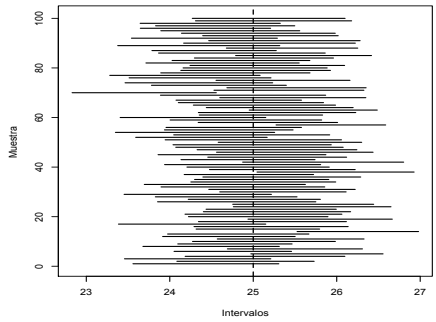


Figura 5. Intervalos del 90% de confianza, n=50, cobertura=91

Figura 6. Intervalos del 95% de confianza, n=50, cobertura=96

Segunda actividad

Primera Parte. Para esta actividad se plantea resolver un problema de aplicación, sencillo, como el siguiente:

Se midió la talla y peso de una muestra aleatoria de 20 estudiantes universitarias y con base en ello se desea estimar el índice de masa corporal (IMC). Los datos observados fueron:

26.2, 25.4, 23.4, 21.2, 20.5, 22.1, 28.4, 25.6, 19.3, 18.5,

19.7, 22.4, 26.1, 20.3, 18.8, 20.4, 22.6, 29.5, 21.3, 23.6.

La media y desviación estándar muestrales para el IMC resultan $\bar{x}$ =22.76 y $s = 3.19$, respectivamente. Al plantear este problema ante un grupo de estudiantes, es muy común que lo primero que realicen sea el cálculo de un intervalo de confianza para el índice promedio de masa corporal. Si se considera que la distribución de IMC satisface el supuesto de normalidad, entonces, un intervalo del 95% de confianza para el índice promedio de masa corporal en estudiantes universitarias se calcularía como:

$$\bar{x} \mp t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}\,(s/\sqrt{n})$$

donde $t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$ es el valor de tablas en la distribución t-Student con $n-1$ grados de libertad, que deja un área de $1-\frac{\alpha}{2}$ a su izquierda. En este caso en particular se tiene que

$t_{0.975,19} = 2.0930$. Luego, un intervalo al 95% de confianza para μ resulta:

(21.27173, 24.25827)

Es importante señalar que al plantear ese problema de forma tan general, muchos estudiantes quieren probar alguna hipótesis nula. Se sugiere entonces, que con la ayuda de un software estadístico, se evalúe una serie de hipótesis nulas, donde la media μ tome valores entre 21.3 y

24.2, a intervalos de 0.1 (se probarán 30 hipótesis). Esto es, se asigna a μ valores que caen dentro del intervalo de confianza calculado anteriormente. Al probar cada una de estas treinta hipótesis, se guarda el p-valor resultante. Para la muestra de IMC, el valor mínimo de esta serie de p-valores fue 0.05406094 y el más grande resultó 0.9613857. El diagrama de caja que se obtiene con los treinta p-valores calculados se muestra en la Figura **7**.

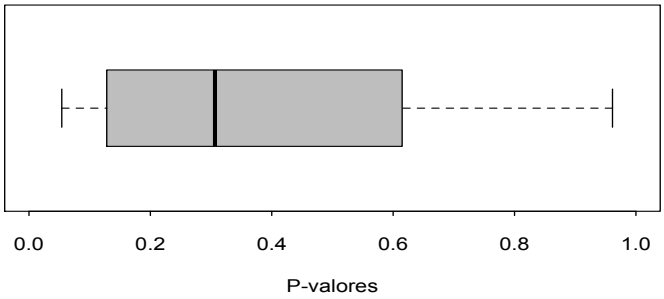


Figura 7. Diagrama de caja de p-valores resultantes de probar hipótesis nulas con valores de $\mu \in (21.3, 24.2)$

En esta parte de la actividad el estudiante analiza que todos los p-valores resultaron mayores que 0.05 y deduce que eso siempre sucederá si el valor que toma μ en la hipótesis nula es un valor comprendido dentro del intervalo de confianza.

Segunda Parte. Aprovechando lo analizado en la primer parte de la actividad, se informa que en el estudio interesa ver si la muestra aleatoria de 20 estudiantes, apoya la hipótesis de que esa muestra proviene de una distribución normal con un IMC promedio de $\mu = 25$. Se selecciona éste valor, o cualquier otro que se encuentre fuera del intervalo de confianza obtenido. En este momento se solicita a los estudiantes que emitan su opinión sobre el resultado de esta prueba, antes de realizarla, considerando un nivel de significancia $\alpha = 0.05$. El fijar ese nivel tiene la finalidad de que el estudiante observe que éste valor existe aún antes de realizar la prueba y que representa la probabilidad de rechazar la hipótesis nula, cuando ésta es cierta; concepto muy diferente del p-valor, que sólo puede calcularse después de obtenida la muestra. Un gran porcentaje de estudiantes deduce que ahora la hipótesis nula si será rechazada, como efectivamente lo es, ya que el p-valor asociado resulta 0.00548.

Con el fin de cerrar esta segunda parte de la actividad se prueban después varias hipótesis nulas, con valores de μ que fluctuan, por ejemplo, entre 24.3 y 28, o digamos, entre 18 y 21. Esto con el fin de asignar a μ, en la hipótesis nula, valores que se encuentren fuera del intervalo de confianza previamente obtenido. Al efectuar estas pruebas, con valores de μ en el intervalo (24.3,28), el p-valor más pequeño fue 5.903382e-07 y el más grande resultó 0.04451013.

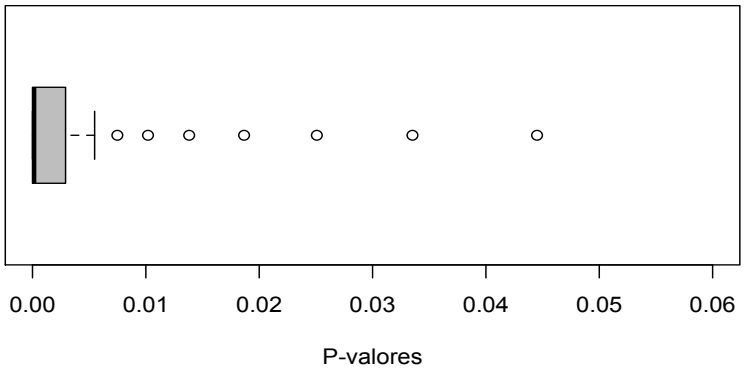


Figura 8. Diagrama de caja de p-valores resultantes de probar hipótesis nulas con valores de $\mu \in (24.3, 28)$

El diagrama de caja asociado a los p-valores resultantes se muestra en la Figura 8, donde puede observase que todos los p-valores son menores que 0.05, lo que conduciría a rechazar cualquier hipótesis nula H_0, siempre que $\mu \in (24.3, 28)$, pues μ toma valores fuera del intervalo de confianza obtenido.

Ahora, con base en la muestra de los IMC, y ya efecuadas las dos partes de esta segunda actividad, se cuestiona al estudiante lo siguiente, ¿Se rechaza $H_0: \mu = 24.3$, pero no se rechaza $H_0: \mu = 24.2$? Ellos observan que efectivamente eso ocurre cuando $\alpha = 0.05$. Esta situación debe aprovecharse para reflexionar en que la decisión de rechazo o no de una hipótesis nula, no debe tomarse a la ligera, esto es, debe haber una fundamentación relacionada con el propósito del estudio. El tomar decisiones de manera mecánica lleva a concluir que si $\alpha = 0.05$, y el p-valor=0.052, no se rechazará H_0, pero si el p-valor=0.048, se rechazará H_0. Aunque es un ejemplo algo extremo, permite ejemplificar que toda conclusión estadística no debe basarse solamente en la magnitud de un resultado. Esto es, la decisión debe también conjuntar información inherente al problema en estudio, pues con respecto al problema planteado, si en hipótesis nula se establece $\mu = 25$, decidir de manera tajante, como la mostrada anteriormente, el rechazo o no rechazo de esa hipótesis nula, equivaldría a admitir que si una de las estudiantes seleccionadas hubiera tenido quizá un kilo más de peso, entonces podremos concluir que la población de donde se tomó la muestra sufre de sobrepeso. ¿Tiene eso sentido? Así pues, este ejercicio tan sencillo permite reflexionar en que una decisión no debe fundamentarse solamente en un resultado numérico.

Conclusiones

Las actividades propuestas permiten reflexionar sobre aspectos que deben considerarse al seleccionar la técnica inferencial más apropiada para analizar un determinado conjunto de datos. Se ha observado que actividades como éstas facilitan el diferenciar conceptos como nivel de significancia y p-valor, así como el interpretar correctamente un intervalo de confianza. El abordar

problemas reales, extrapolando su análisis con la ayuda de simulaciones efectuadas por medio de algún software estadístico, permite que el estudiante identifique similitudes y diferencias entre las diferentes técnicas inferenciales analizadas y coadyuva a que su decisión no se base solamente en un resultado numérico.

Referencias bibliográficas

Abdelhamid, A. (2005). Why should researchers report the confidence interval in modern research. *Middle East Fertility Society Journal , 10* (1), 78-81.

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística.* España: Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Batanero, C., & Díaz, C. (2005). El papel de los proyectos de enseñanza y aprendizaje de la estadística. *I Congresso de Estatística e Investigação Operacional da Galiza e Norte de Portugal, VII Congreso Galego de Estatística e Investigación de Operacións.* Guimarães, Portugal.

Clark, M. (2004). Los valores P y los intervalos de confianza: ¿en qué confiar? *Revista Panamericana de Salud Pública , 15* (5), 293-296.

Garfield, J. B., & Ben-Zvi, D. (2008). Learning to Reason About Statistical Inference. En *Developing Students' Statistical Reasoning.* Springer.

Kochanski, G. (2005). *Confidence intervals and hypothesis testing*. Recuperado el 20 de febrero de 2012, de http://kochanski.org/gpk/teaching/0401Oxford/confidence.pdf

Wood, M. (2012). *P vlues, confidence intervals, or confidence levels for hypothesis?* Recuperado el 16 de enero de 2013, de http://arxiv.org/abs/0912.3878v4.

EL APRENDIZAJE ACTIVO COMO ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO

Elvira G. Rincón Flores, Dora Elia Cienfuegos Zurita, Delia Galván Sánchez y María de la Luz Fabela Rodríguez
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Campus Monterrey México
elvira.rincon@itesm.mx, dcienfue@itesm.mx, delia.galvan@itesm.mx, mfabela@itesm.mx

Resumen. El proceso de enseñanza-aprendizaje del Cálculo siempre ha sido objeto de preocupación a nivel mundial, el alto índice de reprobados, la deserción escolar aunada a una enseñanza tradicional donde el alumno tiene un papel pasivo en el que debe ser disciplinado, acrítico y sumiso (Torres, 2006) son motivos suficientes para estudiar esta problemática y desarrollar estrategias didácticas resolutivas. Las investigaciones actuales acerca del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática enfatizan en la búsqueda de estrategias centradas en el aprendizaje, en donde el alumno participe activamente en la adquisición de su conocimiento (Bonwell y Eison, 1991). La presente investigación pretende comunicar las ventajas de una propuesta didáctica basada en el aprendizaje activo y la técnica de la pregunta. También se muestra un análisis estadístico comparativo entre el antes y después de la mencionada propuesta.
Palabras clave: aprendizaje activo, técnica de pregunta.
Abstract. The education-learning process in Calculus has always been a matter of concern worldwide, the deficient level of Mathematics learning and the school desertion, united to a traditional education where the students have a passive role, in that he must be disciplined and without giving opinions (Torres, 2006) are sufficient reasons for studying this problems and to develop better didactic strategies. The current researches involving the educations learning process of Mathematics emphasize the search for strategies centered on learning, where the student actively takes part on the acquisition of knowledge (Bonwell and Eison, 1991). The present research tries to communicate the advantages of the didactic strategies based on the active learning and the question technique, also the paper presents a statistical comparative analysis bases on student´s grades, before and after the mentioned proposal.
Key words: active learning, question technique.

Antecedentes

A partir de 1995 la institución educativa en la cual se llevó a cabo el estudio incursionó en un proceso de rediseño educativo en el que el alumno tiene un papel más activo en su proceso de aprendizaje. Antes de ese año, la enseñanza del Cálculo se desarrollaba de forma tradicional, el alumno de manera pasiva escuchaba las explicaciones del profesor y el contenido didáctico a enseñar tenía más inclinación hacia los procesos algorítmicos y algebraicos, es decir, había una fuerte tendencia hacia el aprendizaje de una Matemática descontextualizada e irreflexiva, tal y como sucedía en Francia en la época de los 80´s cuando las dificultades más evidentes en el aprendizaje del cálculo eran las asociadas a la conceptualización y a la casi nula ruptura de los modelos de pensamientos puramente algebraicos (Artigue, Douday, Moreno y Gómez, 1995), lo que llevaba, en ese momento en Francia y antes de 1995 en México, a un aprendizaje poco significativo, memorístico y superficial. Después de 1995 ante el nuevo modelo educativo, la enseñanza del Cálculo comenzó a transformarse, el alumno ya tenía un rol más activo sin embargo, los contenidos didácticos continuaban basándose en los libros de texto tradicionales que no facilitaban el rol al que se aspiraba que el alumno tuviera ni al desarrollo de las competencias

matemáticas requeridas por el entorno. Gatica, Carranza, May y Cosci (2002) desarrollaron un estudio en la Universidad de San Luis en Argentina que consistió en analizar los libros de texto tradicionalmente utilizados en el nivel superior, motivadas por la preocupación de que los estudiantes solo eran capaces de resolver algorítmicamente las derivadas y las integrales pero sin lograr una comprensión satisfactoria de los conceptos y de sus aplicaciones. Las profesoras eligieron tres libros y dentro de los resultados se destaca la enseñanza lineal del contenido, es decir, sin transferencia, el uso de un solo registro para representar el concepto de función y la inclinación hacia los problemas de registro algebraico. Duval (2000) señala que el uso de diferentes registros en la enseñanza de las matemáticas es muy positivo para el aprendizaje de las mismas, particularmente, los registros numéricos, algebraicos y gráficos, Gatica et al (2002) lo confirman "no es posible representar toda la complejidad del concepto de función en un único registro" (p. 133). Artigue et al (1995) encontró que ciertamente el Cálculo es una materia donde gran parte de la actividad Matemática se basa en competencias algebraicas pero que es necesario hacer eventuales rupturas para acceder al análisis y comprensión de los conceptos.

Ante ese escenario surgió la iniciativa de desarrollar una propuesta didáctica que fuera congruente al nuevo modelo educativo, orientada hacia el aprendizaje activo y basada en la técnica de la pregunta, que sitúa al alumno en un ambiente de construcción y reflexión, propuesta que se contempla también en el libro Cálculo Diferencial (Galván, Cienfuegos, Fabela, Rincón, Rodriguez, Romero y Elizondo, 2011). En el presente trabajo se describe la estrategia aplicada en al aula y se presenta un estudio estadístico del antes y después de utilizarla.

Referentes teóricos

Es innegable la necesidad de redirigir la enseñanza tradicional de las matemáticas hacia un modelo donde el alumno se convierta en el núcleo del proceso de enseñanza-aprendizaje (Veliz & Isaya, 2002). El desarrollo del constructivismo ha sido una pieza clave para situar al alumno en el papel de protagonista de su aprendizaje, Piaget (1986) aportó que para que hubiera un desarrollo cognitivo por parte del estudiante es necesario que construya su aprendizaje, mejor aún si se da en un entorno de interacción social. Para Hernández (2002) los piagetianos conceden un papel activo al estudiante en su proceso de aprendizaje, enfrentándolo a tareas auténticas y situadas en contextos significativos que faciliten la construcción del conocimiento, Ertmer y Newby (1993). Por ello, es de suma importancia que la enseñanza se mueva a entornos de aprendizaje activo en el que se involucre a los alumnos a hacer y a pensar en lo que están haciendo (Bonwell & Eison, 1991), de esta forma, el alumno estará involucrado en el proceso de aprendizaje y le será significativo, tal y como lo ha propuesto Ausubel (1981) destacando la importancia de un aprendizaje interactivo y no memorístico en beneficio de un aprendizaje significativo y duradero.

Margalef y Pareja (2008) realizaron un estudio a partir de tres escenarios distintos en donde se aplicaron estrategias que promueven el aprendizaje activo y encontraron que aunque resulte complejo de aceptar, una práctica basada en un aprendizaje activo, autodirigido y reflexivo son opuestas a un modelo educativo tradicional, por su parte, Mayer (2009) sostiene que cuando se tienen métodos efectivos para promover el constructivismo en el aula se estimula la actividad cognitiva en el estudiante, un mayor enfoque en los contenidos curriculares y una mejor guía por parte del profesor, en el mismo tono De Guzman (2007) comenta que la guía del profesor sin aniquilar el descubrimiento es una tarea fundamental en la enseñanza de las Matemáticas. Huber (2008) propone a la reflexión como método general del aprendizaje activo ya que lo considera un medio de creación y orientación tanto en un entorno de aprendizaje individual como social ya que "exige que se identifiquen tanto hechos centrales como preguntas abiertas respecto al objeto de aprendizaje" (p. 72) . Lozano (2005) propone que si un profesor construye preguntas efectivas, entonces el estudiante podrá valorar que son una herramienta que favorece a su aprendizaje ya que se estimula su proceso metacognitivo y por ende el aprendizaje activo.

Desarrollo

La propuesta didáctica se ha puesto en marcha desde agosto de 1995 en todos los cursos de Cálculo Diferencial para negocios y ciencias sociales de una universidad privada ubicada en Monterrey, Nuevo León, México, la cual ofrece periodos académicos semestrales. En promedio hay 8 grupos por periodo y 40 alumnos por grupo. La mayoría de los estudiantes pertenecen a un nivel socioeconómico medio-alto. Los profesores al menos cuentan con maestría y tienen más de 20 semestres de experiencia docente. La estrategia didáctica consiste en que las temáticas se aborden promoviendo la participación activa de los estudiantes mediante la técnica de la pregunta y el aprendizaje colaborativo a través de la incorporación de actividades que motiven al estudiante no sólo a resolver problemas sino a reflexionar acerca del trabajo realizado y a interpretar los resultados obtenidos. Cada unidad temática contiene situaciones relacionadas a su área de estudios o entorno y se utilizan para construir o descubrir un concepto, ver figura 1.

CONSTRUCCIÓN La siguiente tabla de datos representa una población de conejos P, como una función del tiempo t.

Analiza los datos para encontrar un patrón de comportamiento para esta función; para ello, reflexiona y contesta en las líneas lo que se pide.

t (meses)	0	1	2	3	4	5
P (número de conejos)	3	6	12	24	48	

¿La tabla dada corresponde a un modelo lineal?

_____

¿Por qué?_____

_____

¿Cómo crece la población de conejos?_____

¿Qué población de conejos esperas que haya para el quinto mes? _____

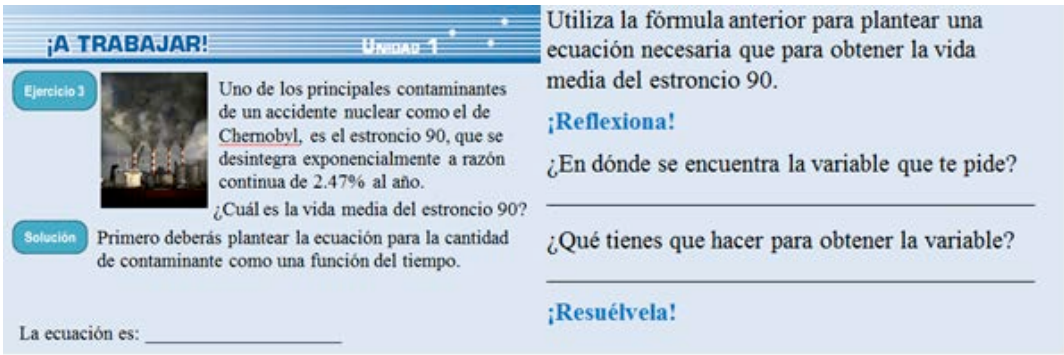
¿Qué hiciste para obtener la cantidad anterior?

_____

Figura 1. Ejemplo parcial de una actividad que involucra el aprendizaje activo basado en la técnica de la pregunta (Galván et al, 2011, p. 69)

El profesor es un facilitador del aprendizaje que promueve en el alumno la reflexión, análisis, modelación, toma de decisiones, búsqueda de información, la responsabilidad individual, uso de la tecnología, socialización del aprendizaje, entre otras, mediante las actividades previamente planificadas que pueden trabajarse en forma de plenaria o en grupos colaborativos. En la figura 1 se aprecia parcialmente una de las actividades didácticas basadas en la técnica de la pregunta, dicha actividad, continúa hasta la construcción del modelo matemático y de la gráfica de la función usando tecnología lo que permite que el estudiante enfoque su atención en relacionar lo numérico, lo algebraico y lo gráfico, aspecto importante en el aprendizaje de las Matemáticas (Duval, 2000), en un entorno de aprendizaje activo.

Una vez realizada la construcción de los conceptos, los alumnos trabajan colaborativamente en situaciones didácticas con la misma metodología antes descrita. Ver figura 2.


¡A TRABAJAR!

Ejercicio 3

Uno de los principales contaminantes de un accidente nuclear como el de Chernobyl, es el estroncio 90, que se desintegra exponencialmente a razón continua de 2.47% al año.

¿Cuál es la vida media del estroncio 90?

Solución

Primero deberás plantear la ecuación para la cantidad de contaminante como una función del tiempo.

La ecuación es: _____

Utiliza la fórmula anterior para plantear una ecuación necesaria que para obtener la vida media del estroncio 90.

¡Reflexiona!

¿En dónde se encuentra la variable que te pide?

_____

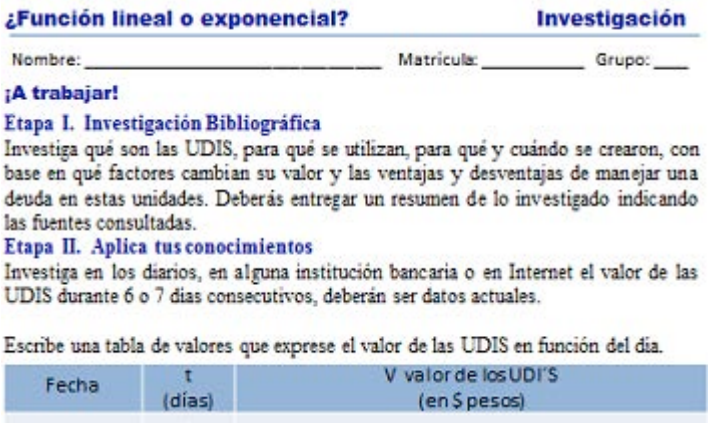
¿Qué tienes que hacer para obtener la variable?

_____

¡Resuélvela!

Figura 2. Ejemplo de una situación didáctica que se trabaja una vez que se construyeron los contenidos. (Galván et al, 2011, p. 100)

Fuera del aula, además de las tareas correspondientes, se han diseñado actividades para recuperar conocimientos previos y otras de investigación, ya sea para la construcción de un nuevo tema en o bien, para desarrollar actividades en el aula, ver figura 3.


¿Función lineal o exponencial? Investigación

Nombre: _____ Matrícula: _____ Grupo: ___

¡A trabajar!

Etapa I. Investigación Bibliográfica

Investiga qué son las UDIS, para qué se utilizan, para qué y cuándo se crearon, con base en qué factores cambian su valor y las ventajas y desventajas de manejar una deuda en estas unidades. Deberás entregar un resumen de lo investigado indicando las fuentes consultadas.

Etapa II. Aplica tus conocimientos

Investiga en los diarios, en alguna institución bancaria o en Internet el valor de las UDIS durante 6 o 7 días consecutivos, deberán ser datos actuales.

Escribe una tabla de valores que exprese el valor de las UDIS en función del día.

Fecha	t (días)	V valor de los UDI'S (en $ pesos)

Figura 3. Ejemplo parcial de una actividad de investigación fuera del aula. (Galván et al, 2011, p. 345)

La estrategia Aprendizaje Activo basado en la Técnica de la Pregunta, como ya se mencionó, se ha utilizado desde el 2005 a la fecha, con resultados favorables, ya que el promedio de calificaciones (73.42) de los años 1995 a 2001, periodo en el que no se utilizaba la estrategia, es menor que el promedio de calificaciones (79.11) de los años 2005 a 2011; además los porcentajes de reprobados son menores ahora que se utiliza la estrategia (17.64%) que cuando no se utilizaba (30.81%).

Con el propósito de determinar si la incorporación de la mencionada estrategia produce algún efecto sobre el rendimiento académico de los estudiantes de forma significativa, se realizó un estudio en el que se analizaron los promedios semestrales y los porcentajes de reprobados de la materia Matemáticas I (Cálculo Diferencial), en los periodos académicos enero-mayo, verano y agosto-diciembre de los años 1996 a 2002 y 2005 a 2011. Los periodos académicos comprendidos entre los años 2004 y 2005 se excluyeron del estudio debido a que en ese tiempo, solamente algunos profesores trabajaban la estrategia y no había forma de identificar los grupos. Se utilizaron un total de 21 datos para el antes (1996 a 2002) y 21 datos para el después (2005 a 2011).

Para el análisis estadístico se utilizó el software estadístico MINITAB. Se verificó si los datos correspondían a una distribución normal. De acuerdo a la cantidad de datos en la muestra (n= 21), se aplicó la prueba de bondad de ajuste Kolmogorov-Smirnov con un nivel de significancia de 5%, concluyendo que los datos si se ajustan a una distribución normal.

Tabla 1.Comparativo de promedio de calificaciones con y sin estrategia. (Datos recabados por los investigadores)

	Kolmogorov-Smirnov Prueba de Normalidad	
	Sin estrategia	Con estrategia
Promedio de calificaciones	D+ : 0.187, D– : 0.144, D : 0.187, P-Value 0.054	D+ : 0.107, D– : 0.136, D : 0.136, P-Value > 0.15
% de reprobados	D+ : 0.119, D– : 0.147, D : 0.147, P-Value > 0.15	D+ : 0.128, D– : 0.112, D : 0.128, P-Value > 0.15

Posteriormente se realizó un análisis de varianzas, se utilizó la prueba F con nivel de significancia del 5%, tanto para los promedios de calificaciones como para los porcentajes de reprobación concluyendo que las varianzas en ambos grupos son iguales. Ver tabla 2.

Tabla 2. Resultados de la prueba F y Levene (Datos recabados por los investigadores)

	Prueba F	Prueba de Levene
Promedio de calificaciones	Test Statistic: 0.790 P-Value : 0.603	Test Statistic: 0.018 P-Value : 0.893

% de reprobados	Test Statistic: 2.301 P-Value : 0.069	Test Statistic: 1.641 P-Value : 0.208

Una vez confirmado que las muestras de promedios de calificaciones se ajustan a una distribución normal con varianzas desconocidas pero iguales se procedió a probar la diferencia de medias utilizando una prueba t-student con α= 5%, cuyos resultados permiten concluir que la diferencia en las medias de calificaciones es estadísticamente significativa. Ver tabla 3.

Tabla 3. Resultados de la prueba T (Datos recabados por los investigadores)

	Prueba T
Promedio de calificaciones	T-Test of difference = 0 (vs not =): T-Value = -4.98 P-Value = 0.000 DF = 39

Por último se realizó una prueba para comparar las proporciones de los porcentajes de alumnos reprobados en los grupos que no llevaron la estrategia p(1) y los que sí la llevaron p(2); se utilizó una prueba Z para dos proporciones con α= 5%, obteniéndose que la diferencia de los porcentajes de reprobados en ambos grupos es estadísticamente significativa. Además se realizó una prueba Z unilateral con la que se confirmó que el porcentaje de alumnos reprobados en los grupos que no llevaron la estrategia es mayor que el porcentaje de alumnos reprobados en los grupos que sí la llevaron.

Tabla 4. Prueba Z para dos proporciones (Datos recabados por los investigadores)

	Prueba Z para dos proporciones
% de reprobados	Test for p(1) - p(2) = 0 (vs not = 0): Z = 23.30 P-Value = 0.000 Test for p(1) - p(2) = 0 (vs > 0): Z = 23.30 P-Value = 0.000

Conclusiones

La incorporación de la estrategia *Aprendizaje Activo basado en la Técnica de la Pregunta* en los cursos de Cálculo Diferencial (Matemáticas I), especialmente en el área de negocios y ciencias sociales, ayuda a mejorar el promedio de calificaciones y a reducir el porcentaje de reprobados en forma estadísticamente significativa. En cuanto al proceso de aprendizaje, se ha observado a lo largo de este tiempo, que el alumno tiene una presencia activa durante las clases en cuanto al hacer y al pensar a través de la construcción de su aprendizaje y a partir de situaciones relacionadas a su área de especialidad, lo que favorece a que su aprendizaje sea significativo, (Ausubel, 1981). Cabe mencionar que al incluir esta estrategia para trabajar los contenidos del curso de Cálculo Diferencial, se ha mantenido tanto el nivel de exigencia, como la calidad académica, además la evaluación final continúa siendo departamental, lo que ha cambiado es la

forma en que se abordan los contenidos ya que se enfatiza no sólo en el qué, sino en el cómo, por qué y para qué de lo que se aprende, por lo que se recomienda utilizar la estrategia Aprendizaje Activo basado en la Técnica de la Pregunta en otros cursos, no solamente en los cursos de ciencias básicas.

Referencias bibliográficas

Ausubel, P. (1981). *Psicología Educativa.* Distrito Federal, México: Trillas.

Artigue, M., Douday, R., Moreno, I. & Gómez, P.(1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática.* Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamericano.

Bonwell, Ch. & Eison, J. (1991). *Active learning: Creating excitement in the classroom.* ERIC Document Reproduction Service No. ED340272.

De Guzmán. (2007). Enseñanza de las ciencias y Matemática. *Revista Iberoamericana de Educación*, (43), 19-58.

Duval, R. (2000). *Basic issues for research in Mathematics education*. ERIC Document Reproduction Service: No. ED466737.

Ertmer, P., & Newby, T. (1993). Behaviorism, cognitivism, constructivism:

Comparing critical features from an instructional design perspective. *Performance Improvement Quarterly, 6* (4): 50-72.

Galvan, D., Cienfuegos, D., Romero, J., Fabela, M., Rincón, E., Elizondo, I. & Rodriguez, A. (2011). *Cálculo Diferencial, un enfoque constructivista*. Distrito Federal, México: Cengage Learning.

Gatica, N., Carranza, M., May, G. & Cosci, A. (2002) El concepto de función en los libros de texto universitarios. En C. Crespo Crespo (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 15 (1), 132-137. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Hernández G. (2002). *Paradigmas en psicología de la educación*. Distrito Federal, México: Paidós.

Huber, G.L. (2008). Aprendizaje activo y metodologías educativas. *Revista de Educación,* (*Número extraordinario*), 59-81.

Margalef, L. & Pareja, N. (2008). Un camino sin retorno: estrategias metodológicas de aprendizaje activo. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 22(3), 47-62.

Mayer, R. (2004). Should there be a three-strikes rule againts pure discovery learning? *American Psychologist*, (59), 14-19.

Piaget, J. (1986). *Psicología y Pedagogía.* Distrito Federal, México: Ariel.

Lozano, A. (2005). *El éxito en la enseñanza, aspectos didácticos de las facetas del profesor*. Distrito Federal, México: Trillas.

Torres, J. (2006). *La desmotivación del profesorado*. Madrid, España: Morata.

Veliz, M. & Isaya, I. (2002). La autorregulación: un recurso metacognitivo en el aprendizaje del cálculo. En C. Crespo Crespo (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 15 (2), 675-680. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA Y SUS REFERENCIAS SEMIÓTICAS

María Rosa Rodríguez y Jesús Alberto Zeballos
Universidad Nacional de Tucumán Argentina
mrrodriguez@face.unt.edu.ar , jesuszeballos@tucbbs.com.ar

Resumen. Las ciencias fácticas tienen contenido existencial que se corresponde con la realidad. En cambio, las ciencias formales, desde el siglo XIX, sostienen una dimensión sintáctico-formalista, sin contenidos semántico y pragmático. Por lo cual la simbología matemática se presenta como vacía, o sea que no habla de nada. Esto daría derecho al alumno a cuestionar "Y... aprender este lenguaje que no habla de nada, ¿de qué me sirve?" El profesor se verá obligado a demostrar que este lenguaje es fecundo, que puede hablar de todo y que se constituye en la estructura del lenguaje científico porque, precisamente, no habla de nada específico.
En este trabajo reflexionamos acerca de las relaciones semánticas y pragmáticas que encierra la Matemática pura y que nos conduce a consideraciones de la Ontología matemática, correlacionando genéticamente el pensamiento concreto y el abstracto.
Palabras clave: Existencia, Semiótica, Cuantificadores
Abstract. Factual sciences have existential content which corresponds to reality. On the other hand, the formal sciences, since the 19th century, argue a sintactico-formalista dimension, without semantic and pragmatic content. So the mathematical symbolism presents how empty, or does not speak of anything. This entitles the student to question "And… learn this language that does not speak at all, what do I use?" The teacher will be forced to show that this language is fruitful, that we can talk about everything and that it constitutes the structure of scientific language because, precisely, do not speak of anything specific.
In this paper we reflect on the semantic and pragmatic relations contained in pure mathematics and that leads to considerations of mathematical ontology, genetically correlating the abstract and concrete thought
Key words: Existence, Semiotics, Quantifiers

Introducción

En el desarrollo cognoscitivo aparece un nivel imprescindible a la supervivencia humana: la abstracción y la generalización. En atención a ello, las leyes científicas y las nociones generalizadas tienen contenidos que se corresponden con la realidad. ¿Puede afirmarse lo mismo de la Matemática, cuya validez se fundamenta más en su naturaleza formal y en la incorporación a un sistema de ideas, enunciados, principios e hipótesis, que en su correlación con fenómenos reales?

En el nacimiento de las ciencias formales no se daba el problema de la existencia de los entes matemáticos. Para Platón existían en el mundo de las ideas, mientras que para Aristóteles, eran simultáneamente leyes del ser, del actuar y del pensar.

Durante el siglo XIX los matemáticos se liberan de la relación semántica con una realidad extramatemática. Para George Boole (1854) eran "leyes del pensamiento, en las que se funda la teoría matemática de la lógica y la probabilidad".

En el siglo XX, continúa esta orientación sintáctico-formalista, privando al lenguaje lógico-matemático de toda dimensión semántica o pragmática. Para el Positivismo Lógico la Matemática no tiene relación con el pensamiento sino con el lenguaje; y de él sólo atiende su dimensión formal-sintáctica y la considera como una convención lingüística universalmente aceptada.

Bertrand Russell (1919), escribe: "Lo más importante del siglo pasado es el descubrimiento de la Matemática pura" y afirma que "... es una ciencia en la que no sabemos de qué hablamos, ni si lo que decimos es verdad". Luego, uniendo la Lógica y la Matemática, la define como "La clase de todas las proposiciones que contienen una o más variables, 'p', 'q'… combinadas por medio de constantes lógicas, que sólo representan operaciones entre símbolos. En esta concepción, la simbología matemática es vacía, no habla de nada.

Desde este punto de vista, sería un interesante desafío para el alumno que el profesor proponga en la clase inaugural de Matemática: "Ahora vamos a aprender a utilizar un lenguaje especial, el lenguaje matemático, que, en realidad, no habla de nada".

Si el aprendizaje de la Matemática enseña a pensar, vale el desafío. Si es sólo un conjunto de reglas mecánicas de transformación, este problema es pura excrecencia filosófica y el alumno tendrá derecho a pensar: "Y... aprender este lenguaje que no habla de nada, ¿de qué me sirve?"

Es derecho del alumno y obligación del profesor demostrar que este lenguaje es fecundo y puede hablar de todo, constituyéndose así en la estructura de todo lenguaje científico porque, precisamente, no habla de nada.

En este trabajo reflexionamos acerca de las relaciones semióticas que encierra la Matemática pura. Dichas consideraciones son:

a) Sintácticas: Relación de símbolos y fórmulas entre sí. Reglas de formación y de transformación. Deducción de teoremas a partir de axiomas.

b) Semánticas: Relación entre símbolos y objetos. ¿Los objetos matemáticos son reales o ideales? ¿Qué tipo de existencia se atribuye cuando se dice: A todo número real le corresponde un punto en la recta real o Todas las cónicas son curvas en el plano?

c) Pragmáticas: Relación entre símbolos y sus intérpretes. ¿Son operaciones que se corresponden con funciones propias de los sujetos humanos? ¿Representan conexiones neurológicas-cognitivas o expresiones lingüísticas?

Como se puede apreciar, la existencia de los entes matemáticos es un problema que excede los límites lógico – matemáticos para introducirse en el ámbito de la Semiótica y, a través de ella, en la Ontología Matemática. ¿Cómo existen los objetos lógico-matemáticos? ¿Son meramente conceptos originados en la mente? ¿Cómo se relacionan con la realidad extramatemática? La "prueba de existencia" en Matemática, cuando establece la "Condición de existencia de la inversa de una matriz" o la "Condición de existencia de la integral definida" ¿Es ontológicamente válida?, ¿Cómo se caracterizan estas condiciones?

Génesis de las Operaciones Lógico-matemáticas

La Epistemología genética da una respuesta razonable a estas cuestiones, cuando establece que las operaciones lógico-matemáticas proceden de las acciones más generales que ejercemos sobre objetos o grupos de objetos: reunir, disociar, ordenar, modificar el orden,.... Es decir, se originan en la Semántica y en la Pragmática. Por un lado, estas acciones comportan un aspecto físico en función de los objetos mismos; y por otro, intervienen coordinaciones generales (subjetivas) de esos actos.

La raíz de las operaciones lógico-matemáticas y su posible aplicación al mundo físico-real se encuentra en esta actividad, coordinadora de las acciones físicas mismas, lo que denominamos "el pensamiento concreto". En las fases ulteriores, se observa una diferenciación creciente entre las operaciones físicas y las operaciones lógico-matemáticas, dando nacimiento al "pensamiento abstracto". Finalmente, las construcciones axiomáticas son elaboradas de un modo absolutamente independiente de la realidad física.

De este modo, es posible que los sistemas axiomáticos, puramente sintácticos, adquieran dimensiones semánticas y pragmáticas y puedan modelar el conocimiento de todas las ciencias empíricas, dándonos un conocimiento verdadero del mundo real, con el que en principio no tenían nada que ver.

Ya Carl Gauss (1801) caracterizó la Matemática como el trabajo del espíritu humano, destinado tanto a estudiar como a conocer, tanto a buscar la verdad como a encontrarla, reivindicando así el lema galileano (Galilei, 1610): "El universo está escrito en lengua matemática y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es totalmente imposible entender humanamente una palabra y nos agitamos vanamente en un oscuro laberinto". Idea ilustrada por Isaac Newton (1678) y Gotfried Leibniz (1675) en el cálculo infinitesimal. Newton crea el cálculo infinitesimal para explicar la mecánica universal y las relaciones de fuerza en el universo; mientras que Leibniz se centraba en el problema teológico de la compatibilidad de la omnisciencia de Dios con su libertad ¿Cómo un cálculo matemático modela realidades tan distintas?

Del mismo modo, Newton encontró un marco teórico para su *Philosophia Naturalis Principia Mathematica* en la Geometría euclideana. En tanto que, Albert Einstein recurre a las Geometrías no euclideanas, consideradas por sus mismos autores como juegos imaginarios inaplicables al espacio físico real, para la construcción de la teoría de la relatividad.

Perspectiva Lógica de la Existencia Real

El término "real" deriva del término latino 'res - i' que significa cosa, objeto. 'Objectum', a su vez, significa 'arrojado fuera' del sujeto ¿Un número y todos los objetos matemáticos existen realmente o son meros conceptos?

Para la Lógica tradicional aristotélico-tomista, la existencia no constituía un problema. Se suponía que la verdad y la validez implicaban la existencia de los objetos-sujetos de los cuales se hablaba en las proposiciones.

En este sentido, tienen contenido existencial las cuatro formas típicas de las proposiciones: Universal afirmativa (A: Todos los S son P), Universal negativa (E: Ningún S es P), Particular afirmativa (I: Algunos S son P) y Particular negativa (O: Algún S no es P).

Sus relaciones lógicas son las siguientes:

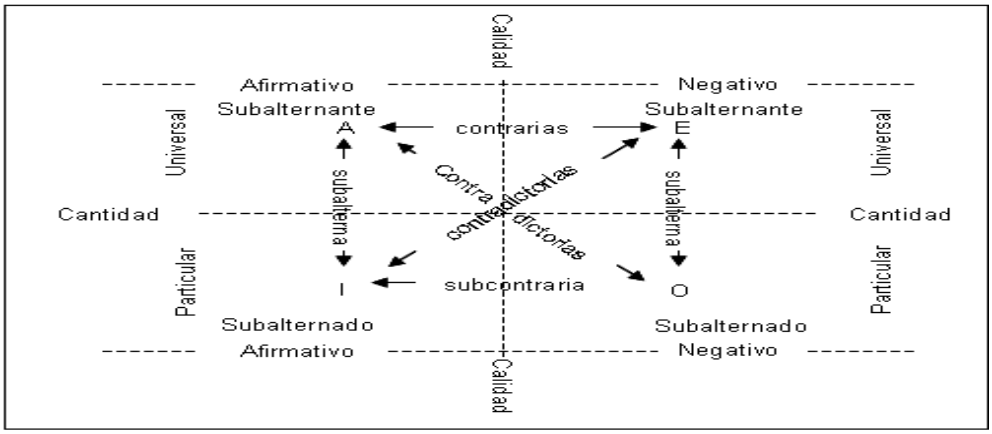
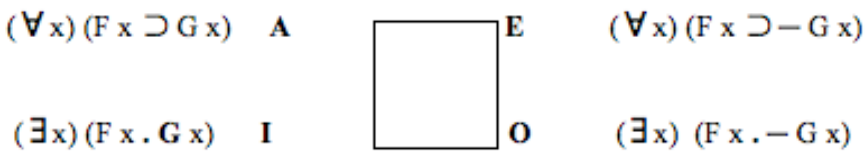


Figura N° 1: Cuadrado Tradicional de Oposición

Este cuadro tuvo vigencia indiscutible hasta el nacimiento de la Lógica Matemática, con George Boole, Gottlob Frege, Bertrand Russell, David Hilbert, …

En la actual simbolización, las cuatro formas típicas del cuadro de oposición adquieren las siguientes expresiones:



Inferencias Silogísticas

Sobre la base de las inferencias inmediatas del cuadrado de oposición se construyó la Teoría del Silogismo, como un sistema axiomático deductivo.

Con la aparición de la Lógica matemática, cambiaron las reglas de inferencia.

La Lógica cuantificacional, con la distinción entre operadores universales y existenciales, y la Lógica de clases, con sus conceptos de conjunto nulo y universo vacío, evidenciaron la invalidez de cuatro modos silogísticos: *Darapti, Felapton, Bamalip, y Fesapo,* válidos en base al cuadro tradicional de oposición.

DARAPTI - 3ª Figura	FELAPTON - 3ª Figura	BAMALIP - 4ª Figura	FESAPO - 4ª. Figura
$(\forall x)\ (M x \supset P x)$	$(\forall x)\ (M x \supset - P x)$	$(\forall x)\ (P x \supset M x)$	$(\forall x)\ (P x \supset - M x)$
$(\forall x)\ (M x \supset S x)$	$(\forall x)\ (M x \supset S x)$	$(\forall x)\ (M x \supset S x)$	$(\forall x)\ (M x \supset S x)$
$(\exists x)\ (S x . P x)$	$(\exists x)\ (S x . - P x)$	$(\exists x)\ (S x . P x)$	$(\exists x)\ (S x . - P x)$

Obsérvese que en estos silogismos ambas premisas son proposiciones universales; en tanto que la conclusión es una proposición particular. La razón por la que se impugna su validez estriba en el hecho de que las premisas no tienen contenido existencial, esto es, no afirman la existencia de los sujetos, mientras que la conclusión sí lo asegura. En los silogismos nombrados se agrega nada menos que la existencia de los individuos.

El Contenido Existencial en la Lógica-Matemática

La explicación está dada en el hecho de que las proposiciones universales son 'condicionales generalizados'. Cuando expresamos "$(\forall x)\ (F x \supset G x)$" no se afirma que existan **x** que sean F o G, sino que para cualquiera que sea el **x**, si es F entonces es G.

Los enunciados "Todos los determinantes tienen como resultado un número real" y "Todas las cónicas son curvas en el plano" tienen idéntica estructura lógica y en consecuencia, tienen las mismas características hipotéticas: no afirman la existencia de los determinantes ni de las cónicas, sino que, si existieran, los primeros tendrían como resultado un número real y las segundas serían curvas en el plano.

Los matemáticos aseguran que los determinantes y las cónicas existen en el mundo ideal y son igualmente representables por una cierta simbología.

Los enunciados particulares o existenciales son, en cambio, categóricos y afirman la existencia de por lo menos uno de los sujetos a los que se refiere.

Por ejemplo: el enunciado "Algunas funciones son integrables" expresa que para algunas funciones existe la integral definida.

Equivalencias de Operadores

Por los teoremas de *Conversión de Operadores* se puede transformar una proposición universal en la negación de su particular relativa, que niega el segundo predicado, y viceversa. Así, una proposición de tipo **A** es equivalente a la negación de su contradictoria **O** y viceversa.

Ejemplos: "Todas las series convergentes tienen suma" es equivalente a "No existe serie convergente que no tenga suma".

En símbolos: $(\forall x)\ (F x \supset G x) \equiv -(\exists x)\ (F x \,.\, -G x)$

De la misma manera se transforman las proposiciones **E** en **I** negada, **I** en **E** negada y **O** en **A** negada. Los siguientes teoremas expresan estas relaciones:

"$(\forall x)\ (F x \supset G x) \equiv -(\exists x)\ (F x \,.\, -G x)$" (A = -O)

"$(\forall x)\ (F x \supset -G x) \equiv -(\exists x)\ (F x \,.\, G x)$" (E = -I)

"$(\exists x)\ (F x \,.\, G x) \equiv -(\forall x)\ (F x \supset -G x)$" (I = -E)

"$(\exists x)\ (F x \,.\, -G x) \equiv -(\forall x)\ (F x \supset G x)$" (O = -A)

La naturaleza de estas cuatro formas de proposiciones entraña curiosas consecuencias en relación a las inferencias de *contrariedad, subcontrariedad y subalternación*, puesto que algunas de ellas pasan de proposiciones sin contenido existencial a otras que afirman la no existencia.

Se sabe que hay universos del discurso con miembros y otros sin ellos, nulos o vacíos.

La Lógica matemática advierte que la **validez** de estas inferencias depende:

- De la estructura lógica de las proposiciones (condicional en las universales, categórica en las particulares),
- Del universo del discurso (con miembros o vacío) y
- Del contenido existencial de los enunciados.

Las proposiciones universales no afirman categóricamente la existencia de los individuos, pero, pueden negarla. Las proposiciones particulares afirman o niegan categóricamente la existencia de sus sujetos.

En consecuencia, la única inferencia incontrovertible del cuadro de oposición (válida para todo universo del discurso) es la derivada de la relación de contradicción: dos proposiciones contradictorias no pueden ser ambas verdaderas ni ambas falsas al mismo tiempo y en la misma relación.

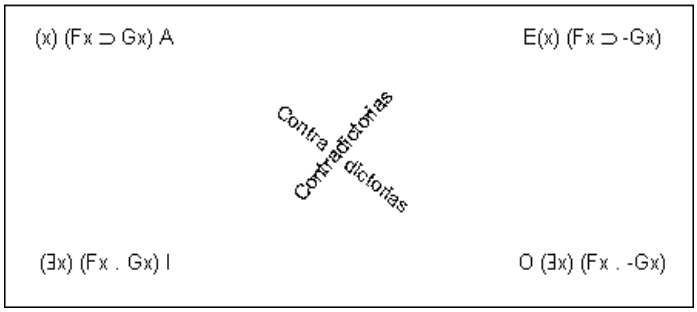


Figura N° 2: Cuadrado de Oposición de Boole

Esta conclusión, la única lógicamente válida, puede referirse a cualquier universo del discurso: nulo (o vacío) o que contenga algún elemento existente.

Acerca de la Existencia Real

En los párrafos precedentes hemos utilizado frecuentemente términos como 'contenido existencial', 'que afirma (o niega) existencia', 'operador existencial' y otros similares, que giran en torno al concepto común de existencia, para diferenciar lo que existe realmente de aquello que no existe o, si se prefiere, para poder distinguir la realidad de la fantasía.

Suponemos que existe un mundo exterior a la conciencia, estratificado en diversos niveles e independiente de ella. Los hombres conocen ese mundo y, por ello, sobreviven en él.

Las ciencias fácticas hablan de una realidad o irrealidad de la representación conceptual del mundo extramental. Tanto los fenómenos emocionales como los conceptuales tienen una realidad que es independiente de la existencia física que pudieran representar. Es necesario distinguir entre el mundo físico y la representación que nos hacemos de ellos.

En el nivel de abstracción y de generalización se puede comprobar que las leyes científicas y las nociones generalizadas no tienen realidad sólo como entidades lingüísticas, como enunciados nomológicos, sino que se corresponden con la realidad óntica de los fenómenos y sus relaciones legales.

¿Podrá afirmarse lo mismo de los conceptos y teoremas matemáticos? La realidad de estas 'abstracciones' se basa, más que en su naturaleza conceptual, en su formulación lingüística y en la incorporación a un sistema de ideas, enunciados, principios e hipótesis, que conforman un sistema teórico.

Si los sistemas lógicos y matemáticos tienen únicamente dimensión sintáctica entonces el problema de la verdad se reduce a la coherencia interna de sus símbolos y a la consistencia deductiva entre axiomas y teoremas.

Para aplicarse a la realidad habría que agregar las dimensiones semánticas y pragmáticas al lenguaje matemático y un supuesto existencial.

Así se puede aceptar la "prueba de existencia" en Matemática, cuando se establece la "Condición de existencia de la inversa de una matriz" o la "Condición de existencia de la integral definida".

Por lo tanto, hay distintas formas de existencia real, supuestas en los diversos usos del lenguaje. Cuando dos hablantes dialogan, dan por supuesto que aquello de lo que hablan existe en un determinado universo del discurso, tal como las reglas de ese universo lo predeterminan.

Conclusiones

La existencia del mundo y de los objetos reales constituye un *supuesto ontológico indemostrable* de la ciencia.

Ya aseveramos que el lenguaje matemático "es fecundo y puede hablar de todo" ¿a qué se debe esa fecundidad? La respuesta platónico-aristotélica es ingenua porque no se plantea el problema de la existencia y la del positivismo lógico es estéril porque se reduce a meras relaciones sintácticas entre las fórmulas, que no hablan de nada. En cuanto a la propuesta de Boole, ¿Cómo es que las leyes del pensamiento pueden aplicarse a la realidad?

En el pensamiento abstracto, las operaciones matemáticas comienzan a desbordar todos los aspectos de la realidad experimental y se constituyen como sistemas axiomáticos formales, puramente sintácticos. No tienen contenido, es decir, no hacen referencia a ningún tipo de objeto u operación extralingüística. Al carecer de dimensión semántica, el problema de la verdad se reduce a la coherencia interna de sus símbolos y a la consistencia deductiva entre axiomas y teoremas, prefijada por definiciones y reglas propias del sistema mismo. De este modo se cumple el ideal hilbertiano de preservar la pureza lógico-deductiva de los sistemas axiomáticos, evitando las interferencias del mundo físico real y las incertidumbres del sujeto que elabora esos sistemas.

Sin embargo, ¿cómo es posible que estos sistemas formales, puramente sintácticos, puedan modelar el conocimiento de todas las ciencias empíricas y darnos un conocimiento verdadero del mundo real, con el que en principio no tienen nada que ver? La Epistemología genética muestra el proceso por el cual el pensamiento llega al máximo nivel de abstracción. El recorrido inverso conecta esa abstracción con el pensamiento concreto, por el cual adquiere dimensiones semánticas y pragmáticas. Las ciencias fácticas recurren al mismo método para corroborar sus hipótesis y conectar las leyes generales con las condiciones iniciales.

Esto muestra la historia de la Matemática, ya que desde Pitágoras hasta nuestros días, pasando por Galilei, Leibniz, Newton, Galois, Einstein, … pusieron en vigencia lo que afirmaba Carl Gauss:

"La Matemática es el trabajo del espíritu humano, destinado tanto a estudiar como conocer, tanto a buscar la verdad como a encontrarla".

Referencias Bibliográficas

Boole, G. (1854). *An Investigation of the Laws of Thought, on which are Founded the Mathematical Theory of Logic and Probabilities*. London: Wyton & Maberley.

Gauss, C. (1966). *Disquisitiones Arithmeticae*. New Heaven: Yale Univ. Press.

Galilei, G. (1981). *Consideraciones y Demostraciones Matemáticas sobre dos Nuevas Ciencias*. Madrid: Editora Nacional.

Klimovsky, G. y Boido, G. (2005). *Las Desventuras del Conocimiento Matemático.* Bs. Aires: A-Z.

Leibniz, G. (1850). *Leibnizens Mathematische Schriften*. London-Berlin: Halle.

Newton, I. (1934). *Mathematical Principles of Natural Philosophy*. Berkeley: University of California Press.

Piaget J. (1975) *Introducción a la Epistemología Genética*. Tomo I. Buenos Aires. Paidós.

Quine, W. (1962). *Los Métodos de la Lógica*. Barcelona: Ariel.

Russell, B. (1919). *Introduction to Mathematical Philosophy*. London: Allen & Unwin.

Zeballos, J. A. (2003). *Lógica.* Tucumán: El Graduado.

Zeballos, J. A. (2006). *Ensayos Económico-Filosóficos.* Tucumán: Instituto de Epistemología. UNT.

¿PARA QUÉ ENSEÑAMOS ESTADÍSTICA?

Christiane Cynthia Ponteville
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González" Argentina
Universidad de Buenos Aires
chponteville@gmail.com

Resumen. La estadística se ha convertido en un instrumento fundamental del análisis de datos en las diferentes áreas de conocimiento. Bajo la necesidad de transmitir una herramienta que se relacione con los resultados obtenidos, su enseñanza debe tener en cuenta el marco en el cual se validan los resultados. Proponemos un análisis de los diferentes aspectos involucrados en este proceso. Se espera realizar una descripción de los correspondientes marcos de referencia en los cuales se tiene en cuenta tanto la naturaleza epistemológica de los contenidos, los planos cognitivo y didáctico, todos ellos enmarcados en aspectos socioculturales.
Palabras clave: alfabetización estadística, pruebas de hipótesis, libros de texto
Abstract. Statistics is being a fundamental instrument for data analysis in different knowledge areas. Statistics teaching should take into account the tools needed for data relations and the frame in which results are validated. Our proposal is an analysis of the different topics involved in the proceeding. Is expected to make a description of the corresponding frames of reference which takes into account both the epistemological nature of the content, cognitive and educational levels, all framed in sociocultural aspects.
Key words: statistics alphabetization, hypothesis test, text book

Introducción

La estadística en nuestra sociedad

La estadística posee un papel primordial en el desarrollo de la sociedad actual proporcionando herramientas que permiten describir situaciones de incertidumbre en análisis científicos, sociales y económicos actuales. Analizar la variabilidad, determinar relaciones entre variables, diseñar estudios y experimentos y mejorar las predicciones son algunos de los aspectos que la estadística tiene en cuenta. La adquisición de ideas estadísticas es, por lo tanto, un asunto de gran importancia para la sociedad contemporánea. La importancia cada vez mayor de la tecnología, de la ciencia y de los medios de comunicación en las sociedades modernas ha favorecido a su desarrollo en forma vertiginosa.

La estadística tiene sus orígenes en la administración pública, brindando un servicio al estado o al gobierno. Ha sido utilizada y aplicada en una amplísima variedad de áreas: salud pública a través de la epidemiología y la bioestadística, entre otras; análisis económicos y sociales, como la tasa de desempleo y la econometría. Todas estas áreas necesitaron de un desarrollo cualitativo significativo de la estadística. De esta forma, la estadística se encuentra en pleno desarrollo respondiendo a dos vertientes: su utilidad para el resto de las ciencias y su propio progreso y crecimiento teórico, jugando la informática un papel fundamental en su desarrollo.

Como reflejo de este situación, en el caso de las instituciones educativas de nivel superior muchas tienen departamentos académicos de matemática y estadística en forma paralela y la estadística se enseña en departamentos tan variados como los de medicina social, psicología, relaciones del trabajo, entre otros.

Teniendo en cuenta su naturaleza, la estadística puede ser considerada no como una rama de la matemática, sino como una área de conocimiento en estrecha vinculación con ella que toma un status parecido al que tienen, por ejemplo, las nuevas ciencias relacionadas con la informática. Según sus enfoques, se ha superpuesto con, por ejemplo, la teoría de la decisión poniendo el énfasis en la posibilidad de hacer predicciones cada vez más acertadas y con las ciencias de la información en el procesamiento de datos.

Es transversal a una extensa variedad de disciplinas, desde el control de calidad hasta las ciencias sociales, desde las ciencias de la salud hasta la física. Podemos decir que el método estadístico es la matemática social por antonomasia. (Bell, 1995).

Es así como, la estadística, durante el siglo XX, ha sido considerada parte de la base del método científico y una estrategia metodológica fundamental. "Además de su carácter instrumental para otras disciplinas, se reconoce el valor del desarrollo del razonamiento estadístico en una sociedad caracterizada por la disponibilidad de información y la necesidad de la toma de decisiones en ambientes de incertidumbre" (Batanero, 2002). Dado este carácter multifacético, pueden encontrarse una variedad de definiciones y caracterizaciones para la estadística pero nos contentaremos con decir que la estadística es la ciencia que estudia cuantitativamente los fenómenos aleatorios. Los métodos estadísticos y las conclusiones que provienen de ellos se deben usar en todas las etapas de una investigación.

Enseñanza de la estadística

A lo largo del tiempo, las sociedades se han organizado para incorporar a la matemática y la ciencia en general en el mundo del conocimiento dando a la enseñanza de la matemática un papel central en la formación integral del ciudadano. Este cambio social, definido como de culturalización científica, ha favorecido el desarrollo de estructuras de enseñanza con base en diseños que se incorporan a las prácticas tanto de educación formal como de educación informal. Respecto de los temas vinculados a la estadística, su desarrollo y difusión son una demanda cada vez más urgente de nuestras sociedades modernas. Este proceso social de culturalización estadística ha generado la necesidad de incorporar a los diferentes niveles de la educación conceptos y prácticas relacionados con las probabilidades y la estadística.

Unido fuertemente a los contactos globales en los niveles social, económico y político, es preciso que un ciudadano pueda interpretar matices muy variados de temas de referencia muy amplios. Para ellos podemos identificar tres niveles caracterizados por una continua retroalimentación:

- comprensión de los términos básicos de las probabilidades y la estadística
- comprensión del lenguaje de las probabilidades y estadística insertos en un medio social más general
- actitud crítica frente a situaciones en las que intervengan estos conceptos

De esta manera se le imprime al perfil antes desarrollado una variable dinámica de tiempo para evitar caer en caracterizaciones estáticas (Serradó Bayés, 2013).

Ya, la importancia de la formación estadística de los estudiantes en todos los niveles educativos no parece ser en este momento un tema de discusión pues los conceptos relacionados con las probabilidades y la estadística aparecen, en mayor o menor grado según las orientaciones, en todos los niveles de la educación. Lo que genera permanente debate entre los docentes responsables son los resultados desalentadores en el aprendizaje de sus alumnos siendo estos niños, adolescentes, jóvenes o estudiantes de cualquier edad. Esta inquietud genuina de los docentes a largo de los años y de todos los niveles de la instrucción ha provocado que una comunidad cada vez más grande de investigadores trate de encontrar respuesta a la diferencia que existe entre lo que es enseñado y lo que es aprendido existiendo un aumento notable de publicaciones, propuestas de diseños curriculares e investigación relacionados con este tema.

Este interés, unido al rápido desarrollo de la estadística como ciencia y como herramienta fundamental en otras áreas, impulsado significativamente por el desarrollo y la difusión de los métodos computacionales con el crecimiento de su potencia y velocidad de procesamiento de datos así como por las posibilidades de envío de la información, propone un gran desafío. Todo ello ha facilitado el uso de la estadística a un número cada vez mayor de alumnos, provocando, en consecuencia, una gran demanda de formación básica en esta materia, en general, a cargo de los profesores de matemáticas.

Las causas generales del interés por la enseñanza de las probabilidades y la estadística son diversas y de diferentes índoles. La estadística debe ser parte de la educación de los ciudadanos adultos ya que en la actualidad se deben poseer capacidades para leer e interpretar tabla y gráficos presentes con frecuencias en diferentes medios informativos sobre una amplia gama de temas guiados por la comunicación permanente de aspectos sociales, económicos y políticos. Además, las especificidades de la mayoría de las profesiones exigen cada vez más poseer conocimientos básicos ya que la estadística interviene en el estudio de fenómenos complejos, en los cuales es fundamental

reconocer las variables involucradas, obtener información de las mismas, interpretarlas y analizarlas. Este proceso deberá estar acompañado del desarrollo del razonamiento crítico fundamentado en la valoración de evidencia objetiva que permita resolver problemas de decisión y efectuar predicciones. Esto acompaña el desarrollo de otras áreas de conocimiento del curriculum correspondiente, en los diferentes niveles educativos, donde con frecuencia aparecen gráficos, resúmenes o conceptos estadísticos.

Otro punto de interés, es que la visión del curriculum de matemática, que en forma tradicional es determinística, deberá ser modificada por criterios del pensamiento estadístico y probabilístico. Por ejemplo, teniendo en cuenta una gran diversidad de temas a los cuales se puede acceder a través de la probabilidad y la estadística no requiriendo técnicas matemáticas sofisticadas. Finalmente, sus aplicaciones proveen a los estudiantes ejemplos de resolución de problemas reales enfatizando la experimentación y la resolución de problemas. El interés por la enseñanza y comprensión de la estadística no se encuentra solamente en los interesados por temas de educación matemática. Esta motivación se extiende a los propios estadísticos y las investigaciones sobre el razonamiento estocástico han tenido un gran auge en el campo de la psicología (Batanero, 2000).

Uno de los aspectos fundamentales de la enseñanza de la estadística es que los fenómenos aleatorios aparecen fuertemente en la sociedad actual. De esta forma, aunque, tradicionalmente, la mayor parte de las aplicaciones se basaban en los juegos de azar, ya que estos son corrientes y producen, en general, espacios muestrales fácilmente visibles y en gran número finitos, si esperamos que los alumno valoren el rol de la probabilidad y estadística, es fundamental acercarse a problemas del mundo biológico, físico, social y político: las características genéticas, la previsión climática, el resultado de las actos eleccionarios, el crecimiento de la población, la extinción de las especies, el efecto de los hábitos alimenticios o las drogas sobre la salud, la extensión de enfermedades, los resultados deportivos, el índice de precios o el censo de la población son claras evidencias del mundo que los rodea. De esta forma, aparece fuertemente el concepto de modelo dando una oportunidad muy importante para entender y aprender a medir matemáticamente dentro de las probabilidades alejándonos de los criterios clásicos de medición.

Se puede también enfatizar entre estos aspectos favorecer a la resolución de problemas, la formulación de conjeturas en lenguaje matemático, la validación como la demostración y razonamiento de las ideas matemáticas y la institucionalización como un acuerdo social en la construcción de conocimiento. El profesor no será entonces una fuente de conocimiento, sino un encargado de administrar este conocimiento, de facilitar la construcción del mismo y los medios que permitan al alumno progresar en su aprendizaje.

La enseñanza de las pruebas de hipótesis en las aulas

Para ejemplificar algunos de los aspectos antes mencionados vamos a utilizar a la enseñanza de las pruebas de hipótesis como nuestro objeto de estudio. Las pruebas de hipótesis en el nivel superior en la mayoría de los diseños curriculares o planes de estudio se presentan en forma dispar. Mientras que en algunos tiene un lugar central en alguna asignatura como estadística, bioestadística, econometría o estadística aplicada en otros casos se introduce como parte de alguna asignatura del área a la cual pertenece la carrera. Esto hace que las formas de enseñar difieran fuertemente y sea totalmente dependientes de la situación en la cual se imparten.

Podemos establecer dos tipos de tendencias predominantes en su enseñanza: interpretar las pruebas de hipótesis como modelos matemáticos excluidos del contexto sin tener en cuenta observaciones pertinentes al campo que será aplicada o como la simple aplicación de un algoritmo, olvidándose del contexto para saber cómo los números pueden relacionarse con las mediciones y con el modelo matemático. En la primera postura, se observa que hay una ausencia de vinculación entre el tópico de estocásticos y las experiencias intuitivas de los estudiantes dando prioridad a requerimientos puramente matemáticos. En la segunda, no hay aspectos de su surgimiento en el proceso de enseñanza-aprendizaje, reduciéndose al manejo algorítmico de datos y generando la idea que los paquetes estadísticos pueden resolver cualquier problema. Cualquiera de las dos involucra una falla en la generación del concepto pues no tiene en cuenta su verdadera naturaleza teniendo la diversidad de ideas y planteos que dieron cuenta de su génesis en la historia de la ciencia.

En general, en las pruebas de hipótesis no hay aspectos de su surgimiento en el proceso de enseñanza-aprendizaje, reduciéndose al manejo metodológico de reglas y símbolos. Las pruebas de hipótesis deben ser vistas desde una doble perspectiva, teórica y experimental. Un ejemplo de la complejidad de adquisición de este concepto es la confusión que se presenta entre estadístico y parámetro. Esto surge por la dificultad de concebir, por ejemplo, a la media muestral como una variable aleatoria y esto arrastra confusión a la hora de interpretar correctamente el nivel de significación de una prueba. Pues en general, no se profundiza sobre la conexión entre el estudio del modelo probabilístico y el análisis de datos empíricos, por lo que los modelos matemáticos pierden su objetivo si no se relacionan con los datos que se quieren modelar. Dado el impresionante desarrollo de la informática los alumnos llegan a un manejo razonable de estas herramientas y a realizar correctamente cálculos aislados. Sin embargo, cuando se trata de poner en correspondencia diferentes elementos del significado de lo calculado para tomar una decisión se plantean muchas dificultades. Otra de las complejidades que presentan es que el concepto de variable aleatoria queda implícito en el de prueba de hipótesis, siendo este tratado de manera

sobrentendida ya que aquí se evidencia en los alumnos, en general, el pensamiento determinístico sobre el probabilístico generando un obstáculo a su comprensión.

Las pruebas de hipótesis en los libros de texto

Para ejemplificar alguno de los aspectos antes mencionados del discurso matemático escolar miraremos algunos libros de texto en los cuales aparecen las pruebas de hipótesis. Utilizados en formas diversas por los docentes y alumnos, ya sea como libro obligatorio o de consulta, los libros de texto permiten vislumbrar concepciones respecto de la estadística. Aunque no sean directamente utilizados por los alumnos, los maestros y profesores acuden a ellos para organizar sus trabajos a realizar en los diferentes cursos.

La utilización de libros de texto es dispar entre los profesores de nivel superior ya que cada uno se apoyará en libros de texto relacionados con su propia área de formación. Es difícil responder cual será el papel de los libros de texto en el futuro pero ya hay muchas evidencias sobre su transformación a ediciones electrónicas e incluso en formato accesible a la consulta, modificación y sugerencias a través de Internet. Es también posible acceder a datos de todo tipo para que los estudiantes puedan realizar investigaciones sobre temas diversos. Sin embargo, estos formatos en general no difieren mucho en su esencia de las ediciones en papel, modificándose solamente el vehículo de su transmisión favoreciendo su masividad.

Bajo la necesidad de transmitir una herramienta que valide los resultados obtenidos, los libros de texto que involucran temas y ramas del análisis estadístico presentan usualmente el tema de las pruebas de hipótesis como si fuera una teoría única, unificada y sin controversias. Es muy infrecuente que esos textos mencionen, menos aún que discutan teóricamente, que esa teoría que presentan es una combinación entre las ideas de trabajar en forma teórica a priori, y del valor P, a posteriori (Ponteville, 2010). De esta manera la presencia de las hipótesis nula y alternativa y las diferentes interpretaciones que se realizan del valor P permiten entender cuales son los argumentos presentes para su validación como contenido científico. En este análisis, las argumentaciones utilizadas adquieren una importancia trascendental a ser tenida en cuenta ya que el conocimiento se apoyará básicamente en dos modos de comprensión y expresión: uno se realiza de forma directa, y corresponde a la intuición y el otro se lleva a cabo de forma reflexiva. Veamos dos ejemplos que juxtaponen ideas en sus concepciones siendo necesario aclarar que no consideramos que alguno esté equivocado sino que cambia la concepción sobre la cual se construyen los argumentos.

El libro "Probabilidad e inferencia estadística" (Santaló, 1980) corresponde a una serie de monografías realizadas a partir de 1970 con el auspicio de la OEA con el fin de promover temas en

las áreas de física, química, biología y matemática. Se destinaron a profesores y alumnos de ciencias de enseñanza secundaria y de los primeros años de la universidad. El libro se encuentra organizado recorriendo la definición clásica de probabilidades y su definición axiomática con la construcción de las σ-álgebras correspondientes, las distribuciones de probabilidad básicas y sus relaciones, los teoremas centrales. Marca una diferencia epistemológica muy importante entre las probabilidades y la estadística considerando a las probabilidades como un modelo teórico y a la estadística como un modelo de la naturaleza. Afirma que la parte de la estadística que más utiliza las probabilidades es la inferencia. En el último capítulo, plantea los temas de estimación por intervalos de confianza y verificación de hipótesis. En la verificación de hipótesis genera la idea de hipótesis nula y alternativa a través de parámetros, explica: "se trata, entonces, mediante una muestra, de verificar el grado de certeza de esta hipótesis". Define en forma teórica, los dos tipos de errores y la de potencia del test. Introduce al nivel de significación como la probabilidad de cometer error de tipo I. La forma de tomar decisiones se explica en forma teórica y no se aplica a ningún ejemplo. A continuación, explica el método de la Ji- cuadrado para comparar distribuciones experimentales y teóricas donde desarrolla varios ejemplos y situaciones. El planteo realizado por este autor es eminentemente teórico y debe ser abordado con conocimientos matemáticos avanzados. Todas las argumentaciones son de tipo deductivo. No se discute la existencia del P-valor y se instala la idea de simetría entre las dos hipótesis, la nula y la alternativa. Su carácter es eminentemente matemático a pesar de las apreciaciones hechas en general sobre las diferencias existentes entre probabilidades y estadística.

En el libro *Estadística Aplicada a través de Excel* (Pérez, 2007) queda evidenciado en el título el carácter que este libro va a tener, poniendo a las herramientas informáticas al servicio de los contenidos de la estadística. Después de realizar una presentación de las técnicas básicas del uso de Excel, en cinco capítulos cuyos títulos están unidos por la estadística descriptiva recorre los métodos gráficos, medidas de tendencia central y de dispersión, la correlación y regresión simple y múltiple, variables cualitativas. Luego describe aspectos de la probabilidad, variables aleatorias discretas y continuas. Los intervalos de confianza preceden al capítulo de contrastes de hipótesis que continúa en ANOVA y muestreo estadístico. Los últimos capítulos son de series temporales y control estadístico de calidad. Buscando describir una técnica para dar respuesta a problemas concretos utilizando el Excel, se presentan términos como nivel de confianza, P-valores, hipótesis nula a través de la información de las ventanas producida por el Excel luego de procesar los datos. La cantidad de salidas de Excel que presenta son muchas en todos estos capítulos. Dice que la estadística se utiliza en muchos campos y que lo esencial para empezar a trabajar en estadística es la comprensión de los conceptos estadísticos que no requiere el dominio de aparato matemático. En los capítulos 10 y 11 realiza una presentación teórica de los intervalos de confianza y de las

pruebas de hipótesis. En las pruebas de hipótesis, introduce un listado de definiciones: contraste de hipótesis, hipótesis nula, alternativa, estadístico, nivel de significación, entre otros. Dedica un apartado entero al P-valor definiéndolo como el menor valor de significación. Perfila la relación con diferentes niveles de significación y explica que los programas informáticos lo proveen, permitiendo decidir si rechazar o no, por comparación de orden. La discusión sobre los niveles de significación se reduce a su comparación con el P- valor. Se evidencia un uso del P-valor a través de las salidas del Excel, así como el reconocimiento de los estadísticos presentes en las diferentes salida. Sin embargo, al necesitar dar una definición formal se recurre a la estrategia de las los hipótesis y el nivel de significación establecido a priori. No se establece diferenciación entre cuales estrategias corresponden a la estadística descriptiva y cuales a la inferencial imprimiéndole un carácter determinístico sin explorar en profundidad el concepto de muestra.

Reflexiones finales

A través de esta mirada de las pruebas de hipótesis inmersas en la enseñanza de la estadística y esta como forma de alfabetización estadística podemos observar la necesidad de instalar una mirada sobre la enseñanza de la estadística actual en función de los objetivos buscados por el curso impartido, trascendiendo el esquema actual de formación tradicional que no ha logrado con los estudiantes actuales resultados satisfactorios. Sabiendo que formamos parte de una sociedad educativa, los docentes deberemos prestar atención a estas formas de construcción del conocimiento. Como es necesario que ocurra, los resultados obtenidos nos dejan muchas más preguntas que respuestas identificando diferentes planos para tener en cuenta tanto dentro como fuera de las aulas: análisis de la inclusión de influencias externas en el aula, creencias sociales respecto de como se toman las decisiones en diferentes ámbitos de la sociedad, validación de resultados científicos a través de pruebas de hipótesis, prácticas sociales asociadas al valor P como elemento de decisión, influencia de modelos informáticos para enseñar pruebas de hipótesis en diferentes escenarios entre muchas otras.

Referencias bibliográficas

Batanero, C. (2002). *¿Hacia dónde va la educación estadística?* Disponible en: http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/CULTURA.pdf

Batanero, C., Garfield, J. B., Ottaviani, M. G. y Truran, J. (2000). *Investigación en Educación Estadística: Algunas Cuestiones Prioritarias*. En Statistical Education Research Newsletter 1(2). Disponible en: www.ugr.es/batanero/ListadoEstadística.htm

Bell, E.T. (1995). *Historia de las matemáticas*. México: Fondo de Cultura Económica.

Pérez,C. (2007). *Estadística Aplicada a través de Excel*. Madrid: Pearson.

Ponteville, Ch. (2010). *Las pruebas de hipótesis en los libros de texto*. Comunicación Breve presentada en la IX Conferencia Argentina de Educación Matemática, octubre, Villa María.

Santaló, L. (1980). *Probabilidad e inferencia estadística*. Washington: OEA.

Serradó, A. (2013). El Proyecto Internacional de Alfabetización Estadística. *Números 83*, 19-33.

PV APLICADO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE VARIACIÓN

Segundo Javier Caicedo Zambrano y Leonora Díaz Moreno
Universidad de Nariño — Colombia
Universidad de Los Lagos — Chile
Jacaza1@gmail.com, leonora.diaz@ulagos.cl

Resumen. Se reporta cómo los estudiantes utilizan la regla de tres y la reducción a la unidad como herramientas para predecir desde una tabla de valores respecto de una situación de variación lineal y no aplican la razón promedio de cambio. Además, se muestra cómo los estudiantes consideran a la tabla, a la gráfica cartesiana y a las expresiones algebraicas como medios para presentar información y no como entidades para argumentar y predecir, es decir, no se consideran como modelos matemáticos.
Palabras clave: Pensamiento variacional, representaciones semióticas
Abstract. It reports how students use the rule of three and the reduction to unity, as tools to predict from a table of values with respect to a linear variation situation, rather than applying the average rate of change. It also shows how students consider the table, and Cartesian graph algebraic expressions as a means for presenting information and not as entities to argue and predict, i.e. not considered as mathematical models.
Key words: Thought variational, Semiotic representations

Introducción

Los hallazgos que se presentan forman parte de una investigación más amplia que indaga acerca del Pensamiento Variacional –PV– que aplican estudiantes de grado noveno de educación básica (en Colombia, la educación básica y media tiene la siguiente organización: un grado de preescolar, cinco de básica primaria, cuatro de básica secundaria y dos grados de educación media) cuando resuelven problemas que se pueden modelar con una función cuadrática. Asumimos que un modelo es un ente para la intervención en otro; es una herramienta, es algo utilizado para comprender e intervenir en lo modelado (Arrieta, 2003). La técnica que utilizamos para recoger y/o producir datos es la *entrevista basada en tareas* (Davis, 1984). De las producciones de los estudiantes, se destaca como herramientas de predicción, la aplicación de la regla de tres y la reducción a la unidad; no utilizan la razón promedio de cambio, herramienta apropiada para predecir en cualquier situación de variación cuantitativa. Asimismo en las producciones estudiantiles se constata que predomina un trabajo algorítmico (mecánico) de los estudiantes.

Marco teórico

Concebimos al conocimiento matemático como una construcción social a diferencia de quienes lo conciben como un proceso interno e individual, donde se establece un diálogo sólo entre sujeto y objeto de conocimiento. Suscribimos la concepción de que "cualquier conocimiento se genera en un contexto social y culturalmente organizado" (Arrieta, 2003, p.39). En relación con el PV adscribimos a lo que plantea Vasco (2006) en el sentido que "las leyes entendidas como fórmulas para reemplazar valores en ellas, obstaculizan el PV, que primero trata de captar qué varía, con

qué y cómo, antes de describir nada y, muchos menos, antes de memorizar fórmulas. Tampoco se trata de dibujar las gráficas. Al contrario, las gráficas cartesianas paralizan la covariación y distraen la atención de la covariación hacia la forma estática de la gráfica" (p. 138).

En el mismo sentido, compartimos que, para acceder al pensamiento y lenguaje variacional, se requiere de un universo de formas gráficas, extenso y rico en significados para el que aprende (Cantoral y Farfán, 1998; Farfán, 2005); de modo que el conocimiento superficial de la recta y la parábola no resultan suficientes para desarrollar las competencias que se esperan en los cursos de análisis (Cantoral y Farfán, 1998; Cantoral y Montiel, 2001; Farfán, 2005) área de la matemática en la que, esencialmente, se estudia la variación.

Representaciones semióticas

En este documento se operacionaliza la noción de representación desde los desarrollos de Castro y Castro (1997), Rico (2009), Caicedo (2013), es decir, se considera a las representaciones como herramientas que hacen presentes conceptos y procedimientos matemáticos y con las cuales se aborda e interactúa con el conocimiento matemático, independiente de fenómenos a los que puedan modelar. Se conjetura que se piensa y se razona sobre ideas matemáticas con base en representaciones internas de las mismas, operando las personas con tales representaciones. Asimismo que se comunican estas ideas representándolas externamente (Castro & Castro, 1997, p. 101) en ausencia de la actividad de modelar.

Para Duval, citado en Castro y Castro (1997) las representaciones internas se efectúan como una interiorización de las representaciones externas, donde la diversificación de representaciones de un mismo objeto o concepto aumenta la capacidad cognitiva de los sujetos y, por consiguiente, su capacidad de pensamiento sobre ese objeto o concepto representado. De manera recíproca, por medio de las representaciones externas tales como los enunciados en lenguaje natural, las fórmulas algebraicas, las gráficas, las figuras geométricas, los individuos exteriorizan sus imágenes y representaciones de conceptos matemáticos haciéndolos accesibles a los demás.

Así pues, las representaciones externas tienen una doble función; por una parte, actúan como estímulo para los sentidos en los procesos de construcción de nuevas estructuras mentales; y por otra, permiten la expresión de conceptos e ideas en los sujetos que las utilizan (Castro & Castro, 1997, p. 101). Dependiendo del tipo de símbolos, gráficos o notaciones con los que un estudiante interactúe en el proceso de aprendizaje de un concepto matemático, se producirán representaciones internas del mismo, y las herramientas que un sujeto utilice para representar externamente un concepto serán *indicios* de, generalmente, cuál es la información que posee sobre ese concepto. Las representaciones externas pueden contribuir significativamente al aprendizaje si

se promueve el tratamiento y la conversión de registros de representación en el dominio de la actividad matemática en sí.

Ahora bien, cada uno de los modos distintos de representar un mismo concepto matemático proporciona una caracterización diferente de dicho concepto; "no hay un único sistema capaz de agotar en su totalidad la complejidad de relaciones que cada concepto matemático encierra" (Castro & Castro, 1997, p.103). Dominar un concepto matemático consiste en conocer sus principales representaciones, el significado de cada uno de ellas, así como operar con las reglas internas de cada sistema; también consiste en convertir o traducir unas representaciones en otras, detectando qué sistema es más ventajoso para trabajar con determinadas propiedades. Para el caso particular de la resolución de problemas, "se necesita tener la posibilidad de cambiar de una representación a otra, cuando la otra sea más eficiente para el nuevo paso que queremos tomar" (Dreyfus, 1991, citado en Villegas, García & Castro, 2005, p. 232).

Modelo, Modelación y Modelización Matemática

a) Modelo: Con base en la clasificación de perspectivas de modelación de Kaiser y Sriraman (2006), presentamos tres concepciones de modelo, así:

1) **Perspectiva de Modelo Cognitivo:** Un modelo es una esquematización abstracta de la realidad, entendiendo que esta realidad, bien puede pertenecer al mundo de los fenómenos o al de los conceptos. Esto hace que sean poderosos instrumentos conceptuales, que permiten a los sujetos alcanzar y representar múltiples relaciones y estructuras que se presentan en la realidad, las cuales, dada su complejidad, no son comprensibles y manejables en muchas ocasiones fuera del modelo (Castro & Castro, 1997, p.106). Es una representación conceptual, simbólica, y por tanto, indirecta de la realidad, que al ser necesariamente esquemática se convierte en una representación parcial y selectiva de aspectos de esa realidad. Por tanto, no existe modelo que pueda agotar de forma absoluta y definitiva la interpretación de la realidad (Rico, Castro & Coriat, 1997).

2) **Perspectiva de Modelo Realista:** Un modelo es un ente para la intervención en otro; es una herramienta, es algo utilizado para comprender e intervenir en lo modelado (Arrieta, 2003); es decir, un modelo es una representación que permite argumentar y predecir; por lo cual, la manipulación del modelo nos permite entender y predecir un fenómeno, así como validar hipótesis y elaborar estrategias para la intervención.

3) Perspectiva de Modelo Educacional: Un modelo matemático es una estructura matemática que aproxima o describe ciertas relaciones de un hecho o fenómeno (Castro & Castro, 1997, p.107); "…es un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que traducen, de alguna forma, el

fenómeno en cuestión" (Hein & Biembengut, 2006, p. 2), pero que, a diferencia de cualquier representación, tiene la cualidad de servir de soporte para explicar y predecir.

b) Modelación y Modelización: el paso entre una situación real hacia la construcción de un modelo matemático se denomina *Modelación* (Blum & Niss, 1991, p.115) y al proceso implicado en la obtención de un modelo matemático se llama *Modelización Matemática* (Hein & Biembengut, 2006, p. 2). La *modelación matemática* es fundamentalmente una forma de la solución de problemas de la vida real; pero no es una forma cualquiera, sino que conlleva la consideración del problema como un todo (Castro & Castro, 1997, p.110). La modelación se puede hacer de formas diferentes, cada una simplifica la situación y selecciona una manera de representarla mentalmente, gestualmente, gráficamente o por medio de símbolos aritméticos o algebraicos, con el fin de formular y resolver los problemas relacionados con ella. Un buen modelo permite buscar distintos caminos de solución, obtener una solución aproximada o darse cuenta si es plausible y significativa la encontrada a través de cálculos numéricos o algebraicos.

c) Una perspectiva de modelación desde la socioepistemología**.** Los autores Arrieta y Díaz (2014) conciben a la modelación desde su marco socioepistemológico como la articulación de dos entidades, para actuar sobre una de ellos a partir de la otra. Condición necesaria es que en una red de tales entidades, una de ellas sea un fenómeno. Por ejemplo el fenómeno puede ser para el cardiólogo el funcionamiento del corazón de su paciente. Constituye al electro en modelo cuando prescribe al paciente un tratamiento que impacte benéficamente su corazón desde el registro de su actividad eléctrica que "lee" en el electro. En la actividad matemática escolar un fenómeno puede ser la elasticidad de un resorte y entidades pueden ser tablas numéricas, figuras gráficas, expresiones algebraicas. El cardiólogo interviene el corazón de su paciente (lo modelado) a partir de su electro (el modelo). En este movimiento el cardiólogo modela. Los estudiantes predicen la elongación del resorte (lo modelado, la elasticidad del resorte) desde una tabla numérica (el modelo). En este movimiento los estudiantes modelan.

Pensamiento variacional

El Pensamiento Variacional se lo concibe a la manera de Caicedo y Díaz (2011) y Caicedo (2013) es decir, como un tipo de pensamiento matemático que está dirigido al análisis de las relaciones de covariación de un sistema, de una situación o de un fenómeno en general. Está orientado a reconocer qué, cómo y cuánto cambia un sistema, situación o fenómeno, con el fin de lograr su comprensión, descripción, representación en distintos sistemas o registros simbólicos y/o su modelación desde una perspectiva socioepistemológica. Por tanto, adscribimos a la concepción de Vasco (2006) respecto de que "las leyes entendidas como fórmulas para reemplazar valores en ellas, obstaculizan el PV, que primero trata de captar qué varía, con qué y cómo, antes de describir

nada y, muchos menos, antes de memorizar fórmulas" (p. 138). Asimismo, coincidimos que tampoco se trata de dibujar gráficas solamente, pues, las gráficas cartesianas, en sí mismas, paralizan la covariación y distraen la atención de la covariación hacia la forma estática de la gráfica.

Descripción de la experiencia

Se presentó una tabla de datos a un grupo de estudiantes de grado noveno de educación básica, cuyos datos (hipotéticos) se obtuvieron al medir el estiramiento de un resorte al poner pesas de 20gr, consecutivamente, en un portapesas de un sistema masa-resorte (Arrieta, 2003). La tabla muestra las posiciones del portapesas para los pesos respectivos. Entre las preguntas, se planteó la determinación de la posición del portapesas dado un peso y viceversa; la obtención de la gráfica cartesiana y de la expresión algebraica que modele los datos de la tabla. Parte del análisis consiste en el estudio de las producciones de los estudiantes en la perspectiva de reconocer qué herramientas de predicción utilizaron.

Análisis

En la Tabla 1 se muestran los datos del problema que resolvieron los estudiantes. En este documento nos centramos en las preguntas y respuestas de los estudiantes que utilizan la regla de tres y el método de reducción a la unidad, en los casos que se pide obtener la posición correspondiente para un peso que no está registrado en la Tabla 1 (predicción); asimismo, analizamos los casos en donde, al parecer, es posible conjeturar que la falta de reconocimiento del tipo de variación en la tabla de datos, contribuye a que se acepten gráficas incompletas y/o no se pueda determinar la expresión algebraica que modele los datos de la Tabla 1.

Tabla 1 Pesos y Posición del Portapesas en un sistema masa-resorte (Datos sin ruido)

Peso (*gr*)	Posición (del portapesas en *mm*)	Diferencias de la posición (del portapesas en *mm*)
0	5	-
20	35	30
40	65	30
60	95	30
80	125	

La figura 1 muestra el caso en el que un estudiante utiliza la regla de tres para determinar (predecir) la posición que le corresponde al portapesas, para un peso de 50gr. La Tabla 1 no registra el peso de 50gr, pero sí los pesos de 40gr y 60gr con los cuales el estudiante plantea una regla de tres. El estudiante obtiene que, para un peso de 50gr, la posición del portapesas es de 81.25 mm; sin embargo, considerando que se trata de un problema de variación lineal, en donde la

razón promedio de cambio es una constante, a través de su aplicación se obtiene el valor de 80mm, que en este caso, corresponde al valor correcto debido al patrón lineal de variación.

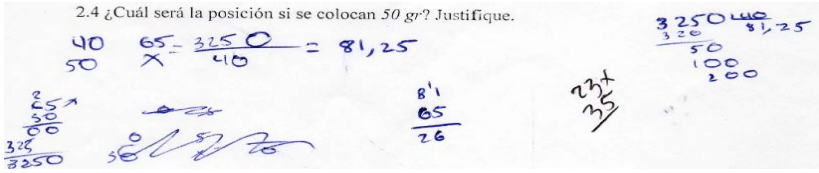


Figura 1 Utilización de regla de tres en lugar de aplicar razón promedio de cambio.

El Cuadro 1 indica un proceder de cálculo de posición con la razón promedio de cambio.

Cuadro 1 Cálculo de la posición del portapesas aplicando la razón promedio de cambio

R/ Según los datos de la tabla, no se conoce la posición del portapesas para 50 gr, sin embargo, dado que 50 gr pertenece al intervalo [40,60], y la tabla presenta la posición para 40 gr y 60 gr, entonces, es posible determinar su posición, cuyo valor debe pertenecer al intervalo [65,95]. En efecto, esta posición se la puede calcular a partir de la razón promedio de cambio de la posición respecto al peso, para pesos entre *40* y *60 gr*. En la Tabla 1 se observa que la posición del portapesas cuando el peso es de *40 gr* es de *65 mm* y para *60 gr* es de *95 mm*. Así que la razón promedio del cambio de posición (*rpc*) por gramo de peso, para los pesos que varían en el intervalo *[40, 60]*, es: *rpc = (95 – 65)/ (60 – 40)=1.5*. En las columnas *Pesos* y *Diferencias de posición* de la Tabla 1, se observa que los pesos aumentan de 20gr en 20 gr, y las diferencias son constantes, por lo cual, la relación matemática entre el peso y la posición del portapesas se puede modelar con una función lineal. Así pues, la posición del portapesas para un peso de *50 gr*, es igual a la posición que corresponde al peso de *40 gr* más la *rpc* multiplicada por el incremento del nuevo peso respecto al peso de *40 gr*; o sea se multiplica por 10; esto es: *65+rpc*(50-40)= 65+1.5*10=80 mm*. Por lo tanto, la posición del portapesas para un peso de *50 gr* es de *80 mm*

Si no se reconoce el tipo de variación de los datos en una representación tabular, entonces queda reducida su utilidad como recurso para la representación gráfica y para la obtención de la expresión algebraica; pues, se pierde información que sirve de base para dichas representaciones y para el control y evaluación de las mismas. Por ejemplo, la gráfica que se presenta en la figura 2, pudo haber sido completada si el estudiante, basado en el hecho de que los datos de la Tabla 1 tienen variación lineal, tal como se precisó en el Cuadro 1, reconociera que la gráfica debe ser una recta. El estudiante no ve la necesidad de unir los pares ordenados que ubica (Ver figura 2). De modo que, parece plausible afirmar que el estudiante no reconoce un modelo de covariación lineal en los datos de la Tabla 1; ya que, de reconocerlo, uniría con segmentos los pares ordenados.

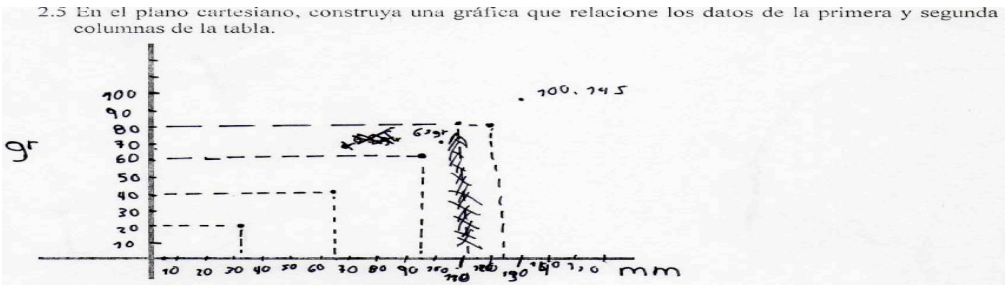


Figura 2 Representación gráfica no apropiada para una situación de variación lineal. El estudiante ubica pares ordenados pero no completa el trazado (Fuente: Cuestionario del estudiante de código 12-9120).

En la figura 3, se observa que el estudiante inicia la representación algebraica con la ecuación $nx^2+5=35$ y determina la expresión $3/40\ x^2+5=y$. Este error se pudo haber omitido si, inicialmente, basado en la variación lineal de los datos de la Tabla 1, hubiera reconocido que la ecuación tiene que ser lineal y de la forma $y=mx+n$. De modo que, parece posible afirmar que, en este caso, ni la Tabla 1 ni la gráfica de la figura 2 se reconocen como modelos de los datos, pues, no permiten predecir el tipo de ecuación que los modela; por lo cual, sólo se quedan a nivel de representación, y no como un recurso con los cuales argumentar y predecir; pues, adscribimos al hecho que una representación simbólica se constituye en un modelo en el momento en que no sólo *evoca* una realidad sino que permite leer, interpretar, explicar y predecir esa realidad.

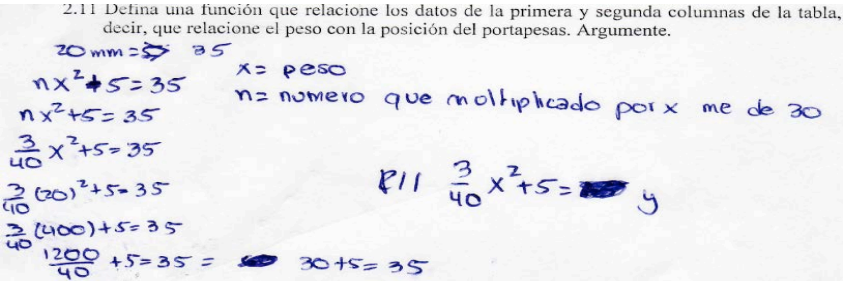


Figura 9: Expresión algebraica no apropiada para una situación de variación lineal (Fuente: Cuestionario del estudiante de código 12-9729)

En términos generales, se encuentra falta de coordinación entre las representaciones tabular, cartesiana y algebraica, lo cual incide para que una de ellas no sea tomada como un referente para otra. Asimismo no se articulan con el fenómeno el que parece invisibilizarse, es decir, no se constituyen modelos. Esto se pone en evidencia, en el hecho en que las respuestas que obtienen con una representación no son motivo de análisis ni de discusión, simplemente se aceptan, tal como sucede con el estudiante de la Figura , quien no considera la variación lineal de los datos de la tabla, pues, sólo la toma como una disposición de pares ordenados. Así pues, los estudiantes tienen dificultad para realizar conversión de representaciones matemáticas (tabular, gráfica cartesiana, expresión algebraica), quizá, una forma de contribuir a la solución sea reconocer cada representación como un modelo de datos, iniciando con la representación tabular, donde se analice el tipo de variación de las variables con el fin de reconocer regularidades en sus valores que soporten la caracterización de la variación (lineal, cuadrática,…). Enfatizar la articulación con el fenómeno es una alternativa de acción didáctica abierta para ulteriores aplicaciones.

Conclusiones

Se encontró que los estudiantes no reconocen la variación lineal en una tabla de valores; que la tabla de valores, la gráfica cartesiana y las expresiones algebraicas no se constituyen en modelos

por lo que no se usan para argumentar ni predecir respecto de un fenómeno. Sólo se tratan como medios para presentar datos. Articular con el fenómeno resta como acción didáctica pendiente. Desde la perspectiva de registros semióticos, la tabla de datos no es un referente ni para la gráfica cartesiana ni para la expresión algebraica correspondiente; tampoco se reconoce que apliquen la conversión de representaciones. Se estaría frente a lo que Vasco (2006) identifica con lo que no es Pensamiento Variacional, a saber, que las expresiones algebraicas se traten como fórmulas y no se levante una reflexión sobre la covariación que ellas pueden significar.

Referencias bibliográficas

Arrieta J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula.* Tesis de doctorado no publicada. Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav–IPN. México.

Arrieta, J. y Díaz, L. (2014). Una perspectiva de la modelación desde la socioepistemología. Aceptado en Revista Latinoamericana de Matemática Educativa.

Blum, W. & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects - State, trends and issues in mathematics instruction. Educational Studies. *Mathematics* 22(1), 37–68.

Caicedo, S.J. & Díaz, L. (2011). Pensamiento variacional y sentencias e igualdades numéricas aditivas. *Revista UNIMAR*, 58, 98-105. Versión electrónica en http://asis.umariana.edu.co /RevistaUnimar/publicaciones/RevistaUnimar58.html#/98/

Caicedo, S.J. (2013). *Pensamiento variacional de estudiantes de grado noveno de educación básica aplicado en el proceso de resolución de situaciones problema que se pueden modelar con una función cuadrática.* Tesis de doctorado no publicada. Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia.

Cantoral, R. & Farfán, R. M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon – Edición especial: Primer lugar del Premio Internacional de Investigación y de Renovación Pedagógica en Educación Matemática: Thales – San Fernando, España, 42*, 353 – 369.

Cantoral, R. & Montiel, G. (2001). Funciones: Visualización y pensamiento matemático. México: Pearson Educación.

Castro E. & Castro E. (1997). Representaciones y modelización. En R. Luis (Coord), E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra, M. Socas (Eds.). *La educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 95-124). Barcelona: Horsori.

Davis, R.B. (1984). *Learning mathematics: The cognitive Science approach to mathematics education*. Tercera reimpresión, 1990. USA, N. Jersey: Ablex Publishing Corporation.

Dreyfus, T (1991). Advanced mathematical thinking processes. En D. Tall. (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia: Univalle: Instituto de educación y pedagogía.

Farfán, R. M. (2005). Lenguaje algebraico y pensamiento funcional. En R. Cantoral, R. M. Farfán, F. Cordero, J. A. Alanis, R. A. Rodríguez & A.Garza (Eds.). *Desarrollo del pensamiento matemático* (pp. 89-144). México: Trillas.

Hein N. & Biembengut, M (2006). *Modelaje matemático como método de investigación en clases de matemáticas*. En M. Murillo (presidente), Memorias del V festival internacional de matemática. pp. 125 Puntarenas: Colegio universitario de Puntarenas.

Kaiser, G. & Sriraman, B. (2006). A global survey of internacional perspectives on modelling in mathematics education. *Analyses ZDM*, Vol. 38 (3).

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA, 4*(1), 1-14.

Rico, L., Castro, E. & Coriat, M. (1997). Revisión teórica sobre la noción de currículo. En L. Rico (Ed.). *Bases teóricas del currículo educación secundaria* (pp.77-150). Madrid: Síntesis.

Vasco, C. E. (2006). *Didáctica de las matemáticas*: *Artículos selectos*. Bogotá, Colombia: Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional.

Villegas, J. L., García, R. & Castro, E. (2005). El Papel de las Representaciones en el Éxito de la Resolución de Problemas. En J. Lezama, M. Juan. G. Molina. (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 18, pp. 231-237.

CAPÍTULO 2

PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Introducción al Capítulo de Propuestas para la Enseñanza de las Matemáticas

Mónica Micelli

Miembro del Comité Organizador Nacional – Relme 27. (Argentina)
monikmathis@gmail.com

Los integrantes de la comunidad de matemáticos educativos, como es el caso de Clame, vienen abordando, desde hace años, el estudio del fenómeno didáctico presente en las aulas de Matemática. Este hecho puede observase en las diversas investigaciones que se han presentado en congresos, reuniones, revistas y actas.

Si se recorren las distintas secciones de las Actas Latinoamericanas de Matemática Educativa (ALME) se podrán encontrar investigaciones que plantean propuestas para la enseñanza de la Matemática. Revisando desde las primeras Actas se percibirá que las secciones se encontraban asociadas a temáticas como el uso de las tecnologías, desarrollo de curriculum, pensamiento numérico, algebraico, geométrico, probabilístico, entre otros, muchas veces haciendo la distinción entre los distintos niveles educativos.

La organización de las Actas fue cambiando con el tiempo y en ALME 17 se puede encontrar la sección que tiene como título: "Propuestas de enfoques y métodos de enseñanza" (Díaz Moreno, 2005, p.502), de esta forma, la presentación de secuencias didácticas cobra un espacio específico que lentamente fue enriqueciéndose con el aporte de diversos investigadores de la comunidad que han estudiado la realidad del aula. A partir de ALME 22, se puede encontrar una sección con el título: "Propuestas para la enseñanza de las matemáticas" (Leston, 2009, p.3). Este breve recorrido a través de las distintas Actas permite evidenciar la consolidación que va adquiriendo esta disciplina que se encuentra en constante crecimiento.

El aula de Matemática no solo debe ser el punto de partida de toda investigación en Matemática Educativa, sino además su meta, de este modo tiñe de sentido la labor docente. "Si no se piensa en lo que sale de la escuela al mundo en las mentes y manos de los alumnos, toda situación educativa pierde sentido" (Farfan y Lestón, 2009, p.4).

En este capítulo se presentan variadas e innovadoras propuestas producto de investigaciones realizadas desde diversas perspectivas teóricas. Todas ellas constituyen el aporte que los profesores investigadores proponen a toda la comunidad con el objetivo de difundir la Matemática Educativa para mejorar la calidad de su enseñanza en Latinoamérica. Es de destacar que se preservan las características propias de cada región, valorando la diversidad que éstas presentan.

Invitamos a nuestros colegas a leer las investigaciones de este capítulo, pues ALME es una vía para compartir ideas gestadas, por un lado, en diversos trabajos presentados en Relme, y, por otro, a partir de charlas informales con miembros de la comunidad en las que se intercambian vivencias, experiencias, resultados y reflexiones acerca de las investigaciones que se están llevando a cabo.

Queda abierta la convocatoria a todos los miembros de la comunidad para presentar los resultados de sus trabajos y nuevas propuestas en próximas reuniones y actas. De ese modo, se podrán retroalimentar las producciones en el aula y favorecer el desarrollo de la Matemática Educativa.

Referencias bibliográficas

Díaz Moreno, L. (ed.). (2004). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17 (2).* Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Farfán, R y Lestón, P. (2009). Introducción al capítulo de análisis del discurso matemático escolar. En P. Lestón (ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática educativa 22*, pp. 3-4. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Lestón, P. (ed.). (2009). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22*. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

IDONEIDAD DIDÁCTICA DE UN PROCESO DE INSTRUCCIÓN EN UNA ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA CON PROYECTOS

Stella Maris Figueroa, Sandra Baccelli y Gloria Prieto.
Universidad Nacional de Mar del Plata. Facultad de Ingeniería. Argentina
stellafigueroa@gmail.com, sbaccelli@gmail.com, gloriaprieto1@gmail.com

Resumen. Este trabajo tiene por objetivo presentar una valoración de un proceso de instrucción de estadística con proyectos, propuesto a estudiantes de Estadística en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina, bajo el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática. Esta valoración se realizó a partir del análisis de la idoneidad didáctica en la dimensión cognitiva. Las producciones de los alumnos fueron analizadas con una rúbrica diseñada para la evaluación de proyectos. Durante el proceso, los resultados del análisis de la componente Aprendizaje en la idoneidad cognitiva, arrojaron una buena valoración en los indicadores *comprensión situacional, conceptual y proposicional*, pero una baja valoración en la *fluencia procedimental,* en las *competencias comunicativa y argumentativa.* Las mismas pudieron ser optimizadas con la propuesta solicitada a los estudiantes al analizar las dificultades encontradas en los trabajos para otra presentación posterior, con el agregado de una reflexión de todo el proceso. El análisis de estas reflexiones produjo una alta valoración en la competencia metacognitiva.
Palabras clave: estadística, proceso investigativo, evaluación, idoneidad cognitiva
Abstract. This work aims to present an assessment of a statistical process instruction with proposed projects for students of Statistics at the Faculty of Engineering of the National University of Mar del Plata, Argentina, under the Ontosemiotic Approach of Knowledge and Mathematics Instruction. This assessment was carried out from the analysis of the didactic suitability in the cognitive dimension. The students' productions were analyzed with a rubric designed to evaluate projects. During the process, the analysis results of the Learning component in the cognitive suitability showed a good valuation in indicators such as situational, conceptual and propositional comprehension, but a low valuation in procedural fluency and communicative and argumentative skills. The same ones could be optimized with the proposal requested to the students when analyzing the difficulties found in the works for another later presentation, by adding a reflection of the entire process. The analysis of these reflections produced a high valuation on metacognitive competence.
Key words: statistics, research process, assessment, cognitive suitability.

Introducción

Durante los últimos años, la industria ha reconocido que debe mejorar en forma radical la calidad de sus productos si planea competir eficazmente en todos los mercados. Una parte importante de este esfuerzo de mejora de la calidad y de la productividad se centra en el quehacer profesional del ingeniero, que controla las actividades de diseño y desarrollo de productos y procesos, los sistemas de manufactura y las operaciones que se llevan a cabo para entregar productos al consumidor. Las herramientas estadísticas desempeñan un papel vital para que estos trabajos puedan efectuarse de manera más eficaz. Consecuentemente con estos requerimientos, el Consejo Federal de Decanos de Ingeniería, (Morano y cols 2006) propone la adquisición de un aprendizaje por competencias. Dichas competencias están relacionadas con el área Estadística desde una perspectiva instrumental.

El punto de vista que considera a la Estadística como una herramienta, es compartido por especialistas en didáctica de la Estadística, como Batanero (2001) y Gal (2002), entre otros. Gal (op.cit.) afirma que el razonamiento estadístico ayuda a comprender el por qué y el cómo se realizan las investigaciones estadísticas. Este razonamiento incluye el reconocimiento de todas las

etapas del proceso investigativo completo: la formulación de la pregunta de investigación, la recolección de los datos, la selección de la técnica para analizarlos, la prueba de hipótesis, la elaboración de conclusiones en base a la información analizada y la toma posterior de decisiones.

El estudiante, al cambiar el aprendizaje memorístico o por repetición por un aprendizaje en el cual puede incorporar el conocimiento nuevo a las estructuras previas del conocimiento, aprende algo que adquiere significado a partir de lo que ya sabe y puede establecer un compromiso afectivo para relacionar el nuevo conocimiento con el aprendizaje previo.

Una enseñanza de la Estadística basada en proyectos de análisis de datos, aplica el razonamiento estadístico que tiende hacia el aprendizaje significativo de conceptos y representaciones, a su interpretación, al estudio de la variabilidad de los datos, a la ejercitación de las técnicas y a la mejora en sus capacidades de argumentación, formulación de conjeturas y validación. Estas capacidades se orientan hacia la adquisición de las competencias requeridas para la formación del ingeniero.

En la Figura 1, se presentan los pasos necesarios para una enseñanza de la Estadística con proyectos, en un esquema diseñado a partir del propuesto por Pimienta (2003, citado en Arteaga, 2011, p. 33).

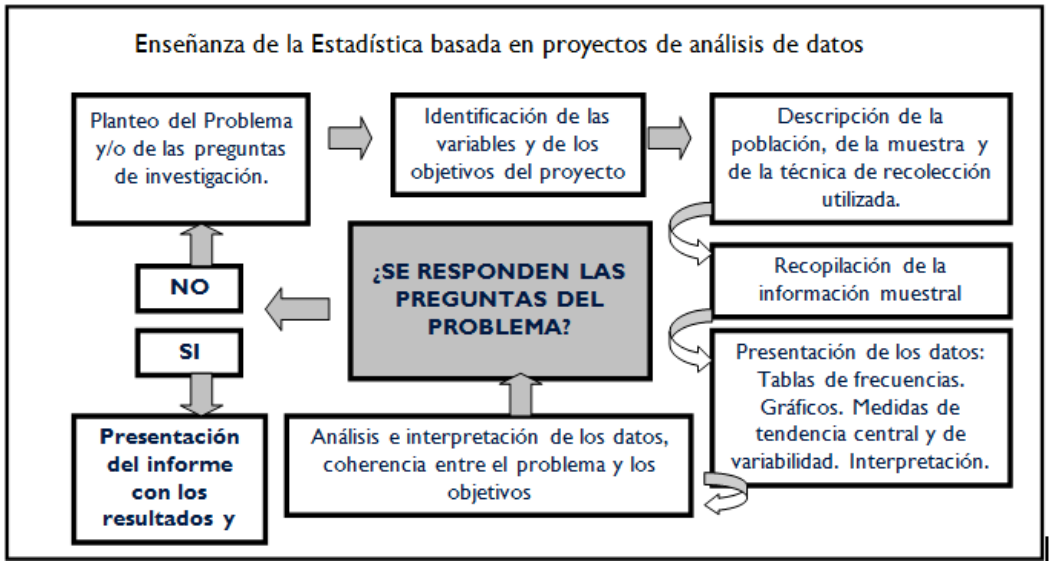


Figura 1. Esquema de los pasos para una enseñanza de la Estadística basada en proyectos de análisis de datos.

Estos pasos para la elaboración de proyectos, pueden pensarse como habilidades a desarrollar por los estudiantes y en este trabajo fueron consideradas como criterios para la construcción de una rúbrica. La misma se diseñó a partir de las recomendaciones señaladas por Batanero y Díaz (2011), donde también se describió el nivel de aplicación (calidad) de cada criterio.

La evaluación de los proyectos es formativa, y se produce durante todo el proceso de instrucción. Debido a la complejidad que comprende la evaluación de proyectos y para unificar puntos de vista entre profesores y estudiantes, se presenta esta rúbrica para evaluarlos, siendo el objetivo de esta investigación obtener una valoración de la idoneidad didáctica de este proceso instruccional en la dimensión cognitiva. La idoneidad cognitiva es el grado en que los significados implementados (o pretendidos) están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/ implementados.

Para comenzar el análisis, se estudia la componente Aprendizaje de la guía propuesta por Godino (2011). Esta componente tiene en cuenta los mismos elementos que se consideran en la idoneidad epistémica: situaciones-problema, lenguajes, conceptos, procedimientos, proposiciones, argumentos y relaciones entre los mismos. Sus indicadores se describen en la Tabla 1.

Componente	Indicadores
Aprendizaje	Los diversos modos de evaluación indican que los alumnos logran la apropiación de los conocimientos pretendidos (incluyendo comprensión y competencia). **Comprensión conceptual y proposicional; competencia comunicativa y argumentativa; fluencia procedimental; comprensión situacional; competencia metacognitiva** La evaluación tiene en cuenta distintos niveles de comprensión y competencia Los resultados de las evaluaciones se difunden y usan para tomar decisiones.

Fuente: Godino (2011) Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. (CIAEM) XIII.

Tabla1: Indicadores de la componente Aprendizaje en la idoneidad cognitiva.

Metodología

Participantes

La población objetivo es la de los alumnos de la Facultad de Ingeniería de la cátedra de Estadística Básica, que se concreta en los alumnos de la cohorte 2013 de dicha Facultad de la Universidad Nacional de Mar del Plata.

Variables e Instrumentos

- Criterios considerados para la evaluación de los proyectos y sus niveles de aplicación.
- Idoneidad cognitiva de un proceso de instrucción, medida a través de la componente Aprendizaje con el indicador 2, especificado en la Tabla 1.

Procedimiento

Se consideró la componente aprendizaje porque tiene en cuenta los mismos elementos que se tienen en la idoneidad epistémica: situaciones-problema, lenguajes, conceptos, procedimientos, proposiciones, argumentos y relaciones entre los mismos.

Como puede observarse en la Tabla 1, el indicador 2 de la componente Aprendizaje, se subdivide en competencias. La competencia metacognitiva fue analizada posteriormente, luego de las modificaciones que los estudiantes hicieron en los trabajos, mediante una encuesta que indaga sobre la reflexión del proceso de instrucción: su experiencia, limitaciones del trabajo y sugerencias de cómo mejorar el diseño o el análisis.

Se estableció una correspondencia entre las competencias del indicador 2 con los criterios considerados en la evaluación de los proyectos, agrupados según la naturaleza de cada competencia. Para las competencias se utilizaron los niveles de aplicación: alto (2), bueno (1) y bajo (0), similares a los niveles dados en la rúbrica: Calidad Muy buena (2), buena (1), no aceptable (regular, malo o sin resolver) (0), como se muestra en la Tabla 2.

Competencias	Niveles Criterios de la rúbrica	Nivel alto (2)	Nivel bueno (1)	Nivel bajo (0)	
		Calidad Muy buena (2)	Calidad Buena (1)	Calidad Regular No aceptable (0)	Calidad Mala o sin resolver (0)
Comprensión situacional	1. Definición del Problema o pregunta de investigación	Define con claridad el problema. Le permite saber qué es lo que desea resolver estadísticamente.	Define con cierta claridad el problema. Le permite saber, de alguna manera, qué información obtendrá estadísticamente	La definición del problema no es clara. Hay dificultad para saber lo que se tiene que resolver.	No hay definición del problema. No es posible saber lo que se tiene que resolver.
Comprensión conceptual y proposicional	2. Objetivos del proyecto	Los objetivos son claros y precisos. Están relacionados con el problema y las variables que intervienen.. Son posibles de cumplir, medir y evaluar.	Los objetivos son claros y precisos. Están relacionados con el problema y las variables que intervienen. Existe cierta dificultad para su medición y evaluación.	Se establecen objetivos para el proyecto pero no permiten determinar si las variables planteadas son medibles y si responden a dichos objetivos.	Se establecen de alguna manera objetivos que no son claros, no es posible medirlos o evaluarlos. No se relacionan con el problema.
	3. Esquema de Contenidos	Utiliza todos los contenidos de las unidades 1 y 2 del programa y los amplía utilizando un análisis exploratorio de	Utiliza todos los contenidos de las unidades 1 y 2 del programa .Utiliza algún soporte informático.	Utiliza algunos contenidos de las unidades 1 y 2 del programa. No usa soporte informático.	Utiliza pocos contenidos de las unidades 1 y 2 del programa. Falta una estructura

		datos, con gráficos de caja (box-plot) y el tratamiento de valores extremos (outliers). Analiza la variabilidad de los datos. Utiliza algún soporte informático. Además de los cálculos, busca significado a los resultados obtenidos.	Además de los cálculos, busca significado a los resultados obtenidos. Grafica e interpreta el gráfico de caja (box-plot). Analiza la variabilidad de los datos.	No considera la interpretación de los resultados como contenido de estudio.	coherente entre ellos. No usa soporte informático. No considera la interpretación de los resultados como contenido de estudio.
	4. Diseño del proyecto	Se especificó la forma en que se aborda el problema, incluyendo la descripción de población y muestra y la técnica utilizada para la recolección de datos. Se tendrá en cuenta si los datos permiten resolver la cuestión investigada.	Se describe la población y muestra y la técnica utilizada para la recolección de datos. Se tendrá en cuenta si los datos permiten resolver la cuestión investigada.	Existe una incompleta descripción de la población y/o de la muestra de la que se extrajeron los datos. No indica la técnica de recolección empleada ni indica el alcance de los resultados obtenidos.	No hay una descripción de la población ni de la muestra de la que se extrajeron los datos. No indica la técnica de recolección empleada ni indica el alcance de los resultados obtenidos.
Fluencia procedimental	5. Organización de la información	Organiza, tabula y construye gráficos adecuados a partir de un conjunto de datos reales. Existe una destacada coherencia en la estructura del trabajo.	Organiza, tabula y construye gráficos adecuados a partir de un conjunto de datos reales. Existe coherencia en la estructura del trabajo.	No organiza la información adecuadamente. Las tablas de frecuencias no representan las variables claves del problema. Los gráficos no son adecuados al tipo de variable representada. No trabaja con datos reales.	Falta una estructura que organice la información. Las tablas y gráficos aparecen aislados, sin nexos. No trabaja con datos reales.
	6. Gráficos, Cálculos e	Los gráficos estadísticos son claros y adecuados a la variable considerada en cada caso. Usa además, el gráfico de caja (box-plot)	Los gráficos estadísticos son claros y adecuados. Analiza la variabilidad y la forma de la distribución de	Algunos de los gráficos estadísticos no son adecuados. Falta claridad y análisis de variabilidad y	Los gráficos estadísticos no son adecuados. Falta claridad y análisis de variabilidad y de la forma de

	Interpretación	y trata valores extremos (outliers). Analiza la variabilidad y la forma de la distribución de los datos. Con el cálculo y la interpretación del significado de estadísticos, describen y resumen la información.	los datos. Con el cálculo y la interpretación del significado de estadísticos, describen y resumen la información.	de la forma de la distribución de los datos. Interpreta parcialmente los resultados obtenidos.	la distribución de los datos. No interpreta resultados obtenidos
Competencia comunicativa y argumentativa	7. Justificación del proyecto.	Describe con claridad la importancia y actualidad del problema, está relacionado con su quehacer profesional futuro. Su utilidad práctica y factibilidad de realización.	Describe la importancia y actualidad del problema, su utilidad práctica y factibilidad de realización. Tiene una leve vinculación a su futura profesión	Describe vagamente la importancia y actualidad del problema, su utilidad práctica y factibilidad de realización. No lo vincula con el quehacer del futro ingeniero.	Hace una justificación insuficiente del proyecto en cuanto a la actualidad del problema, utilidad práctica y/o factibilidad.
	8. Análisis y Conclusión	El análisis de datos es adecuado al tipo de variables y a la pregunta de investigación. Se respetan los supuestos de aplicación de los diferentes métodos estadísticos. (Si los hubiera, y se aplican correctamente dichos métodos.) Las conclusiones son consistentes con el análisis; los datos apoyan las conclusiones obtenidas, que se relacionan con la pregunta de investigación, los objetivos y las hipótesis.(si las hubiera)	El análisis de datos es adecuado al tipo de variables y a la pregunta de investigación. Las conclusiones son consistentes con el análisis; los datos apoyan las conclusiones obtenidas.	El análisis de datos no es el adecuado al tipo de variables y a la pregunta de investigación. Las conclusiones son poco consistentes con el análisis; los datos no apoyan las conclusiones obtenidas.	El análisis de datos no es el adecuado al tipo de variables y a la pregunta de investigación. Las conclusiones son poco o nada consistentes con el análisis; los datos no apoyan las conclusiones obtenidas ni se relacionan con la pregunta de investigación.
	9.	La calidad excelente de la presentación,	La buena calidad de la presentación,	La escasa calidad de la presentación,	La falta de calidad de la presentación,

	Presentación de resultados	incluyendo claridad y corrección de los gráficos, con sus correspondientes títulos, la organización adecuada en secciones y apartados y la correcta expresión escrita. La bibliografía utilizada.	incluyendo claridad y corrección de los gráficos, con sus correspondientes títulos, y la correcta expresión escrita.	incluyendo poca claridad en los gráficos, algunos sin sus correspondientes títulos, y la incorrecta expresión escrita.	incluyendo poca claridad en los gráficos, algunos sin sus correspondientes títulos, y la incorrecta expresión escrita.

Tabla 2: Correspondencia entre las competencias del indicador 2 de la componente Aprendizaje, con los criterios de la rúbrica y sus niveles de aplicación.

Análisis de Resultados

La Figura 2 presenta los resultados de la evaluación de los proyectos por criterio analizado.

La mayor frecuencia corresponde al criterio 6, donde los estudiantes no alcanzan un nivel aceptable en la selección del gráfico adecuado para la variable clasificada, su interpretación y su relación con las medidas calculadas, tanto para el análisis de la forma de la distribución como para la variabilidad de los datos. Esta dificultad se relaciona y continúa en el criterio 8, con el análisis de los resultados y con la descripción de las conclusiones. En muchos casos, los estudiantes confunden resultados con conclusiones.

Otras dificultades detectadas en menor frecuencia, se encontraron en el criterio 7, con la justificación del proyecto, y en el criterio 2, donde debían plantear los objetivos del mismo. En el resto de los criterios, los resultados fueron positivos.

La Tabla 3 presenta los resultados obtenidos de la correspondencia entre las competencias consideradas con los criterios de la rúbrica y sus niveles de aplicación. Permite una observación detallada de las frecuencias y porcentajes agrupados por competencia.

Estos resultados se visualizan en la Figura 3. Los mismos arrojaron una buena valoración en los indicadores *comprensión situacional, conceptual* y *proposicional* y un bajo nivel de valoración en la *fluencia procedimental,* y en las *competencias comunicativa y argumentativa.* Éstas pudieron mejorarse con la propuesta solicitada a los estudiantes de analizar las dificultades producidas en la elaboración de los trabajos para una nueva presentación de los mismos, con una reflexión de todo el proceso. El análisis de estas reflexiones produjo una alta valoración en la competencia metacognitiva.

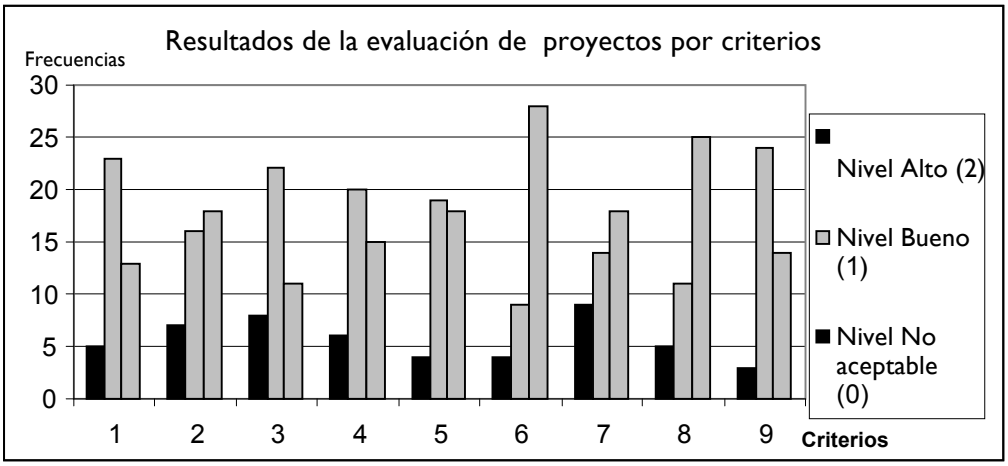


Figura 2: Resultados obtenidos en la evaluación de proyectos por criterio

Indicador 2 de la componente Aprendizaje	Criterios de evaluación de los proyectos	Nivel Alto (2)		Nivel Bueno (1)		Nivel No aceptable (0)		Totales
			%		%		%	
Comprensión situacional	1.Definición del Problema	5	12	23	56	13	32	41
Comprensión conceptual y proposicional	2.Objetivos del Proyecto	21	17	58	47	44	36	123
	3.Diseño							
	4.Esquema Contenidos							
Fluencia Procedimental	5.Organización de la información	8	10	28	34	46	56	82
	6.Gráficos, Cálculos e Interpretación							
Competencia comunicativa y argumentativa	7.Justificación del Proyecto	17	14	49	40	57	46	123
	8. Análisis y Conclusión							
	9. Presentación del Informe							

Tabla 3: Resultados de la correspondencia entre las competencias del indicador 2 de la componente Aprendizaje, con los criterios de la rúbrica y sus niveles de aplicación.

Conclusiones

El uso de una rúbrica para evaluar proyectos establece acuerdos entre profesores y estudiantes donde se explicitan los criterios analizados y el estudiante advierte qué debe hacer para que su trabajo sea de calidad y puede reconocer cuándo no lo es y entonces, mejorarlo.

La correspondencia entre competencias y criterios permitió que las mismas fueran evaluadas agrupando criterios según la naturaleza de la competencia analizada.

El análisis de los resultados obtenidos de la componente Aprendizaje en la idoneidad cognitiva, evidenció una buena valoración del proceso de instrucción en los indicadores *comprensión*

situacional, conceptual y proposicional pero un bajo nivel de valoración en la *fluencia procedimental,* y en las *competencias comunicativa y argumentativa.*

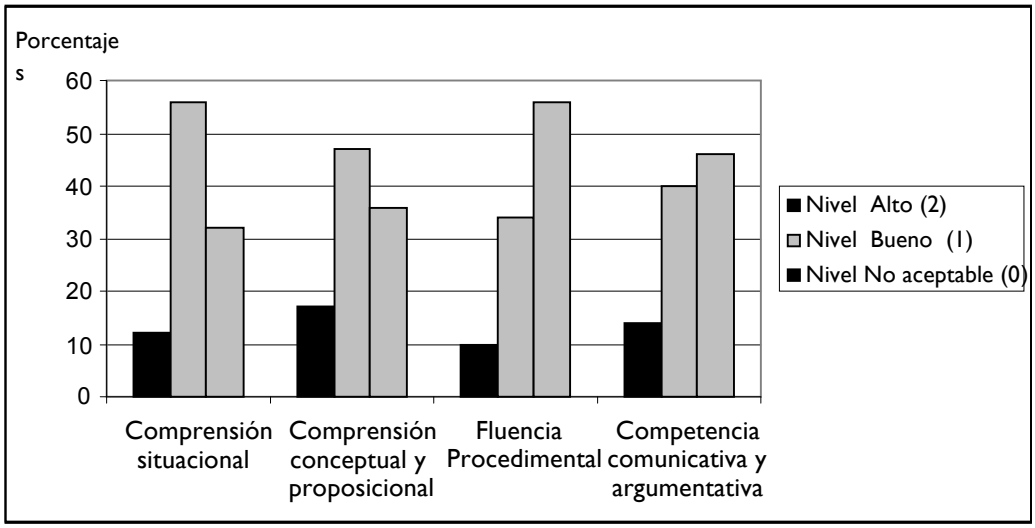


Figura 3: Resultados del indicador 2 de la componente aprendizaje del proceso de instrucción en la idoneidad cognitiva

El nivel de estas competencias pudo mejorarse porque los estudiantes tuvieron la oportunidad de modificar los trabajos, especialmente para la selección adecuada de los gráficos e interpretación de los mismos, como así también la relación de las medidas calculadas y la interpretación de sus significados en el contexto. También reflexionaron sobre todo el proceso, donde expresaron el alcance y las modificaciones adicionales que hicieron en el trabajo, lo que produjo una alta valoración en la competencia metacognitiva.

Referencias bibliográficas

Arteaga, P. (2011). *Evaluación de conocimientos sobre gráficos estadísticos y conocimientos didácticos de futuros profesores*. Tesis Doctoral no publicada. Universidad de Granada.

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística.

Batanero, C. y Diaz, C. (2011) *Estadística con Proyectos*. Granada: Universidad de Granada.

Gal, I. (2002). Adult's statistical literacy: Meaning, components, responsibilities. *International Statistical Review 70* (I), 1-25.

Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2009). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. Recuperado el 12 agosto 2011 en: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf.

Godino, J. *Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.* CIAEM XIII. (2011). Recife, Brasil.

Morano, D., Micheloud, O. y Lozeco, C. (2006) *Proyecto Estratégico De Reforma Curricular De Las Ingenierías 2005–2007*. Granada: SEP.

SISTEMAS LINEARES: DO ENSINO MÉDIO ÀS ENGENHARIAS

Maria Alice Veiga Ferreira de Souza y Larissa Martins Simmer
Instituto Federal do Espírito Santo Brasil
alicevfs@hotmail.com, mariaalice@ifes.edu.br, lsimmer05@hotmail.com

Resumen. Sistemas lineares integram conteúdos programáticos do Ensino Fundamental e se constituem em importante ferramenta descritiva e de decisão em diferentes situações no âmbito do ensino superior. Foi estudado o conceito de sistemas lineares de estudantes do ensino médio e superior das Engenharias (N=245), além de verificar a extensão da produção de significados e seus desempenhos quando aplicam tal conceito em problemas analíticos e de suas áreas de atuação, por meio de análise qualitativa e quantitativa, à luz, principalmente, de teorias sócio-históricas, do discurso e de solução de problemas. O estudo revelou, principalmente, que 89% dos estudantes do ensino médio não responderam ou responderam erradamente sobre o que era um sistema linear, contra 76% dos estudantes do Ensino Superior. 42% dos estudantes resolveram o problema proposto corretamente, sendo que quase a metade destes, o interpretaram erradamente.
Palabras clave: sistemas lineares, engenharia, solução de problemas, significados
Abstract. Linear systems integrate programmatics contents of Middle School and are an important descriptive tool and decision in different situations in higher education. The concept of linear systems of students in secondary and higher education of Engineering (N = 245) was studied, and verify the extent of production of meanings and and their performance when they implement this concept in analytical problems and their areas of expertise through qualitative and quantitative analysis, the light mainly from socio-historical theories of discourse and problem solving. The study revealed mainly that 89% of high school students did not respond or responded incorrectly on what was a linear system, compared to 76% of higher education students. 42% of students correctly solved the proposed problem, and almost a half of these, misinterpreted it.
Key words: linear systems, engineering, problem solving, meanings

O problema

Sistema linear é um conteúdo escolar aplicado em problemas da Matemática de Ensino Médio e Superior, tendo, no entanto, início de seu estudo no Ensino Fundamental. Seus usos são exigidos em diferentes contextos educacionais e científicos porque envolvem a solução de problemas.

No contexto do Ensino Superior encontra-se a necessidade do uso desses conteúdos escolares, por exemplo, para o estudo do fluxo de gás em um gasoduto repleto de ramificações; quando precisamos controlar o escoamento de veículos em entroncamentos de vias; quando controlamos a elaboração de um produto que demande diferentes etapas e insumos. Particularmente, são os sistemas lineares que auxiliam na obtenção de respostas para situações desse tipo.

Mas, a solução de problemas, em geral, está no final de uma série de etapas - não lineares e que se autoinfluenciam - que se iniciam com a construção do conceito científico de determinada ferramenta matemática quando se quer valorizar a produção de significados pelo estudante. É o que diz Vygotsky (2008), ao declarar que o desenvolvimento de um conceito científico geralmente começa com sua definição verbal e com sua aplicação em operações que ele chamou de não-espontâneas, pois necessitam de atitude mediada em relação ao seu objeto. Os conceitos

científicos se desenvolvem até chegarem em um nível elementar e concreto, ao contrário dos conceitos espontâneos.

Nesse sentido, cresce a importância de se conhecer a produção de significados pelos estudantes dos conceitos até então desenvolvidos, de ferramentas que irão auxiliá-los em respostas a problemas mais avançados, como é o caso de sistemas lineares. De início, é preciso compreender o que seja uma equação, uma equação linear, um sistema de equações, saber manipulá-los matematicamente, conhecer seus significados para que, posteriormente, se possa utilizá-los adequadamente na solução de problemas. Espera-se que estudantes de Ensino Médio e Superior estejam com esses conceitos em nível avançado, uma vez que seus estudos têm início no Ensino Fundamental e integram paulatinamente conteúdos que o tenham como pré-requisito.

Dada essa relevância para a Matemática, estudou-se o conceito de equações e sistemas lineares de estudantes de Ensino Médio e das Engenharias e a correta aplicação dessas ferramentas matemáticas em problema analítico e cotidiano.

Para isso, tiveram-se como objetivos:

1) Verificar os conceitos de equações e sistemas lineares de estudantes de Ensino Médio e Superior;

2) Verificar os significados produzidos pelos estudantes ao aplicarem a ferramenta de sistemas lineares em problema com linguagem matemática analítica e cotidiana.

O interesse pelo estudo de sistemas lineares se justifica não apenas pela abrangência e importância no estudo de Ciências, como pelo alto índice de reprovação e abandono registrado na disciplina de Álgebra Linear. Instituições de ensino superior do estado do Espírito Santo apresentaram índices de reprovação maiores que 50% nessa disciplina, chegando a quase 90%. Essa disciplina compõe geralmente o ciclo básico da estrutura curricular de cursos superiores justamente por servir de apoio a ferramentas mais técnicas e específicas que virão no futuro de cada um.

Para além do fracasso escolar na aprendizagem dos referidos conteúdos, pesquisas (Souza, 2001) indicam que os professores devem ser sensíveis ao fato de que o conceito inicialmente apreendido pelos estudantes deve sofrer aprimoramentos conforme o nível de exigência cresça e, por isso, se torna fundamental sua intervenção nesse processo, tal como afirmam Coimbra (2008) e Vygotsky (2008).

Fundamentação teórica

A presente pesquisa explorou o conceito e a produção de significados de estudantes no conteúdo matemático de equações e sistemas lineares. Para isso, contou-se com o apoio teórico de Vygotsky (1988) por estudar o pensamento e a linguagem de pessoas em meio a tarefas específicas. Essa teoria explora o signo, a linguagem e a construção de significados de conceitos escolares em um contexto sócio-histórico. Vygotsky procurou explicar o processo de internalização, passagem de funções elementares para superiores e as relações entre pensamento e linguagem. Para ele, a construção do psiquismo é realizada a partir do social e, assim sendo, adultos ou pessoas mais experientes contribuem significativamente para a interiorização das funções psíquicas.

Para Vygotsky, em meio ao social, a linguagem funciona como instrumento essencial para formação das funções psíquicas. A escola é um ambiente social por excelência e, por isso, espera-se que o conceito de sistemas lineares seja ali desenvolvido, com a mediação do professor ou de sujeitos mais experientes. Os estudos de Vygotsky revelaram a importância da aproximação dos conceitos espontâneo e científico. Essa não aproximação pode ser um dos fatores responsáveis pelos fracassos no estudo de sistemas lineares.

Além do apoio teórico sobre conceito, estudou-se a solução de problemas que usem o sistema linear como ferramenta, e, para isso, optou-se pelos estudos de Johnson-Laird (1992) para esse suporte. Para este autor, a solução de um problema deve cumprir quatro estágios: 1- compreensão do problema; 2- planejamento; 3- execução; 4- verificação da resposta encontrada. Problemas cotidianos, em geral, não exigem grande trabalho mental para solucioná-los. Já os praticados em graduações e que requerem o uso de ferramentas matemáticas, costumam requerer estratégias mais elaboradas.

Para Johnson-Laird (1983; 1992) inferir sobre um problema, seria como construir um modelo mental (ou modelos) do estado de coisas ali descritas, para então, buscar-se variantes desse modelo para descobrir se existiriam quaisquer conclusões que pudessem ser feitas. Seus estudos foram mais profundos para raciocínio dedutivo, no entanto, sua teoria é suficientemente abrangente (Eysenck & Keane, 1994) para estudos do raciocínio em meio à solução de problemas de maneira geral.

Sujeitos, instrumentos e procedimentos

O estudo qualitativo, com respaldo quantitativo, contou com a análise dos conceitos de equações e sistemas lineares de 245 estudantes (N=245), sendo 45 do Ensino Médio e 200 graduandos de Engenharia de instituições de ensino do Estado do Espírito Santo. Todos declararam já ter estudado esses conteúdos em séries passadas.

A coleta de dados foi levada a cabo por meio de um questionário que explorou a compreensão do que sejam equações lineares, sistemas lineares, bem como o desempenho na sua aplicação em um problema com linguagem analítica e outro que envolveu a compreensão, o cálculo e a interpretação no uso dessas ferramentas.

As perguntas eram:

1) como você reconhece uma expressão como sendo de uma equação linear?;

2) o que você entende por um sistema linear?;

3) para que valores da constante k o sistema de equações lineares não admite solução? (x-y=3; 2x-2y=k);

4) uma ração para canários é composta por dois tipos de sementes, A e B. Cada uma delas contém três nutrientes importantes, x, y e z, em quantidades diferentes: na ração A foram usadas 5 unidades de um nutriente x; 3 unidades de um nutriente y; 1 unidade de um nutriente z. Na ração B foram usadas 4 unidades de um nutriente x; 6 unidades de um nutriente y; 2 unidade de um nutriente z. Se a ração for preparada com 2 sementes A e 3 da semente B, qual a quantidade que encontraremos para cada um dos três nutrientes?

A análise dos conteúdos dos questionários foi realizada segundo a teoria de Bardin (1998, pp. 31-38) que se resume em um conjunto de técnicas de análise das comunicações, que utiliza procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens. Para ela, a análise de conteúdo tem como objetivo estudar relações entre as estruturas semântico-linguísticas com as estruturas psicológicas e sociológicas envolvidas.

Resultados e discussão

Os resultados apresentados pelos 245 estudantes foram categorizados segundo as informações dadas por eles, para cada questionamento.

Observamos do primeiro questionamento - como você reconhece uma expressão como sendo de uma equação linear? – que ninguém respondeu de forma completa, ou seja, informando as cinco exigências, conforme Poole (2004): todas as variáveis devem estar elevadas a um, não pode haver

argumentos trigonométricos, logarítmicos ou exponenciais e não pode existir produto de variáveis.

Categoria	N(%)	Nível superior/ (%)	Nível médio/(%)
Não respondeu	93 (38)	59 (29)	34 (76)
Respondeu com base em aspectos da expressão analítica	129 (53)	123 (61)	6 (13)
Respondeu com base geométrica	17 (7)	17 (9)	-
Respondeu erradamente ou sem sentido	6 (2)	1 (1)	5 (11)
TOTAL	245 (100)	200 (100)	45 (100)

Tabela 1: Resultados sobre o reconhecimento de uma expressão como sendo de uma equação linear: ensino médio mais as engenharias (N=245) e estratificados por nível escolar.

Conforme a Tabela 1, as respostas com base em aspectos da expressão analítica deixaram pistas de que os estudantes tinham alguma noção, mesmo que mínima, sobre o reconhecimento da expressão. De qualquer modo, há confusão ainda quanto aos significados dos termos. Seis estudantes responderam com sentenças sem sentido ou erradas, tal como, "não é necessário e quase nunca irá ter os valores de x, y, z".

A análise também é possível em termos de nível médio e superior. Observou-se da Tabela 1 que quase todas as respostas desconexas ou erradas vieram dos estudantes de Ensino Médio (11%). 76% nesse nível de ensino não responderam à pergunta, contra somente 29% do Ensino Superior. Pelo lado das Engenharias, 70% dos estudantes responderam com base em algum aspecto correto da ferramenta, mesmo que de maneira incompleta. Seria um indício de evolução.

Em relação ao segundo questionamento - o que você entende por um sistema linear?- foram criadas as categorias a partir das respostas dos estudantes, conforme a Tabela 2

Categoria	N (%)	Nível superior/ (%)	Nível médio/(%)
Não respondeu	100 (41)	65 (33)	35 (78)
Respondeu com base no gráfico	7 (3)	4 (2)	3 (7)
Respondeu corretamente	47 (19)	45 (22)	2 (4)
Respondeu erradamente ou sem sentido ou de forma analítica incompleta	91 (37)	86 (43)	5 (11)
TOTAL	245 (100)	200 (100)	45 (100)

Tabela 2: Resultados sobre o que se entende por um sistema linear: ensino médio mais as engenharias (N=245) e estratificados por nível escolar.

Comparando-se os resultados da tabela 1 e 2, infere-se que, apesar de 47 estudantes responderem corretamente ao que seja um sistema linear, não há clareza do que seja uma equação linear. Para esses estudantes, seja lá o que for uma equação linear, há compreensão do

que seja um sistema linear. Apesar desse resultado, 78% dos estudantes não souberam responder ou responderam erradamente, sem sentido ou de forma incompleta a esse questionamento.

Agrupando-se os dados pelo nível escolar, é possível concluir haver maior quantidade de estudantes respondendo corretamente no Ensino Superior (22%) do que no Ensino Médio (4%), o que confirma a teoria de Vygotsky de que os conceitos evoluem à medida que se agregam conhecimento à estrutura cognitiva dos sujeitos. Outras teorias declaram o mesmo fato, em termos diferentes, como a teoria da aprendizagem significativa de Ausubel (2002). Esse autor pontua que a aprendizagem se dá em um movimento dinâmico a partir de conteúdos prévios já internalizados na estrutura cognitiva. Esses conteúdos receberão novos elementos que, por sua vez, poderão modificar e dar outras significações àqueles pré-existentes. É nesse sentido que os conceitos vão se tornando complexos e mais avançados.

A pesquisa também revelou alto índice (78% + 11% = 89%) de não respondentes e respondentes que apresentaram conceitos errados, sem sentido ou incompletos de estudantes de Ensino Médio. Esse fato é preocupante, pois tende a comprometer a evolução da estrutura cognitiva do estudante quando for requerido o uso dessas ferramentas em situações concretas, como no caso do Ensino Superior. Essa constatação pode ser forte indício para os fracassos observados em disciplinas de Álgebra Linear em graduações, quando se deseja a produção de significados para os objetos matemáticos. Essa linha de pensamento é reforçada ao se constatar o índice de 76% nas mesmas categorias pelos estudantes do Ensino Superior.

Outro item de destaque da Tabela 2 é a baixa tendência em se entender sistemas lineares pelo modo gráfico, tanto no Ensino Médio (7%) quanto no Ensino Superior (2%). Apesar de os protocolos desses estudantes não expressarem corretamente o que seja um sistema linear, estes podem ser sujeitos que tenham tendência a pensar de modo imagético, conforme nos informam teóricos da Psicologia Cognitiva: Krutetskii (1976), Johnson-Laird (1992) e Sternberg (2000), para citar alguns. Por isso, os docentes devem estar atentos à diversificação de seus discursos para alcançar todos os tipos de mentes.

No que diz respeito ao terceiro questionamento "para que valores da constante K o sistema de equações lineares não admite solução?", desejou-se conhecer a interpretação dada pelos estudantes ao resolverem um sistema linear analiticamente. Para essas respostas foram criadas quatro categorias, conforme Tabela 3.

Categoria	N (%)	Ensino Superior/(%)	Ensino Médio/(%)
Não soube resolver	89 (36)	55 (27,5)	34 (76)
Acertou: k≠6	55 (22,5)	55 (27,5)	-
Encontrou: k=6	55 (22,5)	54 (27)	1 (2)
Encontrou respostas erradas/absurdas	46 (19)	36 (18)	10 (22)
TOTAL	245 (100)	200 (100)	45 (100)

Tabela 3: Resultados da resolução de um sistema linear e a correspondente interpretação aos 245 estudantes: ensino médio mais as engenharias (N=245) e estratificados por nível escolar.

Da Tabela 3, constata-se que, na verdade, 45% dos estudantes souberam resolver o sistema linear corretamente. A diferença entre a segunda e a terceira categorias é que 55 de 110 estudantes não interpretaram o resultado obtido, ou seja, não cumpriram com a quarta etapa descrita por Johnson-Laird quando da solução de problemas. Pediram-se os valores de k que tornariam o sistema impossível. Quando k=6 resulta em infinitas soluções. O que contraria esse resultado é exatamente o contrário, ou seja, quando k≠6, obtém-se nenhuma solução porque retira de k a multiplicidade ocorrida entre os coeficientes das variáveis x e y das duas equações. Daí, qualquer valor diferente de 6 tornará o sistema impossível. Esse fenômeno – da não interpretação do resultado obtido na solução de problemas – foi também verificado por Schoenfeld (1996). Ao perguntar a seus alunos quantos veículos com capacidade de 36 pessoas são necessários para transportar 1128 soldados, 29% disseram "31, resto 12", 18% responderam "31", e somente 23% declararam "32", corretamente.

Apesar da ausência de interpretação de alguns estudantes, o índice dos que não souberam resolver ou que encontraram respostas erradas ou absurdas foi maior (55%). Esse resultado reforça o cenário de altas reprovações em Álgebra Linear verificadas no Ensino Superior.

A Tabela 3 revela que a maior parte dos que não souberam resolver concentra-se no Ensino Médio (76%). Em contrapartida, 54,5% dos estudantes de Ensino Superior resolveram corretamente o sistema, apesar de, aproximadamente, metade não ter realizado a interpretação corretamente – quarta etapa da solução descrita por Johnson-Laird. Esse resultado leva a crer em progresso, no que diz respeito à manipulação algébrica do sistema, da passagem de estudantes de Ensino Médio para o Ensino Superior.

Por fim, foi proposto aos 245 estudantes resolverem um problema cotidiano que fizesse uso da ferramenta de sistemas lineares. As respostas permitiram formular três categorias, conforme Tabela 4.

Categoria	N (%)	Ensino Superior/(%)	Ensino Médio/(%)
Não soube resolver	77 (31)	53 (27)	24 (53)
Acertou a solução: (22, 24, 8)	102 (42)	96 (48)	6 (13)
Encontrou respostas erradas/absurdas	66 (27)	51 (25)	15 (34)
TOTAL	245 (100)	200 (100)	45 (100)

Tabela 4: Resultados da proposta aos 245 estudantes de resolução de um problema cotidiano que fizesse uso de sistemas lineares: ensino médio mais as engenharias (N=245) e estratificados por nível escolar.

A Tabela 4 mostra que 42% dos estudantes resolveram corretamente o problema cotidiano proposto. Este é um índice que não deve ser desprezado, pois, apesar dos altos índices de baixa compreensão dos conceitos e dos problemas encontrados, quando do reconhecimento das ferramentas, há certa compreensão do que o conteúdo de sistemas pode fazer para solucionar o problema. É possível, daí, concordar com as teorias de Vygotsky e de Ausubel que dizem que a aprendizagem não é algo linear, mas construída em meio à atividade e que, conforme se avança em conhecimento, essa estrutura se atualiza, tornando conceitos antigos, mais complexos. O fato de o conceito de um sujeito sobre determinado assunto ainda estar em construção e necessitando de aprimoramentos, não impede que ele realize outras tarefas ligadas a esse assunto. É possível que o algoritmo de solução de problemas como o proposto esteja internalizado na estrutura cognitiva dos estudantes, de forma mecânica. Conforme surgem novos elementos de aprendizagem, a estrutura se renova, aumentando o potencial de compreensão pelo sujeito. Por outro lado, também é possível que esses estudantes tenham atingido o nível de compreensão que se espera de um estudante tanto de nível Médio quanto de Superior. Somente uma pesquisa descritiva dos passos dessas soluções poderia revelar esse item.

Os dados também revelam 58% não souberam resolvê-lo ou encontraram respostas absurdas e/ou erradas. Esse índice reforça os fracassos encontrados em disciplinas como a Álgebra Linear.

Observa-se ainda da Tabela 4 que a maior parte dos que não souberam resolver ou que encontraram respostas erradas e/ou absurdas (87%) encontra-se entre os estudantes de nível médio, contra 52% dos de nível superior. Esse resultado leva a crer que o avanço da escolaridade contribuiu com a produção de significados dos estudantes, confirmando as teorias educacionais antes mencionadas. Outro fator que contribui para essa conclusão é o de que 48% dos estudantes de nível superior resolveram adequadamente o problema, contra apenas 13% dos de nível médio, o que sugere investirem-se mais esforços educacionais na aprendizagem do Ensino Médio.

Conclusões

O estudo revelou baixa compreensão do que seja um sistema linear. Não apenas pelo "sistema", mas também pelo "linear". Foi investigado, por isso, os seus entendimentos sobre o que seria uma equação linear. Os conceitos declarados pelos estudantes, quando declarados, estiveram baseados, principalmente, em fragmentos de aspectos analíticos vividos por eles em aulas de Matemática. Nenhum dos 245 estudantes atingiu um nível de compreensão completo, revelando, com isso, insuficiências no ensino praticado em graus anteriores.

Apesar desse resultado, 42% dos estudantes resolveram corretamente o problema proposto, sendo que quase a metade destes, interpretaram o problema incorretamente. Esse resultado comparado aos anteriores levanta a possibilidade de o estudo de sistemas lineares ter sido desligado das compreensões do que essa ferramenta matemática significa. A aplicação de sistemas pode ter sido realizada por algoritmos pré-estabelecidos durante o curso educacional escolar, mas que não garante a evolução ou mesmo a apreensão do conceito.

Referências Bibliográficas

Ausubel, D. P. (2002). *Adquisición y retención del conocimiento: una perspectiva cognitiva*. Barcelona: Paidós.

Bardin, L. (1998). *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70.

Coimbra, J. L. (2008). *Alguns aspectos problemáticos relacionados ao ensino-aprendizagem da Álgebra Linear*. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico da Universidade Federal do Pará.

Eysenck, W.M. y Keane, M.T. (1994). *Psicologia cognitiva: um manual introdutório*. Porto Alegre, RS: Artes Médicas.

Johnson-Laird, N. P. (1992). A capacidade para o raciocínio dedutivo. In Sternberg (Ed.), *As capacidades intelectuais humanas*: uma abordagem em processamento de informações (pp.194-216). Porto Alegre: Artes Médicas.

Johnson-Laird, N. P. (1983). *Mental models*. Cambridge: Harvard University Press.

Krutetskii, V.A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago: The University of Chicago Press.

Poole, D. (2004). *Álgebra linear*. São Paulo: Pioneira Thomson Learning.

Shoenfeld, A. (1996). Porquê toda essa agitação acerca da resolução de problemas? In P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Pontes (Eds.), *Investigar para aprender matemática* (pp.61-72). Lisboa: APM e Projecto MPT.

Souza, M. A. V. F de. (2001). *Uma análise de discursos no ensino e aprendizagem de função*. 19/12/2001. 258 f. (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, ES.

Sternberg, R. J. (2000). *Psicologia Cognitiva*. Porto Alegre: Artes Médicas.

Vigotskii, L. S., Luria, A. R. e Leontiev, A. N. (1988). *Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem*. São Paulo: Ícone.

Vygotsky, L. S. (2008). *Pensamento e linguagem*. São Paulo: Martins Fontes.

TRABALHANDO A MATEMÁTICA E DESENVOLVENDO A CIÊNCIA

Renata Camacho Bezerra, José Ricardo Souza y Kelly Roberta Mazzutti Lubeck
Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE. Brasil
renatacamachobezerra@gmail.com, josericardo1012@gmail.com, kellyrobertaml@gmail.com

Resumen. A Matemática na maioria das vezes é vista como uma disciplina pronta e acabada e sem espaço para a criatividade. Com o objetivo de alterar este panorama e auxiliar no processo de ensino e aprendizagem é que foi proposto o projeto de extensão "Estação Ciência – Módulo de Matemática". Neste projeto as ações são desenvolvidas numa parceria entre a Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Campus de Foz do Iguaçu e a Fundação Parque Tecnológico de ITAIPU – FPTI/BR, sendo que as atividades e materiais pedagógicos são elaborados por docentes e discentes do curso de licenciatura em Matemática e o espaço, divulgação do projeto e apoio financeiro são oriundos da Fundação. Através deste trabalho, divulgamos e popularizamos esta disciplina como uma ciência resultante de uma construção social, dinâmica e em constante evolução. As atividades desenvolvidas neste espaço são criadas, (re) criadas ou apenas adaptadas de diferentes contextos e exploram conceitos matemáticos através de exposições e experimentos interativos e lúdicos.
Palabras clave: educação matemática, lúdico, material concreto
Abstract. Mathematics is most often described as a ready and finished subject without creativity. In order to change this situation and assist in the teaching-learning process it was proposed the Extension Project "Science Station – Mathematics Module". In this project actions are developed in a partnership between the State University of West od Paraná – Campus de Foz do Iguassu and Itaipu Technological Park Foundation – FPTI/BR, and the activities and teaching materials are developed by teachers and students of the course degree in Mathematics, and the space, the project publication and financial support come from the Foundation. Thought this work, we publish and popularized this subject as a science resulting from a social, dynamic and in constantly evolution. The activities in this space are created, (re) created or adapted for different contexts and explores mathematical concepts through exhibition and ludic and interactive experiments.
Key words: mathematics education, ludic, concrete material

Introducción

A Matemática na maioria das vezes é vista como uma disciplina pronta e acabada sem espaço para a criatividade. Isso gera uma grande aversão e a mesma passa a ser vista como uma das grandes responsáveis pelo fracasso escolar, pois deixamos de apresentar as muitas facetas interessantes e desafiadoras desta disciplina.

Diante desse quadro é necessário que pensemos alternativas metodológicas através de ações efetivas que resultem numa mudança do panorama atual. Neste sentido, e pensando em contribuir com o processo de ensino e aprendizagem da Matemática e alterar esse panorama é que foi desenvolvido o projeto de extensão a "Estação Ciência – Módulo de Matemática". As atividades se realizam numa parceria entre a Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE Campus de Foz do Iguaçu (Brasil – Paraná) e a Fundação Parque Tecnológico ITAIPU – FPTI/BR (Brasil – Paraná).

Cientes de que a universidade se sustenta na tríade ensino, pesquisa e extensão, este artigo tem por finalidade relatar o trabalho de extensão desenvolvido e as concepções implícitas e explicitas que nortearam a realização do mesmo, baseados nos autores: D'ambrosio (1996), Guelli (2001),

Imenes e Lellis (1999), Kamii (1996, 2005), Lorenzato (2006), Mori (2000), Smole (1996, 2000), Smoothey (1997) e Tahan (2003).

Através da extensão universitária, divulgamos e popularizamos a Matemática como uma ciência resultante de uma construção social, dinâmica e em constante evolução. As atividades elaboradas e desenvolvidas mostram os conceitos matemáticos presentes no cotidiano, através de exposições, experimentos interativos e lúdicos. O principal objetivo é levar a todas as crianças de Foz do Iguaçu e região um conhecimento científico acessível e contribuir para que essas crianças desenvolvam uma cultura científica que lhes instiguem a questionar e descobrir.

Além disso, o trabalho é uma oportunidade para aproximarmos o universo científico do dia-a-dia das crianças, para instigar a curiosidade e difundir conhecimentos, além é claro de incentivar a pesquisa. Neste espaço, procuramos desenvolver atividades que tem como objetivo principal facilitar o processo de ensino e aprendizagem, assim como, despertar nos alunos o interesse e a curiosidade pela Matemática.

As atividades são elaboradas e desenvolvidas por acadêmicos do Curso de Licenciatura em Matemática, em parceria com supervisores (professores da Licenciatura em Matemática da universidade) e tem como foco a educação infantil, o ensino fundamental e o ensino médio. Embora neste trabalho estejamos destacando apenas o trabalho realizado na educação infantil.

Para a elaboração dos materiais, levamos em consideração os aspectos lúdicos que possam ser explorados, criando novas atividades ou mesmo adaptando atividades já desenvolvidas para o contexto/conteúdo que desejamos explorar de forma que o aluno vivencie, experimente e comprove que a Matemática é uma construção humana e social e a partir daí estabeleça relações com o conteúdo escolar, com outras ciências e com o seu dia a dia.

Ao longo dos anos os objetivos deste projeto vinculado a Pró Reitoriade Extensão - PROEX tem sido:

- Tornar o conhecimento Matemático acessível a todos;
- Possibilitar troca de saberes entre a universidade e a comunidade;
- Articular, divulgar e produzir conhecimento cientifico;
- Estimular a curiosidade e o espírito científico dos alunos do ensino fundamental;
- Oportunizar a construção do conhecimento matemático fora do ambiente escolar;
- Estabelecer relações interdisciplinares entre a Matemática e outras ciências;
- Articular ensino, pesquisa e extensão através de atividades matemáticas;

- Desenvolver o raciocínio lógico e a criatividade de alunos e futuros professores de Matemática;
- Valorizar o aspecto lúdico no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

O trabalho na "Estação Ciência – Módulo de Matemática" tornou-se um projeto de extensão permanente no final de 2008 e funciona como um espaço para divulgar e produzir ciência. A Estação Ciência possui outros "módulos" e os cientistas - público atendido pelo projeto – têm a possibilidade de realizar um passeio pelas várias áreas da ciência, como física, literatura, água, natureza, biologia, saúde e informática. Os módulos recebem membros da comunidade, alunos e professores de escolas públicas e privadas de Foz do Iguaçu e região, incluindo dos países vizinhos como o Paraguai e a Argentina.

Pudemos perceber ao longo do desenvolvimento das atividades que muitas crianças, que entram no módulo muitas vezes dizendo não "gostar" de Matemática, saem querendo voltar para outra visita e, ainda, por considerarem as atividades divertidas muitas vezes não caracterizam o módulo como sendo um módulo de Matemática.

Os professores que acompanham a visita muitas vezes procuram os monitores com o objetivo de obter mais informações sobre as atividades o que, a nosso ver, demonstra que as ações desenvolvidas pelo módulo provocam o professor a refletir sobre sua prática e, diante da reação das crianças, a pensar em possíveis mudanças no seu dia a dia em sala de aula. Constatamos em nossa prática que a Matemática através do nosso trabalho não é apenas desmitificada para alunos da educação básica, mas também para os professores que a lecionam, e para nossos futuros professores de Matemática participantes do projeto.

As experiências e atividades são descritas e catalogadas formando assim um acervo que tem pretensão de ser utilizado na realização de oficinas para os docentes interessados, com o objetivo de que estes possam criar e recriar atividades baseados na experiência do projeto desenvolvido.

Ao longo do trabalho temos buscado a interação com a comunidade acadêmica, a comunidade externa e o universo científico, através de experimentos e exposições, com o objetivo de instigar o senso investigativo e criativo de todos os participantes, permitindo dessa forma a construção do conhecimento.

Durante a realização das ações também ficamos bastante atentos para que as atividades não tenham o formato de uma aula tradicional e que os alunos ao adentrarem o Módulo de Matemática tenham contato com o que acreditamos ser uma Matemática fruto de uma construção social e que tem espaço aberto para a criatividade, para descobertas e para a

construção e (re) construção do conhecimento. Com isso, o Módulo vai ao longo dos anos não só atingindo seus objetivos iniciais como também os ampliando cada vez mais.

Os módulos da estação trabalham muitas vezes com uma temática comum, buscando desenvolver ações de forma interdisciplinar. Para exemplificar o trabalho desenvolvido, apresentamos uma das atividades que foi aplicada no Módulo de Matemática e na qual se buscou estabelecer relações com o Módulo de Literatura. A atividade se intitula "Histórias e Números" e, além de trabalhar com assuntos propriamente da matemática, como a fração e o raciocínio lógico, também utiliza a interpretação de "problemas texto", a "contação de histórias" e fornece conhecimento sobre a cultura árabe. Esta atividade se baseia na obra "O Homem que Calculava" de Malba Tahan, um pseudônimo do professor Júlio César de Mello e Sousa. Este autor trata de assuntos específicos da matemática, mas também valoriza o cotidiano, a resolução de problemas e de uma forma geral as histórias.

Para a atividade, os monitores contam/dramatizam toda a história do Calculista Beremiz Samir que está sempre viajando por todas as cidades do Oriente Médio. Numa dessas viagens Beremiz Samir auxilia umcheique a resolver o seguinte problema: três amigos, criadores de carneiro receberam como pagamento de pequeno lote de carneiros uma partida de vinho, composto de 21 vasos iguais sendo: 7 cheios, 7 meios- cheios e 7 vazios. Querem dividir os 21 vasos de modo que cada um deles receba o mesmo número de vasos e a mesma porção de vinho. De acordo com o autor Malba Tahan (2009, p.56): "Repartir os vasos é fácil. Cada um dos sócios deve ficar com sete vasos. A dificuldade, a meu ver, está em repartir o vinho sem abrir os vasos, isto é, conservando-os exatamente como estão".

Para melhor contextualizar a história, na sala foi criado um clima que relembrasse uma tenda árabe utilizando lençóis no teto, luz vermelha e tapete e almofadas no chão para as crianças sentarem. Também introduzimos os vasos de vinho (substituídos por garrafas plásticas pintadas de dourado), nas quais 7 estavam vazias, 7 meio-cheias e 7 cheias com água. Foram confeccionados 3 jogos de cartas, onde cada jogo continha 21 cartas, 7 representavam vasos de vinho cheios, 7 meio-cheios e 7 vazios para auxiliar na resolução do problema.

Com todo este material, as crianças permanecem atentas à história, procuram interpretar o problema e, através dos materiais manipuláveis, testam conjecturas, questionam e investigam soluções.

Dessa forma, nossa intenção é levar os futuros professores de Matemática, os professores das turmas e os próprios alunos a compreenderem o ensino desta disciplina de uma forma diferenciada da que eles na maioria das vezes vivenciaram. Muitas vezes a descoberta que

proporcionamos aos alunos da educação básica foi antes uma descoberta para cada um destes professores.

Os professores da educação infantil passam a ver a matemática com outros olhos e a se interessar, mesmo que timidamente, pelo ensino desta disciplina e, dessa forma, acreditamos que estamos provocando uma reflexão do processo de ensino e aprendizagem da matemática nos anos iniciais.

Para as crianças que participam do projeto aprender de forma lúdica, ou melhor, aprender brincando, faz com o que o aprendizado além de significativo seja agradável. E para nós professores da universidade é uma oportunidade de vivenciar e promover a tríade ensino, pesquisa e extensão além, é claro, de divulgar o ensino de matemática contextualizado e lúdico, fato que acreditamos ser importante principalmente nos anos iniciais.

Mais do que compreender esta área do conhecimento como uma construção social onde o sujeito deve ser ativo na elaboração do seu conhecimento, nós vivenciamos esta verdade, e é isto que este projeto proporciona a cada um de seus participantes, seja professor de Matemática na universidade, ou acadêmico, ou professor que leciona Matemática na educação básica, ou mesmo o aluno do ensino básico.

Todos vivenciam uma Matemática viva onde temos total espaço para não só despertar, mas principalmente para trabalhar a criatividade nas relações que criamos entre a universidade e a comunidade e entre o ensino acadêmico e o saber cotidiano e, com isso, a cada atividade elaborada e trabalhada temos a oportunidade de construirmos e (re) construirmos o nosso conhecimento matemático, além é claro, de desmitificar a disciplina de Matemática.

Ao longo dos últimos anos, os objetivos têm sido atingidos na íntegra, além de popularizar a Matemática entre as crianças de uma forma lúdica e prazerosa temos levado os nossos professores e futuros professores de Matemática a refletirem sob o processo de ensino e aprendizagem e a buscar alternativas metodológicas que permitam não só o sucesso no processo, mas que também despertem o interesse pela ciência e dessa forma possamos a médio e longo prazo contribuir para diminuir consideravelmente a reprovação e a evasão escolar no que tange a disciplina de Matemática.

Esta parceria entre a universidade e a FPTI, que financia as atividades, bem como, oferece bolsas aos acadêmicos da universidade, tem como premissa tornar a Matemática acessível a todos e contribuir para despertar o interesse dos alunos, acabando assim com o mito de que ela é para poucos.

Por fim, vivenciar a extensão através deste projeto que congrega também o ensino e a pesquisa, e que é uma prova viva da indissociabilidade que deve existir entre estes universos, nos trás a sensação de que a universidade através do Curso de Licenciatura em Matemática está cumprindo com seu compromisso social. Está aproximando a universidade da comunidade, está desmitificando a Matemática, está aproximando professores e futuros professores com o mesmo objetivo, ou seja, o de tornar a Matemática acessível a um maior número de pessoas possível. Ao despertar o interesse dos alunos, acreditamos que estaremos contribuindo para acabar com o mito de que a Matemática é uma disciplina fria, pronta e sem espaço para a criatividade e a transformado em algo dinâmico, criativo e em constante processo de criação e (re) criação. Assim, o projeto "Estação Ciência – Módulo de Matemática" faz com que a Matemática ganhe vida, valorizando nosso papel importante enquanto sujeitos ativos de nossa formação e da construção e (re) construção do nosso conhecimento.

Referências bibliográficas

D'ambrosio, U. (1996). *Educação Matemática: da teoria à prática.* Campinas: Papirus.

Guelli, O.(2001). *Matemática.*São Paulo: Ática.

Imenes, L. M. P. e Lellis, M. (1999). *Os Números na História da Civilização.*São Paulo: Scipione.

Kamii, C.(1996). *ACriança e o Número.* Campinas: Papirus.

Kamii, C. (2005). *Crianças Pequenas Continuam Reinventando.* Porto Alegre: Artmed.

Lorenzato, S. (2006). *Educação Infantil e Percepção Matemática.* São Paulo: Autores Associados.

Lorenzato, S. (2006). *Para Aprender Matemática.* São Paulo: Autores Associados.

Mori, I. (2000).*Viver e Aprender Matemática.*São Paulo: Saraiva.

Smole, K. C. S. (1996). *A Matemática na Educação Infantil.* Porto Alegre: Artmed.

Smole, K. C. S. (2000). *Brincadeiras Infantis nas aulas de Matemática.*Porto Alegre: Artmed.

Smoothey, M. (1997). *Atividades e Jogos com Números.*São Paulo: Scipione.

Tahan, M. (2003). *O Homem que Calculava.*Edição 63. Rio de Janeiro: Record.

ACTIVIDAD REFLEXIVA SOBRE MODELIZACIÓN ETNO-MATEMÁTICA DEL TRENZADO

Veronica Albanese, Francisco Javier Perales Palacios y María Luisa Oliverasve
Universidad de Granada España
very_alba@hotmail.it, fperales@ugr.es, oliveras@ugr.es

Resumen. A partir de la modelización matemática de una artesanía de trenzado, se diseña una actividad basada en la educación como enculturación desde una perspectiva etnomatemática. El objetivo es llevar a cabo una reflexión epistemológica sobre las matemáticas como lenguaje, como estructura para representar la práctica, y como forma de conocer. Se emplea una metodología innovadora de corte investigativo en donde los participantes construyen activamente y consensúan una modelización creativa de la realización de un trenzado simple. Finalmente se relatan las evaluaciones de una experiencia piloto de la actividad descrita.

Palabras clave: etnomatemáticas, enculturación, diseño de actividad

Abstract. From the mathematical modeling of a braiding craft, we design an activity based on education as enculturation from anethnomathematical perspective. The objective is carrying out an epistemological reflection on mathematics as a language, as a structure representing the practice, and as a way of knowing. We employ an innovative methodology based on research where participants actively construct and agree on a creative modeling of the making of a simple braid. Finally we describe the assessments of a pilot experience on the activity described.

Key words:ethnomathematics, enculturation, task design

Planteamiento

La actividad que presentamos se inserta en una perspectiva etnomatemática de la educación matemática, que tiene sus raíces en un paradigma relativista y socio-constructivista del conocimiento, valora un aprendizaje significativo y contextualizado en el entorno social y cultural, así como una educación centrada en el desarrollo de habilidades críticas y reflexivas.

La propuesta se enmarca en la línea metodológica propuesta por Oliveras (Oliveras y Albanese, 2011) basada en el reconocimiento de un signo cultural, es decir, un rasgo de una cultura o microcultura determinada, que contenga un potencial matemático identificable, para después diseñar tareas o actividades que hagan hincapié en el signo e involucren prácticas relacionadas con este.

El signo cultural elegido para el diseño de esa actividad es una artesanía de la región de Salta en Argentina, cuyo potencial matemático ha sido investigado en un estudio etnomatemático realizado en el entorno artesanal (Albanese, 2011). El objeto de estudio es el trenzado (Oliveras y Albanese, 2012), una forma de tejer hilos sin telar cuyo producto son trenzas o cordeles. La indagación ha proporcionado una modelización matemática del trenzado (Castagnolo, 2012; Albanese, Oliveras y Perales, 2012a; Albanese, Oliveras y Perales, 2013) que plantea grandes posibilidades para su uso educativo

Marco Teórico

Los principios teóricos sobre los cuales se basa el diseño de esta actividad son los de las Etnomatemáticas (D'Ambrosio, 2008) como forma, manera (ticas) de conocer, entender y pensar (matema) la realidad, el entorno (etno) -aclaramos que más adelante nos referiremos a esta visión como "pensar matemáticamente"-, asimismo se basan en el relativismo de la reformulación de las matemáticas como "QRS-system" (Barton, 2008, p.10), esto es, sistemas que abarcan los aspectos relacionales, cuantitativos y espaciales de la experiencia humana. En este sentido se maneja una visión de las matemáticas más amplia respecto a lo que Barton (2008) llama el "NUC-system", que incluye solo las matemáticas convencionales propias de la cultura académica.

Esta perspectiva valora la importancia del lenguaje en la construcción de estos QRS-system por parte de comunidades que comparten y consensúan códigos comunes, con el propósito de permitir la comunicación, de representar y "pensar" el entorno que los rodea para manejarlo, controlarlo y eventualmente modificarlo. Uno de los objetivos de la actividad que proponemos es concientizar a los participantes de que el lenguaje específico juega un papel central en el desarrollo de las habilidades de representación (Vygotsky, 1995) y manipulación de los elementos del entorno artesanal, representaciones que se pueden presentar de forma *icónica* como imágenes o figuras, *verbal* como lenguaje natural o *simbólica* como conjuntos de códigos con sus reglas (Duval, 2006).

Rosa y Orey (2003) manifiestan que una educación en perspectiva etnomatemática sitúa su foco de interés en el pensamiento matemático del grupo cultural considerado, y en su construcción de un modelo de interpretación de la realidad que lo rodea. La manipulación de modelos sirve como estrategia de investigación del pensamiento matemático de los grupos culturales (Scandiuzzi, 2002), para una educación culturalmente más comprensiva.

Otra herramienta que proporcionan las Etnomatemáticas a nivel educativo, como sugiere Shirley (1998, 2001), es la introducción de una metodología innovadora basada en el concepto de enculturación (Bishop, 1999; Gavarrete, 2012; Oliveras y Gavarrete, 2012), donde el aprendizaje se realiza por construcción activa y participativa (Presmeg, 1998; Oliveras 1996) de los conocimientos y de las formas de pensar, que los estudiantes van compartiendo y consensuando a través de actividades en pequeños grupos de corte investigativo y reflexivo. Esta metodología permite además el acercamiento del proceso de aprendizaje en las escuelas al proceso de construcción del conocimiento por parte de la comunidad científica (Albanese, Oliveras y Perales, 2012b) y se basa en la experiencia directa, en la vivencia (D'Ambrosio, 1988) y en el consenso de los conocimientos construido por la comunidad de participantes.

Diseño de la actividad

El diseño de la actividad didáctica con la construcción de fichas de trabajo y de material manipulativo toma inspiración de las investigaciones de Gavarrete (2012), Favilli, César y Oliveras (2004), y Oliveras y Gavarrete (2012).

La actividad se presenta bajo la forma de un taller de reflexión para profesores en formación, profesores en activo y capacitadores de profesores del área de matemáticas.

El objetivo general de la actividad es promover la reflexión sobre las matemáticas como forma de pensar relacionada con el contexto cultural. Para alcanzar este propósito se parte de la construcción compartida y consensuada de la representación de una práctica artesanal.

Los objetivos específicos a conseguir son:

O.1. Desarrollar una representación de una práctica etnomatemática en un contexto artesanal;

O.2. Consensuar las representaciones construidas a través de un proceso de reflexión crítica;

O.3. Exponer una modelización con implicaciones matemáticas desarrollada por un grupo de artesanos;

O.4. Reflexionar sobre el propio proceso de enculturación y sus potencialidades educativas.

La actividad se organiza en tres etapas, cada una centrada en una o más fichas (Cuadro 1): (A) un primer momento de reflexión sobre las matemáticas se lleva a cabo a través de una lluvia de ideas sobre el "pensar matemáticamente"; (B) un segundo momento centrado en la realización y representación de un trenzado de 4 hilos, cuyas fases analizaremos en detalle; y (C) un tercer momento de reflexión final sobre el desarrollo de habilidades de representación y modelización, y las posibilidades educativas de presentar la actividad en clases de matemáticas. Estas últimas podrían enfocarse: a) como introducción al concepto matemático de grafo; b) como punto de partida para una reflexión sobre las matemáticas como producto cultural, construido y consensuado socialmente y las potenciales metodologías de enseñanza; y c) en torno a la reflexión epistemológica sobre las matemáticas como forma de pensar y el pensar matemáticamente como instrumento crítico para enfrentarse a la realidad.

Veremos en detalle las tres fases que componen el momento central (B), focalizado en la actividad artesanal. Cada fase está caracterizada por una forma distinta de interacción entre los participantes: primero se trabaja de forma individual, después los participantes trabajan en pequeños grupos y al final los grupos interaccionan en una puesta en común de los resultados de cada grupo (Cuadro 1).

Reflexión introductoria: interacción entre todos los participantes.

A. Actividad práctico-creativa:

Fase 1. Descripción de la realización del trenzado: individual.

Fase 2. Representación creativa consensuada: en pequeños grupos.

Fase 3. Confrontación de las representaciones y de la modelización artesanal: interacción entre los grupos.

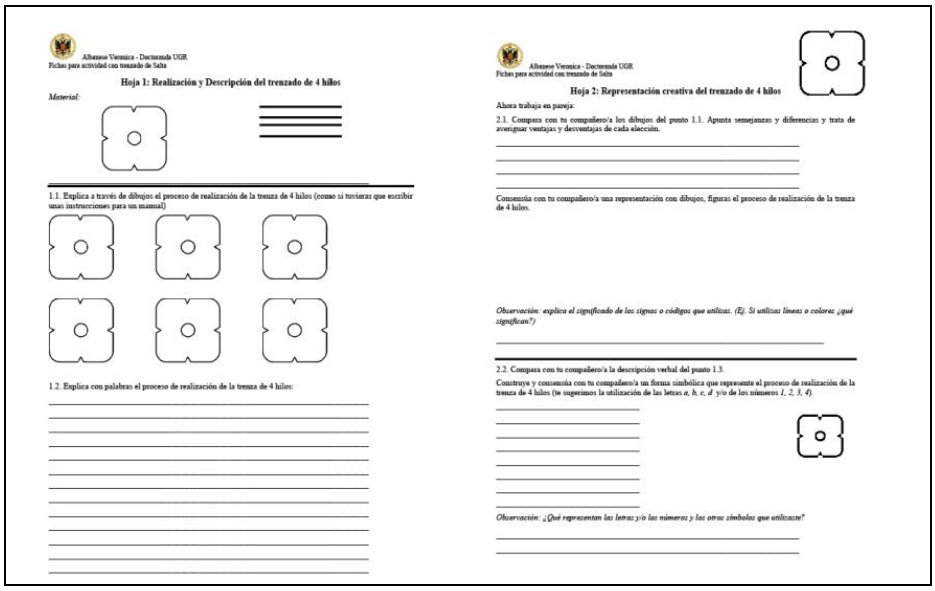
B. Reflexión conclusiva: interacción entre todos los participantes.

Cuadro 1: etapas de la actividad con las interacciones

Fase 1: se proporcionan a los participantes las herramientas necesarias para la realización de un trenzado simple, constituidas por una carta -rectángulo de cartón con una huella por cada lado-, 4 hilos y una piedra que sirve como peso, y se les enseña la realización de una trenza de 4 hilos *en cruz* (Albanese, Oliveras y Perales, 2012a). Entonces se les solicita que, individualmente, describan de manera gráfica-icónica y, después, verbal, es decir, con palabras, este proceso (Hoja 1 de la Figura 1).

Fase 2: se plantea una fase de representación creativa dirigida hacia la construcción de una modelización (Hoja 2 de la Figura 1): la idea es que los participantes lleguen a un consenso en pequeños grupos a partir de la descripción individual realizada anteriormente, de una representación icónica y después simbólica, que sintetice y describa el proceso de trenzado, reflexionando críticamente sobre las ventajas y limitaciones de las decisiones tomadas en la utilización de las notaciones.

Fase 3: se promueve una puesta en común, entre todos los participantes, de estas representaciones consensuadas y una nueva reflexión sobre las decisiones tomadas por cada pequeño grupo. Después se presenta la modelización artesanal del trenzado de 4 hilos que involucra el concepto matemático de grafo. Se propone a los participantes que reconozcan las semejanzas de sus propias representaciones consensuadas con la modelización artesanal.


Albanese Veronica - Doctoranda UGR.
Fichas para actividad con trenzado de Salta

Hoja 1: Realización y Descripción del trenzado de 4 hilos

Material:

1.1. Explica a través de dibujos el proceso de realización de la trenza de 4 hilos (como si tuvieras que escribir unas instrucciones para un manual)

1.2. Explica con palabras el proceso de realización de la trenza de 4 hilos:

Albanese Veronica - Doctoranda UGR.
Fichas para actividad con trenzado de Salta

Hoja 2: Representación creativa del trenzado de 4 hilos

Ahora trabaja en pareja:

2.1. Compara con tu compañero/a los dibujos del punto 1.1. Apunta semejanzas y diferencias y trata de averiguar ventajas y desventajas de cada elección.

Consensúa con tu compañero/a una representación con dibujos, figuras el proceso de realización de la trenza de 4 hilos.

Observación: explica el significado de las signos o códigos que utilizas. (Ej: Si utilizas líneas o colores ¿qué significan?)

2.2. Compara con tu compañero/a la descripción verbal del punto 1.3.

Construye y consensúa con tu compañero/a un forma simbólica que represente el proceso de realización de la trenza de 4 hilos (te sugerimos la utilización de las letras *a, b, c, d* y/o de los números *1, 2, 3, 4*).

Observación: ¿Qué representan las letras y/o los números y las otras símbolos que utilizaste?

Figura 1: Las Hojas 1 y 2 diseñadas para la actividad práctico-creativa.

Evaluación

La actividad presentada se encuentra en proceso de evaluación inicial previa a su puesta en marcha como taller de reflexión para profesores y capacitadores del área de matemáticas. Esta evaluación se llevó a cabo mediante dos actuaciones:

(1) Se ha realizado una presentación de la actividad práctico-creativa (B en el Cuadro 1) a un grupo de expertos en etnomatemáticas y educación, se han recogido sus reflexiones y realizado una primera modificación de las fichas.

(2) Después se ha llevado a cabo una experiencia piloto con los participantes del curso de Etnomatemáticas del master en Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Granada. La actividad presentada se inserta como una sesión del curso. Para que la actividad resultara contextualizada y enriquecedora dentro de dicho curso, se ha decidido realizar unos ajustes al diseño, especialmente en las reflexiones inicial y final con el fin de que se centraran más sobre las matemáticas como forma de pensar y el "pensar matemáticamente", dado que en el curso se tratan ya ampliamente las matemáticas como producto cultural. Se ha firmado una hoja de consentimiento informado con cada participante donde se le explicaba que la evaluación que se les requería se centraba en el diseño de la actividad, de las fichas y en la actuación de la investigadora. En la reflexión inicial, a la lluvia de ideas se añade la presentación del QRS-system (Barton, 2008), elemento teórico que no se ha manejado previamente en este curso; en las reflexiones finales sí se insiste en el aspecto del "pensar matemáticamente", más que en los otros nombrados anteriormente y se solicita una evaluación de la actividad por parte de los mismos participantes. Además, una evaluación no participante se lleva a cabo a través de una ficha de

evaluación rellenada por cuatros expertos en etnomatemáticas y en educación que se han ofrecido a asistir a la actividad con el rol de observadores evaluadores. La sesión ha sido además videograbada.

Resumimos las aportaciones de esta experiencia piloto (2) al diseño de la actividad tomadas en el sentido de una evaluación formativa:

- Actuación e interacciones de la investigadora: la descripción de la realización del trenzado resulta muy clara; un evaluador apunta a la necesidad de indicar cuándo es el momento de escribir y cuándo es el momento de compartir en el debate.
- Interés mostrado por los participantes: se ha despertado un nivel de interés muy alto y los participantes se han involucrado ampliamente, tanto en los debates como en proporcionar sugerencias para la mejora de la actividad. Además han manifestado gran interés en saber más sobre la actividad artesanal; un evaluador propone que se profundice este aspecto.
- Adecuación de los tiempos: se necesita un ajuste de los tiempos previstos, por ejemplo la hoja 1 lleva menos tiempo mientras la hoja 2 lleva más; hay que dedicar más tiempo a la puesta en común. En la experiencia piloto la investigadora misma echó en falta que cada grupo describiera en detalle su representación creativa a los otros, eventualmente presentándola a la pizarra.
- Claridad de las fichas: se ha elaborado una ulterior modificación en la terminología empleada en los textos de las fichas, por ejemplo sobre el empleo de la palabra *sistema*.
- Material manipulativo: la elección de hilos de dos colores distintos (dos de cada color) ha facilitado la comprensión del trenzado respecto a la utilización de un color único. Un evaluador ha detectado que el cartón utilizado para la construcción de la carta era demasiado flexible.

Reflexiones finales

La realización de un trabajo que parte de la práctica ha resultado muy motivadora y ha despertado curiosidad e interés hacia una manera distinta de ver el "pensar matemáticamente" y el papel que la cultura y el contexto artesanal pueden adquirir en la vivencia de esta. Los participantes y los evaluadores se han implicado activamente.

Cabe destacar que los participantes reflexionan sobre sus propias representaciones y decisiones al enfrentarse con los problemas que van surgiendo, y asumen una actitud crítica hacia su propio proceso de enculturación. Ponemos de manifiesto que se reconocen muchos puntos comunes entre las producciones de los participantes -sus representaciones creativas-, el pensamiento artesanal y la modelización con grafos. Esto abre la posibilidad que esta actividad, con algunos

nuevos ajustes, se pueda utilizar, en la enseñanza secundaria, como introducción al concepto de grafo.

Agradecimientos Este estudio forma parte de una investigación doctoral. Agradecemos el Ministerio de Educación, Cultura y Deporte del Gobierno de España, que hizo posible el desarrollo del proyecto concediendo una Beca FPU (código de referencia AP2010-0235) a la doctoranda V. Albanese. Asimismo, agradecemos las valiosas aportaciones realizadas por los participantes en las sesiones aquí descritas.

Referencias bibliográficas

Albanese, V. (2011). *Etnomatemáticas en Artesanías de Trenzado*. Tesis de Master no publicada. Granada, Universidad de Granada.

Albanese, V., Oliveras, M. L. y Perales, F. J. (2013). Etnomatemáticas en Artesanías de Trenzado: Aplicación de un Modelo Metodológico elaborado. *Bolema*, en prensa.

Albanese, V., Oliveras, M. L. y Perales, F. J. (2012a). Modelización matemática del trenzado artesanal. *Revista Epsilon, 29* (81), 53-62.

Albanese, V., Oliveras, M. L. y Perales, F. J. (2012b, Septiembre). *Formar en Etnomatemáticas al Futuro Profesorado.* Comunicación presentada en el X CAREM: Décima Conferencia Argentina de Educación Matemática, Buenos Aires.

Barton, B. (2008). *The language of mathematics: Telling mathematical tales*. Melbourne: Springer.

Bishop, A. J. (1999). *Enculturación Matemática*. Barcelona: Paidós.

Castagnolo, A. (2012). La Etnomatemática Subyacente en los Textiles. *Journal of Mathematics and Culture, 6* (1), 119-134.

D'Ambrosio, U. (2008). *Etnomatemática - Eslabón entre las tradiciones y la modernidad*. México: Limusa.

D'Ambrosio, U. (1988). Etnomatemática se ensina? *Bolema, 3* (4), 43-46.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 9* (1), 143-168.

Gavarrete, M. E. (2012). *Modelo de aplicación de etnomatemáticas en la formación de profesores indígenas de Costa Rica*. Tesis doctoral no publicada. Granada: Universidad de Granada.

Favilli, F., César, M. y Oliveras, M. L. (2004). *Projecto IDMAMIM: Matemática e intercultura.*Pisa: Universidade de Pisa. [3 CdRoms: La Zampoña, Os Batiques e Las Alfombras].

Oliveras, M. L. y Albanese, V. (2012). Etnomatemáticas en Artesanías de Trenzado: un modelo metodológico para investigación. *Bolema, 26* (44), 1295-1324.

Oliveras, M. L. y Gavarrete, M. E. (2012). Modelo de aplicación de etnomatemáticas en la formación de profesores para contextos indígenas en Costa Rica. *RELIME: Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 15* (3), 339-372.

Oliveras, M. L. y Albanese, V. (2011). EthnomathematicalMicroproject: Educating with the Community. En J. Diez Palomar y C. Kanes (Eds.), *Family and Community in and Out of the Classroom: Ways to improve mathematics' achievement* (pp.97-100). Barcelona: UniversitatAutònoma de Barcelona.

Oliveras, M. L. (1996). *Etnomatemáticas. Formación de profesores e innovación curricular*. Granada: Comares.

Presmeg, N. (1998). Ethnomathematics in Teacher Education. *Journal of Mathematics Teacher Education 1*(1), 317–339.

Rosa, M. y Orey, D. C. (2003). Vinho e queijo: etnomatemática e modelagem. *Bolema,* (20), 1-6.

Scandiuzzi, P. P. (2002). Água e Óleo: modelagem e etnomatemática. *Bolema,* (17), 52-58.

Vygonsky, L. S. (1995). *Pensamiento y lenguaje*. Buenos Aires: Ediciones Fausto.

UNA FORMA DIVERTIDA DE EXPERIMENTAR Y JUGAR CON LA ESTADISTICA

Esteban Szigety, Javier E. Viau y Alejandra Tintori Ferreira
Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional de Mar del Plata. Argentina
grupodidacticadelaciencia@gmail.com

Resumen. La Estadística tiene cada vez más influencia en la sociedad. Las razones para incluir su enseñanza en el nivel medio superior (16-18 años) se ha subrayado repetidamente durante los últimos 20 años.
La Física emplea un tratamiento estadístico (Mecánica Estadística) cuando se trata de analizar sistemas que están compuestos por un gran número de partículas.
El trabajo es un reporte de un taller para docente llevado a cabo en la Vigésimo Séptima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. El mismo se fundamenta en la utilización de una actividad experimental basada en un modelo didáctico para ser implementada en el aula con el objetivo de que los alumnos accedan a los conocimientos estadísticos necesarios para interpretar el movimiento Browniano.
Palabras clave: estadística, capacitación docente, pensamiento matemático
Abstract. The statistic has increasing influence in society. The reasons for including its teaching at the high school level (16-18 years) have been suggested repeatedly over the past 20 years.
Physics employs a statistical processing (Statistical Mechanics) when analyzing systems that are composed of a large number of particles.
The work is a report of a workshop for teacher carried out in the Twenty-seventh Latin-American Meeting of Educational Mathematics. The same one is based on the utilization of an experimental activity based on a didactic model to be implemented in the classroom by the aim that the pupils accede to the statistical necessary knowledge to interpret the movement Browniano.
Key words: statistics, educational training, mathematical thought

Introducción

La Estadística tiene cada vez más influencia en la sociedad. En los periódicos aparecen diariamente resultados estadísticos sobre economía, salud, opinión, política.

La estadística hace acto de presencia cuando el grado de conocimiento de un fenómeno es impreciso. La Física emplea un tratamiento de tipo estadístico al analizar sistemas que están compuestos por un gran número de elementos minúsculos, ante la imposibilidad de estudiar sistemáticamente las trayectorias de las partículas. Así, la Mecánica Clásica deriva en lo que conocemos como Mecánica Estadística, que es la aplicación de la estadística para el tratamiento de grandes poblaciones en el campo de la Mecánica en lo que concierne al movimiento de partículas u objetos cualesquiera sometidos a interacciones. Suministra una base de relación de las propiedades microscópicas de los átomos y moléculas individuales con las propiedades macroscópicas de los cuerpos.

Son muchas las razones presentadas en la literatura respecto a la necesidad de actualizar los currículos de física, en particular en secundaria, contemplando temas de mecánica estadística y física moderna (Gil Pérez, Senent, y Solbes, 1986; Barojas, 1988; Terrazzan, 1992).

La enseñanza de temas actuales de la física puede contribuir para transmitir a los alumnos una visión más correcta de esa ciencia y de la naturaleza del trabajo científico, superando la visión lineal, netamente acumulativa del desarrollo científico que impregna los libros de texto y las clases de física hoy utilizados.

Al abordar temas de mecánica estadística en el aula de Física, el docente se enfrenta con la existencia de una problemática educativa, que tiene su raíz en la falta de conocimiento de conceptos estadísticos por parte de los alumnos (Meletiou-Mavrotheris y Stylianou, 2003).

Las razones para incluir la enseñanza de la estadística en el nivel secundario se ha subrayado repetidamente durante los últimos 20 años (Wild y Pfannkuch, 1999; Gal, 2002), basadas en la utilidad de la estadística y probabilidad en la vida diaria, su papel instrumental en otras disciplinas, la necesidad de un conocimiento estocástico básico en muchas profesiones y el papel de la estadística en el desarrollo de un razonamiento crítico.

En el trabajo se presenta el reporte de un taller para docentes, fundamentado en la utilización de una actividad experimental, basada en un modelo didáctico (Viau, Moro, Zamorano y Gibbs, 2008), que puede ser desarrollada en el aula con el objetivo de que los alumnos tengan acceso a los conocimientos estadísticos necesarios para interpretar el movimiento Browniano.

El movimiento Browniano fue observado por primera vez por el botánico Robert Brown en 1827, cuando estaba estudiando la polinización de un cierto tipo de planta, Clarkia pulchella, para lo que observaba bajo el microscopio una suspensión de granos de polen en agua. Observó que había unas pequeñas partículas alrededor de los granos de polen que estaban en constante e irregular movimiento. El origen de este movimiento es debido a los impredecibles choques de las moléculas, en este caso de agua, con las partículas de polen.

El modelo didáctico utilizado en el taller se basa en el denominado "Paseo del borrachín" (Gamow, 1948). Mediante este modelo didáctico se desarrollan contenidos científicos relacionados con el movimiento Browniano, en forma integrada con contenidos matemáticos, en el marco de la ciencia escolar, (Gellon, Rosenvasser Feher, Furman, y Golombek, 2005).

Marco Teórico

a) Introducción al cálculo de probabilidades y estadística: El problema más sencillo del cálculo de probabilidades se presenta cuando se lanza al aire una moneda. Todos sabemos que es igual la probabilidad de que la moneda caiga cara o cruz. Pero ¿cuál será la situación si se deja caer consecutivamente la moneda dos veces seguidas, o lo que es lo mismo, si se dejan caer dos monedas simultáneamente? En la Figura 1 se muestran los gráficos que utilizamos en el aula a

modo de imagen a los efectos de construir en el alumno la idea de repetición de eventos equiprobables.

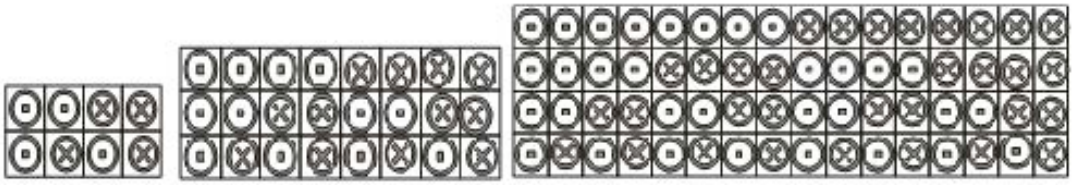


Figura 1: Distribución de caras y secas al arrojar 2, 3 y 4 monedas

Este juego con monedas, particularmente sencillo, permite no sólo abordar e introducir las simples leyes del cálculo de probabilidades sino que proporciona un buen ejemplo de lo que se entiende al decir que las leyes de la probabilidad se hacen más exactas a medida que aumenta el número de ensayos. A partir de la experiencia con lanzamientos se presenta el siguiente gráfico (Figura 2), que muestra las probabilidades de obtener números diferentes de caras y cruces para dos, tres, cuatro y un centenar de ensayos. La figura permite visualizar cómo a medida que aumenta el número de pruebas se hace cada vez más nítida y pronunciada la curva de la probabilidad, mostrando claramente un valor máximo para número iguales de caras y cruces.

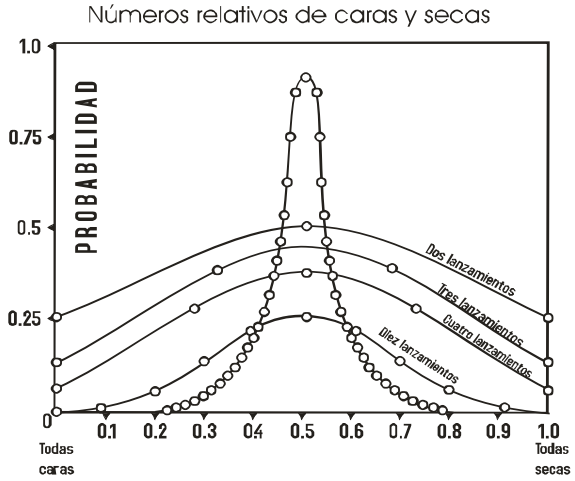


Figura 2: Probabilidad de distribución de caras y secas

b) El modelo físico estadístico: Al estudiar sistemas compuestos por un número muy grande de componentes atómicos, la Física abandona el proyecto de analizar detalladamente trayectorias, y lo substituye por un tratamiento estadístico. Maxwell introduce el nombre mecánica estadística en 1879 y la probabilidad comienza a reemplazar a la certeza. Sin embargo, paradójicamente, es justamente el enorme número de elementos microscópicos que componen los materiales, el que permite resultados estadísticos de gran precisión y confiabilidad.

El darse cuenta de la imposibilidad de una descripción detallada, determinista, de un sistema macroscópico, abre las puertas para otras descripciones más útiles y quizás con más poder de predicción efectivo. Einstein, en uno de los artículos de su "annus mirabilis" de 1905 introdujo una de tales descripciones para tratar el problema del llamado movimiento Browniano. Por métodos estadísticos obtiene una ecuación que representa el movimiento de las moléculas de agua golpeando a los granos de polen o de cualquier otro cuerpo minúsculo suspendido en un fluido.

c) El modelo didáctico "El paseo del borrachín": Debido a la dificultad que presentan los alumnos de enseñanza secundaria frente a la posibilidad de incorporar conceptos estadísticos, las estrategias didácticas que vayan a ser elaboradas en torno a la enseñanza de la Estadística, no pueden ser concebidas dentro de un marco rígido sino que deben estar libres a la creatividad, donde tanto docentes como estudiantes fomenten su capacidad creadora y espíritu crítico.

El abordar temas de mecánica estadística en al aula de Física, en este caso bajo una actividad que deriva de una analogía didáctica, ("El paseo del borrachín"), permite conceptualizar adecuadamente al modelo microscópico del movimiento Browniano.

En el aula una vez introducido el concepto de cálculo de probabilidades, se plantea el siguiente problema: imaginemos a un borracho que, apoyado sobre un farol decide comenzar a caminar y desplazarse. Bajo esta situación problemática analógica se pretende despertar la motivación y el interés por parte de los alumnos, lo que permitirá posteriormente abordar el problema planteado con un lenguaje matemático adecuado.

Objetivos del taller docente

El principal objetivo fue presentar a la estadística como un conjunto de herramientas (métodos y técnicas) disponibles para la interpretación del conocimiento científico. Como así también, compartir con los asistentes al taller una propuesta didáctica que permite en la práctica relacionar y vincular la física con la matemática.

Metodología del taller docente

Participantes y contextualización: el taller se realizó en el marco de la celebración de la Vigésimo Séptima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, RELME 27, en Buenos Aires (Argentina), del cual participaron 22 docentes que desarrollan sus prácticas en diversas áreas científicas (matemática, física y química) en el nivel secundario y universitario.

Actividades: Dentro de las actividades desarrolladas se pueden señalar: experiencias de laboratorio con materiales sencillos y cotidianos, la observación y discusión de simulaciones en videos, la

experimentación con juegos de azar, el análisis de los propios procesos de pensamiento y la confección y análisis de gráficos estadísticos.

Implementación de la propuesta

La implementación de la propuesta se organizó en tres etapas:

1°) *Presentación del fenómeno que caracteriza al movimiento Browniano.*

Se comenzó con la visualización e interpretación de un video (http://www.youtube.com/watch?v=Eeu6H_AQRek) en el cual está modelizada la observación realizada por Robert Brown.

A partir de la discusión del contenido científico aportado por el video y con la finalidad de recrear el fenómeno descripto, se trabajó con una actividad experimental consistente básicamente en dejar caer unas gotas de tinta en dos recipientes con agua que se encontraban a distintas temperaturas, observando que la tinta se difunde por el agua al cabo de un tiempo dependiendo de la temperatura. La difusión de la tinta se debe al movimiento aleatorio de las moléculas de agua que aumenta con el incremento de la temperatura.

Con estas actividades los asistentes lograron una primera aproximación y conceptualización del movimiento Browniano, para luego comenzar a trabajar con el modelo didáctico.

2°) *Presentación de un modelo didáctico: El paseo del borrachín (Gamow, 1948).*

Presentamos a los participantes la analogía entre la caminata errática de un borracho desde un farol y el movimiento Browniano. La pregunta instaurada fue: ¿a qué distancia del farol es más probable encontrar al borracho luego de dar por ejemplo 100 pasos, imaginando que cada paso tiene una longitud promedio de 1 metro? Al principio se podría pensar que, a causa de la imprevisibilidad de cada cambio de dirección, no hay manera de contestar esta pregunta.

Esta instancia se desarrolló dentro del marco teórico correspondiente instaurando la idea de que cada paso puede pensarse como un vector, en donde la dirección y sentido son totalmente aleatorias y equiprobables, al igual que el arrojar una moneda al aire, pero con infinitas direcciones y sentidos posibles. Un gráfico de los pasos representado por vectores permite geométricamente visualizar la necesidad de realizar una suma vectorial de 100 vectores, que se deben sumar componente a componente: 100 componentes X y 100 componentes Y. La imagen que crea un gráfico vectorial de este tipo, como muestra la Figura 3, fortalece la idea de lograr una formulación matemática adecuada de la problemática planteada.

La formulación matemática, para n pasos, lleva a la siguiente expresión para la distancia final más probable: $R = \sqrt{N} \bullet Lmed$

Este resultado significa que la distancia más probable entre el borrachín y el farol después de un número grande de pasos irregulares en su caminata, es igual a la longitud media de los trayectos rectos que camina (*Lmed*), por la raíz cuadrada de su número (*N* = N° de pasos).

Dentro de los comentarios que genera el resultado obtenido mediante la matematización de la problemática, se encuentra el hecho de que si el borracho da un paso promedio de 1 metro, antes de cambiar de dirección, lo más probable será encontrarlo a 10 metros del farol después de una caminata de 100 pasos. Aquí es donde entra en juego la naturaleza estadística del problema. Esto no significa que no exista una probabilidad de encontrarlo a 100 metros si todos los pasos los hubiera dado en la misma dirección y sentido, como tampoco significa que no exista una probabilidad de encontrarlo en el mismo farol.

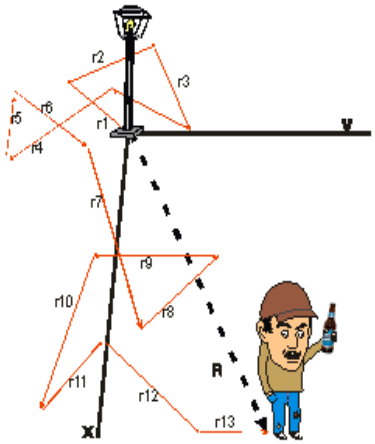


Figura 3: Gráfico vectorial de la caminata del borrachín

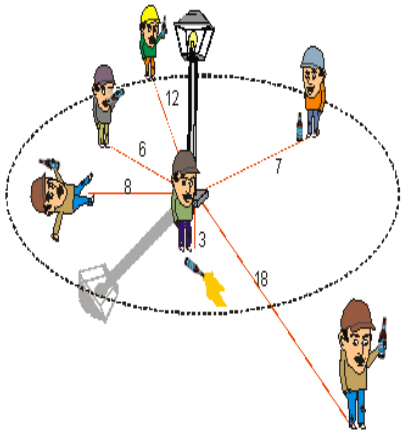


Figura 4: Distribución estadística 6 borrachines

Simplemente significa que, habiendo un gran número de caminatas, o de borrachines, lo más probable es encontrar que los mismos están distribuidos de tal forma que la distancia promedio al farol es de 10 metros luego de realizar 100 pasos.

Cuanto mayor sea el número de borrachines, y mayor el número de cambios de dirección en sus paseos desordenados, más exacta es la predicción. La Figura 4 muestra esta situación para seis borrachines que caminan.

Si se observa a través de un microscopio el movimiento browniano de un gran número de pequeñas partículas de polen suspendidas en una gota de agua, y si se fija la atención sobre un cierto grupo de ellas concentradas en una pequeña región dada, se notará que en el transcurso del tiempo se dispersan gradualmente por todo el campo visual, y que su distancia media desde el

origen aumenta en proporción a la raíz cuadrada del intervalo de tiempo transcurrido, tal como lo requiere la ley matemática por la cual se calcula la distancia del paseo del borrachín.

3°) *Representación del modelo propuesto por Gamow.*

Proponemos mediante dispositivos sencillos simular la aleatoridad de la caminata del borracho. Se pensó en dar 8 direcciones posibles a la misma, analogándolas a las siguientes direcciones geográficas: N, S, E, O, NE, NO, SE, SO. Se solicitó a los asistentes que construyeran algún dispositivo o idearan algún método para obtener estas 8 alternativas en forma equiprobable. Esta actividad estuvo fundada en mostrar un suceso aleatorio diferente a lo que puede ser una simple moneda. Con el dispositivo ideado, los docentes representaron en un papel milimetrado el resultado de graficar 100 pasos del borrachín. Cada paso fue analogado con un vector de 1 cm (longitud media del paso) y con la dirección y sentido obtenidas de 100 tiradas del dispositivo propuesto. Con los gráficos obtenidos, se sugirió a los docentes que realizaran al menos 3 caminatas, y registraran las distintas posiciones para 20, 40, 60, 80 y 100 pasos. La idea fue que con las caminatas de 100 pasos realizadas por cada docente, obtengan un diagrama similar al de la Figura 3 en donde se pudiera visualizar la distribución de los distintos borrachos luego de sus caminatas

Actividades realizadas y resultados obtenidos en el taller

La actividad fue organizada según los siguientes pasos experimentales:

Paso1: Diseñar un método con el cual se pueda obtener equiprobablemente ocho eventos. Los métodos propuestos fueron: 1-dado de ocho caras y 2- una ruleta.

Paso2: Realizar cien "tiradas" (pasos) con el método diseñado. En la tabla 1 se muestran algunos de los resultados obtenidos por los participantes.

CAMINATA	MÉTODO	DISTANCIA (cm)				
		20 pasos	40 pasos	60 pasos	80 pasos	100 pasos
A	1	3,2	2,9	9,3	14,2	11,4
B	1	3,9	5,3	7,6	5,1	12,1
C	2	2,4	3,8	6,3	10,4	15,9
D	2	3,6	5,9	3,5	2,1	3,4

Tabla 1: Distancias recorridas por los caminantes a los 20, 40, 60, 80 y 100 pasos

Paso3: Graficar los cien pasos del borrachín considerando cada paso como un vector de 1 cm de longitud, orientado según indique la tirada correspondiente. Luego calcular la distancia desde el

punto de partida hasta la posición final. El gráfico 1 muestra las gráficas realizadas por los participantes del taller.

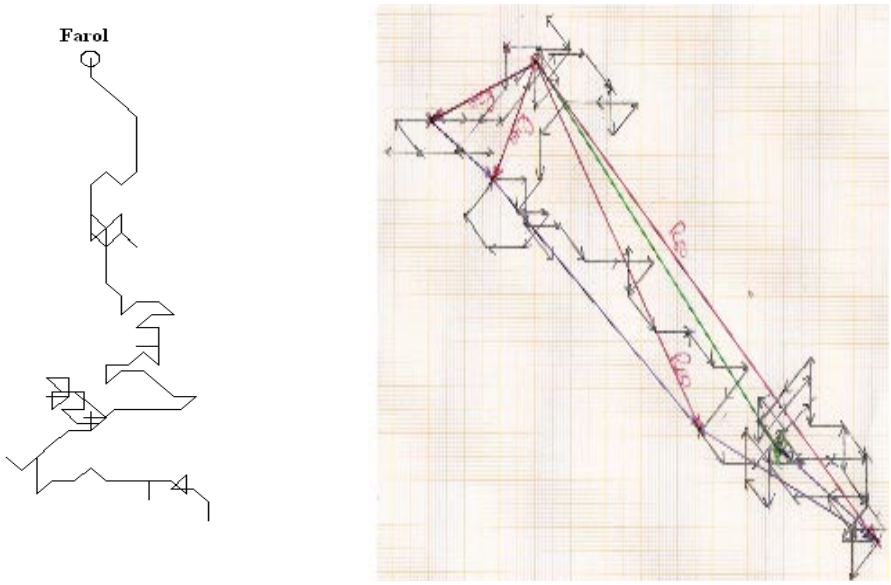


Gráfico 1: Posición final de cada borrachín alcanzada luego de 100 pasos.

Paso 4: Comparar los resultados obtenidos por este método estadístico (haciendo un promedio de todas las distancias) con los resultados obtenidos por la ecuación matemática.

En la tabla 2 se muestran los datos obtenidos en el desarrollo de la propuesta.

	Posición teórica ($R = \sqrt{N} \cdot$ longitud del paso)	Posición experimental (Promedio de las distancias)
20	$\sqrt{20} = 4,47$	4,42
40	$\sqrt{40} = 6,32$	5,84
60	$\sqrt{60} = 7,75$	6,75
80	$\sqrt{80} = 8,94$	9,05
100	$\sqrt{100} = 10,00$	9,78

Tabla 2: Comparación entre la posición teórica y posición experimental obtenidas.

Consideraciones finales

Los verdaderos protagonistas del proceso de mejoramiento de la enseñanza son los docentes que logren planificar distintas formas de enseñanza que promuevan la motivación de su alumnado.

En el taller los docentes fueron participes activos en el desarrollo de una propuestas didáctica innovadora, que les permitió despertar su imaginación y creatividad para abordar distintas

actividades que integran la física con la matemática. Creemos que mediante esta metodología de trabajo resulta posible promover su utilización en el aula.

Referencias bibliográficas

Barojas, J. (ed.) (1988). *Cooperative networks in physics education*. Nueva York: American Institute of Physics (AIP Conference Proceedings, 173).

Gal, I. (2002). Adult's statistical literacy. Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70 (1), 1-25.

Gamow, G. (1948). *Uno dos tres infinito*. Buenos Aires: Espasa – Calpe.

Gellon, G., Rosenvasser Feher, E., Furman, M. y Golombek, D. (2005). *La ciencia en el aula*. Buenos Aires: Paidós.

Gil Pérez, D., Senent, F. y Solbes, J. (1986). Análisis crítico de la introducción de la física moderna en la enseñanza media. *Revista de Enseñanza de la Física*, 2(1), 16-21.

Meletiou-Mavrotheris, M. y Stylianou, D. (2003). On the formalist view of mathematics impact on statistics instructions and learning. En *Proccedings of the III Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*. Belaria, Italia. Recuperado de http://www.dm.unipi.it/~didattica/ CERME3/proceedings/ Groups/TG5/TG5_list.html

Terrazzan, E. (1992). A inserção da física moderna e contemporânea no ensino de física na escola de 2° grau. *Caderno Catarinense de Ensino de física*, 9 (3), 209-214.

Viau, J., Moro, L., Zamorano, R. y Gibbs, H. (2008). La transferencia epistemológica de un modelo didáctico analógico. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias,* 5 (2), 170-184.

Wild, C. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67 (3), 221-248.

DISEÑO DE SECUENCIA DIDÁCTICA PARA PROMOVER UN ACERCAMIENTO INTUITIVO DE LA CORRELACIÓN LINEAL, EN ESTUDIANTES DEL BACHILLERATO TECNOLÓGICO, UTILIZANDO METODOLOGÍA ACODESA

Irma Nancy Larios Rodríguez y Benjamín Moran Medina
Universidad de Sonora México
nancy@gauss.mat.uson.mx, bmoran@cetmar03.com.mx

Resumen. En el presente trabajo se describen los elementos considerados para al diseñar una secuencia de actividades didácticas, cuyo objetivo es promover un acercamiento intuitivo al concepto de correlación lineal en estudiantes de curso de Probabilidad y Estadística, utilizando la metodología ACODESA (aprendizaje en colaboración, debate científico y auto-reflexión) de Hitt y Cortez (2009).
Palabras clave: secuencia didáctica, correlación lineal, ACODESA
Abstract. In this paper we describes the elements considered for the design of a sequence of learning activities, which aimed to promote an intuitive approach to the concept of linear correlation in students of courses of Probability and Statistics, using the methodology ACODESA (collaborative learning, scientific debate an self-reflection) of Hitt and Cortez (2009).
Key words: teaching sequence, linear correlation, ACODESA

Introducción

En el presente trabajo se describen los elementos considerados para el diseño de una secuencia de actividades didácticas, diseñadas para promover un acercamiento intuitivo al concepto de correlación lineal en estudiantes de cursos de Probabilidad y Estadística del Técnico en Electrónica (TE), del Centro de Estudios Tecnológicos del Mar 03 Guaymas el cual es considerado como un bachillerato tecnológico dentro del Sistema Nacional de Bachillerato (SNB). La secuencia de actividades didácticas forma parte de un trabajo de tesis de desarrollo docente para obtener el grado en la Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa, de la Universidad de Sonora. Como antecedente señalaremos que el Subsistema de Bachillerato Tecnológico se encuentra en una transición hacia el SNB, basado en la Reforma Integral del Sistema Medio Superior (RIEMS). Actualmente el Programa de Estudios de Técnico en Electrónica, señala que, los componentes profesionales del TE tienen el propósito de que el egresado posea competencias en el mantenimiento a sistemas electrónicos automatizados (COSDAC, 2010), competencias que deben estar unidas en un marco de formación integral con las competencias genéricas y disciplinares básicas, para asegurar que los propósitos formativos de la RIEMS se vean reflejados en una mejor sociedad (Vásquez, 2008). Teniendo el trabajo de tesis como uno de sus propósitos el promover el desarrollo de algunas de dichas competencias.

Consideraciones teóricas

El elemento teórico metodológico, principal considerado para el diseño e implementación de la secuencia de actividades didácticas fue la metodología ACODESA (aprendizaje en colaboración,

debate científico y auto-reflexión) de Hitt y Cortez (2009). La cual es una adaptación a un acercamiento sociocultural del aprendizaje de las matemáticas, es importante señalar que en esta metodología, el profesor presenta una *situación problemática* que provoque la reflexión, no se pretende explicitarle a los estudiantes la matemática que debe ser utilizada, ni dictaminar sobre lo realizado por los mismos en las primeras etapas, salvo al final en el proceso de institucionalización. En las primeras fases el profesor es un moderador y son los estudiantes quienes argumentan y validan sus producciones, en el proceso de institucionalización es donde el profesor resalta las diferentes representaciones y presenta las representaciones institucionales. A continuación se enlistan las etapas de la metodología ACODESA: *Etapa 1*. Trabajo individual (producción de representaciones funcionales para comprender la situación problema); *Etapa 2*. Trabajo en equipo sobre una misma situación. Proceso de discusión y validación (refinamiento de las representaciones funcionales); *Etapa 3*. Debate (que puede convertirse en un debate científico). Proceso de discusión y validación (refinamiento de representaciones funcionales); *Etapa 4*. Regreso sobre la situación (trabajo individual: reconstrucción y auto-reflexión); *Etapa 5*. Institucionalización. Proceso de institucionalización y utilización de representaciones institucionales, por parte del docente.

Otro elemento teórico considerado en el diseño es la traslación de registros en el razonamiento y la generación especulativa de datos de Moritz (2004), donde se plantea que el razonamiento acerca de la covariación comúnmente envuelve procesos de "*traslación*" entre datos numéricos crudos, representaciones gráficas y afirmaciones verbales acerca de covariación estadística. La base para el análisis de los resultados de alumnos que han trabajado con este tipo de razonamiento, en función de las habilidades son:

a) Generación especulativa de datos, esta se puede realizar bosquejando datos de manera gráfica que representen una declaración verbal; b) Interpretación verbal de gráficas, a partir de la descripción de un diagrama de dispersión se realiza una declaración verbal; c) Interpretación numérica de gráficas, esta se demuestra leyendo un valor en el grafico para luego interpolar otro valor. En la Figura 1 se ilustra las relaciones entre los diferentes registros de representación

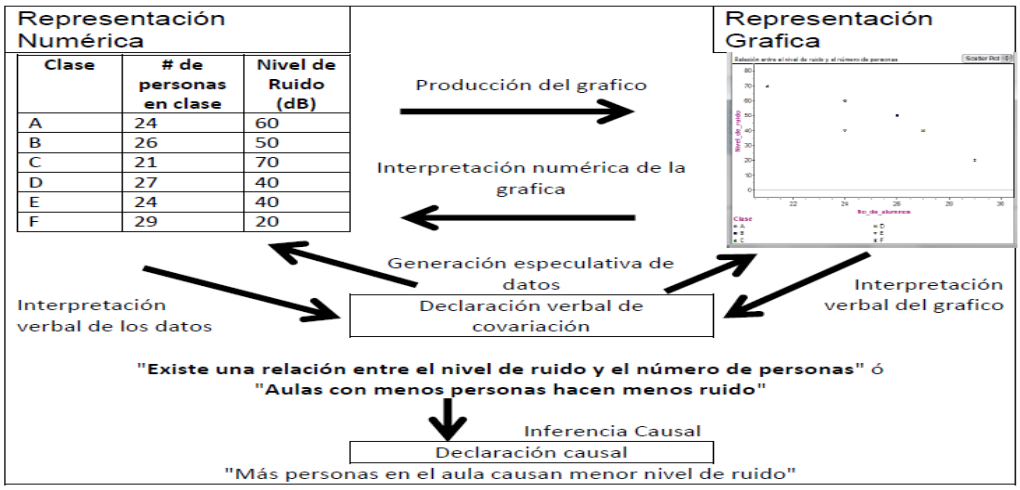


Figura 1: Relaciones entre diferentes registros de representación, plantados por Moritz.

La propuesta

Las características principales de la secuencia de actividades didácticas son: a) Incorporación de recursos computacionales (Excel y Fathom), b) Integración de dispositivos manipulables relacionados con el componente profesional de la carrera de técnico en electrónica c) Recopilación de datos reales para las actividades, d) Traslación a diversos registros de representación (verbales, gráficos, tabulares y numéricos), e) Implementación de hojas de trabajo complementarias, que permitan registrar las respuestas de los estudiantes para su análisis, d) Implementación de la metodología ACODESA para el diseño e implementación . La secuencia consta de tres actividades didácticas (Actividad didáctica 1. La catapulta., Actividad didáctica 2. El servomotor y Actividad didáctica 3. Celdas solares).

Por cuestiones de espacio se ejemplificar la descripción y el análisis a priori de las actividades didácticas de la propuesta con la actividad didáctica "El servomotor".

Los objetivos de la actividad didáctica es que el estudiante logre: a) Identificar variación conjunta de las variables, b) Coordinar el significado de coeficiente de correlación lineal a través de la traslación de registros de representación, c) Identificar asociaciones directas e inversas y relacionarlas con el coeficiente de correlación, d) Generalizar la obtención del coeficiente de correlación, e) Colaborar de manera efectiva en equipos, f) Incorporar el uso de tecnología para procesar e interpretar información.

En la *Etapa 1*. Trabajo individual, el docente plantea la situación problemática a los estudiantes, apoyado con el proyector y los estudiantes contestan de manera individual los cuestionamientos de la hoja de trabajo de la Etapa 1

Hoja de trabajo de la Etapa 1. Trabajo individual

Situación problemática: Una de las posibles necesidades de un sistema de control cerrado para un motor de corriente continua, es que su velocidad se pueda mantener constante, es por esto que en la mayoría de las aplicaciones de servomecanismos la velocidad angular debe ser retroalimentada a un circuito de control en forma de frecuencia (Ver figuras 2 y 3). Para esto se utiliza comúnmente un disco encoder (Ver Figura 4). El encoder es un simple emisor/receptor de luz que transmite un rayo continuo de luz frente al receptor, del otro lado del enconder. Los espacios que hay entre las ranuras marcadas en el disco del encoder bloquean la luz y las ranuras permiten que la luz pase a hacía el otro lado (Ver Figuras 5 y 6). Normalmente son usados en conjunto con dispositivos mecánicos tales como engranes, y/o ruedas de medición, de manera que pueden ser utilizados para medir velocidad y posición angular, convirtiendo el movimiento de rotación en una frecuencia que se puede medir en la señal de salida.

Se tiene un motor de corriente directa el cual controla la velocidad angular de la antena de un radar marino, misma que se desea mantener a 60 revoluciones por minuto (RPM). La transmisión del motor a la antena tiene una reducción de 10 a 1 por lo cual el motor deberá girar a **600 RPM**.

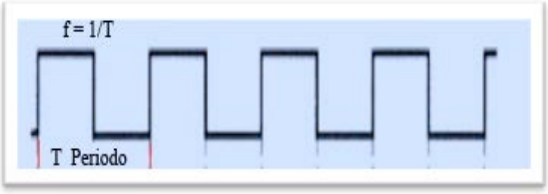


Figura 2

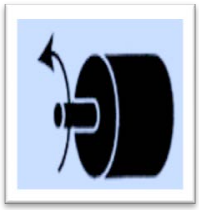


Figura 3

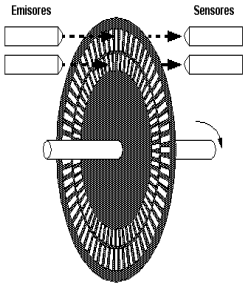


Figura 4

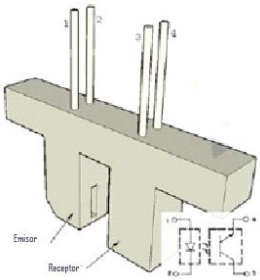


Figura 5

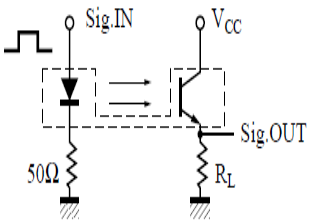


Figura 6

Enlista las variables que están relacionadas al control de la velocidad angular del motor (600 RPM):

¿Cómo se relacionan el voltaje y la velocidad angular

¿Cómo se relaciona la velocidad angular y la frecuencia medida en el encoder? Describe.

¿Cómo se relaciona el voltaje de excitación del motor y la frecuencia medida en el encoder?

¿Cuánto debe medir la frecuencia del encoder para cuando la velocidad angular del motor sea 600 RPM?

En esta etapa se espera que los alumnos se acerquen de manera individual a la comprensión de la situación problema. Es importante que el docente les permita observar las variaciones que se dan al manipular el servomotor y presentar esta información utilizando el proyector.

En *la Etapa 2,* Trabajo en equipo. Se trabajara en equipos de 4 alumnos para la recolección de la información, haciendo uso del manipulable, que en este caso un servomotor de corriente directa con retroalimentación por encoder, con la intensión de que identifiquen la forma en que varía la frecuencia del encoder (velocidad angular) con respecto al voltaje, así como el periodo del encoder con respecto al voltaje.

Hoja de trabajo de la Etapa 2. Trabajo en equipo.

a) Tome cada equipo su motor y manipulen el voltaje del mismo como se propone en la tabla, además midan con el osciloscopio las frecuencias resultantes para llenar los espacios faltantes de la siguiente Tabla 1 (hagan 3 mediciones en cada valor de voltaje):

Voltaje de alimentación (Volts)	Frecuencia de encoder (Hertz) 1	Frecuencia de encoder (Hertz) 2	Frecuencia de encoder (Hertz) 3
1	0	0	0
2			
3		1058	
4			909
5			
6			
7			
8			

Vierta los resultados de la Tabla 1 en el archivo de fathom "Servomotor.ftm", después de observar el gráfico responde una vez más las preguntas de la Etapa 1, para llegar a una conclusión. Nota: El promedio de los productos de los puntajes Z (Zx y Zy) revelan el coeficiente de correlación lineal.

b) Repite el inciso a) solo que en esta ocasión se medirán en el osciloscopio los resultados del periodo (T) de la señal del encoder en lugar de la frecuencia. para el inciso b) utiliza el archivo "Servomotor_T.ftm". Llena la información solicitada en la Tabla 2.

Voltaje de alimentación (Volts)	Periodo de encoder T (Seg.) 1	Periodo de encoder T (Seg.) 2	Periodo de encoder T (Seg.) 3
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			

c) Con los resultados obtenidos identifica el periodo de la señal cuando el voltaje es el encontrado para obtener 600 RPM. Argumenta tus procedimientos. Nota: Para responder las siguientes preguntas puedes manipular los "datos brutos" del diagrama de dispersión arrastrando los puntos

con el puntero. Además de observar el coeficiente de correlación lineal. Y para la argumentación puedes usar gráficos, tablas y explicaciones escritas

d) ¿Existe alguna relación entre la dispersión de los datos y el coeficiente de correlación? Argumenta tu respuesta.

e) Qué significa que el signo del coeficiente de correlación sea positivo? Argumenta tu respuesta.

En esta etapa, se espera que los alumnos puedan refinar los acercamientos a la solución del problema a través de la discusión y validación de los argumentos con sus compañeros de equipo. También se espera que las representaciones gráficas que provee el software Fathom, permitan a los estudiantes validar los acercamientos ya mencionados. Será probable que algunos equipos se pregunten ¿porque las frecuencias correspondientes a 3 y 4 volts no coinciden de manera exacta al valor predeterminado en la tabla?, siendo este el momento apropiado para el docente para promover un dialogo con los estudiantes sobre la variación.

Particularmente, se espera que al completar la información en las tablas y trasladar la información al registro gráfico con el software fathom, se promueva que los estudiantes tengan elementos para establecer la mejor solución y discriminar procedimientos erróneos. En la Figura 7, se muestra la pantalla de Fathom correspondiente a la información de la Tabla 1. La razón de recopilar tres datos para cada experimento es de no causar un conflicto didáctico con respecto a la concepción determinista y local de la correlación. Por otro lado, para atacar la concepción unidireccional de la correlación se presenta el inciso b) de la de la Etapa 2, una relación entre el voltaje y el periodo (T= $1/F$ ó el inverso de la velocidad angular).

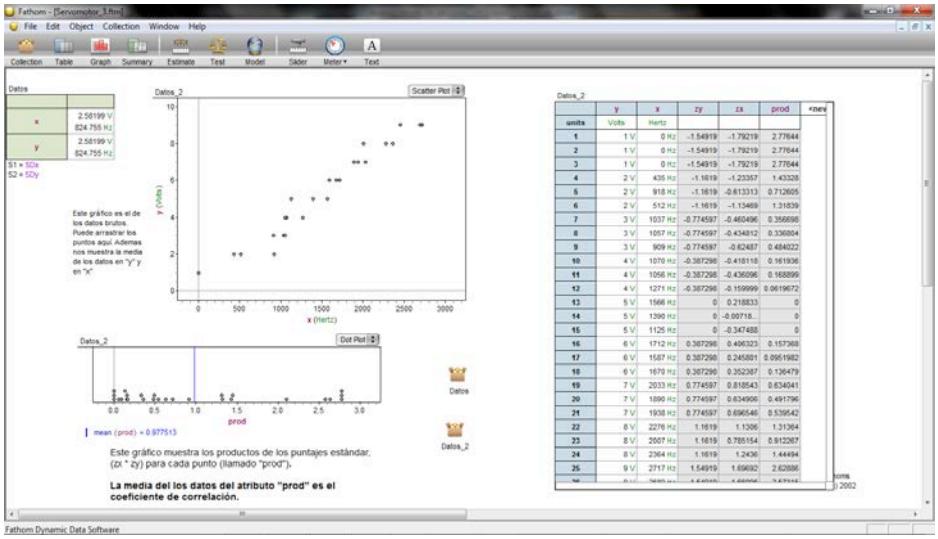


Figura 7: Pantalla de Fathom, correspondiente a la Tabla 1

En la Etapa 3. Debate, se espera que los alumnos establezcan un proceso de discusión y validación de sus argumentos y procedimientos establecidos en la fase anterior, con otros grupos de trabajo. En una plenaria dirigida por el docente, donde el mismo seleccionara algunos estudiantes de

equipos diferentes para exponer sus conclusiones haciendo uso del proyector y/o pintarrón. La selección de los estudiantes debe estar basada en los procedimientos y estrategias que el docente observo, realizaron los estudiantes durante las fases anteriores, esto es, con el fin de propiciar acercamientos claros a la correlación lineal o para eliminar concepciones erróneas prevalecientes.

En la Etapa 4. Regreso individual la situación problemática, se pretende que el estudiante reflexione de manera individual acerca de los acercamientos a la solución del problema, a través de una reconstrucción de los hechos obtenidos de manera individual, grupal y colectiva en las fases anteriores. Para esto se le presentan diferentes diagramas de dispersión que se espera que categorice según su situación entre cero y uno o entre -1 y cero. Por cuestiones de espacio no se presenta la hoja de trabajo correspondiente a esta etapa. Para responder las preguntas de manera individual el docente recomienda que los estudiantes manipulen los datos en bruto del manipulable, de manera que puedan establecer los valores de los coeficientes de correlación lineal.

A partir de la definición verbal "La media de los productos de los puntajes Z", como se muestra en las plantillas de Fathom el docente les solicita a los estudiantes que establezcan una generalización del coeficiente de correlación lineal.

En la Etapa 5. Institucionalización, en esta etapa el docente debe institucionalizar todos aquellos elementos relacionados con la actividad didáctica y que están planteados en los objetivos de la actividad didáctica, este proceso el docente debe tener en cuenta las representaciones funcionales desarrolladas por los estudiantes.

Resultados y conclusiones

La actividad didáctica fue piloteada durante el semestre 2012-1, con una muestra de cuatro estudiantes que ya habían cursado la asignatura de Probabilidad y Estadística, con la intensión de establecer la pertinencia de los manipulables, del uso de la metodología ACODESA, del software y de las hojas trabajo de la secuencia didáctica actividad. A partir de los resultados del pilotaje se realizaron algunas modificaciones que ya se encuentran incorporadas en la presente propuesta.

Durante el semestre 2013-1, se llevó a cabo la puesta en escena de la secuencia de actividades didácticas, incorporando los elementos del pilotaje, sin embargo, los análisis a posteriori de los resultados serán motivo de otro trabajo, ya que la intensión de este trabajo es mostrar las consideraciones para el diseño de la secuencia de actividades didácticas. Por lo anteriormente señalado sólo plantearemos las siguientes conclusiones generales: a) La experiencia el incorporar a los estudiantes en un trabajo con la metodología de ACODESA, permitió el desarrollo de algunas de las competencias genéricas que la RIEMS demanda, como son, que los estudiantes jueguen un rol activo en el proceso educativo, que expresen y comuniquen sus opiniones al resto

de sus compañeros, fomentar el trabajo en equipo, además de incorporar el uso de tecnología en el aprendizaje, b) El uso del software Fathom, permitió el poder trabajar simultáneamente con diferentes registros de representación semióticas del concepto de coeficiente de correlación lineal, promoviendo la coordinación y asociación de estos registros en la construcción del concepto, c) Además el uso del software también permitió obviar cálculos que son realmente largos y tediosos, y que frecuentemente distraen a los estudiantes sobre el análisis y la interpretación correcta de conceptos que se ponen en juego en las actividades.

Referencias bibliográficas

COSDAC. (2010). Programa de Estudios de la Carrera de Técnico en Electrónica. Recuperado de: http://www.cecyteo.edu.mx/site/Docs/Planes2012/Electronica.pdf.

Hitt. F. y Cortez, C. (2009). Pl*anificación de actividades en un curso sobre la adquisición de competencias en la modelización matemática y uso de calculadora con posibilidades gráficas*. Revista digital Matemática, (www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/). Vol. 10(1). 6, 9-10.

Moritz, J. (2004). Reasoning about Covariation. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.). *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking*, (pp. 221-255). (Eds. Ben-Zvi y J. Garfield). Dordrecht (The Nederlands): Kluwer Academic Publishers.

Vázquez, J. (2008). *Acuerdo 444-SNB. SEP*. Recuperado de: http://www.dgb.sep.gob.mx/informacion_academica/curso_taller/materiales_instructor/acuerdo444.pdf

EXPLORAR Y DESCUBRIR PARA CONCEPTUALIZAR: ¿QUÉ ES UN POLIEDRO?

Judith Bertel Behaine y Juan Alberto Barboza.
Institución Educativa La Unión. Universidad de Sucre Colombia
judithbertel@gmail.com, baroja7@hotmail.com

Resumen. Esta experiencia, abordó la problemática relacionada con el aprendizaje y la enseñanza de la geometría y en particular, el proceso de conceptualización y formulación de definiciones de objetos geométricos como los poliedros. El propósito de esta experiencia en la línea de la Metodología Estudio de Clase (MEC), es el de planificar y orientar una clase que favorezca en los estudiantes la construcción del concepto de poliedro, desde principios pedagógicos y didácticos pertinentes y válidos. Su pertinencia radica en la generación de ambientes de aprendizaje alternativos, los cuales privilegian la construcción de conocimiento desde la interacción, además se favorece el proceso de conceptualización tan importante en el desarrollo del pensamiento y las competencias matemáticas.
Palabras clave: estudio, clase, explorar, conceptualizar, poliedro
Abstract. This experience is based on the discussion of the problems related to learning and teaching of geometry and in particular the process of conceptualizing and formulating definitions of geometric objects as polyhedrons. The purpose of this experience in the line of Class Study Methodology (MEC), is to plan and guide a class that encourages students in the construction of the concept of polyhedron, from pedagogical and didactic principles relevant and valid. Its privilege lies in the generation of alternative learning environments, which favor the construction of knowledge from the interaction, so it favors the process of conceptualization as important in the development of thinking and math skills.
Key words: study, classroom, explore, conceptualize, polyhedron

Contextualización

Esta actividad se inició con la conformación de un grupo de trabajo institucional, en torno a la Metodología Estudio de Clase -MEC- en la I.E Francisco José de Caldas, en el marco del curso B-Learning ofrecido por el MEN en el año 2010. Durante la fase de indagación y planificación, el equipo reflexionó sobre los factores que están incidiendo en las dificultades de los estudiantes, para conceptualizar y formular definiciones de objetos geométricos, y sobre los bajos desempeños que se presentaron, en relación con el pensamiento espacial y geométrico, evaluado en las pruebas Saber 2009. De igual forma, el equipo observó y caracterizó eventos de clase que evidenciaban la problemática objeto de la clase planteada en el marco de la MEC, para luego consolidar el tema seleccionado: los poliedros, y la pregunta problematizadora: ¿Cómo planificar y orientar una clase en geometría que favorezca en los estudiantes la construcción del concepto de poliedro?De acuerdo con lo anterior, se diseñaron las actividades, guías y materiales a utilizar en la clase, desde los referentes teóricos estudiados, particularmente lo propuesto en el Modelo Van Hiele.

En la fase de ejecución, se implementó y observó en tres sesiones la clase planificada; cada una de ellas se centró en el trabajo en equipo en torno a dos guías de actividades, el uso de materiales manipulables y las TIC. Finalizada cada una de las tres sesiones, se hizo la revisión y retroalimentación del trabajo adelantado (reconocimiento de la pertinencia de las acciones

emprendidas y ajustes a realizar para afianzar los objetivos propuestos), a partir de los protocolos empleados para la observación de la clase.

Desde el año 2012, se inicia un proceso académico, para replicar la experiencia en la Institución Educativa la Unión, del municipio de Sincelejo, con la participación de los docentes que orientan el área de matemáticas en el grado octavo, el cual actualmente se viene desarrollando y sistematizando, bajo el apoyo del grupo de investigación Proyecto Pedagógico de la Universidad De Sucre. La intensión principal del grupo, es seguir implementando ésta metodología de trabajo, diseñar y poner en práctica otras experiencias de aula desde diferentes ejes temáticos de la matemática, usando la metodología de clase M.E.C como apoyo principal.

Referentes teórico-prácticos básicos

Las perspectivas teóricas que sustentan esta experiencia, se centran en los principios del modelo de enseñanza Van Hiele propuestos por Alsina y Fortuny (1997), en el cual se asume como fases de enseñanza: Información, Orientación dirigida, Explicitación, Orientación libre, e Integración , que se describen a continuación:

Fase: preguntas/información

Se trata de determinar, o acercarse lo más posible, a la situación real de los alumnos/as. Está fase es oral y mediante las preguntas adecuadas se trata de determinar el punto de partida de los alumnos/as y el camino a seguir de las actividades siguientes.

Se puede realizar mediante un test o preguntas individualizadas utilizando actividades del nivel de partida. Cabe señalar, que muchas veces, el nivel no lo marca tanto la pregunta coma la respuesta, es decir, diseñamos una pregunta pensando en un nivel concreto y la respuesta recibida, nos puede señalar un nivel distinto del pensado inicialmente.

Fase: orientación dirigida

Aquí es donde la importancia de la capacidad didáctica del profesor/a más se va a necesitar. De su experiencia señalan que el rendimiento de los alumnos/as (resultados óptimos frente a tiempo empleado) no es bueno si no existen una serie de actividades concretas, bien secuenciadas, para que los alumnos/as descubran, comprendan, asimilen, apliquen, las ideas, conceptos, propiedades, relaciones, que serán motivo de su aprendizaje en ese nivel.

Fase: explicación (explicitación)

Es una fase de interacción (intercambio de ideas y experiencias) entre alumnos/ as y en la que el papel del profesor/a se reduce en cuanto a contenidos nuevos y, sin embargo, su actuación va dirigida a corregir el lenguaje de los alumnos/as conforme a lo requerido en ese nivel.

La interacción entre alumnos/as es importante ya que les obliga o ordenar sus ideas, analizarlas y expresarlas de modo comprensible para los demás.

Fase: orientación libre

Aparecen actividades más complejas, fundamentalmente referidas a aplicar lo anteriormente adquirido, tanto respecto a contenidos como al lenguaje necesario.

Estas actividades deberán ser lo suficientemente abiertas, lo ideal son problemas abiertos, para que puedan ser abordables de diferentes maneras o puedan ser de varias respuestas válidas conforme a la interpretación del enunciado. Esta idea les obliga a una mayor necesidad de justificar sus respuestas, utilizando un razonamiento y lenguaje cada vez más potente.

Fase: integración

La primera idea importante es que, en esta fase, no se trabajan contenidos nuevos sino que sólo se sintetizan los ya trabajados. Se trata de crear una red interna de conocimientos aprendidos o mejorados que sustituya a la que ya poseía. En esta fase se pueden integrar las actividades de evaluación y seguimiento al conocimiento aprehendido.

Por otra parte, se asumen principios importantes para el aprendizaje de la geometría, como el razonamiento informal, razonamiento visual, razonamiento formal, los contraejemplos, la predicción y la conjeturación.

Según los Lineamientos Curriculares para el área de matemáticas (1998), se plantea que los sistemas geométricos se construyen a través de la exploración activa y modelación del espacio tanto para la situación de los objetos en reposo como para el movimiento. Esta construcción se entiende como un proceso cognitivo de interacciones, que avanza desde un espacio intuitivo o sensorio-motor (que se relaciona con la capacidad práctica de actuar en el espacio, manipulando objetos, localizando situaciones en el entorno y efectuando desplazamientos, medidas, cálculos espaciales, etc.), a un espacio conceptual o abstracto relacionado con la capacidad de representar internamente el espacio, reflexionando y razonando sobre propiedades geométricas abstractas, tomando sistemas de referencia y prediciendo los resultados de manipulaciones mentales.

Sobre la conceptualización, Samper y Camargo (2003) manifiestan, que las actividades dirigidas a favorecer la formación de conceptos geométricos, también favorecen el desarrollo del razonamiento, a través de las interacciones de los estudiantes, así como la apropiación de un

lenguaje especializado, y el establecimiento de relaciones entre conceptos, lo cual permite la ampliación de la imagen conceptual del objeto geométrico en particular y de otros que el estudiante conoce.

Ahora, si el interrogante que mueve esta experiencia es ¿Cómo planificar y orientar una clase en geometría que favorezca en los estudiantes la construcción del concepto de poliedro? Sin duda sus respuestas plausibles, deben generarse desde los referentes anteriormente presentados y desde otros que estén en la misma dirección y perspectiva.

Descripción general de la experiencia de aula

El problema que se abordó con este estudio de clase, se centra en la poca importancia que desde la enseñanza de la geometría se le da al proceso de conceptualizar y definir, lo cual se evidencia en las prácticas de enseñanza de corte transmisionista en las cuales el docente expone la definición y la relaciona con representaciones o ejemplos, limitando la posibilidad que el estudiante asuma un rol activo y constructivista. Este tipo de situaciones ha traído como consecuencia que los estudiantes no se apropien de conceptos básicos de la geometría o que en su defecto sólo lleguen a memorizarlos sin comprenderlos.

En relación con lo anterior y asumiendo una mirada crítica sobre la enseñanza de la geometría, el equipo de la MEC de la I.E Francisco José de Caldas, inició un procesos de discusión sobre este tema, especialmente motivados por los bajos resultados que se aprecian en geometría, evidenciados en las actividades de las clases, los desempeños de los estudiantes y los resultados de las pruebas saber 2009, según los cuales la institución es débil en el componente geométrico-métrico en los grados 5° y 9°.Ante esta realidad se planteó el siguiente interrogante:

¿Cómo planificar y orientar una clase en geometría que favorezca en los estudiantes la construcción del concepto de poliedro?

Logros y dificultades

Dentro de los principales resultados evaluados y observados por el equipo MEC en relación con el estudio de clase desarrollado, se tienen:

Como logros:

- Se privilegió el uso y construcción de materiales manipulables y con ellos los proceso de exploración, descubrimiento y conceptualización, así como también el trabajo de grupo cooperativo.
- Se evidenciaron en los diferentes grupos amplias discusiones sobre matemáticas, donde aparecieron los cuestionamientos y conjeturas alrededor del concepto de poliedro.

- Fue importante el proceso de justificación del pensamiento y las ideas propuestas.
- Se promovió el proceso de escribir y usar el lenguaje matemático en las diferentes actividades de la clase.
- El desarrollo de la clase desde el abordaje de la pregunta ¿Qué es un poliedro?, contribuyó desarrollar la solución de problemas como enfoque de enseñanza
- Se asumió una propuesta didáctica, centrada en principios pedagógicos pertinentes para el aprendizaje de la geometría, como lo constituye el modelo Van Hiele.
- Se privilegiaron los principios del NTCM que expresan: "Enseñar capacidad matemática requiere ofrecer experiencias que estimulen la curiosidad de los estudiantes y construyan confianza en la investigación, la solución de problemas y la comunicación". "Los conceptos de geometría y medición se aprenden mejor mediante experiencias que involucren la experimentación y el descubrimiento de relaciones con materiales concretos".

Como dificultades:

- Al iniciar el proceso, la resistencia en algunos decentes del área de matemáticas para asumir comprometidamente el reto, lo que fue superándose en la medida que se interactuaba y se construía la experiencia desde y la metodología MEC.
- Limitado número de computadores para el trabajo planificado.

Para determinar los anteriores logros y dificultades, se diseño un protocolo de observación y evaluación para valorar las fortalezas y debilidades de lo realizado, atendiendo a los siguientes criterios:

- Metodologías empleadas para el desarrollo de la clase.
- Interacciones profesor-estudiantes.
- Interacciones estudiantes-estudiantes.
- Desarrollo de los aprendizajes en los estudiantes.
- Materiales y recursos utilizados.
- Proceso de evaluación.
- Alcance de objetivos/metas.
- Motivación, interés y participación de los estudiantes.

Conclusiones de la experiencia

Dentro de este proceso de formación y cualificación docente que está inmerso en la MEC, es importante resaltar las lecciones aprendidas en la realización de la experiencia ¿qué es un poliedro?, en los diferentes aspectos y componentes que se impactan:

- Formación de docentes y fortalecimiento de las prácticas pedagógicas. La MEC propicia espacios para la investigación e innovación en la enseñanza de la matemática y abre escenarios de reflexión pedagógica que potencian la consolidación de comunidades académicas institucionales de docentes que se forman colectivamente y transforman sus prácticas pedagógicas.
- Aportes para el fortalecimiento institucional. La MEC contribuye a que estudiantes, profesores y directivos establezcan compromisos institucionales para fortalecer el trabajo en equipo y fomentar la política institucional.
- Desarrollo de competencias en los estudiantes. La MEC promovió procesos de enseñanza en los cuales los estudiantes interactuaron con materiales manipulables y recursos tecnológicos y permitió que exploraran, descubrieran y construyeran conocimientos sobre los poliedros y argumentaran sus ideas partir del lenguaje matemático en las diferentes actividades de la clase.

Referencias bibliográficas

Alsina, C. y Fortuny, J. (1997). *¿Por qué Geometría?, Propuesta didáctica para la ESO*. Madrid: Editorial Síntesis.

Godino, J. y Ruiz, F. (2002). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. Recuperado en octubre de 2013 de http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

Ministerio de Educación Nacional (1998). *Matemáticas. Estándares de competencias básicas*. Bogotá: MEN.

Ministerio de Educación Nacional (1998). *Matemáticas. Lineamientos curriculares*. Bogotá: Cooperativa editorial Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional (2009). *Curso b-learning en metodología estudio de clase Para los docentes de las áreas de ciencias y matemáticas*, modulo, materiales de apoyo. Bogotá: MEN.

Samper, C. y Camargo, L. (2003). *Tareas que promueven el razonamiento en el aula a través de la geometría*. Bogotá: Grupo editorial Gaia.

ACTIVIDADES Y PROBLEMAS EN SU CONTEXTO HISTÓRICO

Gustavo Franco
Instituto de Profesores "Artigas". Uruguay
gfrancoc@hotmail.com

Resumen. La historia permite situar los conocimientos matemáticos dentro de un contexto social y cultural. La literatura nos ayuda a empatizar con los personajes que forman parte de la obra, a comprender mejor, en la complejidad, la condición humana; en otras palabas: humaniza. La matemática necesita ser humanizada para que los estudiantes la incorporen como parte de la herencia cultural de la humanidad. No debería ser enseñada como un objeto increado, sin principio, sino como la obra de hombres y mujeres, con pesares y alegrías, con los que nos sentimos identificados. En este artículo se proponen, como ejemplos, algunas actividades y problemas situados en su contexto histórico, ilustradas a través de algunos fragmentos literarios.
Palabras clave: historia de la matemática, literatura, problemas, actividades
Abstract. The history lets you contextualize socially and culturally the mathematical knowledge. Literature helps us to empathize with the characters that are part of the literally work, to understand better the human condition, in its complexity, in other words: humanizes. It is necessary to humanize math, so that students acknowledge it as part of the cultural heritage of humanity. It should not be taught as a subject uncreated, without beginning, but as the result of the work of men and women, with sorrows and joys, with whom we identify. In this paper we propose, as examples, some activities and problems placed in its historical context, illustrated through literary fragments.
Key words: history of mathematics, literature, problems, activities

Introducción

La historia de la matemática y la literatura se complementan, brindando una visión de la matemática más social y humana. Proponer problemas contextualizados dentro de su marco histórico e ilustrados por textos literarios, permite a los estudiantes acercarse a los personajes que fueron creadores de la obra matemática, dotándolos de una existencia que trasciende meros nombres, orígenes y fechas —muchas veces aproximadas— de sus nacimientos y de sus muertes. "[…] la historia le puede proporcionar [al profesor] una visión verdaderamente humana de la ciencia y de la matemática, de lo cual suele estar también el matemático muy necesitado." (Gil & De Guzmán, 1993, p. 107). La historia permite comprender que los conocimientos en matemática no han existido siempre, que no son obra de un dios, que son el resultado del pensamiento de hombres y mujeres de huesos, carne y sangre. La literatura profundiza esta comprensión cuando brinda elementos que ayudan a humanizar a los personajes históricos que fueron los creadores del conocimiento matemático. En la vida cotidiana, dice Morin (1999), conocemos a los individuos exteriormente, en cambio, en la novela, los llegamos a conocer en todas sus dimensiones, subjetivas y objetivas. "La enseñanza secundaria debería ser el lugar del aprendizaje de lo que debe ser la verdadera cultura, la que establece el diálogo entre cultura de las humanidades y cultura científica […]" (Morin, 1999, p. 82).

> […] parecería que en los alumnos subyace la idea inconsciente de que los conceptos matemáticos, como así la simbología, han existido siempre o que, por lo menos, tuvieron una aparición fortuita ("Al que se le ocurrió esto no tenía nada que hacer, ¿no?"). Lo cual no es difícil de comprender puesto que la enseñanza tradicional de la matemática, en general, no ha tenido en cuenta la evolución del conocimiento, el contexto histórico, la componente humana, etc., y se ha ocupado de describir un cuerpo acabado de conocimientos sin lugar a disentimientos. (Franco, 2007, p. 3)

En lo que sigue, propondré algunas actividades situadas en un cierto contexto histórico, complementadas con textos literarios que servirán para ejemplificar la propuesta de trabajo. Las actividades han sido seleccionadas a modo de ejemplo aunque teniendo en cuenta el nivel educativo elegido para el taller. En general, sería conveniente que la selección de actividades destinadas a ser trabajadas en la clase de matemática esté determinada por los temas que deben ser abordados en el curso.

Los cuadrados mágicos

El primer documento de un cuadrado mágico en China se remonta a la época del semi-mítico emperador Yu, que parece haber vivido en el tercer milenio a. C. Existe una leyenda acerca de que Yu adquirió el diagrama del Lo shu (que significa Escrito del Río Lo) copiado a partir del dibujo del caparazón de una tortuga sagrada encontrada en el Lo, un afluente del Huang Ho.

> —¿Qué era *eso?* —preguntó Alicia.
>
> —La tortuga divina que el sabio chino Yu vio salir del río Amarillo —contestó Charlie—. Al menos eso es lo que cuenta el *Libro de las permutaciones*, escrito hace más de tres mil años. Los signos de su caparazón representan los números del 1 al 9 mediante puntos blancos y negros, y componen un cuadrado mágico.
>
> —¿Y qué es un cuadrado mágico?
>
> […]
>
> —Si consigues disponer en las casillas los números del 1 al 9 de manera que todas las filas, columnas y diagonales sumen lo mismo, habrás compuesto un cuadrado mágico.
>
> —Me he dado cuenta de que en el centro del caparazón de la tortuga había cinco puntos formando una cruz —comentó Alicia.
>
> —Pues ya tenemos mucho adelantado. Pongamos el 5 en la casilla central.
>
> (Frabetti, 2000, p. 103).

Escribe en notación actual el *Lo shu* que aparece en el caparazón de la tortuga (figura 1).

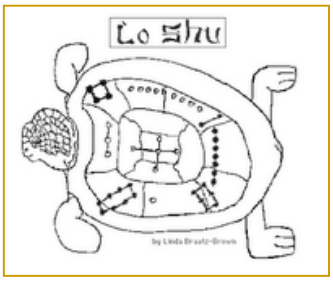


Figura 1

El *Lo shu* (figura 2) es un cuadrado mágico regular (un cuadrado mágico de orden impar se denomina *regular*, si cada par de números simétricos respecto al número central, suman el doble de dicho número) de orden 3, en el que los números de todas las diagonales, filas o columnas suman 15, manteniéndose un equilibrio notable entre los números impares y los pares alrededor del número central que es el cinco.

4	**9**	**2**
3	**5**	**7**
8	**1**	**6**

Figura 2

El diagrama representaba un importante principio de la filosofía china: el equilibrio entre las fuerzas complementarias de la naturaleza del Yin y el Yang; indicadas a través de los números impares y los pares respectivamente. El Yin era la fuerza pasiva, oscura y femenina, y el Yang era la fuerza activa, luminosa y masculina. Ambos principios provenían de una mezcla primordial de material y energía que se presentaba como un fluido en movimiento giratorio. Dicho movimiento separaba lo oscuro y pesado, de lo luminoso y sutil; lo primero daba lugar a la tierra y al principio Yin, y lo segundo al cielo y al principio Yang. La interacción entre ambos principios originaban los cinco elementos: agua, fuego, tierra, madera y metal. Pero lo más significativo de todo esto fue que intentaron aislar químicamente los principios Yin y Yang, lo cual dio origen a la alquimia, la dietética y la farmacia.

El primer tratamiento sistemático de los cuadrados mágicos en Occidente corrió a cargo de un griego bizantino, Moschopoulos (*ca.* 1300), quien describió los métodos para disponer los números desde el 1 al n^2 en un cuadrado de dimensiones n por n, de manera que la suma de los elementos de cada fila, columna o diagonal sea igual $\frac{1}{2}n(n^2+1)$. Moschopoulos estaba interesado más en las propiedades matemáticas que en las mágicas de los cuadrados. A su obra se debe la introducción y posterior popularización de los cuadrados mágicos en Europa —un interés que duró muchos siglos.

(i) Para construir un cuadrado mágico de dimensiones $n \times n$, los números naturales desde el 1 al n^2, ¿podrían distribuirse de otra forma que no fuera de modo que la suma de los elementos de cada fila, columna y diagonal sea $\frac{1}{2}n(n^2+1)$. ¿Por qué?
(ii) ¿Podrías construir un cuadrado mágico de orden 2? ¿Por qué?

La matemática en India: Aryabhata I

Los primeros científicos hindúes de los que se tiene un conocimiento cierto fueron los dos Aryabhatas, *ca.* 475-550 d.C., que trabajaban en Patna; Varahamihira, *ca.* 505, que tenía un observatorio astronómico en Ujjain; y Brahmagupta, *ca.* 628, que trabajaba también en Ujjain. Otras figuras posteriores fueron Mahavira, *ca.* 850, en Mysore, y Bhaskara, 1111-1185, que, aunque venía del sur, trabajaba en Ujjain.

Figura 3

Se sabe que Aryabhata (figura 3) escribió su gran obra (Aryabhatiya) en Kusum Pura, cerca de la actual Patna en Bihar. En el comentario de Nilakantha sobre el Aryabhatiya, se representa una sucesión aritmética mediante el apilamiento de tiras rectangulares, de anchura unidad y de longitudes iguales al número de unidades en cada término de la sucesión, encima unas de otras, con la tira más corta en la parte más alta y la más larga en la base (figura 4).

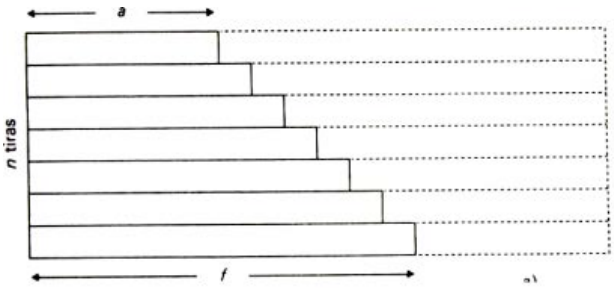


Figura 4

Si se unen dos de estas *sredhiksetras,* una de ellas invertida para que encaje con la otra, la figura resultante será un rectángulo con n unidades de altura (el número de términos, o tiras rectangulares) y $a + f$ unidades de longitud, donde a y f son el primero y el último término de la sucesión, respectivamente.

(i) Continuando con el razonamiento de Nilakantha, halla, en función de a, f y n, la suma de los naturales desde a hasta f ($a < f$), sabiendo que desde a a f (inclusive) hay n naturales.

(ii) Halla n en función de a y f.

(iii) Demuestra, utilizando el *Principio de Inducción Completa*, la igualdad hallada en la parte (i).

(iv) Reflexiona sobre el posible valor en la enseñanza media de las demostraciones visuales y sobre el posible valor de las demostraciones que aplican el *Principio de Inducción completa*.

La matemática musulmana

En el 762 el segundo califa abasí, Almanzor, trasladó la capital del islam a Bagdad y comenzó el proceso de convertirla en una nueva Alejandría. Este ambicioso programa fue ejecutado durante los califatos de Harum al-Rashid (786-809) y su hijo Almamun (809-833), e incluyó un observatorio, una biblioteca y un instituto para traducción e investigación llamado *Bait al-Hikma*

(«Casa de la Sabiduría») que iba a ser el centro intelectual del mundo árabe en los doscientos años siguientes.

> Bagdad era una ciudad nueva como Alejandría, construida apenas en tres años. Como ella, estaba situada entre dos aguas, el Tigris y el Éufrates. También como ella estaba atravesada por dos canales –todos los habitantes, por supuesto los ricos, presumían de poseer un asno en la cuadra y un barco en el río–. Y, más en común con Alejandría, era una ciudad cosmopolita. Pero mientras que Alejandría, era una ciudad rectangular, Bagdad era circular. Se la conocía como la Ciudad Redonda.
>
> Una muralla circular de forma geométrica perfecta que se hubiera dicho dibujada con compás, y en el centro exacto del círculo, la mezquita y el palacio del califa, desde donde salían, en cuatro direcciones perpendiculares, anchas avenidas que conducían a las cuatro puertas abiertas de la muralla, que eran el único medio para entrar en la ciudad. […]
>
> El paralelo entre Alejandría y Bagdad se impone de nuevo. La primera tenía el Museo y la Gran Biblioteca, la segunda se dotó con una institución que se parecía al Museo como una gota de agua a otra, Beit al Hikma, la Casa de la Sabiduría.
>
> Tanto en Alejandría como en Bagdad se habían construido un observatorio y una biblioteca. Una diferencia entre las dos: en Alejandría el Museo precedió a la Biblioteca; en Bagdad la Biblioteca, fundada por Harún al-Raschid, precedió a la Casa de la Sabiduría, creada por su hijo al-Mamún.
>
> La Biblioteca de Bagdad fue la auténtica heredera de la de Alejandría. Los libros que llegan a Alejandría estaban escritos en griego en su mayoría, mientras que ninguno de los que llegaban a Bagdad estaba escrito en árabe. Hubo que traducirlos.
>
> ¡Se inició una gran empresa. Traducir, traducir y traducir! [...] (Guedj, 2000, pp. 226-228).

Avicena

Figura 5

En la teoría de números, como en otros campos, los árabes consiguieron producir una síntesis creativa de las ideas que obtuvieron de diferentes tradiciones matemáticas —notablemente de la India y del mundo helenístico.

Esto se ejemplifica de la mejor manera en la obra de ibn Sina o Avicena, como se lo llamó en Europa (figura 5). Aunque es muy conocido por su obra en medicina, su obra matemática es poco apreciada fuera del mundo islámico.

Esa tarde Rob vio en el *maristan* al hombre que los persas llamaban Jefe de Príncipes. A primera vista, Ibn Sina le resultó decepcionante. Su turbante rojo de médico estaba desteñido y lo llevaba atado con descuido; su *durra* presentaba un aspecto lastimoso y era sencilla. Bajo y de calva incipiente, tenía la nariz bulbosa y con venitas, y un principio de papada bajo su larga barba. Era igual a cualquier árabe envejecido, hasta que Rob vio sus penetrantes ojos pardos, tristes y observadores, severos y curiosamente vivos, y de inmediato sintió que Ibn Sina veía cosas que resultaban invisibles para el hombre corriente.

> Rob era uno de los siete estudiantes que, con cuatro médicos, seguían los pasos de Ibn Sina mientras recorría el hospital. Ese día el médico jefe se detuvo a corta distancia del jergón en el que yacía un hombre hecho una pasa y de miembros flacos. […]
>
> —¿Qué lo aqueja, entonces? […]
>
> Esperó.
>
> Como nadie hizo ninguna observación, se acercó al paciente.
>
> —Amahl —dijo—, yo soy Husayn el Médico, hijo de Abd-Ullah, que era hijo de al-Hasan, que era hijo de Alí, que era hijo de Sina. Estos son mis amigos y serán amigos tuyos. ¿De dónde eres?
>
> —De la aldea de Shaini, maestro —susurró el hombre del jergón.
>
> —¡Ah, eres un hombre de Fars! He pasado días muy felices en Fars. Los dátiles del oasis de Shaini son grandes y dulces, ¿verdad?
>
> A Amahl se le llenaron los ojos de lágrimas y asintió torpemente.
>
> —Askari, ve a buscar dátiles y un cuenco de leche tibia para nuestro amigo.
>
> Al instante trajeron lo que había pedido Ibn Sina; médicos y estudiantes observaron cómo el enfermo comía vorazmente.
>
> —Despacio, Amahl. Despacio, amigo mío —le advirtió Ibn Sina—. Askari, ocúpate de que cambien la dieta de nuestro amigo.
>
> Siempre debemos recordar este detalle acerca de los enfermos que están a nuestro cuidado. Acuden a nosotros pero no se convierten en nosotros, y con mucha frecuencia no comen lo que nosotros comemos. Los leones no paladean el heno cuando visitan al ganado. […]
>
> Ibn Sina observó a los hombres reunidos a su alrededor.

—Los aterrorizamos, jóvenes maestros. Algunas veces no podemos salvarlos y otras los mata nuestro tratamiento. No los matemos también de hambre.

El Jefe de Príncipes se alejó andando, con las manos a la espalda. (Gordon, 2007, pp. 505-508)

Avicena en su *Libro de física* formula dos reglas que no se encuentran en textos anteriores.

La primera es una regla para sumar un conjunto dispuesto en forma de cuadrado de números impares. Si se colocan números impares sucesivos en una tabla cuadrada como la siguiente (figura 6):

9	7	5	3	1
19	17	15	13	11
29	27	25	23	21
39	37	35	33	31
49	47	45	43	41

Figura 3

(a) ¿Qué puedes decir con respecto a la suma de los números de cada una de las diagonales del cuadrado?

(b) ¿Puedes establecer una relación entre la suma de los números de la diagonal y el lado del cuadrado?

(c) ¿Puedes establecer una relación entre la suma de los números que llenan el cuadrado y el lado del cuadrado?

La segunda regla es para sumar un conjunto de números impares dispuestos en un triángulo.

Si se colocan números impares sucesivos en forma de triángulo como en la figura siguiente (figura 7):

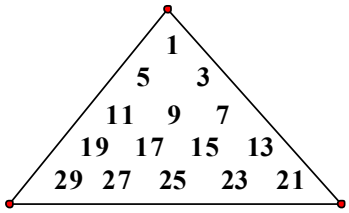


Figura 3

¿Qué relación puedes establecer entre la suma de los números de una fila y la cantidad de números de dicha fila?

Conclusión

La historia de la matemática y la literatura entrelazadas deberían integrarse a la propuesta de clase del profesor de matemática porque, por un lado, la matemática escolar debería ser humanizada y,

por otro, pueden contribuir a *unir los objetos* matemáticos, *poniéndolos en su contexto natural y situándolos respecto de un conjunto*.

> Nuestra civilización y, por consiguiente, nuestra enseñanza, privilegiaron la separación en detrimento de la unión, el análisis en detrimento de la síntesis. Unión y síntesis quedaron subdesarrollados… Como nuestro modo de conocimiento desune a los objetos, tenemos que concebir qué los une. Como aísla a los objetos de su contexto natural y del conjunto del que forman parte, constituye una necesidad cognitiva poner en su contexto un conocimiento particular y situarlo respecto de un conjunto. (Morin, 1999, p. 26)

Referencias bibliográficas

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza.

Franco, G. (2007, marzo). Relatos sobre historia de la matemática como recurso didáctico. *Conversación. Revista interdisciplinaria de reflexión y experiencia educativa* 18, 7-14.

Gil, D. y de Guzmán, M. (1993). *Enseñanza de las ciencias y la matemática. Tendencias e innovaciones*. España: Popular S.A.

Gordon, N. (2007). *El médico. La extraordinaria odisea de un joven médico en el siglo XI*. Barcelona: Byblos.

Guedj, D. (2000). *El teorema del loro. Novela para aprender matemáticas*. Barcelona: Anagrama.

Joseph, G. G. (1996). *La cresta del pavo real. Las matemáticas y sus raíces no europeas*. Madrid: Pirámide.

Mason, S. F. (1998). *Historia de las ciencias 1. La ciencia antigua, la ciencia en oriente y en la Europa medieval*. Madrid: Alianza.

Morin, E. (1999). *La cabeza bien puesta. Repensar la reforma. Reformar el pensamiento*. Buenos Aires: Nueva visión.

CARACTERIZACIÓN DE UN BANCO DE PRUEBAS PARA LA ENSEÑANZA DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Felipe Santoyo Telles, Miguel Ángel Rangel Romero, Karla Liliana Puga Nathal y Eliseo Santoyo Teyes
Centro Universitario del Sur de la Universidad de Guadalajara México
Instituto Tecnológico de Cd. Guzmán Jalisco
Centro de Bachillerato Tecnológico Industrial y de Servicios 226 de Cd. Guzmán Jalisco
santf22@hotmail.com, karlalpn4@hotmail.com, esantoyo25@hotmail.com

Resumen. Se expone la construcción de un banco de pruebas que permite generar información sobre el flujo de partículas sólidas, con la intención de modelar procesos tecnológicos en el curso de Ecuaciones Diferenciales. El dispositivo permite trabajar a nivel experimental con características de las partículas, características del fluido y condiciones de operación del sistema, a fin de motivar a los alumnos para que obtengan un vínculo entre las funciones matemáticas construidas y su aplicación, elaborando un planteamiento teórico de un modelo de descarga y corroborando los resultados previstos por el modelo con los resultados reales del proceso medidos en físico.
Palabras clave: ecuaciones diferenciales, modelación, banco de pruebas
Abstract. It describes the construction of a test bed that can generate information on the flow of solid particles, with the intention of modeling technological processes in the Differential Equations course.
The device allows do work experimental with particle characteristics, fluid characteristics and operating conditions of the system, in order to motivate students to do a link between mathematical functions and their application by developing a theoretical approach discharge model and corroborating the results predicted by the model with the actual results measured in physical process.
Key words: differential Equations, modeling, test bed

Introducción

El curso de ecuaciones diferenciales en México, forma parte del área de formación básica obligatoria en el plan de estudios de las Ingenierías, tiene como finalidad calcular variaciones de diferentes magnitudes que modelan múltiples fenómenos, sin embargo, en la cotidianidad de los centros educativos y a pesar de las múltiples reformas impulsadas –en particular el trabajo en base a competencias– se observa en las aulas la utilización de problemas descontextualizados, el énfasis en la resolución de algoritmos y profesores que abusan de la exposición, por señalar solo algunos de los problemas que se identifican al momento de la enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales.

La contextualización de las situaciones de aprendizaje adquiere gran importancia para lograr aprendizajes significativos, parafraseando a Díaz Barriga (2006), los educandos viven un fuerte divorcio entre el mundo de la escuela y el de la vida, una alternativa pedagógica que permite superar dicha ruptura de significación es la contextualización permanente de los contenidos a partir de los intereses de los jóvenes. Respecto a las competencias, señala González (2006) que el desarrollo de éstas, conlleva la realización de experiencias de aprendizaje que permitan articular conocimientos, habilidades y actitudes en contextos específicos, para lograr aprendizajes más complejos.

De acuerdo con Ausubel (1990), aprendizaje Significativo es aquel que implica más que asociaciones memorísticas una organización de conceptos y esquemas; propiciando que la información dure más tiempo, facilite nuevos aprendizajes, pueda relacionarse con contenidos previos y producir además cambios profundos. Un profesor que pretenda lograr aprendizajes significativos en sus estudiantes deberá hacer énfasis en los procesos de pensamiento y de aprendizaje, resaltando ventajas tales como la actividad de los estudiantes, motivación y un auténtico acercamiento hacia la adquisición de procesos transferibles a otros contextos, es en este sentido que la presente propuesta toma especial importancia, dado que pretende no sólo la manipulación algebraica, sino la aplicación en diversos contextos reales (simulados físicamente), permitiendo al estudiante la manipulación de los objetos tanto físicos como abstractos.

Se trata de matematizar la realidad, es decir, transitar del fenómeno físico a la representación abstracta en términos de cantidades, luego, manipular la representación abstracta para arrojar luz sobre el comportamiento físico o sea, sobre la realidad. Matematizar según Alsina (2007), es el proceso de trabajar la realidad a través de ideas y conceptos matemáticos, debiéndose realizar dicho trabajo en dos direcciones opuestas: a partir del contexto deben crearse esquemas, formular y visualizar los problemas, descubrir relaciones y regularidades, hallar semejanzas con otros problemas..., y trabajando entonces matemáticamente hallar soluciones y propuestas que necesariamente deben volver a proyectarse en la realidad para analizar su validez y significado.

Douady refiere que:

> un alumno tiene conocimientos de matemáticas, si es capaz de provocar su funcionamiento como herramientas explícitas en los problemas que deben resolver, haya o no indicadores en la formulación, y si es capaz de adaptarlos cuando las condiciones habituales de empleo no son exactamente satisfechas, para interpretar los problemas o plantear cuestiones a su respecto (1993, p.5).

Así pues, es deseable la promoción de un aprendizaje significativo a partir de la reflexión profunda sobre el concepto y no el mero tratamiento como una herramienta instrumental. Con relación a lo anterior Godino y Recio (1998) apuntan, que el significado se desprende de las acciones que el estudiante ejecuta sobre los objetos matemáticos, a las que denominan "prácticas prototípicas significativas".

Marco Teórico

Cuando los científicos explican, lo hacen relacionando cosas entre sí y las relaciones que utilizan no están dadas son el resultado de sus propias abstracciones, de las operaciones mentales que ejecutaron para combinar lo que habían observado, en matemáticas, para nombrar a una parte de

estas relaciones entre variables se ha construido el concepto de función, el término *función* se ha definido como una regla de correspondencia que asocia a cada elemento de un conjunto "A" llamado dominio con uno y sólo un elemento de un conjunto "B" llamado contradominio, cabe decir que los elementos del conjunto A y B son variables y que las ecuaciones diferenciales son aquellas que relacionan a una función y una o más de sus derivadas, Zill (2002).

De acuerdo con Piaget (1971, p. 27) "Las funciones esenciales de la mente consisten en comprender y en inventar, en otras palabras, en construir estructuras por medio de la estructuración de la realidad..." En matemáticas generalmente tales estructuras –también pueden ser conceptos– se elaboran o construyen a lo largo de mucho tiempo, años o décadas, y pueden perdurar también por mucho tiempo, cientos o miles de años, tal es el caso por citar un ejemplo, del "teorema de Pitágoras" u otros conceptos más recientes "La derivada de una función" o "Ecuaciones diferenciales" o el mismo concepto de "función".

Piaget reconoce el hecho de que los observadores elaboran sus explicaciones en términos de conceptos que fueron construidos por ellos mismos y fue el primero en proceder sobre la afirmación de que nuestras ideas son creaciones individuales (y que su compatibilidad mutua con las de otros tiene que ser conseguida por la interacción social), "Pienso que todas las estructuras se construyen y que el hecho fundamental es ese desarrollo de la construcción. Nada está dado al comienzo, salvo algunos puntos limitados sobre los que se apoya el resto. Las estructuras no están dadas por adelantado ni en la mente humana ni en el mundo externo, tal como lo percibimos o lo organizamos. (Piaget, 1977b, p. 63) ".

Según Glasersfeld (1997, p.4), "Aunque Piaget siguió una manera de pensar puramente biológica, ella lo condujo a una teoría del conocimiento que es perfectamente compatible con la de los físicos modernos. Ambos reconocen que las estructuras conceptuales que consideramos como "conocimiento" son los productos de conocedores activos que dan forma a su pensamiento para ajustar las restricciones que experimentan. (Nótese que los experimentos en física no pueden proveer un acceso privilegiado a la realidad, ellos meramente representan ingeniosas experiencias controladas)".

Es en este sentido que el presente trabajo propone la construcción de un banco de pruebas para generar datos empíricos (a partir de experiencias controladas) que puedan ser luego representados a través de ecuaciones diferenciales, o bien de modo inverso, dadas las ecuaciones diferenciales, verificar que realmente cumplan el propósito de modelar una situación pretendida. Se trata de matematizar situaciones del interés profesional del alumno.

En el modelo de Piaget, comentado por Glasersfeld (1997), el conocimiento tiene que ser visto como una colección de esquemas de acción y modelos de pensamiento que nos permiten vivir y movernos en el mundo tal como lo experimentamos, en este sentido las ecuaciones diferenciales modelan una extraordinaria cantidad de fenómenos en las distintas áreas de la ciencia y la tecnología, de ahí que su estudio reviste una gran importancia en diversas áreas de la ingeniería.

Diversos autores, –entre otros– Woolfolk (1996), Moreno (1998), García (2006), Serulnicov (2010), señalan que de acuerdo con la Epistemología Genética desarrollada por Piaget, el aprendizaje tiene lugar bajo dos principios fundamentales, "asimilación y acomodación", la asimilación de un objeto o una situación comporta una interpretación, la cual es necesaria para hacer admisible el objeto a fin de ser procesado por la estructura cognitiva, el resultado de este proceso es una forma de conocimiento que no es resultado de "copiar" el dato externo (la realidad) tal como se nos presenta a los sentidos, el supuesto fundamental es que los seres humanos construyen, a través de la experiencia, su propio conocimiento, y no simplemente reciben la información procesada para comprenderla y usarla de inmediato; el conocimiento es el resultado de una construcción incesante "a partir del mundo de nuestras experiencias", es de hacer notar la importancia central que tiene la experiencia –acción– del sujeto cognoscente con el objeto cognoscible en este paradigma.

En la teoría Piagetiana de la cognición se pueden reconocer tres principios básicos: La mente primariamente asimila, esto es percibe y categoriza la experiencia en términos de lo que ya es conocido, luego, sólo si el resultado de este proceso causa una alteración y crea una perturbación, se inicia una revisión que puede conducir a una acomodación. Por así decirlo, puede propiciar el cambio en una estructura existente o la formación de una nueva. Este segundo principio provee un mecanismo para el aprendizaje y debería entonces ser de interés para toda clase de maestros. El tercer principio piagetiano es aquel de la abstracción reflexiva. Lo que requiere es una mente activa que sea capaz de reflexionar sobre lo que percibe y sobre sus propias operaciones.

Se reconoce que el conocimiento siempre es un estado transitorio de un proceso, conocer es asimilar, lo cual no es copiar; asimilar es ante todo interpretar, dar significado, a una experiencia nueva a partir de lo que en ese momento, sean los esquemas cognitivos del sujeto. Un esquema cognitivo puede ser un concepto o un patrón de acción, en un esquema siempre está presente un mecanismo de reconocimiento, y cierta expectativa sobre los resultados esperados por la activación del esquema, si los resultados obtenidos son compatibles con los esperados, entonces dicho esquema se hace más estable; más confiable, pero puede ocurrir que, frente a una nueva situación un esquema no responda adecuadamente, entonces, el esquema cognitivo se

desequilibra y surge la necesidad de responder a la perturbación, esto se logra mediante la modificación del esquema en cuestión, esto es la acomodación, dando lugar a la re-equilibración del sistema. Así, se puede observar que el aprendizaje consiste en la consolidación de los esquemas cognitivos (patrones de acción, conceptos, teorías, etc.,) y en la generación de otros nuevos a partir de los desequilibrios existentes, una vez que éstos resultan insuficientes para abordar nuevas tareas.

La resolución de problemas, representa sin duda, una de las mejores opciones de que puede disponer un profesor que pretenda lograr aprendizajes significativos en sus estudiantes, haciendo énfasis en los procesos de pensamiento y de aprendizaje y logrando resaltar ventajas tales como la actividad de los estudiantes, motivación y un auténtico acercamiento hacia la adquisición de procesos transferibles a diversos contextos.

De acuerdo con Piaget et al. (1977), el planteamiento del problema y su estructura específica, posibilita que se generen conflictos cognitivos que el estudiante intentará asimilar a partir de los esquemas que posee; es decir, tratará de resolver el problema utilizando para ello los conocimientos y recursos que tiene, de ser necesario, su esquema cognitivo se modificará para acomodar la situación a la que se enfrentó.

Se ha señalado ya que conocer es asimilar, lo cual no es copiar; asimilar es ante todo interpretar, dar significado, a una experiencia nueva en este sentido es que se propone construir un banco de pruebas que permita transferir diversas situaciones problema del mundo físico a un escenario matemático que permita a los alumnos la manipulación de éstas en un plano matemático y luego la verificación de que los modelos abstractos (matemáticos) construidos permiten la predicción del comportamiento físico del fenómeno modelado, bajo ciertas restricciones. Se dijo también que un esquema cognitivo puede ser un concepto o un patrón de acción, de tal modo que al actuar sobre los objetos de conocimiento, (obsérvese que en un esquema está presente un mecanismo de reconocimiento y siempre conlleva acción, la acción siempre precede al conocimiento), las acciones que se promueven deben llevar al sujeto en dos direcciones; reafirmar algo que ya sabe o bien a reestructurar sus esquemas y dar significado a una experiencia nueva a partir de lo que en ese momento sean sus esquemas cognitivos, de tal modo que el conocimiento es al mismo tiempo, resultado, punto de partida y proceso.

Se dijo que el aprendizaje consiste en la consolidación de esquemas cognitivos (patrones de acción, conceptos, teorías, etc.) y en la generación de otros nuevos a partir de los desequilibrios generados, una vez que los esquemas iniciales resultan insuficientes para abordar nuevas tareas, así, resulta vital para el éxito de esta propuesta que las situaciones problema diseñadas garanticen

la necesidad de resolver tal situación problema con el abordaje de un esquema que se ha llamado ecuaciones diferenciales, para ello se promueven actividades –en el banco de pruebas– que propicien un acercamiento (interacción) gradual e inevitable al objeto-esquema cognoscible, tales acciones darán lugar a una inevitable desequilibración que lleve al alumno a una construcción y consolidación gradual del concepto "Ecuaciones Diferenciales".

La disposición del alumno para aprender es importante, por lo cual los problemas se relacionan con su realidad inmediata, considerando que si les encuentra sentido y aplicación práctica, entonces, le serán más atractivos, y perduraran en sus estructuras por más tiempo.

Propuesta

El dispositivo está proyectado para ser constituido por un alimentador de sólidos construido en acero inoxidable, con base cónica y salida hacia un tubo de acrílico transparente de 0.04 m de diámetro, el cual está conectado directamente a la válvula-S construida con tubo de acrílico transparente de 0.04 m de diámetro. La válvula-S trabaja con aire comprimido como fluido pulsante; las pulsaciones serán reguladas mediante el uso de una válvula solenoide.

El sistema completo lo integrarán también, el suministro de aire comprimido, un filtro de humedad de donde se derivan dos líneas: la primera conectada a un regulador de presión, seguido de una válvula solenoide de dos vías ON/OFF, que a su vez está conectada a un temporizador (con una exactitud del ajuste de un ± 5%, error establecido por el fabricante), un rotámetro de escala de 0 a 0.15 m^3 y, finalmente, una boquilla conectada a la válvula-S; la segunda línea, que también tiene su regulador de presión y rotámetro, suministra aire al tanque alimentador de sólidos para tener la opción de trabajar el sistema a una presión mayor a la atmosférica.

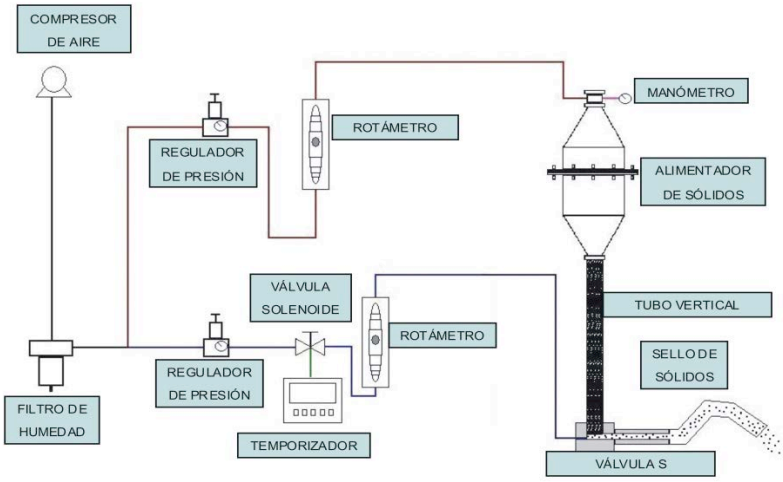


Figura 1: Diagrama del banco de pruebas utilizado en el experimentación

El sistema completo contiene además una válvula solenoide y un temporizador, contiene una entrada de gas en el tubo horizontal, en el extremo opuesto al sello de sólidos, el cual se usa para controlar neumáticamente el flujo de sólidos. Todos estos componentes se muestran en el diagrama del equipo utilizado para la experimentación y mencionado en el apartado anterior (figura 1).

Válvulas utilizadas

Una válvula-S completa consiste de un tubo vertical, un tubo horizontal y un sello de sólidos (figura 2).

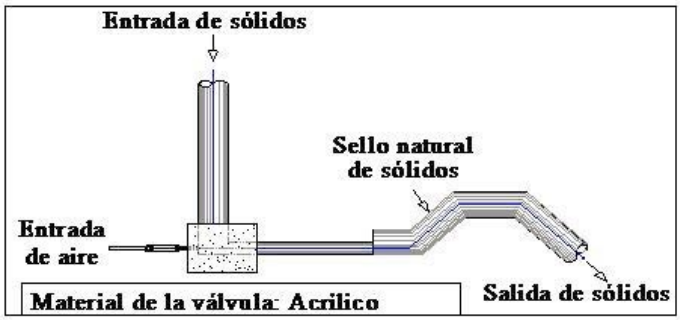


Figura 2: Diagrama de una válvula S.

Reflexiones finales

En este trabajo se expone la incorporación de un dispositivo –banco de pruebas– que permite generar información sobre el flujo de partículas sólidas con la intención de modelar procesos tecnológicos en el curso de Ecuaciones Diferenciales. Cabe señalar que de igual modo se podrían construir otros dispositivos a fin de modelar diversas situaciones del mundo cotidiano, por ejemplo, flujos de diversos líquidos, gases, concentraciones de soluciones, etc.

También se visualiza la posibilidad de simular a partir de software (Mathematica, math Lab, u otros), situaciones problema del mundo profesional de los alumnos, lo cual permite acercar al estudiante de modo más concreto (con las ventajas ya señaladas) hacia la manipulación del objeto de conocimiento que se pretende sea recreado y asimilado por ellos mismos bajo la tutela del profesor.

Referencias bibliográficas

Alsina, C. (2007). Si Enrique VIII tuvo 6 esposas, ¿cuántas tuvo Enrique IV? El realismo en educación matemática y sus implicaciones docentes. *Revista Iberoamericana de educación*, 43, 85-10.

Ausubel, D. y Novak. J. (1990). *Psicología educativa*. México: Trillas.

Díaz Barriga, F. (2006). *"Enseñanza situada", vínculo entre la escuela y la vida*. México: McGraw Hill.

Douady, R. (1993). Juegos de marcos y dialéctica herramienta-objeto. *Didáctica de las Matemáticas (Escuela Francesa).* México: Cinvestav- IPN

Godino, J. y Recio, A. (1998). Un modelo semiótico para el análisis de las relaciones entre pensamiento, lenguaje y contexto en educación matemática. En A. Olivier y K. Newtead (Eds.). *Proceedings of the 22th Conference of the Internacional Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp.1-8). University of Stellenbosch. South Africa.

González Casanova, P y Marcos, R., (2006). *La Formación de conceptos en ciencias y humanidades.* México: Siglo XXI.

Moreno, A. (1998). La enseñanza de la matemática: Un enfoque constructivista. En: *Piaget en la educación. Debate en torno a sus aportaciones* (pp. 165-193). México: Paidós Educador.

Moreno, M. (2005). El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo. Evolución, estado actual y retos futuros. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralba (Eds.), *IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. (pp. 81-96). Córdoba, España: Universidad de Córdoba.

Piaget, J. (1971). *Science of education and the psychology of the child.* New York: Viking Press (Francés: Psychologie et pédagogie,1969).

Piaget, J. (1977). Prólogo. En J.C. Bringuier, *Conversaciones libres avec Jean Piaget*. Paris: Editions Laffont.

Piaget, J., Inhelder, B., García, R., y Vonéche, J. (1977). *Epistémologie génetique et équilibration*. Neuchatel-Paris-Montréal, Delachaux & Niestlé.

Serulnicov, A., y Suaréz, R. (2010). *Jean Piaget para principiantes.* Argentina: Era Naciente SRL.

Von Glaserfeld, E. (1997). Homage to Jean Piaget (1896-1980). Home: Ecology of mind. Recuperado el 3 de mayo de 2005 de http://www.oikos.org/Piagethom.htm

Woolfolk, A. (1996). *Psicología Educativa.* México: Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A.

Zill, D. (2002). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*. México: International Thomson Editores.

NUEVO SISTEMA DE EVALUACIÓN EN LA CÁTEDRA DE CÁLCULO II

Marta Adriana Correa Zeballos, Ricardo Raúl Gallo, Gloria Moris, Mirtha Adriana Moya y Aida Evangelina Fernández
Universidad Nacional de Tucumán Argentina
Universidad Tecnológica Nacional
adricorrea@arnet.com.ar, gloria_moris@hotmail.com, amoya@fbqf.unt.edu.ar, rfigueroa@fbqf.unt.edu.ar, rgallo@arnet.com.ar

Resumen. La asignatura Cálculo II corresponde al Ciclo Básico en las carreras de ingenierías de la UTN-FRT. Para revertir el bajo porcentaje de alumnos que regularizaba y a posteriori aprobaba la materia se implementó un nuevo sistema de evaluación.
Este trabajo tiene por objetivo: "Establecer si el nuevo sistema de evaluación mejora los porcentajes de alumnos que regularizan y que posteriormente aprueban Cálculo II, en las carreras de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Civil"
Se observa que el porcentaje anual de regularizados aumenta y que el porcentaje de alumnos que aprueban se mantiene, lo que en términos absolutos significa, un aumento del número de alumnos que aprueban la materia, por lo tanto se concluye este nuevo sistema mejora el rendimiento académico.
Palabras clave: evaluativo, regularizados, parcial, examen final
Abstract. Calculus II this course corresponds to the basic cycle engineering careers in the UTN-FRT.
To reverse the low percentage of students approved retrospectively regularized matter and implemented a new evaluation system.
This work aims to: "Establish if the new evaluation system improves the percentages of students who regularized and subsequently approved Calculus II, in the careers of Electrical Engineering and Civil"
It is observed that the annual percentage increases regularized and that the percentage of students passing remains, which in absolute terms means, an increased number of students
Key words: evaluative, regularized, partial, final exam

Planteamiento del problema

La ordenanza del Reglamento de Estudios de la UTN, establece que un alumno será regular en una materia y por ende quedar habilitado a rendir el examen final, si cumple con dos requisitos: en primer lugar tener como mínimo el setenta por ciento de asistencia al total de las clases teóricas y prácticas y en segundo lugar tener aprobados dos exámenes parciales. El primer parcial se toma al final del primer cuatrimestre y el segundo al final del segundo cuatrimestre. El distanciamiento entre el comienzo de las clases y el primer parcial y entre este y el segundo parcial tenía efectos negativos en el rendimiento académico de los alumnos. Era frecuente observar que, depurado el padrón de estudiantes por inasistencias, los que regularizaban la materia era un porcentaje muy bajo, situación que se repetía año a año. Consecuentemente la tasa de aprobados en los exámenes finales también era baja, motivo por el cual se analizaron otras alternativas de evaluaciones con el fin de mejorar el número de alumnos que puedan rendir la asignatura. Finalmente privó el criterio de tomar tres evaluativos obligatorios en cada uno de los cuatrimestres. De esta manera los que aprueben los tres evaluativos tienen aprobado el correspondiente parcial y los que no, pueden rendir el parcial correspondiente al final de cada cuatrimestre, como así también sus respectivos recuperatorios. Se esperaba, con este nuevo

sistema de evaluación, conseguir que los estudiantes se vean obligados a tener la materia al día y correlativamente que el rendimiento del conjunto mejore, sobre todo en los exámenes finales. Esta innovación evaluativa se sustenta en la observación que entre las causas principales del problema de bajo rendimiento era el tiempo que transcurría desde el inicio de las clases y la fecha de toma de los parciales, período de cuatro meses cada uno, durante los cuales se desarrollan una gran cantidad de temas que los alumnos no estudian salvo frente a la inminencia de los parciales. Entre otros factores de importancia y que influye en este bajo rendimiento, es la deficiente formación que los alumnos traen del Nivel Medio, problemática que no se logra revertir aún durante el segundo año de cursado de la carrera, y también la carente formación de los alumnos en habilidades de tipo huerísticas.

Objetivo

Esta investigación tiene por objetivos:

1) Establecer si el nuevo sistema de evaluación implementado desde el año 2007 mejora significativamente el porcentaje de alumnos regularizados en la Cátedra de Cálculo II de la FRT de la UTN, en las carreras de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Civil.

2) Establecer si el porcentaje de alumnos que rinden y aprueban el examen final aumenta significativamente en la Cátedra de Cálculo II de la FRT de la UTN, en las carreras de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Civil.

Marco teórico

La evaluación ha sido siempre un tema de gran importancia en la educación. Tanto la institución, los educadores, padres y alumnos son conscientes de las repercusiones del hecho de evaluar y ser evaluado. Esto está íntimamente relacionado con la necesidad de alcanzar determinado nivel de calidad educativa, de gerenciar adecuadamente los recursos, el tiempo y los esfuerzos para alcanzar un mayor nivel de competencias tanto en el individuo como en la institución.

La evaluación en gran medida determina lo que los alumnos aprenden y cómo lo aprenden. Por lo tanto es también una parte importante del proceso enseñanza - aprendizaje ya que, esta información aporta al proceso de retroalimentación hacia el docente, que deberá tomarla para realizar un ajuste del "qué, cómo, por qué y cuándo enseñar"

El objetivo prioritario de los alumnos es satisfacer la exigencia de los exámenes. El de los docentes es que la evaluación refleje la aprehensión y maduración de los contenidos que enseñan. Es importante enfocarnos en el concepto de evaluación:

Evaluación es una actividad inherente a todo proceso intencional, como la educación, por lo que debe ser sistemática y su objetivo es valorarlo. Calificación es la valoración del logro de los alumnos. Este juicio de valor expresa el grado de suficiencia o insuficiencia en los conocimientos y habilidades del alumno por medio de una prueba o examen. Si la calificación no es usada para tomar alguna decisión respecto del proceso no existe una auténtica evaluación. Por lo tanto la evaluación es un proceso sistemático de identificación, recogida o tratamiento de datos sobre hechos educativos, con el objetivo de valorarlos y a partir de esto tomar decisiones.

La evaluación en el ámbito educativo tiene una amplia aplicación no sólo al rendimiento de los alumnos, sino también a los programas educativos, la práctica docente, los centros educativos, el sistema educativo en su conjunto. La evaluación puede resultar un estímulo para la educación, para ello es necesaria una definición clara de los objetivos y las reglas y acciones para lograrlos como así también las posibilidades de recuperación en caso de fracaso. Encontramos que esta problemática es una preocupación constante y permanente en la agenda didáctica de docentes e investigadores.

En este marco permanente de transición acordamos que el sistema de evaluación debe estar en concordancia no sólo con la propuesta curricular propiciada desde la cátedra, sino también con la concepción de enseñanza con la que trabajan los docentes en el aula y desde nuestra ya extensa práctica agregamos que debe atender también a las resoluciones y procedimientos que reglamentan la promoción de los alumnos y el currículum universitario en vigencia. Es decir, enseñanza, aprendizaje y evaluación son conceptos que se implican mutuamente, se alimentan, se solidarizan y se nutren unos de los otros.

Celman (1998) señala que las prácticas evaluativas se entrelazan en el interior mismo del proceso total y destaca que la evaluación no es ni puede ser un apéndice de la enseñanza ni del aprendizaje; no debe ser concebida como último acto desprendido de las acciones propias de la enseñanza y el aprendizaje.

La misma autora (2004), a la que hicimos referencia en el párrafo anterior, también expresa que las diferencias entre las distintas nociones de evaluación educativa radican básicamente en la concepción de educación que se tenga y que esas diferencias se centran en la tarea del evaluador, en lo que se evalúa, en el para qué evaluar. Destaca que es impensable un concepto de evaluación que no tenga en cuenta al sujeto, el objeto y práctica de la evaluación. Además refuerza la idea de evaluación educativa, participativa, democrática, tendiente a la comprensión favoreciendo así la formación de docentes críticos y comprometidos.

Entre las tendencias actuales sobre evaluación encontramos las que hacen referencia a las formas explícitas de la evaluación, nos centramos en las opiniones de Lipsman (2004) cuando aclara que es importante que los criterios de evaluación sean transparentes, que proporcionen a todos la igualdad de oportunidades y que tales criterios sean públicamente conocidos por los alumnos y que los juicios de valor sean actos de negociación explícita entre todos los implicados. Así mismo remarca y argumenta la idea de que no se puede encontrar un método que se consiga aplicar globalmente, exacto y que dé cuenta fehaciente de las competencias adquiridas por los alumnos y sus procesos de aprendizaje.

Gimenez Uribe y Samoluk (2007) plantean cinco dimensiones básicas de la evaluación relativas a los cuestionamientos que siempre han dado lugar a diferencias respecto de la definición de evaluación. Ellos distinguen:

a) El momento en que se realiza la evaluación que está relacionado con el "cuándo evaluar" y distinguen tres tipos de evaluaciones: la inicial, la continua y la final.

b) Los objetivos de la evaluación, que está relacionado con el "para qué evaluar" y se distinguen tres tipos de evaluación: la evaluación diagnóstica; la formativa y la sumativa. i) diagnóstica: se realiza al comienzo del curso académico, de la implantación de un programa educativo, del funcionamiento de una institución escolar, etc. Consiste en la recogida de datos en la situación de partida. Es imprescindible para iniciar cualquier cambio educativo, para decidir los objetivos que se pueden y deben conseguir y también para valorar si al final de un proceso, los resultados son satisfactorios o insatisfactorios. ii) formativa: la evaluación se utiliza preferentemente como estrategia de mejora y para ajustar sobre la marcha, los procesos educativos de cara a conseguir las metas u objetivos previstos. Es la más apropiada para la evaluación de procesos, aunque también es formativa la evaluación de productos educativos, siempre que sus resultados se empleen para la mejor de los mismos. Suele identificarse con la evaluación continua. iii) sumativa: suele aplicarse más en la evaluación de productos, es decir, de procesos terminados, con realizaciones precisas y valorables.

c) El evaluador, dimensión que está relacionada con el "quién evalúa" y nos hablan de evaluaciones internas y externas como aquellas que son realizadas por los participantes del proceso de enseñanza-aprendizaje o por una persona o equipo ajeno o no partícipe de la enseñanza, respectivamente.

d) El objeto de la evaluación, dimensión relacionada con el "qué evaluar": los aprendizajes de los alumnos, el desempeño del docente, los programas educativos, las instituciones educativas, entre otras.

e) Instrumentos de evaluación o el "cómo evaluar". Estos instrumentos deben adecuarse a los puntos anteriores, puesto que responderán de manera diferente de acuerdo a cual sea nuestro interés en la información que se recolecta. Por esto, debemos analizar, si el instrumento elegido es idóneo para nuestro propósito. Entre estos instrumentos mencionamos la observación, las entrevistas, los exámenes orales, los exámenes escritos, los trabajos en clase, las comunicaciones.

Por otra parte, autores como Santos Guerra (1998) entienden que si bien el proceso evaluador es muy complejo, la evaluación desempeña algunas funciones generales, que clasifica como: de diagnóstico, selección, jerarquización, comunicación y formación.

La lectura bibliográfica nos permitió consensuar el concepto de evaluación. Los debates internos en reuniones de cátedra pusieron de manifiesto que la evaluación es una parte fundamental del proceso enseñanza-aprendizaje, porque la lectura de sus resultados no sólo habla de lo aprendido o no por el alumno, sino también de la eficacia, la pertinencia, las competencias logradas o vacantes, la calidad del programa de estudios, el desempeño del docente en cuanto a criterios de selección, organización y jerarquización de contenidos y actividades. Concertamos además que es posible conocer los alcances y limitaciones de un proyecto educativo a medida que se va ejecutando. De nada sirve hacer el análisis sólo al final, puesto que esto impide mejorar y revisar la práctica que se desempeña en el momento actual.

Por otra parte, la revisión de nuestras prácticas nunca es fútil, trivial, o insignificante sino que nos da las herramientas para mejorarlas en el futuro. Pautamos que la evaluación debe mostrarnos los procesos de pensamiento, las habilidades cognitivas logradas y las que están ausentes, los grados de desempeño de los estudiantes, por lo que es muy importante no solo tener en cuenta qué evaluar, sino también cómo, cuándo y mediante qué instrumentos. Concluimos que el proceso evaluativo debe ser planificado de forma rigurosa y con conciencia, debe ser explícito, ofrecer alternativas, ser continuo y permitir la retroalimentación y corrección del proceso. Las actividades requieren de conocimiento y práctica referentes a datos y procedimientos de rutina; continuamos con prácticas referentes a la resolución de problemas típicos de la asignatura

Hipótesis

La hipótesis de este trabajo es que el nuevo sistema de evaluación, mediante tres evaluativos por cuatrimestre de pocos temas en un período corto de tiempo entre uno y otro, versus el sistema tradicional de parciales al final de cada cuatrimestre, mejora sustancialmente el porcentaje de alumnos regularizados y el porcentaje de alumnos que aprueban el examen final de la asignatura Cálculo II de las carreras de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Civil que se imparten en la FRT de la UTN

Metodología

Según Juan Samaja (1993), toda investigación científica se desarrolla bajo dos conceptos: a) La Matriz de Datos, que es una estructura cuatripartita compleja formada por la unidades de análisis, las variables, los valores y el procedimiento adoptado para obtener estos valores. b) El sistema de matrices de datos de una investigación, es decir la complejidad del conocimiento que se quiere aportar obliga a definir matrices centrales (una o más, llamadas matrices coordinadas) y en muchos casos es necesario diseñar matrices de nivel inferior (llamadas subunitarias) y también matrices de nivel superior a las centrales (llamadas matrices supraunitarias). Bajo este presupuesto el desarrollo de una investigación tiene cuatro fases: Diseñar, Llenar, Procesar e Interpretar Matrices de datos

Diseño de las matrices de datos

El la FRT de la UTN entre las cinco ingenierías que se imparten están la de Eléctrica, Electrónica y Civil y por ello en este trabajo definimos como matriz central a aquella donde las unidades de análisis son las carreras de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Civil. Las variables son los porcentajes de alumnos regularizados en Cálculo II, al final de cada año desde el 2005 hasta el 2009 (una variable para cada año y donde se consideran los alumnos que estaban en condiciones de rendir exámenes parciales, es decir con el setenta por ciento o más de asistencia a clases), y también como variables se consideran los porcentajes de alumnos que aprueban el examen final dentro del grupo de regularizados (una variable para cada año).

Para cada carrera fue necesario definir una matriz subunitaria, donde las unidades de análisis son los años de estudios y las variables número de alumnos que cursaron, que regularizaron y que aprobaron el examen final. Luego con una simple operación se obtienen los porcentajes. En todos los casos estos valores, fueron obtenidos de las planillas finales de regularidad y de la base de datos de alumnos que rinden la asignatura Cálculo II en las distintas fechas de exámenes finales y en el período bajo estudio, obrantes en Secretaría Académica de la facultad.

Llenado de las matrices de datos

A continuación se muestran las matrices a las que se hizo referencia en el párrafo anterior, presentadas en forma de tablas.

Matrices Sub-unitarias

En la Tabla 1 se presentan el total de alumnos que cursaron, regularizaron y rindieron el examen final de la carrera de Ingeniería Eléctrica en el período 2005 al 2009.

Períodos	Cursaron (C)	Regularizaron (R)	Examen Final (E F)				
2005	14	5	3	2005	2006	2007	2009
				-	1	1	1
2006	17	13	7	2006	2007	2008	2009
				-	4	2	1
2007	29	19	17	2007	2008	2009	2010
				2	9	3	3
2008	28	17	8	2008	2009	2010	
				1	4	3	
2009	29	19	6	2009	2010		
				4	2		

Tabla 1: Alumnos que cursaron, regularizaron y aprobaron el examen final de Cálculo II en el período 2005 al 2009 de la carrera de Ingeniería Eléctrica.

Fuente: Secretaría Académica de la FRT de la UTN.

En la Tabla 2 se presenta el total de alumnos que cursaron, regularizaron y rindieron el examen final de la carrera de Ingeniería Electrónica en el período 2005 al 2009.

Períodos	Cursaron (C)	Regularizaron (R)	Examen Final (E F)					
2005	38	16	9	2005	2006	2007	2009	
				1	3	4	1	
2006	18	12	10	2006	2007	2008	2009	2010
				-	3	4	1	2
2007	21	15	10	2007	2008	2009	2010	
				2	3	3	2	
2008	24	12	8	2008	2009	2010		
				-	4	4		
2009	42	35	13	2009	2010	2011		
				-	9	4		

Tabla 2. Alumnos que cursaron, regularizaron y aprobaron el examen final de Cálculo II en el período 2005 al 2009 de la carrera de Ingeniería Electrónica.

Fuente: Secretaría Académica de la FRT de la UTN

En la Tabla 3 se presenta el total de alumnos que cursaron, regularizaron y rindieron el examen final de la carrera de Ingeniería Civil en el período 2005 al 2009.

Períodos	Cursaron (C)	Regularizaron (R)	Examen Final (E F)					
2005	14	9	6	2005	2006	2007	2011	2012

				-	3	1	1	1
2006	21	11	9	2006	2007	2008	2009	2011
				-	2	5	1	1
2007	25	19	10	2007	2008	2009	2010	2011
				-	2	3	1	4
2008	39	26	13	2008	2009	2010	2011	2012
				1	2	4	3	3
2009	46	34	12	2009	2010	2011		2012
				-	4	5		3

Tabla 3. Alumnos que cursaron, regularizaron y aprobaron el examen final de Cálculo II en el período 2005 al 2009 de la carrera de Ingeniería Civil.

Fuente: Secretaría Académica de la FRT de la UTN.

En la Tabla 4 se presentan los porcentajes de alumnos que regularizaron la asignatura Cálculo II de la carrera de Ingeniería Eléctrica, en los periodos 2005 al 2009.

En la Tabla 5 se reagrupa la información de la tabla 3 en los períodos 2005-2006 (antes de la implementación de los evaluativos), y el 2007-2009 (después de la puesta en marcha del nuevo sistema).

En la Tabla 6 se presentan los porcentajes de alumnos que regularizaron la asignatura Cálculo II de la carrera de Ingeniería Electrónica, en los períodos 2005 al 2009.

En la Tabla 7 se reagrupa la información de la tabla 5 en los períodos 2005-2006 (antes de la implementación de los evaluativos), y el 2007-2009 (después de la puesta en marcha del nuevo sistema).

En la Tabla 8 se presentan los porcentajes de alumnos que regularizaron la asignatura Cálculo II de la carrera de Ingeniería Civil, en los períodos 2005 al 2009.

En la Tabla 9 se reagrupa la información de la tabla 7 en los períodos 2005-2006 (antes de la implementación de los evaluativos), y el 2007-2009 (después de la puesta en marcha del nuevo sistema).

	2005			2006			2007			2008			2009		
COMISIÓN	C	R	%	C	R	%	C	R	%	C	R	%	C	R	%
2Q1	14	5	36	17	13	76	29	19	66	28	17	61	29	19	66

Tabla 4. Porcentajes de alumnos regulares por año y por comisión de la carrera de Ingeniería Eléctrica

Fuente: Secretaría Académica de la FRT de la UTN.

COMISIONES	2005-2006			2007-2009		
2Q1	C	R	%	C	R	%
TOTAL	31	18	58	86	55	64

Tabla 5. Porcentajes de alumnos regulares antes y después de la aplicación de los evaluativos de la carrera de Ingeniería Eléctrica.

Fuente: Secretaría Académica de la FRT de la UTN.

	2005			2006			2007			2008			2009		
COMISIÓN	C	R	%	C	R	%	C	R	%	C	R	%	C	R	%
2R1	38	16	42	18	12	67	21	15	71	24	12	50	42	35	83

Tabla 6. Porcentajes de alumnos regulares por año y por comisión de la carrera delngeniería Electrónica

Fuente: Secretaría Académica de la FRT de la UTN.

COMISIONES	2005-2006			2007-2009		
2R1	C	R	%	C	R	%
TOTAL	56	28	50	87	62	71

Tabla7. Porcentajes de alumnos regulares antes y después de la aplicación de los evaluativos de la carrera de Ingeniería Electrónica.

Fuente: Secretaría Académica de la FRT de la UTN.

	2005			2006			2007			2008			2009		
COMISIÓN	C	R	%	C	R	%	C	R	%	C	R	%	C	R	%
2M1	14	9	64	21	11	52	25	19	76	39	26	67	46	34	74

Tabla 8. Porcentajes de alumnos regulares por año y por comisión de la carrera de Ingeniería Civil.

Fuente: Sección Alumnos de la FRT de la UTN.

COMISIONES	2005-2006			2007-2009		
2M1	C	R	%	C	R	%
TOTAL	35	20	57	110	79	72

Tabla 9. Porcentajes de alumnos regulares antes y después de la aplicación de los evaluativos de la carrera de Ingeniería Civil.

Fuente: Secretaría Académica de la FRT de la UTN.

Matriz Central

La matriz central del estudio se presenta en la tabla N° 10. Para formar la misma, se agrupó el total de alumnos que cursaron (C), regularizaron (R), rindieron y aprobaron el examen final (EF), para cada una de las dos ingenierías y para los dos períodos de estudio, antes y después de la implementación del nuevo método de evaluación.

	2005-2006				2007-2009			
CARRERAS	C	R	(R/C).100%	EF	C	R	(R/C).100%	EF
ELECTRICA	31	18	58	10	86	55	64	31
ELECTRÓNICA	56	28	50	19	87	62	71	31
CIVIL	35	20	57	15	110	79	72	43
TOTAL	122	66	54	44	283	196	69	105

Tabla 10. Porcentajes de alumnos regulares antes y después de la aplicación de los evaluativos según las distintas carreras y total de alumnos que rindieron y aprobaron el examen final.

Fuente: Secretaría Académica de la FRT de la UTN.

Procesamiento de las matrices de datos

Para analizar el impacto que tuvo el sistema de evaluación con respecto al porcentaje de alumnos regulares, se consideran el total de alumnos regulares y no regulares clasificados de acuerdo a si tuvieron o no el sistema de evaluativos, que se obtienen a partir de la Tabla 10. Estos valores se presentan en la Tabla 11.

Para analizar el impacto que tuvo el sistema de evaluación con respecto al porcentaje de alumnos que regularizaron, que rindieron y aprobaron el examen final, se consideran el total de alumnos regulares clasificados según si tuvieron o no el sistema de evaluativos, y si aprobaron o no el examen final. Estos valores se presentan en la Tabla 12.

Debido a que este estudio es de tipo retrospectivo, para medir la fuerza de asociación entre estas dos variables de tipo cualitativas dicotómicas se usó un Test estadístico inferencial denominado ODDS RATIO que proponen Graham y Everitt (1995) y cuyos valores se muestran más adelante. A su vez se analiza si hay diferencia significativa entre las proporciones de alumnos que aprobaron el examen final antes y después del sistema de evaluación. Para ello se aplica el Test ji-cuadrado de homogeneidad.

Para hacer la agrupación de datos se tuvo en cuenta que los profesores eran los mismos en las mismas comisiones antes y después de implementado el nuevo sistema de evaluación, es decir el efecto docente queda descartado. El mismo criterio se siguió al considerar los planes de estudio, es decir la materia es anual, antes y después de implementado los evaluativos por lo que el efecto planes de estudios tampoco afecta al análisis. El programa de la materia fue invariante y esta implementado desde el año 1995, por lo que se consideró que este efecto programa tampoco se debía considerar.

a) Impacto del sistema de evaluación en el porcentaje de alumnos regulares. Estudio inferencial.

	CON EVALUATIVO	SIN EVALUATIVO	TOTAL
REGULARES	196(69%)	66(54%)	262
NO REGULARES	87(31%)	56(46%)	143
TOTAL	283(100%)	122(100%)	405

Tabla 11. Total de alumnos regulares y no regulares clasificados según si tuvieron o no el sistema de evaluaciones.

Fuente: Secretaría Académica de la FRT de la UTN.

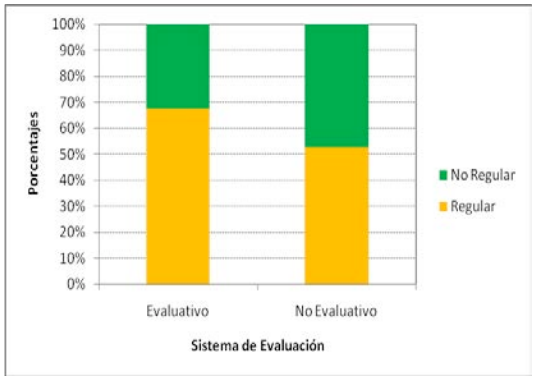


Gráfico 1: Porcentajes de alumnos regularizados y no regularizados con evaluativos y sin evaluativos

El estadístico calculado ODDS RATIO con su intervalo de confianza I del 95% es el siguiente:

OR = 1,911529 IC(95%) = (1,179593, 3,088425)

Este valor para el estadístico, diferente de uno, y el correspondiente intervalo de confianza nos indica que hay evidencia significativa para concluir que el sistema de evaluación implementado tuvo un impacto positivo en el porcentaje de alumnos regulares.

b) Impacto del sistema de evaluación en el porcentaje de alumnos que rinden y aprueban el examen final. Estudio inferencial.

	CON EVALUATIVO	SIN EVALUATIVO	TOTAL
EXAMEN FINAL	105(54%)	44(67%)	149
NO EXAMEN FINAL	91(46%)	22(33%)	113
TOTAL	196(100%)	66(100%)	262

Tabla 12. Total de alumnos regulares clasificados según si tuvieron o no el sistema de evaluaciones y si aprobaron o no el examen final

Fuente: Secretaría Académica de la FRT de la UTN.

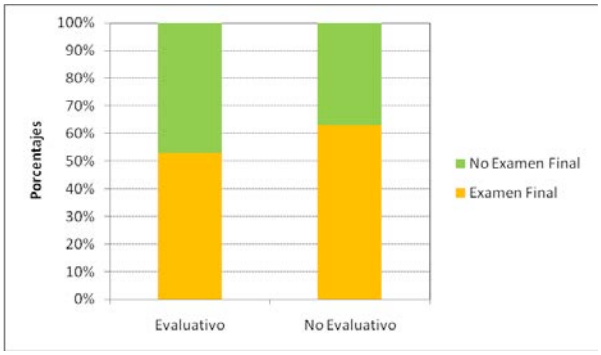


Grafico 2: Porcentajes de alumnos que rindierony aprobaron el examen final

1) Medida de la fuerza de asociación.

El estadístico calculado es el ODDS RATIO con su intervalo de confianza I del 95%:

OR = 0,6608 IC(95%) = (0,29671; 1,099635)

Este valor para el estadístico, menor que uno, y el correspondiente intervalo de confianza nos indica que no hay evidencia suficiente para concluir que el sistema de evaluación implementado tenga impacto positivo en el sentido de incrementar el porcentaje de alumnos que rinden y aprueban el examen final.

2) Test ji-cuadrado de homogeneidad.

A partir de la tabla 12 se puede analizar si hay o no diferencia significativa en la proporción de alumnos que rindieron y aprobaron el examen final antes y después de la aplicación del sistema de evaluación.

Para estudiar la significación se empleó el Test ji-cuadrado de homogeneidad para lo cual se tiene en cuenta las siguientes consideraciones:

$H_0 : p_1 = p_2$ P_1 : proporción de casos que aprueban el examen final antes de la aplicación del sistema de evaluativos. P_2 : proporción de casos que aprueban el examen final después de la aplicación del sistema de evaluativos	Valor del estadístico $X^2 = 3,451941$ $\alpha = 5\%$ $p_{value} = 0,0865$
A partir de estos valores se concluye que no hay diferencia estadísticamente significativa entre las proporciones de aprobados antes y después de la implementación del sistema de evaluativos.	

Conclusiones

Por todo lo expuesto, y hasta lo que se pudo observar al finalizar este trabajo, podríamos concluir con respecto al primer objetivo, que la implementación de este nuevo sistema de

evaluación se puede considerar más eficiente que el tradicional, respecto del porcentaje de alumnos que regularizan Cálculo II en las carreras de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y civil de la FRT de la UTN.

Con respecto al segundo objetivo a pesar de no observar un impacto positivo, en el sentido de incrementar la tasa de alumnos que rinden y aprueban el examen final, tampoco se lo puede considerar como negativo ya que del análisis de los resultados de los correspondientes estadísticos ODD RATIO y el de ji-cuadrado de homogeneidad y de la interpretación de los mismos en el contexto de la problemática, se observa que los porcentajes de aprobados en los exámenes finales por lo menos se matiene, con incrementos en algunos años a lo largo del período estudiado. Sin embargo analizando estos valores en términos absolutos, una estabilidad en la tasa de aprobados significa un aumento simultáneo del número de alumnos que regularizan y aprueban la materia, con lo cual se concluye que este nuevo sistema de evaluación mejora el rendiemnto académico en los exámenes finales.

Referencias bibliográficas

Celman, S. (1998). *¿Es Posible Mejorar la Evaluación y Transformarla en Herramienta de Conocimiento?* Buenos Aires: Editorial Paidós.

Lipsman, M. (2004). *La Innovación en las Propuestas de Evaluación de los Aprendizajes en la Cátedra Universitaria.* Santa Fe: Ediciones UNL.

Gimenez Uribe, M. y Samoluk, M. (2007). *Reflexiones Sobre Evaluación Universitaria. Posibilidades de Revisión y Mejora*. Santa Fe: Mat. Didáctico UTN.

Quiroz, S. (2008). *Las relaciones entre prácticas de enseñanzasy evaluación en torno al trabajo con ejercicios y problemas en las clases de matemática. El caso del 1°,2°, y 3° año en las escuelas públicas de Educación Media en Berazategui*. Buenos Aires.

Santos Guerra, M. A. (1998). *Evaluación Educativa. Un Proceso de Dialogo, Comprensión y Mejora.* Buenos Aires: Editorial Magisterio del Plata.

Samaja, J. (1993). *Epistemología y Metodología. Elementos para una Teoría de la Investigación Científica.* Buenos Aires: EUDEBA.

Graham, D. y Brian E. (1995). *Clinical Biostatistics.* New York: John Wiley & Sons Inc

CONSTRUCCIÓN DE LA NOCIÓN DE NÚMERO IRRACIONAL EN FORMACIÓN DE PROFESORES: CONFLICTOS SEMIÓTICOS Y DESAFÍOS

Luis Reina, Miguel R. Wilhelmi , Pablo Carranza y Aitzol Lasa
I.E.S. N°9-011 "Del Atuel". Argentina
Universidad Nacional de Río Negro Argentina
Universidad Pública de Navarra España
luisd.reina@gmail.com, miguelr.wilhelmi@unavarra.es, pfcarranza@gmail.com, aitzol.lasa@unavarra.es

Resumen. La enseñanza y el aprendizaje formalizado de los números irracionales en la formación inicial de profesores de secundaria son problemáticos. Un análisis histórico y epistemológico de la noción de número irracional, sirve de base para enmarcar un estudio empírico, con estudiantes para profesor, que indaga el proceso de construcción de la noción de cardinalidad del conjunto de los números irracionales y la densidad de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$. El estudio se realiza por medio de algunos elementos teóricos del enfoque ontosemiótico del conocimiento de y de la instrucción matemáticos. La identificación, por parte del estudiante, de la cardinalidad de conjuntos infinitos, hace posible la emergencia de fenómenos relativos a los cardinales transfinitos, determinándose diferentes tipos de errores y conflictos cognitivos.
Palabras clave: irracionales, cardinalidad, densidad, conflictos semióticos
Abstract. The process of formally teaching and learning irrational numbers to future secondary school teachers is problematic. A historical and epistemological analysis of the notion of irrational number is basic for framing an empirical study with prospective teachers, to explore the process of construction of the notion of cardinality of the set of irrational numbers and density of $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$. The study was performed using some theoretical elements of the ontosemiotic approach to mathematical knowledge and instruction. Cardinality of infinite sets is identified by students, providing phenomena related to transfinite cardinals and determining several types of errors and cognitive conflicts.
Key words: irrational, cardinality, density, semiotic conflicts

Motivación inicial y complejidad cognitiva

El proceso de construcción de la noción de cardinalidad del conjunto de los números irracionales y la noción de densidad son problemáticos (Vamvakoussi y Vosniadou, 2004). Asimismo, la noción de densidad se relaciona fuertemente con la de continuidad funcional, donde emergen nuevas dificultades para la apropiación por los estudiantes. (Merenluoto, 2004).

Por otro lado, Reina, Wilhelmi y Lasa (2012) realizan un análisis histórico de la evolución de la noción de número irracional, determinando diferentes significados parciales asociados a dicha noción. Estas configuraciones permiten a los autores describir el funcionamiento del número irracional en distintos libros de texto de secundaria y la planificación de procesos de estudio relativos a la noción.

Otro aspecto clave es la identificación, por parte del estudiante, de la cardinalidad de conjuntos infinitos, donde se han identificado diversos fenómenos didácticos, tales como los de *aplastamiento* y *dependencia* (Arrigo y D'Amore, 1999; 2002; 2004).

Aquí, el objetivo es la determinación de diferentes tipos de errores (Wilhelmi, 2009) y de *conflictos semióticos* por los estudiantes de profesorado en los resultados del cuestionario empleado en la experimentación.

Un conflicto semiótico es cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones). Si la disparidad se produce entre significados institucionales hablamos de conflictos semióticos de tipo epistémico, mientras que si la disparidad se produce entre prácticas que forman el significado personal de un mismo sujeto los designamos como conflictos semióticos de tipo cognitivo (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007, p.228).

Para abordar este objetivo se propone la resolución de un cuestionario a futuros profesores de matemática del sur de Mendoza, Argentina, y se discuten los resultados (sección 4). Antes, en la sección 2, se hace una breve aproximación histórica y epistemológica de las nociones matemáticas involucradas. En la sección 3 se describen las restricciones epistemológicas, cognitivas y de enseñanza en procesos de estudio relativos al número irracional. El trabajo termina con una breve síntesis e implicaciones para la enseñanza.

Problemáticas epistemológicas e históricas asociadas a conjuntos infinitos

El cardinal de un conjunto es la característica que determina el número de elementos que éste tiene. Por ello, en Teoría de Conjuntos se define el número tres, por ejemplo, como la característica común de todos los conjuntos con tres elementos. De esta forma, al menos formalmente, para determinar si dos conjuntos con un número finito de elementos tienen el mismo cardinal es suficiente contar sus elementos. Sin embargo, si el conjunto es infinito, esta estrategia carece de sentido, puesto que no es posible "contar", en el sentido clásico y escolar del término, el número de elementos de un conjunto infinito.

Dos conjuntos A y B son coordinables, o equipotentes, y se escribe $A \sim B$ si, y sólo si, existe una función uno a uno F cuyo dominio es el conjunto A y cuyo recorrido es el conjunto B (Apostol, 1996, p.46).

Esta noción de coordinabilidad permite observar, por ejemplo, que el conjunto **P** de los números enteros pares y el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros tienen el mismo cardinal. Esto resulta paradójico en el contexto de los conjuntos finitos, puesto que desde los *Elementos* de Euclides se sabe que: "El todo es mayor que la parte". De hecho, la diferencia principal entre los conjuntos finitos e infinitos "es que un conjunto infinito puede ser semejante a alguno de sus subconjuntos propios, mientras que un conjunto finito nunca podrá ser semejante a uno de sus subconjuntos propios" (Apostol, 1996, p.47).

Además, desde Cantor sabemos que existen distintos "cardinales transfinitos". El cardinal de los conjuntos numerables (coordinables con $\mathbb{N}$) se denota mediante el símbolo: $\aleph_0$. Puede demostrarse que el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ es numerable, pero que el conjunto de los números irracionales $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ no lo es. Así:

$$\text{Card}(\mathbb{Z}^+) = \text{Card}(\mathbb{Z}) = \text{Card}(\mathbf{P}) = \text{Card}(\mathbb{Q}) = \aleph_0$$

Cantor estudió si los conjuntos $\mathbb{N}$, de los números naturales, y $\mathbb{R}$, de los números reales, son coordinables. La respuesta implicó la noción de completitud de $\mathbb{R}$. Se demuestra que los conjuntos $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ tienen el mismo cardinal. Se dice que el cardinal de $\mathbb{R}$ es la potencia del continuo, se denota c o $\aleph_1$. Así:

$$\text{Card}(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) = \text{Card}(\mathbb{R}) = c = \aleph_1$$

Con otras palabras, $\mathbb{R}$ no es numerable debido a la existencia de los números irracionales. Aún más, se demuestra que cualquier intervalo (a, b) en $\mathbb{R}$, $a < b$, tiene por cardinal la potencia del continuo ($\text{Card}((a, b)) = \aleph_1$). Esto se debe a que el conjunto de los números irracionales es *denso* en $\mathbb{R}$ (Iaffei, 2008).

Estos aspectos condicionan los procesos de enseñanza y aprendizaje asociados. Estamos aquí interesados en determinar los errores y su tipología (figura 1).

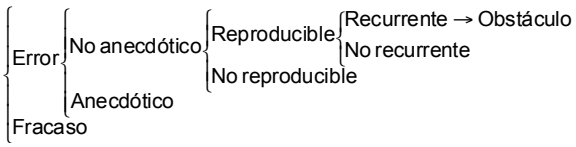


Figura 1: Tipología de errores (Wilhelmi, 2009, p.8

Restricciones epistemológicas, cognitivas y de enseñanza

En esta sección se concretan algunas de las nociones didácticas introducidas en la sección anterior a procesos de enseñanza y aprendizaje de los números irracionales. Así, los objetos primarios involucrados son:

- *Lenguaje*. Símbolos tipo-letra correspondientes a los conjuntos numéricos, inclusión, flechas indicando una aplicación biyectiva, diagramas de Venn.
- *Situaciones*. Comparación de infinitos.
- *Definiciones*. Conjunto; cardinal de un conjunto finito, infinito; número natural, entero, racional, irracional (trascendente o algebraico); densidad de la recta real; probabilidad.

- *Proposiciones*. Proposiciones relativas al cálculo de probabilidades en conjuntos continuos (la probabilidad de obtener un valor determinado de un conjunto continuo es cero, etc.).
- *Procedimientos*. Coordinación de conjuntos infinitos; cálculo de probabilidades en conjuntos continuos. Media aritmética entre dos números a y b con a<b.
- *Argumentos*. Justificar la igualdad de cardinal de los naturales, enteros, racionales e irracionales algebraicos; refutar la igualdad de cardinal de los irracionales algebraicos y trascendentes; justificar la igualdad de cardinal de los intervalos reales. Demostrar la densidad del conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Es normal que los estudiantes sientan contradicha su intuición. El aprendizaje del universo finito, con sus relaciones y funcionamiento, se ha logrado a lo largo de muchos años y no sin dificultad. Así, antes de la aparición del infinito matemático, los procedimientos aritméticos, algebraicos y geométricos han mostrado su utilidad y eficacia en la resolución de una amplia gama de problemas.

Lo que hemos tratado en este apartado refleja la complejidad asociada a la construcción de la noción de número irracional en donde el infinito matemático aparece como un objeto que incide fuertemente en otras nociones asociadas a dicho conjunto, a saber, numerabilidad, cardinalidad y densidad de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ junto a las nociones de continuidad numérica, geométrica y funcional (figura 2)

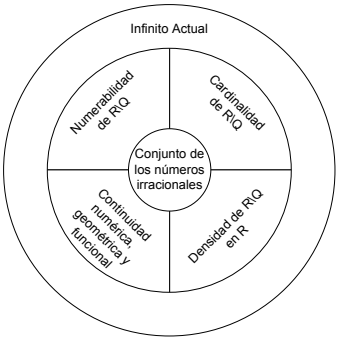


Figura 2: Interrelación entre el infinito matemático y la noción de número irracional

Los números irracionales se presentan entonces no sólo como un "paso obligado" para la apropiación de otras nociones como la de límite funcional sino como un objeto de gran complejidad para su enseñanza y aprendizaje aún en niveles superiores

Experimentación

En la búsqueda de posibles conflictos epistémicos y cognitivos, se plantea a estudiantes un cuestionario individual de diez preguntas: comparación de conjuntos numéricos (naturales, pares,

enteros, racionales e irracionales; 4 ítems), comparación de conjuntos numéricos e intervalos (intervalo [0,1], 3 ítems), y cuestiones teóricas referentes a definiciones (números algebraicos y trascendentes, densidad y definición de cardinal; 3 ítems).

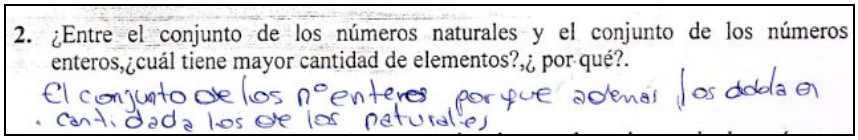
Se realizó primero un estudio piloto con cuestiones de comparación de cardinales de conjuntos e intervalos (grupo A). A continuación, se complementó el cuestionario con las cuestiones teóricas sobre definiciones (grupos B-D) (Tabla 1).

Grupo	Curso	Estudiantes
A	2	16
B	2	9
C	3	6
D	4	6

Tabla 1: Descripción de la muestra

Algunos resultados en la comparación de cardinales

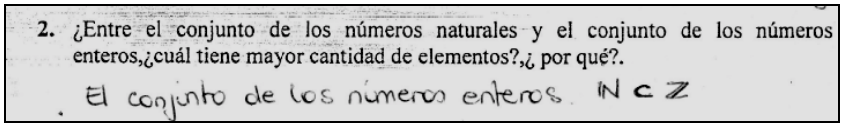
El análisis de las respuestas incorrectas permite identificar algunos obstáculos identificados por Arrigo y D'Amore (2004), como la *dependencia* de los cardinales infinitos o el *aplastamiento*. En la figura 3 el estudiante utiliza una imagen visual en la argumentación, marcando una cuestión de tamaños ("los dobla en cantidad a los de los naturales").


2. ¿Entre el conjunto de los números naturales y el conjunto de los números enteros,¿cuál tiene mayor cantidad de elementos?,¿ por qué?.

El conjunto de los nº enteros porque ademas los dobla en cantidad a los de los naturales

Figura 3: Dependencia de los cardinales infinitos

El mismo estudiante no distingue el infinito numerable del continuo ("$\mathbb{Q}$ y [0,1] tienen igual número de elementos"). La *asimetría de cardinales infinitos por inclusión*, es decir, la noción conjuntista de inclusión utilizada para determinar si un conjunto tiene mayor cantidad de elementos que otro, se erige en *obstáculo* para la adquisición de la noción de numerabilidad de un conjunto o la de coordinabilidad con el conjunto $\mathbb{N}$ (figura 4).


2. ¿Entre el conjunto de los números naturales y el conjunto de los números enteros,¿cuál tiene mayor cantidad de elementos?,¿ por qué?.

El conjunto de los números enteros $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

Figura 4: Asimetría de cardinales infinitos por inclusión

En la tabla 2 se presentan los fenómenos observados en el ítem 2 (ver figura 4) por grupos. En el grupo D, es visible el fenómeno de *asimetría de cardinales infinitos por inclusión*.

	Grupo A	Grupo B	Grupo C	Grupo D
Fenómeno de aplastamiento	4	0	5	1
Fenómeno de dependencia	2	2	0	0
Fenómeno de asimetría de cardinales por inclusión	8	7	0	5
Respuesta correcta	2	0	1	0

Tabla 2: Aparición de fenómenos en el ítem 2, por grupos

En las respuestas 3-6, se manifiesta de forma variable la alternancia de los fenómenos descritos anteriormente. Al comparar el conjunto de los números irracionales con el intervalo [0,1], un estudiante afirma que "aunque en el intervalo haya infinitos (números) no supera al gran conjunto (en referencia al conjunto de los números irracionales)". El ítem 10 muestra el grado de conocimiento de la definición de conjunto infinito entre los estudiantes de los grupos C y D. El conocimiento no es estable en el grupo (tabla 3).

	Grupo C			Grupo D		
Ítem 10	No	Si	NC	No	Si	NC
¿Conoce la definición de cardinal de un conjunto infinito?	2	1	3	2	2	2

Tabla 3: Conocimiento de la definición de conjunto infinito

Algunos resultados de las cuestiones teóricas

Las respuestas sobre la densidad de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ son incorrectas en su práctica totalidad, a excepción de un único estudiante del grupo D (tabla 4).

No es denso porque:	Grupo B	Grupo C	Grupo D
Existen otros números en la recta real que no son irracionales	1	0	1
Porque es no acotado	1	0	0
Porque no es cerrado	0	1	0
Porque no es cerrado ni acotado	0	1	0
No es denso (no argumenta)	1	1	0
Sí es denso porque:			
Es un conjunto infinito	1	3	1
Porque no se pueden convertir nunca en fracción	1	0	0
No sabe / no contesta	4	0	2

Tabla 4: Respuestas al ítem 9, grupos B, C y D

Estas respuestas muestran una conceptualización inestable de la noción de densidad de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, junto con serios conflictos epistémicos en los cuales una correcta intuición se argumenta a través de una noción improcedente (figura 5).

9. ¿Es denso el conjunto de los números irracionales? ¿Por qué? ¿Podría dar un argumento matemático?

(Grupo B) "Sí, porque es infinito. Porque no existe intervalo natural inicial con el cual se pueda dar una función inyectiva, o sea, finito."

(Gr. B) "Sí, porque no se pueden convertir nunca en fracción".

(Gr. C) "No es denso, porque el conjunto de los números irracionales no es cerrado".

(Gr. D) "Entre un intervalo [1,2] hay infinitos."

(Gr. D) "No es denso, ya que existen números en la recta que no son irracionales."

(Gr. D) "No, porque para que un conjunto sea denso debe haber entre dos números infinitos números."

Figura 5: Respuestas al ítem 9

Así, algunas de las respuestas dadas por los estudiantes, representativas del significado personal atribuido por éstos a los objetos matemáticos involucrados en las tareas propuestas, son las siguientes:

- *Densidad e infinito matemático*. La cardinalidad del conjunto infinito es equiparable a las nociones de densidad e infinito matemático: "conjunto infinito equivale a conjunto denso".
- *Densidad y definición de racional.* La densidad como una propiedad de los números no racionales ("es denso porque no se pueden convertir nunca en fracción").
- *Densidad y completitud.* La completitud de $\mathbb{R}$ y la manipulación del modelo gráfico lineal es problemática: "no es denso porque existen números en la recta que no son irracionales".
- *Densidad y conjunto cerrado.* Las nociones de conjunto acotado y conjunto cerrado interfieren en la noción de densidad: "no es denso porque no es cerrado", "hay infinitos en [1,2]".

Síntesis e implicaciones para la enseñanza

Los futuros profesores necesitan conocer con profundidad las propiedades del número irracional para poder enseñar su construcción viable y eficaz. La emergencia de errores reproducibles y en muchos casos recurrentes, plantea la necesidad de un tratamiento a largo plazo. En el estudio, se observa, además de los fenómenos de aplanamiento y dependencia, el de "asimetría de cardinales infinitos por inclusión".

La fundamentación teórica y el contraste experimental permite concluir que:

- Los significados personales de los estudiantes sobre el concepto de cardinalidad de un conjunto infinito se presenta inestable o no se presentan; en general, tales significados se hallan ligados a la problemática del infinito actual.

- La noción de cardinalidad es la que mayores dificultades presenta. La manifestación de conflictos epistémicos y cognitivos, en las respuestas de los estudiantes, introduce una gama de errores que atraviesa las respuestas de los estudiantes.
- Los futuros profesores no lograron un conocimiento que les permitiera zanjar el problema de la distinción entre las cardinalidades de los conjuntos infinitos, seña de esto último es la manifestación de fenómenos de tipo didáctico como los de dependencia, aplastamiento y asimetría de cardinales infinitos por inclusión.
- La noción de infinito potencial parece actuar en forma resistente ya que no permite emerger la noción de infinito actual presente en la cardinalidad del conjunto de los números irracionales.
- La noción de densidad se presenta también inestable o no es parte de la significación personal de los alumnos, siendo un problema para la construcción de la noción de número irracional.

Referencias bibliográficas

Apostol, T. (1996). *Análisis Matemático*. Barcelona: Reverté.

Arrigo G. y D'Amore B. (1999). 'Lo veo, pero no lo creo'. Obstáculos epistemológicos y didácticos en el proceso de comprensión de un teorema de Georg Cantor que involucra al infinito actual. *Educación matemática*, 11(1), 5–24.

Arrigo G. y D'Amore B. (2002). "Lo vedo, ma non ci credo...", seconda parte. Ancora su ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di alcuni teoremi di Georg Cantor. *La matematica e la sua didattica*, *1*, 4-57.

Arrigo G. y D'Amore B. (2004). Otros hallazgos sobre los obstáculos en la comprensión de algunos teoremas. *Educación Matemática*, *16* (002), 5-19.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2007). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma,* XXVII (2), 221-252.

Iaffei B. (2008). *Los números irracionales como objeto de saber. Curso para profesores*. XXXI Reunión de Educación Matemática. (pp. 1–33) Cuyo, ARG: Unión Matemática Argentina y Universidad Nacional de Cuyo.

Merenluoto, K. (2004). Problems of conceptual change: continuity of a function. In Kaarina Merenluoto & Mirjamaija Mikkilä-Erdmann (Ed.), *Learning research challenges the domain specific approaches in teaching* (pp. 100–108). Turku: University of Turku.

Reina, L., Wilhelmi, M. R. y Lasa, A. (2012). Configuraciones epistémicas asociadas al número irracional. Sentidos y desafíos en Educación Secundaria. *Educación Matemática*, *24*(3), 67–97. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40525846003.

Vamvakoussi, X. y Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers : a conceptual change approach. *Learning and Instruction*, *14*, 453–467.

Wilhelmi, M. R. (2009). Didáctica de las Matemáticas para profesores. Las fracciones: un caso práctico. En C. Gaita, *Enseñanza de las Matemáticas IV*. (pp. 1-22) Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú – Departamento de Ciencias. Recuperado de http://www.pucp.edu.pe/departamento/ciencias/matematicas/ irem/index.html.

DIDÁCTICA DE LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS A NIVEL PREUNIVERSITARIO

Andrés Hernández y Yolanda Serres Voisin
Universidad Simón Bolívar. Universidad Central de Venezuela. Venezuela
anhernan9@gmail.com, yolanda.serres.voisin@gmail.com

Resumen. Esta investigación describe una didáctica del proceso de solución de problemas dirigida a estudiantes que realizan cursos de iniciación en carreras científicas y tecnológicas. Esta didáctica está planificada para analizar el proceso de solución de problemas matemáticos, el rol del docente en este proceso y el tipo de problemas que deben resolver los estudiantes. La investigación es descriptiva y exploratoria. Para ello, se propone que los estudiantes actúen como resolvedores de problemas, desarrollando o consolidando sus habilidades y destrezas en la comprensión y solución de los problemas; y que el docente desarrolle estrategias didácticas para apoyar este proceso.
Palabras clave: estrategias, solución de problemas, rol docente
Abstract. This research describes a teaching of problem solving process aimed at students doing introductory courses in science and technology careers. This teaching is planned to analyze the process of mathematical problem solving, the teacher's role in this process and the type of problems that students must solve. The research is descriptive and exploratory. To do this, it is proposed that students act as problem solvers, developing or strengthening their skills in understanding and solving problems, and that teachers develop teaching strategies to support this process.
Key words: strategies, problem solving, teaching role

Introducción

Planteamiento del problema y del objetivo de la investigación

La solución de problemas es una actividad que desarrollamos en nuestra vida cotidiana, ya que constantemente estamos buscando soluciones a problemas del día a día. Entre los objetivos de la educación matemática está el desarrollar habilidades que permitan a los estudiantes adquirir herramientas para resolver problemas tanto escolares como del contexto. De la revisión de los estudios que ponen énfasis en la aplicación de la resolución de problemas al campo de la enseñanza, sobresalen dos tendencias. En primer lugar, la que se centra en la necesidad de resolver problemas de un modo eficiente. En segundo término surge el papel de la resolución de problemas como instrumento de diagnóstico de errores conceptuales y concepciones alternativas, así como para la evaluación del propio aprendizaje adquirido o del cambio conceptual. En cualquier caso, la realidad pone en evidencia la ausencia de prácticas de metodologías específicas para la resolución de problemas en los programas oficiales y en los libros de texto educativos (Dumas-Carré citado por Perales, 1993).

En nuestro caso se hará énfasis en la necesidad de resolver problemas de un modo eficiente, por considerarlo una importante meta didáctica, que busca la comprensión de los problemas planteados y el desarrollo de estrategias para alcanzar sus soluciones.

El proceso de resolución de problemas en el aula debe considerar cuatro aspectos importantes: 1) la comprensión del problema; 2) los conocimientos matemáticos necesarios para la resolución del problema; 3) el uso de estrategias para la resolución del problema y 4) el papel del docente como mediador del proceso de solución de problemas.

Es por esto que el objetivo de esta investigación es describir una didáctica del proceso de solución de problemas dirigida a estudiantes de nivel preuniversitario, quienes realizan cursos de iniciación para obtener ingreso a la universidad, en carreras científicas y tecnológicas de la Universidad Simón Bolívar (USB) y de la Universidad Central de Venezuela (UCV).

Esta didáctica está planificada para analizar el proceso de solución de problemas matemáticos de los estudiantes, el rol del docente en este proceso y el tipo de problemas que deben resolver estos estudiantes. La investigación es descriptiva y exploratoria. Para ello, se propone que los estudiantes actúen como resolvedores de problemas esto es, que desarrollen o consoliden sus habilidades y destrezas en la comprensión y solución de los problemas. Y que el docente desarrolle estrategias didácticas para apoyar este proceso. Para evaluar el progreso en el proceso de solución de problemas se utilizarán tareas hechas por los estudiantes durante las clases en pareja o individualmente (Charles, Lester y O`Daffer, 1994).

Marco teórico. El proceso de solución de problemas

En cuanto al proceso de resolución de problemas por parte de los estudiantes este trabajo parte del protocolo original de Polya, el cual otros autores como Schoenfeld (1992), han utilizado como base para generar otros protocolos. El modelo de los cuatro pasos para la resolución de un problema propuesto por Polya desde 1965 es el siguiente:

1) Comprender el problema: Aquí se rresume toda la información dada y que se desea determinar. En este paso a los estudiantes se le pueden hacer las siguientes preguntas, ¿Entiendes lo que se dice?, ¿Puedes replantear el problema en tus propias palabras?, ¿Distingues cuales son los datos?, ¿Sabes a qué quieres llegar?, ¿Hay suficiente información?, ¿Hay información extraña?, ¿Es este problema similar a algún otro que hayas resuelto antes?

2) Concebir un plan: En este paso se eexpresa la relación entre los datos y la incógnita a través de una ecuación o fórmula. Aquí es en donde el estudiante diseña una estrategia, entre las cuales tenemos: ensayo y error, usar una variable, buscar un patrón, hacer una lista, resolver un problema similar más simple, hacer una figura, hacer un diagrama, usar razonamiento directo, usar razonamiento indirecto, resolver un problema equivalente, trabajar hacia atrás, resolver una ecuación, usar casos, buscar una fórmula.

3) Ejecución del plan: en esta fase se implementa la o las estrategias que se escogieron para solucionar completamente el problema o hasta que la misma sugiera utilizar otra estrategia.

4) Examinar la solución obtenida o mirar hacia atrás: consiste en examinar a fondo cálculos y razonamientos matemáticos utilizados, y que la solución corresponda al problema propuesto originalmente.

Schoenfeld incluye en su protocolo una etapa exploratoria previa a la concepción del plan, donde el estudiante explora con algunas estrategias antes de concebir un plan definitivo.

Didáctica de la solución de problemas

El docente en su planificación escoge los problemas que quiere discutir, tiene claro en qué quiere enfatizar la discusión de cada proceso de solución, y tiene algún tipo de registro sobre el proceso de solución de esos problemas seguido por los estudiantes, particularmente de las distintas estrategias de solución utilizadas y de los distintos resultados alcanzados en cada paso del proceso, desde la fase de comprensión hasta el examen a las soluciones obtenidas. La evaluación de la solución obtenida es la fase más débil en estudiantes de nuevo ingreso a la educación superior, quienes generalmente no tienen desarrolladas estrategias de aprendizaje y no están acostumbrados a revisar su proceso de aprendizaje y tener seguridad en su trabajo. En el proceso de solución de problemas lo que hemos observado es que si el estudiante plantea una ecuación o un sistema de ecuaciones como estrategia de solución, el examen de la solución "se reduce" a sustituir el valor encontrado en la ecuación(es) planteada originalmente (lo que también puede generar dificultad si la ecuación no se planteo correctamente), pero si en cambio la estrategia utilizada fue gráfica o numérica, los estudiantes suelen sentirse más inseguros acerca de su solución.

Para apoyar a los estudiantes de nivel preuniversitario en su proceso de solución de problemas es importante que el docente tenga un rol de observador participante, que permita a las y los estudiantes desarrollar su pensamiento matemático, probar, hacer inferencia, identificar conceptos, procesos y resultados de la matemática del bachillerato necesarios para resolver el problema, sacar cuentas con casos sencillos, y, en caso de que el estudiante no avance en el proceso, entonces el docente hace preguntas abiertas que estimulen la explicación, el ordenamiento de las ideas, el razonamiento, en fin, desarrollar la actitud científica.

En este sentido plantea Barrientos (2010) que el docente es el mediador entre la actitud científica que se debe aprender al resolver un problema y el estudiante; el tipo de ayuda que brinda en la interacción que se establece con el estudiante, o a través de la organización social que haga para la resolución de un problema, debe promover la formación adecuada de la actitud científica y el

aprendizaje significativo haciendo que los estudiantes relacionen en su experiencia de resolución de problemas lo que ya saben con lo que tienen que aprender. El docente debe facilitar aprendizajes funcionales, prácticos y conscientes de la actitud científica por parte de los estudiantes, orientándoles para hacer explícito lo que parece tácito o implícito, en otras palabras para que desarrollen sus procesos metacognitivos.

En cuanto a la evaluación del proceso de solución de problemas, como señala Flores (2011) la evaluación en el aula sirve para retroalimentar el proceso de enseñanza y aprendizaje y mejorarlo en cuanto al desempeño del estudiante y del docente; de manera que se busca que el estudiante mejore en cada paso de la solución de un problema, lo cual hace lento el proceso, y que el docente mejore permanentemente en la mediación del proceso.

Discusión de algunos resultados

El criterio de escogencia de los problemas fue problemas que pueden resolverse a través del planteamiento de una ecuación o de un sistema de ecuaciones de dos incógnitas. Según el programa de las asignaturas: Matemáticas II del Curso de Iniciación Universitaria (CIU) de la USB y Matemáticas del Curso Introductorio de la Facultad de Ingeniería (CIFI) de la UCV.

El problema escogido para reportar la investigación es el siguiente:

Cuando abrí mi libro de matemáticas el producto de los números
de las dos páginas que estaban frente de mi era 992.
¿Cuáles son, respectivamente, los números de esas páginas?

Para comprender este problema se necesita saber que los números de página de un libro son consecutivos, y en consecuencia hay que conocer previamente cómo se escribe algebraicamente que dos números son consecutivos.

Este problema permite la modelación a través de una ecuación y a su vez puede ser resuelto por ensayo y error, explorar esta otra estrategia de solución puede ayudar a comprender el problema.

Las estrategias y procedimientos utilizados por los estudiantes para resolver el problema se muestran en la tabla N° 1:

Estrategia/Procedimiento	CIU de la USB	CIFI de la UCV
Modelación de ecuación y solución por factorización simple.		Planteamiento de la ecuación y factorización.
Modelación de ecuación y solución por fórmula cuadrática.	Planteamiento de ecuación y uso de la fórmula cuadrática para	

	resolverla.	
Descomposición factorial	Descomposición de 992 en factores primos, llegando al resultado de 32 por 31, los cuales son números consecutivos. No se planteó ecuación.	Planteamiento de ecuación pero no se usa. Hay presencia del significado de números consecutivos.
Ensayo y error	No se plantea ecuación. Ensayo con números aproximándose a 992, hasta que se consigue el producto exacto.	Planteamiento de ecuación y no se usa. No hay presencia del significado de números consecutivos.

Tabla 1: Procedimientos y estrategias utilizadas por estudiantes preuniversitarios para resolver un problema de uso potencial de ecuaciones.

Se analizaron los procesos de tres estudiantes del CIU encontrando que:

- un estudiante descompuso el número 992 (producto de las páginas del libro) en factores primos, que resulta $992=2^5.31=32.31$, con esto el estudiante responde que las páginas son 31 y 32; evidentemente este es un proceso muy particular, ya que coincidió con que los factores son números consecutivos. De no ser así este procedimiento no servía para resolver este problema. Este procedimiento puede catalogarse como un procedimiento aritmético, ya que no se identifica una incógnita.

- un segundo estudiante resolvió el problema de forma algebraica siguiendo los pasos para resolver un problema por modelación de ecuaciones, que son: a) comprender el problema; b) plantear la ecuación; c) resolver la ecuación, y d) comprender la solución. Esta persona manifestó en el paso a) que tuvo dificultad para comprender el problema, la cual superó gracias a la ayuda del docente. Luego logró identificar la incógnita, plantear la ecuación y resolverla a través de la fórmula cuadrática. Escribe su solución explícitamente, expresando que el resultado es "exacto".

- una tercera persona utilizó el ensayo y error como su estrategia. Este estudiante realizaba multiplicaciones de números consecutivos y se dio cuenta que el producto de los números consecutivos que escogía era muy grande, es por esto que tomó números menores y probó obteniendo ahora productos muy lejos de 992 (p.e. 24 x 25 = 600), aquí notó que debían ser números cercanos a 30, hasta que llegó al resultado de 31 x 32. Este procedimiento también puede catalogarse como un procedimiento aritmético.

Una conclusión significativa del último caso es el desconocimiento por parte de algunos estudiantes de los números cuadrados perfectos y de los procesos de estimación, pues considerando que se trataba de números consecutivos podía ensayarse con cuadrados perfectos cercanos a 992 y así reducir los ensayos, por ejemplo a 30 por 30, 30 por 31; 31 por 31, 32 por

32, y al encontrar que este número es mayor que 992, entonces ensayar con 31 por 32. Como plantea Moya (2001) como consecuencia de la interacción del docente con los estudiantes en este caso surge la necesidad de reflexionar con los estudiantes sobre el tipo de ensayo qué hacen, con qué criterios, en este caso el criterio es usar el concepto de número cuadrado perfecto. Esto es parte del proceso de evaluación de la resolución del problema, que ayuda a mejorar la mediación del docente.

En el caso de los tres estudiantes del CIFI ocurrió lo siguiente:

- el primer estudiante siguió los pasos de modelación a través de una ecuación y resolvió esta por factorización simple: $x(x+1)=992;\ x^2+x-992=0;\ (x+32)(x-31)=0$. Verificó su solución en la ecuación original.
- el segundo estudiante trabajó con la descomposición factorial (procedimiento que puede catalogarse como aritmético) luego de haber planteado la ecuación $x(x+1)=992$ y no usarla (Ver figura N°1).

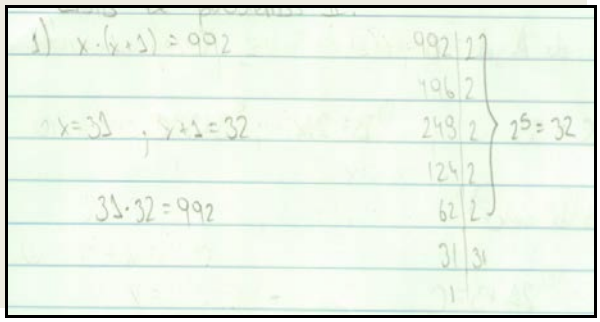


Figura 1: Proceso de solución del problema por descomposición factorial a pesar de haber planteado una ecuación

El estudiante planteó una ecuación, no supo qué hacer con ella, descompuso el número 992 en factores primos, dando como resultado dos números consecutivos, volvió a la incógnita y verificó escribiendo que 31.32= 992. ¿Por qué no resolvió la ecuación? Vale la pena entrevistar personalmente a la persona para averiguarlo.

- un tercer estudiante ensaya luego de haber planteado la ecuación $x.y= 992$, lo cual denota que no hay comprensión del significado de números consecutivos. Llega a la solución y hace un dibujo con la misma, hecho que no ayuda en el proceso de solución pues es una acción posterior a la resolución del problema (Ver figura N°2).

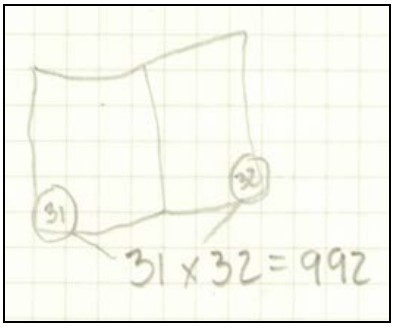


Figura 2: Dibujo que no ayuda a resolver el problema

Esta es una representación que puede discutirse respetuosamente con toda la clase luego de resuelto el problema y preguntar cómo puede hacerse una representación antes de resolver el problema que ayude en el proceso de solución (Schoenfeld, 1992).

Conclusiones

En la planificación de la clase donde se discute la resolución de problemas es fundamental la escogencia del tipo de problema de forma tal que se estimule la actitud científica, a través de preguntas, de reflexiones y de solicitud de conclusiones y razonamientos.

La evaluación debe ser realizada por el docente por medio de prácticas evaluativas continuas y con un enfoque que permita analizar el proceso que lleva el estudiante en cuanto a conocimientos adquiridos. Una evaluación que tome en cuenta los procesos de los estudiantes permite modificar las estrategias empleadas en el aula con el fin de apoyar al estudiante en la adquisición del aprendizaje.

Como se planteó anteriormente (Serres, 2000) es necesario elaborar un banco de problemas resueltos por los estudiantes, ya que esto permite apoyar la comprensión del problema e ilustrar las distintas estrategias que pueden usarse para resolver un mismo problema combatiendo la creencia de que en matemática hay un solo camino de hacer las cosas: el camino que escoge el docente.

Referencias bibliográficas

Barrientos, O. (2010). *La actitud científica ante la resolución de problemas matemáticos*. La Paz: IIICAB.

Charles, R., Lester, F. & O`Daffer, P. (1994). *How to evaluate progress in problem solving*, National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Flores, A. H. y Gómez, A. (2009). Aprender matemática, haciendo matemática: la evaluación en el aula. *Educación Matemática*. 21(2). 117-142.

Moya, A. (2001). *Reflexiones sobre la teoría y la práctica de Evaluación en la Educación Matemática*. Retos y Logros. Caracas: UPEL-IJMSM: Subdirección de Investigación y Postgrado.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning,* (pp. 334-370). New York: Macmillan.

Serres, Y. (2000). *Aspectos a considerar en un diseño de instrucción centrado en el proceso de solución de problemas matemáticos. Caso del Curso Introductorio de la Facultad de Ingeniería de la UCV.* Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. 13.

ANÁLISIS CUALITATIVO DE ECUACIONES EN DIFERENCIAS Y CAOS

Juan Carlos Bressan y Ana Ferrazzi de Bressan
Universidad de Buenos Aires Argentina
Universidad Argentina de la Empresa
bressanjuancarlos22@gmail.com, anaferrazzibressan@gmail.com

Resumen. El objetivo de este trabajo es introducir el concepto de caos, mediante el análisis cualitativo de sistemas dinámicos discretos, cuyos modelos deterministas están dados por ecuaciones en diferencias no lineales. La variable independiente discreta es el tiempo y al cabo de cada intervalo de igual longitud la variable dependiente describirá el estado del sistema. El análisis cualitativo se realiza geométricamente, mediante representaciones gráficas, sin aplicar métodos formales de resolución de la ecuación, usando algunas veces métodos iterativos.
Palabras clave: caos, órbita, período, atractor, repulsor
Abstract. The aim of this paper is to introduce the chaos concept. This is done through a qualitative analysis of discrete dynamical systems, whose deterministics models are given by non-linear differences equations. In each one, discrete time of same length is the independent variable and at the end of each interval the dependent variable will describe the state of the system. The qualitative analysis was conducted geometrically, using representations that let us to describe the change in state variables, whitout analitically resolution of equations but, using iterative methods if it is necessary.
Key words: chaos, orbit, period, attracting, repelling

Introducción

Definiremos conceptos esenciales para el análisis cualitativo de una ecuación en diferencias $x_{k+1} = f(x_k)$, donde $imag(f) \subseteq dom(f)$. Si $x_0 \in dom(f)$ la ecuación $x_{k+1} = f(x_k)$ genera por iteración de *f* la sucesión $x_0; x_1 = f(x_0); \ldots; x_{k+1} = f(x_k); \ldots$, que es la órbita de x_0, la cual se denotará $\Theta_{x0} = \{x_0; x_1; \ldots; x_k; x_{k+1}; \ldots\}$. Diremos que $\tilde{x}$ es *punto fijo* de $f(x)$ cuando es abscisa de un punto de intersección de las gráficas de *y*=*x* con la de $y = f(x)$, es decir, $\tilde{x} = f(\tilde{x})$. Un punto fijo $\tilde{x}$ de $f(x)$ es *atractor,* si existe algún entorno *I* de $\tilde{x}$, tal que para todo $x_0 \in I$, su órbita converge a $\tilde{x}$, permaneciendo por tanto en dicho entorno. Un punto fijo $\tilde{x}$ de $f(x)$ es *repulsor* si existe algún entorno *I* de $\tilde{x}$, tal que para todo $x_0 \in I$ con $x_0 \neq \tilde{x}$, su órbita diverge de $\tilde{x}$ saliendo por tanto de dicho entorno.

El análisis cualitativo del sistema puede encararse: i) Graficando para algunos valores iniciales de x_0 los pares $(k; x_k)$ correspondientes a los primeros valores orbitales x_k de la órbita de x_0, con lo que tendremos una idea sobre el comportamiento de la sucesión correspondiente a ese x_0. ii) Mediante la representación para un determinado valor inicial x_0 de los pares ordenados $(x_k; x_{k+1})$ correspondientes a sucesivas iteraciones de *f*, obteniendo la línea de fases de x_0. La

reiteración del procedimiento para cada $x_0 \in Dom\ f$ genera la gráfica de *f* que conjuntamente con la bisectriz del 1ero y 3er cuadrantes permiten construir el *diagrama de red*.

Para las funciones lineales $f(x) = ax + b$ se sabe que un punto fijo $\tilde{x}$ es atractor si $|a| < 1$, mientras que es repulsor si $|a| > 1$. Para cualquier función *f* continua y derivable en el intervalo de definición del sistema, el análisis del carácter de $\tilde{x}$ puede encararse mediante la linealización de la función en $\tilde{x}$, válida en un intervalo infinitesimal alrededor de ese punto. Pero la pendiente de la función linealizada es $f'(\tilde{x})$; luego aplicamos el siguiente criterio: Si $|f'(\tilde{x})| < 1$, entonces $\tilde{x}$ es atractor y si $|f'(\tilde{x})| > 1$, entonces $\tilde{x}$ es repulsor.

Un modelo determinista caótico

Consideremos la ecuación en diferencias $x_{k+1} = x_k^2 - 2x_k$, asociada a la función $f(x) = x^2 - 2x = x(x-2)$. Para su análisis cualitativo: (i) Obtenemos los puntos fijos, $\tilde{x}_1 = 0$ **y** $\tilde{x}_2 = 3$, resolviendo $x = x^2 - 2x$. (ii) Determinamos el comportamiento en cada $\tilde{x}$**.** Como $|f'(0)| = 2 > 1$ y $|f'(3)| = 4 > 1$, ambos puntos fijos son repulsores. (iii) Calculamos y representamos los primeros valores de la órbita para diversos x_0, por ejemplo si $x_0 = 0.1$ su órbita es $\Theta_{x_0=0.1} = \{0.1; -0.19; 0.4161; -0.65906079;..; 2.98760154; 2.950559883;...\}$.

En la representación de los primeros valores de las órbitas de $x_{k+1} = x_k^2 - 2x_k$ se utilizan líneas de sostén para su mejor visualización. Esto puede verse en la Fig.1 donde representamos dichos valores orbitales para: $x_0 = 0{,}2$; $x_0 = 0{,}3$; $x_0 = -0{,}2$; $x_0 = -0{,}3$; $x_0 = 2{,}8$ y $x_0 = 2{,}7$ todos ellos pertenecientes al intervalo $I = (-1;3)$.

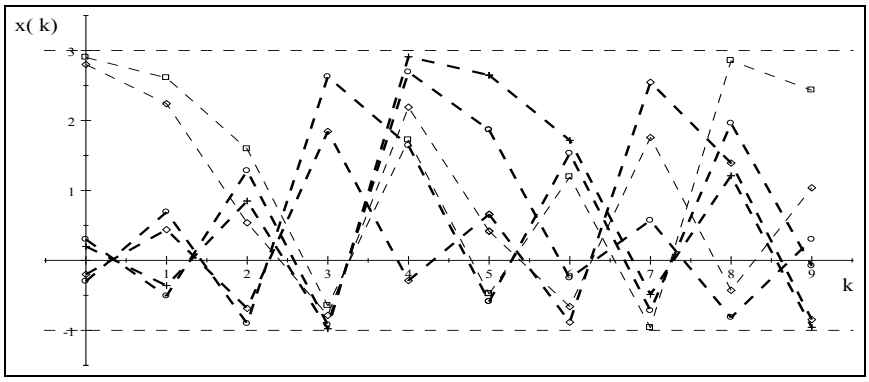


Figura 1: Valores orbitales para distintas condiciones iniciales $x_0 \in (-1;3)$

En la Fig. 1 podemos observar: 1°) Los puntos orbitales de cada órbita, están comprendidos en el intervalo $I=(-1;3)$. 2°) Dividiendo, para cualquiera de las órbitas, el intervalo de valores orbitales en subintervalos de 5 décimas, aún con las pocas iteraciones efectuadas, son numerosos los subintervalos de esta órbita, "visitados" por otros valores orbitales de la misma órbita. Esta característica es la propiedad de *mezcla*.

Para ilustrar otra característica de ciertas órbitas de este modelo, representamos los primeros puntos orbitales de $\Theta_{-0.095}$ y de $\Theta_{-0.0951}$ (ambos x_0 menores que $\tilde{x}_1=0$).

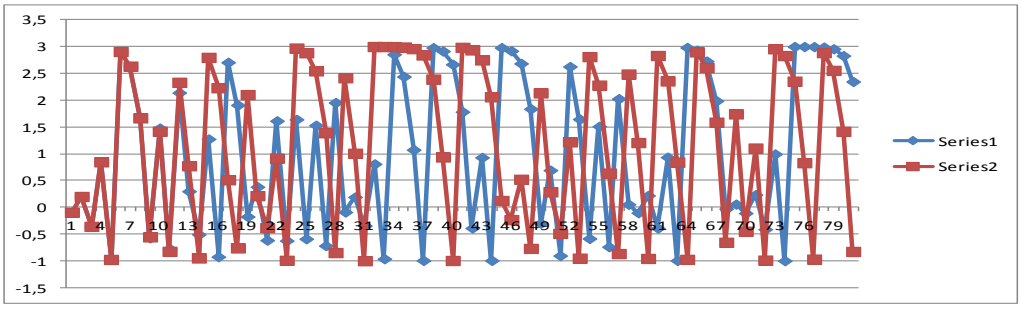


Figura 2: Valores orbitales de órbitas de $\Theta_{-0.095}$ y de $\Theta_{-0.0951}$

La Fig. 2 muestra que la variación de un diezmilésimo en la condición inicial considerada, al avanzar el número de iteraciones, provoca variaciones inicialmente poco notorias en los valores orbitales, hasta producir valores que si bien fluctúan en el mismo intervalo, lo hacen con valores, que en ciertos intervalos, están totalmente diferenciados. Existe *sensibilidad* de las condiciones iniciales.

Por ser $x_0=\tilde{x}_1=0$ y $x_0=\tilde{x}_2=3$ puntos fijos de la función, son de equilibrio del modelo, siendo sus órbitas periódicas $\Theta^1_{\tilde{x}=0}=\{0;0;0;..;0;...\}$; $\Theta^1_{\tilde{x}=3}=\{3;3;3;..;3;...\}$. Además, $x_0=2$ (cero de f); $x_0=1$ y $x_0=-1$ (abscisa y ordenada del vértice de f), tienen por órbitas $\Theta_2=\{2;0;0;...;0;...\}$; $\Theta_1=\{1;-1;3;3;...;3;...\}$ y $\Theta_{-1}=\{-1;3;3;...;3;...\}$, que son eventualmente periódicas, pues al cabo de las primeras iteraciones se transforman en periódicas, en este caso de período 1.

Nos resta ver el comportamiento de las órbitas cuando $x_0\in(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$. Puesto que $f((-\infty;-1)\cup(3;+\infty))=(3;+\infty)$, para cualquier condición inicial $x_0<-1$ o bien $x_0>3$, será $x_k>3$ para $k\geq 1$. Para el número creciente de iteraciones los valores orbitales también son crecientes, sin que existan intervalos de fluctuación para los puntos de sus trayectorias. Observamos en la Tabla 1 una divergencia constante de las órbitas a más infinito y que los valores

orbitales para $x_0 = -1{,}01$ y $x_0 = 3{,}01$ son iguales; ello se debe a que ambos valores son simétricos con respecto a la abscisa del vértice de la parábola $f(x) = x^2 - 2x$

k	0	1	2	3	4	5	6	7
x_k	**3,01**	3,0401	3,1620	3,6743	6,1518	25,5407	601,2457	360293.92
x_k	**3,009**	3,0361	3,1456	3,6037	5,7793	21,8418	433,3796	186951,12
x_k	**-1,01**	3,0401	3,1620	3,6743	6,1518	25,5407	601,2457	360293,92
x_k	**-1,02**	3,0804	3,3281	4,4199	10,6956	93,0046	8463,85	71619827

Tabla 1: Valores orbitales de de $x_{k+1} = x_k^2 - 2x_k$ para $x_0 = 3.01; x_0 = 3.009$; $x_0 = -1{,}01; x_0 = -1.02$

A continuación relacionaremos el comportamiento del modelo con la función compuesta $g(x) = f^2(x) = f(f(x)) = x(x-2)(x^2 - 2x - 2)$, cuyos puntos fijos son $\tilde{x}_1 = 0$, $\tilde{x}_2 = 3$, $\tilde{x}_3 = (1/2) + (1/2)\sqrt{5}$ y $\tilde{x}_4 = (1/2) - (1/2)\sqrt{5}$. Descartamos $\tilde{x}_1$ y $\tilde{x}_2$, por ser puntos fijos de f, quedando $\tilde{x}_3$ y $\tilde{x}_4$. Puesto que $|g'(\tilde{x}_3)| = |g'(\tilde{x}_4)| \cong 4.02 > 1$ resulta que $\tilde{x}_3$ y $\tilde{x}_4$ son puntos fijos repulsores de $g(x) = f^2(x)$. Por otra parte, como $f(\tilde{x}_3) = \tilde{x}_4$ y $f(\tilde{x}_4) = \tilde{x}_3$ se obtienen los ciclos $\Theta^2_{\tilde{x}_3} = \{\tilde{x}_3; \tilde{x}_4; ...; \tilde{x}_3; \tilde{x}_4; ...\}$ y $\Theta^2_{\tilde{x}_4} = \{\tilde{x}_4; \tilde{x}_3; ...; \tilde{x}_4; \tilde{x}_3; ...\}$, que serán repulsores por ser $\tilde{x}_3$ y $\tilde{x}_4$ puntos fijos repulsores de $g(x) = f^2(x)$.

Calculamos, $f^3(x) = x(x-2)[x(x-2)-2][x(x-2)(x(x-2)-2)-2]$, cuyos puntos fijos son $0; 3; 0.55496; 2.2470; 2.5321; 1.3473; -0.80194; -0.87939$, donde salvo 0 y 3 los restantes valores están calculados en forma aproximada. Esos valores dan lugar a

$$\Theta^3_{\tilde{x}=2.2470} = \{2.2470;\ 0.55496;\ -0.80194; ...; 2.2470;\ 0.55496;\ -0.80194; ...\},$$

$$\Theta^3_{\tilde{x}=-0.87939} = \{-0.87939;\ 2.5321;\ 1.3473; ...; -0.87939;\ 2.5321;\ 1.3473; ...\},$$

que son ciclos repulsores de orden 3. Al ver que existen puntos periódicos de período 3 en *I*, en virtud del teorema de Li y Yorke existen puntos periódicos de todos los períodos en *I* (ver pág 204 de Martín, Morán y Reyes). Esto asegura la densidad de los puntos periódicos en el intervalo *I*.

Diagramas de red

Otra forma de reconocer el comportamiento de un modelo, es mediante la construcción del diagrama de red. Para ello, dibujamos la línea de fases $f(x)=x^2-2x$ de la ecuación recursiva $x_{k+1}=x_k^2-2x_k$ y la bisectriz del primero y tercer cuadrantes. Así, a partir de la condición inicial x_0 elegida, se dibuja una línea vertical hasta intersecar la línea de fases en el punto $(x_0;f(x_0))=(x_0;x_1)$. Desde esta intersección se traza una línea horizontal hasta intersecar la bisectriz en el punto $(f(x_0);f(x_0))=(x_1;x_1)$, determinando así la nueva abscisa x_1 para calcular $f(x_1)$. A partir de este punto trazamos una vertical que intersecará la línea de fases en $(x_1;f(x_1))=(x_1;x_2)$. Este procedimiento puede reiterarse obteniendo el diagrama de red que permite conocer los valores aproximados de la órbita de x_0, leídos sobre cualquiera de los ejes, como muestran las Figs. 4 y 5

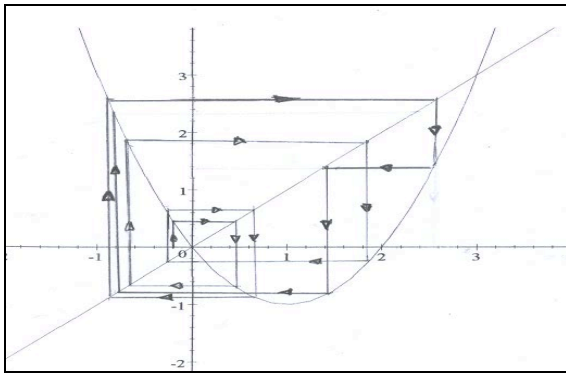


Figura 4: Diagrama de red para $f(x)=x^2-2x$ de la condición inicial $x_0=-0{,}2$.

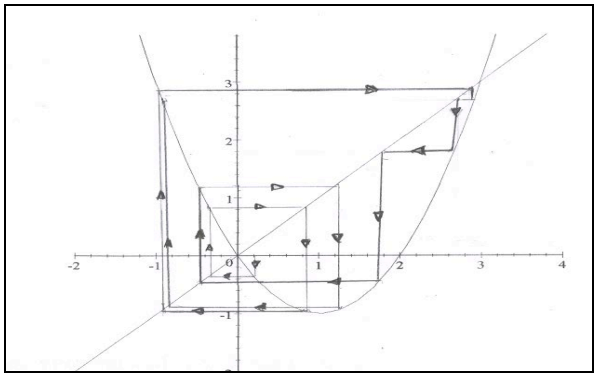


Figura 5: Diagrama de red para $f(x)=x^2-2x$ de la condición inicial $x_0=0{,}2$.

Si bien las figuras anteriores no pueden asegurar que el modelo sea caótico en $[-1;3]$, nos permiten ver que ese carácter está directamente relacionado con la grafica de la función y sus puntos fijos. Por otra parte, sabemos que la función logística $F_4(x)=4x(1-x)$ tiene un comportamiento caótico en $[0;1]$, lo cual se prueba estableciendo una biyección con la gráfica de la función tienda de campaña dada por $T(x)=2x$ si $x\in[0;1/2]$ y por $T(x)=2(1-x)$ si $x\in(1/2;1]$, que tiene un comportamiento caótico en $[0;1]$, como se demuestra en el libro de Martín, Morán y Reyes. De esta forma, si existe una transformación de semejanza de la gráfica de $f(x)=x(x-2)$ en $[-1;3]$ a la de $F_4(x)=4x(1-x)$ en $[0;1]$, dejando invariante la bisectriz del

1ro. y 3er. cuadrantes, tendremos aseverada la caoticidad de $f(x)$ en $[-1;3]$. Aseguramos tal semejanza puesto que por una simetría central en $(0;0)$, la grafica de $f(x)$ en $[-1;3]$, se transforma en la de $f_1(x)=-x(2+x)$ en $[-3;1]$. Luego, mediante una traslación dada por $V(3;3)$ obtenemos $f_2(x)=x(4-x)$ en $[0;4]$. Finalmente por una homotecia de razón $1/4$ resulta la gráfica de la función logística $F_4(x)=4x(1-x)$ en $[0;1]$. Los puntos fijos $\tilde{x}_1=0$ y $\tilde{x}_2=3$ de $f(x)$ se transforman, respectivamente, en los puntos fijos $\hat{x}_1=3/4$ y $\hat{x}_2=0$ de $F_4(x)$. Además, cualquier $x_0\in[-1;3]$ se transforma en $(1/4)(3-x_0)\in[0;1]$. De esta forma $f(x)=x(x-2)$ tendrá una órbita caótica para $x_0\in[-1;3]$ si y sólo si $F_4(x)=4x(1-x)$ tiene una órbita caótica para $(1/4)(3-x_0)\in[0;1]$

Un modelo determinista no caótico

Consideremos la ecuación en diferencias $x_{k+1}=-x_k^2+x_k+2$, asociada a $f(x)=-x^2+x+2$. Sus puntos fijos $\tilde{x}_1=-\sqrt{2}$ y $\tilde{x}_2=\sqrt{2}$, son repulsores pues $|f'(\tilde{x}_1)|=2\sqrt{2}+1>1$ y $|f'(\tilde{x}_2)|=|-2\sqrt{2}+1|>1$, generando los ciclos $\Theta^1_{-\sqrt{2}}=\{-\sqrt{2};-\sqrt{2};-\sqrt{2};...;-\sqrt{2};...\}$ y $\Theta^1_{\sqrt{2}}=\{\sqrt{2};\sqrt{2};\sqrt{2};...;\sqrt{2};...\}$ de período 1. Además, el punto notable $1+\sqrt{2}$, que es abscisa de una intersección de la gráfica de $f(x)$ con la recta $r(x)=-\sqrt{2}$, genera el ciclo eventualmente periódico $\Theta_{1+\sqrt{2}}=\{1+\sqrt{2};-\sqrt{2};-\sqrt{2};...;-\sqrt{2};...\}$.

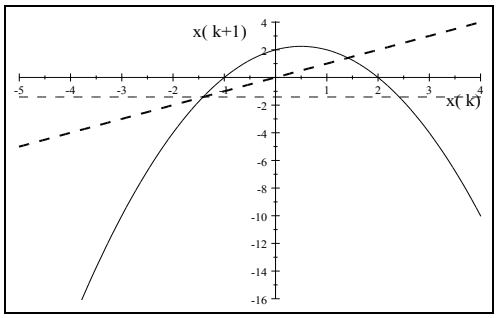


Figura 6: $\tilde{x}_1=-\sqrt{2};\tilde{x}_2=\sqrt{2}$ puntos fijos y $1+\sqrt{2}$ punto notable de $f(x)=-x^2+x+2$

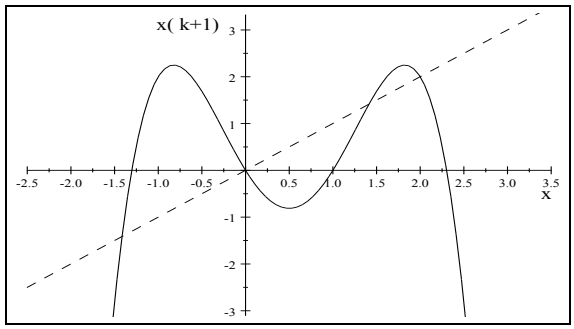


Figura 7: $\tilde{x}_3=0$ y $\tilde{x}_4=2$ puntos fijos que consideraremos de $g(x)=f^2(x)$

La función compuesta $g(x)=f^2(x)=-(-x^2+x+2)^2+(-x^2+x+2)+2$ tiene como puntos fijos $\tilde{x}_1=-\sqrt{2}$, $\tilde{x}_2=\sqrt{2}$, $\tilde{x}_3=0$ y $\tilde{x}_4=2$. Descartamos $\tilde{x}_1$ y $\tilde{x}_2$ por ser puntos fijos de $f(x)$.

Así, $\Theta_0^2 = \{0; 2; 0; 2; ...; 0; 2;...\}$ y $\Theta_2^2 = \{2; 0; 2; 0; ...; 2; 0;...\}$ son ciclos periódicos de orden 2 repulsores, pues $|g'(0)| = |g'(2)| = |-3| > 1$. Las figuras 6 y 7, exhiben los puntos fijos de $f(x)$ y de $f^2(x)$, y además el punto notable de $f(x)$. Determinamos ahora los puntos fijos de $h(x) = f^3(x) = f(f^2(x)) = -x^8 + 4x^7 - 14x^5 + 7x^4 + 14x^3 - 7x^2 - 3x + 2$: -0.802; 0.555; 2.247; $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$ donde los tres primeros, que forman un ciclo de período 3, están calculados con una aproximación de tres decimales y los dos restantes se descartan por ser puntos fijos de $f(x)$. Como $f(2.247) = -0.802$; $f(-0.802) = 0.555$ y $f(0.555) = 2.247$, es $\Theta_{2.247}^3 = \{2.247; -0.802; 0.555; ...; 2.247; -0.802; 0.555;...\}$.

Observemos en la Fig. 8 que esos tres valores son raíces dobles de $h(x) = x$, de los que la bisectriz del 1ro. y 3er. cuadrantes es su recta tangente. Como la derivada $h'(x)$ en cualquiera de esos puntos es 1, nos dificulta determinar el comportamiento del ciclo. Para ello, tomamos como condición inicial $x_0 = 2.0868 \in (-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2})$, valor aproximado de un punto fijo repulsor de $f^4(x)$; de allí que la órbita comienza tomando valores aproximados del ciclo repulsor de orden 4 $\Theta_{\tilde{x}=2.0868}^4 = \{2.0868; -0.26799; 1.6602; 0.90396;...\}$; que, después de un período confuso de la iteración 16 a la 69, se estabiliza en el ciclo atractor de orden 3, como puede verse en la Fig. 9. El comportamiento atractor del ciclo de orden tres determina el carácter no caótico de la ecuación en diferencias $x_{k+1} = -x_k^2 + x_k + 2$ en $[-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}]$

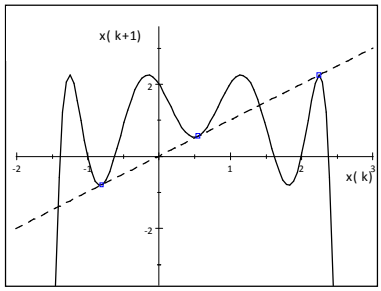


Figura 8: Gráfica de $h(x) = f^3(x)$.

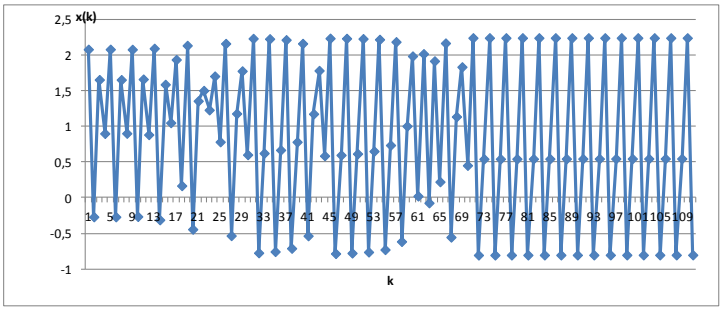


Figura 9: Representación de la órbita de $x_0 = 2.0868$.

Ahora, en la Tabla 2 veremos el comportamiento del modelo cuando $x_0 \notin [-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}]$.

k	0	1	2	3	4	5
x_k	2,5	-1,75	-2,8125	-8,72265625	-82,8073883	-6937,87095
x_k	-1,7	-2,59	-7,2981	-58,5603636	-3485,87655	-12154819,2

Tabla 2: Valores de la órbita de $x_{k+1} = -x_k^2 + x_k + 2$ para $x_0 = 2{,}5$ y $x_0 = -1{,}7$.

Puesto que $f\left(\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)\cup\left(1+\sqrt{2};+\infty\right)\right)=\left(-\sqrt{2};-\infty\right)$, para cualquier condición inicial $x_0 < -\sqrt{2}$ o bien $x_0 > 1+\sqrt{2}$, será $x_k < -\sqrt{2}$ para $k \geq 1$. Para el número creciente de iteraciones los valores orbitales son monótonos decrecientes, resultando $\lim_{k\to+\infty} x_{k+1} = -\infty$.

Conclusiones

En los dos ejemplos desarrollados los puntos fijos de la función $f(x)$ son repulsores. En $f(x)=x(x-2)$ existe un intervalo de caoticidad mientras que en $f(x)=-x^2+x+2$ no hay órbitas caóticas, pues existe un ciclo atractor de orden 3. La existencia de ciclos periódicos atractores implica que el modelo no presenta órbitas caóticas en el intervalo considerado.

En algunos casos el carácter de los ciclos de orden 1 directamente permite afirmar la no caoticidad del modelo. Así, en el sistema modelado por $x_{k+1} = x_k^3 + (3/4)x_k$, los puntos fijos: $\hat{x}_1 = -1/2$; $\hat{x}_2 = 1/2$ y $\hat{x}_3 = 0$ dan ciclos de orden 1, siendo repulsores los generados por $\hat{x}_1$ y $\hat{x}_2$, mientras que es atractor el generado por $\hat{x}_3$. Luego, todas las órbitas dadas por condiciones iniciales $x_0 \in (-1/2;1/2)$ tienden a $\hat{x}_3 = 0$; mientras que si $x_0 \in (1/2;+\infty)$ su órbita tenderá a $+\infty$, y si $x_0 \in (-\infty;-1/2)$ tenderá a $-\infty$. Las Figs. 10 y 11 exhiben respectivamente los puntos fijos, así como las órbitas correspondientes a las diversas situaciones que muestran la no caoticidad del modelo.

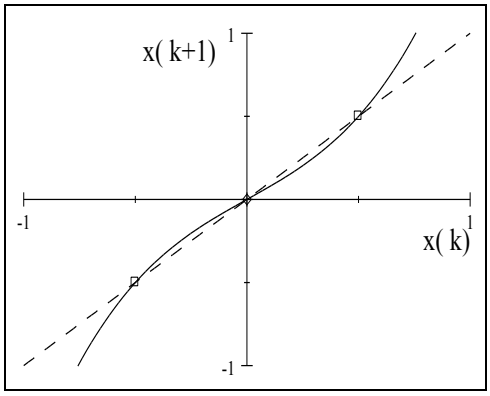


Figura 10. Puntos fijos de $f(x) = x^3 + (3/4)x$: $\hat{x}_1 = (-1/2)$; $\hat{x}_2 = (1/2)$; $\hat{x}_3 = 0$.

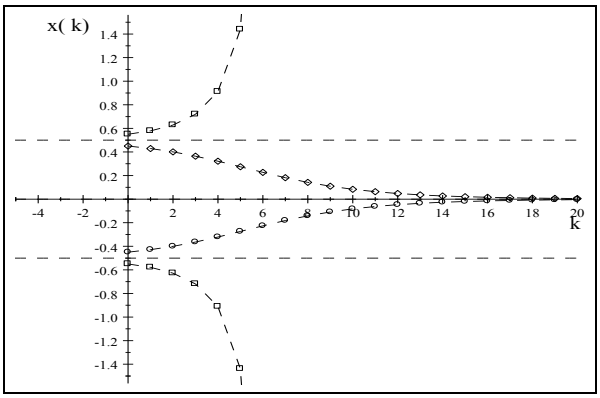


Figura 11: Órbitas de la ecuación en diferencias $x_{k+1} = x_k^3 + (3/4)x_k$

Probar que un modelo es caótico en un intervalo I requiere demostrar que: (i) Los puntos periódicos son densos en I; (ii) Las órbitas son sensibles a las condiciones iniciales y (iii) Tiene la propiedad de mezcla, es decir, cualesquiera sea la división en subintervalos $I_1, I_2, \ldots, I_n$ de I, para cualquier I_j, existe algún $x_0 \in I_j$ tal que su órbita Θ_{x_0} tiene algún punto en cada uno de los subintervalos $I_1, I_2, \ldots, I_n$ de I. Esta propiedad por un resultado de M. Vellekoop y R. Berglund, cumple: Si I es un intervalo finito o infinito de los números reales, la ecuación en diferencias $x_{k+1} = f(x_k)$ con f continua, es caótica en el intervalo I si y sólo si tiene la propiedad de mezcla. Esta propiedad no es fácil de probar, de allí que buscamos el ejemplo del parágrafo 2, que permitió inferir las características de un modelo que tiene un intervalo de caoticidad, del cual por semejanza con la ecuación logística, queda indirectamente demostrado el comportamiento caótico del modelo en $[-1;3]$

Referencias bibliográficas

Blanchard, P., Devaney, R. L. y Hall, G. R. (1999). *Ecuaciones diferenciales.* México: Ed. Thomson,

Fernández Pérez, C., Vázquez Hernández, F. J. y Vegas Montaner, J. M. (2003). *Ecuaciones diferenciales y en diferencias. Sistemas dinámicos.* España: Ed. Thomson.

Martín, M. A., Morán, M. y Reyes, M. (1998)*; Iniciación al caos. Sistemas dinámicos.* España: Ed. Síntesis.

FÚTBOL: UNA MIRADA DESDE LA MATEMÁTICA EDUCATIVA

Alma Iris Pineda Guillen y María Esther Magali Méndez Guevara
Universidad Autónoma de Guerrero. México
almairis8@hotmail.com

Resumen. El presente reporte tiene como propósito dar una mirada de la matemática involucrada en el fútbol asociación, tomando en cuenta que en jóvenespersiste el rechazo a la matemática y un creciente gusto por el futbol.Este estado del arte se encamino de manera puntual a investigar la matemática que se usa implícitamente por los participantes al jugar fútbol.
Palabras clave: fútbol, matemática educativa, socioepistemología
Abstract. The report is intended to give a glimpse of the mathematics involved in association football, considering that in the young persists in rejecting mathematics and a growing taste for football. This state of the art made her way in a timely manner to investigate mathematics implicitly used by the participants to play soccer
Key words: soccer, educational mathematics, socioepistemología

Introducción

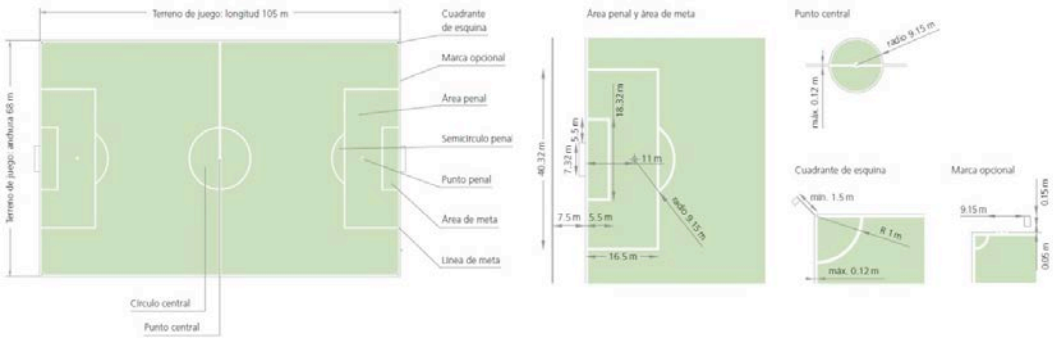
El presente reporte es parte de una investigación en proceso que tiene como propósito dar una mirada de la matemática involucrada en el fútbol asociación, llamado fútbol, balompié o soccer, normado por la FédérationInternationale de FootballAssociation conocida por sus siglas FIFA, al que nos referiremos simplemente como fútbol. Este deporte en Guerrero como en muchos otros lugares, tiene gran influencia en los hombres de casi todas las edades, así como también en las mujeres está tomando gran fuerza. Angelotti (2010) menciona que la pasión por este deporte se ha incrementado por la conjunción de tres condiciones: es un deporte fácil de jugar, con reglas sencillas de aprender y barato pues no requiere de gran inversión económica para su práctica, pero a esta tríada de motivos se suman otras de tipo social, histórico y organizacional, tales como: la difusión que ocupa en los medios de comunicación y la transmisión en directo de los juegos locales e internacionales, la existencia de futbolistas que logran alcanzar enorme popularidad algunos considerados como símbolos nacionales, la presencia de jugadores latinoamericanos en los mejores equipos de Europa, la oportunidad que ofrece el fútbol al posibilitar la ascensión social y económica para las personas provenientes de las clases medias y bajas.

En los jóvenes persiste el rechazo a la matemática y un creciente gusto por el futbol, entre las actividades realizadas para presentar el cartel "En el fútbol hay ciencia", en la XV Escuela de Invierno en Matemática Educativa, se implemento una encuesta a 19 jóvenes de tercer grado de la Escuela Telesecundaria Ricardo Flores Magón, de las que retomamos las siguientes; ¿te gusta las matemáticas?, ¿te gusta el fútbol?, analizando las respuesta en un diagrama de venn, tenemosque a 11les gusta el fútbol, a 1 las matemáticas, a 6 ambas y a 1 ni matemáticas ni fútbol.

Un breve estado del arte sobre el fútbol y matemáticas

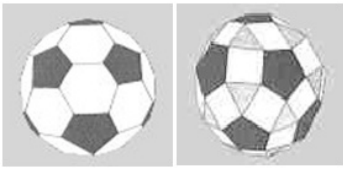
Hemos observado que en el Fútbol y su contexto están presentes elementos matemáticos, como los siguientes:

1) El terreno de juego o cancha de futbol, está trazada con figuras geométricas planas, que tiene una función específica. La simetría en el terreno de juego, permite que los adversarios tengas las mismas oportunidades de ganar, la circunferencia en el centro permite a los jugadores al iniciar o reanudar el juego, tener como mínima la distancia del radio en la que los jugadores del equipo rival puedan entrar al ataque antes de que el balón sea puesto en juego, así como la área de meta determina el lugar donde se puede colocar el balón para el saque de meta, entre otras.



Extraídas del documentos oficial – Reglamentos FIFA "Reglas de juego 2012/2013"

2) Un segundo elemento es el del balón de Fútbol comerciales, del que su precio oscila entre 50 a 200 pesos, para el cual se utiliza el poliedro "Icosaedro Truncado"para construirlos, el cual pudiera servir para reafirmar concepto como vértices, aristas y caras, además con ese poliedrosu volumen es el 86,74 % de la esfera correspondiente, que no es una mala aproximación, al curvar sus caras cuando se infla este porcentaje aumenta ligeramente y sobrepasa el 95 %. Pero el "Rombicosidodecaedro", para abreviar le llamaremos "rómbico", que ocupa el 94,32 % sin inflar e inflado sobrepasa el volumen de icosaedro. Se sospecha qué ninguna casa deportiva se ha lanzado a la aventura de comercializar un balón basado en este poliedro, puesto que tantas caras saldrían demasiado costosas. Es decir, esta elección involucra desde un aspecto de aproximación para cubrir un área total, hasta la optimización de materiales y costos de producción.



Icosaedro Truncado - Rómbico

3) Un tercer elemento es la aritmética que se maneja en la tabla general de clasificación de los equipos, donde se involucran operaciones con signo, expresada en la diferencia de goles, después de ver sumado los goles a favor con los goles en contra.

Tabla General de Calificación

Datos del Club		Local								Visita								Total							
Lugar	Nombre	JJ	JG	JE	JP	GF	GC	DIF	PTS	JJ	JG	JE	JP	GF	GC	DIF	PTS	JJ	JG	JE	JP	GF	GC	DIF	PTS
1	Tijuana	8	5	3	0	11	4	7	18	8	3	4	1	10	11	-1	13	16	8	7	1	21	15	6	31
2	León	8	6	0	2	19	7	12	18	8	3	3	2	12	9	3	12	16	9	3	4	31	16	15	30
3	América	8	4	2	2	15	9	6	14	8	4	4	0	12	5	7	16	16	8	6	2	27	14	13	30
4	Toluca	8	6	2	0	15	5	10	20	7	3	1	3	9	10	-1	10	15	9	3	3	24	15	9	30
5	Cruz Azul	8	3	5	0	13	5	8	14	8	3	2	3	8	9	-1	11	16	6	7	3	21	14	7	25
6	M. Morelia	8	3	4	1	12	7	5	13	8	2	5	1	11	9	2	11	16	5	9	2	23	16	7	24
7	Guadalajara	8	2	4	2	8	7	1	10	8	4	1	3	9	8	1	13	16	6	5	5	17	15	2	23
8	S. Laguna	8	4	3	1	14	10	4	15	8	2	2	4	8	14	-6	8	16	6	5	5	22	24	-2	23
9	Jaguares	8	6	0	2	15	7	8	18	8	0	4	4	7	15	-8	4	16	6	4	6	22	22	0	22
10	Monterrey	8	3	4	1	11	9	2	13	7	2	2	3	9	11	-2	8	15	5	6	4	20	20	0	21
11	UANL	7	3	3	1	13	6	7	12	9	2	2	5	9	11	-2	8	16	5	5	6	22	17	5	20
12	Atlante	8	2	3	3	12	13	-1	9	8	3	2	3	9	12	-3	11	16	5	5	6	21	25	-4	20
13	UNAM	8	4	0	4	10	8	2	12	8	2	2	4	5	13	-8	8	16	6	2	8	15	21	-6	20
14	Pachuca	8	3	4	1	9	9	0	13	8	1	2	5	2	10	-8	5	16	4	6	6	11	19	-8	18
15	San Luis	8	1	3	4	6	10	-4	6	8	2	3	3	8	12	-4	9	16	3	6	7	14	22	-8	15
16	Puebla	8	2	1	5	8	11	-3	7	8	1	3	4	8	15	-7	6	16	3	4	9	16	26	-10	13
17	Atlas	8	0	6	2	8	11	-3	6	8	1	3	4	7	10	-3	6	16	1	9	6	15	21	-6	12
18	Querétaro	8	0	1	7	2	13	-11	1	8	0	3	5	8	17	-9	3	16	0	4	12	10	30	-20	4

Clasifican los 8 primeros lugares de la Tabla.
Clubes que participarán en la Liga de Campeones de CONCACAF 2012-2013
(Méx 1=Monterrey, Méx 2= Santos Laguna, Méx 3= Guadalajara , Méx 4= Tigres de la U.A.N.L.)
Clubes que participarán en la Copa Libertadores 2013
(Méx 1= Primer Club clasificado en la Tabla General de Clasificación del Torneo Apertura 2012, Méx 2= Segundo Club clasificado en la Tabla General de Clasificación de Torneo Apertura 2012 , Méx 3= Tercer Club clasificado en la Tabla General de Clasificación de Torneo Apertura 2012, quien participará en la ronda de Repechaje, eliminando a los Clubes que participan en la Liga de Campeones de CONCACAF 2012-2013)

Tabla General de Clasificación hasta la jornada 16 de la LIGA MX

4) Otro ejemplo es aquello que se utiliza para la organización de torneos, desde las combinatorias de los encuentros, los diagramas de arboles para llegar al ganador, etc.

De lo anterior decimos, que la matemática involucrada podría generar un escenario para actividades correspondientes a los ejes bases de la educación secundaría del país:"Forma, espacio y medida", "Manejo de la información" y"Sentido numérico y pensamiento algebraico", propio de la matemática de la secundaria,situados en contexto del día a día de los jóvenes.

Estas observaciones nos impulsaron a investigar que se ha investigado, con relación a la Matemática y el Fútbol, de las cuales hasta el momento hemos encontrado las siguientes:

Duranet al. (2005) mencionan en su artículo la creación de un modelo matemático, que da solución a la programación de los partidos del campeonato de la primera división del fútbol chileno, el cual consta de 20 equipos que deben enfrentarse todos contra todos a lo largo de 19 fechas. La construcción de un fixture para la programación de cada fecha no es una tarea fácil, dado que las múltiples condiciones que necesita satisfacer lo convierten en un problema combinatorial de difícil resolución. Estas condiciones tienen que ver con lograr mayores beneficios económicos para los clubes, establecer mecanismos de equilibrio deportivo, hacer el torneo más atractivo para el público y cumplir con las exigencias de la Asociación Nacional de Fútbol Profesional (ANFP), institución que dirige y organiza el campeonato.

Pollard, Ensum y Taylor (2004) analizaron dos estudios previos, que usaron datos de las Copas Mundiales de 1986 y 2002, han reportado el efecto del lugar del remate sobre las oportunidades

de anotar, junto con la influencia de otros factores. Los datos de estos dos análisis se combinan para una muestra simple. Debido a diferentes características y a tamaños de la muestra más pequeñas, se excluyen algunas situaciones que generaron gol. Este análisis muestra tres factores de influencia altamente significativa, sobre la oportunidad de producir un gol. Estos factores son: 1 la distancia de la meta, 2 el ángulo del poste de meta y 3 el espacio tomando en cuenta el oponente más cercano al momento del remate. La ecuación en esta investigación permite que la probabilidad de anotar sea estimada desde cualquier situación dada. Esto puede ser ilustrado por los contornos de probabilidad dibujados en los diagramas del campo de juego. La baja probabilidad de anotar desde una larga distancia enfatiza la importancia de llevar el balón a lugares con mayor probabilidad de anotar. Para el rematador, el encontrar el espacio y rematar de una sola vez son atributos importantes.

Córdoba (2006), hace una aplicación teórica de la Trigonometría para hallar con rigor el ángulo con el que se contempla la portería de fútbol desde cualquier punto del terreno de juego dado por sus coordenadas cartesianas. Se analiza, también, la variación de este ángulo conforme el balón es desplazado de un punto a otro, bien para recortar y chutar a puerta o bien para acercarse a la misma. Se incluyen un conjunto de tablas que dan los valores del ángulo desde un conjunto finito de puntos sobre el terreno de juego y, sobretodo, dos programas informáticos. Se creemos que estos dos programas pueden ser útiles para: 1. Calcular de forma inmediata, sencilla y exacta el ángulo desde el que un jugador de fútbol ve la portería del equipo rival, estando en cualquier lugar del campo, si sus ojos estuviesen colocados en el mismo lugar donde se encuentra el balón. 2. Relacionar, en trabajos futuros, la eficacia ante el gol en función de la posición exacta en el campo.

Roberto (2011), menciona que en los datos recogidos(a través dela grabación de audio, trabajos escritosycuaderno de campo), se estudió mediante análisis de contenidoproporcionando elementospara creerque se habíacreado una oportunidadpara que los estudiantesen el aula, construir el conocimientobasado en la experienciaasociada asituaciones encontradasen la vida cotidianay debatido.

Todo lo anterior nos motiva a reconsiderarnuestra prácticade proponermétodosy temas deestudiode interés del alumnoy el maestro,y contribuira la integraciónde los estudiantesa la sociedada través de unaactitud crítica yun posicionamientolúcidoy productivo ensituacionesindeterminadasdel día adía. Elaborar marcos para actividades docentes que inviten alos estudiantesa conjeturar, analizar, reflexionar, discutir,evaluar,a pensar desde los usos del conocimiento matemático.

Orientando la investigación

Cordero (2013), enfatiza en la críticaque en nuestros ámbitos laborales educativos nos llegan programas innovadores oficiales donde aparecen nuevos conceptos que definen nuevas formas de enseñar, presumiblemente para mejorar los aprendizajes. Por ejemplo el "conocimiento del cotidiano" y en nuestro caso, en las clases de las matemáticas. En ese contexto se derivan consignas "llevar la matemática a la realidad del estudiante" y todavía más impactante crear "ambientes de la matemática de todos los días". Sin duda la propuesta en sí, parece sensata, pero choca con nuestra realidad educativa, porque dicho propósito requiere entender al conocimiento matemático como una construcción social, lo que conlleva cuestionar no en sí a la matemática, sino su *función social*. Por eso importan conceptos entorno al conocimiento como su *institucionalización, sus usos e instrumentos, sus prácticas sociales que norman sus construcciones, el cotidiano, la labor, el trabajo y las acciones humanas, como la identidad*, entre otros.

Cantoral, Farfán, Cordero, Alanís, Rodríguez y Garza (2005) consideran que el pensamiento matemático se desarrolla en todos los seres humanos en el enfrentamiento cotidiano a múltiples tareas. De lo que destaca que el pensamiento matemático no está enraizado ni en los fundamentos de la matemática ni en la práctica exclusiva de los matemáticos, sino que trata de las formas posibles de construir ideas matemáticas, incluidas aquellas que provienen de la vida cotidiana.

De manera tal que nos interesa estudiar, la matemática que se está viviendo en la práctica del Fútbol, enfatizando en lo que menciona Córdoba (2006), que el ángulo con que un jugador de fútbol ve la portería del equipo rival, desde cualquier lugar del campo, determinar la eficacia ante el gol. En la figura 1, si situamos dos o más puntos en un campo de fútbol a escala, y queremos ver quien tiene el mayor ángulo de esos puntos con conexión a la portería, podemos decir que se tracen las circunferencias respectivas dados tres puntos en los que dos sean los extremos de las portería, y encontrar quien tendrá mejor ángulo, entonces será aquel que forme la circunferencia más pequeña, pero estas situaciones las podemos determinar manualmente con juegos geométricos o utilizando software como Geogebra.

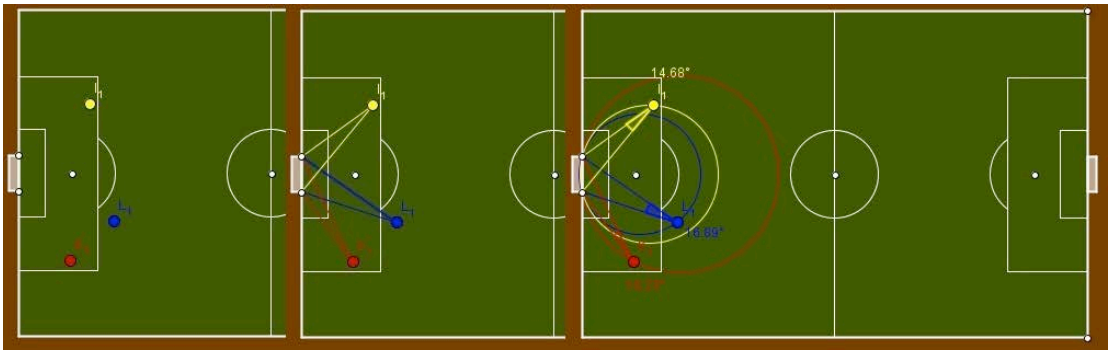


Figura 1

Ante esta aseveración nos planeamos la siguiente pregunta,¿Qué matemática estánusando los participantesdel juego del Fútbol?, donde pretendemos interpretar este fenómeno desde la perspectiva de los participantes, "desde dentro", teniendo como hipótesis que el terreno de juego y el campo visual de los jugadores y el entrenador, influye para la toma de decisiones (Figura 2).

Figura 2

El siguiente paso en la investigación es definir la mirada desde la cual se realizará, ene ese sentido reconocemos compartir las ideologías de dos enfoques teóricos desde el cual podríamos desarrollar esta investigación; la Etnomatemática y la Socioepistemología, mismos que en su momento explicaremos y determinaremos la función de cada uno en la investigación. Pues nos importa estudiar los usos de la matemática de una comunidad especifica, pero aún estamos valorando el nivel de participación o influencia que nosotros tendríamos en la recopilación de datos, y consideremos el método etnográfico (Dorio, Sabariego y Massot, 2012) puede ser de utilidad.

Así mostramos el panorama general de nuestra investigación y nuestra perspectiva a corto plazo.

Referencias Bibliográficas

Angelotti, G. (2010). El estudio del fútbol ¿Un ámbito periférico para la antropología en México? *Revista de Antropología Experimental,* 10, 211-222. Recuperado de http://revista.ujaen.es/rae

Cantoral, R., Farfán, R., Cordero, F., Alanís, J., Rodríguez, R. y Garza, A. (2005). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Trillas.

Cordero, F. (2013). *Matemáticas y el cotidiano.* Material Auxiliar. Diplomado para Bachillerato. Modulo 3 Construcción Social del Conocimiento. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México. Manuscrito no publicado.

Córdoba A. (2006). *Matemáticas y eficacia ante el gol en el fútbol*. cienciaydeporte.net,*2*. Recuperado de http://www.cienciaydeporte.net/index.php/numeros-anteriores/no-2/50-articulos/57-articulo.html

Durán, G., Guajardo, M., Miranda, J., Sauré, D., Souyris, S., Weintraub, A.,…,Chaigneau, F. (2005). Programación Matemática Aplicada al Fixture de la Primera División del Fútbol Chileno. *Revista Ingeniería de Sistemas, 19*.

Dorio, I., Sabarriego, M. y Massot, I. (2012). Características generales de la metodología cualitativa. (Eds.) *Metodología de la investigación Educativa,* pp. 275-318. España: La muralla.

Pollard, R., Ensum J. y Taylor, S. (2004). Estimating the Probabilitty of a Shot resulting in a goal: The efecto of distance, angle and space. *Revista Internacional de Fútbol y Ciencia 2,* 50-55.

Roberto, C. (2011). *Modelagem matemática no futebol: uma atividade de crítica e criação encaminhada pelo método do caso.* (Tesis de maestría no publicada). DEMAT-UFOP. Brasil.

ANÁLISIS DE UNA EVALUACIÓN POR RÚBRICAS EN UNA ACTIVIDAD MATEMÁTICA UNIVERSITARIA

Adriana Favieri
Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Haedo. Argentina
adriana.favieri@gmail.com

Resumen. Los docentes universitarios suelen percibir que las producciones de los alumnos carecen de buena presentación, prolijidad, uso preciso de conocimientos, explicaciones sobre las resoluciones o procedimientos algebraicos y conclusiones sobre el trabajo realizado.Estos aspectos fueron analizados en una actividadsobre Transformación Conforme realizada por alumnos de la asignatura Matemáticas Aplicadas a la Aeronáutica de la Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Haedo. El análisis de las rúbricas utilizadas para evaluar a los estudiantes mostró que, en general, los estudiantes pueden resolver la actividad llegando a niveles aceptables. Sin embargo, mostraron serias dificultades al tratar de explicar las resoluciones o procedimientos aplicados, así como la elaboración de conclusiones.

Palabras clave: rúbricas, transformación conforme, prolijidad

Abstract. University professors often perceive that student´s productions lack of good presentation, neatness, precise use of knowledge, explanations of the resolutions or algebraic procedures and conclusions about the work done. These aspects were analyzed in an activity about Conformal Mapping done by students in an Aeronautics Applied Mathematics course at the National Technological University, Haedo campus. Analysis of the rubrics used to evaluate the students showed that, in general, students can solve the activity reaching acceptable levels. Nevertheless, they showed serious difficulties trying to explain resolutions or procedures applied as well as drawing conclusions.

Key words: rubrics, conformal mapping, neatness

Introducción

Problema inicial

Los alumnos de la asignatura Matemáticas Aplicada a la Aeronáutica suelen realizar varios trabajos prácticos, algunos con uso de software matemático, sobre temas específicos que deben ser presentados formalmente a la cátedra para su evaluación. Debido a que la postura de la cátedra es considerar que en la formación del ingeniero es importante incluir no solo aspectos cognitivos y procedimentales, sino también aspectos cualitativos relacionados con la presentación, prolijidad y conclusiones, es que éstos son considerados en la evaluación de los mismos.

Objetivo de la experiencia

Evaluar aspectos cognitivos, procedimentales y cualitativos en un trabajo práctico sobre Transformación Conforme de los alumnos de Matemáticas Aplicadas a la Aeronáutica.

Marco teórico

Al enfrentar cualquier situación, ya sea de la vida diaria, profesional o universitaria, en la debemos tomar alguna decisión sobre el camino a seguir, o establecer si una acción ha dado los resultados esperados o no, o si han cumplido los objetivos planteados, estamos ante una evaluación. Así

podemos definir evaluación como la determinación del valor que puede tener una acción, situación u objeto en relación con nuestras decisiones, intenciones, deseos hacia él (Moya Otero y Luengo Horcajo (coords.), Asociación Proyecto Atlántida, 2011).

Con el mismo espíritu, en el ámbito educativo, podemos considerar a la evaluación como el proceso por el cual se obtiene información para elaborar un juicio sobre una determinada realidad, establecer su valor educativo y adoptar decisiones sobre ella (Moya Otero, et. al., 2011).

En cuanto al concepto de rúbrica, varios autores nos ayudan a entenderlo. Para López Carrasco, una rúbrica, también llamada matriz de valoración, es una estrategia de evaluación generada a través de un conjunto de criterios específicos que permiten valorar el aprendizaje, los conocimientos y/o las competencias logrados por el alumnos (López Carrasco, 2007).

De acuerdo a Arends (2004, citado en López Carrasco, 2007) a través de dicha matriz de evaluación se hace una descripción detallada de los conocimientos, procedimientos y/o tipo de desempeño esperado por parte de los alumnos. En ella se incluyen también los criterios para su análisis.Una rúbrica es una herramienta que ayuda a los docentes a establecer los criterios necesarios para tomar decisiones para evaluar lo más justamente posible el trabajo del alumno(Quinlan, 2011).

Una rúbrica es un descriptor que facilita al docente la evaluación y calificación de los alumnos (Morata, Pérez, Cortina-Puig y Cruz, 2012).

La rúbrica es una opción viable para otorgar criterios de evaluación, ya sean cuantitativos, cualitativos o mixtos, que permiten conocer el desempeño del alumno durante el desarrollo de un proyecto, tema o actividad de carácter complejo, o durante la resolución de problemas (López Carrasco, 2007).

De manera consciente o inconsciente, las personas creamos rúbricas mentales todos los días, es decir, guías para tomar decisiones, para evaluar alguna situación. Estas ayudan a tomar decisiones teniendo en cuenta tanto el conocimiento como el objetivo que pretenden lograr. También como docentes tomamos decisiones diariamente sobre el trabajo del alumno, basadas en nuestra experiencia (Quinlan, 2011).

Un aspecto importante de la evaluación a través de rúbricas es su utilidad de especificar comportamientos observables desde los niveles más simples hasta los más complejos que forman parte de la competencia (Goggi Selke, 2013).

Pueden observarse varios aspectos en común en estas definiciones, que es un instrumento de evaluación, generalmente presentado en forma de matriz, en el cual se especifican los indicadores

a evaluar y los criterios con los que se hará la evaluación. Teniendo en cuenta esto, para este estudio en particular consideramos la rúbrica como un instrumento de evaluación en el que se describen los conocimientos y procedimientos algebraicos necesarios para resolver el trabajo práctico sobre transformación conforme.

- Algunas ventajas de la utilización de rúbricas con niveles de logro son:
- Brinda información al alumno sobre lo que se espera de él en la evaluación.
- Ofrece al alumno indicaciones sobre su situación respecto a los objetivos.
- Aumenta la consistencia de la valoración de las producciones y desempeño de los alumnos por parte del docente.
- Provee a los docentes información fehaciente que permite la justificación de la nota de la evaluación (Quinlan, 2011).

Existen dos tipos de rúbricas: las comprensivas y las analíticas. Las rúbricas comprensivas se refieren a valoraciones generales que no involucran necesariamente un listado de niveles de logro. Las rúbricas analíticas involucran respuestas muy bien enfocadas a una serie de conceptos o procedimientos, junto con una escala de evaluación correspondiente, (o niveles de logro), definiendo cada uno de sus descriptores (López Carrasco, 2007).

Para esta experiencia se optó por considerar las siguientes definiciones y decisiones:

Aspectos cognitivos: son los conocimientos de transformación conforme necesarios para resolver el trabajo práctico evaluado, incluyendo la escritura de las ecuaciones en notación de variable compleja que identifican cada región y de las ecuaciones de transformación por inversión.

Aspectos procedimentales: son los procedimientos algebraicos necesarios para resolver la transformación planteada y la realización de los gráficos de las regiones original y la transformada.

Aspectos cualitativos: son todos aquellos aspectos que se consideran deben estar presentes en todo trabajo práctics de un ingeniero en formación, como ser, presentación del trabajo escrito y/o impreso, prolijidad, explicaciones sobre la resolución, sobre el procedimiento realizado, conclusiones sobre lo realizado y calidad de los gráficos presentados.

Decisiones sobre las rúbricas: Se decidió utilizar dos rúbricas analíticas, una para los aspectos cognitivos y procedimentales y otra para los aspectos cualitativos del trabajo.

Contexto del trabajo

Esta experiencia se realizó en dos cursos de la asignatura Matemáticas Aplicadas a la Aeronáutica de la Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Haedo, de la carrera Ingeniería

Aeronáutica. Estos dos cursos se ofrecen en el turno tarde y noche. Laasignatura tiene características particulares, ya que es un fuerte nexo entre las asignaturas del ciclo básico con las del ciclo superior; y debe ofrecer un sustento teórico práctico sólido para poder cursar con mayor facilidad asignaturas específicas de la carrera que utilizan conocimientos matemáticos en aplicaciones ingenieriles específicas de la aeronáutica. Este contexto y características hacen resaltar la importancia de que el alumno que curse esta asignatura logre conocimientos matemáticos sólidos, tenga una variedad de recursos algebraicos a su disposición, comience a adquirir habilidades relacionadas con uso de programas matemáticos y que incorpore en sus producciones aquellas características que hacen de la misma una presentación adecuada a un futuro ingeniero aeronáutico.

Actividad realizada por los alumnos

La cátedra ha decidido que la actividad sobre transformación conforme se centre en la transformación por inversión $w = \frac{1}{z}$ya que es importante para el ingeniero aeronáutico pues la misma está presente en la llamada transformada de Joukowsky$w = z + \frac{1}{z}$, utilizada para entender algunos principios aerodinámicos vinculados con el diseño de alas del avión; y que los alumnos estudiaran en profundidad en asignaturas tales como Mecánica de los Fluidos o Proyecto y Diseño Aerodinámico.

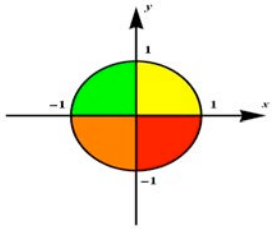


Figura 1: Región dada para transformar

El problema era el siguiente: se le propone al alumno que transforme una región del plano, que puede apreciarse en la figura 1, mediante la transformación por inversión, graficando la región transformada y que luego escriba alguna conclusión sobre los resultados obtenidos. Los alumnos podían trabajar en grupos de dos alumnos y utilizar elprograma Mathematica. La resolución y la conclusión debían presentarse en forma escrita para su corrección.Previamente a la presentación del trabajo práctico, los docentes del curso había hecho una introducción teórica del tema, y los alumnos disponían de material didáctico especialmente diseñado para la asignatura vinculado al tema en cuestión.

Rúbricas para la evaluación de la resolución de la actividad sobre Transformación por inversión

Sobre aspectos cognitivos y procedimentales sobre transformación por inversión

Niveles de logro	Requiere mejora	Logro aceptable	Máximo logro
Indicadores			
Escritura de las ecuaciones en notación de variable compleja que identifican cada región	Mal o no escritas	No totalmente correctas, mezclando regiones y/o sectores	Correctas, identificando cada región.

Escritura de las ecuaciones de transformación por inversión	Las escribe mal o no las escribe	Las escribe pero no correctamente o de manera incompleta.	Las escribe correctamente, identificando relación entre los módulos y los argumentos.
Realización del trabajo algebraico necesario para la realización de la transformación	Sin trabajo algebraico, sólo resultado final, sin justificación.	Algunos pasos algebraicos incorrectos y/o justificaciones incompletas.	Todos los pasos algebraicos y justificados.
Gráfico de las regiones originales y las transformadas	Sin gráficos o incorrectos.	Gráficos incompletos o con algunas incorrecciones.	Gráficos completos y correctos.

Tabla 1: Rúbrica sobre aspectos cognitivos y procedimentales

Sobre los aspectos cualitativos de la actividad sobre Transformación por inversión

Niveles de logro Indicadores	Requiere mejora	Logro aceptable	Máximo logro
Presentación del trabajo escrito y/o impreso	Presentación pobre, descuidada, sin respetar consignas de entrega	Presentación regular, con las consignas mínimas cumplidas.	Presentación correcta, respetando las consignas de entrega.
Prolijidad	Presentación desprolija, sin orden y desalineada.	Presentación regular, con algunos descuidos o falta de orden.	Presentación clara, precisa y ordenada.
Explicaciones sobre la resolución, sobre el procedimiento realizado	Ninguna explicación sobre la resolución o el procedimiento realizado tanto en el ejercicio resuelto con lápiz y papel o con el programa.	Algunas explicaciones sobre la resolución o el procedimiento realizado tanto en el ejercicio resuelto con lápiz y papel o con el programa.	Todas las explicaciones sobre la resolución o el procedimiento realizado tanto en el ejercicio resuelto con lápiz y papel o con el programa.
Conclusiones sobre lo realizado	Sin conclusiones sobre lo resuelto.	Conclusiones en forma incompleta o las mismas presentan algunas incorrecciones.	Conclusiones correctas y completas sobre lo resuelto.
Calidad de los gráficos presentados	Gráficos pobres, confusos y/o desprolijos.	Gráficos regulares, con algunas imperfecciones o desprolijidades.	Gráficos claros, precisos y prolijos.

Tabla 2: Rúbrica sobre aspectos cualitativos

Resultados de la corrección

Sobre los aspectos cognitivos y procedimentales

	Turno tarde 2do 1ra 21 trabajos prácticos	Turno noche 2do 2da 15 trabajos prácticos
Escritura de las ecuaciones en complejos que identifican cada región		
Requiere mejora	0 %	0 %
Logro aceptable	0 %	0 %
Máximo logro	100 %	100 %
Escritura de las ecuaciones de transformación por inversión		
Requiere mejora	0 %	0 %
Logro aceptable	19 %	0 %
Máximo logro	81 %	100 %
Realización del trabajo algebraico necesario para la realización de la transformación		
Requiere mejora	0 %	0 %
Logro aceptable	71 %	47 %
Máximo logro	29 %	53 %
Gráfico de las regiones originales y las transformadas		
Requiere mejora	0 %	0 %
Logro aceptable	0 %	33 %
Máximo logro	100 %	67 %

Tabla 3: Resultados de la rúbrica sobre aspectos cognitivos y procedimentale

Sobre los aspectos cualitativos del trabajo

	Turno tarde 2do 1ra 21 trabajos prácticos	Turno noche 2do 2da 15 trabajos prácticos
Presentación del trabajo escrito y/o impreso		
Requiere mejora	0 %	0 %
Logro aceptable	10 %	13 %
Máximo logro	90 %	87 %
Prolijidad		
Requiere mejora	0 %	13 %
Logro aceptable	10 %	7 %
Máximo logro	90 %	80 %
Explicaciones sobre la resolución, sobre el procedimiento realizado		
Requiere mejora	48 %	36 %
Logro aceptable	42 %	27 %
Máximo logro	10 %	27 %
Conclusiones sobre lo realizado		
Requiere mejora	90 %	0 %

Logro aceptable	0 %	87 %
Máximo logro	10 %	13 %
Calidad de los gráficos presentados		
Requiere mejora	0 %	7 %
Logro aceptable	81 %	33 %
Máximo logro	19 %	60 %

Tabla 4: Resultados de la rúbrica sobre aspectos cualitativos

Discusión sobre los resultados

Sobre los conocimientos y procedimientos de la actividad sobre transformación por inversión puede apreciarse niveles parejos en los dos turnos, observándose porcentajes más altos de logro aceptable o máximo logro en el grupo que cursa el turno tarde. El aspecto más negativo de esta sección es el indicador vinculado al trabajo algebraico necesario para la realización de la transformación**,** ya que el 71% del grupo del turno tarde y el 47% del turno noche lo hizo medianamente bien.

En cuanto a los aspectos cualitativos de la actividadlos resultados obtenidos son menos satisfactorios ya que, salvo los indicadores vinculados a presentación del trabajo y prolijidad, todos tienen porcentajes altos en los niveles de logro de menor escala. Es de destacar que el 90% de los alumnos del turno tarde y el 97% de los del turno noche no han podido escribir conclusiones sobre lo realizado. También puede observarse altos porcentajes de alumnos, en los dos turnos, que no explicaron correctamente la resolución o los procedimientos algebraicos realizados. Y por último, subrayar que, a pesar de estar utilizando un programa con el cual es posible obtener gráficos de buena calidad, sólo puedo hacerlo el 19% de los alumnos del turno tarde y un 60% del turno noche.

Reflexiones

Luego de haber trabajado con los alumnos y corregir exhaustivamente sus producciones, pueden establecerse algunasreflexiones sobre este caso particular, tanto sobre los alumnos como los docentes:

Con respecto a los alumnos

- En general, estos dos grupos de alumnos han podido resolver la actividad con niveles aceptable de logro. Es decir que estos alumnos tienen buenos niveles de logro en los indicadores de la rúbrica relacionada con los conocimientos y procedimientos de la actividadsobre transformación por inversión.

- En los dos cursos se han observado falencias significativas tanto en las explicaciones sobre las resoluciones o los procedimientos algebraicos realizados, en las conclusiones como así también en la calidad de los gráficos presentados. Por lo tanto, estos alumnos carecen de buenos niveles de logro en los indicadores de la rúbrica relacionada con los aspectos cualitativos de la actividad.

Con respecto a los docentes

- Es necesario que el docente tenga por objetivo no sólo ser guía, tutor y transmisor de conocimientos, sino también velar porque sus alumnos adquieran hábitos relativos a un trabajo posterior a la resolución que le ayuden a justificar los procedimientos, a explicar las resoluciones hechas y a extraer conclusiones sobre su trabajo.

Referencias bibliográficas

Goggi Selke, M. (2013). *Rubric Assessment Goes to College: Objective, Comprehensive Evaluation of Student Work.* Plymouth: Rowman & Littlefield.

López Carrasco, M. (septiembre de 2007). *Guía básica para la elaboración de rúbricas.* Recuperado el marzo de 2013, de http://www.slideshare.net/aprendizaje/gua-bsica-para-la-elaboracin-de-rbricas

Morata, M., Pérez, A., Cortina-Puig y M.Cruz, J. (2012). *Rúbrica para evaluación de competencias transversales de la euss: adaptación a la asignatura de física.* Recuperado el marzo de 2013, de Ponencia presentada en XX Congreso Universitario de Innovación Educativa en la Enseñanzas Técnica: http://www.eiic.ulpgc.es/documentoscongresos/Marta%20Morata%20Cari%C3%B1ena.pdf

Moya Otero, J. y Luengo Horcajo, F. (coords.), Asociación Proyecto Atlántida. (2011). *Teoría y práctica de las competencias básicas* (Vol. Colección críticas y fundamentos. Serie didáctica. Diseño y desarrollo curricular). Barcelona: Graó.

Quinlan, A. (2011). *A Complete Guide to Rubrics: Assessment Made Easy for Teachers, K-College.*Plymouth: R&L Education.

RELAÇÕES INSTITUCIONAIS EXISTENTES PARA O ENSINO DA NOÇÃO INTUITIVA DE CONJUNTOS NO ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO NO BRASIL

Ademir Ávila y Marlene Alves Dias
Universidade Bandeirante de São Paulo. Brasil
ademiravila@yahoo.com.br, alvesdias@ig.com.br

Resumen. Apresentamos nesse trabalho parte dos resultados da pesquisa sobre "Os sistemas tutoriais inteligentes no ensino de Álgebra Relacional e Banco de Dados Relacionais no Ensino Superior". Considerando as dificuldades dos estudantes nas disciplinas de Álgebra Relacional e Banco de Dados Relacionais e as necessidades de conhecimentos prévios sobre a noção intuitiva de conjuntos, suas operações e propriedades, iniciamos nossa pesquisa analisando como essa noção é trabalhada nos Ensinos Fundamental e Médio para compreender quais as relações institucionais existentes e assim qual relação pessoal podemos esperar dos estudantes que iniciam os cursos superiores de Tecnologia da Informação.

Palabras clave: conjuntos, banco de dados, álgebra

Abstract. We present in this work some results of research on "intelligent tutorials systems in the teaching of Relational Algebra and Relational Database in Higher Education." Considering the difficulties of the students in the disciplines of Relational Algebra and Relational Databases and the need for previous knowledge about the intuitive notion of sets, its operations and properties, we began our research by analyzing how this notion is worked in primary and secondary education to understand which existing institutional relations and so which personal relationship we can expect of students who begin the Information Technology courses.

Key words: sets, database, algebra

Introdução

Apresentamos nesse trabalho os resultados de parte da pesquisa sobre "Os sistemas tutoriais inteligentes no ensino de Álgebra Relacional e Banco de Dados Relacionais no Ensino Superior".

Considerando as dificuldades dos estudantes dos cursos de Tecnologia da Informação nas disciplinas de Álgebra Relacional e Banco de Dados Relacionais e as necessidades de conhecimentos prévios sobre a noção intuitiva de conjuntos, suas operações e propriedades, iniciamos nossa pesquisa analisando como essa noção é trabalhada nos Ensinos Fundamental e Médio para compreender quais as relações institucionais existentes e assim qual relação pessoal podemos esperar dos estudantes que iniciam os cursos superiores de Tecnologia da Informação, ou seja, nosso objetivo é identificar as relações institucionais existentes no processo de ensino e aprendizagem da noção intuitiva de conjuntos, suas operações e propriedades para identificar qual relação pessoal podemos esperar dos estudantes que iniciam os cursos superiores de Tecnologia da Informação e propor novas formas de ação didática que auxiliem os estudantes a trabalhar com a autonomia necessária no desenvolvimento de seus projetos de Banco de Dados e auxiliar os professores no desenvolvimento de um trabalho que considere os conhecimentos prévios de seus estudantes.

O referencial teórico central da pesquisa é a Teoria Antropológica do Didático de Chevallard (1992, 1994) e Chevallard e Grenier (1997), em particular, as noções de relações institucionais e pessoais, praxeologia, ostensivos e não ostensivos e "topos" do professor e dos estudantes. Consideramos ainda como referencial teórico de apoio as noções de quadro e mudança de quadros conforme definição de Douady (1984, 1992) e níveis de conhecimento esperados dos estudantes segundo definição de Robert (1998). A metodologia utilizada na pesquisa é a da análise documental e os documentos utilizados na análise foram uma coleção de livros didáticos para o Ensino Fundamental e três coleções de livros didáticos para o Ensino Médio sendo que uma delas é do mesmo autor que a coleção do Ensino Fundamental. As análises apontam para uma necessidade de revisita à noção intuitiva de conjuntos, suas operações e propriedades de forma articulada com a lógica de programação e lógica matemática de forma que os estudantes possam trabalhar com autonomia no desenvolvimento de seus projetos de Banco de Dados.

A seguir apresentamos uma breve descrição do referencial teórico utilizado na pesquisa.

Referencial Teórico

O referencial teórico central da pesquisa é a Teoria Antropológica do Didático de Chevallard (1992, 1994) e Chevallard e Grenier (1997), em particular, as noções de relações institucionais e pessoais, praxeologia, ostensivos e não ostensivos e "topos" do professor e dos estudantes.

Iniciamos assim apresentando as noções de relação institucional e pessoal definidas por Chevallard (1992). Após considerar como fundamentais os termos primitivos objeto (o – material de base da teoria), pessoa (x) e instituição (I) o autor introduz o conceito de r*elação institucional ao objeto o* como a existência de um objeto o para uma instituição I, assim podemos dizer que o é um objeto de I e a relação *R*(*I*, *o*) especifica a maneira que o existe para I. Da mesma forma, Chevallard (1992) define r*elação pessoal ao objeto o* como a existência de um objeto o para uma pessoa x e dessa forma podemos dizer que x conhece o e que a relação *R*(*x*, *o*) especifica a maneira que x conhece o.

Além das noções de relação institucional e pessoal consideramos também o conceito de *praxeologia* que segundo Chevallard (1998) trata-se de um conceito que permite analisar toda atividade regular humana por meio desse modelo único denominado praxeologia, ou seja, esse modelo possibilita pensar de maneira unificada um grande número de fenômenos didáticos, encontrados no decorrer de múltiplas analises.

Uma praxeologia relativa a um tipo de tarefa é constituída de um bloco prático técnico [*tipo de tarefa, técnica*] e de um bloco tecnológico-teórico [tecnologia, teoria]. O bloco [tecnologia, teoria] é, normalmente, identificado com um *saber* e o bloco [*tipo de tarefa, técnica*] como um

saber fazer. Uma das funções da tecnologia é de explicar e esclarecer a técnica. Sendo a teoria a tecnologia da tecnologia, uma de suas funções é de explicar e esclarecer a tecnologia.

Mas, para executar as técnicas é necessário introduzir novos objetos que Chevallard (1994) denomina de objetos ostensivos e não ostensivos.

Os *objetos ostensivos* sendo aqueles que têm para nós uma forma material sensível, por exemplo um objeto material (uma caneta, um compasso, etc.) é um ostensivo, assim como os gestos ou *ostensivos gestuais*, as palavras, e, mais genericamente, o discurso ou *ostensivos discursivos*, os esquemas, desenhos, grafismos ou *ostensivos gráficos* e as escritas e formalismos ou *ostensivos escriturais*.

Ao contrário dos objetos ostensivos, os *objetos não-ostensivos,* que denominamos usualmente de noções, conceitos, idéias, etc, não podem ser manipulados, eles só podem ser evocados por meio da manipulação dos ostensivos associados.

Chevallard (1994) observa ainda que existe uma *dialética necessária entre ostensivos* e *não ostensivos*, pois os ostensivos são manipulados por meio de regras, cuja distinção é feita pelos não ostensivos, enquanto que os não ostensivos são evocados por meio da manipulação dos ostensivos.

Para nossa pesquisa consideramos ainda a noção de "topos" introduzida por Chevallard e Grenier (1997), ou seja, o "topos" do aluno é o lugar onde ele opera com autonomia relativa em relação ao professor e onde ele pode desempenhar um papel que lhe é próprio, ou seja, o lugar onde o aluno tem a sensação de ter um papel na execução de suas tarefas, da mesma forma, existe também o "topos" do professor. Na realização de uma tarefa didática aluno e professor se reúnem em uma ação orquestrada em que ambos são chamados a desempenhar seus papeis.

Consideramos ainda como referenciais teóricos de apoio as noções de quadro e mudança de quadros conforme definição de Douady (1984, 1992) e níveis de conhecimento esperados dos estudantes segundo definição de Robert (1998).

Segundo Douady (1992) um quadro é

> [...] constituído de objetos de um ramo das matemáticas, das relações entre os objetos, de suas formulações eventualmente diversas e das imagens mentais associadas a esses objetos e essas relações. Essas imagens têm um papel essencial e funcionam como ferramentas dos objetos do quadro. Dois quadros podem conter os mesmos objetos e diferir pelas imagens mentais e problemáticas desenvolvidas. (Douady, 1992, p.135).

Douady define as mudanças de quadros, atividades constantes no trabalho dos matemáticos, como sendo:

Um meio de obter formulações diferentes de um problema que sem ser, necessariamente equivalentes, permitem um novo acesso às dificuldades encontradas para fazer funcionar as ferramentas e técnicas que não se impunham na primeira formulação [...]. Quaisquer que sejam, as traduções de um quadro em outro, elas terminam sempre em resultados desconhecidos, em novas técnicas, na criação de novos objetos matemáticos; em suma, no enriquecimento do quadro original e dos quadros auxiliares de trabalho (Douady, 1992, pp.135 – 136).

Robert (1998) define os *três níveis de conhecimentos* esperados dos estudantes enfatizando que os mesmos são relativos a um dado nível de conceituação que corresponde a um marco que podemos identificar ao longo do ensino das noções de determinado campo conceitual, isto é, uma prateleira em um campo conceitual dos conhecimentos matemáticos, satisfazendo a uma organização coerente de uma parte do campo, caracterizada pelos objetos matemáticos apresentados de uma determinada maneira, dos teoremas sobre esses objetos, dos métodos associados a esses teoremas e dos problemas que os alunos podem resolver com os teoremas do nível considerado e utilizando esses métodos.

Assim, para um determinado nível de conceituação podemos considerar os três níveis de conhecimento, a saber:

Nível técnico que corresponde a funcionar de maneira isolada, local e concreta, correspondendo mais às ferramentas (compreendendo também as definições).

Nível mobilizável que é mais amplo que o técnico, pois nele já existe um início de justaposição de saberes de um determinado quadro, até mesmo uma organização, vários métodos podem ser mobilizados, os caracteres ferramenta e objeto são considerados. Mas, o que está em jogo é *explícito*. Se um saber é identificado, ele é dito mobilizável se é acessível, se o aluno o utiliza corretamente.

Nível disponível que corresponde ao fato de saber resolver o que é proposto sem indicações, de poder, por exemplo, dar contraexemplos (encontrar ou inventar), mudar de quadros (relacionar), aplicar métodos não previstos.

Na sequência apresentamos a metodologia utilizada para o desenvolvimento desse estudo

Metodologia

A metodologia empregada na pesquisa é a da análise documental, que segundo Lüdke e André (1986) é uma técnica da pesquisa qualitativa que permite complementar informações obtidas por outras técnicas e/ou desvendar aspectos de um tema ou problema, para tal partimos de um questionamento construído em função do referencial teórico escolhido e analisamos uma coleção de livros didáticos de 5ª/6° a 8ª/9° série/ano do Ensino Fundamental e três coleções de livros didáticos para o Ensino Médio.

As análises foram desenvolvidas por meio de um organograma, que segue modelo utilizado por Tavignot (1991) em sua tese, que nos proporciona uma visão geral da obra e a articulação das noções nela apresentadas, em seguida fazemos um comentário e análise da forma como são articulados os conhecimentos, em particular, a noção de conjunto levando em conta os conjuntos numéricos e se existe uma relação entre esses conjuntos e a noção intuitiva de conjunto, suas operações e propriedades.

Finalmente, considerando como parte do professor a introdução teórica, os exemplos e os exercícios resolvidos e como parte do estudante os exercícios propostos, analisamos as tarefas privilegiadas e as necessidades em termos de ostensivos e não ostensivos, mudanças de quadro e o nível de conhecimento esperado dos estudantes em relação à noção intuitiva de conjunto, suas operações e propriedades e os conhecimentos prévios disponíveis para a introdução desse novo conhecimento.

Os livros utilizados nas análises foram "Tudo é Matemática" de Dante (2008) que corresponde a coleção do Ensino Fundamental e "Matemática" de Dante (2010), "Matemática" de Paiva (2009) e "Matemática do Ensino Médio" de Stocco e Diniz (2010) foram as obras analisadas para o Ensino Médio. Essas obras foram escolhidas por terem sido avaliadas pelo Ministério da Educação em função das propostas institucionais para os Ensinos Fundamental e Médio e são consideradas de bom nível na lista de escolha indicada para os professores.

Resultados encontrados

Observamos que na 5ª/6° série/ano estuda-se o conjunto dos números naturais e suas operações e se introduz os axiomas de Peano, mas as tarefas resolvidas e as propostas aos estudantes dão ênfase ao desenvolvimento de uma variedade de conceitos, procedimentos e representações simbólicas em estreita conexão e à aplicação desses conhecimentos para resolver problemas da própria matemática e do cotidiano, na 6ª/7° série/ano são introduzidos os conjuntos dos números inteiros e racionais e as tarefas propostas aos estudantes seguem o mesmo desenvolvimento apresentado acima, na 7ª/8° série/ano introduz-se o conjunto dos números reais após revisita aos

conjuntos introduzidos nas séries/anos anteriores e se reforça a questão da aplicação dos conhecimentos matemáticos em tarefas de aplicação da própria matemática e do cotidiano, na 8ª/9° série/ano é proposta uma revisita ao conjunto dos números reais e dá-se ênfase às operações de potenciação e radiciação, não se introduz a noção intuitiva de conjuntos e a noção de função é considerada por meio da noção de proporcionalidade sem utilizar a relação entre dois conjuntos. Enfatizamos que as tarefas resolvidas e propostas seguem o encaminhamento explicitado acima para a 5ª/6° série/ano, as tarefas propostas dão condições aos estudantes de desenvolver seu "topos" sem a necessidade de apoio do professor uma vez que eles podem se referir aos exemplos dados nas tarefas resolvidas e que segundo nossas análises fazem parte do "topos" do professor.

Das três coleções analisadas do Ensino Médio, observamos que as obras de Dante (2010) e Paiva (2009) tratam a noção intuitiva de conjunto, suas operações e propriedades na primeira série do Ensino Médio utilizando o ostensivo de representação de conjuntos por extensão, por exemplo $A = \{-3, 3\}$, o ostensivo de representação de conjuntos por compreensão, por exemplo $A = \{x \in Z / x^2 = 9\}$ e o ostensivo de representação por meio do diagrama de Venn. É dada ênfase na utilização do ostensivo de representação por meio do diagrama de Venn na introdução das operações com conjuntos. Nesse momento, os autores utilizam essa representação para a visualização das operações com conjuntos e suas propriedades.

Após a introdução da noção intuitiva de conjuntos, suas representações e propriedades os autores Dante (2010) e Paiva (2009) revisitam os conjuntos numéricos dando ênfase aos ostensivos de representação dos números racionais, em particular, as representações decimal e fracionária das dizimas periódicas e chamando a atenção para as dizimas não periódicas que não podem ser representadas forma de fração.

Ressaltamos aqui que ao introduzir a noção intuitiva de conjunto os autores Dante (2010) e Paiva (2009) propõem tarefas que dão ênfase ao desenvolvimento dos conceitos considerados, dos procedimentos e da utilização dos ostensivos de representações simbólicas, preparando os estudantes para as aplicações matemáticas, isto é, o conceito de função e os conceitos de probabilidade.

Na sequência os autores Dante (2010) e Paiva (2009) introduzem as funções como uma relação particular entre dois conjuntos e utilizam o ostensivo de representação gráfica para identificar por meio da análise gráfica uma função. Após esse trabalho os autores introduzem as funções reais de uma variável real.

A obra de Stocco e Diniz (2010) inicia com uma revisita aos conjuntos numéricos e introduzem as funções reais de uma variável real. As autoras não introduzem a noção intuitiva de conjuntos, suas operações e propriedades.

Considerações Finais e Perspectivas Futuras

As análises das relações institucionais, existentes via livros didáticos avaliados e indicados pelo Ministério da Educação, nos conduz a considerar a necessidade de um trabalho específico sobre a noção intuitiva de conjunto, suas operações e propriedades com ênfase nos ostensivos de representações simbólicas, em particular, no ostensivo de representação por meio do diagrama de Venn, e nos procedimentos que servem de ferramenta auxiliar para a introdução das disciplinas de Álgebra Relacional e Banco de Dados Relacionais no início do Ensino Superior, em particular para os cursos de Computação e Informática.

É importante observar que é preciso introduzir a noção de intuitiva de conjunto, suas operações e propriedades, pois não é possível garantir que os estudantes que terminam o Ensino Médio tenham se submetido a uma relação institucional em que essa noção tenha sido introduzida.Verificamos por meio da análise dos três livros do Ensino Médio, avaliados e indicados pelo Ministério da Educação, que não existe um consenso em relação ao desenvolvimento da noção intuitiva de conjunto ficando a cargo dos autores a escolha de introduzir ou não essa noção no Ensino Médio.

Ressaltamos aqui, que dispor de conhecimentos prévios sobre a noção intuitiva de conjuntos, suas operações e propriedades podem auxiliar os professores no trabalho na Zona de Desenvolvimento Proximal dos estudantes conforme teoria de Vygotsky (1988) cujo conceito básico é o de Zona de Desenvolvimento Proximal, que representa a diferença entre a capacidade do estudante de resolver problemas por si mesmo e a capacidade de resolvê-los com ajuda de alguém, ou seja, ela abrange todas as funções e atividades que o estudante consegue desempenhar por seus próprios meios, sem ajuda externa.

O estudo das relações institucionais sobre a noção intuitiva de conjuntos, suas operações e propriedades nos permitiu construir um teste diagnóstico para os estudantes dos primeiros anos dos cursos de Tecnologia da Informação que permite identificar as dificuldades encontradas pelos mesmos e que está nos auxiliando na construção de um Sistema Tutorial Inteligente para trabalhar com os conhecimentos sobre noção intuitiva de conjuntos, suas operações e propriedades e ao mesmo tempo articular esses conhecimentos com os conceitos de Bancos de Dados e Álgebra Relacional.

Referências bibliográficas

Chevallard,Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, La Pensée Sauvage, Grenoble, 12(1), 73-112.

Chevallard,Y. (1994). *Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique*. Acesso em 20 de janeiro de 2013 de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=125.

Chevallard Y. e Grenier, D.(1997). Le topos de l' éleve. En *Actes de la IX école d' été de didactique des mathématiques de Houlgate* (pp. 35-38). França: Houlgate.

Chevallard, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques. In *Actes de l'université d'été* (pp. 91-120). La Pensée Sauvage: Grenoble.

Dante, L. R. (2010). *Matemática*. São Paulo: Ática.

Dante, L. R. (2008). *Tudo é Matemática*. São Paulo: Ática.

Douady, R. (1984). *Jeux de cadre et dialectique outil objet dans l'enseignement des mathématiques*.Thèse de Doctorat. Université Dennis Diderot - Paris VII, França.

Douady, R. (1992). Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères IREM*, 6, 132-158.

Lüdke, M., André, M.E.D.A. (1986). *Pesquisa em educação:* abordagens qualitativas. São Paulo: EPU.

Paiva, M. (2009). *Matemática*. São Paulo: Moderna.

Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* La Pensée Sauvage, Grenoble, 18(2), 139-190.

Stocco, K. S. e Diniz, M. I. (2010). *Matemática do Ensino Médio*. São Paulo: Saraiva.

Tavignot, P. (1991). L'analyse du processus de transposition didactique, l'exemple de la symétrie orthogonale au collège. Thèse de Doctorat. Université René Descartes - Paris V, França.

Vygotsky, L. (1988). *Pensamento e linguagem*. São Paulo: Martins Fontes.

MÉDIA ARITMÉTICA – UMA ANÁLISE DAS ATIVIDADES DO LIVRO DIDÁTICO DE MATEMÁTICA ADOTADOS NO BRASIL

José Ivanildo Felisberto de Carvalho y Verônica Gitirana
Universidade Federal de Pernanmbuco Brasil
ivanfcar@hotmail.com; veronica.gitirana@gmail.com

Resumen. Nesse trabalho discutimos os resultados de uma dissertação de mestrado que analisa a abordagem da média aritmética nos livros didáticos de matemática utilizados em escolas públicas do Brasil dos anos finais do Ensino Fundamental. O estudo, que tem como referencial a Teoria dos Campos Conceituais, levanta os significados, as propriedades e as representações que constituem o campo conceitual da média aritmética que aparecem nas atividades propostas em tais livros. Os invariantes são investigados com uma análise teórica que podem ser mobilizados a partir de propriedades exploradas nas atividades. Concluímos que o campo conceitual da média nos livros didáticos é visto sem propiciar uma compreensão da média como uma medida estatística. Há poucas atividades nos livros didáticos de Matemática que propiciem a compreensão por parte do aluno da função estatística da média aritmética.
Palabras clave: média aritmética, teoria dos campos conceituais, livro didático
Abstract. In this paper, we discuss some of the results of a master dissertation that analyzes Brazilian mathematics textbook approaches of arithmetic mean. The maths textbooks analysed were the ones used in state schools in Brazil. On the basis of the Conceptual Fields Theory, this study investigated meanings, properties and representations, which comprise the conceptual field of arithmetic mean promoted by solving the proposed activities. The invariants are investigated within a theoretical analysis of the activities. It is discussed those that can be mobilized while dealing with the properties explored in the activities. We conclude that the conceptual field of the arithmetic mean in the textbooks does not propitiate an understanding of the mean targeting your character as a statistical measure. Very few activities provide students´ understanding of the statistical function of arithmetic mean.
Key words: arithmetic mean, conceptual fields theory, textbook

Introdução

Dentre os saberes estatísticos, a média aritmética é uma medida crucial para a análise e compreensão do comportamento de dados estatísticos. Com a média aritmética permite-se ter uma noção do grupo como um todo. Permite também comparar diferentes grupos, saber qual sua tendência. Podemos ainda, lançar mão da média, como uma boa estimativa de quantidades desconhecidas em situações envolvendo erros de medida ou utiliza - lá em situações na qual uma distribuição uniforme faz-se necessária.

Apesar da simplicidade do algoritmo do cálculo, "somar todos os números e então dividir pela quantidade de números somados", este é um conceito que apresenta suas complexidades quando objetiva-se uma compreensão conceitual mais ampla. Pesquisas revelam um bom domínio do algoritmo da média pelos estudantes nos diversos níveis do ensino, ao mesmo tempo, revelam dificuldades de compreensão conceitual deles sobre diversos aspectos deste conceito (Strauss e Bichler, 1988; Mayén et al, 2007; Cazorla, 2003; Melo, 2010).

Uma das dificuldades refere-se ao significado que média assume nos contextos. Os estudantes que já estudaram média conseguem utilizá-la adequadamente? Quando se fala do número médio

de pessoas por residência em uma dada avenida, o que esta informação significa? Que tipo de uso pode-se fazer dela?

É nesse sentido que se defende uma abordagem do conceito voltada para o desenvolvimento do seu significado e uso. Na escola, um dos trabalhos importantes com a média aritmética é propiciar situações para o estudante refletir sobre o resultado obtido, sobre o significado desse resultado, não ficando restrito a procedimentos de cálculo. É preciso ter espaço para a discussão dos valores obtidos e construir argumentos compreendendo a função da média numa análise de uma situação. Por exemplo, pode-se calcular a média de acesso a um determinado site por semana. Esta medida pode ser usada para comparar aceitação de diferentes sites, e assim, servir para se discutir o quanto se precisa investir em divulgação do site.

Além disso, o entendimento conceitual, atrelado ao entendimento do algoritmo da média, permite o uso mais apropriado de propriedades da média aritmética. Esse é outro aspecto bastante discutido nas pesquisas são as propriedades do conceito. Os estudantes, ao lidarem com a solução de situações de média, elaboram invariantes alguns válidos, e correspondentes a teoremas e propriedades da média, e outros sem validade matemática. Por exemplo, é comum observar estudantes elaborando invariantes inválidos sobre média ao considerar que: "A altura média dos estudantes de uma sala tem que ser igual a altura de algum deles; o número médio de moradores por residência de uma cidade tem que ser um número natural. A falta de situações que permitam que ponham esses tipos de invariantes, matematicamente inválidos, em cheque, levam o estudante a sedimentar tais conhecimentos como válidos. Além disso, é importante que a média possa ser lida e interpretada pelo estudante a partir de diferentes representações do conceito.

A partir do olhar dessas dimensões que apresentam dificuldades para o entendimento do conceito de média, decidimos tomar a Teoria dos Campos Conceituais (Vergnaud, 1991) como base para analisar as atividades sobre média aritmética em livros didáticos de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental.

Vergnaud (1991, p.157) considera a formação de um conceito a partir do tripé de três conjuntos, a saber: *S = conjunto das situações que dão sentido ao conceito; I = conjunto dos invariantes sobre os quais repousa a operacionalidade (objetos, propriedades e relações) do conceito ou o conjunto de invariantes que podem ser reconhecidos e usados pelos sujeitos para analisar e dominar as situações do primeiro conjunto e R = conjunto de representações simbólicas que podem ser usadas para indicar e representar esses invariantes e, consequentemente, representar as situações e os procedimentos para lidar com elas.*

Vergnaud chama de esquema a organização invariante do comportamento para uma determinada classe de situações (Vergnaud, 1991, p. 157). Segundo ele, é nos esquemas que se devem pesquisar os conhecimentos-em-ação do sujeito, isto é, os elementos cognitivos que fazem com que a ação do sujeito seja operatória. "Não é o comportamento que é invariante, mas a organização do comportamento" (Vergnaud, 1998, p. 172). Como componentes dos esquemas, os invariantes podem ser implícitos, quando estão ligados aos esquemas de ação do aluno, ou explícitos, quando estão ligados a uma concepção. Nesta pesquisa, ao investigar os invariantes do conceito, estaremos nos referindo aos invariantes explícitos.

Marco Teórico

Apresentamos aqui, algumas pesquisas que contribuíram com o nosso estudo. Iniciamos com os estudos de Straus e Bichler (1988) em que investiga o conceito de média com estudantes entre 8 e 12 anos a partir de sete propriedades que listamos abaixo:

P1. A média está localizada entre os valores extremos

P2. A soma dos desvios a partir da média é igual a zero

P3. A média é influenciada por cada um e por todos os valores

P4. A média não precisa, necessariamente, coincidir com um dos valores a partir do qual foi calculada

P5. A média pode ser um valor que não pode corresponder a um dado dentre o conjunto de dados reais

P6. No cálculo da média, devem ser incluídos os valores nulos e os negativos

P7. A média é um valor representativo dos dados, ou seja, é o valor que está mais próximo de todos (aspecto espacial)

Strauss e Bichler (1988) para cada propriedade utilizaram diversas tarefas variando o tipo de dados e o meio de apresentação. Seus resultados demonstram diferentes dificuldades na compreensão das propriedades, no entanto, são nas propriedades P2 , P6 e P7 que os estudantes pesquisados apresentaram maiores dificuldades. Essas propriedades foram base em nossa análise.

Batanero (2000) pontua quatro significados do conceito de média que devem ser ensinados desde o Ensino Básico, a saber:

S1 - a média como uma estimativa de uma quantidade desconhecida, em presença de erros de medida;

S2 - a média como uma quantidade equitativa a repartir, para conseguir uma distribuição uniforme;

S3 - a média como elemento representativo de um conjunto de valores dados;

S4 - a média como necessidade de conhecer o valor que se irá obter com maior probabilidade, ao contar com um dado faltando em uma distribuição.

Em nosso estudo pontuamos também o estudo de Melo (2010) que discorre sobre propriedades, significados e representações da média com professores e estudantes do Ensino Básico brasileiro (crianças de 7 e 9 anos). Pesquisas que têm como objeto o estudo da média nos livros didáticos também foram discutidas tais como as de Anjos e Gitirana (2008) e Cobo e Batanero (2004), esse último que investiga a média nos livros didáticos no contexto espanhol. No Ensino Médio e Superior fizemos referência à pesquisa realizada por Cazorla (2003) com estudantes universitários, em seguida, Mayén et al (2007) com investigação no ensino secundário mexicano, e por fim Garret e Cruz (2008) com estudantes de dois níveis de ensino em Angola. Os estudos discutem, por um lado, a importância da compreensão da função estatística da média aritmética pelos estudantes, e, por outro, as fragilidades e lacunas no ensino-aprendizagem deste conceito. Os referidos estudos têm contribuição significativa para o nosso trabalho por apresentar resultados de pesquisas que corroboram os nossos resultados.

No Brasil, a avaliação dos livros didáticos já tem tradição, com o Programa Nacional do Livro Didático – PNLD. Programa este destinado a adquirir e distribuir livros didáticos para todos os estudantes de Escolas Públicas do Brasil. Assim, decidiu-se analisar todos os livros didáticos de Matemática aprovados no PNLD 2011, destinados aos anos finais do Ensino Fundamental que já passaram por uma primeira avaliação qualitativa dos livros que é dada por este programa nacional. Neste sentido, a pesquisa teve como objetivo responder "Como se dá a abordagem da média aritmética, ancorada na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1991), nas coleções de livros didáticos de matemática dos anos finais aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático – PNLD 2011?"

Escolhas Metodológicas

Decidiu-se por uma estatística censitária, na qual todos os quatro volumes pertencentes a todas as coleções aprovadas no âmbito do PNLD 2011 foram analisados, perfazendo um total de 40 volumes de 10 coleções de livros didáticos de Matemática, cada uma com 4 volumes. Um total de 454 atividades foram identificadas, dentro e fora dos capítulos e/ou secções destinados ao Tratamento da Informação.

Todas as atividades foram categorizadas, segundo propriedades, significados e representações. Para análise das atividades tomamos os estudos de Strauss e Bichler (1988) que apresentam sete propriedades do conceito de média aritmética. Em relação aos significados, trabalhamos com as situações pontuadas por Batanero (2000), além de outras situações construídas por nós no contato com as atividades, tais como a média de uma amostra como uma boa estimativa para a média de uma população e a média como uma estimativa da variável para tempo futuro. No que concerne ao levantamento das representações utilizadas nas atividades, as categorias de análise foram construídas mediante o contato com as atividades, a saber: linguagem materna, representação tabular, representação gráfica.

A partir de tal categorização, uma análise estatística foi realizada.

Discussão dos Resultados

Uma análise da quantidade de atividades que exploram cada propriedade por coleção é apresentada no Boxplot da figura 1. Dentre as 454 atividades analisadas, observa-se nas obras uma maior exploração de duas propriedades

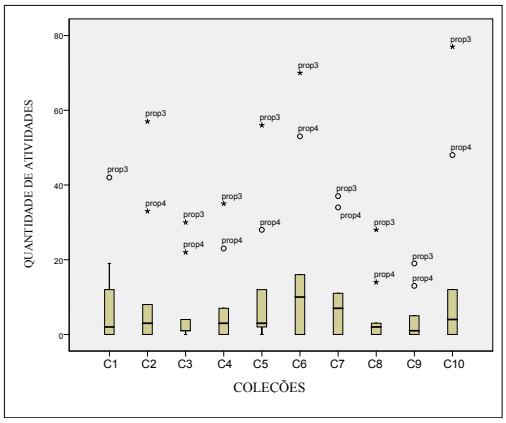


Figura 1: Distribuição das propriedades por coleção

A média de atividades na coleção por propriedade é bastante baixa. No entanto, as propriedades 3 e 4 aparecem em nove das dez coleções como outlines. No caso da propriedade 3 - *a média é influenciada por cada um e por todos os valores* o quantitativo é bem superior às outras propriedades. No entanto, ao se investigar tais atividades encontra-se que o foco é no cálculo da média. A grande maioria das atividades (63%) não promove reflexão de qualquer das propriedades como mostra o gráfico da figura 2 abaixo. Percebeu-se que menos de 1% das atividades promovem uma reflexão mobilizando três propriedades.

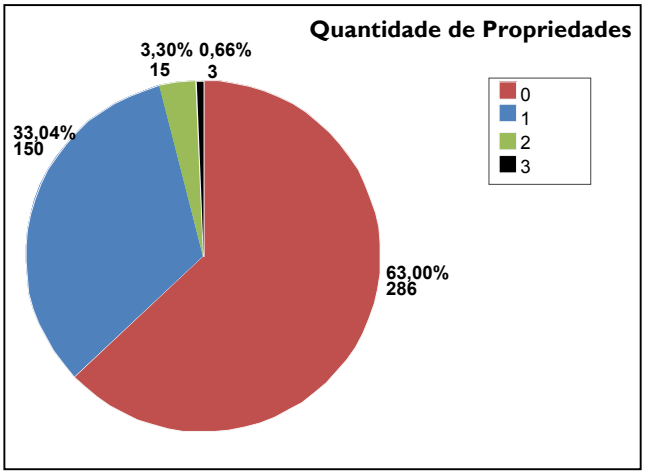


Figura 2: Porcentagem e total de atividades por quantidade de propriedades exploradas com reflexão

Fica explicita a necessidade de uma abordagem que explore mais as outras propriedades tais como as que discorrem que *a média está localizada entre os valores extremos; a média pode ser um valor que não pode corresponder a um dado dentre o conjunto de dados reais; o de que no cálculo da média devem ser incluídos os valores nulos* e *os negativos* e a propriedade da representatividade da média *como o valor que está mais próximo de todos.* A propriedade *a soma dos desvios a partir da média é igual a zero* não é explorada em nenhuma das atividades, entretanto o mesmo poder ser desenvolvido juntamente com o conceito de desvio padrão no Ensino Médio.

Com relação aos significados observou-se que o significado mais explorado é o significado da média como um elemento representativo de um grupo (86,8%). Os outros são explorados num percentual muito baixo e ainda há uma lacuna na abordagem de alguns significados: *a média como um valor mais provável quando aleatoriamente tomamos um elemento de uma população* e *a média de uma amostra como uma boa estimativa para a média de uma população.* As atividades apenas de cunho procedimental, utilizando apenas o cálculo numérico em si, não devem ser enfatizadas, uma vez que conforme literatura pesquisada, os alunos podem até dominar o procedimento do algoritmo do resultado da média, no entanto a dimensão estatística do conceito não é dominada por eles. Logo, o trabalho com as situações que conferem significados ao conceito de média deve perpassar por situações que sejam análogas ao surgimento da média como conceito até as situações mais atuais.

Em relação ao último elemento do tripé da Teoria dos Campos Conceituais temos as representações. A representação mais utilizada no geral foi a da linguagem materna (56%), seguida da representação tabular (30%) e da representação gráfica (14%). Asseveramos, a partir dos dados encontrados, que os livros didáticos devem desenvolver um trabalho mais urdido com as representações nas atividades de média, principalmente no tocante às gráficas e tabulares, mais

entrelaçado com os diversos significados e invariantes da média. Os alunos, por exemplo, podem ser colocados diante de situações onde necessitem localizar dados em gráficos, calcularem a média e interpretar as informações advindas destas representações.

No estudo também lançamos um olhar com relação aos contextos apresentados nas atividades. Estes foram categorizados conforme contato com as atividades nos livros pesquisados. Apesar de termos mais de 90% das atividades contextualizadas, o que podemos considerar como um avanço ao olhar as coleções como um todo, mas na observação dos contextos, os mesmos não são diversificados. Concentram-se nos contextos escolares, preços/comércio, velocidade média e contextos esportivos. A maior frequência está expressa nos contextos escolares. A diversidade dos contextos nas atividades possibilitará aos alunos o contato com tipos distintos de problemas de média e a apropriação de diferentes significados.

Mapeamos também o tipo de dado das atividades, classificados em discreto, contínuo e sem contexto. Encontramos que o que tem maior frequência é o do tipo *contínuo.* Este tipo aparece nas atividades independentes dos significados. Alguns invariantes utilizam especificamente o dado do tipo *discreto* como é o caso em que *a média pode ser um valor que não pode corresponder a um dado dentre o conjunto de dados reais.* Este caso se deve a necessidade de enfatizar o aspecto no qual o invariante procura desenvolver.

Considerações Finais

Diante de todos os dados encontrados, constatamos que a abordagem da média aritmética nos livros didáticos dos anos finais aprovados pelo PNLD 2011 apresenta avanços, mas também limitações. Avança quando todas as coleções abordam de alguma forma a média aritmética. A localização destas atividades também tem um caráter positivo em boa parte dos livros como pudemos constatar, não aparecendo, por exemplo, apenas no último capítulo do livro. E como já mencionado, é positivo o aumento na abordagem por ano e o não aparecimento de coleções que não tratem a média em nenhum dos volumes.

No que tange aos conjuntos dos invariantes, significados e representações, os livros apresentam limitações na exploração dos elementos destes conjuntos. Logo, o campo conceitual da média nos livros didáticos é visto sem propiciar uma compreensão da média visando o seu caráter como uma medida estatística, ou seja, há poucas atividades na composição da abordagem das coleções que propiciem a compreensão por parte do aluno da função estatística da média aritmética. Aventamos que se a partir dos livros didáticos, professores e alunos, entram em contato com o campo conceitual da média, iremos avançar no ensino e aprendizagem deste conceito.

Referências bibliográficas

Anjos, D. e Gitirana, V. (2008). Exploração do conceito de média em livros didáticos das séries finais do Ensino Fundamental. *Anais do 2º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática-SIPEMAT*, pp.1-9.

Batanero, C. (2000). *Siginficado y comprensión de las medidas de posición cetral*. Departamento de Didáctica de La Matemática, Universidade de Granada. UNO, 2000, pp. 41-58. Acessado em 07 de dezembro de 2009 em http://www.ugr.es/~batanero.

Cazorla, I. M. (2003) Média aritmética: um conceito prosaico e complexo. *Anais do IX Seminário IASE de Estatística Aplicada*, Rio de Janeiro, pp 1-14.

Cobo, B e Batanero, C. (2004) Significado de La média em los libros de texto de secundaria. *Ensenanza de las Ciências,* 22(1), pp 5-18.

Garret, A.J e Cruz, J.A.G. (2008). Algunos resultados sobre promedios con estudiantes de Luanda Y Tenerife. *Actas de las XII Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas*. Albacete, pp. 683-690. Acessado em 20 de dezembro de 2009 em http://webpages.ull.es/users/jagcruz/.

Mayén, S., Cobo, B., Batanero, C. e Balderas, P. (2007). Compreensão das medidas de posição central em estudantes mexicanos. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática,* 9(1), pp.187-201.

Melo, M. C. M. (2010). *Fazendo média: compreensões de alunos e professores dos anos inicias do Ensino Fundamental.* Dissertação de mestrado não publicada, Universidade Federal de Pernambuco. Recife, Brasil.

Eugênio, R. S. (2013). *Exploração sobre média no software tinkerplots 2.0 por estudantes do ensino fundamental.* Dissertação de mestrado não publicada, Universidade Federal de Pernambuco. Recife. Brasil.

Strauss, S. e Bichler, E. (1998) The development of children`s concepts of the arithmetic average. *Journal for Research in Mathematics Education,* 19(1), 64-80.

Vergnaud, G. (1991). A teoria dos campos conceituais. *Recherches em didactique dês mathématiques,* 10(23), 133-170. In: Didáctica das Matemáticas. Direcção de Jean Brun. Horizontes Pedagógicos.

Vergnaud, G. (1998). A comprehensive theory of representation for mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 167-181.

CONSTRUCCIONES MENTALES PARA EL OBJETO RECTA DE EULER

Violeta Chávez Aninat y Marcela Parraguez González
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile
va.chavezem@gmail.com, marcela.parraguez@ucv.cl

Resumen. En esta investigación se presenta un estudio en torno a la *Recta de Euler*, lugar geométrico que se construye en un triángulo y que contiene a tres elementos notables de él: Baricentro, Circuncentro y Ortocentro.
Con base en la teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas), marco teórico de carácter cognitivo enmarcado en el ámbito de la Didáctica de la Matemática, se realiza un estudio en profundidad de la construcción cognitiva de los conceptos geométricos involucrados en el aprendizaje (re-construcción) de la recta de Euler. Para llevar a cabo esta investigación se han propuestos los siguientes objetivos: (1) Mostrar evidencias empíricas de los aprendizajes relacionados con las rectas y puntos notables de un triángulo a nivel escolar y universitario, (2) Documentar las construcciones mentales que pueden explicitar estudiantes de pedagogía y/o licenciatura en matemática al trabajar los puntos y rectas notables para la construcción de la recta de Euler y (3) Proponer actividades para desarrollar la construcción de la Recta de Euler y la demostración del teorema asociado a este objeto geométrico en enseñanza media.
Palabras clave: triángulo, recta de Euler, teoría APOE
Abstract. This research presents a study about the Euler line, geometric place which is built in a triangle containing three notable items of it: Centroid, Circumcenter and Orthocenter.
Based on APOS theory (Actions, Processes, Objects and Schemes), a cognitive framework framed in the field of mathematics education, a deep study of the cognitive construction of geometric concepts involved in learning (re-construction) of the Euler line. To carry out this research the following objectives have been proposed: (1) to show empirical evidence of learning related to the lines and special points of a triangle at high school and university level, (2) to document the mental constructs that pedagogy students and/or undergraduate students may explain when working with points and notable lines for the construction of the Euler line, and (3) to propose activities to develop the construction of the Euler line and the proof of the theorem associated to this geometric object of high school.
Key words: triangle, Euler line, APOS theory

Introducción

La investigación aquí expuesta desarrolla su estudio en geometría, específicamente en elementos del triángulo –y sus propiedades– que permiten construir la Recta de Euler, y tener de ésta una concepción de objeto matemático. Este trabajo se realiza desde la mirada de la Teoría APOE (Dubinsky, 1991), marco teórico de carácter cognitivo, que exige documentar las estructuras y mecanismos mentales que son requeridas para esta construcción.

Los antecedentes indican que los conceptos de Altura, Bisectriz, Transversal de Gravedad y Simetral de un triángulo, no son fácilmente distinguidos por los estudiantes, los confunden, los olvidan y carecen para ellos de un significado relevante. En la Figura 1, se muestra como un estudiante de primer año de pedagogía en matemática confunde el concepto transversal de gravedad con el de bisectriz, y en la Figura 2, como otro estudiante etiqueta como transversal de gravedad al elemento simetral.

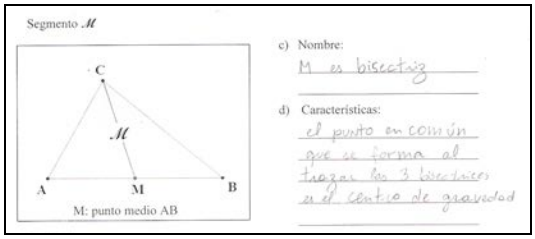


Figura 1: Respuesta 1.2 del cuestionario exploratorio del Estudiante 2.

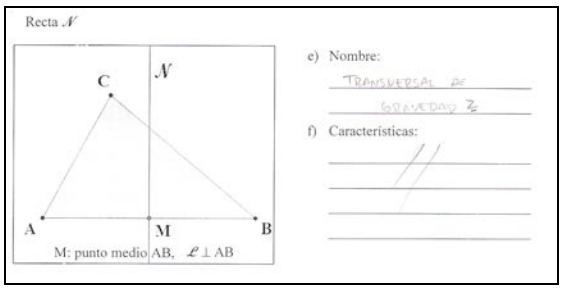


Figura 2: Respuesta 1.3 del cuestionario exploratorio del Estudiante 5.

En el programa de 7° Básico, que se utiliza desde el año 2011 a la fecha, se expone que la unidad de geometría en este nivel ofrece a los estudiantes la posibilidad de "resolver desafíos que estimulen el pensamiento y la imaginación, a través de las construcciones geométricas con regla y compás o un procesador geométrico, y la posibilidad de desarrollar la deducción, base de estas construcciones" (MINEDUC, 2011. p. 49), pero las actividades propuestas no conllevan a desafíos, no propician análisis, ni dan relevancia a los axiomas y propiedades que permiten el desarrollo de las construcciones propuestas. Esto se puede apreciar en las actividades sugeridas en el programa, expuestas en la Figura 3, donde se establece que es el docente quien "*da*" las propiedades al estudiante, y el estudiante solo debe verificar esas propiedades utilizando instrumentos geométricos.

El docente da a los alumnos las propiedades de las transversales de gravedad de triángulos y les pide, que utilizando regla y compás las verifiquen. Por ejemplo, les dice que las bisectrices de un triángulo se cortan en la razón 2 es a 1. Los estudiantes verifican esa propiedad, usando regla y compás.

Figura 3: Extracto de los "Ejemplos de actividades" propuestos en el Programa de Estudio: Matemática Séptimo año Básico, (MINEDUC, 2011. p. 53).

El estudio de las rectas y puntos notables de triángulos se desarrolla con poca profundidad, trivializando aspectos geométricos que son base para desarrollar una geometría axiomática.

El currículum chileno –Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Básica y Media, actualización 2009– no establece actividades donde se profundice el estudio de las rectas y puntos notables, por lo que el aprendizaje de estos elementos queda estancado en enseñanza básica.

La demostración de que: "El Circuncentro, el Baricentro y el Ortocentro de un triángulo son colineales, y la distancia del Baricentro al Ortocentro es igual a dos veces la distancia del Baricentro al Circuncentro" (Duran, 2005), puede ser desarrollada en el ámbito de la geometría Euclidiana y también con geometría analítica, tal cual lo hiciera Leonhard Euler en 1767, tanto en educación superior como a nivel escolar, si se proporcionarán las herramientas adecuadas.

Citando a J. Bruner, Moisés Guilar indica que "un currículo se basa en pasos sucesivos por un mismo dominio de conocimiento y tiene el objetivo de promover el aprendizaje de la estructura subyacente de forma cada vez más poderosa y razonada; este concepto se ha dado en llamar currículo en espiral" (Guillar, 2009, p. 237).

Basándonos en esta idea de curriculum en espiral, es que enfatizamos el hecho de que un contenido puede ser conocido por un estudiante, al aprenderlo en un nivel específico, pero para su comprensión profunda lo ideal sería que hubiese otras instancias donde el contenido sea retomado y profundizado.

Hipótesis de investigación

Construir cognitivamente la Recta de Euler, durante la enseñanza media, propiciará un aprendizaje más profundos de los puntos y rectas notables de un triángulo, pues este concepto involucra un proceso analítico–deductivo, que al ser alcanzado implica haber interiorizado las nociones de circuncentro, baricentro y ortocentro, y por ende las de simetrales, tranversales de gravedad y alturas de un triángulo.

Marco teórico

La investigación se trabaja a la luz de un Marco Teórico (MT) de carácter cognitivo, pues este tipo de marco centra su mirada es el estudio de los procesos de aprendizajes intelectuales y matemáticos que realiza un estudiante, lo que sin duda corresponde al interés del estudio aquí expuesto. Específicamente se trabaja con la Teoría APOE, creada por Ed Dubinsky en 1991, basada en la epistemología genética de Piaget. Este MT propone un modelo que permite de manera viable, presentar de forma explícita las construcciones mentales que los estudiantes requieren, para que un determinado concepto sea comprendido y encapsulado en un objeto.

Desde el punto de vista de la teoría APOE, la construcción del conocimiento matemático pasa por tres etapas básicas: Acción, Proceso y Objeto. Al tener una concepción de Acción, el estudiante trabaja el Objeto como algo que no le es propio, pero que debe desarrollarse y puede hacerse con la ayuda de instrucciones externas definidas de forma clara, el Objeto aun no toma sentido para quien lo intenta usar. Cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre

ella, puede interiorizarse en un proceso (Dubinsky, 1996), en esta etapa la manipulación del concepto va de la mano con un razonamiento, y es llevada a cabo de forma autónoma. Cuando un estudiante reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un determinado Proceso y piensa en el Proceso como un todo relacionado, entonces ha encapsulado tal Proceso como un Objeto cognitivo. No obstante, "en el curso de una acción o un proceso sobre un objeto, suele ser necesario desencapsular y regresar el objeto al proceso del cual se obtuvo, con el fin de usar sus propiedades al manipularlo" (Dubisnky, 1991, p. 97). Se debe señalar que estas etapas no necesariamente son secuenciales, se puede tener concepción de Acción para ciertos aspectos de un determinado concepto, y tener una concepción proceso e incluso objeto para otras, lo esencial es que el estudiante evolucione de un estado de construcción de menor conocimiento a otro mayor, por medio de la abstracción reflexiva. La teoría APOE permite dar aportes al desarrollo curricular en el área matemática, por la forma en que se complementan sus tres componentes: análisis teórico, tratamiento instruccional y datos empíricos (Mena, 2011).

Desde la mirada de APOE se plantea la siguiente pregunta que guía la investigación: ¿Qué construcciones y mecanismos mentales se requieren desarrollar para la construcción de la Recta de Euler, como objeto?

Para dar respuesta a esta pregunta de investigación se proponen los siguientes objetivos:

1. Mostrar evidencias empíricas de los aprendizajes relacionados con las rectas y puntos notables de un triángulo a nivel escolar y universitario.
2. Documentar las construcciones mentales que pueden explicitar estudiantes de pedagogía y/o licenciatura en matemática al trabajar los puntos y rectas notables para la construcción de la recta de Euler.
3. Proponer actividades para desarrollar la construcción de la Recta de Euler y la demostración del teorema asociado a este objeto geométrico en enseñanza media.

Metodología de investigación

La teoría APOE tiene incorporado un ciclo de investigación que ha sido validado e implementado por el grupo RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community). Este ciclo consta de 3 etapas: (1) Análisis teórico del concepto o Descomposición Genética (DG), (2) Diseño y aplicación de cuestionarios y entrevistas, y (3) Análisis y verificación de datos.

Basándonos en el ciclo de investigación que propone esta teoría (Asiala, Brown, Devries, Dubinsky, Mathews, Thomas, 1996), hemos realizado un análisis teórico plasmado en una DG, (Figura 4) que consiste en la explicitación de las estructuras y mecanismos mentales asociadas a la

(re)construcción de esta recta, que debe mostrar un estudiante universitario para llegar al corazón de este objeto matemático –sus elementos y propiedades– y así poder desarrollar la demostración del teorema asociado a ella.

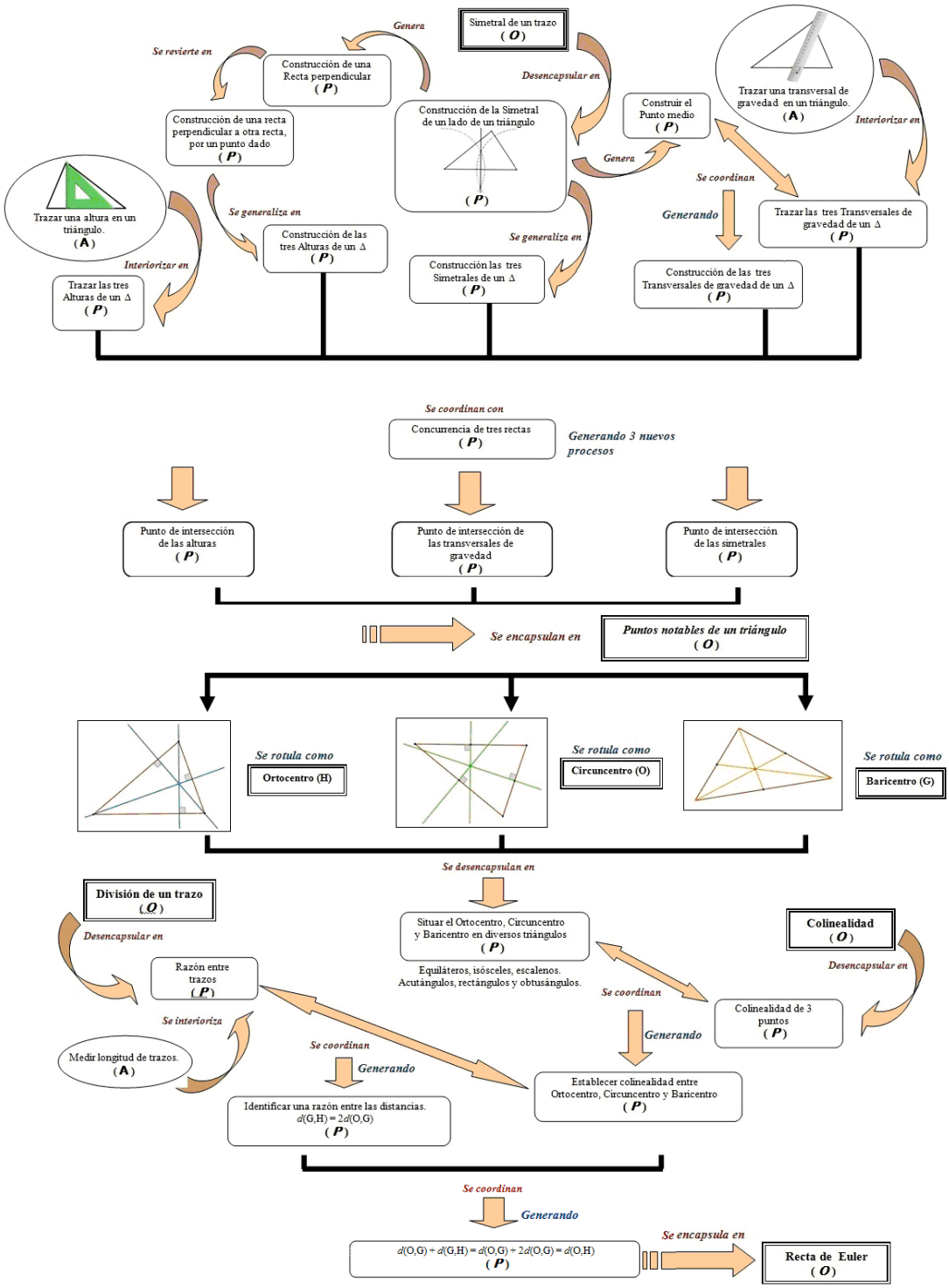


Figura 4: Modelo de aproximación al Objeto Recta de Euler.

Para documentar la DG propuesta, se diseña un cuestionario que da cuenta del trabajo realizado por los informantes al enfrentarse a diversas actividades y preguntas relacionadas con el contenido "elementos lineales del triángulo", el cual dejará en evidencia el cómo éstos individuos han construido la noción de puntos notables, cuáles de sus elementos dominan y qué camino utilizan al momento de desarrollar la construcción cognitiva del concepto Recta De Euler.

A modo de ejemplo se presentan una tarea del cuestionario, su descripción en base a la DG y se explicitan las concepciones de las que da cuenta un estudiante con su desarrollo y explicación

Parte 2.1 (del cuestionario)

En un triángulo *ABC*, se genera un punto P_1 al interceptar las simetrales s_a y s_b, y un punto P_2 al interceptar las simetrales s_b y s_c. ¿Es posible afirmar que estos dos puntos son distintos? Justifica tu respuesta.

Dado que nuestra finalidad es documentar la Descomposición Genética Teórica que se ha diseñado, y dar indicios de que el camino de construcción propuesto en ella es viable, basta que nos concentremos en la evidencia entregada por un grupo particular de informantes, que llamaremos caso, para una indagación en profundidad, ya que según Stake, "El estudio de casos es el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes" (Stake, 1998, p. 11).

A continuación se hace referencia al Caso1: Estudiantes titulados de la carrera de licenciatura en matemática, destacados en los ramos de geometría.

La Figura 5 evidencia cómo el estudiantes 1 muestra tener una concepción objeto de los puntos *O*, *G* y *H*, los estudiantes 1 y 3 sitúan el Circuncentro, Baricentro y Ortocentro en el triángulo construyendo solo 2 Simetrales, Transversales de Gravedad y Alturas, respectivamente, lo que da cuenta que de dicho proceso ha sido encapsulado.

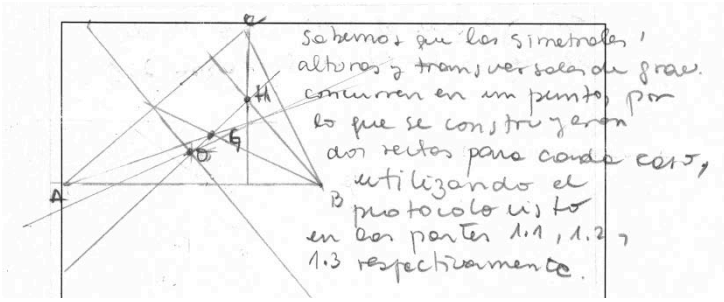


Figura 5: Respuesta estudiante 1, Actividad 3 del cuestionario que documenta la DG.

Las evidencias recolectadas permiten dejar de manifiesto elementos que no habían sido considerando al inicio de la investigación, como el caso del la inexistencia de una única recta que

cumpla con las condiciones definidas por Euler en un triángulo equilátero, lo que se analizó debido a la respuesta del estudiante 1 (Figura 6), quien afirma que la razón entre trazos no sería valida en el triángulo equilátero, sin considerar el hecho de que 3 puntos coincidentes mantienen la relación pues la distancia entre ellos es cero.

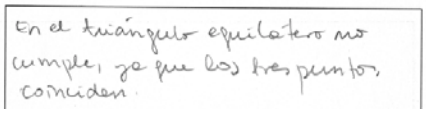

En el triángulo equilátero no cumple, ya que los tres puntos coinciden.

Figura 6: Respuesta estudiante 1, Actividad 3.2 b)

Algunas actividades propuestas

En 8° básico: Construcción de simetrales, alturas, bisectrices y transversales de gravedad con regla y compás. Caracterizar las rectas notables de un triángulo. Resolver situaciones que involucren los conceptos de rectas notables.

En 1° Medio: Determinar la concurrencia de las rectas notables. Argumentar sobre la concurrencia de las tres simetrales y las tres bisectrices con la noción de lugar geométrico. Caracterizar los puntos notables de un triángulo. Resolver situaciones que involucren los conceptos de puntos notables.

En 2° Medio: Situar los 4 puntos notables en diversos triángulos. Determinar la colinealidad del ortocentro, baricentro y circuncentro. Argumentar sobre la colinealidad de tres puntos notables. Establecer una relación métrica entre las distancias del circuncentro al baricentro y de baricentro al ortocentro. Caracterizar la Recta de Euler.

Conclusiones

El análisis teórico documentado en la DG, arrojó varios elementos que se estiman necesarios, para comprender e interiorizar los conceptos geométricos: Altura, Simetral, Transversal de gravedad, Circuncentro, Baricentro, Ortocentro y Recta de Euler. Los resultados de esta investigación dan cuenta de la viabilidad de la ruta propuesta, es decir, un estudiante que ha construido la recta de Euler por medio de las construcciones y mecanismos mentales expuesto, ha incorporado a sus conocimientos las nociones de puntos y rectas notables.

Una actividad que permita deducir la existencia de una recta que pase por el circuncentro, baricentro y ortocentro de un triángulo cualquiera, permite el desarrollo de una geometría, que se bien se desliga de lo concreto, involucra una riqueza conceptual, analítica y procedimental, que hasta la fecha ha siendo ignorada en las actividades propuestas en textos escolares. La ruta expuesta permite proponer actividades que llevan a la construcción cognitiva del Objeto de estudio en enseñanza media, pues todos sus componente teóricos están enmarcados dentro de

los CMO propuestos por el MINEDUC (2009), por lo que podemos concluir que efectivamente la teoría APOE proporciona las herramientas necesarias para dar una mirada al curriculum y replantear algunas de sus componentes.

Referencias bibliográficas

Asiala, M., Brown, A., Devries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. In J. Kaput, Schoenfeld, Dubinsky (Eds.) *Research in Collegiate Mathematics Education,* .2. Providence, RI: American Mathematical Society, 1-32.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking, in (D. Tall, ed.) *Advanced Mathematical Thinking*, Dordrecht: Kluwer, 95-126.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*, 8(3), 25 – 41.

Duran, D. (2005). El Círculo de los Nueve Puntos y la Recta de Euler. *Divulgaciones Matemáticas*, *13*(1), 73-76.

Guillar, M. (2009). *Las ideas de Bruner: "de la revolución cognitiva" a la "revolución cultural"*. Educere, *13*(44), 235-241.

Mena, A. (2011). *Estudio epistemológico del teorema del isomorfismo de grupos*. Tesis para obtener el grado de Doctorado en Matemática Educativa (no publicada), Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. México.

MINEDUC. (2009). *Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Básica y Media, actualización 2009*. Santiago, Chile.

MINEDUC. (2011). *Matemática Programa de Estudio Séptimo Año Básico*. Santiago, Chile.

Stake, R. (1998). *Investigación com estúdio de casos.* Madrid: Morata.

USO DE LA LSM EN EL AULA DE SORDOS Y COMPRENSIÓN DEL SISTEMA MÉTRICO DECIMAL. EDADES [17-22]

Ignacio Garnica y Dovala, Mónica G. Astorga Adrián y Andrea Barojas Gómez
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN. México
igarnica@cinvestav.mx, mastorga@cinvestav.mx, abarojas@cinvestav.mx

Resumen. Se presentan resultados de la fase de Experienciación de la investigación en curso que orientó sus preguntas a identificar niveles de competencia lingüística de la Lengua de Señas Mexicana (LSM) en relación con la comprensión y uso del Sistema Métrico Decimal (SMD). La investigación articula tres aspectos: enseñanza, indagación e investigación en tiempo real de enseñanza en aula de educación básica de ocho jóvenes Sordos (17-22) en una ONG bajo la figura de acuerdo académico con el DME del Cinvestav.

Palabras clave: lengua de señas mexicana (LSM), sistema métrico decimal (SMD)

Abstract. The paper presents a report of the inquiry stage results of research of the phase of Experienciación in progress that guide its questions to identify levels of linguistic competence in the Mexican Signs Language (LSM) in relation to the understanding and use of the Decimal Metric System (DMS). The researcher works with three aspects in different moments: learning, inquiry and research on conditions of the basic education process of nine young deaf (17-22) in an ONG under the figure of academic agreement with DME, Cinvestav.

Key words: mexican signs language (LSM), decimal metric system (DMS)

Introducción

La presente investigación de tipo cualitativo y en curso se desarrolla en tres fases: Indagatoria, Experienciación y Consolidación. Se reportan resultados de la fase de Experienciación que orientó sus preguntas a identificar niveles de competencia lingüística de la Lengua de Señas Mexicana (LSM) en relación con la comprensión y uso del Sistema Métrico Decimal (SMD). La investigación articula tres aspectos: enseñanza, indagación e investigación en tiempo real de enseñanza en aula de educación básica de ocho jóvenes Sordos (17-22), usuarios de la LSM que cursan educación básica en una ONG. Se plantea la pregunta de investigación: ¿Cuáles son los alcances y limitaciones del Sordo usuario de la LSM en los procesos de comunicación y de comprensión de las nociones de cantidad de magnitud: longitud y masa? Y los objetivos: Identificar los niveles de competencia lingüística y comunicativa de la LSM en aula de Sordos e identificar las nociones adquiridas resultado del proceso de enseñanza en el aula de Sordos.

Antecedentes

El trabajo sistemático llevado a cabo desde el año 2009 en el Departamento de Matemática Educativa (DME) del Cinvestav con una Comunidad de jóvenes Sordos, permitió la evaluación inicial de la competencia lingüística y comunicativa en LSM, de la lengua escrita (LE) y del uso del vocabulario en Señas. Posteriormente en 2010, se establecieron las condiciones iniciales para trabajar nociones de aritmética, cantidades discretas y continuas, elementos básicos de estadística descriptiva y del conocimiento espacial. En el 2011, se observó la adquisición de las nociones por

medio del conteo de colecciones de cantidades discretas y el tránsito a las cantidades continuas mediante el uso de la LSM y la LE; los resultados obtenidos no cumplieron con los propósitos de adquisición de las nociones matemáticas, debido entre otros factores, a la falta de conocimiento del español escrito y a la inconsistencia de las Señas respecto de las nociones. Por lo anterior, en el 2012 se centró el interés en la identificación de las Señas que caracterizan a las nociones de cantidad de magnitud de longitud y de masa en un contexto lingüístico competente y de comunicación mediada por el uso exclusivo de la LSM y la comprensión del SMD.

Referentes teóricos

Siguiendo los lineamientos de la investigación respecto a la identificación de la naturaleza de la LSM en su sentido de uso en situación de adquisición de noción de cantidad de magnitud: geométrica, longitud; mecánica, masa (Garnica, Astorga y Barojas, en prensa), el presente reporte pone el énfasis en identificar la relación entre la competencia lingüística y comunicativa de jóvenes usuarios de LSM y la comprensión y uso del SMD. Relativo a la gramática de la LSM "es indudable que el trabajo descriptivo de la LSM…nos permitirá comprender y dar una explicación sobre la morfología, así como de la sintaxis y las particularidades del discurso de esta lengua de señas" (Cruz, 2008, p. 263). La LSM y sus características gramaticales, fonológicas, morfológicas, semánticas y sintácticas permite diferenciarla de otras lenguas naturales y cumplir con la función comunicativa, lo anterior se estudia mediante un sistema de notación, transcripción, que implica "no sólo la descripción de la configuración de la mano, sino de todos los elementos lingüísticos que están presentes en la deixis espacial, o el uso de los rasgos no manuales etcétera" (Cruz, 2008, p. 94). Estos segmentos referidos corresponden a los rasgos fonológicos que describen la actividad de la mano durante la producción [matriz segmental (MS)]; a la descripción de la postura de la mano y su ubicación en el momento de la realización de la Seña [matriz articulatoria (MA)] y a los movimientos de la cara (expresiones faciales), la cabeza y el cuerpo [matriz de rasgos no manuales (RNM)]. En la elaboración de las transcripciones literales se utilizó la glosa "que son los símbolos que se utilizan por convención para transcribir las lenguas de signos a un sistema escrito y constituye uno de los mecanismos que comúnmente se utilizan en la transcripción de éstas" (Muñoz, 1999, p.34) y su interpretación al español para realizar el análisis fonológico y morfológico y así comprender el significado y realización de cada Seña expresadas en la sintaxis propia del español. Ante la condición de ausencia del lenguaje oral y del escrito, Mayberry, (1993) expone sobre la complejidad del desarrollo cognitivo del Sordo como un producto del intento para establecer comunicación con su entorno familiar, ambiente escolar en lo particular y social en lo general. No obstante que en esta fase la investigación no considera la expresión escrita, es importante subrayar que forma parte fundamental en la continuidad del proyecto. En cuanto a la

noción de magnitud es necesario considerar la presencia del sujeto y la relación entre la magnitud y una unidad de medición que posteriormente llevará a la posible construcción de las nociones de magnitud. La cantidad de una magnitud por lo tanto, corresponde a la medición, Sena (1979) lo expresa en los términos siguientes "medir cualquier magnitud significa hallar de manera experimental la relación entre la magnitud dada y la unidad de medición correspondiente. Esta relación es, evidentemente, la medida de la magnitud que nos interesa".

Método

Se formaron dos grupos cada uno de cuatro estudiantes, que desarrollaron las actividades de indagación y de investigación respectivas a los temas en foco: cantidad de magnitud de longitud y de masa. La realización de las actividades se llevó a cabo en sesiones de cuatro horas, una o dos veces cada quince días durante un semestre. Por otra parte, en sesiones de enseñanza, cuatro horas cada quince días, en el curso de dos semestres y ante el grupo de los ocho estudiantes se realizaron las actividades conducentes a la adquisición de las nociones en cuestión. Los contenidos de las actividades centraron la atención en la partición recursiva decimal de longitudes (objetos lineales) del metro al milímetro mediante el uso de trazos, y la correspondiente a la de masa (sustancias: arena, granos) del kilogramo al centigramo, con el uso de la balanza granataria. En las sesiones de indagación se indagó respecto al proceso de la comunicación entre pares para identificar los niveles de competencia lingüística ante el uso de la LSM relativa a la comprensión de las nociones adquiridas. En las de investigación se realizaron entrevistas, en su modalidad de usuarios de la LSM, a los ocho estudiantes. Se utilizaron como instrumentos: planes de las actividades de enseñanza e indagación, bitácoras, formatos de indagación e investigación, los diccionarios de LSM (Calvo, 2011; López & San Esteban, 2006; Miranda, 1987), las transcripciones en glosa y español (Cruz, 2008); el registro de información se realizó mediante la videograbación, fotografías, el uso del pizarrón, papel y lápiz. Para caracterizar los niveles de competencia lingüística y comunicativa en LSM y debido a que no existe un formato estandarizado de evaluación se decidió utilizar elementos y estructuras gramaticales propios de la LSM: léxico, fonológico y morfosintáctico. En el léxico se observaron las Señas en uso común en aula (UCA) de las nociones matemáticas (NM) en foco. En el fonológico se evaluó la configuración (Conf.) de la mano; dirección (Dir.); ubicación (Ub.); movimiento (Mov.); orientación (Or.); y expresión facial (Exp. Facial). En el morfosintáctico: los clasificadores (Cl.); la dactilología (Dac.) la gramática de la LSM (G. LSM). Para caracterizar las diferencias respecto a la adquisición de las nociones de cantidad de magnitud masa y longitud se propuso como condición identificar el nivel de competencia lingüística y comunicativa de los alumnos, resultaron tres niveles: Alto (A) un caso,

Medio (M) dos y Bajo (B) cinco casos. La tabla 1 muestra el instrumento para la identificación de niveles de competencia lingüística y comunicativa de tres casos.

Caso	Léxico		Fonológico					Morfosintáctico			
	UCA	NM	Conf.	Dir.	Ub.	Mov.	Or.	Cl.	Da.	G.LSM	Exp. facial
Is											
Mx											
Os											
Nota: Niveles: Alto			Medio			Bajo					

Tabla 1: Niveles de competencia lingüística y comunicativa

Desarrollo. Para promover las nociones de cantidad de magnitud longitud, se utilizó la acción sobre el objeto, la estimación de colecciones (unidades, decenas, centenas y docenas), el manejo de instrumentos de medición y de dibujo técnico mediante trazos; la partición decimal reiterada de longitudes: (del metro no graduado, a la determinación del decímetro,…al centímetro y milímetro) mediante la utilización la noción del Teorema de Thales y los elementos lingüísticos en LSM (Señas propuestas). El desarrollo de las actividades de enseñanza por medio del uso de la noción del Teorema de Thales permitió la partición de un segmento de recta dado en diez segmentos iguales: partir un metro en diez segmentos iguales promovió las Señas de metro y de decímetro; posteriormente la partición decimal de un decímetro permitió el surgimiento de la Seña del centímetro y la partición de éste permitió usar la Seña del milímetro. Se trabajó con expresiones decimales 0.1m (un decímetro), 0.01m (un centímetro) y 0.001m (un milímetro). Para la adquisición de las nociones de cantidad de magnitud masa, se aplicó la acción sobre el objeto, al realizar la partición decimal reiterada de diversos pesos del kilogramo al miligramo utilizando la percepción táctil y material concreto (sustancias: arena, granos) en bolsas opacas; las estimaciones de peso se corroboraron mediante instrumentos de medición específicos como las balanzas de un kilogramo, la granataria (para cantidades menores a un gramo) y el dinamómetro, para que el alumno pudiera comprender y hacer uso de nociones del sistema métrico decimal. La enseñanza, con explicaciones en LSM, se trabajó con cantidades enteras a partir de un kilo igual a 1000 gramos hasta un gramo y con expresión decimal desde 0.1 gramo hasta 0.001gramo; en este tramo cada partición que se presentaba permitió promover Señas referentes a los submúltiplos del gramo: decigramo, centigramo miligramo. La partición decimal de los miligramos se realizó sin precisión de balanza y con la expresión en LSM casi no ve, con la posibilidad de pensar en una comprensión amplia del SMD.

Resultados

Se reportan tres: 1) Señas y niveles de competencia lingüística y comunicativa; 2) nociones de partición recursiva decimal, y 3) representación numérica en LSM.

1. La Tabla 2, muestra los niveles de competencia de los ocho estudiantes al término de los procesos en el aula. Las Señas que se precisaron en las sesiones de enseñanza de cantidad de magnitud longitud fueron: longitud, línea, segmento de línea (m, dm, cm, mm), líneas paralelas, partición decimal, nivel de burbuja y plomada y las correspondientes a magnitud masa: balanza, dinamómetro, kilo, kilogramo, gramo, tonelada, partición decimal, decigramo, centigramo y miligramo; en la indagación e investigación, se realizó la transcripción fonológica de Señas en foco para caracterizar y diseñar estrategias en la adquisición de las nociones con base en su uso. En la Figura 1, se muestra las transcripciones de las Señas de metro y gramo.

	Cantidad de magnitud longitud				Cantidad de magnitud masa			
Casos	Is	Pe	El	Ev	Mx	Da	Di	Os
Niveles								
Nota: Niveles: Alto	Medio	Bajo						

Tabla 2: Niveles de competencia lingüística y comunicativa por caso.

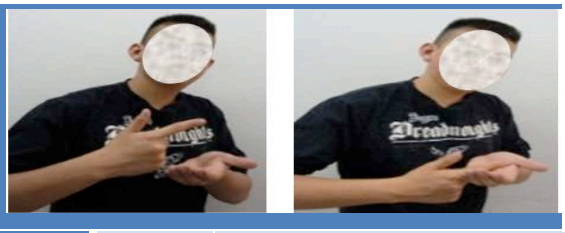
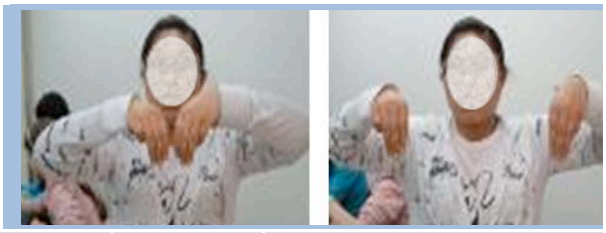
Gramo			metro		
					
MS	Seg.	D----------M----------D Lin	MS	Seg.	D----------M---------D Lin
MA	CM	1+/a+	MA	CM	123^/o-
	UB	PalmaDed Prox Cont Sup - NodD1		UB	Prox Enfr
	DI	RA		DI	Palma
	OR	Palma		OR	Neutral
	MD	Bimanual asimétrica		MD=MA	Bimanual simétrica
RNM	∅		RNM	∅	

Figura 1. Transcripción fonológica según Cruz (2008)..

2. Partición decimal reiterada. Respecto a la cantidad magnitud longitud. [Is] comprendió el proceso de recursividad con indicios de adquisición de las nociones de la partición decimal reiterada del metro y submúltiplos, así como de cantidades distintas mayores o menores a la unidad; propuso estrategias didácticas con sus pares y logró una comunicación eficiente en LSM. [Pe], [El] y [Ev] presentaron dificultades para la representación de la partición decimal de los submúltiplos, fue necesario la mediación de la acción sobre el objeto y la repetición de las actividades de estimación y uso de trazos (véase Figura 2). Respecto a la cantidad de magnitud masa, cada uno en de los cuatro estudiantes mostró la necesidad de actuar sobre los objetos, sustancias e instrumentos, aunada a la presencia de los campos de percepción (visual, táctil); manifestaron dificultades en los procesos de estimacion; se evidenció que la partición decimal reiterada de un empaque de sustancias permitió la adquisición de las nociones de los submúltiplos de la unidad gramo: decigramo, centigramo y miligramo (véase Figura 3).

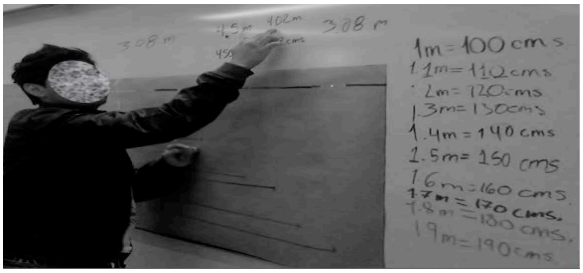


Figura 2: Estimación de la unidad de cantidad de magnitud longitud.

Las estimaciones iniciales eran imprecisas, las actividades de enseñanza se centraron en la acción sobre el objeto (hilo, varas y metro sin graduación). Respecto a la noción de partición decimal reiterada, se enfocó en la recursividad de la partición en diez segmentos iguales, por lo que se agregaron segmentos menores a la unidad (dm, cm, mm). Posteriormente se representaron numéricamente con punto decimal.

Figura 3: Partición reiterada decimal en cantidad de magnitud masa

Para la adquisición de la noción de partición decimal reiterada se realizaron particiones envasando sustancias concretas, desde el decigramo hasta el miligramo, con apoyo del instrumento de medición, balanza granataria y de la percepción visual y táctil; en el miligramo sin precisión de balanza y con la expresión en LSM de casi no se ve. Esto último aporta evidencias para considerar que el alumno le dio sentido a la noción en foco.

Comunicación entre pares

Casos de estudio para cantidad de magnitud longitud: [Is]-[El]. [Is] por su nivel de competencia (A) es modelo de comunicación y facilitador dentro de su Comunidad, aunque presentó un adecuado dominio de las Señas referentes, en ocasiones la comunicación fue imprecisa por similitud de las Señas o rapidez al signar, mientras que [El] presentó problemas en la comprensión de la partición del decímetro al milímetro debido a su bajo nivel de competencia (véase Tabla 3). La compresión y expresión de [Pe] está comprometida al uso de otros medios visuales y a

planteamientos básicos en LSM que limitan la representación de las nociones; [Ev] usó descripciones y clasificadores para expresar sus ideas y requiere la acción sobre el objeto para la adquisición de nociones.

Casos de estudio para cantidad de magnitud masa: [Mx]-[Os]. [Mx] es el modelo de comunicación en este diálogo, por su nivel de competencia (M). La comunicación fue deficiente derivada de la diferencia de niveles; [Mx] expresó sus ideas en LSM con influencia del Español Signado y se apoyó en los objetos y del pizarrón; [Os] no presenta orden gramatical de acuerdo a los estudios de la gramática de LSM, usa señas descriptivas de las acciones sobre objeto y uso de clasificadores, lo cual limita la compresión y la expresión de sus ideas. (véase Tabla 4)

.		
	Glosa	Español
6_Is	SEGMENTO/DECÍMETRO SOLO PODER PARTIR AHÍ CUÁNTO	¿Puedes partir un decímetro? ¿En cuánto?
El	DIEZ DIEZ	En diez
7_Is	SEGMENTO/DECÍMETRO DIEZ QUÉ	¿Diez qué?
El	GRAMO…NO (*niega: SNM*) DM (*error en la unidad*)	Gramos, no decímetros
8_Is	SEGMENTO/DECÍMETRO SEGMENTO/METRO JUNTAR CUÁNTO	¿Cuántos decímetros forman el metro?
El	CIEN CIEN	Cien
Nota: [Is] (Ego); [El] (Alter)		

Tabla 3: Comunicación entre pares

Casos	Glosa	Español
1_Mx	MIRAR ATENCIÓN A MI TU SABER TU ESE (señala la palabra: *nueve decigramos* escrita en el pizarrón) SIGNIFICAR DECIR A MI	Mira, préstame atención ¿tú sabes que significa nueve decigramos?
Os	NUEVE PUNTO CERO ESE	Eso es nueve punto cero
2_Mx	NO TU SABER DECIR A MI RESPONDER	No, tu sabes la respuesta
Os	NUEVE NUEVE GRAMO ESO	Eso es nueve gramos
Nota: [Mx] (Ego); [Os] (Alter)		

Tabla 4: Comunicación ente pares

3. Representación numérica en LSM. Cantidad de magnitud longitud: [Is], [Pe] mostraron acercamiento a la comprensión de la partición decimal de un metro, no obstante para el caso de 2m manifestaron confusión; [El] y [Ev] no adquirieron la noción de partición decimal reiterada. Respecto a la representación numérica, los cuatro presentaron confusiones en el sistema de representación decimal y el posicional, comprenden la representación de la unidad pero no la posición del punto decimal ante las cantidades referidas con submúltiplos del metro. Cantidad de

magnitud longitud masa: [Mx] comprendió el proceso de partición decimal reiterda a partir de un kilogramo hasta obtener el miligramo; presentó dificultades en referencias diferentes a un kilogramo (véase la Tabla 5). [Da] y [Di] solucionaron situaciones diferentes a un kilogramo hasta los miligramos; [Os] presentó confusiones en las nociones. En la representación numérica en LSM: [Mx] comprendió la unidad, gramo y los submúltiplos pero requiere más práctica para las equivalencias en las otras referencias diferentes a un kilo. Limitación de espacio impide la inclusión de tablas.

Sec	Español	Resultados
I_A	En una bolsa de 6 kilos ¿Se puede separar en montones iguales?	Partición recursiva decimal. Enfrentó una situación no esperada, pensando que la partición de esa cantidad es el mismo proceso de la partición decimal de 1 kilogramo. Señas. Usa la seña de partición decimal, como verbo. Para referirse a los montones, usa el clasificador para describir el concepto de conjunto de algún objeto/sustancia que permite dar sentido a la realización de partición decimal de cada unidad. Representación numérica en LSM. Signó el número seis de los kilos que debe partir en diez. Mil, como respuesta de esa partición reiterada decimal.
Mx	Espera. Es igual, igualdad No, no se puede. Voy a probar, espera No se puede porque mira ahí el peso es de 500 y 500 en este montón, los junto son 1000, con el segundo montón, los junto, son 2000, con el tercer montón, donde hay otros 1000, los junto son 3000, luego otros montones de 1000, los junto son 4000 y luego 5000 hasta ahí. No se puede con el 10.	
Nota: [A] investigadora (Ego); [Mx] estudiante (Alter)		

Tabla5: Entrevista individual.

Conclusiones

Hay indicios de comprensión de nociones sobre partición recursiva decimal y del sentido de la unidad de la medida: gramo y metro. Las transcripciones fonológicas de Señas, permiten avanzar hacia una posible caracterización de las mismas y diseñar estrategias de enseñanza para la adquisición de las nociones matemáticas. Es ineludible la adquisición de la lengua escrita para la comprensión y producción de textos matemáticos y en consecuencia para la simbolización de conceptos. La adquisición es objetivo de la continuidad de este proyecto.

Referencias bibliográficas

Calvo, M.T. (2004). *Diccionario español- lengua de señas mexicana (DIELSEME). Estudio introductorio al léxico de la LSM.* Recuperado el 26 de noviembre de 2011 de http://educacionespecial.sepdf.gob.mx/publicacionesdee.aspx

Cruz, M. (2008). *Gramática de la lengua de señas mexicana.* México: Colegio de México.

Garnica, I., Astorga, M. y Barojas, A. (2013). LSM en la adquisición de cantidad de magnitud: masa y longitud. Jóvenes [16-21] con audición diferenciada. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* 26, 705-713. México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C. y CLAME.

López, L.A y San Esteban, S. (2006). *Mis manos que hablan. Lengua de señas para sordos*. México: Trillas.

Mayberry, R. (1993). Cognitive development in deaf children: the interface of language and perception in neuropsychology. En S. J. Segalowitz & I. Rapin (Eds.), *Handbook of Neuropsychology*, 8, 71-107. Canadá: Elsevier Science B.V.

Miranda, J. C. (1987). *Lenguaje de Señas de México*. México: Asociación Mexicana de Sordos.

Muñoz, I. (1999). *¿Cómo se articula la lengua de signos española?* España: Confederación Nacional de Sordos de España.

Sena, L. A. (1979). *Unidades de las magnitudes físicas sus dimensiones*. URSS: Mir

ENSEÑANZA EXPERIMENTAL DEL SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL Y LA REPRESENTACIÓN COGNITIVA DEL NÚMERO

Susana Andrade Neyra y Marta Elena Valdemoros Álvarez
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN México
sandrade@cinvestav.mx, mvaldemo@cinvestav.mx

Resumen. Nos referimos a una investigación en curso en la que abordamos el sistema de numeración decimal, en particular el valor posicional, desde la perspectiva del aprendizaje y de la enseñanza. La primera fase de esta investigación se llevó a cabo con un grupo de estudiantes de primer grado de 6 años de edad, en una escuela primaria pública de Jalisco, México, antes de que recibieran instrucción en torno al valor posicional. En este artículo nos enfocamos a la representación mental del número que tienen los niños antes y después de una enseñanza experimental orientada a mejorar su comprensión del valor posicional.
Palabras clave: valor posicional, representación cognitiva del número
Abstract. We refer to a current research in which we approach the decimal numeration system, in particular place value, from the perspective of learning and teaching. The first phase of this research was conducted with a first grade group of 6 years old students at a public elementary school of Jalisco, Mexico, and before students received any instruction about place value. In this article we focus on the mental representation of number what children have before and after an experimental teaching oriented to improve their understanding of place value.
Key words: place value, cognitive representation of number

Introducción

El sistema de numeración decimal ocupa un lugar trascendental en la educación primaria, es abordado a lo largo de los seis años escolares y su conocimiento es necesario para entender muchas de las ideas matemáticas contenidas en los programas de estudio. A su vez, un componente clave del sistema de numeración decimal es el valor posicional, su comprensión favorece el desarrollo del sentido numérico, las habilidades de cálculo mental y estimación, y permite comprender las operaciones con multidígitos (Ross y Sunflower, 1995). Sin embargo, "es un concepto altamente sofisticado que no es realmente comprendido por muchos niños aún al final de su educación primaria" (Thompson, 2000, p. 292).

Los anterior, se hace evidente en un estudio previo (Andrade, 2009) donde observamos que alumnos de sexto grado de primaria no logran escribir numerales de tres dígitos, aun cuando los mismos son introducidos desde segundo grado, y confunden el valor asociado a los dígitos de acuerdo a su posición. Por ejemplo, un alumno escribe 3003 para 330 y otro señala que 450 son "4 unidades y 5 decenas".

Por lo antes expuesto, estamos desarrollando una investigación en la que abordamos el valor posicional desde la perspectiva de la enseñanza y del aprendizaje. Por un lado, planteamos la implementación de una enseñanza experimental encaminada a favorecer la comprensión del sistema de numeración decimal, en particular del valor posicional, de los estudiantes de primer

grado de educación primaria. Asimismo, haremos un seguimiento del desarrollo de la comprensión del valor posicional por parte de los estudiantes así como de las dificultades que presenten al abordar este contenido.

En esta investigación, una de las cuestiones que analizamos es la *representación cognitiva del número* ya que de acuerdo a Miura, Okamoto, Kim, Steere y Fayol (1993), este constructo está fuertemente relacionado al valor posicional.

Marco Teórico

Existen diversos factores asociados a las dificultades en la comprensión del valor posicional, uno de ellos es el lenguaje, en diversos estudios (Cotter, 2000; Beauford y Browning, 2007; Miura et al., 1993) se enfatiza la mayor correspondencia existente entre el sistema de numeración escrito y oral de los lenguajes asiáticos, lo cual puede influir en el mejor desempeño matemático de los estudiantes asiáticos en estudios internacionales. Miura et al. (1993) observan que la comprensión del valor posicional puede estar influenciada por las características del lenguaje numérico de los niños, y señalan que "aprender a contar en un lenguaje asiático parece promover una comprensión del número que es congruente con el tradicional sistema de numeración de base 10, y esto, puede proporcionar las bases para hacer aritmética fundamental relativamente simple" (p. 29).

Miura y sus colegas también observan que aun cuando diversos estudios han atribuido a factores sociales y experiencias escolares las diferencias a favor de los estudiantes asiáticos, éstas ya están presentes desde el primer grado, antes que la enseñanza u otras cuestiones asociadas a la escuela puedan dar razón de las mismas.

Otra cuestión relacionada a las dificultades en la comprensión del valor posicional es la propia enseñanza. Terigi y Wolman (2007) argumentan que la enseñanza habitual del sistema de numeración decimal impide a los estudiantes su comprensión. El retrato que hacen de esta enseñanza es presentar los numerales de uno por vez, establecer cortes según el grado escolar, la explicitación del valor posicional, la utilización de recursos didácticos que muestran el sistema de numeración como si fuera un sistema aditivo, y la conceptualización de unidades y decenas como un paso necesario para el aprendizaje de los algoritmos convencionales.

Por otra parte, hay quienes consideran que el concepto de valor posicional se introduce prematuramente, por ejemplo, Kami (1992) señala que es necesario que el niño comprenda el sistema de unidades antes de poder comprender el de decenas, el cual se construye entre el segundo y quinto grado de primaria, por lo que considera que no es posible esperar que un niño de primer grado comprenda el valor posicional.

Entre las investigaciones que evidencian lo anterior, podemos citar la de Ross (1986) quien entrevista a estudiantes de segundo a quinto grado y en una de las tareas de *correspondencia de dígitos*, a través de la cual se explora el significado que los niños atribuyen a los dígitos de un numeral multidígito, les presenta una colección de 25 palitos de madera, les pide contarlos y escribir el numeral que corresponde al total de palitos. Posteriormente, les pregunta si cada parte del numeral, tiene algo que ver con el número de palitos que tienen. El resultado es que todos los niños del estudio son capaces de determinar y escribir el numeral correctamente, sin embargo, no es sino hasta cuarto grado que la mitad de los niños demuestra que sabe que el "5" representa cinco palitos y el "2" representa veinte.

Considerando las cuestiones asociadas a las dificultades de los estudiantes en la comprensión del valor posicional, diversos estudios han propuesto enfoques alternativos en su tratamiento didáctico. Entre ellos, se encuentra un proyecto de investigación realizado en Australia (Association of Independent Schools of South Australia, 2004), cuyo objetivo fue mejorar el aprendizaje de los estudiantes con relación al sistema de numeración decimal a través de un juego denominado *el juego de base diez*, el cual consiste en tirar dos dados, sumar los puntos obtenidos y colocar la misma cantidad de palitos de madera en un tablero que contiene las columnas de valor posicional. La regla del juego es que no puede haber más de nueve ítems en cualquier columna (Pengelly, 1991). Como resultado de la implementación de este juego, los estudiantes desarrollaron una comprensión de la estructura del sistema de numeración y aprendieron a operar con números utilizando esta estructura.

Es importante observar que la agrupación de palitos de madera como se realiza en *el juego de base diez*, también es sugerida por otros investigadores para trabajar estructuras matemáticas. Por ejemplo, Resnick y Ford (1990) ilustran cómo pueden ser utilizados para comprender las estructuras matemáticas subyacentes al sistema de numeración y al algoritmo de la adición con transformación.

Por otra parte, en la enseñanza y aprendizaje del sistema de numeración, la introducción de diferentes bases numéricas, en particular bases pequeñas, representa diversas ventajas de acuerdo a Vergnaud (1991): la formación de agrupamientos de segundo y tercer orden no representa una dificultad en comparación con la base 10 puesto que la cantidad de objetos a manejar es menor y las reglas del sistema de numeración son esencialmente las mismas en todas las bases.

Vergnaud (1991) también señala que la enseñanza del sistema de numeración debe tener por objeto que el estudiante comprenda el paralelismo entre las operaciones sobre los objetos y los conjuntos, y las operaciones sobre los símbolos numéricos. En el caso del sistema de numeración

decimal, es importante que el estudiante logre establecer una relación entre los objetos y la cifra de las unidades; entre la agrupación de objetos en paquetes de diez y la cifra de las decenas; entre los paquetes de diez paquetes de diez y la cifra de las centenas, etc.

Por su parte, Dienes (1981) sugiere introducir distintas bases de numeración a través de juegos de agrupamientos y del uso de material estructurado como los bloques multibase, con el propósito de favorecer la comprensión de la numeración y la noción del valor posicional de los estudiantes.

Las cuestiones antes expuestas en el Marco Teórico dan sustento y han servido para orientar nuestra investigación como podemos apreciar a continuación.

Método

La primera fase de esta investigación, la experiencia piloto, se llevó a cabo durante los meses de enero y febrero de 2013 en un grupo de primer grado de una escuela primaria pública de Jalisco, de una zona socioeconómica baja. El grupo estaba constituido por 13 alumnos, cuyas edades promediaban 6.4 años.

Los instrumentos metodológicos aplicados durante esta fase de la investigación fueron: entrevista inicial, enseñanza experimental y entrevista final. A través de las entrevistas, se exploró la comprensión del valor posicional de los estudiantes antes y después de la enseñanza experimental, la cual estuvo orientada a favorecer su comprensión del valor posicional.

Las entrevistas, inicial y final, fueron semiestructuradas e individuales. Ambas entrevistas incluyeron las siguientes tareas: a) *Representación cognitiva del número* (Miura et al., 1993), b) *Correspondencia de dígitos* (adaptada de Kamii y Joseph, 1988; Ross, 1986), c) *Noción posicional* (Ross, 1986), d) *Sumas y restas* y e) *Comparación de números*. En la entrevista final, además, incorporamos numerales de tres cifras pues uno de nuestros propósitos era que los niños pudieran transitar de los numerales de dos cifras a los a los numerales de tres cifras.

En el presente reporte nos enfocamos a la tarea *representación cognitiva del número* de Miura et al. (1993), a través de la cual se busca conocer la representación mental que tiene el niño del número, representación que está asociada a la comprensión del valor posicional de acuerdo a estos investigadores.

La enseñanza experimental, por su parte, se realizó en 18 sesiones de 45 minutos cada una aproximadamente, ésta estuvo orientada a mejorar la comprensión de los estudiantes del valor posicional. Lo que caracterizó a dicha enseñanza fue una breve introducción de las bases numéricas 4, 5 y 6, previa utilización de la base 10, con el propósito de facilitar el tránsito a la

base 10 de nuestro sistema de numeración; así como el tránsito continuo entre diferentes representaciones: concreta y manipulativa, escrita y oral.

El escenario de la enseñanza experimental fue una adaptación del *juego de base diez* presentado por Pengelly (1991), el cual ha sido descrito en el Marco Teórico. La adaptación de este juego consistió en trabajar diferentes bases numéricas, como lo han hecho otros investigadores.

Una de nuestras aportaciones, fue enriquecer *el juego de base diez* mediante el uso de un ábaco cuya peculiaridad fue que las primeras cinco cuentas de cada columna eran de diferente color con el propósito de facilitar el reconocimiento de las cantidades (Cotter, 2000). Este ábaco estaba compuesto por tres barras con 20 cuentas cada una, lo que simularía un ábaco abierto, y de manera experimental decidimos que dos niños utilizaran un ábaco con dos barras para el primer orden, dos barras para el segundo orden y una barra para el tercer orden, con el propósito de facilitar el intercambio de unidades: diez por uno o en su caso uno por diez (diseño propio).

Análisis de resultados preliminares

La tarea de las entrevistas inicial y final que abordaremos se refiere a la *representación cognitiva del número*, a través de la cual se busca conocer la representación mental que tiene el niño del número (Miura et al., 1993). El término *representación cognitiva del número*, es utilizado por Miura et al. (1993) para referirse a la imagen mental del número que tiene el niño -una colección de objetos individuales o bien grupos de diez y unos. Para su exploración, dado que no es accesible de modo directo, se pide al niño construir números utilizando bloques de base diez.

En esta tarea, se presentó a los estudiantes bloques de base diez y se mostró, con su participación, la equivalencia entre diez bloques unitarios y un bloque de diez unidades. Enseguida, les comentamos que con estos bloques podíamos mostrar cantidades, ejemplificamos la representación de un número menor a diez y los invitamos a representar dos números menores a diez.

Posteriormente, presentamos en una hoja el numeral 28 a los estudiantes y les pedimos que lo representaran utilizando los bloques que desearan. Estuvieron a su disposición suficientes bloques unitarios y bloques de diez unidades de tal manera que podían utilizar solamente bloques unitarios si así lo deseaban. La misma tarea se realizó con los numerales 30, 42 y 13. En la entrevista final, además, se incluyó la representación del numeral 249, por lo que bloques de cien unidades estuvieron a disposición de los estudiantes. Previa representación, se les invitó a determinar el valor de un bloque de cien unidades apoyándose de la equivalencia entre un bloque de cien unidades y diez bloques de diez unidades.

En la entrevista inicial, encontramos que la tendencia de la mayor parte de los niños fue utilizar bloques unitarios para representar los números, lo que Miura et al. (1993) llaman *colección de uno a uno*. Por ejemplo, representaron el número "42" utilizando 42 bloques unitarios (Figura 1). Es decir, su representación mental del número no reflejaba la estructura del sistema de numeración decimal, lo cual puede dificultar su comprensión.

Figura 1: Representación cognitiva del número"42" en la entrevista inicial

Figura 2: Representación cognitiva del número "42" en la entrevista final.

Después de la enseñanza experimental, encontramos un cambio muy importante en los resultados obtenidos en esta tarea: 8 de los 11 niños entrevistados utilizaron una *representación canónica de base diez* para todos los números, es decir, emplearon en su caso, bloques de cien, bloques de diez y bloques unitarios de acuerdo a la posición de los dígitos. Por ejemplo, representaron el número "42" utilizando 4 bloques de diez y 2 bloques unitarios (Figura 2).

Lo anterior puede indicar que para los 8 niños que utilizaron una *representación canónica de base diez* "los números están organizados como estructuras de dieces y unos, y el valor posicional está fuertemente . . . relacionado a esas representaciones" (Miura et al., 1993, p. 29).

Respecto a los tres niños que no utilizaron en todos los casos una *representación canónica de base diez*, uno de ellos representó el primer número, 28, con bloques unitarios, para el siguiente número, 30, utilizó 3 bloques de diez y a partir de esta representación continuó utilizando bloques de cien, bloques de diez y bloques unitarios de acuerdo a la posición de las cifras de los numerales que se le pidieron representar.

El segundo de estos tres niños no conocía la mayor parte de los numerales de dos y tres cifras que se le presentaron, los veía como dígitos individuales concatenados (Fuson, Smith y Lo Cicero, 1997), por ejemplo dijo que 28 "es el dos y el ocho". Aun cuando se le apoyó a leer el numeral, esto no resultó de ayuda pues al no conocer los números presentados no logró representarlos.

En el caso de 28 mostró 4 barras que contó "10, 20, 30, 50", se le recordó que pedimos mostrar el 28 y entonces tomó 8 barras que contó como 90, como podemos apreciar también tenía dificultad para contar de diez en diez. Finalmente mostró 8 cubos, sin lograr representar el número 28 indicando que no lo conocía. Este niño solamente logró representar el 30 con 3 bloques de diez y el 13 con 13 bloques unitarios, en ambos casos se le apoyó diciendo los

números que pedimos representar pues como señalamos los veía como dígitos individuales concatenados.

El tercer niño se inclinó a una *representación canónica de base diez*, sin embargo, al igual que el niño anterior no conocía varios de los numerales presentados. Este niño invirtió los numerales en algunos casos, 28 dijo que era "ochenta y dos", o bien los leyó por segmentos, 249 como "veinticuatro y nueve". Después de que se le apoyó leyendo el numeral que se le pedía mostrar, su representación reflejaba su dificultad para contar de diez en diez, por ejemplo, para representar 30, tomó bloques de diez que empezó a contar: "10, 50", entonces se le apoyó y contó: "10, 20, 50", una vez más se le ayudó en el conteo y mostró tres bloques de diez para 30.

Finalmente, es interesante observar que en la entrevista final el 83.6% de las construcciones de los niños que participaron en la primera fase de esta investigación correspondieron a una *representación canónica de base 10*, mientras que en el estudio de Miura et al. (1993), en esta categoría se reportaron 8.3% y 96.7% de construcciones de niños norteamericanos y japoneses respectivamente.

Conclusiones

En la primera fase de esta investigación se logró que los estudiantes de primer grado de primaria tuvieran una comprensión inicial del valor posicional a través de la enseñanza experimental que llevamos a cabo. Esto se evidenció con los resultados obtenidos en la en la tarea de *representación cognitiva del número* (Miura et al., 1993) que presentamos. Tarea en la que la mayor parte de los niños utilizaron una *representación canónica de base diez*, es decir, emplearon bloques de cien, bloques de diez y bloques unitarios de acuerdo a la posición de los dígitos, representación que de acuerdo a Miura y sus colegas (1993) está estrechamente relacionada a la comprensión del valor posicional.

Como lo señala Ross (1986), una compresión del valor posicional puede ser sustentada en diferentes niveles, por ejemplo, puede incluir la comprensión de algoritmos, de la notación escrita, de unidades y decenas, etc., por lo que resulta necesario analizar los resultados obtenidos en todas las tareas que constituyeron las entrevistas y también es muy importante establecer si existen relaciones entre los resultados de las mismas.

En esta investigación se ha evidenciado que el valor posicional es un concepto sumamente complejo, concepto que los estudiantes construirán a lo largo de toda su educación primaria.

Referencias Bibliográficas

Andrade. S. (2009). *El conocimiento matemático para la enseñanza. Un estudio con maestros de educación primaria*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Association of Independent Schools of South Australia (2004). *Understanding place value: A case study of the base ten game*. Canberra: Dept. of Education, Science and Training.

Beauford, J. y Browning, S. T. (2007). *The Effects of the Use of Explicit Number Names on Mathematical Understanding and Performance*. Ninth International Conference: Mathematics Education in a Global Community, Charlotte, North Carolina.

Cotter, J. (2000). Using language and visualization to teach place value. *Teaching Children Mathematics*, 7 (2), 108-114.

Dienes, Z. P. (1965/1981). El número y el origen de su notación. En *La matemática moderna en la enseñanza primaria* (7ª. Edición), (A. Buj Gimeno, trad.), pp. 39-63. Barcelona: Teide.

Fuson, K. C., Smith, S. T. y Lo Cicero, A. M. (1997). Supporting Latino first graders' ten-structured thinking in urban classrooms. *Journal of Research in Mathematics Education*, 28(6), 738-766.

Kamii, C. (1992). Valor de la posición y la adición en doble columna. En *Reinventando la aritmética II*. (pp. 35-51). Madrid: Visor.

Kamii, C. y Joseph, L. (1988). Teaching place value and double-column addition. *Arithmetic Teacher*, 35(6), 48-52.

Miura, I. T., Okamoto, Y., Kim, C. C., Steere, M. y Fayol, M. (1993). First grader's cognitive representation of number and understanding of place value: Cross - national comparisons - France, Japan, Korea, Sweden, and the United States. *Journal of Educational Psychology*, 85(1), 24 - 30.

Pengelly, H. (1991). *Base ten: understanding the structure of the number system*. Sydney: Ashton Scholastic.

Resnick, L. B. y Ford, W. W. (1990). La enseñanza de las estructuras de las matemáticas. En *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. (pp. 127-156). Madrid: Paidós.

Ross, S. H. (1986). *The development of children's place-value numeration concepts in grades two through five*. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, San Francisco.

Ross, S. H. y Sunflower, E. (1995). Place value: problem-solving and written assessment using digit-correspondence task. Paper presented at the Annual Meeting of the NCTM, San Diego.

Terigi, F. y Wolman, S. (2007). Sistema de numeración: consideraciones acerca de su enseñanza. *Revista Iberoamericana de Educación*, 43, 59-83.

Thompson, I. (2000). Teaching place value in the UK: time for a reappraisal? *Educational Review*, 52(3), 291-298.

Vergnaud, G. (1991/2003). La numeración y las cuatro operaciones. En *El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria* (8ª Reimpresión), pp. 135-159. México: Trillas.

UNA PELÍCULA EN LA CLASE DE MATEMÁTICAS

Marger da Conceição Ventura Viana
Universidade Federal de Ouro Preto. Brasil
margerv@terra.com.br

Resumen. Durante mucho tiempo, la escuela privilegió el uso de la lengua escrita, pero hoy en día requiere las imágenes. La invasión de la imagen muestra el crecimiento del estímulo visual en el proceso de enseñanza /aprendizaje pues la cultura contemporánea es visual. El estudiante es estimulado por los videojuegos, telenovelas, películas, juegos variados, inclusive del ordenador, todos con recursos a imágenes. Por lo tanto, se llevará al debate, un recurso que, aunque no fue construido con fines educativos, tiene un gran potencial educativo y no debiendo ser descartado como un medio de enseñanza en el desarrollo de actividades educativas para la adquisición de conocimiento, incluyendo las matemáticas. Las películas pueden ayudar a comprender mejor las actitudes y comportamientos de los estudiantes; las que exponen diferentes formas de pensar hacen los estudiantes más críticos. Por otra parte, es necesario elegir películas y escenas adecuadas, desarrollar un plan de actividades y preparar el ambiente de la exhibición.
Palabras clave: películas, aprendizaje matemática, educación, enseñanza

Abstract. For a long time, schools have favored the use of written language, but today they require images. Contemporary culture is visual. An increase in visual images motivates the process of teaching / learning. Students are stimulated by video games, movies, a variety of computer games, all of which include images. Therefore, although most films are not made for educational purposes, they have great educational potential and must not be dismissed as a medium of instruction in the development of educational activities for the acquisition of knowledge, including mathematics. Films can help in creating understanding in attitudes and behaviors of students, can expose different ways of thinking that assist students in becoming critical thinkers. Moreover, it is necessary to choose appropriate movies and scenes, and develop a plan of activities and organize the place of exhibition.
Key words: movies, math learning, education, teaching

Introducción

El aula ya viene incorporando la intervención de los medios de comunicación masivos con la utilización de periódicos, revistas, filmes y programas de televisión. Así, ellos pueden ser considerados como salón de clase, como espacio de adquisición de conocimientos, incluso de Matemáticas, por lo tanto medios de enseñanza. Durante mucho tiempo, la escuela privilegió el uso de la lengua escrita, pero hoy en día requiere las imágenes. La invasión de la imagen muestra el crecimiento del estímulo visual en el proceso de enseñanza/aprendizaje pues la cultura contemporánea es visual. El estudiante es estimulado por los videojuegos, telenovelas, películas, juegos variados, inclusive del ordenador, todos con recursos a imágenes. Así se llevará al debate, un recurso que, aunque no fue construido con fines educativos, tiene un gran potencial educacional no debiendo ser descartado por los profesores en la elaboración de actividades pedagógicas curriculares. Las películas pueden ayudar a comprender mejor las actitudes y comportamientos de los estudiantes; las que exponen diferentes formas de pensar hacen los estudiantes más críticos. Por otra parte, es necesario elegir películas y escenas adecuadas a los alumnos y preparar el ambiente el que será exhibido la película, etc., para mejor utilización de esto medio de enseñanza, además de la elaboración de un guión de actividades. Para utilizar este

recurso como medio de enseñanza, además de desarrollar un plan de actividades se presentará formas de utilización de la película y sugerencias de cómo hacerlo. A continuación presentamos los títulos: ¿Por qué cine en el aula?, Las clases de matemáticas también pueden ir al cine, y, finalmente, Sugerencias para ver y explorar las películas en el aula.

¿Por qué cine en el aula?

Uno de los objetivos de la utilización del cine en el salón de clases es proporcionar a los estudiantes una revisión histórica de los contenidos a estudiar. Según Viana y Teixeira (2009), utilizar el cine como herramienta de enseñanza es ayudar a los estudiantes a comprender la diversidad cultural de los creadores de matemáticas de las teorías relevantes en el desarrollo de esta disciplina. En esta perspectiva, Duarte (2002, p.17) afirma que "ver películas es una experiencia social tan importante, desde el punto de vista de los antecedentes culturales y educativos de la población, como la lectura de obras literarias, filosóficas, sociológicas, y otras más"

Se considera, por lo tanto, que es importante explorar el lenguaje cinematográfico en la educación, pues presenta mecanismos para interactuar con otros lenguajes, dialoga con diversos contenidos y es una práctica interdisciplinaria.

Trabajar con este tipo de lenguaje contribuye al desarrollo de la comprensión crítica del mundo y de las tecnologías emergentes teniendo en cuenta mejorar la formación de los estudiantes. Esto se puede ver en la tesis de Machado (2002), que investiga el uso de películas para el desarrollo de la crítica en los estudiantes de la escuela secundaria.

Por lo tanto, se pretende apoyar a los profesores con un uso pedagógico de películas de diferentes géneros y categorías que contribuyen a la formación de estudiantes críticos y reflexivos. Esto para que puedan entender mejor el diálogo entre el currículo escolar y los aspectos socioculturales más amplios que dominan la sociedad contemporánea.

De acuerdo con los Parámetros Curriculares Nacionales (Brasil, 1998, p.4), es necesario que los estudiantes "dominen los conocimientos que necesitan para crecer como ciudadanos plenamente reconocidos y conscientes de su papel en nuestra sociedad" .Así que deben tener "acceso total a los recursos culturales pertinentes a la consecución de su ciudadanía".

Con esto, la película ayuda a explorar los temas transversales, propuestos por el Ministerio de Educación en la Ley de Directrices y Bases de la Educación Nacional de 1996, lo que sugiere el uso de películas con el fin de contextualizar los valores humanos y la diversidad cultural (Viana, Rosa, Orey, 2011).

La película, en el contexto de la escuela, por lo tanto, tiene papel (función) muy importante por su audiencia y amplitud: una fuente rica e inagotable para analizar la diversidad cultural de la sociedad contemporánea. Él puede llevar a las aulas el desafío de comprender y aceptar la diversidad cultural presente en la sociedad (Viana, Rosa, Orey, 2011).

La película funciona como un elemento de superación cultural e intelectual de los profesores y estudiantes. Por lo tanto la tarea de mostrar películas en la escuela modifica la práctica de la enseñanza y el aprendizaje. Es una práctica de la educación informal que requiere una metodología para un mejor uso en el aula. Es una práctica en el proceso de consolidación, por lo que es una tarea colectiva de los educadores de todas las áreas del conocimiento.

Además, dijo Viana (2006)

> La utilización de películas permite contextualizar los hechos contenidos en la Historia de la Matemática. Además, se presentan pretextos para que los estudiantes lleven a cabo investigaciones, por ejemplo, con el uso de las nuevas tecnologías (Internet), en libros, revistas, documentos publicados en actas de congresos, entrevistas, etc. (Viana, 2006, p.560).

Aún según Viana (2006), los datos obtenidos de su investigación revelan que la película despierta el interés de los estudiantes por la investigación. Por lo tanto, la adaptación de las películas con el contenido que desea investigar y la edad de los estudiantes, es posible encontrar nuevas posibilidades educativas. Cada exhibición cinematográfica, miradas, sentimientos y experiencias son renovados y fortalecidos, lo que puede generar reflexiones que se amplían:

> La vivacidad de las imágenes y su reproducibilidad facilitó su aceptación como una representación pura de la realidad. A pesar de que están montadas, la magia y el encanto de el flujo de imágenes haz que el espectador reaccione como si fuera la propia realidad misma (Oliveira, 2006, s. p.).

Por otro lado, ya que la película es, al mismo tiempo, el arte e industria, es necesario separar "el grano de la paja". Debe ser compatible con los requisitos de la recepción estética y la utilidad de los recursos educativos del cine. La película no puede ser tratada sólo como motivación para las cuestiones y problemas o como técnica Viana (2011), pero puede aproximarse los contenidos escolares, como recurso recreativo.

La película está vinculada a un contexto de ocio y entretenimiento que pasa imperceptiblemente en el aula. De ahí la importancia de tomar esta expectativa positiva para atraer a los estudiantes a los asuntos de la planificación escolar.

La película no sólo moviliza la razón y el intelecto, sino también las emociones, lo cual es sin duda importante para que los estudiantes se envuelvan y tengan el deseo de y participar y aprender más. Además, mejora la capacidad de razonamiento, desarrolla la imaginación, da una visión más amplia del mundo para los estudiantes y mejora el vocabulario. Facilita la comprensión de los problemas que a veces pueden ser muy complejos y difíciles de trabajar en el aula.

Las clases de matemáticas también pueden ir al cine

Considerando el cine como un medio, es decir, una herramienta educativa, estamos continuamente experimentando, orientando a los estudiantes, escribiendo artículos y libros y ministrando cursos cortos y talleres en eventos, a petición o bajo difusión, proporcionando a los profesores una herramienta alternativa para la enseñanza/aprendizaje, incluida, por lo tanto, las matemáticas.

Iniciamos la utilización del cine en las clases de Historia de las Matemáticas, a continuación, en la Metodología de la Investigación y los horizontes se ampliaron. Hay películas para casi todos los tipos de contenido. Hay investigaciones que resultaron en disertaciones y tesis sobre el cine en la educación, como Nishitani (2008), Machado (2002), Cipolini (2008), etc. También hay libros e incluso colecciones sobre el uso del cine en la escuela, organizado por Inês Teixeira y el libro de Bernardo Jefferson de Oliveira, por el Editorial Argvmentvm.

Por otra parte, mirando a los bancos de tesis y catálogos de libros, no hay trabajos relacionados con el uso de películas en las clases de Matemáticas. Tesis y disertaciones, casi siempre, están dedicadas a la educación en general. El uso de películas en la formación de profesores de Matemáticas, en particular, en las clases de Matemáticas, es nuestra iniciativa. Estamos orientando la primera disertación en maestría que se ocupa de las películas en las clases de Matemáticas, aunque ya orientamos varias monografías sobre el tema, al igual que Teixeira (2008). Pero no tenemos la intención de presentar propuestas, ideas y propuestas para el trabajo como única, estática o definitiva: apoyamos en la investigación y la experiencia.

El objetivo de nuestro estudio es encontrar maneras de enseñar las Matemáticas, o más bien educar usando las Matemáticas. Es un proceso que depende, por lo tanto, de la explotación de las películas y mucha experimentación, todavía en construcción.

Para esto tipo de investigación se necesita gustar del cine. Es más una opción para el profesor que investiga su práctica con el fin de perfeccionarla. Pero no es necesario que el profesor sea un experto, ni mucho menos un director de cine. No se trata de hacer películas. Esto no es para los profesores de Matemáticas, aunque no está prohibido hacerlo: es para otros sectores.

Los profesores no tienen por qué ser críticos profesionales del lenguaje cinematográfico, pero es muy importante que sepan algunos de los elementos necesarios para el desarrollo eficaz de las actividades curriculares, es decir, el argumento, el guión, el vestuario, la producción, edición y visualización. Viana y Teixeira (2009) afirman que todos estos elementos constituyen el séptimo arte y tienen el poder de transmitir ideologías y valores implícitos para la audiencia cinematográfica.

Es importante aclarar que es necesario ofrecer enfoque teórico y metodológico que apoye el uso de la película en la educación, proporcionando el aprendizaje, pues no se debe llevar el estudiante al cine sólo por diversión o para presentar un video para sustituir la presentación del contenido de la enseñanza o incluso el propio profesor.

El uso de las computadoras, cámaras digitales, impresoras, reproductores de DVD, televisores y otros equipos también no pueden sustituir el aula, métodos, etc. Mucho menos el profesor. Aunque los estudiantes son los protagonistas del aprendizaje, el docente es el mediador, el fundador y director de las actividades a realizar. Por lo tanto, para utilizar una película, debe tener en cuenta el contenido que se va presentar. Tiene que haber una razón y un script para desarrollo de actividades. No hay una receta para encontrar la película adecuada para cierto contenido, es incluso posible que no haya o si hay, no sea conocida del profesor.

Aunque la utilización de las películas en clase de matemáticas esté en construcción, hay resultados encontrados en investigaciones, incluso en las nuestras. Con las exhibiciones es posible presentar pretextos para que los estudiantes hagan investigaciones acerca de los contenidos matemáticos; ayudar a los estudiantes a comprender la diversidad cultural de los creadores de las matemáticas, de las teorías relevantes en el desarrollo de esta disciplina; retratar épocas como recurso para enseñar el contexto en que los conocimientos matemáticos fueron construidos; posibilitar una revisión histórica de los contenidos a estudiar; movilizar la razón, el intelecto y las emociones, lo importante en la unidad de lo afectivo con lo cognitivo en el aprendizaje, mejorando la capacidad de razonamiento y desarrollando la imaginación, que son elementos primordiales en el aprendizaje de las matemáticas. También pueden abrir espacio para las discusiones y comparaciones con lo que se haya dicho en la clase o estudiado en otras fuentes. Finalmente, las películas pueden despertar el interés de los estudiantes por los contenidos matemáticos que estudien y hacer que se envuelvan y tengan el deseo de participar y aprender más. Fue lo que ocurrió con la película *Cadena de favores* (2000), la que utilizó Pinto (2012) en su trabajo de investigación.

En general las investigaciones que presentaron los resultados anunciados acerca de la utilización de películas en clase de matemáticas comenzaban con la búsqueda por la respuesta a la cuestión: *¿Qué contribuciones puede ofrecer esta película al proceso de enseñanza-aprendizaje de contenidos matemáticos de los estudiantes?* En la búsqueda por respuesta a esta pregunta utilizamos como instrumentos de recogida de datos seminarios presentados por los estudiantes y un cuaderno con anotaciones de las observaciones hechas cuando ellos realizaban las actividades propuestas en el script, además de cuestionarios y escritos. Para el análisis de tales datos hemos utilizado una metodología de naturaleza más cualitativa que cuantitativa.

Acerca de su investigación, dijo Pinto (2012):

> Las respuestas a la tercera pregunta del cuestionario y el seminario mostraron que el uso de la película en el aula actuó como estimulación al estudio de un contenido de enseñanza, porque los participantes entendieron la idea de Trevor [protagonista de la película] y a través de la investigación llegaron a la conclusión de que se trataba de una progresión geométrica (Pinto, 2012, p.50).

En el trabajo de Pinto (2012, p.51) también se encuentra lo que dijo el profesor de los estudiantes investigados: "después de hacer la investigación mis alumnos quedaron admirados de encontrar una idea matemática en una película, y deseaban estudiar ese tema, pues ya conocían que era una progresión geométrica". Así, los alumnos identificaron la cadena con una Progresión Geométrica de razón tres, confirmando contribuciones al aprendizaje de contenidos matemáticos y a la educación en general. La película introducía el contenido "progresiones geométricas" además de posibilitar la formación de valores (Pinto, 2012).

Por otra parte, el uso de la película en la escuela todavía requiere una teoría coherente y aplicable. La Educación Matemática debería también hacerse cargo de eso. Esperamos que el impacto de los resultados de la investigación sea proporcionar nuevos medios para el proceso de enseñanza/aprendizaje de las Matemáticas, perfeccionándolo.

Sugerencias para ver y explorar las películas en el aula

Es muy importante que el profesor conozca un poco de la historia del cine y de los grandes clásicos, para ser capaz de elegir las películas adecuadas y saber dónde y cómo localizarlas. También es importante conocer la cultura cinematográfica de los alumnos proponiendo exhibiciones sin imponer su gusto cinematográfico personal. Con eso el profesor sabrá hasta cuanto debe avanzar o cómo prepararse para mejorar sus actividades escolares con el cine.

Según Napolitano (2003)

Es suficiente que el profesor tenga en cuenta de una manera informal o sistemático, algunos datos básicos: a)La cual clase socioeconómica la que los estudiantes pertenecen en promedio; Cuales son los hábitos culturales y de consumo de sus familias; Cómo los estudiantes utilizan el cine (cines, alquiler de cintas de vídeo o dvd, asistencia a películas en la televisión abierta o cable); Cuáles son los géneros cinematográficos preferidos; Entre las películas más vistas, cual es la preferida (Napolitano, 2003, p.80).

Para seleccionar la película, es necesario conocer varias. Se puede consultar los catálogos, pero estos no están siempre al alcance del profesor. Por otra parte, las empresas de alquiler en general, no tienen un catálogo variado (con películas antiguas o películas importantes pero poco conocidas), mas limitado a los catálogos de "éxitos del momento". Por lo tanto, está claro por qué la cultura cinematográfica es más restringida y vinculada con el cine comercial.

Se puede hacer uso de informaciones de unos colegas, consultar páginas web, artículos de revistas, periódicos, tesis, libros, y todo que está al alcance. De todos modos, para utilizar las películas, los profesores deben gustar de eso medio de enseñanza y así es cierto que ya poseerán considerable cultura fílmica o se la buscarán.

Como la preselección de la película puede ocurrir por recomendación de un amigo o un profesional del área que tenga experiencia de trabajar con películas en su clase, la película debe ser vista varias veces para buscar algo relacionado con la disciplina y el contenido específico para ser trabajado. En la primera vez, en general, no se descubre mucho, pero en las siguientes, las relaciones comienzan a ser alcanzadas de manera más clara.

Después de elegir una película, es necesario elaborar un plan de trabajo, la elección de escenas adecuados a los alumnos, la preparación del ambiente en que se va presentarla, y otros cuidados, para el máximo aprovechamiento de este medio de enseñanza.

El plan para los estudiantes debe contener elementos de interpretación, que consisten en un conjunto de preguntas que dirigen la mirada del alumno en los aspectos más importantes de la película, basada en los aspectos del contenido y los objetivos de la disciplina establecidos por el profesor. Debe contener las actividades que serán realizadas por él y dirigidas al aprendizaje de los contenidos de la disciplina. Conviene que contenga también informaciones como la ficha técnica, el género y el tema de la película, sinopsis, lista de los personajes principales, así como sus características y funciones dramáticas. Conviene que el plan viabilice a establecer parámetros para la evaluación de conformidad con los objetivos de la actividad. El plan se presentará a los estudiantes antes de la proyección.

Tomadas estas precauciones, el profesor debe elegir el camino posible para presentar la película en las actividades escolares.

Hay tres formatos que ayudan en la realización de las actividades, según Napolitano (2003): a) ver/asistencia durante las horas de clase; b) asistencia en el hogar formado por grupos de estudiantes previamente formados e informados por el profesor; c) y por último la presentación, en el aula, de escenas o secuencias seleccionados por el maestro. Lo importante es tener coherencia entre la forma de exhibición/asistencia y los objetivos/alcance de la actividad planeada.

Una actividad de importancia fundamental quizá la más importante para la formación de los estudiantes será presentar seminarios sobre la investigación llevada a cabo.

Referencias bibliográficas

Abrams, P., Levy, R.L., Reuther, S. (Productores), & Leder, M. (Directora). (2000). *Cadena de favores* [Película]. Estados Unidos: Warner Bros.

Brasil. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais – Temas Transversais*. Brasília, DF: MEC.

Cipolini, A. (2008.) *Não é fita, é fato: tensões entre instrumento e objeto. Um estudo sobre a utilização do cinema na educação.* Tesis de Maestría no publicada. Faculdade de Educação do Estado de São Paulo-USP). São Paulo. Brasil.

Duarte, R. **(**2002). *Cinema e Educação*. Belo Horizonte: Autêntica.

Machado, A. V. (2002). *La utilización de películas históricas comerciales para el desarrollo de la crítica en la enseñanza de la Historia en el nivel medio*. Tesis doctoral no publicada. ICCP, La Habana. Cuba.

Napolitano, M. (2003*). Como usar o cinema na sala de aula*. São Paulo: Contexto.

Nishitani, E. Y. (2008). *Filmes de ficção científica como um meio de sociabilização para a ética planetária.* Tesis de Maestría no publicada. Universidade Presbiteriana Mackenzie. São Paulo. Brasil.

Oliveira, B. J. (2006). Cinema e imaginário científico. História, Ciências*, Saúde-Manguinhos*,13(1), Out.

Pinto, R. A. (2012). *A utilização de filmes em sala de aula para a aprendizagem de Matemática. Monografia de Graduação*. Departamento de Matemática. UFOP. Ouro Preto.

Teixeira, A. F. A. (2008). *O cinema na sala de aula de História da Matemática*. Monografia de Graduação. Departamento de Matemática. UFOP. Ouro Preto.

Viana, M. C. V. (2011). *A formação de professores vai ao cinema: 51 roteiros de filmes para serem usados na sala de aula*. Ouro Preto: UFOP.

Viana, M. C. V. y Rosa, M.; Orey, D. C. (2011). *O cinema vai à escola: registrando a diversidade cultural na sala de aula.* In: VIII SIMPOED- Simpósio de Formação e Profissão Docente, 2011, Mariana-MG. Anais Eletrônicos do VIII SIMPOED-Simpósio de Formação e Profissão Docente. Ouro Preto-MG: UFOP.

Viana, M. C. V. y Teixeira, A. F.(2009). A história da Matemática vai ao cinema. En: VIII Seminário Nacional de História da Matemática, Belém-PA. *Anais do VIII Seminário Nacional de História da Matemática.* Rio Claro-SP: SBHMat, 2009. 1 cdrom. p. 1 – 11.

Viana, M. C. V. (2006). Historia de las matemáticas (HM) con cine. En G. Martínez Sierra (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 19, 577-583. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

RESCATE FRACCIONARIO

Abel Carmona, Mónica Lisi, Abel Carmona, Mónica Lisi, Angélica Elvira Astorga y Estela Sonia Aliendro.
Universidad Nacional de Salta Argentina
grupoabeliano@hotmail.com, aeastorga@hotmail.com, myczanek@arnet.com.ar, aliendro@unsa.edu.ar

Resumen. Presentamos una experiencia de re-aprendizaje de las operaciones con fracciones, por los frecuentes errores algorítmicos en que incurren los estudiantes de segundo año de nivel medio. De evaluaciones diagnósticas e indagaciones sobre las estrategias de enseñanza en la primaria, comprobamos que los aprendizajes previos se limitan a memorizar y repetir algoritmos carentes de significatividad y sentido, fácilmente olvidables. Así nos propusimos aprovechar la potencialidad de la razón para aprendizajes perdurables. Al efecto, diseñamos actividades de tipo experimental tendientes a lograr aprendizajes significativos que justifiquen los algoritmos.
Con la experiencia realizada, los estudiantes lograron aprobar las evaluaciones en un alto porcentaje, pero fundamentalmente sintieron una intensa satisfacción con los aprendizajes obtenidos.
Palabras clave: re-aprendizaje experimental, operaciones con fracciones
Abstract. We present an experiment on re-learning operations with fractions because of the frequent algorithmic mistakes that students of the second year of the middle level (of High School) make. From the results of the diagnostic evaluations and inquiries into the strategies of teaching in the Primary School, we verified that the knowledge gained previously is limited to memorize and repeat algorithms without understanding them, which is easy to forget. That is why we intend to make use of the potential of the faculty of reasoning to get durable knowledge. To that end we design experimental activities to reveal the principles which justify the algorithms.
After carrying out the experiment most of the students, passed the examinations but, more important was, their satisfaction about their achievements.
Key words: experimental re-learning, operations with fractions

Introducción

Nuestra intención es dar a conocer las principales instancias en que desarrollamos una experiencia de re-aprendizaje de la operatoria con números fraccionarios, dado los frecuentes errores en que incurren estudiantes que cursan el segundo año de nivel medio. Hablamos de re-aprendizaje porque es en el nivel primario de estudios donde se enseñan y deberían haber sido aprendidos los correspondientes algoritmos. Participaron de la experiencia, estudiantes del Colegio Secundario N° 5025 de San Antonio de los Cobres (Noroeste de la República Argentina, región de ambiente inhóspito, clima desértico, a unos cuatro mil metros de altura sobre el nivel del mar) y cuyas edades oscilan entre los 14 y 15 años. La mayoría de los habitantes de la mencionada población, es descendiente directa de las poblaciones originarias de la zona. Y los estudiantes con los que trabajamos son chicos que llevan una vida casi independiente de sus mayores. Los hombres trabajan en las minas, por lo cual están ausentes de sus hogares, a los que retornan una semana al mes. Las madres se dedican en algunos casos al pastoreo y en otros, a las labores artesanales cuyos productos venden a los turistas. O sea que también están ausentes de sus hogares durante el día. Por ello, la responsabilidad del hogar está a cargo de los hijos o hijas mayores.

La situación hogareña descripta, hace que los estudiantes descuiden casi totalmente sus tareas escolares. Encontramos que esta es una de las tantas causas de la carencia de rutinas imprescindibles para el progreso en el aprendizaje de la matemática. Ni qué decir de la ausencia de significatividad y de sentidos de las nociones (muchas de ellas elementales), como bien detectamos en las evaluaciones diagnósticas que realizamos todos los años.

La abstracción característica de los objetos y procedimientos matemáticos conlleva dificultades tanto para enseñarlos como para aprenderlos. Pero por la vocación y la responsabilidad docente que creemos poseer, asumimos el reto de gestionar la enseñanza con el fin de revertir los resultados negativos obtenidos en las citadas evaluaciones diagnósticas y lograr que un buen porcentaje de alumnos alcance el nivel de manejo de las operaciones con números fraccionarios de forma satisfactoria.

Nuestra disyuntiva era 'cumplir' con el desarrollo de los contenidos correspondientes al segundo año de enseñanza media (para los que resulta imprescindible el manejo operatorio fraccionario) o admitir que, para el progreso matemático de nuestros estudiantes era necesario dotarlos de los conocimientos previos requeridos. Esto implicó un trabajo más en soledad (por parte del docente que lo ejecutaba en el aula), porque muchos colegas y directivos se mostraban escépticos respecto de los posibles logros, aunque tuvimos la libertad de realizarlo. Gran parte del diseño de situaciones y recursos lo elaboramos en el ámbito de nuestro trabajo universitario.

Esta experiencia se realizó durante cinco años; no siempre logramos los resultados esperados, pero los tropiezos y sinsabores fortalecieron nuestro trabajo, en especial en lo que a modificación de estrategias se refiere, de modo de lograr mejores resultados.

Desarrollo

Como ya comentamos, fue en las evaluaciones diagnósticas donde afloraron los errores en la operatoria con fracciones. Pero más allá de ellas, también nos interesamos por conocer las estrategias de enseñanza y aprendizaje que, para el cálculo con fracciones, se desarrollaba en las escuelas primarias de las que provenían nuestros estudiantes. Así es que mantuvimos conversaciones con los profesores de ese nivel, en especial con los de los últimos años del citado nivel. Todos los enseñantes con los que dialogamos, accedieron de buen grado a nuestros requerimientos.

Como resultado de esas conversaciones nos informamos que, por lo general, la operatoria con números naturales y enteros es bastante visualizada durante el ciclo primario de estudios. Las dificultades asociadas a la conceptualización de la suma y la diferencia de números naturales, han sido fácilmente superadas al finalizar los estudios primarios. Pero perduran las deficiencias en los

algoritmos para el cálculo de productos y cocientes. Cuando se trasciende a las fracciones, prima la enseñanza y el aprendizaje de los algoritmos de las operaciones, basados simplemente en reglas que hay que memorizar y, por medio de la práctica reiterada, volverlos rutinarios. No hay, en general, una visualización o un sustento concreto que justifique los citados algoritmos. De esta manera, el estudiante se encuentra sin la posibilidad de tener medios de control de sus producciones, y espera que sea el profesor quien le indique si lo que hizo está bien o mal. Y a ello nos abocamos: a lograr que nuestros estudiantes se apropiaran de algunas estrategias que le resultaran apropiadas para un mínimo autocontrol de sus elaboraciones.

Para la experiencia que desarrollamos, propusimos una secuencia de actividades (que incluían acciones con material concreto), algunas de las cuales describiremos más adelante, con especial referencia a la suma y diferencia de fracciones. No hemos olvidado que la operatoria con fracciones requiere de la comprensión del concepto de fracción y sus diferentes representaciones. Su enseñanza y aprendizaje correlativo no presenta, en general, mayores dificultades. Pero es otra la situación respecto de la operatoria.

Referentes teóricos

Uno de los temas claves de la didáctica y de la educación matemática, es cómo generar aprendizaje efectivo por parte de los estudiantes en torno al conocimiento matemático, tanto en sus contenidos como en el uso de su método. Sostenemos que conocer o saber matemáticas, es algo más que repetir definiciones y propiedades (Brousseau, 1993) y ejecutar algoritmos de manera rutinaria. La persona que sabe matemáticas ha de ser capaz de usar el lenguaje y objetos matemáticos para resolver problemas y poner en juego su creatividad. No es posible dar vida a los objetos matemáticos si no los ponemos en juego ante los problemas en los que cobran sentido y vida.

En particular, cuando nos referimos a las operaciones numéricas aparecen dos aspectos diferentes pero complementarios: el conceptual, referido al significado de la operación, y el procedimental, vinculado a los algoritmos operatorios correspondientes. El estudiante que se aproxima a la suma y a la diferencia de fracciones, debería hacerlo desde el referente de la suma y diferencia de naturales. Para estas, los sentidos fundamentales son los de agregar o quitar respectivamente, los que corresponden, según los términos de Vergnaud (1990), al campo aditivo. Mientras el denominador de las fracciones involucradas es el mismo, no se observan dificultades en lo que a dichos sentidos se refiere. Y son visualizables (por medio de las representaciones gráficas tradicionales) de modo inmediato. Pero cuando se trata de fracciones con diferente denominador, priman – en su enseñanza – las reglas algorítmicas por sobre los sentidos citados y

la visualización gráfica. De hecho, la secuencia algorítmica clásica que se utiliza en nuestras aulas (factorear denominadores, buscar su múltiplo común menor, dividirlo entre cada denominador y multiplicar este cociente por el correspondiente numerador, sumar o restar finalmente los productos obtenidos y obtener el resultado, incluyendo su simplificación) está muy lejos de la idea de agregar o de quitar, con el agravante de que no se utiliza – por lo general – un sustento representativo gráfico. Análogamente, la regla para la multiplicación de fracciones (multiplicar entre sí los numeradores y también los denominadores) está muy distanciada de la idea de suma repetida. Y en el caso de la división, la regla 'multiplicar en cruz' para obtener el resultado de dividir dos fracciones, no tiene nada que ver con la idea primigenia de repartir o partir.

Por otra parte, si sostenemos junto a Brousseau (1.993) que la situación de aprendizaje ocurre cuando los estudiantes se apropian de un problema – adecuado a su medio – para el cual carecen de solución, pero que son capaces de generar soluciones parciales y someterlas a prueba hasta encontrar la solución final del problema, tenemos que admitir que para operar con fracciones, deben ser ellos quienes busquen y generen sus propios algoritmos.

Según Douady (citada por Mathiaud, 1996), un problema es tal, si se puede interpretar al menos en dos marcos diferentes, es decir en dos ramas distintas de las matemáticas. Las fracciones se prestan al juego de marcos, ya que pueden interpretarse tanto desde lo aritmético como de lo geométrico, por lo menos en el nivel primario.

Sumar, restar, multiplicar o dividir dos fracciones arbitrarias, es el problema en cuestión. Se puede formular aritméticamente e interpretar geométricamente y desde la medición de longitudes, superficies o volúmenes. Se trata de 'medir' los resultados en forma gráfica y transformarlos convenientemente a la representación aritmética.

Otro aspecto que sustenta esta experiencia es el concepto de taller (Ander Egg, 1991):

> lugar donde se trabaja, se elabora y se transforma algo para ser utilizado (…), se trata de una forma de enseñar y sobre todo de aprender, (…), constituye un aprender haciendo en grupo,(…), los conocimientos se adquieren en una práctica concreta, lo cual supone una superación de la división entre formación teórica y práctica, mediante una integración de ambas, …, todos los talleristas participan, en carácter de protagonistas, de modo que se trata de un aprendizaje cooperativo... El conocimiento se produce fundamentalmente en respuestas a preguntas, lo cual permite desarrollar una actitud científica, de curiosidad y búsqueda (pp. 10-12).

Descripción de la experiencia

Antecedentes

Antes de implementar la experiencia como parte del curso normal, fue la necesidad de buscar una solución al reiterado fracaso de los estudiantes en la matemática de nivel medio, lo que dio origen a acciones vinculadas con la enseñanza y el aprendizaje de las operaciones con fracciones, desde la utilización de una metodología áulica basada en la problematización del tema. Las autoridades educativas demandaron de las instituciones escolares, la realización de talleres destinados a la recuperación de los estudiantes que no lograron alcanzar los conocimientos exigidos para superar el curso escolar, y que estaban en riesgo de ser perdidos para el sistema educativo.

En el Colegio Secundario N° 5025, uno de los mencionados talleres, se centró en el tema de fracciones, tanto en su aspecto conceptual como en los algoritmos operatorios. Recordamos que estos temas corresponden al nivel primario de estudios. Sin embargo, ni las nociones ni los procedimientos habían sido aprehendidos en el mismo, por lo cual se retornó a los inicios del tema pero desde una aproximación con soporte concreto.

Una de las primeras opciones fue utilizar (para las fracciones) las representaciones tradicionales con círculos o rectángulos, en cartulina. Pero no hubo demasiado progreso, tal vez porque las mismas no permitían demasiada manipulación.

Entonces recurrimos a envases de bebidas gaseosas de diferentes capacidades: 3, 2.25, 1.5, 1 y ½ litros. La primera actividad consistía en comparar dichas capacidades de manera visual. Por supuesto, es muy simple determinar qué envase contiene más o menos cantidad respecto de otro. Pero no es tan sencillo establecer cuánto más o cuánto menos uno respecto de otro. Fue necesario seleccionar una unidad, la que en primera instancia se asignó al envase de tres litros y se pidió determinar qué parte del mismo correspondía a cada uno los otros envases. La respuesta vino por la acción de transvasar líquido, tantas veces como fue necesario hasta llenar la unidad seleccionada, sin olvidar de hacer las correspondientes marcas en esta. De este modo, los estudiantes observaron que el envase de medio litro correspondía a la sexta parte del envase de tres, mientras que el de 1.5 representaba la mitad. Pero al transvasar el líquido contenido en la botella de 2.25 litros a la unidad, los estudiantes comprobaron que las marcas realizadas anteriormente en la botella de tres litros no servían. Decidieron, al final, usar marcas intermedias que los llevó a obtener doceavos.

Posteriormente se usaron los otros envases como unidad. Así la noción de fracción y de equivalencia entre fracciones, quedó afianzada de manera experimental. La corta duración del

taller, sólo unas seis horas, no permitió profundizar demasiado ni considerar otros temas. Pero los resultados obtenidos aún con esta limitación, fueron satisfactorios.

La experiencia en el curso escolar

Como en los años siguientes, las evaluaciones diagnósticas evidenciaban entre los alumnos que llegaban al segundo año, las mismas fallas en lo relativo a la noción de fracción y de operatoria de fracciones, se decidió repetir para ellos, la experiencia del taller de recuperación, esta vez durante el año escolar y con una mayor carga horaria. Se repitieron las actividades antes descriptas y destacamos que los estudiantes advirtieron que una misma fracción podía representar capacidades diferentes según la unidad seleccionada. La representación simbólica correspondiente no ofreció obstáculos por cuanto era conocida (recordemos que el tema corresponde a la escuela primaria). Entonces, los envases fueron reemplazados por cuadrados de papel, como unidades, para afianzar una de las representaciones gráficas tradicionales de las fracciones.

Luego se consideró el problema de la suma y diferencia de fracciones de igual denominador, sin que se presentaran dificultades para resolverlas tanto por medio del plegado de los cuadrados de papel y con la representación numérica habitual.

Para el caso de denominadores diferentes, se pidió resolver, por medio del plegado, la suma $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$. Los alumnos observaron que la representación de una de las fracciones no servía para medir la otra y viceversa, porque "algo sobraba o faltaba", según sus expresiones.

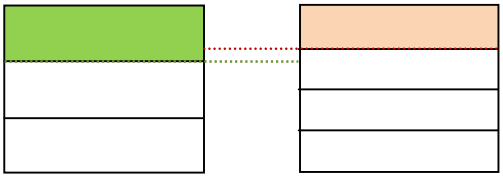


Figura 1: Imposibilidad de medición directa entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$

El enseñante preguntó entonces si las representaciones elegidas eran las únicas posibles para las fracciones dadas. Así, los estudiantes recurrieron a los gráficos de fracciones equivalentes que les permitieron obtener $\frac{1}{3}=\frac{4}{12}$ y $\frac{1}{4}=\frac{3}{12}$

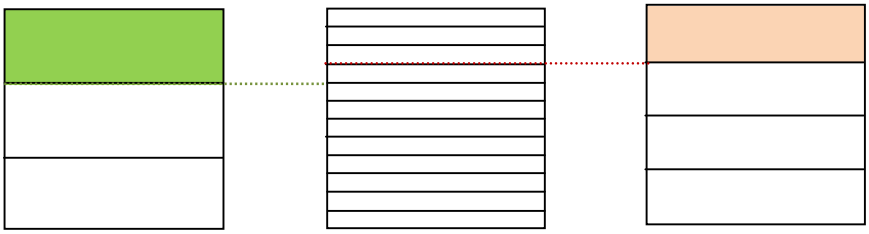


Figura 2: Equivalencia gráfica $\frac{1}{3}=\frac{4}{12}$ y $\frac{1}{4}=\frac{3}{12}$

Y de este modo lograron la solución $\frac{7}{12}$ según el sentido "natural" de aumentar para la suma. También se usó de la misma idea para recuperar el sentido de quitar en el caso de la diferencia de fracciones de distintos denominadores. Tampoco se omitió escribir la correspondiente expresión numérica para sintetizar este trabajo. Es decir,

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{1\times 4}{3\times 4}+\frac{1\times 3}{4\times 3}=\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{7}{12}$$

Podíamos pensar que con esta actividad finalizaban las acciones de enseñanza y aprendizaje para la suma y diferencia de fracciones. Pero ahora, el profesor escribió en la pizarra la suma de dos fracciones arbitrarias (pero susceptibles de visualizarse por plegado de los cuadrados de papel) y su resultado según el algoritmo erróneo clásico de sumar entre sí numeradores y denominadores:

$$\frac{1}{4}+\frac{3}{5}=\frac{4}{9}$$

No faltó el estudiante que observara que el denominador resultante no "medía" (según su expresión) a ninguno de los denominadores dados; esto es, no contenía a los mismos. El docente insistió en su postura y hubo discusiones. Pero los alumnos ahora tenían un medio de validar el resultado por medio del plegado y por la búsqueda aritmética de fracciones equivalentes; así que varios generaron sus representaciones, con los cuadrados y con los símbolos fraccionarios, y lograron la respuesta correcta. En este punto, el profesor recuperó la noción de múltiplo común para buscar el denominador común. Con ello, los estudiantes accedieron de manera clara y significativa a un algoritmo aritmético para sumar y restar fracciones de denominador diferente: conseguir un denominador común por medio de la búsqueda fracciones equivalentes a las dadas, eligiendo apropiadamente los factores. Con ello se logró una aproximación mejor al "saber sabio" (es decir, el saber académico) (Chevallard, 1997):

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}$$

ya que consideramos a la secuencia algorítmica clásica (descripta en el apartado de referentes teóricos) un poco más alejada de este. Sí se realizaron prácticas intensivas para el algoritmo propuesto, ya que no todas las fracciones son representables gráficamente.

El éxito logrado para el trabajo con suma y diferencia de fracciones alcanzó el 87 % en la última experiencia, ya que en las anteriores se logró hasta un 65 %, que de todos modos resultó netamente superior al de los resultados habituales diagnósticos: hasta un 30 %.

Conclusiones

El estudiante que está en el segundo año del nivel medio se encuentra apto para comenzar a desenvolverse en la abstracción propia de la matemática. Pero dicha abstracción ocurre a partir de la experiencia previa con lo concreto. Si esta no está, no hay qué abstraer, que significa "separar por medio de una operación intelectual las cualidades de un objeto para considerarlas aisladamente o para considerar el mismo objeto en su pura esencia o noción" (Real Academia Española, 2000, p.14).

Es cierto que el estudiante puede memorizar un algoritmo y usarlo como si fuera una calculadora. Pero la memoria humana es frágil y la máquina resulta superior en procedimientos algorítmicos. Por el contrario, la razón humana tiene una enorme potencia y por ello es capaz de generar algoritmos. El fin de la educación matemática no es "fabricar personas con códigos de barras" (Alsina, 1995, p.25). Alsina nos recuerda que:

> Tu estudiante de matemática es un ser social. Tiene un contexto, su lengua y sus costumbres, sus experiencias. No desprecies nunca lo que ya sabe y en la forma en que lo sabe. Aprovecha el bagaje y tira de él. Hacia adelante nunca hacia arriba… Sube escalones. Desprecia el ascensor (1995, p.18).

De modo que si el aprendiz no tuvo la experiencia concreta de operar con fracciones, no debería ser enfrentado directamente con algoritmos aparentemente caprichosos.

También hay que considerar que el estudiante se encuentra en una etapa de su vida en que trata de afianzar su personalidad. Esta es frágil aún y todo fracaso contribuye a disminuir su autoestima. Creemos que como una de las maneras de proteger esa autoestima, es el abandono del estudio de la matemática, cuando el mismo no es exitoso.

La experiencia descripta tomó mucho tiempo. No siempre las situaciones propuestas eran replicables exitosamente. Por ello aprendimos a tener mayor cuidado al elegir los problemas y los recursos para cada nuevo grupo de estudiantes. En el entorno escolar muchos consideraban que en la secundaria no se debería 'perder tiempo' en la enseñanza de nociones y procedimientos que corresponden al nivel primario. Pero el aprendizaje de la matemática es acumulativo y helicoidal. Es imposible avanzar significativamente si se carece de los contenidos previos. Y tampoco se puede 'mirar desde más arriba' algo que carece de existencia previa. Una aparente 'pérdida de tiempo' en re-aprendizaje facilita futuros aprendizajes correlativos. La finalidad del trabajo docente es que los alumnos aprendan y progresen. Si encontramos maneras adecuadas para estos propósitos, también nosotros aprendemos y progresamos profesionalmente.

También en esta ocasión rescatamos los sentimientos expresados por los estudiantes luego de lograr resultados satisfactorios tanto durante el proceso de aprendizaje, como en las correspondientes evaluaciones, sintetizados en la aclamación: "¡así quiero aprender!"

Referencias bibliográficas

Alsina, C. (1995). *Una matemática feliz y otras conferencias*. Buenos Aires: Red Olímpica.

Ander-Egg, E. (1991). *El Taller, una alternativa para la renovación pedagógica*. Buenos Aires: Editorial Magisterio.

Brousseau G., (1993). *Fundamentos y Métodos de la Didáctica de la Matemática*. Córdoba: Editado por I. Dotti y J. Vargas, Universidad Nacional de Córdoba.

Chevallard, Y. (1997). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.

Mathiaud, M. (1996). *Enseñar a Partir de Actividades. Enseñanza de las Matemáticas: Relación entre Saberes, Programas y Prácticas*, 139-158. Point-a-Mouson: Ed. E. Barbin y R. Douady.

Real Academia Española (2000). *Diccionario de la Lengua Española* (21ª ed.). Madrid: Editorial Espasa Calpe S.A.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10 (2) , 133-170.

LA GEOMETRÍA EN UN CURSO DE INGRESO A CARRERAS DE INGENIERÍA

Roxana Scorzo
Universidad Nacional de la Matanza Argentina
rscorzo@yahoo.com.ar

Resumen. En el siguiente artículo queremos sintetizar algunas características del curso de ingreso a carreras de ingeniería de la Universidad Nacional de La Matanza, las causas de la incorporación del dictado de la materia Geometría en dicha instancia, la organización de contenidos de dicha asignatura a partir de los objetivos que hemos planteado en correspondencia con los objetivos del Departamento de Ingeniería e Investigaciones Tecnológicas. Mostraremos algunos ejemplos de problemas que forman parte del manual de ingreso que usan los alumnos. Por otra parte la Universidad tiene como sello distintivo la permanente preocupación por la inclusión del alumnado y esto se refleja desde el comienzo del dictado del curso de admisión. Describiremos brevemente las acciones puestas en práctica en el dictado de la materia mencionada para lograr en parte esta permanencia.

Palabras clave: ingreso, geometría, ingeniería

Abstract. In the following article, we want to synthesize some features of the admission course to engineering careers of The National University of La Matanza, the causes of the incorporation of Geometry in that course, the organization of the contents of that subject according to the objectives of the Department of Engineering and Technological Research. We will show some examples of the problems that are included in the manual that the students use. In addition to this, the University has a permanent concern of the inclusion of students and this is reflected since the start of the admission course. We will briefly describe the actions implemented in the mentioned subject to achieve the permanence of the students.

Key words: admission course, Geometry, engineering

Introducción

A partir del año 2012 se incorporó en el Curso de Admisión a Carreras de Ingeniería de La Universidad Nacional de La Matanza la enseñanza de Geometría como una de las asignaturas a cursar con carácter obligatorio. Los aspirantes a ingresar a la Universidad en las carreras antes mencionadas deberán cursar tres materias: Matemática, Seminario y Geometría. A lo largo de los últimos tiempos se ha observado la dificultad en el manejo de conceptos básicos vinculados con la geometría plana y del espacio en los alumnos que cursan las materias básicas correspondientes a la carrera. Esta inquietud no es solo una percepción de los docentes de nuestra universidad, Giandini y Salerno (2009) señalan en su artículo que esta preocupación por mejorar la articulación entre la escuela media y la Universidad es compartida por la Universidad Nacional de San Luis, Universidad Nacional de Tucumán, Universidad Nacional de San Juan, en la Universidad Tecnológica Nacional Regional Córdoba, en el Instituto Tecnológico de Buenos Aires, entre otros centros de enseñanza. Así lo demuestran estudios realizados en dichas universidades como en otras de Latinoamérica que la problemática del ingreso y permanencia de los alumnos a la universidad son el eje central de preocupación de los últimos tiempos. Por ello en el presente trabajo se presentan algunos ejemplos de las dificultades detectadas en algunas de las asignaturas como por ejemplo Análisis Matemático I, Álgebra, Representaciones Gráficas y Física I y en

función de las mismas cuales fueron los objetivos específicos planteados para poder lograr mejorar estas dificultades y los temas seleccionados para incorporar en esta nueva materia que reemplaza al dictado de Filosofía en la etapa de ingreso.

Acerca de la Geometría

La Geometría es la rama de la Matemática más utilizada por el hombre común para pasar de lo concreto a lo abstracto, dado que el espacio físico que nos rodea es la principal fuente de interpretación de esta materia. El futuro ingeniero debe transformar los cuerpos que lo rodean, establecer relaciones métricas entre ellos y tener la capacidad de formalizar los pensamientos para poder actuar en la transformación de dichos objetos.

Barrantes López (2003) si bien hace referencia a la enseñanza de la geometría en la enseñanza primaria y media dice que el aprendizaje de esta disciplina conecta al alumno con el mundo que lo rodea, dado que en el desarrollo de la vida cotidiana el conocimiento, intuición y las relaciones geométricas juegan un papel destacado. En otro artículo más reciente Barrantes y Balletbo Fernández (2012) señalan que la geometría favorece el desarrollo de ciertas capacidades en los alumnos como ser la percepción visual, el razonamiento lógico y la aplicación a problemas concretos de otras áreas de la Matemática. Por otra parte y en referencia concreta a la formación de un futuro ingeniero, Nieto Lovo (2004) destaca la importancia del aprendizaje de las ciencias básicas, ya que éstas le permitirán enfrentar problemas que requieren respuesta efectiva propia de su labor profesional futura. Se considera que en la formación de un futuro ingeniero este conocimiento de la vida cotidiana, como el desarrollo de las capacidades a las que hacen referencia los autores citados anteriormente son de carácter fundamental.

Metodología de desarrollo del curso de ingreso

El ingreso en la Universidad Nacional de La Matanza depende de Secretaría Académica, esto significa que existen directivas generales a todas las carreras que se dictan en la Universidad, cualquiera sea el Departamento al cual pertenecen. En este artículo se hace referencia al ingreso a las Carreras de Ingeniería (Electrónica, Informática, Civil e Industrial) que dependen del Departamento de Ingeniería e Investigaciones Tecnológicas de dicha casa de estudios. El ingreso se organiza en dos instancias, la primera se desarrolla del mes de Julio a Diciembre con posibilidad de recuperar en Marzo cumpliendo con ciertos requisitos. La segunda se cursa de manera intensiva en los meses de Febrero- Marzo y sin posibilidades de recuperación. En ambas instancias los alumnos cursan tres materias que son: Matemática, Seminario y Geometría, siendo la asignatura específica la primera, es decir en el promedio ponderado que se hace para obtener la calificación final del Curso de Ingreso es la de mayor peso.

Primera instancia

Los aspirantes a ingreso deben asistir a clase dos veces por semana de acuerdo a la combinación de días escogida por el alumno en su inscripción, pueden optar entre dos franjas horarias turno mañana o tarde pero también para aquellos alumnos que cursan jornada completa en las escuelas como por ejemplo los técnicos pueden hacerlo sólo los días sábados en doble turno. La asistencia es obligatoria, siendo un requisito académico el 75% de presentismo en cada una de las asignaturas. Se establece un cronograma con las fechas de cada uno de los exámenes que el alumno debe rendir de cada materia. Toda esta información está disponible en la página de la universidad y en el Manual Curso de Ingreso que se le entrega a cada aspirante en su inscripción.

Segunda instancia

Esta es de carácter intensivo dado que el alumno cursa simultáneamente las tres materias de lunes a viernes en un turno de manera completa. Los otros requisitos se repiten en esta instancia. Una diferencia entre la primera y la segunda instancia es que los alumnos que cursan en la primera tienen posibilidad de recuperar algún examen no aprobado la única condición que se les exige es haber aprobado una de las tres materias que cursan.

El porqué de la incorporación del dictado de Geometría en el curso de admisión

Los docentes de diferentes cátedras fueron consultados acerca de cuáles eran las principales falencias que notaban en los estudiantes en cuanto a los conocimientos básicos que hacen a la asignatura geometría. Exponemos a continuación algunas de las respuestas obtenidas que motivaron en principio la organización de contenidos que daremos a conocer luego.

Análisis Matemático I:

- Reconocer simetrías por ejemplo a la hora de hablar de funciones pares o impares, o bien cuando se relaciona la gráfica de una función con su inversa mediante una simetría respecto de la función identidad.
- Transformación de funciones: cuando se explican desplazamientos de funciones o bien reflexiones con respecto a los ejes cartesianos.
- Problemas de optimización: reconocer diferentes figuras y cuerpos propiedades que las caracterizan cálculo de áreas, perímetros y volúmenes.

Física:

- Magnitudes vectoriales
- Sistemas de referencia
- Reconocimiento de figuras y cuerpos.

Representaciones gráficas:

- Manejo de útiles de geometría.
- Posiciones relativas entre rectas y planos.
- Trazados específicos.
- Dificultades a la hora de realizar mediciones de ángulos.

Álgebra:

- Interpretación y representación de rectas y planos en el espacio.

Matemática discreta:

- Reconocer vértices y diagonales de un polígono en la construcción de grafos.

Análisis Matemático II:

- Gráficos en tres dimensiones.

En respuesta a estas dificultades señaladas por los colegas hemos organizado los contenidos de la materia y previamente nos planteamos los objetivos específicos de la asignatura en correspondencia con uno de los objetivos del Departamento de Ingeniería e Investigaciones Tecnológicas: *Formar a sus alumnos con sólidos conocimientos en ciencias básicas y formación ingeniería acorde a las necesidades actuales*.

Objetivos específicos de la asignatura Geometría

- Adquirir destrezas en la resolución de problemas de lógica matemática.
- Lograr habilidades relacionadas con la percepción de la posición en el espacio y de relaciones espaciales entre objetos.
- Construir figuras y cuerpos geométricos haciendo uso de instrumentos de geometría.
- Resolver situaciones problemáticas basándose en figuras y cuerpos geométricos.
- Lograr habilidades de traducción que le permitan dominar diferentes lenguajes: coloquial, simbólico y gráfico.
- Reconocer y aplicar diferentes movimientos y transformaciones geométricas.
- Aplicar conceptos de trigonometría en la resolución de problemas.

Programa de la materia

Unidad 1: Resolución de problemas.

Problemas aplicados de Lógica y Matemática Básica

Unidad 2: Elementos de Geometría Plana.

Elementos básicos: punto, recta (posiciones relativas de dos rectas), semirrectas, segmentos, ángulos. Polígonos, elementos.

Triángulos, elementos, clasificación y propiedades. Teorema de Pitágoras

Cuadriláteros: Elementos y clasificación.

Círculo y circunferencia: Elementos y propiedades.

Cálculo de perímetros y áreas.

Problemas de aplicación.

Unidad 3: Movimientos y Homotecias.

Movimientos: simetría axial, simetría central, traslación y rotación. Figuras congruentes. Homotecia. Figuras semejantes. Construcciones geométricas básicas. Reconocimiento de simetrías en figuras. Escalas.

Unidad 4: Trigonometría

Razones trigonométricas. Relaciones entre las funciones trigonométricas de un mismo ángulo. Búsqueda de valores de las funciones trigonométricas directas e inversas con calculadora científica.

Resolución de triángulos rectángulos

Ángulos orientados .Sistema circular de medición.

Segmentos representativos y signos de las funciones trigonométricas en los distintos cuadrantes

Teorema del seno y del coseno. Triángulos oblicuángulos.

Gráficos cartesianos de las funciones trigonométricas.

Unidad 5: Elementos de Geometría del espacio.

Superficies poliédricas. Elementos

Prisma. Pirámide. Cilindro. Cono. Esfera. Elementos y propiedades.

Cálculo de volúmenes y áreas.

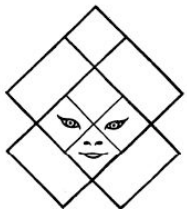
Problemas de aplicación.

Ejemplos de problemas de alguna de las unidades descriptas

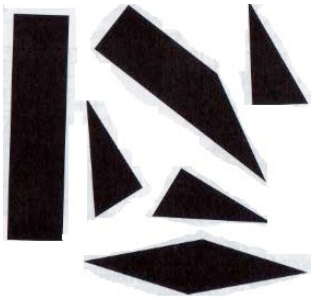
La unidad transversal de problemas fue pensada para que en cada clase los alumnos puedan tener un espacio de intercambio grupal y resolver un problema de los planteados. La selección de éstos se hizo entre otras fuentes consultando algunos de los ejercicios que se toman en las pruebas de evaluación internacional de alumnos: PISA.

- ¿Cuántos cuadrados distintos puedes contar en el dibujo del joven hindú con turbante?

  Observa atentamente. ¡Los problemas no son tan fáciles como podría parecer!



Corte estas piezas, o reacomódelas mentalmente. Algunas de ellas deberán ser rotadas, invertidas o trasladadas. Todas juntas forman una letra mayúscula del alfabeto. ¡Buena Suerte!



- Establece si entre los gráficos de flecha que figuran debajo, existen figuras semejantes. Justifica.

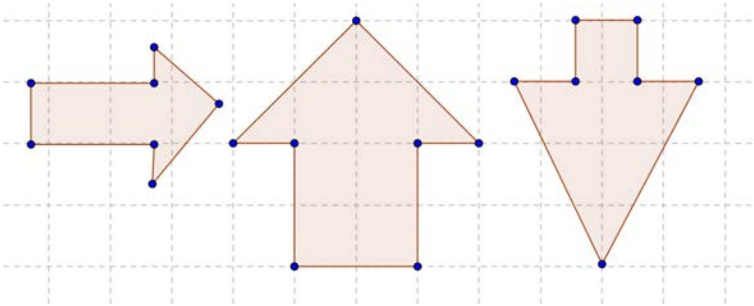
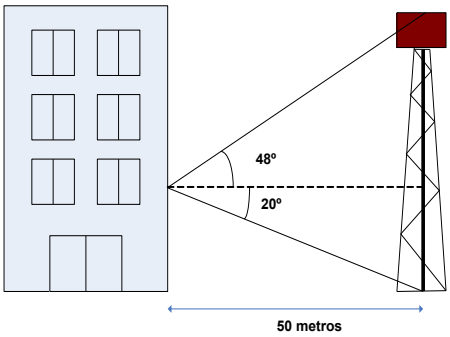
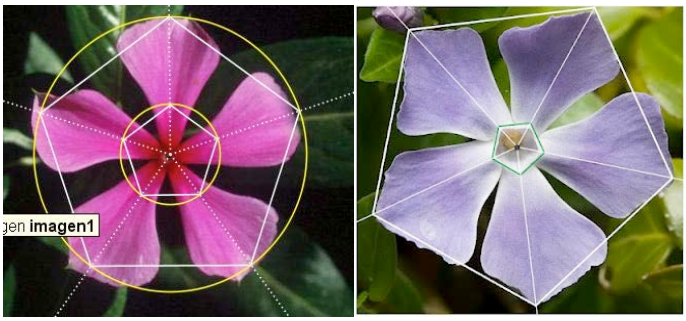


Figura A Figura B Figura C

- La sección plana uniforme de corte de una pileta de natación es un trapecio cuyos lados paralelos miden 1 m y 2,5 metros, y se encuentran a una distancia de 30 metros. La profundidad de la piscina es de 10 m. ¿Cuánta agua cabe en la pileta cuando está llena?
- En el siguiente gráfico, determine la altura de la torre de agua



- Reproduce usando regla y compás el polígono de alguna de estas dos imágenes. Explica el procedimiento.



Acerca de la inclusión

El dictado de Geometría en el curso de ingreso a carreras de ingeniería fue iniciativa de las autoridades del Departamento quienes observaban que el cursado y aprobación de Filosofía, materia que fue reemplazada por Geometría, presentaba un verdadero obstáculo en el ingreso a la carrera. Otra de las incorporaciones que favorecen la permanencia de los alumnos es contar con clases de consulta de asistencia voluntaria a lo largo de todo el curso de ingreso.

A modo de conclusión

Es el primer año que se dicta esta materia en el curso de ingreso, aún no se sabe las implicancias que tendrá en el desarrollo de las materias básicas. Se pretende mediante encuestas que se realizarán a docentes y alumnos durante el ciclo 2013, obtener información acerca de las repercusiones en las distintas asignaturas que ha tenido esta implementación en correspondencia con las dificultades planteadas en cada materia.

Pretendemos mejorar esta primera propuesta de contenido de la materia como así también recuperar el espíritu de resolución de problemas geométricos.

Referencias bibliográficas

Barrantes López, M. (2003). Caracterización de la enseñanza aprendizaje de la geometría en primaria y secundaria. *Campo Abierto,* 24,15-36.

Barrantes López, M. y Balletbo Fernández, I. (2012). Referentes principales sobre la enseñanza de la geometría en Educación Secundaria. *Campo Abierto,* 31(2), 139-153.

Giandini, V. H. y Salerno, M. N. (2009). La Geometría, los Ingresantes y el Software Maple. *Formación Universitaria,* 2 (4), 23-30.

Nieto Lovo, M.R. (2004). *El papel de las ciencias básicas en la enseñanza de la ingeniería*. Recuperado el 30 de Marzo de 2013 de http://www.science.oas.org/Ministerial/Inge/ElSalvador-Dr.%20Nieto-Ponencia%20Quetzaltenango.pdf

LAS PRÁCTICAS MATEMÁTICAS EN LOS INICIOS DEL NIVEL SUPERIOR

María Carmen Quercia, Adriana Laura Pirro y Lucrecia Ethel Moro
Universidad Nacional de Mar del Plata Argentina
mariacarmenq@yahoo.com.ar, adriana.pirro@gmail.com, lemoro@mdp.edu.ar

Resumen. Muchas de las dificultades que aparecen en el tránsito de los estudiantes del nivel secundario al nivel superior, pueden ser explicadas en términos de los cambios que se producen en el tipo de actividad matemática que se desarrolla en cada uno de estos niveles.
Para contribuir a superar una de estas dificultades: el paso de una matemática "mostrativa" en secundaria a una "demostrativa" en la universidad, se ha diseñado un Taller de Prácticas Matemáticas a ser implementado con alumnos ingresantes en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata. Se presentan en este trabajo los fundamentos teóricos de su diseño e implementación a partir del diagnóstico realizado
Palabras clave: taller de prácticas matemáticas, demostración
Abstract. Many of the difficulties encountered students' transition from high school to college can be explained in terms of the changes that occur in the mathematical tasks developed in each of these levels.
To help overcome one of these problems—the change from 'explanatory' mathematics at high school to 'demonstrative' mathematics at college, a Workshop on Mathematical Practice has been designed to be implemented with incoming students in the School of Engineering at the National University of Mar del Plata (Universidad Nacional de Mar del Plata, UNMdP). In this paper we present the theoretical basis for its design and implementation from the diagnosis made.
Key words: workshop on mathematical practice, demonstration

Introducción

Entre las dificultades relativas al aprendizaje y al estudio de la Matemática que aparecen en el tránsito del Nivel Secundario al Nivel Superior, algunas son más "visibles", como el bajo rendimiento de los estudiantes en el curso de nivelación que cada año se desarrolla en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata. Otras, como los índices de lentificación y/o de deserción en los primeros años de las carreras de Ingeniería se producen "disimuladamente" durante el cursado de las materias correspondientes al primer cuatrimestre del primer año de estudios.

En ambos casos, se han detectado dos aspectos.

Por un lado, y a partir del análisis realizado de los exámenes de ingreso y de los exámenes parciales de las asignaturas Algebra A y Análisis Matemático A, se observa, entre otras cuestiones, que los estudiantes resuelven satisfactoriamente los llamados "ejercicios tipo", pero si, por ejemplo, la consigna no responde a esta estructura, la validación de resultados queda limitada al plano de las conjeturas o directamente no aparece.

Por otro lado, durante las clases prácticas, los alumnos muestran en sus consultas falta de confianza en sus propias posibilidades cuando la situación propuesta para resolver no se centra en lo algorítmico. Reclaman en este caso, una "fórmula" o un "método" para la resolución y tienden

a desestimar la orientación del docente que los invita a explorar, representar y conjeturar para luego poder arribar a una validación de los resultados.

En este último sentido, queda manifiesta una diferencia muy general y característica entre las organizaciones matemáticas de la escuela secundaria y de la universidad, que es el paso de una matemática "mostrativa" a una matemática "demostrativa" (Gascón, 1997).

A partir de estos análisis preliminares, y para contribuir a facilitar este cambio en los inicios del nivel superior, se ha concebido, como una posibilidad, el Taller de Prácticas Matemáticas, que tiene como destinatarios a los alumnos que comienzan su primer año de estudios en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata y que se desarrolla en la semana previa al inicio del ciclo lectivo.

Fundamentos teóricos del diseño e implementación del Taller de Prácticas Matemáticas

Para el encuadre de este Taller se consideran los lineamientos que en sus trabajos de investigación didáctica han establecido Chevallard, Bosch y Gascón (1997) quienes, para la enseñanza universitaria, muestran la necesidad y la pertinencia de enriquecer los dispositivos didácticos tradicionales (clases de teoría y de práctica) con los del tipo que aquí se propone para incidir en la estructuración y en el desarrollo del proceso de estudio de las matemáticas en este contexto.

A continuación se presentan los aspectos tenidos en cuenta en el diseño e implementación del Taller de Prácticas Matemáticas: la selección de contenidos, los objetivos de aprendizaje, las nociones previas que deben tener los alumnos y la estructura y análisis a priori de las situaciones de enseñanza que se proponen.

Selección de contenidos

El proceso de producción de conocimientos matemáticos implica el uso de diferentes formas de razonar. Sin embargo, en el momento de dar cuenta de los conocimientos producidos, la racionalidad matemática exige dejar de lado en las explicaciones las formas no deductivas para arribar a resultados legitimados en la comunidad científica.

En este sentido, y para favorecer así a los estudiantes en el paso de una matemática "mostrativa" a una matemática "demostrativa", se tiene como propósito en este Taller enseñar las formas de validar en matemática. Para ello, se considera pertinente el tratamiento de las reglas que Arsac (1992) denomina "reglas del debate" y que se refieren a enunciados cuyo dominio de validez es infinito. En este espacio se profundiza en tres de ellas:

- Un enunciado matemático puede ser verdadero o es falso.

- Un contraejemplo es suficiente para validar la falsedad de un enunciado.
- En matemática, no son suficientes algunos ejemplos que verifican un enunciado para probar que es verdadero.

En relación a esta última regla, en el Taller de Prácticas Matemáticas se busca que los alumnos la amplíen apropiándose de la forma de validación propia de la comunidad de matemáticos. En términos de Balacheff (1987) -quien distingue entre explicación, prueba y demostración- en el seno de la comunidad matemática, se aceptan pruebas que adoptan una forma particular, y que son las demostraciones:

> a partir de una serie de enunciados según reglas determinadas, un enunciado es aceptado como verdadero, o bien es deducido de aquellos que le preceden con la ayuda de las reglas de la deducción tomadas de un conjunto de reglas bien definidas (Panizza, 2005, p.15).

En este sentido, se asume que un razonamiento es válido si a partir de ciertos enunciados (las premisas) se deriva otro (la conclusión) de manera tal que siempre que las premisas son verdaderas, la conclusión también es verdadera.

Se tienen en cuenta entonces en este Taller los problemas ligados a la validez lógica y la verdad pues, según la manera en que los estudiantes regulen los procesos que afectan a la validez y a la verdad, resultarán los objetos, propiedades y significados que formen parte de sus conocimientos. Su comprensión del funcionamiento de los distintos modos de razonamiento, sus nociones de verdad, el grado de credibilidad que otorgan a los enunciados, los contextos en los cuales realizan los razonamientos, son algunos de los elementos que intervienen en sus procesos de validación y control.

Estos análisis ponen en evidencia la complejidad del proceso de razonamiento de un estudiante, destacando el papel que juegan sus conocimientos cuando realiza una deducción. En este sentido se señala aquí que una de las relaciones entre conocimientos y capacidad de razonar es

> que la capacidad de razonar no es independiente de los contenidos matemáticos en juego. Desde el punto de vista de la enseñanza, esto nos conducirá a discutir nuestra posición: no es conveniente pensar en el razonamiento matemático como un objeto (de enseñanza) en sí mismo, sino en estrecha conexión con los contenidos. (Panizza, 2005, p.20).

Se asume entonces que las diferentes áreas de la matemática (aritmética, geometría, álgebra, estadística, etc.) plantean problemas específicos respecto del razonamiento y tanto los problemas generales como los específicos deberían ser abordados desde la enseñanza a fin de orientar a los

estudiantes en el desarrollo de la *racionalidad matemática* y el aprendizaje de los diferentes saberes de este dominio.

Acorde a esta última cuestión, en este Taller se enseñan las reglas del debate matemático y las técnicas de demostración a propósito de problemas para cuya resolución se ponen en juego nociones ligadas a la divisibilidad en el conjunto de los números naturales.

Objetivos de aprendizaje

- Aprender a razonar según las reglas legítimas del pensamiento matemático en interacción con sus pares.
- Estudiar de manera autónoma.
- Resignificar la propia actividad matemática a la luz de los objetivos anteriormente planteados.

Conocimientos previos necesarios de los alumnos

- Divisibilidad en el conjunto de los números naturales: múltiplos y divisores, números primos y números compuestos.
- Cuestiones elementales ligadas al proceso de generalización.

Concepción y análisis a priori de las situaciones

Para el diseño y el análisis a priori de las situaciones que se proponen para este Taller se identifican y describen las variables globales que intervienen en la configuración de la dinámica de las mismas:

Metodología de trabajo en el aula

Los doscientos alumnos ingresantes se distribuyen en tres grupos de similar cantidad de asistentes y para cada grupo se implementa un Taller de Prácticas Matemáticas.

En este Taller se proponen situaciones ligadas a la resolución de problemas y a la reflexión en torno a los procedimientos que se realizan para resolverlo y los resultados que se obtienen.

Cuando se menciona la palabra *problema* no se hace referencia a la ejercitación que afianza aprendizajes logrados, sino a una situación en la que el alumno, al poner en juego los conocimientos que ya posee, los cuestiona y los modifica generando nuevos conocimientos. La resolución de un problema matemático requiere que el alumno pruebe, se equivoque, recomience a partir del error, proponga soluciones, las defienda, las discuta, comunique procedimientos y conclusiones, construya conceptos.

Una situación se transforma en problema cuando el alumno lo reconoce como tal y decide hacerse cargo de él, y para lograrlo, se propone intercalar momentos de trabajo en forma individual con instancias en pequeños grupos, y también la participación en debates colectivos, reconociendo que las discusiones entre pares constituyen una etapa de la comprensión matemática y un punto de partida para la formalización de los conceptos. Además, promueven en el alumno la necesidad de buscar argumentos sólidos para sostener sus hipótesis en el intercambio entre pares.

Desde esta perspectiva se promueve tanto el aprendizaje de los contenidos seleccionados, como su estudio pues, si bien en este trabajo se sostiene que no hay aprendizaje sin un trabajo personal del alumno, es decir, sin estudio, también se asume que contribuir a la organización del estudio del alumno debe ser parte del proyecto del profesor.

Para el desarrollo del Taller de Prácticas Matemáticas se tienen previstos dos encuentros de dos horas de duración cada uno en la semana previa al inicio del ciclo lectivo.

Rol del docente

Las intervenciones docentes resultan esenciales en el proceso que se pretende desarrollar en este Taller, pues es su responsabilidad favorecer la creación de un ambiente en el que los alumnos encuentren las condiciones adecuadas para el quehacer matemático: explorar, conjeturar, volver con una mirada crítica sobre las actividades que se van desarrollando, diseñar técnicas y estrategias para obtener soluciones, detectar errores y discutir sus producciones con sus compañeros.

Para lograrlo, es el docente quien define cuándo la actividad se efectúa en forma individual o grupal, si habrá puesta en común o cierre y en qué momento de la clase se realiza cada tarea. El profesor actúa entonces como coordinador, acompañando a los estudiantes durante su tarea, pero sin interferir con el trabajo autónomo que deben desarrollar para resolver las situaciones propuestas. Es decir, en algunos casos, las intervenciones del docente tienden a reorientarlos, cuando es necesario, hacia los objetivos que se hayan planteado. En otros casos, ayuda a los estudiantes a descartar aquellos planteos que no se relacionen con la propuesta, lo que no significa que él también los descarte, ya que podrá retomarlos posteriormente. En cualquiera de estas dos situaciones debe retomar el tema principal para que los alumnos continúen trabajando.

Si el docente observa que la tarea de algún alumno o grupo no avanza en algún sentido, resulta necesario que entable un diálogo que le permita descubrir las razones de ello y brinde cierta información para que la tarea se restablezca, recurriendo, por ejemplo, a preguntas orientadoras,

a una nueva lectura de la situación, a la evocación de situaciones anteriores que tengan relación con la actividad que se está desarrollando.

El docente, en el momento que considera apropiado, organiza una puesta en común de las conclusiones obtenidas por los estudiantes. De esta puesta en común, en la que se confrontan distintas soluciones, extrae aquello que las relaciona y establece el estatus matemático de las construcciones de los alumnos.

Estructura y análisis a priori de la secuencia de enseñanza:

Primer encuentro:

A fin de indagar los saberes previos de los alumnos, en relación al contenido que se quiere enseñar, se propone a los estudiantes una primera situación. Se trata de un problema para que determinen la verdad o falsedad de seis enunciados matemáticos referidos a la divisibilidad en el conjunto de los números naturales:

Decidan si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos y expliquen en todos los casos por qué.

a) *Todo múltiplo de 4 es múltiplo de 8.*

b) *Si se suman tres números naturales consecutivos, el resultado es siempre múltiplo de 3.*

c) *Si se suman dos divisores de 36, el resultado es divisor de 36.*

d) *Si se multiplican dos números primos, se obtiene un número primo.*

e) *Si el cuadrado de un número natural es un número impar, entonces éste es un número natural impar.*

f) *Si a un múltiplo de 6 se le suma un múltiplo de 3, el resultado es un múltiplo de 3.*

Los estudiantes trabajan primero individualmente y luego en pequeños grupos. Ante sus consultas, el docente sostiene cierta incertidumbre momentánea promoviendo el análisis de aspectos que aquellos aún no hayan advertido, con el propósito de que la construcción de conocimiento de los alumnos se fortalezca analizando los puntos cuestionables de la misma.

En el momento de la clase previsto para la puesta en común de las producciones de cada uno de los grupos, propone a la clase completa la discusión sobre el valor de verdad de las cuestiones planteadas en el trabajo previo. Procura que los estudiantes muestren a sus compañeros la validez de sus desarrollos con argumentos sólidos. Para ello es preciso que sus intervenciones habiliten la palabra de un integrante de cada grupo, de manera que no se aprecien sólo algunas de las propuestas.

La puesta en común posibilita la identificación de los conocimientos disponibles en los alumnos en relación a las reglas del debate matemático, tratando de comprender qué es lo que hay detrás del discurso de los alumnos cuando analizan el valor de verdad de los enunciados matemáticos. Es posible que aparezcan respuestas que intenten explicar que, si con un contraejemplo puede argumentarse que un enunciado matemático es falso, entonces con "muchos" ejemplos puede sostenerse que un enunciado es verdadero. Pueden aparecer también dificultades de los alumnos en relación a vincular indebidamente la validez con la verdad, pudiendo ser las razones de ello de naturaleza diversa: la fuerza del contenido sobre la forma en el análisis de la verdad y de la validez, la noción de verdad que manejan los alumnos, la influencia del razonamiento y del lenguaje natural, etc. (Panizza, 2005).

Respuestas y dificultades como las recientemente enunciadas, entre otras, se constituyen entonces en un punto de apoyo para enseñar las técnicas de demostración (forma directa, forma indirecta y método del absurdo). A partir de las producciones de los alumnos se destaca también la conveniencia de utilizar una u otra técnica en función del enunciado matemático verdadero propuesto.

Luego de orientar a los estudiantes respecto de qué registrar en las carpetas en referencia a lo recientemente acordado para que lo tengan disponible para estudiar, se les propone como estrategia de aprendizaje individual la "explicación a un amigo" (Napp, Novembre, Sadovsky, Sessa, 2005):

Imagínense que un amigo de ustedes no entiende los problemas resueltos en la actividad anterior y les pide ayuda. Pero, debido a incompatibilidades de horarios, no se pueden reunir y ustedes deben explicárselos por escrito.

Por supuesto, el escrito no debe sólo contener la resolución de los ejercicios, sino que tiene que incluir explicaciones, consejos, ayudas, relaciones entre los distintos conceptos que se involucran, etc. Es decir, que todo lo que este amigo necesite para estudiar tiene que estar escrito.

Esta producción debe estar completa para el segundo encuentro.

Segundo encuentro:

Tomando como punto de apoyo la "explicación a un amigo", la hipótesis de trabajo contempla, para el primer momento de la clase, la evocación de lo realizado en la anterior (Napp, Novembre, Sadovsky, Sessa, 2005). Evocar las acciones sin realizarlas, intentando decir colectivamente lo que sucedió, qué problema fue tratado, posibilita que los alumnos sean llevados a revisitar tanto el problema como los procedimientos de resolución utilizados. En este momento, los estudiantes

tienen que pensar en el sentido del problema, más que en los detalles de su resolución, siendo ésta una manera de trabajar sobre el olvido, pues el proceso mental que se requiere para hablar de lo que se hizo es mucho más complejo que el que se requiere sólo para "hacer".

Posteriormente, y a partir de la evocación realizada, los estudiantes resolverán en pequeños grupos un problema para reinvertir lo estudiado en el primer encuentro:

Decidan si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos y justifiquen su elección.

a) *El resultado de la suma de cuatro números naturales que tienen distinto resto al dividirlos por cuatro, es un múltiplo de cuatro.*

b) *El resultado de la suma de cinco números naturales que tienen distinto resto al dividirlos por cinco, es un múltiplo de cinco.*

c) *Si el producto de dos números naturales es un número par, entonces alguno de ellos es un número par.*

d) *Si el producto de dos números naturales es un número par, entonces ambos números son pares.*

e) *Si a un múltiplo de 12 se le resta 8, al dividirlo por 12 el resto es 8.*

f) *Si a un múltiplo de 12 se le suma 10, al dividirlo por 12 el resto es 10.*

Para poder brindar la ayuda adecuada, el docente debe escuchar las explicaciones de sus alumnos para averiguar, a través de ellas, el estado de situación en el que se encuentran en relación con la comprensión del problema propuesto. Luego, se hace la puesta en común para analizar los procedimientos realizados y resultados obtenidos por cada uno de los grupos, estableciendo similitudes y diferencias.

Posteriormente, se invita a los estudiantes a reflexionar en torno a lo producido a fin de establecer la conveniencia de un método de demostración u otro en función de las características del enunciado verdadero que se debe demostrar. Para ello se propone la siguiente actividad para resolver en el mismo pequeño grupo que en la actividad anterior:

Expliquen cómo se dieron cuenta cuál método de demostración resultaba conveniente utilizar cuando el enunciado era verdadero.

Se espera que el análisis que se realice en este momento posibilite una nueva revisita a lo estudiado en el primer encuentro y se fortalezcan los acuerdos establecidos a fin de habilitar su utilización para el estudio del Algebra y del Análisis Matemático durante el primer cuatrimestre de todas las carreras de la Facultad de Ingeniería.

Para cerrar el segundo encuentro, se propone a los alumnos una última actividad para realizar en forma individual:

Escribí el enunciado de algún problema o ejercicio que te haya llamado la atención y explicá por qué lo elegiste.

Para los estudiantes que entendieron, esta actividad significa una oportunidad de repasar los conceptos con otra perspectiva, no ya como resolutores sino como personas que reflexionan sobre lo que se está estudiando. Los alumnos que no entendieron aún algunos aspectos encuentran otra oportunidad y una razón para hacerlo, puesto que deberán elegir un problema, ampliar lo realizado oportunamente y, además, explicar el motivo de su elección.

A modo de cierre, siempre abierto

Con la implementación del Taller de Prácticas Matemáticas se pretende contribuir a vencer la brecha que se produce entre los contratos didácticos vigentes en cada uno de los niveles educativos involucrados, cuyas cláusulas rigen en cada momento las obligaciones recíprocas de los alumnos y del profesor (Fonseca Bon, 2004).

Para ello, se considera necesario favorecer la resignificación de la actividad matemática de los estudiantes, a quienes en los inicios del Nivel Superior se les exige abruptamente pasar de ser alumnos con poca autonomía y limitada responsabilidad matemática, a ser estudiantes (co)responsables de su proceso de estudio (Gascón, 1997).

En este contexto, y con las limitaciones que el cronograma impone, se procura colaborar al desarrollo de la racionalidad matemática de los alumnos en los inicios del Nivel Superior, no sólo desde sus aspectos lógicos, sino también desde su dimensión social. La interacción en clase, con intervenciones docentes ajustadas a los razonamientos de los alumnos, posibilita el avance en los procesos que comprometen a los estudiantes en un genuino quehacer matemático, enfrentándolos a una práctica no mecánica y fundamentada.

Conforme a lo expuesto, el análisis a posteriori que se realice luego de la implementación del Taller posibilitará retroalimentar el proceso que aquí se presenta como una hipótesis de trabajo.

Referencias bibliográficas

Arsac, G. (1992). *Initiaton au raisonnement déductif*. Presses Universitaires de Lyon.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18, 147-176.

Chemello, G. y Crippa, A. (2011). Enseñar a demostrar: ¿una tarea posible? En A. Díaz. (coord.) *Enseñar matemáticas en la Escuela Media* (pp. 55-77). Buenos Aires: Editorial Biblos.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona: ICE/ Horsori.

Fonseca Bon, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria*. Tesis de Doctor, Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial, Universidad de Vigo, Vigo, España.

Gascón, J. (1997). Cambios en el contrato didáctico: el paso de estudiar matemáticas en secundaria a estudiar matemáticas en la universidad. *Suma*, 26, 11-21.

Napp, C., Novembre, A., Sadovsky, P. y Sessa, C. (2005). *La Formación de los Alumnos Como Estudiantes. Estudiar Matemática*. Buenos Aires: Dirección General de Planeamiento. Ministerio de Educación de la Ciudad de Buenos Aires. Disponible en: http://www.buenosaires.gov.ar/areas/educacion/curricula/media.php#matematica

Panizza, M. (2005). *Razonar y conocer*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

GEOMETRÍA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

José Fermín Berríos Piña y Jairo Naranjo
UPEL Instituto Pedagógico Rural El Mácaro Venezuela
joseferminp@gmail.com, jaironaranjo1@hotmail.com

Resumen. La geometría ha estado presente en el proceso de enseñanza y aprendizaje, desde épocas muy remotas, está permite: la formación del razonamiento lógico, el desarrollo de habilidades cotidianas para que el estudiante se oriente reflexivamente en el espacio, hacer estimaciones sobre formas y distancias, para hacer apreciaciones y cálculos relativos a la distribución de los objetos en el espacio. En el presente taller se trata la geometría en el plano complejo, donde sus conceptos no cambian por tal hecho, pero las ecuaciones de los lugares geométricos tienen otra presentación debido a la variable compleja.

Interpretar geométricamente las operaciones con los números complejos permitirá a los participantes tener mucho cuidado con el lenguaje técnico de la matemática, al operar en forma geométrica los resultados pueden hallarse con sólo utilizar regla y compás, proporcionándole al estudiante la habilidad para pasar de resultados geométricos a resultados algebraicos y recíprocamente.

Palabras clave: geometría, lugar geométrico, plano complejo

Abstract. Geometry has been present in the process of teaching and learning, since very remote times, is allows: the formation of logical reasoning, developing skills everyday so reflexively student to orient in space, make estimates of forms and distances, to make assessments and calculations relating to the distribution of objects in space. In this workshop is the geometry in the complex plane, where their concepts do not change by this fact, but the equations of loci have another presentation due to the complex variable. Geometrically interpret operations with complex numbers will allow participants to be very careful with the technical language of mathematics, to operate in geometric form results can be found only by using ruler and compass, providing students the ability to pass results geometric to algebraic results and interactively.

Key words: geometry, locus, complex plane

Introducción

La teoría de los números complejos es parte de la formación de los estudiantes de bachillerato, en noveno grado de educación básica, de la República Bolivariana de Venezuela, cuando se define la raíz cuadrada de un número real se le hace conocer al estudiante que la cantidad subradical no debe ser negativa, porque no existe un número real negativo que elevado al cuadrado sea negativo; sin embargo se le indica al estudiante que en el siguiente año escolar se estudiará un conjunto numérico donde esa situación problemática si es posible, generándose así la curiosidad por conocerlos. En el primer año de Ciencias aparecen los objetivos que harán comprender y manejar los conceptos, operaciones, propiedades básicas, representaciones geométricas, las diferentes formas de presentar a un números complejo, forma cartesiana, binómica y polar.A nivel superior se encuentran muchas carreras universitarias que requieren de esta teoría y su profundización, tales como la ingeniería, la licenciatura de matemática, física y en el caso de las carreras pedagógicas de matemática y física. Merece atención, los ejemplos que requieren el conocimiento básico de la teoría de números complejos para poder llegar a la solución de algunos ejercicios y problemas planteados, una ecuación de segundo grado con soluciones complejas, por

nombrar alguno. En este nivel nos encontramos con una realidad, algunos bachilleres desconocen la teoría de los números complejos, y una gran cantidad de ellos con deficiencias al trabajar con tales números, al pedir a los estudiantes que se indique un número que no sea real, son pocos los que proporcionan el ejemplo correspondiente.

Las operaciones con los números complejos casi siempre se realizan en forma algebraica, aquí le vamos agregar el componente geométrico, es decir, realizaremos las operaciones en este campo, en forma geométrica. Permitiendo que el alumno visualice e interprete los resultados para desarrollar habilidades en el cálculo con números complejos. Se requiere que el estudiante exprese algebraicamente las condiciones que caracterizan a un conjunto de números complejos representado gráficamente, (Aznar, 2009) la habilidad de efectuar conversiones del registro gráfico al registro algebraico, en el tema estudiado, no está internalizada en los alumnos, a pesar de que, en el cursado de la asignatura se había trabajado arduamente con conversiones en el sentido contrario. Es necesario abordar sistemáticamente el trabajo con conversiones del registro algebraico al registro gráfico en ambos sentidos, puesto que favorece la conceptualización del objeto matemático en estudio.No se suele tomar como solución a un problema una representación gráfica si no está acompañada de la correspondiente resolución formal, generalmente desarrollada en el registro algebraico o simbólico. De igual manera, las conversiones que se proponen en la ejercitación de ciertos temas contemplan sólo los casos de paso del registro algebraico al gráfico, pero no en el sentido contrario, bajo la suposición de que son análogos, y que si un estudiante es capaz de efectuar la transformación en un sentido también podrá hacerlo en el sentido contrario. Para el paso del registro gráfico al algebraico, se requiere un esfuerzo cognitivo superior, del estudiante, pues debe descubrir cuáles son los rasgos del gráfico que caracterizan la representación y traducir esto a una ecuación o inecuación. La imposibilidad para concretar tales transformaciones genera dificultades en el aprendizaje, obstaculizando la conceptualización del objeto de estudio.

Desarrollo

Durante siglos la geometría ha sido fundamental en la formación académica desde edades tempranas. Su importancia radica en la formación del razonamiento lógico. Pocos son quienes discuten su trascendencia tanto en estudios posteriores de cualquier ciencia como en el desarrollo de habilidades cotidianas.Un conocimiento geométrico básico es indispensable para desenvolverse en la vida cotidiana: para orientarse reflexivamente en el espacio; para hacer estimacionessobre formas y distancias; para hacer apreciaciones y cálculos relativos a la distribución de los objetos en el espacio. La geometría está presente en múltiples ámbitos del sistema productivo de nuestras actuales sociedades (producción industrial, diseño, arquitectura,

topografía). La enseñanza de la Geometría ha tenido tradicionalmente un fuerte carácter deductivo. En educación secundaria, la Geometría se ha venido apoyando en el lenguaje del álgebra, en el álgebra vectorial. Las investigaciones sobre el proceso de construcción del pensamiento geométrico parecen indicar, no obstante, que éste sigue una evolución muy lenta desde unas formas intuitivas iniciales de pensamiento, hasta las formas deductivas finales, y que éstas se corresponden a niveles escolares bastante más avanzados. A partir de situaciones que resulten familiares para los estudiantes (recorridos habituales, formas de objetos conocidos) y mediante actividades manipulativas, lúdicas (plegado, recorte, modelado, etc.), el profesor puede fomentar el desarrollo de los conceptos geométricos contemplados en el currículo.Luego de la presentación y de fijar los propósitos el taller comienza con una pregunta a los participantes, para romper el hielo, ¿en qué momento de su vida estudiantil se encontraron con los números complejos?, esto genera un proceso de discusión entre ellos. Luego se pregunta ¿alguno de ustedes puede indicar una aplicación de los números complejos en la vida real?, para discutir nuevamente sobre el uso de los números complejo.

Terminada la actividad anterior el talleristas hablará algo de historia de los números complejos, En el presente, se tratan los aspectos históricos más importantes sobre los números complejos, los cuales son fundamentales para cualquier desarrollo didáctico de este tema dentro del aula y sirve para motivar a los docentes y estudiantes hacia el estudio de este y otros temas que puedan surgir. Además, se espera que resuelva esa inquietud que surge en los estudiantes: ¿Por qué los números complejos? ¿De dónde surgen? ¿Por qué se llaman complejos o imaginarios? Trasladándose a el siglo XV y XVI con los matemáticos Scipione del Ferro, 1465-1526, Annibale Nave, Antonio María Fiore, Niccolo Fontana (Tartaglia), 1499-1557, del Girolamo Cardano, 1501-1576, Ludovico Ferrari, 1522-1565, entre otros, se hace notar como Cardanologra que Tartaglia le transfiera su secreto del proceso de resolución de la ecuación cúbica y el por qué rompe con el acuerdo de no publicarlo. Se presenta una lámina donde se hace ver que los números complejos pueden presentarse en forma: cartesiana,binómica, polar o trigonométrica y exponencial y que todas son equivalentes; pasando luego a definir al conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos en forma cartesiana e identificando a $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2, \mathbb{C} = \{z = (a,b) | a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}\}$Indicando que a es la parte real y b es la parte de imaginaria y se denotan$Re(z) = a$y $Im(z) = b$, en caso de $b = 0$ el número se llama complejo real puro, si $a = 0$ el número será complejo imaginario puro. Es común denotar a los números complejos así: $z_1, z_2, z_3, z_4, \ldots, z_n$o simplemente z,w cuando no haya peligro de confusión.Se define la igualdad de dos números complejos $z_1 = z_2$ si $Re(z_1) = Re(z_2)$ y $\mathrm{Im}(z_1) = Im(z_2)$.Se presentan ejercicios de identificación y para aplicar el concepto de igualdad.En las siguientes láminas se

definen dos operaciones la suma y el producto de números complejos en forma cartesiana; se representa geométricamente en el plano complejo o plano de Argand en forma cartesiana y en formar vectorial. (Jiménez, 2013) es importante conocer las propiedades que cumplen las operaciones sobre los números complejos, que lo dotan de estructura de cuerpo conmutativo. El conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos junto con las operaciones de adición y multiplicación hacen que ($\mathbb{C}$, + , .) tenga estructura de cuerpo:se analizarán cada una de la propiedades, sin demostrar, en caso de ser necesario se hace la demostración de alguna de ellas. Se define diferencia y el cociente en forma cartesiana y luego se procede a realizar ejercicios de operaciones aritméticas en $\mathbb{C}$. La unidad imaginaria es el número imaginario puro (0,1) y se denota como *i*. *i* = (0,1). Se establece un isomorfismo entre el conjunto $A = \{(a, b) \in \mathbb{C} | b = 0\}$ y el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$, con la intención de hacer la convención $z = (a, 0) = a$ y poder así trabajar los números complejos en forma binómica $z = a + bi$.

Se presenta un diagrama de Venn donde se observa que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, y $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$, $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Se define la operaciones en forma binómica se realizan ejemplos y se plantean ejercicios para trabajar en clase. Interpretamos geométricamente la suma,aprovechando la representación vectorial, para indicar que para sumar dos números complejos se puede aplicar la regla del paralelogramo o también la regla del polígono, se plantean ejercicios utilizamos aquí el método de deducción. Se ejemplifica. Para hallar la diferencia de dos números complejos, se le suma al minuendo el opuesto del sustraendo. $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$ utilizamos el método de inducción planteamos primero los ejemplos y luego se pide generalizar la regla. Multiplicación de un número real puro x por un complejo $a + bi$, $x(a + bi)$, se analiza geométricamente los diferentes casos$-1 < x < 0$, $x = -1$, $x < -1$, $0 < x < 1$, $x = 1$, $x > 1$, se realizan ejercicios en este caso el vector resultante se hace menor, igual o de mayor longitud y en el sentido contrario, sí x es negativo y en el mismo sentido si x es positivo. Multiplicación de un número complejo imaginario puro iy por un complejo $a + bi$, $yi(a + bi)$, al igual que en el caso anterior se analiza geométricamente los casos $-1 < y < 0$, $y = -1$, $y < -1$, $0 < y < 1$, $y = 1$, $y > 1$, el vector resultante es de menor, igual o mayor longitud pero rotado 90° en sentido horario o anti horario según y sea negativo o positivo respectivamente. Se realizan ejercicios. En cuanto a la interpretación geométrica del producto de dos números complejos $z = x + yi, w = a + bi$, $z.w = (x + yi)(a + bi) = x(a + bi) + yi(a + bi)$, se tendría las sumas de los números complejos donde el primer sumando es un número real puro por un complejo y el segundo

sumando es el producto de un imaginario puro por el mismo complejo, en base a lo visto anteriormente el primer sumando se hace menor, igual o de mayor longitud y en el sentido contrario, sí x es negativo y en el mismo sentido si x es positivo y el segundo sumando es de menor, igual o mayor longitud, rotado 90° en sentido horario o anti horario según y sea negativo o positivo respectivamente, y para finalizar la regla del paralelogramo para sumar los resultados, se plantean ejercicios, se hace la observación que el cociente de dos números complejos lo haremos en forma trigonométrica. Se definen el conjugado de un número complejo y se presenta algunas de sus propiedades. Se define el módulo, argumento y argumento principal de un número complejo y se interpreta geométricamente, se plantean algunas consideraciones con respecto al argumento principal para luego definir la forma trigonométrica o polar de $z = a + bi$ como $z = |z|(cos\alpha + isen\alpha)$, se realizan ejercicios.se indica como sumar o restar ángulos utilizando regla y compás, se realizan ejercicios.Se indica como multiplicar o dividir geométricamente dos longitudes dadas, utilizando regla y compás, se hacen ejercicio. Se define como se multiplica y como se divide en forma trigonométrica dados dos números complejos, $z = |z|(cos\alpha + isen\alpha), w = |w|(cos\beta + isen\beta)$su producto es $zw = |z|.|w|(\cos(\alpha + \beta) + isen(\alpha + \beta))$, y su cociente $\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}(\cos(\alpha - \beta) + isen(\alpha - \beta))$.Se interpreta geométricamente y se realizan ejemplos. Se define la raíz enésima de un número complejo z, si w_k es una raíz enésima de z entonces $|w_k| = \sqrt[n]{|z|}$ y su argumento principal es $Arg\, w_k = \frac{Arg\, z + 2k\pi}{n}$con $k = 0,1,\cdots,n-1$ se plantean ecuaciones para hallar z tales como:$z^3 - 1 = 0, z^5 - 1 = 0, z^3 + i = 0, z^2 + 5iz - 1 + 4i = 0$ Se interpreta geométricamente.

Uno de los objetivos del taller es trabajar la geometría analítica, en el plano complejo, donde las ecuaciones de los diferentes lugares geométricos sean tratadas con variable compleja. (Vera, 2013) después de haber identificado a $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$, el modulo $|\quad|$ con la norma euclidea$\|\quad\|_2$ y la distancia $|z - w|$ con la distancia euclidea $\|z - w\|_2$ quedan definidas en el plano complejo todas las nociones geométricas y topológicas habituales del espacio euclideo$(\mathbb{R}^2, \|\quad\|_2)$.Así $|z| = \sqrt{z.\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|_2$ nos permite trabajar en el plano complejo, la geometría analítica.Se define lugar geométrico y se indica que se hallarán las ecuaciones en variable compleja de algunos lugares geométricos notables. Se presentan las propiedades autilizar y que serán de gran utilidad, $Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ .El segmento de extremo $z, w \in \mathbb{C}$ es el conjunto $\{(1-t)z + tw \mid 0 \leq t \leq 1\}$para ejemplificar.Se trabaja con ecuaciones de la recta en variable

compleja $Az + B\bar{z} + C = 0$representa la ecuación general de la recta, siempre que $A\ y\ B$ sean conjugados y $C \in \mathbb{R}$. Se visualizan las ecuaciones para los casos de rectas horizontales, verticales y oblicuas; se presentará las fórmulas para pendiente y las intersecciones con los ejes. Se proporcionarán ejemplos y luego se proponen ejercicios como actividad el taller.

Se define la circunferencia de radio $r > 0$ y centro el punto $z_0$como él conjunto $\{z \in \mathbb{C} | |z - z_0| = r, r > 0\}$, Luego se analizan los casos para la gráfica de la ecuación dependiendo si la relación entre $|z - z_0|$ y r es $<, \leq, >, \geq$ así como el caso de $r_{1<}|z - z_0| < r_2$Se realizan ejercicios, dada la ecuación de la circunferencia en variable complejas, construir la gráfica en el plano complejo.Dada la gráfica en el plano complejo hallar la ecuación de la circunferencia en el plano complejo, también se ejercitaen la transformación de las ecuaciones en variable compleja a la ecuación en variable real. (Derrick, 1987) Las secciones cónicas proporcionan ejemplos adicionales de los conceptos vistos hasta ahora. Aunque pueden utilizarse las formulas usuales de la geometría analítica (con $x = Re(z)$ y $y = Im(z)$), es fácil definir las secciones cónicas en términos de distancia.Se define la elipse de focos z_0, z_1, al conjunto de todo los puntos z del plano complejo tales que la suma de su distancias a los dos focos $z_0\ y\ z_1$, es constante y su ecuación es $|z - z_0| + |z - z_1| = k, k > 0$. Se realizan ejemplo se plantea en ejercicio como actividad a realizar en el taller.La parábola se define como el conjunto de todo los puntos z del plano complejo cuyas distancia a un punto fijo z_0, llamado foco es igual a su distancia de una recta fija del plano, llamada directriz y la ecuación de la parábola de eje focal vertical es$|z - z_0| = |Im(z) - k|$ y la de eje focal horizontal $|z - z_0| = |Re(z) - h|$. Se realizan ejemplo se plantea en ejercicio como actividad a realizar en el taller. Se define la hipérbola de focos z_0, z_1, al conjunto de todo los puntos z del plano complejo tales que el valor absoluto de la diferencia entre las distancias de z a dos puntos fijos, z_0, z_1 llamados focos, es constante k real positiva. La ecuación de la hipérbola es $\big||z - z_0| - |z - z_1|\big| = k$. Se realizan ejemplo se plantea ejercicios como actividad a realizar en el taller.

Conclusiones

Basados en nuestra experiencia podemos representar muchas curvas en el plano cartesiano, existen métodos que nos ayudan hacer tales representaciones, por ejemplo la derivada nos permite determinar intervalos de monotonía, valores extremos, concavidad, convexidad y asíntotas. En ocasiones con sólo ver la ecuación de la curva nos damos una idea de la forma que tiene. Este taller permite a los participantes adquirir destrezas para pasar de una representación

algebraica a una representación geométrica y viceversa, podemos solventar las dificultades que se le presentan al estudiante al momento de pasar de una representación geométrica a una representación algebraica.

Referencias bibliográficas

Aznar, M., Distéfano, M., Massa, S., Figueroa, S. y Moler, E. (2009). *Transformación derepresentaciones de Números Complejos del registro gráfico al algebraico: un análisis desde la Teoría de Registros Semióticos*. Recuperado el 20 de abril de 2013 dehttp://www2.famaf.unc.edu.ar/rev_edu/documents/vol_25/prop_07.pdf.

Churchill R. V. y Brown, J. W. (1992). *Variable Compleja y Aplicaciones*. España: Editorial MacGraw Hill.

Cuartero, B. y Ruiz, F. j. (2004). *Teoría de funciones de variable compleja*. Recuperado el 20 de abril de 2013 de www.ce-mat.org/cdc/Variable_compleja.pdf.

Derrick, W. R. (1987). *Variable compleja con aplicaciones*. (2a. ed.). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Dettman, J. W. (1965). *Applied Complex Variables*. New York: Dover publications

Hauser, A. A. (1973). *Variable Compleja*. Colombia: Fondo EducativoInteramericano.

Hernández, A. J. (1975). *Funciones de variable compleja*. Valencia: Universidad de Carabobo.

Jiménez, J. (2013). *Los números complejos en bachillerato*.Recuperado el 20 de abril de2013 dehttp://www.sociedadelainformacion.com/geogebra/complejos.pdf

López, G. J. (2001). *Ecuaciones diferenciales y variable compleja*. España: Editorial Prentice Hall.

Spiegel, M. R. (1991). *Variable compleja*. México: Editorial MacGraw Hill.

Trejo, A. C. (1974). *Funciones de la variable compleja*. México: Editorial Harla.

Vera, G. (2013). *Lecciones de Análisis Complejo*. Recuperado el 20 de abril de 2013 de http://webs.um.es/gvb/AC/LeccionesAC.pdf

Wunsch, A. D. (1997). *Variable compleja con aplicaciones*. (2a. ed.). México: Editorial Pearson Educación.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ADITIVOS POR ESTUDIANTES DE SECUNDARIA

Mario Hernández Pérez yAurora Gallardo Cabello
Cinvestav - IPN México
mhernandezp@cinvestav.mx, agallardo@cinvestav.mx

Resumen. Estudiantes de un grupo de tercero de secundaria de edades entre 14 y 16 años resuelven *problemas aditivos*. Los resultados muestran el uso del *número negativo*: *sustractivo, relativo, signado y aislado* utilizando distintos recursos como: *la recta numérica, aritmética, representaciones concretas, lenguaje algebraico, lenguaje verbal, expresiones sintácticas.* Advertimos que reconocen *formas semánticas equivalentes.* Los problemas correspondientes a las categorías *Variación de variaciones y Combinación de comparaciones adyacentes* resultaron ser las más difíciles para los estudiantes. En este tipo de problemas los alumnos utilizan mayor variedad de recursos; aunque no siempre arriban a una resolución *sintáctica correcta.*
Palabras clave: problemas aditivos, negatividad, modelos de enseñanza
Abstract. Students of a group of ninth graders, ages 14 to 16 are resolving *additive problems*. The results show the use of *negative numbers*: *subtractive number, signed, relative and isolated* using various resources such as the *number line, arithmetic, concrete representations, algebraic language, verbal language and syntactic expressions.* We note that they recognize *semantic equivalent forms*. The problems corresponding in the categories *Variation of variations and Adjacent combination comparisons* were the most difficult for students. In this type of problems the students use major varieties of resources, but not always arriving at correct *syntactic resolutions*
Key words: additive problems, negativity, teaching models

Introducción

Marco teórico

Hemos observado que los alumnos de secundaria en muchos casos no aceptan soluciones *negativas* en *problemas de enunciado verbal* aunque llegan a respuestas equivalentes utilizando *positivos.* En la propuesta Institucional SEP (2006) se presentan situaciones de temperatura, deportes, ganancias, pérdidas, elevador, recta numérica, plano cartesiano y localización de fechas para darle sentido a los *negativos.*

De estas últimas aseveraciones, intentamos responder las siguientes interrogantes:

¿Qué *niveles conceptuales de la negatividad* consideran los estudiantes de secundaria al resolver *problemas aditivos*?

¿Qué tipo de estructura funcional y forma semántica de enunciados verbales son más difíciles para los alumnos?

Recurrimos a Bruno y Martinón (1997) quienes hacen una clasificación de *problemas aditivos* distinguiendo entre la *estructura funcional* como el tipo de situaciones numéricas (*estados, variaciones y comparaciones*) y la *forma semántica* definida como la expresión en *lenguaje verbal* de dichas situaciones numéricas. Bruno y Martinón (1994) definen *problemas aditivos simples de enunciado verbal* como los traducidos en sumas y restas de dos números enteros. Y advierten la

existencia de *formas semánticas equivalentes* para representar una misma situación numérica. Por ejemplo, en el caso de las *variaciones* Bruno y Martinón (1997) plantean que las expresiones: "*Ernesto tiene 3 pesos menos por la mañana que por la noche*, *Ernesto tiene 3 pesos más por la noche que por la mañana"* (p. 34.) son equivalentes.

Además de la clasificación de Bruno y Martinón (1997) nos basamos, en Gallardo (1994) que advierte de la existencia de los siguientes *niveles conceptuales de negatividad*:

"*Número sustractivo.* Donde la noción de número está subordinada a la magnitud. En la resta de dos cantidades **a-b**, siempre que **b** será menor que **a**, donde, **a**, **b** son números naturales.

Número signado. Es el número natural al que se le asigna un signo más o un signo menos.

Número relativo. Se hace presente cuando se puede concebir la idea de opuestos en situaciones discretas, así como la idea de simetría en situaciones continuas.

Número aislado. Surge al aceptar un número negativo como solución de una operación o ecuación" (Gallardo, 2002, p. 179).

Método

La población estudiantil fue de 35 alumnos de un grupo de tercero de secundaria de edades de 14 a 16 años de una escuela pública urbana de la Ciudad de México.

Los instrumentos metodológicos fueron un cuestionario diagnóstico, un cuestionario exploratorio y entrevistas individuales video grabadas en situación de aula, que permitieron el análisis de 5 de las 11 categorías de la clasificación de problemas de Bruno y Martinón (1997). Estas son las siguientes: *Variación de un estado, Variación de variaciones, Comparación de estados, Combinación de estados, Combinación de comparaciones adyacentes.*

En este artículo se define y ejemplifica una de las cinco categorías anteriores donde se introducen los conceptos previos siguientes: *estado y comparación.*

Estado. Tiene un sujeto, una magnitud y una unidad de medida en un instante determinado. Por ejemplo: en la Ciudad de México la temperatura en este instante es de 20° C.

Comparación. Es la diferencia entre dos estados; aquí el tiempo no está involucrado. Por ejemplo: Juan tiene cinco pesos menos que Luis.

Combinación de comparaciones adyacentes. Existen tres *funciones estado* independientes. Ejemplo: Pedro tiene cuatro pesos menos que Francisco y, José tiene seis pesos más que Pedro. Podemos comparar los estados y así indicar cuántos pesos tiene José en comparación a Francisco.

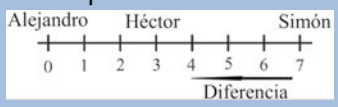
Los autores advierten: "el esbozo que presentamos aquí exigiría, para su plena utilidad, una investigación didáctica que por nuestra parte sólo está recientemente iniciada y cuya conclusión no es inmediata" (Bruno y Martinón 1997 p. 34).

A continuación se presentan en formato de tabla el desempeño de 35 estudiantes en un problema de *Combinación de comparaciones adyacentes* donde se exhiben los *niveles conceptuales de negatividad* y diversos *modelos de enseñanza: sintáctico* y la *recta numérica* entre otros.

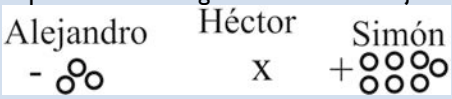
Alejandro tiene 3 canicas menos que Héctor, Simón tiene 7 canicas más que Alejandro. ¿Cuántas canicas más tiene Simón que Héctor? (Bruno y Martinón 1997 citado en Alcántara, 2010).

Resultado. (-3)+(+7)=(+4)

Categoría: combiancion de comparaciones adyacentes

Núm. de alumnos	Resultado	Proceso de resolución
I	4 canicas.	Expresiones algebraicas y lenguaje verbal explicando la relación entre las tres cantidades dadas. Alejandro = x-3 Héctor = x Simón= x-3+7 *Número sustractivo.*
I	4 canicas.	Expresiones algebraicas y uso del lenguaje verbal. x x-3 x-3+7 x+4 -3+7=+4 *Número sustractivo y signado.*
I	4 canicas.	Expresiones algebraicas. Alejandro Simón Héctor *Número sustractivo y relativo.* (x-3) (x-3)+7 (x+3)
I	4 canicas.	Sustracción de expresiones algebraicas. Alejandro=x Héctor=x+3 Simón=x+7 (x+7)-(x+3)=4 *Número sustractivo.*
I	4 canicas.	Asigna a Alejandro y Simón valores enteros. Ningún número asocia con Héctor. Agrega una sustracción de naturales. Héctor ? Alejandro -3 Simón +7 7-3=4 *Número sustractivo y aislado.*
I	4 canicas.	Lenguaje verbal y expresión sintáctica con un sumando negativo. -3+7=4 *Número signado.*
I	4 canicas.	Expresiones algebraicas, sustracción de A en S. A=H-3 S=A+7 S=(H-3)+7 S=H+4 *Número sustractivo.*
I	4 canicas.	Expresiones algebraicas, igualación de los valores de A. A=H-3 A=S+7 S+7=H-3 S-H=7-3 S-H=4 *Número sustractivo.*
I	4 canicas.	Recta numérica con el cero y positivos. Señala que existe una diferencia.  7-3=4 *Número sustractivo.*

I	4 canicas.	Expresiones algebraicas y representaciones concretas: palitos. Alejandro (-3)-(x) Simón (7)+(-3) +4 A I H IIII S IIIIIIII *Número sustractivo y signado.*
I	4 canicas.	Asignación de un número de canicas a cada persona. A=10 H=13 S=17
I	4 canicas.	Asignación de un número de canicas a cada persona. Héctor 11 canicas. Simón 15 canicas. Alejandro 8 canicas.
I	4 canicas.	Ecuación de primer grado: x+a=b incorrecta. Asignación de un número de canicas a cada persona. A=10, H=13, S=17
I	4 canicas.	Expresiones algebraicas distintas para el valor de A. A=3x A=7x
I	4 canicas.	Explica los datos del problema y concluye "se hace una resta 7 canicas (Simón) menos 3 canicas (Alejandro) es igual a 4". *Número sustractivo.*
I	Simón tiene 4 canicas más que Alejandro.	Expresión algebraica, con un sumando negativo. Héctor x Alejandro x-3 Simón x-3+7 x-3+7=x+4 *Número sustractivo y signado.*
I	Tiene 4 canicas más.	Códigos personales, adición con positivos y negativos introduciendo x. A-3 Héctor S+7 Alejandro Héctor x-3=x-3+7=x-4 *Número sustractivo y signado.*
I	Simón tiene 4 canicas más que Héctor.	Expresiones algebraicas. Sustracción en forma vertical. Héctor x Alejandro x-3 Simón x+7 - x-3 x+7 -4 *Número sustractivo y aislado.*
I	Simón tiene 4 canicas más que Héctor.	Expresiones algebraicas, lenguaje verbal explicando sus significados. Asignación de un número de canicas a cada persona. A S Ale Hec Sim H-3 7+A 7 10 14 Si Alejandro tiene 3-H (7), Simón 7+A (14), y Héctor 3+H (10), se toma como referencia a Héctor con un número x y se da valor a los demás. *Número sustractivo.*
I	4 canicas tiene Simón más que Héctor.	Asignación de un número de canicas a cada persona. Héctor Alejandro Simón 8 5 12
I	Simón tiene 4 canicas más que Héctor.	Sustracción con positivos. H= 10 − 3 A= 7 S=14. Alejandro tiene 7, Simón tiene 14 porque tiene 7 más que Héctor. *Número sustractivo.*
I	4 canicas más que Héctor.	No justifica.
		Asignación de dos números y una incógnita ?=x.

I	4	Expresiones algebraicas. A H S -3 ? +7 x-3 x-3+7 *Número sustractivo y signado.*
I	x=4	Expresiones algebraicas, adición con positivos y negativos. Lenguaje verbal. Concluye "es como si a 7 le restas 3 y da 4 que son las canicas que tiene de más Simón que Héctor". Héctor x Alejandro x-3 Simón x-3+(+7) *Número sustractivo y signado.*
I	4	Sustracción con sustraendo negativo y representaciones concretas: canicas. 3-7=4 *Número sustractivo.*
I	No lo indica.	Asignación de un número de canicas a cada persona. Introduce x. Héctor Alejandro Simón No. De canicas. x x-3 (x-3)+7 *Número sustractivo.*
I	No lo indica.	Asignación de un número de canicas a cada persona. Representación no usual de una recta numérica. A H S -3 I 4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 *Número relativo y signado.*
I	Héctor=3-x Alejandro 7+x	Expresiones algebraicas. Dibujos donde aparece x.  *Número sustractivo.*
I	10 canicas más.	Expresiones algebraicas y lenguaje verbal estableciendo, relación entre dos cantidades. $\begin{array}{l} x-3 \\ x+7 \end{array}$ Diez canicas más, esto como resultado de que tomamos como base a Alejandro y observamos que tiene 3 menos, + los 7 que tiene Simón de más, dan 10 canicas. *Número sustractivo.*
I	10 canicas más.	Adición con positivos. $\begin{array}{r} +\begin{array}{r}7\\3\end{array} \\ \hline 10 \end{array}$
I	10	Escribe: "sólo se suma las canicas que Héctor tiene más que Alejandro y Simón, 10 canicas".
I	$x^2=10$	Ecuación de primer grado, escribe una variable al cuadrado. A=3-q' H S=7+q'A 3-x=7+x x-x=7+3 $x^2=10$ *Número sustractivo.*
I	21 canicas.	Expresiones algebraicas y lenguaje verbal. a=-3h s=+7a y h=$\frac{a}{3}$ *Número signado.*
I	3 canicas.	Resolución de una ecuación de primer grado. 4+3=7+x +4-3=7+x 1=7+x -6=x +4-3=7-6 +1=+1 *Número sustractivo y aislado.*

I	x-3+7	Asignación de expresiones algebraicas a cada persona. Alejandro Héctor Simón x-3 x x-3+7 *Número sustractivo.*

Alejandro tiene 3 canicas menos que Héctor, Simón tiene 7 canicas más que Alejandro. ¿Cuántas canicas más tiene Simón que Héctor? (Bruno y Martinón 1997 citado en Alcántara, 2010).

Resultado. (-3)+(+7)=(+4)

Categoría: combinación de comparaciones adyacenes

Quince alumnos escriben como respuesta *4 canicas*. El primero de ellos le asigna la incógnita a Héctor, de ahí resta para destinarle a Alejandro x-3. Finalmente escribe: "Simón x-3+7" que es lo que le corresponde a Alejandro (x-3) más 7 de Simón. El segundo alumno escribe el mismo procedimiento que el primero. Explica con lenguaje verbal llegando a la expresión -3+7=4 en la que ya no escribe x. El tercero también utiliza expresiones algebraicas. Aparecen los números relativos x-3 que le corresponde a Alejandro y x+3 a Héctor. La expresión (x-3)+7 es equivalente a x-3+7 aparecida en el primer y segundo caso. El alumno no opera esta expresión. El cuarto alumno parte del valores de Alejandro (x) es por eso que a Héctor le asigna x+3, luego saca la diferencia de (x+3) de Héctor con (x+7) de Alejandro y llega a 4. La expresión del quinto alumno contiene una idea parecida a la de los alumnos primero a tercero, sólo que este alumno no utiliza x y a Héctor no le asigna un número. Él resuelve correctamente el problema considerando a la *expresión sintáctica (-3)+(+7)=(+4)* como la correcta.

El sexto estudiante expresa con sus propias palabras la misma información del enunciado y llega a la *sintaxis correcta -3+7=A*. El séptimo alumno sustituye A en S. El octavo iguala los valores de A, se equivoca en el proceso de resolución del problema dos veces conduciéndolo al resultado correcto. El noveno utiliza la recta numérica y señala la diferencia con una flecha hacia la izquierda. El décimo alumno se apoya del álgebra y de las representaciones concretas para justificar. Los alumnos 11° y 12° asignan un número a cada persona, no utilizan los mismos números para cada una. El 13° también asigna un número a cada persona y justifica con una ecuación que no lo lleva a la respuesta. El 14° utiliza expresiones algebraicas pero no resuelve el problema. La respuesta del 15° no muestra los datos suficientes para hacer una interpretación de cómo comprendió el problema.

Siete alumnos escriben como respuesta que *Simón tiene 4 canicas más que Héctor*. La respuesta del alumno 16° contiene un procedimiento similar a la de los alumnos 1°, 2°, 17°, 23° y 24°. La expresión que registra el 17° estudiante es similar a la de los alumnos primero a tercero y a la del 16° pero los pasos muestran un camino diferente. El 18° trata de resolver el problema con una

sustracción, no la resuelve ya que escribe -4 como resultado de la operación. Debió ser 10. Nótese que el cuarto alumno utiliza una sustracción con las mismas expresiones, pero el 18° alumno coloca a x-3 en el minuendo. Como se indicó anteriormente la respuesta debió ser 10, él escribe 4, no llega a la respuesta con un procedimiento correcto. El alumno 19 combina el lenguaje verbal con expresiones algebraicas, explica que a cada persona le corresponde un número y que también puede expresarse estableciendo relaciones con abreviaturas. El 20° alumno sigue un camino parecido al 11° y 12°. El 21° resuelve con una sustracción de positivos, e1 22° no justifica.

El 23° asigna x a Héctor, señala que Alejandro tiene -3 y Simón +7. Esto lo interpretamos como: tiene 7 más que Alejandro, además utiliza la expresión x-3+7 como los alumnos 1°, 2°, 16°, 17°, 23°, 24° y 35°.

El 24° alumno utiliza la expresión x-3+(+7) que es equivalente a la usada por los alumnos, 1°, 2°, 16°, 17°, 23° y 35° (x-3+7). La sustracción que resuelve el alumno 25 no es correcta, debió resultar -4 en lugar de 4. El procedimiento del 26° alumno es parecido al de los alumnos 1° y 16°. El 27° alumno asigna un número a cada persona aunque se equivoca al contar por lo que sus representaciones en la recta no coinciden con los datos del problema. Las representaciones concretas del alumno 28 no lo llevan a establecer expresiones algebraicas correctas. El alumno 29 utiliza expresiones algebraicas pero éstas son incorrectas. Los alumnos 30 y 31 operan con los números del enunciado pero no establecen una relación correcta de estos. El alumno 32 establece una ecuación errónea. El alumno 33 señala que hay que sacar la diferencia entre la segunda y tercera expresión (s=+7a y h=a/3). El planteamiento y resolución de la ecuación propuesta por el alumno 34 no son correctos. La respuesta que registra el alumno 35 (x-3+7) es similar a las expresiones en los procedimientos de los alumnos 1°, 2°, 16°, 17°, 23° y 24°.

En síntesis

Dos estudiantes resuelven correctamente el problema.

Treinta y tres estudiantes no lo resuelven.

Reflexiones finales

Del análisis de los *problemas aditivos* podemos afirmar lo siguiente:

- El estudiante expresa vía el *lenguaje natural respuestas con formas semánticas equivalentes.*
- El nivel de *negatividad* alcanzado depende de la categoría del *problema aditivo.*

- Existe una relación entre el contenido de los problemas, su forma semántica y los niveles conceptuales de negatividad.
- La suposición de un *valor arbitrario* para el *estado inicial* en el enunciado del problema, reduce la *negatividad* a ser representada solamente como un *número sustractivo.* Otros estudiantes reconocen la *negatividad* por medio de *números signados, relativos y aislados*. Utilizan espontáneamente el lenguaje algebraico y la recta numérica para la resolución de problemas.
- La mayoría de los sujetos logra comparar correctamente los tiempos descritos en el enunciado.
- Los problemas correspondientes a las categorías *Variación de variaciones y Combinación de comparaciones adyacentes* resultaron ser las más difíciles para los estudiantes.

Referencias bibliográficas

Alcántara, J. (2010). *Uso de modelos de enseñanza en la resolución de problemas aditivos.* Tesis de Maestría, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Bruno, A. y Martinón, A. (1994). La recta en el aprendizaje de los números negativos. *Suma*, 18, 39-48.

Bruno, A. y Martinón, A. (1997). Clasificación funcional y semántica de problemas aditivos. *Educación Matemática,*. 9 (1), 33-46.

Gallardo, A. (1994). *El estatus de los números negativos en la resolución de ecuaciones algebraicas,* Tesis Doctoral, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Gallardo, A. (2002). The extension of the natural-number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra. *Educational Studies in Mathematics*, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 49, 171-192.

SEP (2006). *Plan y programas de estudio. Educación Secundaria.* SEP

CONSTRUCCIONES Y MECANISMOS MENTALES PARA EL APRENDIZAJE DE LA MATRIZ ASOCIADA A UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

Isabel Maturana Peña, Marcela Parraguez González y Miguel Rodríguez Jara
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile
isamatup@hotmail.com, marcela.parraguez@ucv.cl, mrodriguez@upla.cl

Resumen. Como parte del Proyecto DI-PUCV 037.495-2013 y basados en la teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas), investigamos desde una postura cognitiva las construcciones y mecanismos mentales necesarios para (re)construir la Matriz Asociada a una Transformación Lineal. Diseñamos una descomposición genética del teorema de la Matriz Asociada a una Transformación Lineal, esto es, investigar, mediante la metodología utilizada en la teoría APOE propuesta por Dubinsky y el grupo RUMEC. Reportamos en este trabajo; un caso de estudio, cuyos resultados muestran que los estudiantes construyen el concepto de coordenadas de un vector como objeto, pero no la generalización de ese proceso hacia una matriz de coordenadas.
Palabras clave: matriz asociada, transformación lineal, teoría APOE
Abstract. As part of Project PUCV 037.495-2013 DI-theory based and APOE (Actions, Processes, Objects and Schemes), we analyzed from a cognitive stance mental constructs and mechanisms necessary to (re) construct the Associated Matrix to a Linear Transformation. We designed a genetic decomposition of the Associated Matrix to a Linear Transformation theorem, that is, investigate, using the methodology of APOS theory proposed by Dubinsky and RUMEC group. Here we report a case study whose results show that students, construct the concept of coordinates of a vector as an object, but not the generalization of this process to an array of coordinates.
Key words: matrix, linear transformation, APOS theory

Introducción

Nos propusimos investigar las construcciones mentales que los estudiantes ponen en juego en la (re)construcción que hacen del teorema matriz asociada a una transformación lineal, dicho teorema estableceque; sean *V* y *W* espacios vectoriales de dimensión finita sobre un mismo cuerpo K, $T: V \longrightarrow W$ una transformación lineal, $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de *V* y $B' = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ una base de *W*. Los vectores $T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)$ están en *W* y por lo tanto, cada uno de ellos se puede expresar como combinación lineal de los vectores de la base *B'*:

$$\begin{aligned} T(v_1) &= a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{m1}w_m \\ T(v_2) &= a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{m2}w_m \\ &\vdots \\ T(v_n) &= a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{mn}w_m. \end{aligned}$$

En otras palabras, $[T(v_1)]_{B'} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \dots [T(v_n)]_{B'} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$; y la matriz asociada a la transformación lineal *T* en las bases *B* y *B'*, que rotulamos como $[T]_B^{B'}$ es $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, tal que $[T]_B^{B'}[v]_B = [T(v)]_{B'}$, para todo *v* en *V*.(Poole, 2006).

Consideramos son dos las principales razones de por qué es importante el aprendizaje de este teorema. En primer lugar, el Teorema de la Matriz Asociada a una Transformación Lineal, proporciona una manera eficiente de llevar las transformaciones lineales a un equipo digital. La segunda razón es teórica; consideremos *A*matriz asociada a una transformación lineal *T*, esta elección depende de bases *B* y *B*', normalmente uno elegiría *B* y *B*' para hacer el cómputo de matrices de coordenadas, tan simple como sea posible, cuando esto se hace en la forma correcta la matriz *A* puede proporcionar información importante sobre la transformación lineal.

Como objetivos de Investigación nos propusimos determinar las construcciones y mecanismos mentales que pone en juego un individuo como estrategia cognitiva para construir elTeorema de la Matriz Asociada a una Transformación Lineal. En el lenguaje de la teoría APOE: diseñar y evidenciar una descomposición genética del teorema.

Teoría APOE

La investigación usó la teoría APOE desarrollada por Dubinsky y el grupo de investigación RUMEC(Research in UndergraduateMathematicsEducationCommunity). Actualmente en Arnon, Cottril, Dubinsky, Oktaç, Roa, Trigueros y Weller (2014) se presentan los elementos de la teoría y su uso en investigaciones en Educación Matemática. Dubinsky se basa en la abstracción reflexiva de Piaget para describir la construcción de objetos mentales, y distingue varios tipos de mecanismos: interiorización, coordinación, encapsulación, y reversión. Estos originan diferentes construcciones mentales: acciones, procesos, objetos, esquemas (APOE).

Consideremos un fragmento *F* de conocimiento matemático –Teorema de la Matriz Asociada a una Transformación Lineal –. Un individuo posee una concepción acción de *F* si las transformaciones que hace sobre él se realizan paso a paso, obedeciendo a estímulos que son y percibe como externos. Él interioriza la acción en una concepción proceso de *F* si puede realizar una operación interna que hace (o imagina) esencialmente la misma transformación enteramente en su mente, sin necesariamente recorrer todos los pasos específicos. Si piensa en un proceso como un todo, donde realiza y construye transformaciones sobre su totalidad ha encapsulado el proceso en una concepción objeto de *F*. Un esquema de aquel trozo es una colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados consciente o inconscientemente en la mente del individuo en una estructura cognitiva coherente. La coherencia es la capacidad para reconocer relaciones al interior del esquema y establecer si este permite solucionar una situación matemática particular y usarlo en tal caso. Un esquema está siempre en evolución y puede considerarse como un nuevo objeto al cual pueden aplicársele acciones y procesos; en tal caso, se dice que el esquema se ha tematizado.

Una descomposición genética, (DG), describe en detalle los aspectos constructivos de *F* para explicitar un camino factible de su aprendizaje en términos de construcciones y mecanismos mentales. Tal DG no es única, pues depende de los caminos de construcción y de las estructuras mentales previas.

Metodología de la investigación

En esta investigación se propuso comprender los procesos mentales que operan en las estrategias de aprendizaje delTeorema de la Matriz Asociada a una Transformación Lineal; para ello, se utilizará la teoría cognitiva APOE como marco teórico y metodológico, al cual se le incorpora el estudio de caso (Stake, 2010). Los estudio de caso son particularmente apropiados para realizar investigaciones en un determinado periodo de tiempo, identificando los distintos procesos interactivos que conforman la realidad de su enseñanza-aprendizaje Arnal, J. del Rincón, D., y La Torre, A. (1992).Las unidades de estudio fueron alumnos chilenos de una universidad del país, de las carreras de pedagogía y licenciatura en matemática. Los estudiantes de esta unidad de estudio trabajada como "caso", se vinculan con las siguientes categorías e indicadores: estudiantes exitosos académicamente, experiencias previas, avance curricular, ejercitan ampliamente en matemática, estudiantes voluntarios, heterogeneidad en los procesos de formación de los estudiantes, accesibilidad de los investigadores.

Se trabajó con una unidad de análisis de 20 estudiantes, atendiendo a los criterios antes mencionados y se diseñaron protocolos de entrevistas semi-estructuradas, previstas por la teoría las cuales se video grabaron.Al caso de estudio se le aplicó el ciclo de investigación previsto en la teoría APOE, el cual estableció: un análisis teórico, conocido como DG; un diseño, basado en la DG teórica, y aplicación de instrumentos; seguido de un análisis y verificación de datos (Arnon et al., 2014). La aplicación de este ciclo permite obtener una descripción de las construcciones y mecanismos mentales que realizan los estudiantes; y a partir del análisis de los datos obtenidos, se lo puede repetir, para refinar tanto el análisis teórico como los instrumentos.

Descomposición genética hipotética

A continuación presentamos parte del relato de la descomposición genética propuesta en la investigación para construir la Matriz Asociada a una Transformación Lineal. Bajo la hipótesis de la teoría APOE y las nociones matemáticas sobre la Matriz Asociada a una Transformación Lineal, sostenemos que:

Para que un estudiante construya la Matriz Asociada a una Transformación Lineal como objeto, es necesario que muestre una construcción objeto del concepto espacio vectorial de dimensión finita, de esta forma consideramos dos espacios vectoriales *V*y *W*, con dimensiones finitas:

digamos *n* y *m* respectivamente, para luego, desencapsular de este objeto; por una lado bases ordenadas $B=\{v_1,v_2,\ldots, v_n\}$ y $B'=\{w_1,w_2,\ldots, w_m\}$ de los espacios*V* y *W*respectivamente como procesos y la pertenencia de un vector *w* al espacio vectorial *W*, también como proceso. Paso seguido se dan dos coordinaciones de los procesos antes mencionados a través, uno de la transformación lineal y el otro por medio de la combinación lineal de vectores. Específicamente, la primera coordinación, mediante la transformación lineal, es entre los procesos de las bases ordenadas *B* y *B'*de *V* y *W* respectivamente, donde se calculan mediante la transformación lineal las imágenes de los vectores de la base *B*. La segunda coordinación es entre los procesos base ordenada *B'* de *W*, con la pertenencia de un vector *w* a *W*, se coordina a través de la combinación lineal de vectores, dando origen al proceso de expresar *w* como combinación lineal de los vectores de la base ordenada *B'* de *W*, este nuevo proceso se encapsula en el objeto coordenada de vector *w* en la base *B'*, es decir, $[w]_{B'}$.En figura 1 se muestra en el esquema la coordinación de los procesos que se obtienen de desencapsular el objeto coordenada y el proceso que obtuvimos de la coordinación mediante la transformación lineal, ambos nuevamente serán coordinados por la generalización dada por el cuantificador que determina que el proceso se repetirá en todos los vectores de la base ordenada *B* de *V*, de esta forma se obtiene la matriz de coordenadas , es decir un ordenamiento de lascoordenadas de la imágenes, este proceso es encapsulado en el objeto matricial y rotulado como $[T]_B^{B'}$

Por otra parte, la DG da cuenta de la desencapsulación de los objetos matriz rotulada de coordenadas y las coordenadas de un vector *v* de *V,* ambos objetos desencapsulados como procesos son coordinados por el producto matricial, formando una matriz resultante de dicho producto, es decir $[T]_B^{B'}[v]_B$ lo cual es un proceso el que se podrá encapsular en un objeto matricial y posteriormente rotular como $[T(v)]_{B'}$

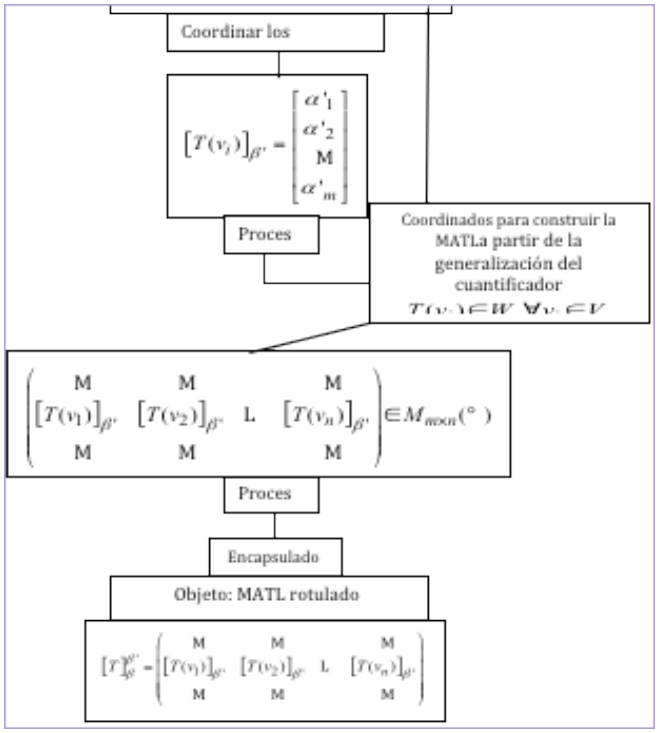


Figura1. Detalles de la DG de la Matriz Asociada a una Transformación Lineal.

En búsqueda de evidencias empíricas para la DG

Diseñamos un cuestionario de 5 preguntas, con la intención de documentar las construcciones y mecanismos mentales necesarios para construir la Matriz Asociada a la Transformación Lineal. Realizamos un análisis a priori y uno a posteriori para cada una de las preguntas.Hemos seleccionado dos preguntas del cuestionario, para mostrar parte de las evidencias obtenidas, que a continuación serán analizadas a la luz de la DG.

Pregunta 4 del cuestionario

Determine la matriz asociada a la transformación lineal definida desde $IP_2[x]$ (polinomios de grado menor o igual a dos) a $\mathbf{R^3}$ *,por* $T(ax^2+bx+c)=(a+c, a-b, b)$, *en las bases* $B_4=\{x^2, x^2+x, x^2+x+1\}$ *y* $B_5=\{(1,1,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ *de* $IP_2[x]$ *y* $\mathbf{R^3}$ *respectivamente.*

La pregunta propone determinar si el estudiante muestra una construcción proceso del Teorema Matriz Asociada a Transformación Lineal. Para ello, como se muestra en la figura 1, se considera el tramo en la DG, donde debe coordinar los procesos e incorporar la generalización.

Es así que el estudiante da evidencias de tener una construcción proceso producto de la generalización de la matriz constituida por las coordenadas de las imágenes de los vectores de la Base B_4.En la respuesta esperada**,** un estudiante debe calcular las imágenes de los vectores de la base B_4, es decir: $T\left(x^2\right)=(1,\ 1,\ 0)$, $T\left(x^2+x\right)=(1,\ 1,\ 1)$ y $T\left(x^2+x+1\right)=(2,\ 0,\ 1)$. De esta forma calcula las coordenadas de cada vector imagen, es decir $(1,\ 1,\ 0)=\alpha_1(1,1,0)+\beta_1(0,1,0)+\delta_1(0,0,1)$, $(1,\ 1,\ 1)=\alpha_2(1,1,0)+\beta_2(0,1,0)+\delta_2(0,0,1)$ y $(2,\ 0,\ 1)=\alpha_3(1,1,0)+\beta_3(0,1,0)+\delta_3(0,0,1)$, de esta forma se obtienen los valores de las coordenadas de cada vector imagen, ordenado los sistemas que se obtienen en una matriz se tiene $\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$, de donde la Matriz Asociada a una Transformación Lineal corresponde a $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Pregunta 5 del cuestionario

Considere la transformación lineal $F:\langle(1,0,0,1),(0,1,1,0)\rangle \to \langle x^2, x+1\rangle$ *, definida por* $[F]_B^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$*; donde* $B = \langle(1,0,0,1),(0,1,1,0)\rangle$ *y* $B' = \langle x^2, x+1\rangle$ *determine las coordenadas de la imagen del vector* $[v]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

La pregunta permite observar si la construcción de la Matriz Asociada a una Transformación Lineal es un objeto encapsulado del cual se reconoce su propiedad de continuar siendo una función.En la respuesta esperada, un estudiante para determinar las coordenadas del vector, debe aplicar $[F]_B^{B'}[v]_B = [F(v)]_{B'}$,por lo que se tiene que las coordenadas del vector pedidas son: $[F(v)]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 24 \end{bmatrix}$.

El desempeño de los estudiantes y análisis a posteriori

Con el fin de mostrar ejemplos de los datos obtenidos, a continuación presentamos una selección del trabajo realizado por cuatro estudiantes del caso a las preguntas antes descritas.

Análisis a posteriori Pregunta 4

La figura 2, E4 muestra una construcción objeto del concepto Matriz Asociada a una Transformación Lineal; al describir la construcción indicando las coordenadas de las imágenes de los vectores de la base del espacio de partida, en un arreglo matricial.

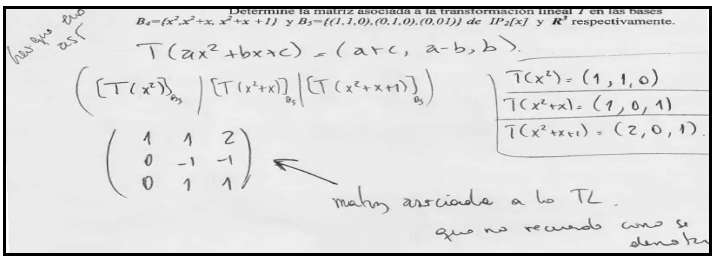


Figura 2. Produccion del estudiante E4.

Esto nos permite decir junto con su trabajo a las otras preguntas que coordina las construcciones proceso de la imagen de un vector con el concepto de matriz, mediante la base, lo que hemos entendido como la generalización de los procesos de formación de las coordenadas de las imágenes mediante la transformación lineal.

Opuestamente a E4, en la figura 3 se muestra la producción de E3, al que se le dificulta dar respuesta.

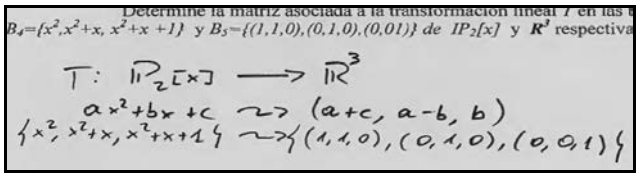


Figura 3: Produccion del estudiante E3

E3, no puede dar respuesta a la pregunta, pero en sus respuestas a las preguntas anteriores mostró una construcción proceso del concepto coordenadas de la imagen de un vector, esto es la construcción de la Matriz Asociada a una Transformación Lineal, a pesar de necesitar el concepto de coordenadas no es suficiente para asegurar su construcción.

Análisis a posteriori Pregunta 5

La figura 4 muestra,la respuesta de E12 a la pregunta 5.

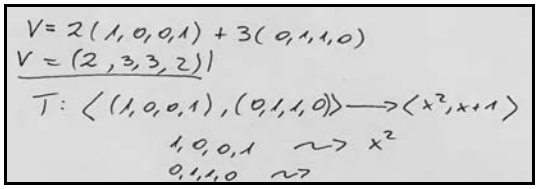


Figura 4: Respuesta que realiza el E12.

A la luz de la DG, podemos argumentar que no ha construido el conceptoMatriz Asociada a una Transformación Lineal, pues a pesar de mostrar una construcción proceso del concepto combinación lineal y de base de un espacio vectorial, no le alcanza para dar respuesta, en las preguntas anteriores construye las coordenadas, peo no construye la matriz, lo que constituye un obstáculo para lograr dar respuesta a una pregunta que le pide operar con ella.Por el contrario el estudiante E9muestra según figura 5, la Matriz Asociada a una Transformación Lineal como una construcción mental objeto, la que desencapsula permitiéndole realizar transformaciones sobre él, y llegar a construir TMATL.

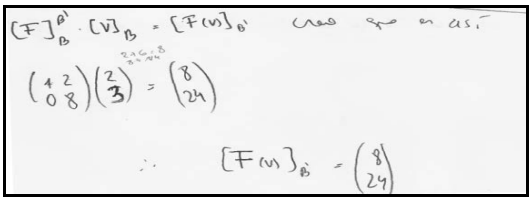


Figura 5: Respuesta que realiza el E9.

Conclusiones

La DG propuesta en la investigación ayudó a describiralgunas de las dificultades de aprendizaje de la Matriz Asociada a una Transformación Lineal, y por ende de su teorema Matriz Asociada a una Transformación Lineal. Es así, que se obtuvo como consecuencia que la coordinación de las

construcciones proceso de los conceptos de coordenadas de la imagen de un vector y el proceso matriz a partir de la generalización del cuantificador,es una falencia en el caso estudiado. Prueba de ello es E3, que construye el concepto de coordenada como objeto, sin embargo no puede generalizarlo a la matriz como objeto.Por otro lado, otros mecanismos que muestran debilidad en los informantes para la construcción del TeoremaMatriz Asociada a una Transformación Lineal, esto es, los estudiantes aun habiendo construido la matriz no pueden aplicar el teorema, esto podría deberse, por una parte a que no construyen como objeto la Matriz Asociada a una Transformación Lineal, esto es rotulan antes de tiempo un objeto mal construido y es así que no se alcanza la construcción del Teorema Matriz Asociada a una Transformación Linealcomo objeto. Para el caso de estudio, la construcción del Teorema Matriz Asociada a una Transformación Lineal como proceso no es alcanzada por la totalidad de los estudiantes, sólo cinco de estos lograron coordinar los procesos descritos en la DG para construir como objeto.

Para finalizar, en cuanto a la Matriz Asociada a una Transformación Lineal, los dos temas substantivos, según nuestros datos, transformación lineal y matriz de coordenadas; los resultados de la investigación indican, para el caso estudiado, que el concepto de coordenadas de la imagen de un vector, por medio de una transformación lineal no representa dificultad a los estudiantes, sin embargo la generalización de este, es un obstáculo para alcanzar la construcción del objeto Matriz Asociada a una Transformación Lineal .Los estudiantes que conforman esta unidad de estudio, excepto dos, no logran construir la matriz asociada a la transformación lineal como objeto.

Reconocimientos. Los autores manifiestan sus agradecimientos por la buena disposición de todos los participantes en la investigación.

Referencias bibliográficas

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory. A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education.* New York: Springer.

Arnal, J. del Rincón, D., y La Torre, A. (1992). *Investigación educativa: fundamentos y metodología*. Barcelona: Labor.

Poole, D. (2006). *Álgebra Lineal. Una introducción Moderna*. México: Thomson Internacional.

Stake, R. E. (2010). *Investigaciónconestudio de casos*. Barcelona: Labor.

LAS CÓNICAS: UNA PROPUESTA DIDÁCTICA DESDE LA TEORÍA DE LOS MODOS DE PENSAMIENTO

Daniela Bonilla Barraza, Marcela Parraguez González y Leonardo Solanilla Chavarro
Universidad de La Serena Chile
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Universidad del Tolima Colombia
danielabonillab@gmail.com, marcela.parraguez@ucv.cl, leonsolc@ut.edu.co

Resumen. Se sustenta una propuesta didáctica para la comprensión de las cónicas en estudiantes de16 a18 años de edad, a partir de una investigación con enfoque cognitivo, desde la teoría los modos de pensamiento de Anna Sierpinska, donde se distinguen tres modos de pensar un concepto: sintético-geométrico (SG), analítico-aritmético (AA) y analítico-estructural (AE). Nuestra problemática se sitúa en la enseñanza-aprendizaje de las cónicas cuando el discurso matemático escolar da prioridad a las ecuaciones cartesianas que las describen.Consideramos que el énfasis en esas ecuaciones, promueve la pérdida de su estructura como lugar geométrico. Como resultado de investigación, se diseña una propuesta didáctica exploratoria en la geometría del taxi, con la convicción de que el aprendiz entiende las cónicas cuando transita entre los distintos modos de comprenderlas: SG (como figuras que las representan), AA (como pares ordenados que satisfacen una ecuación) y AE (como lugar geométrico).
Palabras clave: cónicas, geometría del taxista

Abstract. It supports a teaching proposal for the understanding of the Conics in students 16 to 18 years of age, starting from an investigation with cognitive approach, since the theory modes of thought of Anna Sierpinska, where there are three distinct ways of thinking a concept: synthetic-geometric (SG), analytical-arithmetic (AA) and analytic-structural (AE).Our problem lies in the teaching and learning of conics when school mathematical discourse prioritizes Cartesian equations that describe them. We believe that the emphasis on these equations, promotes the loss of its structure of locus. As a result of research, designing an exploratory teaching proposal taxi geometry, with the conviction that the learner understands the conical when transitions between different modes of understanding: SG (as figures representing them), AA (as ordered pairs that satisfy an equation) and AE (as locus).
Key words: conics, taxi geometry

Introducción

Descripción de la problemática y objetivos de investigación

La cónicas (circunferencia, parábola, elipse e hipérbola) se trata en nuestro país en la asignatura *álgebra y modelos analíticos*, correspondiente al tercer año de enseñanza media (16-18 años). En el tratamiento de las cónicas, el programa de estudio promueve el uso de técnicas analíticas, y se espera que los aprendices puedan "Reconocer la circunferencia, elipse y parábola a partir de las ecuaciones cartesianas que las caracterizan" (Ministerio de Educación, 2001, p.41).

Consideramos que este enfoque centradoen las ecuaciones cartesianas propicia la pérdida de sus definiciones como lugares geométricos. Específicamente, en la investigación realizada por Bonilla y Parraguez (2013) sobre la elipse, manifiestan, que los estudiantes que han trabajado la elipse bajo

el enfoque tradicional, si bien comprenden la elipse a partir de las ecuaciones que la definen, y son capaces de graficarlas, presentan grandes dificultades para entenderla como un lugar geométrico.

Con el propósito de que los aprendices comprendan cada una de las cónicas –como figuras que las representan, como pares ordenados y como lugar geométrico–, nos propusimos como objetivo general de investigación: Diseñar una propuesta didáctica que promueva el tránsito entre estos tres modos de pensar las cónicas SG, AA y AE, para estudiantes de 16-18 años,utilizando como sistema de referencia el plano en la geometría del taxista (Krausse,1986).

Marco teórico: los modos de pensamiento

La propuesta didáctica y la investigación se sustentan en el marco teórico, los modos de pensamiento propuestos por Anna Sierpinska (2000). Ella distingue tres modos de pensar un concepto: sintético-geométrico (SG), analítico-aritmético (AA) y analítico-estructural (AE). Para esta teoría comprender un objeto matemático, es poder abordarlo articuladamente desde SG, AA y AE (Parraguez, 2012). Por lo tanto, consideramos que para lograr una comprensión de las cónicas es necesario que el aprendiz de estos tópicos transite entre los distintos modos de comprenderla: SG (como figuras que las representan), AA (como pares ordenados que satisfacen una ecuación) y AE (como lugar geométrico), y la geometría que brinda los elementos para tal articulación es la geometría del taxista (Bonilla y Parraguez, 2013). La figura 1, nos muestra el caso de la circunferencia en la geometría del taxista.

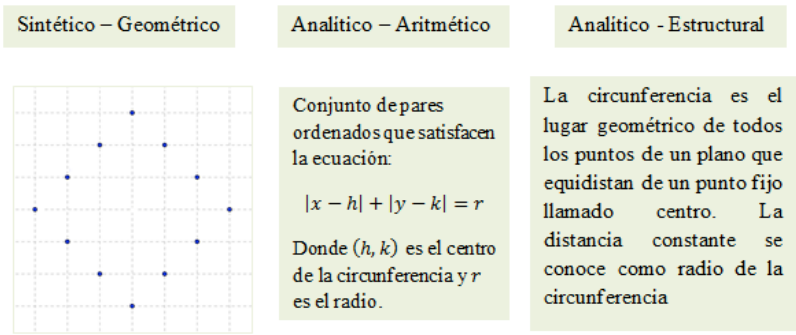


Figura 1: Modos de pensar la circunferencia en la geometría del taxista.

Estos tres modos de pensar, que hemos definido para las cónicas permiten analizar la forma en que los estudiantes las comprenden, además explicitar los enfoques (analíticos, geométricos o estructurales) que priorizan los estudiantes al momento de desarrollar diferentes tareas y mostrar en sus argumentos observables conexiones que logran establecer entre ellos.

Elementos básicos de la geometría del Taxista

Por Geometría del Taxista entenderemos una estructura matemática (algebraica y topológica) definida para el producto cartesiano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, entendido como una versión discreta del plano cartesiano de las parejas ordenadas de números enteros.

La estructura algebraica en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ es aquella de módulo bilateral sobre el dominio entero $\mathbb{Z}$. Es decir, la suma se realiza en cada componente y un escalar entero multiplica las dos componentes. En términos concretos, sí(x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y $z \in \mathbb{Z}$,

$$(x_1, y_1), +(x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad z(x_1, y_1) = (zx_1, zy_1).$$

Sin embargo, lo que marca la diferencia con la geometría Euclidiana es la parte topológica de la estructura. Como el lector lo habrá entendido seguramente de las explicaciones anteriores, la distancia entre los puntos (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ es

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|.$$

Con esta distancia o métrica, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ posee una estructura de espacio métrico que difiere de la que se obtiene con la métrica euclidiana usual (raíz cuadrada de los cuadrados de las diferencias de las coordenadas). Por ello, la geometría del Taxista puede llamarse no-Euclidiana. El nombre proviene del hecho de que la métrica remeda la forma cómo un taxi recorre una ciudad: sólo puede recorrer tramos en dirección norte-sur o este-oeste y no puede pasar diagonalmente a través de los bloques o manzanas.

Sobre la propuesta didáctica

Para diseñar la propuesta didáctica, indagamos en las bases epistemológicas de los modos práctico y teórico de pensar una cónica, las cuales nos dio luces sobre los elementos matemáticos que permiten articular estos tres modos de comprenderlas, que estamos especificando.

Destacamos como antecedentes didácticos, la investigación de Parraguez y Bozt (2012), que en una de sus conclusiones, reportan para su objeto matemático de estudio, que aquellos estudiantes que logran transitar entre los modos de pensamiento, muestran en sus argumentos una cercanía con las definiciones formales de los conceptos. Así también, Bonilla y Parraguez (2013) en su estudio sobre la elipse, afirman, que los estudiantes que comprenden la elipse en el modo AE, presentan mayores posibilidades de alcanzar la articulación de éste con los otros modos SG y AA de la elipse.

Un componente importante a destacar en nuestra propuesta didáctica es la métrica discreta propia de la geometría del taxista (Krausse, 1986), puesto que nos entrega importantes beneficios en la comprensión del modo AE a partir de un modo SG. Específicamente Bonilla y Parraguez (2013) reportan que para el caso de la elipse "Los elementos de esta geometría (distancia discreta, puntos como "esquinas") facilitan la comprensión de la propiedad que la define como lugar geométrico "la suma de las distancias de un punto de laelipse a ambos focos es siempre constante", además permite probar que ésta se cumple para todos los puntos de la elipse, situación que no es evidente en la geometría euclidiana."(Bonilla y Parraguez, 2013, p.199).

A partir de los antecedentes mencionados, diseñamos una propuesta didáctica exploratoria, con la finalidad de indagar en los elementos matemáticos que estaría propiciando los tránsitos entre los modos SG – AE – AA de cada una de las cónicas.La propuesta exploratoria, considera como trabajo previo la familiarización de algunos conceptos matemáticos en la geometría del taxista, estos son: plano, distancia entre dos puntos.

La secuencia, en su parte inicialpromueve el tránsito entre los modos SG a AE de las cónicas,para ello, se muestran las representaciones de cada una de ellas en la geometría del taxista, y se espera que los aprendices sean capaces de identificar características que presentan los puntos que forman la elipse y la circunferencia, en relación a puntos fijos.

Posteriormente la secuencia aborda el tránsito de AE a AA, con la intensión que los estudiantes puedan obtener ecuaciones de cónicas, conociendo la representación geométrica asociada, y entendiendo las definiciones formales de cada una de ellas.

Metodología y Resultados

En relación a nuestro objetivo de investigación, realizaremos un estudio de caso, puesto que son particularmente apropiados para estudiar una situación en intensidad en un período de tiempo, identificando los distintos procesos interactivos que conforman la realidad del caso (Arnal, Del Rincón y Latorre, 1992), "permitiendo una aproximación conceptual apropiada para examinar las particularidades al interior de un contexto global de suyo múltiple y complejo" (Goetz y Le Compte, 1988, p.69), contribuyendo con ideas que puedan aportar al diseño de la secuencia didáctica.

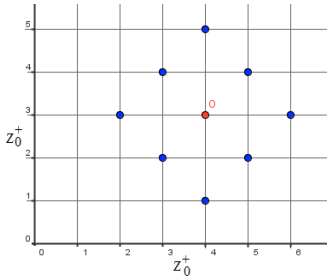
La unidad de análisis la conforma un grupo de 10 estudiantes de unestablecimiento educacional de dependencia compartida (particularsubvencionado). Estos estudiantes aprobaron la *asignatura de álgebra y modelosanalíticos*. Por lo tanto, ya han trabajado con las cónicas, con un enfoque centrado en las ecuaciones. Actualmente (2013) cursan cuarto añode enseñanza Media. Por otra

parte es preciso dejar en claro que los estudiantes accedieron voluntariamente a ser partícipes de estainvestigación.

En búsqueda de evidencias empíricas para los tránsitos SG-AE-AA

Las actividades realizadas por los estudiantes muestran evidencias de los tránsitos, para la circunferencia y la elipse.

Hemos seleccionados dos actividades de nuestra secuencia exploratoria para darlas a conocer en este artículo. En efecto, en la circunferencia, se plantea la siguiente actividad:



Pregunta 1: *En el plano discreto definido* de $z_0^+ x z_0^+$ *con la métrica del taxista. se representa la siguiente circunferencia. El punto O es el centro de la circunferencia*

En base a la descripción anterior, responde las siguientes preguntas:

a) ¿Qué característica común tienen los puntos de la circunferencia en relación al centro?

b) escribe una definición para la circunferencia.

c) encuentra una ecuación que permita describir lacircunferenciadada.

Análisis de respuestas

Las preguntas a) y b) dan cuenta sobre el tránsito SG-AE de la circunferencia, donde todos los estudiantes determinaron características que se acercan a su definición como lugar geométrico (figura 2). Es importante destacar que esta figura geométrica es una de las más trabajadas en el currículo, por lo tanto, es posible que los educandos posean algún conocimiento sobre ella.

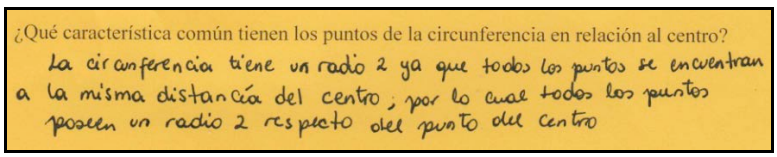

¿Qué característica común tienen los puntos de la circunferencia en relación al centro?
La circunferencia tiene un radio 2 ya que todos los puntos se encuentran a la misma distancia del centro, por lo cual todos los puntos poseen un radio 2 respecto del punto del centro

Figura 2: respuesta de estudiante 7.

La pregunta c) busca conectar los modos AE-AA de la circunferencia, en este caso la mayoría de los estudiantes (6 de 10) muestra evidencias de estar en vías de comprender el modo AA de la

circunferencia, entienden que los puntos de la circunferencia están a una distancia constante del centro, pero solo prueban para algunos puntos particulares, solo 4 de los estudiantes logran realizar con éxito la conexión AE-AA, estableciendo una ecuación para todos los puntos de la circunferencia, destacamos en este tránsito la comprensión de la circunferencia como un conjunto de puntos que cumple una ecuación (ver figura 3).

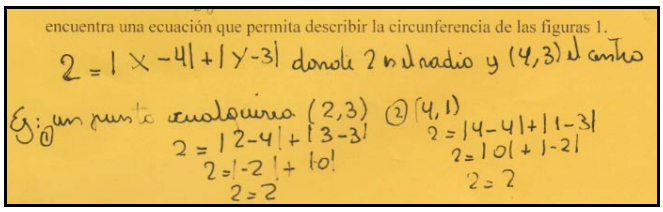
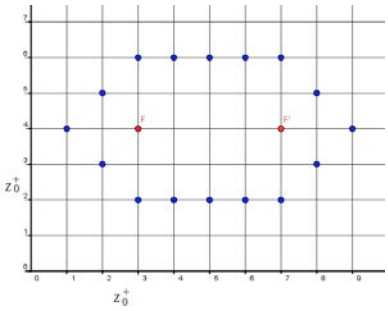


Figura 3 : respuesta de estudiante 1

Pregunta 2: En la secuencia exploratoria se plantea la siguiente actividad, con respecto a la elipse:

La figura que sigue representa una elipse en la geometría del taxista. (Los puntos F y F´ se llaman focos).



En base a la descripción anterior, responde las siguientes preguntas:

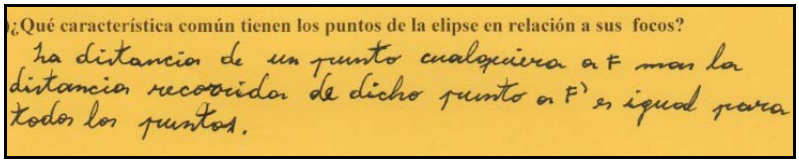
a)¿Qué característica común tienen los puntos de la elipse en relación a sus focos?

b) Escribe una definición para la elipse

c) Encuentre una ecuación que permita describir la elipse dada.

Análisis de respuestas

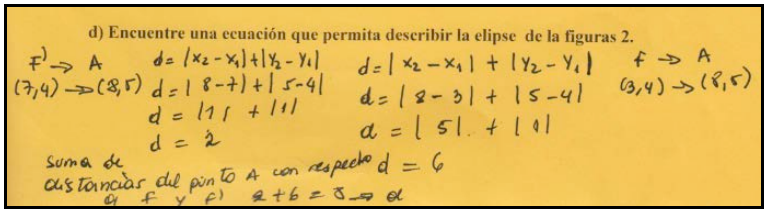
El propósito de las preguntas a) y b) es dar cuenta de los tránsitos SG-AE de la elipse. La mayoría de los estudiantes (8 de 10) muestran en sus respuestas evidencias de comprensión del modo AE a partir del modo SG de la elipse, es decir, dada la representación de una elipse identifican la propiedad que caracteriza al conjunto de puntos que la forman, (figura 4).


¿Qué característica común tienen los puntos de la elipse en relación a sus focos?

La distancia de un punto cualquiera a F mas la distancia recorrida de dicho punto a F' es igual para todos los puntos.

Figura 4: respuesta del estudiante 6

En relación a la conexión en los modos AE-AA, la mayoría de los informantes (7 de 10) muestran evidencias de estar en vía de comprender el modo AA, prueban a través de las distancias la propiedad que define la elipse, pero no logran establecer una ecuación, (figura 5) El resto de los estudiantes (3 de 10) son capaces de establecer una ecuación para todos los puntos que forman la elipse (figura 6).


d) Encuentre una ecuación que permita describir la elipse de la figuras 2.

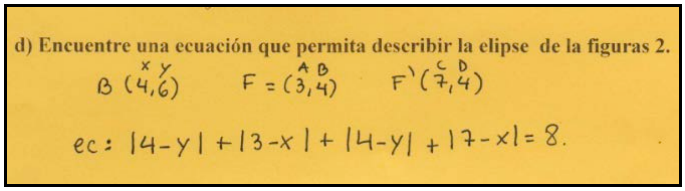
F' → A
(7,4) → (8,5)
d = |x2 - x1| + |y2 - y1|
d = | 8-7| + | 5-4|
d = |1| + |1|
d = 2

d = | x2 - x1 | + | y2 - y1 |
d = | 8 - 3 | + | 5 - 4 |
d = | 5 | + | 1 |
d = 6

F → A
(3,4) → (8,5)

Suma de distancias del punto A con respecto a F y F' 2 + 6 = 8 → d

Figura 5: respuesta del estudiante 2


d) Encuentre una ecuación que permita describir la elipse de la figuras 2.

B (4,6) (x y) F = (3,4) (A B) F'(7,4) (C D)

ec: |4-y| + |3-x| + |4-y| + |7-x| = 8.

Figura 6: respuesta del estudiante 10

Es importante destacar que los estudiantes pueden mostrar que un punto específico es parte de la elipse, sin embargo, su dificultad radica en generalizar un punto de la elipse, es decir, si *(a,b)* es un punto ¿cómo se muestra que ese punto *(a,b)* es parte de la elipse? Por otro lado, evidenciamos que uno de los elementos que favorecen la conexión entre los modos de comprender la elipse es la concepción del conjunto solución de una ecuación. Además damos cuenta, que si bien los estudiantes han trabajado las cónicas en la geometría euclidiana, las definiciones presentadas en la actividad exploratoria acuden al concepto de lugar geométrico, por lo tanto, es posible que las definiciones de elipse, en la geometría del taxista como lugar geométrico se hayan construido a través de las actividades realizadas en el mismo instrumento exploratorio.

Conclusiones

En relación a la secuencia exploratoria realizada, damos cuenta de la factibilidad del tránsito entre los modos SG y AE de la circunferencia y elipse, donde el concepto de distancia es fundamental como elemento matemático que conecta ambos modos. Por otra parte en la interacción entre los modos AE y AA evidenciamos que los estudiantes presentan dificultades para plantear las

ecuaciones de la elipse, si bien la comprensión del modo AE es esencial para llegar a obtener las ecuaciones de las cónicas, también es importante que los aprendices comprendan el concepto de conjunto solución de una ecuación, y que cuenten con herramientas analíticas que permitan generalizar, por ejemplo, identificar un punto en el plano como *P(x,y)*.

Sobre lineamientos a seguir en la investigación, a partir de las evidencias empíricas con sustento teórico, obtenidas en el estudio exploratorio, se trabajará en el diseño de la secuencia didáctica para el tratamiento de todas las cónicas, potenciando aquellos elementos que favorezcan la conexión entre los modos de pensamiento para así alcanzar la comprensión del objeto matemático –cónicas–.

Sobre beneficios de la investigación para nuestros aprendices, consideramos que trabajar las cónicas en la geometría del taxistafavorece la comprensión de los objetos matemáticos, a través de sus definiciones como estructuras, situación que trasciende a las representaciones.

Por otro lado, el desarrollo de las actividades en esta geometría no euclidiana, nos brinda posibilidades al tratamiento unificado de las cónicas, es decir, comprenderlas integradamente bajo tres dimensiones: geométrica, analítica y estructural.

Referencias bibliográficas

Arnal, J., del Rincón, D., y La Torre, A. (1992). *Investigación educativa: fundamentos y metodología*. Barcelona: Labor.

Bonilla, D. y Parraguez, M. (2013). *La elipse desde la perspectiva la teoría los modos de pensamiento*. Alemania: Editorial académica española.

Goetz, J. P. y Lecompte M.D. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa.* España: Morata.

Krause, E. (1986). *Taxicab Geometry: An Adventure in Non-Euclidean Geometry*. New York: Dover Publications.

Parraguez, M. y Bozt, J. (2012). Conexiones entre los conceptos dependencia e independencia lineal de vectores y el de solución de sistemas de ecuaciones lineales en R^2 y R^3 desde los modos de pensamiento. *Revista electrónica de investigación en ciencias*, 7*(1)*, 49-72.

Parraguez, M. (2012). *Teoría los modos de pensamiento: Didáctica de la Matemática*. Valparaíso: Instituto de Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso-Chile.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra.En J.-L.Dorier (ed.), *On the Teaching of Linear Algebra*.KluwerAcademicPublishers, 209-246.

REDISEÑO Y APLICACIÓN DE DE UNA SECUENCIA DE ACTIVIDADES PARA EVITAR QUE ESTUDIANTES DE NIVEL MEDIO SUPERIOR MIREN A LAS OPERACIONES DE POTENCIACION Y RADICACION COMO INVERSAS

María Patricia Colín Uribe, Celia Araceli Islas Salomón y Fernando Morales Téllez
Instituto Politécnico Nacional, CECyT NB México
patricia_c_u@hotmail.com, pcolin@ipn.mx

Resumen. Este trabajo complementa otras investigaciones que evidencian las "*disfunciones escolares*" que el operador *raíz cuadrada* presenta en el tránsito del contexto aritmético al algebraico y del algebraico al funcional. Juárez (2007) muestra cómo estudiantes de bachillerato en el estado de Guerrero, México, no logran detectar la problemática que se genera al considerar a las operaciones de potenciación y radicación como inversas sin considerar ninguna restricción. En este trabajo mostramos el rediseño de la secuencia de actividades de Juárez y los resultados de su aplicación a estudiantes de bachillerato en un Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos (CECyT) del Instituto Politécnico Nacional (IPN) en el Distrito Federal, México. Mostraremos la nueva secuencia y las consideraciones que hicimos para modificarla, así como las respuestas de algunos estudiantes. Mostraremos que el considerar a las operaciones de potenciación y radicación como inversas permea en el conocimiento de los estudiantes.

Palabras clave: raíz cuadrada, potenciación, radicación, disfunción

Abstract. This work complements other research showing "school dysfunctions" presents the square root operator in the transit of the arithmetic to the algebraic context and the algebraically to the functional. Juarez (2007) shows how high school students fail to detect the problems that exist when considering empowerment and establishment operations such as reverse without restriction. In this work we redesigned the sequence of activities from Juarez to be applied to students of high school of the Instituto Politécnico Nacional. We will show the new sequence and the considerations that we did to modify it

Key words: square root, potentiation, radication, dysfunction

Introducción

La Matemática Educativa es la disciplina que estudia los procesos de transmisión y adquisición del saber matemático en situación escolar; así, describe y explica los fenómenos que se originan entre la enseñanza, el aprendizaje y el saber.

En el discurso matemático escolar, la matemática se presenta seccionada, es decir, se divide en áreas que están lineal y jerárquicamente estructuradas y son trabajadas bajo el supuesto de que las reglas del nivel anterior serán respetadas y utilizadas en el nivel posterior. Para nuestro tema de interés, la *raíz cuadrada*, esta jerarquización presenta ciertas *disfuncionalidades*, puesto que las reglas de la aritmética aprendidas para obtenerla, ya no son respetadas al movernos en el plano algebraico. Esta disfunción probablemente funciona como un obstáculo para que el estudiante comprenda el significado de este operador en el contexto algebraico (Colín, 2006).

A nuestro trabajo le anteceden tres investigaciones; la primera realizada por Lorenzo (2005) quien se interesó por estudiar las concepciones que tienen los alumnos del Nivel Básico Secundaria sobre el concepto matemático *raíz cuadrada*. Este trabajo de investigación muestra

cómo los libros de texto de nivel básico secundaria tratan, transmiten y justifican temas relacionados con la *raíz cuadrada*. Además, muestra algunas concepciones de estudiantes de este nivel escolar. Algunas de ellas son

- La *raíz cuadrada* no es una operación básica.
- La solución de la ecuación $x^2 - 4 = 0$ es únicamente $x = 2$
- El algoritmo tradicional (o método de la "casita") es único método que sirve para calcular raíces cuadradas.
- La *raíz cuadrada* sólo se aplica para resolver problemas que involucran el cálculo de áreas de terrenos.
- la *raíz cuadrada* sólo se utiliza en la escuela.
- La *raíz cuadrada* es la operación inversa de elevar al cuadrado.

El segundo trabajo de investigación realizado por Colín (2006), quien, a través de un detallado análisis epistemológico, muestra la naturaleza y significados de la *raíz cuadrada* en diferentes contextos; mediante un análisis didáctico muestra las costumbres escolares que los libros de texto presentan al momento de tratar la *raíz cuadrada*; por ultimo, en un análisis cognitivo, presenta las concepciones que poseen los estudiantes respecto a expresiones que involucran a la *raíz cuadrada*. Finalmente, esta investigación muestra los fenómenos didácticos ligados a las concepciones que los estudiantes tienen respecto a la *raíz cuadrada*, entre los cuales se encuentran los siguientes:

- Los estudiantes, en su mayoría, consideran solamente a la raíz principal como la *raíz cuadrada* de un número. Esto es, el significado que le dan al operador *raíz cuadrada* es el que tiene en el contexto aritmético
- Para los estudiantes de secundaria, el concepto raíz cuadrada es entendido como un operador aritmético, no algebraico. La extracción de raíces cuadradas solamente da números positivos como resultado.
- Los estudiantes de Nivel Superior establecen la diferencia entre que la solución de una ecuación cuadrática (contexto algebraico) y la raíz cuadrada de un número (contexto aritmético).
- La costumbre escolar "*la radicación es la inversa de la potenciación*" es utilizada sin restricción.

- La raíz cuadrada que se considera para la solución de ecuaciones del tipo $x^2 - 4 = 0$ es la principal (positiva).
- La raíz cuadrada (en el contexto aritmético) tiene dos signos.
- Los libros de texto nos muestran que al calcular raíces cuadradas de números concretos, sólo se tomará la positiva (a la que llaman raíz principal).
- La gráfica de la expresión $y^2 = x$ es la misma que la de la expresión $y = \sqrt{x}$, puesto que ambas expresiones son iguales.

El tercer trabajo de investigación es el de Juárez (2007) el cual, al aplicar una secuencia de actividades a un grupo de estudiantes de una escuela de Nivel Medio superior en el estado de Guerrero, México, muestra cómo los estudiantes no identifican las restricciones que deben considerar cuando se trabaja con el operadores que involucran la raíz cuadrada.

Nuestro trabajo de investigación se origina tomando en cuenta las respuestas de los estudiantes con los que trabajó Juárez (2007). Nuestro objetivo es el de modificar la secuencia de actividades diseñada por el y aplicarla ahora en un contexto diferente: un CECyT del IPN localizado en la Ciudad de México. Lo que deseamos es que, con estos cambios, estos nuevos estudiantes entren en conflicto al enfrentarse a una situación en donde, al considerar (sin restricción) a las operaciones de potenciación y radicación como inversas, y reconsideren que estas operaciones sólo son inversas bajo ciertas condiciones.

Marco Teórico

Nuestro marco teórico es la Teoría de Situaciones Didácticas, pues ésta propone el estudio, control y determinación de las condiciones en las cuales se constituyen los conocimientos matemáticos e implica que el investigador debe participar en la producción (o diseño) de las situaciones didácticas que analiza. (Cantoral y Farfán, 2000)

Metodología

Para nuestro trabajo de investigación, utilizaremos a la Ingeniería Didáctica como metodología. En Lezama (2001) se presenta en forma sintetizada a la Ingeniería Didáctica, la cual se muestra en la figura 1.

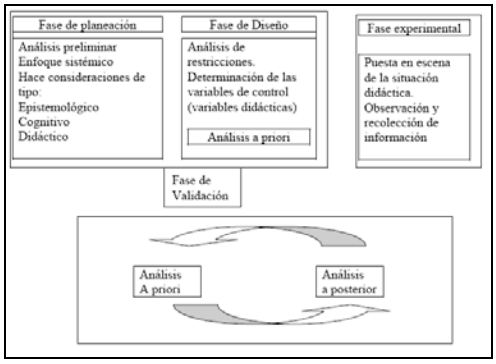


Figura 1

Fase de planeación: *Análisis preliminar*. Consta de un análisis didáctico para el cual, revisaremos los programas de estudio de nivel medio superior del IPN, así como, los objetivos que persiguen. También realizaremos un análisis de los libros de texto utilizados en este nivel y en esta casa de estudios para el tratamiento de conceptos que involucran a la *raíz cuadrada*.

Fase de diseño: *Rediseño de la secuencia de actividades*. (Fase predictiva y prescriptiva).

Esta fase se refiere al control de las relaciones que existen entre el significado y las actividades. Es aquí donde se hacen las restricciones y se determinan las variables de control. Dichas variables son las siguientes:

- Que los alumnos hubieran trabajado con el tema raíz cuadrada
- Que los alumnos interpreten correctamente las instrucciones que se presentarán y encuentren las respuestas correctas.

Fase experimental. Se aplicará la secuencia de actividades a 15 estudiantes de cuarto semestre del Nivel Medio Superior del CECyT Narciso Bassols del IPN. El tiempo programado para la realización de la secuencia es de dos sesiones de hora y media cada una, para hacer un total de 3 horas.

Fase de validación. Nuestra secuencia consta de cuatro actividades con cuatro incisos cada una, en las cuales además de solicitarles la resolución de los ejercicios, se les recomienda justifiquen su respuesta, con el propósito de que, al reflexionarlas, se percaten de que las operaciones de potenciación y radicación sólo resultan inversas bajo ciertas restricciones.

Análisis Didáctico

Este análisis didáctico complementará los resultados obtenidos por Lorenzo (2005), Colín (2006) y Juárez (2007).

Para hacer patente la presencia de la raíz cuadrada, en el currículo de matemáticas, analizaremos los programas de estudio de la Unidad de Aprendizaje de Álgebra que se imparte en los CECyTs del IPN, pues es aquí donde se trabajan conceptos relacionados con las propiedades de los radicales. En cuanto a los libros de texto, se revisaron 7 textos sugeridos en el plan de estudios de esta Unidad de Aprendizaje. La información que obtuvimos fue la siguiente

- Los programas de estudio tratan a la raíz cuadrada en el área de Aritmética. En los cursos subsecuentes se utiliza sólo como herramienta, por ejemplo, en la solución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita, la elaboración de la gráfica de la función raíz cuadrada $y = \sqrt{x}$ o en el trabajo de funciones en Cálculo Diferencial e Integral.

- Los libros analizados, en términos generales, presentan a la potenciación y radicación como inversas, unos hacen las restricciones correspondientes pero otros las omiten o la hacen al principio del capítulo, de tal manera, que al presentarla en forma de símbolos algebraicos, ya se ha perdido la restricción. A continuación mostramos algunos ejemplos en la figura 2:

TEXTO	DEFINICIÓN	RESTRICCIONES
Phillips, E.(2005)	$\sqrt[n]{a} = b$ si $b^n = a$	**No se observan**
Gustavson, D. (2005)	Si a y b son números positivos, $\sqrt{b} = a$, siempre y cuando $a^2 = b$	**Se hace énfasis en los valores de a y b sólo pueden ser positivos.**
Swokowsky. E.W. y Cole, J.A. (2006)	**La *principal raiz enésima* del número real *a*, siendo *n* un número entero positivo.** **a) Si** $a = 0$, **entonces** $\sqrt[n]{a} = 0$ **b) Si** $a > 0$, **entonces** $\sqrt[n]{a}$ **es el número real positivo *b* tal que** $b^n = a$ **c) Si** $a < 0$ **y *n* es non, entonces** $\sqrt[n]{a}$ **es el número real negativo *b* tal que** $b^n = a$ **d) Si** $a < 0$ **y *n* es par, entonces** $\sqrt[n]{a}$ **no es un número real.**	**Tiene todas las restricciones que se muestran**

Figura 2

- Hay autores que hacen énfasis en la pertinencia de las restricciones respectivas, incluso, presentan algunos ejemplos en los cuales manifiestan la o las contradicciones que pudieran presentarse si no se hacen dichas restricciones.

Análisis cognitivo

Para nuestro análisis cognitivo, describiremos el objetivo de nuestra secuencia de actividades y las respuestas que proporcionaron los estudiantes.

Objetivo: La secuencia esta diseñada con el objetivo de que, a través de las actividades, los estudiantes se percaten que las operaciones de potenciación y radicación (en particular, las operaciones de extraer raíz cuadrada y elevar al cuadrado). La secuencia consta de 4 actividades. A continuación mostraremos cada una de las respuestas que dieron los estudiantes. Cabe señalar que trabajaron 15 alumnos divididos en grupos de 3 personas.

Actividad 1. En esta actividad se pretende que el estudiante aplique sus conocimientos previos, manifestando que las operaciones de radicación y potenciación son inversas. La respuesta que esperamos es que los alumnos eliminen tanto exponente como radical, pues consideraran que las operación e son "inversas". Esto se muestra en la figura 3.

Actividad 1

Simplifica las siguientes expresiones algebraicas, realizando las operaciones indicadas y justifica tus respuestas, para llenar la siguiente tabla.

Expresión	Expresión simplificada	Justificación
$y=\sqrt{x^2}$	$y=$	
$y=\sqrt{(-x)^2}$	$y=$	
$y=(\sqrt{x})^2$	$y=$	
$y=(\sqrt{-x})^2$	$y=$	

$y=(\sqrt{-x})^2$	$y=-x$	La raíz se elimina con el cuadrado. $y=(\sqrt{-x})^2=-x$

Respuesta del equipo 1

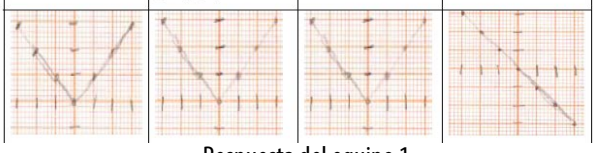
Figura 3

Actividad 2: Se les pidió llenar una tabla de datos y posteriormente trazar las graficas de los puntos obtenidos en papel milimétrico. El objetivo de esta actividad es que, dando valores a la incógnita, los estudiantes observen la diferencia entre los resultados obtenidos en la actividad 1. (figura 4).

Actividad 2

Tabula y grafica las expresiones anteriores en las hojas milimétricas anexas. Recuerda escribir a qué expresión se refiere la gráfica.

Valores de x	$y=\sqrt{x^2}$	$y=\sqrt{(-x)^2}$	$y=(\sqrt{x})^2$	$y=(\sqrt{-x})^2$
-3				
-2				
-1				
0				
1				
2				
3				

Gráfica de $y=\sqrt{x^2}$	Gráfica de $y=\sqrt{(-x)^2}$	Gráfica de $y=(\sqrt{x})^2$	Gráfica de $y=(\sqrt{-x})^2$
			

Respuesta del equipo 1

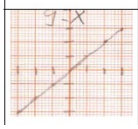
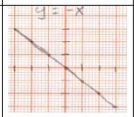
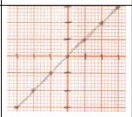
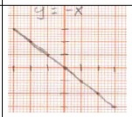
Figura 4

Actividad 3: Se les pide ahora llenar una tabla, pero simplificando las expresiones. Esperamos que al simplificar apliquen su conocimiento de que las operaciones son inversas. Además, se les pide comparar las graficas obtenidas con las de la actividad anterior. Los resultado de un equipo se muestran en la figura 5

Actividad 3

Tabula y grafica las expresiones simplificadas en las hojas milimétricas anexas. Recuerda escribir a qué expresión se refiere la gráfica.

Valores de x	$y =$	$y =$	$y =$	$y =$
-3				
-2				
-1				
0				
1				
2				
3				

Gráfica de $y = \sqrt{x^2}$ simplificada	Gráfica de $y = \sqrt{(-x)^2}$ simplificada	Gráfica de $y = (\sqrt{x})^2$ simplificada	Gráfica de $y = (\sqrt{-x})^2$ simplificada
			

Respuesta del equipo 2

Figura 5

Actividad 4: Se pide a los estudiantes comparar las graficas de las actividades 2 y 3 y anotar sus conclusiones. El objetivo es que los estudiantes se percaten que las operaciones que realizaron de "simplificación" no son correctas, pues obedecen a ciertas restricciones. Los resultados de un equipo se muestran en la figura 6 .

Actividad 4

Compara las gráficas de cada expresión y su expresión simplificada para completar la siguiente tabla.

Expresión	Expresión simplificada	¿Son iguales sus gráficas? ¿Son diferentes? ¿Porqué?
$y = \sqrt{x^2}$	$y =$	.....
$y = \sqrt{(-x)^2}$	$y =$	.....
$y = (\sqrt{x})^2$	$y =$	.....
$y = (\sqrt{-x})^2$	$y =$	.....

Expresión	Expresión simplificada	¿Son iguales sus gráficas? ¿Son diferentes? ¿Porqué?
$y = \sqrt{x^2}$	$y = x$	No son iguales son diferentes por que cambiaron los signos en la primera fueran positivos en la segunda variaron.

Respuesta del equipo 1

Figura 6

Conclusiones

En el plan y programa de estudio del nivel medio superior de la Unidad de Aprendizaje ALGEBRA del IPN se sugiere el uso de la raíz cuadrada sólo como herramienta para la resolución de problemas matemáticos, los cuales se trabajaran en unidades de aprendizaje posteriores. Esto muestra que este concepto es trabajado como mera herramienta y, de este modo, las restricciones no son consideradas.

Los libros de texto recomendados por los planes de estudio de la UA Algebra del IPN consideran que estas operaciones sólo son inversas bajo ciertas condiciones.

A pesar de ello, el manejo (de estudiantes y profesores) de las propiedades de los exponentes sin considerar la restricción de que *a*>0, genera los siguientes resultados

a) $\left(a^2\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{2}} = a^1 = a$

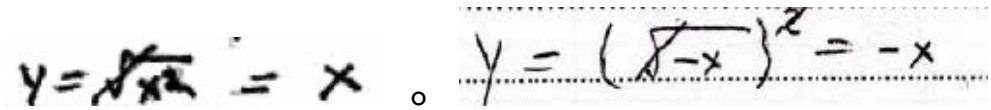
b) $\left((-a)^2\right)^{\frac{1}{2}} = (-a)^{\frac{2}{2}} = (-a)^1 = -a;$

c) $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a^{\frac{2}{2}} = a^1 = a;$

d) $\left((-a)^{\frac{1}{2}}\right)^2 = (-a)^{\frac{2}{2}} = (-a)^1 = -a$

Los estudiantes de nivel medio superior del IPN consideran a las operaciones de potenciación y radicación como inversas (en particular, la de potencia dos y raíz cuadrada). Esta concepción esta tan arraigada en los estudiantes que, al realizar la actividad 4 de comparación de gráficas, no pudieron establecer que las "cancelaciones" que habían hecho en las actividades anteriores sólo podían realizarse para ciertos valores de la variable *x*

La "*costumbre escolar*" de tratar a las operaciones de potenciación y radicación como inversas genera que el estudiante de resultados como



Los estudiantes de nivel medio superior no identificaron a las operaciones de potenciación y radicación como "inversas bajo ciertas condiciones".

Se propone trabajar con estudiantes de nivel Superior para mostrar si, a este nivel, los estudiantes ya no manejan a la potenciación y radicación como inversas y así concluir que la raíz cuadrada, sus propiedades y restricciones son establecidas conforme el estudiante avanza en su formación escolar.

Referencias Bibliográficas

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2000). Teoría de Situaciones Didácticas. En R. Cantoral, R. M. Farfan, F. Cordero, J.A. Alanis, R.A. Rodríguez y A. Garza, *Desarrollo del Pensamiento Matemático* (p.p. 41-44), México: Trillas.

Colín, M. (2006). *De la aritmética al cálculo. Un estudio transversal de la raíz cuadrada*. Tesis de Maestría no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. Ciudad de México, México.

Juárez, S. (2007). *Sobre la costumbre escolar de la raíz cuadrada como operación inversa de elevar al cuadrado: Un análisis didáctico y cognitivo en el Nivel Medio Superior.* Tesis de Maestría no publicada. Universidad Autónoma de Guerrero. Chilpancingo, México.

Lezama, J. y Farfán, R. M. (2001). Introducción al estudio de la reproducibilidad. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, *4(2)*,161-194.

Lorenzo, D. (2005). *Sobre la vida escolar de la raíz cuadrada en el nivel básico.* Tesis de Licenciatura no publicada. Universidad Autónoma de Guerrero. Chilpancingo, México.

Phillips, E. (2005). *Álgebra con Aplicaciones.* México: Oxford.

Gustavson, D. (2005). *Algebra Intermedia*. México: Thomson.

Swokowsky, E.W. y Cole, J.A. (2006). *Algebra y trigonometría intermedia*. México: Thomson.

TESTES ADAPTATIVOS

Agostinho Iaqchan Ryokiti Homa y Claudia Lisete Oliveira Groenwald
Universidade Luterana do Brasil Brasil
iaqchan@hotmail.com, claudiag@ulbra.br

Resumen. O objetivo desse trabalho foi desenvolver um Teste Adaptativo Computacional (TAC) para conteúdos matemáticos, dentro do padrão SCORM (Sharable Content Object Reference Model). Um TAC é um sistema que apresenta questões com níveis de dificuldades adequadas ao desempenho do estudante, com a intenção de identificar as habilidades e competências do mesmo. Para isso é necessário um banco de questões com uma boa qualidade psicométrica e um algoritmo de seleção das questões a serem apresentadas. Do ponto de vista psicométrico, a Teoria de Resposta ao Item (TRI) ofereceu suporte ao desenvolvimento do algoritmo para o TAC proposto. A adoção, como premissa básica, do padrão SCORM possibilita que o teste desenvolvido possa ser utilizado em qualquer ambiente de aprendizagem eletrônica compatível com o padrão.

Palabras clave: tecnologias na educação, TAC, SCORM

Abstract. The aim of this study was to develop a Computer Adaptive Test (CAT) for mathematical content within the standard SCORM (Sharable Content Object Reference Model). A CAT is a system that presents questions with difficulty levels suitable to the student's performance, with the intention of identifying the skills and competencies. This requires a bank of questions with good psychometric quality and a selection algorithm of the issues to be presented. From the psychometric perspective, the Item Response Theory (IRT) offered support to the development of the algorithm for the proposed CAT. The adoption, as a basic premise, of the SCORM standard enables that the developed test can be used in any electronic learning environment that supports the standard

Key words: technologies in education, CAT, SCORM

Introdução

Testes Adaptativos Computacionais, como: Graduate Record Examination (GRE); Test of English as a Foreign Language (TOEFL), desenvolvidos pela Educational Testing Service (ETS), e Armed Services Vocational Aptitude Test Battery (ASVAB), foram desenvolvidos e implementados em plataformas dedicadas, isto é, que utilizam sistemas configurados especialmente para atender necessidades e funcionalidades propostas. As configuraões diferenciadas, tanto nos modos de apresentação quanto na formatação de suas bases de dados, impossibilitam o intercâmbio de conteúdos entre plataformas dedicadas de forma simples e funcional.

Para a troca de informações, entre plataformas dedicadas de diferentes fabricantes ou instituições e sem padronização, é necessária a construção de ferramentas para conversão e importação, ou que se faça a implementação, desde o início, na plataforma de avaliação a ser utilizada. Dessa maneira não há portabilidade, isto é, que os conteúdos, com um objetivo instrucional específico, tenham sempre o mesmo comportamento de apresentação independente da plataforma utilizada, podendo ser importados por qualquer sistema de gerenciamento de aprendizagem (*Learning Management System* - LMS).

Nesse sentido o SCORM pela *Advanced Distributed Learning Initiative* (ADLNET, 2009) define um padrão para o *e-learning*.

Problema de pesquisa

Atualmente, testes em módulos instrucionais segundo o padrão SCORM, apresentam as questões em sequências definidas pelo autor, ou de forma aleatória, apresentando quaisquer questões que compõem o banco de questões disponível. Nesse sentido, surge o problema dessa investigação: como desenvolver um Teste Adaptativo Computacional, para uso em sequências de aprendizagem desenvolvidas segundo o padrão SCORM?

Objetivo da

O objetivo desse trabalho foi desenvolver uma alternativa para o acompanhamento da aprendizagem, identificando as competências e habilidades dos estudantes através do uso de um Teste Adaptativo Computacional (TAC), fundamentado no modelo probabilístico da Teoria de Resposta ao Item (TRI), aplicado em *e-learning,* desenvolvidos segundo o padrão SCORM, com conteúdos matemáticos.

Metologia da investigação

As ações de pesquisa foram divididas em duas etapas: estudo de literaturas para embasamento teórico sobre os TAC e a teoria que os fundamentam; desenvolvimento de um protótipo, investigando as funcionalidades através de comparações entre as habilidades estimadas pela ferramenta e as habilidades adotadas em diferentes simulações de respostas.

SCORM

A *Advanced Distributed Learning Initiative* (ADL) foi criada em 1997 para padronizar e modernizar os processos de formação e educação sendo supervisionado pelo Departamento de Defesa (DoD) dos Estado Unidos da América. O ADL é um esforço colaborativo para aproveitar o poder das tecnologias da informação para oferecer uma educação de alta qualidade, acessível, adaptável e rentável. Formado por um grupo multinacional, composto de colaboradores do ramo da indústria, da academia e governo, que ajudam a definir as especificações e padrões para *e-learning.* Este grupo desenvolveu o *Sharable Content Object Reference Model* (SCORM ®).

O SCORM é o resultado da união de especificações e padrões, das diversas entidades normativas, que definem as inter-relações entre conteúdos de aprendizagem, modelos de dados, protocolos e como os conteúdos são compartilhados entre sistemas de *e-learning* que seguem o mesmo padrão na mesma versão, sua edição mais atual é o *SCORM 2004 4rd Edition*.

O SCORM é um documento técnico que especifica regras e padrões, para os criadores de ferramentas de autoria, com definições de comportamento para apresentação dos conteúdos de aprendizagem. O padrão não foi elaborado diretamente para desenvolvedores ou designers de conteúdos, pois não define como criar lógicas instrucionais ou melhores práticas de ensino. As definições se restringem aos diversos pontos de análise e decisão para determinar o comportamento da plataforma relativo à apresentação dos conteúdos ao aluno.

Teoria de resposta ao item TRI

Pela impossibilidade de medição direta desenvolveram-se Técnicas de Psicometria, que levaram às definições de mensuração, escala, ordenação e classificação das medidas de variáveis latentes (Tenant, 2004; Pallant & Tenant, 2007; Cicchetti et al, 2006 apud Chachamovich, 2007).

Uma teoria de grande destaque na Psicometria é a Teoria de Rasch, pois proporciona a derivação de medidas quantitativas, intervalares e aditivas ao colocar itens (item se refere à questão do teste) e respondentes em uma mesma escala (Hambleton & Swaminathan, 1985 apud Chachamovich, 2007).

Um teste adaptativo, baseado na TRI, requer um banco com questões capazes de identificar respondentes com habilidades diferenciadas, ou seja, discriminar um respondente com uma habilidade de outro respondente que tenha uma habilidade imediatamente superior, ou inferior, na escala adotada. Tal característica é denominada *Discriminação do Item*.

A avaliação não deve ser passível de ser influenciada por conhecimentos característicos de grupos específicos de respondentes, ou seja, a probabilidade de acerto dos itens deve ser a mesma, independente de sexo, grupo socioeconômico, ou qualquer outra característica que diferencie os respondentes (Gamerman, Gonçalves & Soares, 2007), além da habilidade no campo de conhecimento que se esteja avaliando.

Na Teoria de Rasch, (Baker, 2001), a probabilidade de acerto *P* de um determinado item, com uma dificuldade *d,* por um respondente, com uma competência ou habilidade θ, é dada por: $P = \frac{1}{1+e^{-(\theta-d)}}$, ou seja, uma questão com um nível de dificuldade igual à habilidade do respondente terá uma probabilidade de 0,5 de acerto.

Com as pesquisas em Psicometria, o modelo de Rasch foi aprimorado para o denominado modelo probabilístico de dois parâmetros que, além da dificuldade do item, considera também o parâmetro de discriminação do item, ou a declividade da curva de discriminação, denominado por *c*. Testes com fatores de discriminação inferiores a 0,7 devem, para efeitos práticos, ser

desconsiderados, pois não agregam precisão às estimativas de habilidade. Logo o modelo probabilístico fica determinado por $P = \frac{1}{1+e^{-c(\theta-d)}}$.

Os modelos probabilísticos, da TRI, de um e dois parâmetros consideram a habilidade do respondente como único fator para a resolução do item. Mas em testes computacionais é comum o uso de testes de múltipla escolha, logo, a probabilidade de acerto por um respondente sem habilidades ou competências para um dado teste será de p, para $p = \frac{1}{n}$, onde *n* é o número de opções disponíveis, pois há a possibilidade de acerto casual mesmo que a habilidade do respondente seja muito inferior à dificuldade da questão apresentada. O modelo de três parâmetros é dado por: $P = p + (1-p)\frac{1}{1+e^{-c(\theta-d)}}$.

O teste adaptativo computacional desenvolvido

Um Teste Adaptativo Computacional é um sistema que apresenta, como um examinador humano faria, questões com níveis de dificuldades adequadas ao desempenho do estudante, com a intenção de identificar as habilidades e competências do conhecimento (Costa, 2009). O TAC desenvolvido tem como característica principal, atender a portabilidade descrita no padrão SCORM, para tal, foi adotado o padrão XML (Extensible Markup Language), seguindo uma ontologia própria, mas flexível e expansível. A portabilidade do XML atende as definições do SCORM, pois sendo um arquivo de texto, o mesmo pode ser incluído no Pacote de Conteúdos na forma de um arquivo comprimido, no formato PKZIP v2.04g, podendo ser importado para qualquer plataforma que adote o padrão.

O arquivo XML, nessa versão, suporta dois modos de apresentação, resposta de múltipla escolha e resposta discreta e por ser um arquivo texto, para a inclusão/exclusão de questões é necessário somente incluir/excluir o bloco de chave *Question* referente ao item. Para inclusão/alteração o atributo *level* tem valor, entre 1.0 e 5.0 e correspondente à dificuldade do item; a chave *Text* é o enunciado; a chave *Answer* a resposta certa e as erradas, onde há somente uma resposta certa com o atributo *right* igual a *true*, o texto auxiliar que será apresentado ao aluno, quando o TAC é iniciado em modo exercício e o mesmo responder incorretamente à questão, é definido na chave *Textwrong* e o apontamento para o arquivo de imagem auxiliar, caso haja, a ser apresentado juntamente com a questão, na chave *Image*. As imagens auxiliares (gráficos, diagramas, etc...) são automaticamente redimensionadas e apresentadas em uma resolução de 400 x 300 pixels, sendo necessários cuidados para que textos inclusos nos gráficos não fiquem ilegíveis.

A ferramenta foi desenvolvida em Adobe Flash e programação *actionscript 2.0*, pela característica de seus conteúdos não serem editáveis, isto é, seu programa não pode ser alterado, preservando

o trabalho intelectual de programação, assim como evita fraudes por parte dos respondentes, caso os mesmos usem de técnicas de programação reversa para descobrir as respostas corretas.

Nesse trabalho, o algoritmo de seleção para a escolha do próximo item é feita pela estimativa da proficiência do respondente para o próximo item, que também considera os itens anteriores, usando o procedimento interativo de máxima verossimilhança (Baker, 2001) dado por $\theta_{s+1} = \theta_s + \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i[u_i - P_i(\theta_s)]}{\sum_{i=1}^{n} c_i^2 P_i(\theta_s) Q_i(\theta_s)}$, ou seja, $\theta_{s+1} = \theta_s + \Delta\theta_s$ onde:

θ_{s+1} é a estimativa da habilidade do respondente para o próximo item;

θ_s é estimativa da habilidade do respondente para o item atual para s interações;

c_i é o fator de discriminação do item $i, i = 1,2,3 \ \dots \ n$;

u_i é a resposta do respondente para o item i, sendo considerado 1 para uma resposta certa e 0 para uma resposta errada;

$P_i(\theta_s)$ é a probabilidade de acerto do item i considerando o respectivo c_i do item e a estimativa da habilidade θ com s interações, sendo determinado pelos modelos de Rasch;

$Q_i(\theta_s)$ é a probabilidade de erro do item i dado por $1 - P_i(\theta_s)$.

$\Delta\theta_s$ é o fator de correção da estimativa da habilidade do respondente para s interações e dado pela divisão dos somatórios, $\frac{\sum_{i=1}^{n} c_i[u_i - P_i(\theta_s)]}{\sum_{i=1}^{n} c_i^2 P_i(\theta_s) Q_i(\theta_s)}$.

A probabilidade de acerto do item seguiu, nesse trabalho, o modelo de dois parâmetros, $P = \frac{1}{1+e^{-c(\theta-d)}}$, para as questões discretas e $P = p + (1-p)\frac{1}{1+e^{-c(\theta-d)}}$, para as questões com resposta de múltipla.

Para a pesquisa foi gerado um banco de questões com dificuldades entre um e cinco, sendo a dificuldade três, considerada mediana. Para o cálculo das probabilidades e a máxima verossimilhança os valores são convertidos, internamente no programa, para uma escala de menos três a três, com zero sendo a dificuldade mediana. O parâmetro de discriminação do item foi considerado com valor unitário, $c = 1$, dessa maneira o modelo probabilístico para questões discretas considera somente a dificuldade do item (θ), e para as questões com resposta de múltipla escolha é considerada a dificuldade do item, (θ), e acerto casual do item $p = \frac{1}{n}$, para n o número de respostas apresentadas.

O TAC considera, a *priori*, uma habilidade mediana, $\theta_1 = 0$, apresentando primeiramente um item compatível com uma dificuldade mediana, $d_1 = 0$.

O algoritmo, adotado para a escolha do item, realiza o procedimento de máxima verossimilhança e determina a dificuldade do próximo item a ser apresentado (d_{s+1}) arredondando o valor da estimativa da habilidade do respondente para o próximo item (θ_{s+1}), e associando o valor diretamente à dificuldade do próximo item $(d_{s+1} = Arredondamento(\theta_{s+1}))$, pois de acordo com a TRI, a habilidade e a dificuldade, devem estar em uma mesma escala.

O TAC desenvolvido termina o teste quando o fator de correção for tão pequeno que o valor da estimativa da habilidade do respondente (θ), se estabiliza e se tem um determinado grau de certeza na estimativa, ou seja, um Erro Padrão (EP) pequeno.

Segundo Baker (2001), o erro padrão (EP) na estimativa da habilidade fornece uma indicação da precisão estimada. O erro padrão é uma variação de valores em torno do parâmetro de habilidade do respondente podendo ser computada usando a equação $EP = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i^2 P(\theta) Q(\theta)}}$.

Para o critério de parada foram definidos, $\Delta\theta \leq 0{,}009$ e $EP \leq 0{,}9$, como parâmetros de satisfação para que o TAC interrompa a apresentação dos itens.

Com a intenção de focar o TAC com conteúdos de Matemática, explorando a possibilidade de respostas discretas com a possibilidade mínima de acerto casual, foram feitos testes simulados com itens de resposta discreta com probabilidades de acerto dado por $P(\theta) = \frac{1}{1+e^{-(\theta-d)}}$ e uma estimativa da habilidade inicial do respondente dada por $\theta_1 = 0$.

As tabelas 1, 2 e 3 apresentam testes simulados para respondentes com habilidades $\theta_1 = 2{,}0$; $\theta_2 = 0{,}5$ e $\theta_3 = -1{,}5$ respectivamente. Após a satisfação dos critérios de parada, $\Delta\theta \leq 0{,}009$ e $EP \leq 0{,}9$, foram estimadas as respectivas habilidades $\theta_1 = 2{,}243$; $\theta_2 = 0{,}841$ e $\theta_3 = -1{,}758$ para os respondentes, que se aproximam bem das habilidades simuladas.

Item	Estimativa da Habilidade	Dificuldade do Item	Fator de correção	EP	Resposta certa
1	0	0	-	-	1
2	1,000	1	1,000	2,000	1
3	2,890	3	1,512	1,577	0

4	2,244	2	0,057	1,439	0
5	1,500	2	0,000	1,141	1
6	2,120	2	0,000	1,007	1
7	2,512	3	0,000	0,930	0
8	2,243		0,000	0,835	

Tabela 1: Teste simulado 1, com habilidade do respondente estimada em 2,0

Item	Habilidade	Dificuldade do Item	Fator de correção	EP	Resposta certa
1	0	0	-	-	1
2	1,000	1	1,000	2,000	0
3	0,502	1	0,243	1,467	1
4	1,401	1	0,024	1,247	0
5	0,758	1	0,000	1,023	1
6	1,228	1	0,000	0,928	0
7	0,841		0,000	0,830	

Tabela 2: Teste simulado 2, com habilidade do respondente estimada em 0,5

Item	Habilidade	Dificuldade do Item	Fator de correção	EP	Resposta certa
1	0	0	-	-	0
2	-1,000	-1	-1,000	2,000	1
3	-0,502	-1	-0,243	1,467	0
4	-1,401	-1	-0,024	1,247	0
5	-1,896	-2	-0,002	1,169	0
6	-2,501	-3	0,000	1,153	1
7	-2,140	-2	0,000	0,952	1
8	-1,758		0,000	0,83	

Tabela 3: Teste simulado 3, com habilidade do respondente estimada em -1,5

Para os casos de erro ou acerto de todos os itens, o procedimento de máxima verossimilhança não atende os critérios de parada, sendo necessário que o algoritmo trate esses casos, limitando os valores estimados das habilidades do respondente (θ_{s+1}), tratando a não convergência do fator de correção para valores inferiores ao critério de parada, $\Delta\theta \leq 0{,}009$. Nesses casos o critério de parada é definido pela verificação de estabilidade na estimativa da habilidade do respondente em seus valores, máximo ou mínimo, em conjunto com o parâmetro de $EP < 0{,}9$.

Foram feitos testes simulados, para validação do tratamento e do critério de parada do algoritmo do TAC desenvolvido, nos casos de acerto e erro de todos os itens, a Tabela 4 apresenta a simulação de acerto de todos os itens.

Item	Habilidade	Dificuldade do Item	Fator de correção	EP	Respostas
1	0	0	-	-	1
2	1,000	1	1,000	2,000	1
3	2,890	3	1,512	1,577	1
4	3,000	3	1,666	1,581	1
5	3,000	3	1,794	1,240	1
6	3,000	3	1,851	1,054	1
7	3,000	3	1,884	0,932	1
8	3,000		1,905	0,845	

Tabela 4: Teste simulado com acerto de todos os itens

Conclusão

A mudança do paradigma baseado na Teoria Clássica do Teste com escore bruto, para um comportamento adaptativo com a apresentação de questões compatíveis com as habilidades estimadas dos respondentes em um processo interativo durante todo o teste, segundo as técnicas de Psicometria da Teoria de Resposta ao Item, e adotando o padrão SCORM para definição dos seus requisitos de portabilidade e acessibilidade, mostrou ser mais condizente para a estimativa da habilidade do respondente assim como de fácil reutilização em outras sequências didáticas.

A adoção dos padrões de apresentação em *HTML* e banco de questões em *XML* atende, em acessibilidade e portabilidade, ao padrão SCORM. O padrão XML também se mostrou bem prático para inclusão/exclusão de questões por *designers* instrucionais sem a necessidade de conhecimentos específicos de informática.

Na simulação 2 o comportamento de respostas foi mais estável, no qual as respostas ficaram oscilando entre dois níveis de dificuldade, com a ferramenta estimando uma habilidade intermediária e compatível com as dificuldades dos itens apresentados. Nas simulações 1 e 3, foram apresentadas as situações onde as respostas oscilaram mais e de acordo com as possíveis probabilidades de erro e acerto para as habilidades adotadas no início do teste, e o algoritmo do TAC estimou com as mesmas com considerável precisão.

Tanto nas simulações de habilidade extremas, acerto e erro de todos os itens, como nas demais simulações, o algoritmo do TAC estimou a habilidade do respondente condizente com as habilidades adotadas para responder aos testes.

O TAC desenvolvido já foi avaliado em um grupo de alunos, do ensino superior, com o conteúdo de Análise Combinatória, onde apresentou todas as funcionalidades propostas e atingiu os objetivos propostos. O experimento está disponível em http://matematica.ulbra.br/ilias.

Com este trabalho, pretende-se a divulgação, em meio acadêmico da área de Educação Matemática, do uso de testes adaptativos no padrão SCORM em plataformas de ensino e também, a discussão e reflexão do acompanhamento da aprendizagem através de testes que se adaptam às habilidades dos respondentes, permitindo ao avaliador uma maior precisão das habilidades e aprendizagens conseguidas pelos alunos.

Referências bibliograficas

Armed Services Vocational Aptitude Test Battery. (2010). Recuperado em janeiro de 2010 em: http://www.military.com/ASVAB

Advanced Distributed Learning Initiative. (2006). *SCORM 2004 3rd Edition Content Aggregation model*. Recuperado em março de 2010 em: http://www.adlnet.gov/resources#Tab-Technical-Documentation

Advanced Distributed Learning Initiative. (2006). *SCORM 20043rd Edition Sequencing and Navigation*. Recuperado em março de 2010 em: http://www.adlnet.gov/resources#Tab-Technical-Documentation

Advanced Distributed Learning Initiative. (2006). *SCORM 2004 3rd Edition Run-Time Environment*. Recuperado em março de 2010 em: http://www.adlnet.gov/resources#Tab-Technical-Documentation

Baker, F. B. (2001). *The basics of item response theory*. (2.ed.) Washington DC: Eric.

Chachamovich, E. (2007). *Teoria de resposta ao item: aplicação do modelo Rasch em desenvolvimento e validação de instrumentos em saúde mental*. Tese de Doutorado Programa de Pós-Graduação em Ciências Médicas: Psiquiatria, Faculdade de Medicina, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

Costa, D. R. (2009). *Métodos estatísticos em testes adaptativos informatizados.* 2009. 107 f. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

Gamerman, D., Gonçalves, F. B., & Soares, T. M. (2007). Análise bayesiana do funcionamento diferencial do item. *Pesquisa Operacional,* 27(2), 271-291.

Graduate Record Examination. (2010). Recuperado em janeira de 2010 em: http://gradschool.about.com/cs/aboutthegre/f/grefaq.htm

Test of English as a Foreign Language. (2010). Recuperado em janeira de 2010 em: http://www.ets.org/toefl/.

ECUACIÓN VECTORIAL DE UNA RECTA: UNA PROPUESTA DIDÁCTICA DESDE LA TEORÍA ANTROPOLÓGICO DE LO DIDÁCTICO

Daniela Bonilla Barraza yJocelyn Díaz Pallauta
Universidad de la Serena. Chile
danielabonillab@gmail.com, jocelyndiazpallauta16@gmail.com

Resumen. La presente investigación surge en el programa "perfeccionamiento en matemática para profesores de enseñanza media" realizado en el IUFM le Mirail, Universidad de Toulouse, Francia. El estudio consiste en el diseño de una propuesta didáctica para el aprendizaje de la ecuación vectorial de una recta en el espacio, en estudiantes de 16 a 18 años, el interés nace por la incorporación de estos temas en el curriculum nacional. Para el diseño de la propuesta se utiliza elementos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), donde se entenderá como organización matemática, a un conjunto de tipos de tareas, de técnicas o procedimientos para resolver estas tareas y de definiciones, propiedades y teoremas que permitan describir y justificar la resolución de la tarea. Entre los elementos que aportan en el surgimiento de la organización matemática, se distinguen, tipos de tareas como, establecer si puntos del plano o el espacio son colineales y determinar las condiciones para que un tercer punto sea colineal a dos puntos dados, en el plano o en el espacio.

Palabras clave: ecuación vectorial, organización matemática

Abstract. This research began in the "improvement in mathematics for middle school teachers" made in the IUFM le Mirail, University of Toulouse, France. The study involves the design of a methodological approach to learning the vector equation of a line in space, students of 16-18 years, the interest comes from the incorporation of these issues into the national curriculum. For the design of the proposal uses elements of Anthropological Theory of Didactics (TAD), which is understood as mathematical organization, to a set of task types, techniques or procedures for solving these tasks and definitions, properties and theorems to describe and justify the resolution of the task. Among the elements that contribute to the emergence of mathematical organization, are distinguished as types of tasks, determine whether points in the plane or space are collinear and determine the conditions for a third point is collinear to two given points in the plane or in space.

Key words: ecuación vectorial, organización matemática

Introducción

En los últimos años, el curriculum nacional en matemática ha incorporado elementos de la geometría vectorial, es por ello, que el programa "Perfeccionamiento en Matemática para Profesores de Enseñanza Media" realizado en el IUFM le Mirail, Universidad de Toulouse, Francia, patrocinado por el gobierno de chile, pretende actualizar a los docentes chilenos en los conocimientos de geometría, y también proveer de herramientas didácticas que permitan mejorar los procesos de enseñanza –aprendizaje de la matemática.

En este escenario, se realiza un diseño de una propuesta didáctica para el aprendizaje de la ecuación vectorial de una recta en el espacio, en estudiantes entre 16 y 18 años. Utilizando como referente teórico, elementos de la teoría antropológico de lo didáctico, donde indagaremos en las técnicas que priorizan los estudiantes cuando se enfrentan a distintos tipos de tareas con el propósito de ofrecer un conjunto de sugerencias didácticas para el aprendizaje del concepto ecuación vectorial de una recta en el espacio.

Marco teórico: Teoría antropológica de lo didáctico

La Teoría antropológica de lo didáctico (TAD) sitúa a la actividad matemática, y en consecuencia a la didáctica de la matemática, en el conjunto de actividades humanas y de instituciones sociales.

La TAD admite que toda actividad humana puede describirse con un modelo único, que se resume con la palabra de praxeología, unión de los términos griegos logos y praxis –donde toda práctica o "saber hacer" está siempre acompañada de un discurso o "saber", es decir una descripción, explicación o racionalidad mínima sobre lo que se hace, el cómo se hace y el porqué de lo que se hace.

Se entenderá como praxeología u organización matemática, a un conjunto de tipos de tareas, de técnicas, de definiciones, propiedades y teoremas que permitan describir y justificar la resolución de la tarea.

Cada tipo de tarea (T) tiene asociada una "manera de hacer", es decir, una técnica (ô), cada técnica, necesita de una justificación matemática, la cual se entiende por tecnología (θ), esta indica generalmente un discurso racional, discurso cuyo primer objetivo es justificar "racionalmente" la técnica, para asegurarse de que permite realizar un tipo de tareas.

A su vez, el discurso tecnológico contiene afirmaciones, más o menos explícitas, de las que se puede pedir razón. Se pasa entonces a un nivel superior de justificación, el de la teoría (Θ).

En resumen, Una praxeología -u organización praxeológica- está pues constituida por un bloque práctico técnico, [T/ô], y por un bloque tecnológico-teórico, [θ / Θ].

La TAD no solo se encarga de estudiar la construcción de un objeto matemático, sino también indaga en las formas de enseñanza, para ello, cuenta con una organización didáctica, entendida como "El conjunto de los tipos de tareas, de técnicas, de tecnologías, etc., movilizadas para el estudio concreto en una institución concreta" (Chevallard, 1999, p.242).

La organización didáctica distingue momentos didácticos. En esta comunicación destacamos algunos de ellos, un primer momento del estudio, es el encuentro inicial con la organización matemática que está en juego. Se espera que el estudiante solo o en equipo, descubra el objeto matemático, como aquello que permite fabricar respuesta a una situación determinada. El segundo y tercer momentos están relacionados con la exploración del tipo de tareas T , y la elaboración de una técnica relativa a este tipo de tareas constituyendo un entorno tecnológico-teórico[θ / Θ] relativo a una técnica, el cuarto momento es el del trabajo de la técnica, que debe a la vez mejorar la técnica volviéndola más eficaz , el quinto momento es el de la institucionalización, que tiene por objeto precisar lo que es "exactamente" la organización matemática elaborada.

Sobre la propuesta didáctica

Se describe una organización matemática que consiste en determinar la ecuación vectorial de una recta en el espacio, para ello, se plantea en un inicio el tratamiento de la ecuación de la recta en el plano. En esta etapa se distingue tipos de tareas(T) como: Determinar si tres puntos del plano son colineales (T_1), Determinar las condiciones de las coordenadas de un punto M(x,y) para que este alineado con dos puntos distintos Q y R en el plano(T_2). Para T_1 y T_2 el estudiante puede recurrir a técnicas analíticas, como, determinar la ecuación de la recta, calcular pendientes, o bien utilizar vectores proporcionales.

Para una recta en el espacio se plantea tipos de tareas análogas a las dadas en el plano, como: Determinar si los puntos P, Q y R son colineales en el espacio (T_3), Determinar las condiciones de las coordenadas de un punto M para que este alineado con dos puntos distintos Q y R en el espacio (T_4).

Metodología y resultados

Para los propósitos de investigación, utilizaremos como estrategia metodológica, estudio de casos, en la medida que "son particularmente apropiados para estudiar una situación en intensidad en un período de tiempo", (Arnal, Del Rincón y Latorre, 1992). Destacamos la importancia de esta metodología, puesto que, nos proporciona de antecedentes empíricos fundamentales en la toma de decisiones para mejorar nuestra propuesta.

Las unidades de análisis están conformado por 24 estudiantes de cuarto año de enseñanza Media de un establecimiento educacional chileno.

A continuación se presentan algunas de las actividades de la propuesta didáctica con sus respectivos ejemplos, enfatizando los aspectos teóricos que priorizan los estudiantes al momento de responder. Es importante aclarar que en sesiones anteriores los educandos han identificado vectores proporcionales en el plano

Actividad 1: Ana intentó ubicar en su cuaderno los siguientes puntos P $\left(\frac{5}{3},\frac{10}{3}\right)$; Q (3, 6); R (-102, -204) para verificar si estaban alineados, sin embargo, por las coordenadas dadas no los consiguió ubicar con exactitud. Consulta a su compañera Claudia, quien afirma que los puntos están alineados. Ana no está convencida de esta afirmación

¿Cómo harías tú para convencer a Ana? Desarrolla el procedimiento que justifique tu respuesta.

Actividad 2: ¿Cuáles son las condiciones que debe cumplir un punto M de coordenadas (x, y) para pertenecer a la recta que pasa por los puntos Q(3, 6);R (-102, -204). Justifica tu respuesta.

La actividad 1, obedece al tipo de tarea (T_1), determinar si tres puntos distintos del plano son colineales, Se espera que los estudiantes en el encuentro inicial con la situación (actividad 1) puedan reconocer el concepto de puntos alineados, como aquellos puntos que pertenecen a una misma recta, para luego en un segundo momento elaborar técnicas que permitan responder a la tarea, las cuales, puede ser de tipo analíticas o vectoriales, puesto que la posición de los puntos P, Q y R dificulta la posibilidad de acudir a la representación gráfica.

Con esta actividades (1 y 2), se pretende que surja la caracterización de una recta como la proporcionalidad de dos vectores con un punto en común, lo que deriva en la institucionalización de la ecuación vectorial de una recta en el plano. En caso de que el estudiante se aferre a la herramienta analítica para responder a la situación, se puede proponer al aprendiz que busque otras estrategias de resolución.

Análisis de las respuestas

Las actividades propuestas fueron desarrolladas en parejas de estudiantes, para la actividad 1 la mayoría de los grupos (7 de 12) utilizan técnicas analíticas como: determinar la ecuación cartesiana de la recta que pasa por dos puntos (ver figura 1) y luego verificar si el tercer punto pertenece a ella. O bien determinar las ecuaciones de las rectas PQ y QR, verificando que son iguales. 3 de 12 grupos emplean vectores proporcionales, es decir, comprueba si los vectores $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ y $\overrightarrow{OR}$ son proporcionales (ver figura 2). Los demás grupos tratan de utilizar la representación gráfica sin éxito.

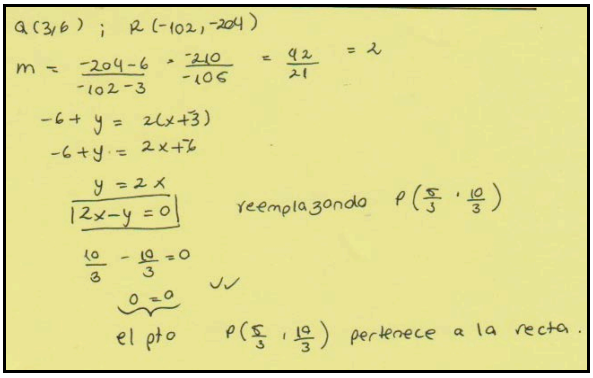


Figura 1: respuesta de grupo 3

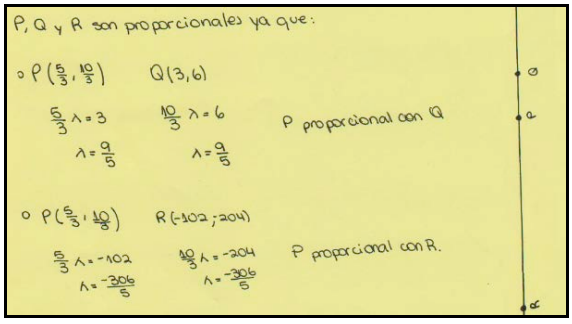


Figura 2: respuesta de grupo 1

En base a las respuestas dadas en la actividad 1, el docente sugiere a los estudiantes que para responder a la actividad 2, busquen distintas estrategias. De los grupos en estudio 5 de 12 proponen solo técnicas analíticas, otros 5 grupos construyen técnicas vectoriales y analíticas (ver figura 3).

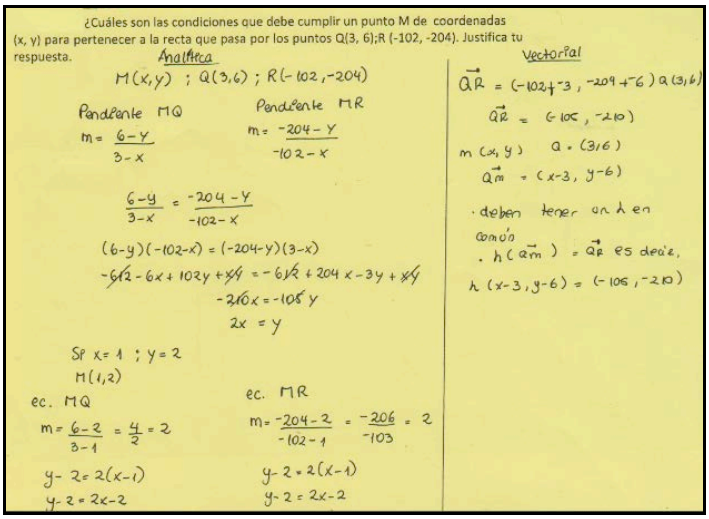


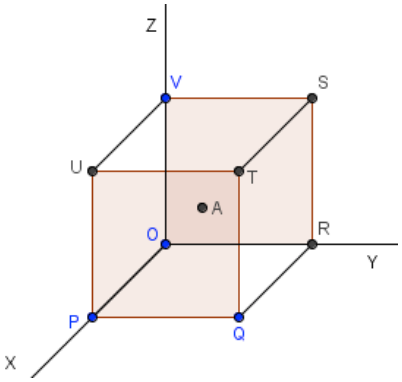
Figura 3: respuesta del grupo 4

Enfocamos nuestra atención en las estrategias relacionadas con vectores proporcionales, en ellas evidenciamos la presencia de elementos tecnológicos (ver figura 3) , cuando los aprendices escriben " $\delta\,\overrightarrow{QM} = \overrightarrow{QR}$ ", el razonamiento que puede justificar esta técnica seria que, dos vectores proporcionales que tienen un punto en común, están contenidos en una misma recta. Otro elemento tecnológico que surge de la resolución de la tarea, es una ecuación vectorial para la recta, aunque no se encuentre en la forma usual, el estudiante podría estar pensando que todos los puntos que satisfacen la ecuación $\delta(x-3, y-6) = (-105, -210)$ pertenecen a la recta. En ese momento el rol del docente es fundamental, puesto que es el encargado de realizar la institucionalización de la ecuación vectorial de una recta como objeto matemático.

Posterior al momento de trabajo con la técnica relativa al tipo de tarea, determinar la ecuación vectorial de una recta en el plano. El docente propicia la transición del plano al espacio de los objetos punto y vector, a través de situaciones concretas en el momento de exploración. Para ello, utiliza un software (autograph u otro) que favorece la visualización de puntos en el espacio. Lo que posteriormente deriva en la institucionalización de punto y vector en el espacio. Una vez comprendido los conceptos de puntos, vectores, vectores proporcionales en el espacio, distancia y punto medio entre dos puntos del espacio. Se plantea la siguiente actividad que obedece a la organización matemática principal de esta comunicación, determinar la ecuación vectorial de una recta en el espacio.

En la actividad 6, se propone la siguiente situación que corresponde a los tipos de tarea T_3 y T_4 , T_3: determinar si los puntos P, Q y R son colineales en el espacio, y T_4: encontrar las condiciones de un punto M (x,y,z) para que sea colineal a dos puntos distintos en el espacio .

Actividad 6 : *Sea OPQRSTUV un cubo de arista 2 unidades.*



a) El punto A corresponde al punto medio del segmento VQ, O es el origen del sistema tridimensional. Determina si los puntos P, A y S son colineales.

b) Determina las condiciones para que un punto M de coordenadas (x, y, z) sea colineal con los puntos P, A.

Análisis de las respuestas

En la actividad planteada, del total de los grupos en estudio (12), 8 de ellos resuelven la tarea T_3, considerando la herramienta vectorial, como una técnica valida, puesto que, la técnica analítica utilizada en el plano, no tiene alcance en el espacio.

Para T_4, los 8 grupos elaboran una técnica donde se evidencia presencia de elementos tecnológicos como "$\overrightarrow{PM} = \delta\overrightarrow{PA}$". 5 de ellos logran llegar a una fase de institucionalización (ver figura 4), obteniendo una ecuación vectorial para una recta en el espacio.

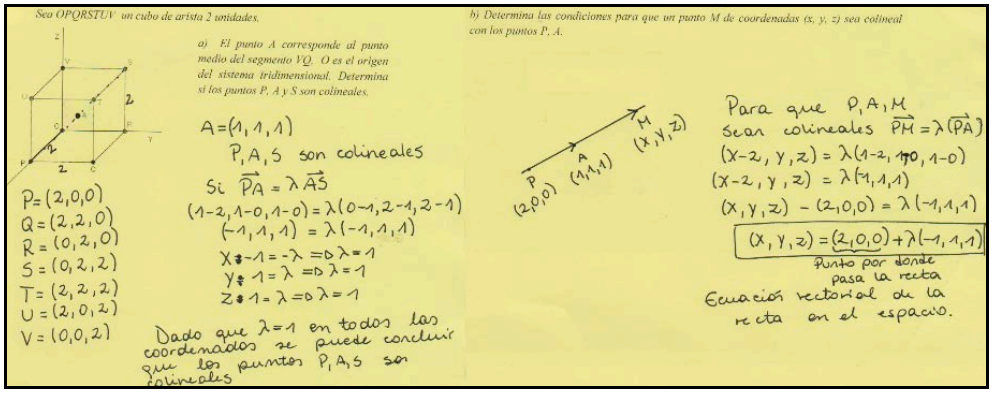


Figura 4 : respuestas del grupo 8

Conclusiones

A partir de las evidencias empíricas con sustento teórico obtenidas en la investigación, damos a conocer las siguientes sugerencias didácticas para el aprendizaje de la ecuación vectorial de una recta en el espacio para estudiantes de 17- 18 años.

En el surgimiento de la organización matemática, determinar una ecuación vectorial de una recta en el espacio, se destaca como elemento matemático esencial a la concepción de puntos

colineales en el espacio. Si bien, la colinealidad de puntos no es un objeto de estudio en la enseñanza, es una noción inherente a la matemática.

También es fundamental que los estudiantes tengan como conocimiento previo el concepto de vectores proporcionales, dado que, nos provee de técnicas válidas para probar la colinealidad de puntos en el espacio.

Con respecto a la transición del plano al espacio, se propone la utilización de uso de software de geometría dinámica para facilitar la visualización de puntos y rectas en el espacio, puesto que, uno de los principales obstáculos que enfrentan los estudiantes en el estudio de la geometría tridimensional, son las representaciones planas de estos objetos.

El diseño presentado promueve en los docentes una reflexión sobre la importancia que tienen las técnicas al momento de resolver una tarea, desde la teoría antropológica de lo didáctico, la emergencia de una técnica válida para un determinado tipo de tarea, deriva en la construcción del objeto matemático, en nuestro caso, La ecuación vectorial de una recta en el espacio.

Referencias bibliográficas

Arnal, J., del Rincón, D., y La Torre, A. (1992). *Investigación educativa: fundamentos y metodología.* Barcelona: Labor.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19 (2), 221-266.

Chevallard, Y., Bosch, M., Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.* Barcelona, Spain: ICE/Horsori.

Chevallard, Y. (1985, 1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*, La Pensée Sauvage: Grenoble. Traducción en español de C. Gilman: La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado, Buenos Aires: Aique.

Ivorra Castillo, C. (2010). *Geometría*. Valencia.

Programa de Estudio Matemática 4° medio (2001). Ministerio de Educación. Chile.

PRERREQUISITO PARA EL TRATAMIENTO DEL LÍMITE FUNCIONAL: INECUACIONES

Ana María Narvaez, Clarisa Noemí Berman yMarcela Rodriguez
Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Mendoza. Argentina
ana.narvaez@frm.utn.edu.ar, bercla@gmail.com, iqborbollon@speedy.com.ar

Resumen. Las investigaciones realizadas sobre el tema Límite Funcional (Narvaez et al., 2009, 2010 y 2011) desde la teoría APOE nos permitieron ver la necesidad de revisar la enseñanza de algunos temas, como es el caso de las inecuaciones. El objetivo del presente trabajo es elaborar un conjunto de actividades basadas en una metodología que sustente una mejor enseñanza y aprendizaje de inecuaciones, realizando una descomposición genética del concepto. Entre las conclusiones obtenidas en esta etapa, se destaca la necesidad de hacer hincapié o favorecer la resolución de actividades que requieran de la interpretación y resolución tanto algebraica como gráfica de inecuación. En otras palabras, diseñar actividades de acuerdo a la concepción *esquema* de inecuación (en el sentido de la teoría APOE). Es importante concientizar a la comunidad docente sobre la relevancia del tratamiento del que debe ser objeto el tema en cuestión.
Palabras clave: inecuaciones, teoría APOE, descomposición genética
Abstract. The research into the Functional Limit (*Límite Funcional*, Narvaez et al., 2009, 2010 and 2011) from the APOS Theory, allowed us to realize the need of reviewing the teaching of some topics, such as inequalities. The aim of this work is to elaborate a set of activities based on a methodology that supports better techniques of teaching and learning of inequalities, by doing a genetic decomposition of that concept. Among the conclusions obtained at this stage, it is necessary to emphasize or favor the resolution of activities that require the interpretation and solving of inequality, both algebraically and graphically. This is to say, to design activities according to the conception of inequalities *schema* (according to the APOS Theory). It is important to make the teaching community aware of the importance of the way the present subject should be handled
Key words: inequalities, APOS theory, genetic descomposition

Introducción

La enseñanza universitaria de Matemáticas en carreras de Ingeniería, es tema de análisis desde hace varios años no sólo en nuestro país. Los estudios psicológicos de Piaget (1972), Vergnaud (1982) y Dubinsky (1996), entre otros, han contribuido científicamente en tales discusiones. En particular, para el tema de inecuaciones es de destacar el trabajo de Alvarenga (2003).

Como es bien conocido, el estudio de inecuaciones implica varias nociones que deben encadenarse coherentemente, tales como la estructura de orden en el conjunto de números reales, funciones, análisis de gráficos de funciones, operaciones lógicas de implicación y equivalencia, entre otros, que por lo observado ha tenido una comprensión limitada por parte de los actores de la comunidad universitaria. Por otra parte, se destaca que este contenido disciplinar es una fuente casi inagotable de cambios entre registros de representación semiótica (Duval, 1991), lo que es aprovechado en el proceso de enseñanza.

El propósito del presente trabajo es entender la problemática que presentan los estudiantes de primer año de la Facultad Regional Mendoza de la Universidad Tecnológica Nacional en este tema, para diseñar un material didáctico que les permita superar obstáculos cognitivos.

Antecedentes

En el trabajo de investigación en Matemática Educativa que se viene realizando en la Facultad Regional Mendoza respecto de la enseñanza y aprendizaje de la noción de límite desde 2009 y, hasta la fecha, en los cursos de primer año, se han obtenido las siguientes conclusiones: a) los alumnos conocen las técnicas de cálculo para límite funcional pero no logran darle significado, más aún no logran interpretarlo; b) los ingresantes no están habituados a participar activamente en sus aprendizajes y, difícilmente pueden realizar análisis críticos de los resultados que obtienen; c) los docentes no utilizan generalmente situaciones didácticas que permitan una mayor participación del estudiante, lo que puede revertirse haciendo uso de las herramientas que brinda la Didáctica de la Matemática universitaria y las Teorías Cognitivas.

En otras palabras, se puede decir que en esta etapa se concluyó que los estudiantes no habían alcanzado un nivel *objeto* según la teoría APOE del concepto límite funcional y parte de la dificultad de la comprensión del mismo estaba relacionada con el hecho de no haber alcanzado un nivel *esquema* de conceptos previos como inecuaciones y funciones reales. Si bien estos conceptos se desarrollaron en el aula, se había seguido lo que se conoce como metodología "tradicional" en el sentido de Alvarenga. Entiéndase por *enseñanza tradicional a un sistema pedagógico que no se fundamenta en una investigación científica en educación matemática y que, en general, no ha logrado avances en el aprendizaje de los conceptos matemáticos* (Alvarenga, 2003, p. 2).

Objetivo

Por lo expuesto precedentemente, en este trabajo se pretende lograr que los estudiantes alcancen el nivel cognitivo *esquema* según la teoría APOE en el tema "inecuaciones en reales", elaborando una Descomposición Genética.

Teoría APOE

Para lograr el objetivo, el marco teórico privilegiado en esta investigación-acción es la Teoría APOE (*Acción, Proceso, Objeto, Esquema*) o en inglés APOS (*Action-Process-Objet-Schema*) que permite modelar la construcción mental matemática, se debe a Ed Dubinsky (RUMEC, Research in Undergraduate Mathematics Education Community), quien a partir del constructivismo de Piaget intenta explicar la forma en la que se construyen o se aprenden conceptos matemáticos.

El principio de aprendizaje en esta teoría es que un individuo no aprende los conceptos matemáticos directamente; si tiene las estructuras apropiadas, aprender es fácil, casi automático; si no las tiene, es casi imposible. Por lo tanto, la meta de la enseñanza debe ser ayudar a los

estudiantes a construir las estructuras de mejor manera, y a conectar los conceptos matemáticos. Esta teoría está en continuo desarrollo (DeVries, 2002).

Según la Teoría APOE "El conocimiento matemático es una tendencia individual a la respuesta, en un contexto social y construyendo y reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos y organizándolos en esquemas con el fin de manejar las situaciones" (Asiala et al., 1996).

Se observan tres tipos especiales o estructuras básicas para la construcción del conocimiento matemático: *acción*, *proceso* y *objeto* que están organizados en estructuras que se denominan *esquemas*. Los mecanismos mentales para construir dichas estructuras son las reflexiones abstractas tales como *interiorización*, *encapsulación* y *coordinación*.

En este trabajo se considera que esta teoría cognitiva ofrece un soporte adecuado para la Didáctica de la Matemática universitaria, en el sentido que es un marco teórico en el cual es posible buscar soluciones o estrategias pedagógicas para la aprehensión del tema considerado.

Metodología

Las falencias mencionadas anteriormente son consideradas como resultados a priori para el diseño de la presente metodología que privilegia no sólo *qué enseñar* sino *cómo mejorar* la enseñanza y aprendizaje de los contenidos disciplinares.

La metodología requiere de una participación activa del estudiante y del docente, quien tiene como tarea fundamental generar la aparición de competencias en el alumno, por lo que se deben diseñar secuencias didácticas que den lugar a los objetivos previstos, esto lleva al docente a planificar los contenidos vinculándolos a situaciones que resulten de interés para el estudiante.

Se tiene en cuenta el ciclo de investigación de la teoría APOE, que se muestra en la siguiente figura, el cual integra tres componentes a considerar en el proceso de investigación: análisis teórico, diseño e implementación de enseñanza, y observación, análisis y verificación de datos.

Experiencia áulica

Según Alvarenga (2003), *interpretar* y *resolver* una inecuación en el contexto algebraico, requiere de manera general, como prerrequisitos: realizar una correspondencia biyectiva entre el conjunto de los números reales y la recta numérica; comprender las nociones de operaciones con intervalos y el uso de los conectivos lógicos de conjunción y disyunción; aplicar correctamente las propiedades del cuerpo ordenado real; entender las implicaciones y doble implicaciones lógicas y hacer uso correcto de los cuantificadores lógicos.

Interpretar y *resolver* una inecuación en el contexto gráfico, requiere como prerrequisitos: representar e interpretar adecuadamente algunos tipos de funciones como por ejemplo funciones polinómicas sencillas, función raíz cuadrada y homográficas.

Por lo mencionado anteriormente, se encaró la enseñanza y aprendizaje con actividades de dificultad creciente para que los alumnos fueran construyendo los distintos niveles cognitivos indicados en la Teoría APOE y profundizando en los mismos para lograr alcanzar el nivel de *esquema*, siendo esta una construcción óptima para el entendimiento del tema.

A continuación se exponen algunos ejemplos desarrollados en clase y las preguntas que se formularon a los estudiantes para observar las concepciones referidas a resolución algebraica y gráfica de inecuaciones. Participaron 90 alumnos en tres horas.

Se comenzó el trabajo solicitando la resolución e interpretación de la inecuación $3x-4>x-1$.

Prácticamente todos los alumnos resolvieron sin dificultad esta inecuación.

Pregunta 1: ¿qué significa resolver una inecuación? Las respuestas fueron dispares:

- "Es encontrar el valor aproximado de la x"
- "Es encontrar los dos valores de x"
- Muy pocos alumnos se refirieron a "es un intervalo"

Pregunta 2: ¿qué propiedades de orden se han aplicado? Nadie pudo responder.

Sin duda, los estudiantes estaban en etapa acción en cuanto a la interpretación y a la resolución algebraica de inecuaciones.

Luego, se solicitó la resolución e interpretación de la inecuación $\frac{3}{x}<15$.

Los alumnos resolvieron la inecuación "pasando" x multiplicando al segundo miembro de la desigualdad y llegaron a la conclusión que la respuesta de la inecuación era $x>\frac{1}{5}$.

Pregunta 3: ¿si $\frac{3}{x}$ *resulta una expresión negativa, se verifica que es menor que 15? ¿Qué error se ha cometido en la resolución?*

Los estudiantes no pudieron identificar cuál era el error cometido en la resolución.

Se esperaba que al recordarles el concepto de conjunto solución en el primer ejemplo y las propiedades de orden en el segundo ejemplo alcanzaran un nivel *proceso* en cuanto a la interpretación y resolución algebraica de inecuación.

Luego se les pidió que resolvieran la inecuación $x^2 - x - 2 \geq 0$, observándose que si bien algunos alumnos seguían en etapa *acción* en cuanto a la resolución algebraica, otros habían alcanzado un nivel *proceso*, pero todos estaban en etapa *acción* en cuanto a la resolución gráfica.

Posteriormente se solicitó la resolución en forma gráfica y algebraica de la inecuación $1 < x^2 - 2x < 3$. El 80% de los estudiantes interpretó que para resolver algebraicamente la inecuación, se la debía separar en dos partes; obtuvieron dos conjuntos solución, correspondientes a las dos desigualdades.

Pregunta 4: ¿cómo se relacionan las dos soluciones?

El 10% logró interpretar que la solución era la intersección de los dos conjuntos obtenidos.

Pregunta 5: ¿pueden graficar la inecuación?

Algunos alumnos dibujaron dos parábolas y analizaron la solución en el eje *x*.

Un alumno logró interpretar que la parábola estaba entre 1 y 3 en el eje de las ordenadas.

La mayoría de los alumnos dibujaron la parábola y decían que debía estar entre 1 y 3 en el eje de las *x*.

Seguían en etapa *acción* en cuanto a la resolución gráfica.

Luego de varios intentos algunos alumnos entendieron que se debía leer la función sobre el eje de las ordenadas y que la solución representaba la proyección de la gráfica sobre el eje *x*. Se explicó en el pizarrón lo que implicaba la resolución gráfica en esta inecuación para lograr que alcanzaran un nivel *proceso* en cuanto a la resolución gráfica.

Por último, se solicitó la resolución en forma algebraica y gráfica de la siguiente inecuación $\sqrt{x+1} < \sqrt{2x}$ (Alvarenga, 2003, p. 201).

Muchos alumnos detectaron antes de resolver la inecuación que la solución no debía incluir los números menores que -1.

La mayoría la resolvió elevando al cuadrado y en la solución algebraica estaba incluido el intervalo (-∞; -0,5). Algunos alumnos detectaron que el conjunto solución no podía incluir el intervalo (- ∞; -0,5).

Pregunta 6: ¿pueden verificar gráficamente sus respuestas? La mayoría de los alumnos resolvieron en forma correcta e interpretaron que la solución debía ser el intervalo (1; ∞). A partir de dicha respuesta se repasaron las propiedades de orden en reales.

Se esperaba que a posteriori de la precedente institucionalización, los alumnos estén en condiciones de alcanzar un nivel *objeto* del concepto de inecuaciones al tener competencias para analizar equivalencias, verificar qué valores no pueden ser solución y resolver correctamente la inecuación en forma algebraica y gráfica

Ejemplo de una producción textual de un estudiante

Para propiciar el aprendizaje es importante mostrar no sólo donde está el error, sino que además se recomienda reflexionar sobre las acciones realizadas correctamente o no, elemento indispensable en el quehacer didáctico matemático puesto que esta actividad permite, a su vez, al docente, rediseñar actividades para que el alumno realice las reestructuraciones mentales necesarias para el aprendizaje.

Con el objetivo de analizar las construcciones mentales de los estudiantes respecto al tema en cuestión e integrarlo con la noción de valor absoluto, al finalizar la clase se les repartió una fotocopia con dos ejercicios adicionales. Se solicitó que los trajeran resueltos para el día siguiente. Se obtuvieron 70 producciones.

Ejercicio 1 *Dada f(x) representada en la figura, resuelva* $|f(x) - 3| < 2$. *Explique con sus propias palabras cómo lo resolvió.*

El objetivo del ejercicio era la interpretación gráfica de un entorno de la función. Se esperaba que lo resolvieran algebraicamente como una inecuación e interpretaran que la solución era la proyección de la función sobre el dominio de la misma. Se suponía que la correcta interpretación de este ejercicio, ayudaría en la futura comprensión de la definición épsilon-delta de límite finito.

El segundo ejercicio tenía como objetivo la interpretación gráfica de operaciones con funciones. Si los estudiantes eran capaces de realizar dicha interpretación podrían alcanzar un mayor nivel cognitivo respecto de la resolución gráfica de inecuaciones.

A continuación se muestra la producción de Carlos, que fue elegida porque es representativa. Se observa que interpretó bien el ejercicio; cabe señalar que se había trabajado bastante en la clase con la interpretación gráfica de inecuaciones y entornos.

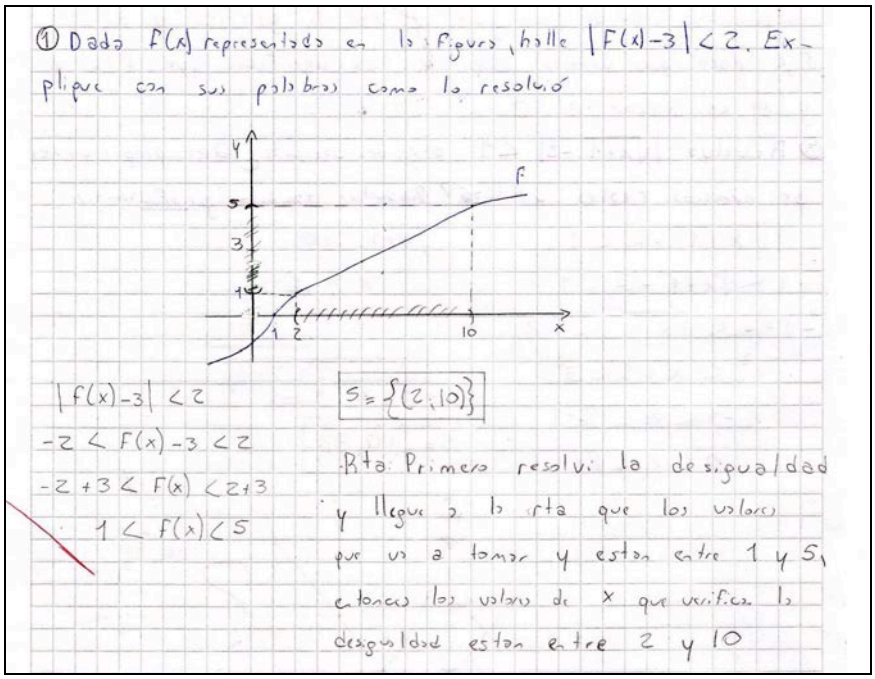


Figura 1: Producción de Carlos

Descomposición Genética Preliminar

Desde la teoría APOE, el estudiante debería mostrar a partir de comportamientos observables, las construcciones mentales (*acción*, *proceso*, *objeto*, *esquema*) dispuestas en la descomposición genética, que es una modelación epistemológica y cognitiva del concepto en estudio. Para el concepto de inecuaciones, se analizará la resolución algebraica y la resolución gráfica.

Se considerará, en primer lugar, que los alumnos encuentran la solución algebraica de la misma; la que puede ser obtenida mediante: a) aplicación mecánica de algoritmos de resolución, b) siendo concientes de las propiedades de orden en reales o c) sin desarrollo a la vista. Si en a), no justifica, el estudiante está en concepción *acción*. Si en b) y c) justifica lo realizado, está en concepción *proceso*. Si el estudiante continúa trabajando en a) hasta interiorizar lo suficiente el algoritmo, justificándolo, puede por esta vía llegar también a la concepción *proceso*.

Desde la concepción *proceso* puede reflexionar coordinando con otros procesos y si reconoce las operaciones lógicas, entre ellas, la de equivalencia entre inecuaciones, puede lograr la concepción *objeto*, o sea ha realizado una encapsulación del proceso en objeto; y, si además realiza el proceso inverso, desencapsulación, se entiende que el estudiante tiene una concepción *esquema* de la resolución algebraica de inecuación.

Si desde la concepción *proceso*, no puede coordinar con otros procesos, como por ejemplo, la equivalencia lógica, no logra llegar a la concepción *objeto*.

Para analizar la resolución gráfica de inecuaciones, el estudiante que posee la concepción *esquema* de función, lo desencapsula y trabaja con el proceso imagen – dominio. Este proceso en coordinación con otros procesos, como por ejemplo, transformaciones de una misma función (traslaciones, reflexiones y otras), operaciones entre distintas funciones y acotación de funciones, puede lograr la concepción *objeto* de la resolución gráfica de inecuaciones. El conjunto de acciones sobre procesos, coordinación de procesos y objeto, determinan la concepción *esquema* de la resolución gráfica de inecuaciones.

Si el estudiante logra coordinar coherentemente ambos esquemas, obtiene una acabada interpretación del concepto de inecuación.

Conclusiones

El manejo insuficiente del cuerpo real y sus propiedades de orden son fuente de una problemática importante en la adquisición y el tratamiento correcto de una gran cantidad de contenidos utilizados en las materias básicas de las carreras de Ingeniería.

Un tema relativamente sencillo, como es el de inecuaciones, genera dificultades que son difíciles de superar para la adquisición de otros conceptos asociados al mismo, como es el caso, justamente del concepto de límite funcional, razón que justifica el presente trabajo.

A partir de la utilización de la teoría APOE, se pone énfasis en la necesidad de proponer actividades basadas en el *esquema* de inecuación, que involucren la interpretación y las resoluciones tanto algebraicas como gráficas. Asimismo se concluye que el *esquema* de función es imprescindible para el entendimiento de inecuación dada las conexiones entre ambos conceptos.

Se debería revisar la metodología de enseñanza de inecuaciones, tratando de entender las construcciones mentales de los estudiantes para realizar una descomposición genética lo más acabada posible del concepto.

Las actividades a ser desarrolladas deben ser diseñadas en distintos contextos y con el control de variables didácticas que permitan la aparición de obstáculos para su tratamiento.

Los estudiantes se motivan con actividades que les resultan desafiantes y se comprometen con las que requieren cambios de registros de representación semiótica.

Es importante concientizar a la comunidad docente universitaria, sobre la necesidad del tratamiento del que debe ser objeto el tema en cuestión.

Las reflexiones finales se refieren a la necesidad de realizar análisis didácticos continuos de los temas que se pretende sean aprehendidos por los estudiantes y la necesidad de investigar en Didáctica de la Matemática pues esta actividad elevará el nivel de los aprendizajes.

Referencias bibliográficas

Alvarenga, K. (2003). La enseñanza de inecuaciones desde el punto de vista de la teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 6(3), 199-219.

Asiala, M., Brown, N., De Vries, D., Dubinsky, E., Mathews D. y Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Development in Undergraduate Mathematics Education. *Research in Collegiate Mathematics Education II. CBMS Issues in Mathematics Education 6*, 1-32.

Boero, P. (1998). Inéquations: aspects didactiques, épistémologiques et cognitifics. In: Jean-Philippe & Maryse Maurel, *Actes des Séminaires - SFIDA X*, VOL. III, Genova, I´IREM de Nice, X, 3-7.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. y Vidakovic D. (1996). Understanding the Limit Concept: Beginning with a Coordinated Process Schema. *The Journal for Mathematical Behavior, 15*, 167-192.

DeVries, D. Publicación electrónica. RUMEC/APOS theory glossary. Obtenido en http://www.cs.gsu.edu/rumec/Papers/Glossary.html en junio de 2002.

Dubinsky, E. (1991). The Constructive Aspects of Reflective Abstraction in Advanced Mathematics. En L. P. Steffe (ed.), *Epistemological Foundation of Mathematical Experience.* Nueva York: Springer-Verlag.

Dubinsky, E. (1996). Una aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática postsecundaria. *Educación Matemática, 8*(3), 24-45.

Duval, R. (1991). Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía, *Grupo de Educación Matemática.* Peter Lang S.A. Editions scientifiques européennes, 1995.

Narvaez, A. M, Berman, C. y Rodriguez, M. (2011) *¿Problemas con el límite o el límite de los problemas enseñados?* En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 24, 585-595. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Narvaez, A. M; Berman, C.; Rodriguez, M. (2011) *Una descomposición genética del límite. En Z* Cataldi y F. Lage (comps.*), Libro de Artículos JEIN 2011*, Vol. II, (pp.18- 25). Buenos Aires: Universidad Tecnológica Nacional.

Piaget, J. (1972). *The principles of Genetic Epistemology* (W. Mays trans) .London: Routeledge & Kegan Paul (original published in 1970).

Vergnaud G. (1982). Cognitive and Developmental Psychology and Research in Mathematics Education: some theorical and methodological issues. *For the Learning of Mathematics* 3, 2, November, 31-41.

Sierpinka, A. (1985). La notion d'obstacle épistémologique dans l'enseignement des mathématiques. *Actes de la 37e Rencontre CIEAEM*, 73-95. Leiden.

CONSTRUCCIONES MENTALES PARA EL APRENDIZAJE DEL TEOREMA DE ISOMORFISMO DE GRUPOS

Arturo Mena Lorca, Astrid Morales Soto y Marcela Parraguez González
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso Chile
arturo.mena@ucv.cl, ammorale@ucv.cl, marcela.parraguez@ucv.cl

Resumen. La importancia del teorema del isomorfismo de grupos para el estudiante de pregrado es manifiesta; sin embargo, diversas investigaciones indican que no es comprendido por la mayoría de los aprendices. Utilizamos la teoría APOE y realizamos una *descomposición genética* del teorema, para elaborar una propuesta de enseñanza *ad hoc*. Antes, separamos el teorema en una parte sin estructura algebraica y una segunda que incluye la operación del grupo.
Palabras clave: teoría APOE, grupos, teorema del isomorfismo
Abstract. The importance of the isomorphism theorem for groups for an undergraduate student is manifest; however, several studies indicate that the theorem is not understood by most learners. We use APOS theory and perform a *genetic decomposition* of the theorem, to develop a proposal for *ad hoc* teaching. Before, we separate the theorem in a part without algebraic structure and a second one that includes the operation in the group.
Key words: APOS theory, groups, isomorphism theorem

Introducción

Para un estudiante de álgebra de pregrado, los cocientes de grupos y el Teorema del isomorfismo para grupos, TIG, proveen de aspectos fundamentales de las competencias que precisa.

El TIG afirma que si G, G' son grupos y f: $G \rightarrow G'$ es un homomorfismo de grupos de núcleo N(f) e imagen Im(f), entonces G/N(f) es isomorfo a Im(f). Es el primero de una decena de teoremas de homomorfismo, utilizando los cuales puede construir grupos a partir de otros conocidos, identificar otros, adentrarse en su estructura, entender la resolución de ecuaciones por radicales, construir algunos sistemas numéricos, etc.

Lo anterior no obstante, diversas investigaciones, particularmente las realizadas por el grupo RUMEC (*Research in Undergraduate Mathematics Education Community*) fundado por Ed Dubinsky (Brown, De Vries, Dubinsky & Thomas, 1997), indican que el TIG no es comprendido por la mayoría de los estudiantes: ellos no entienden qué es el cociente G/N, ni que su estructura depende de la normalidad del subgrupo N en G, ni pueden definir funciones desde G/N. Así, el TIG y sus aplicaciones quedan fuera de su alcance.

Entrevistas que hemos realizado muestran que la buena definición de la operación en G/N y la de la función definida desde él son ignoradas por el alumno común, quien se apresura a comprobar que la operación en las clases tiene las propiedades de asociativad, etc., o que una función definida en el cociente 'preserva' las operaciones de los grupos.

El teorema, entonces, según las evidencias (de RUMEC, de Nardi, 1996 y las nuestras), permanece remoto al aprendiz, y ello lleva a preguntarse cuál es la utilidad real de mantener este teorema en los currículos de profesores en que se los incluye, y poner una nota de duda acerca del provecho que los estudiantes de licenciatura en Matemáticas pueden sacar de él.

Los requisitos conceptuales del teorema incluyen: conjuntos, cuantificadores existencial y universal, funciones; relaciones de equivalencia (RE), clases de equivalencia, particiones; el teorema que liga RE y particiones, definidas sobre un mismo conjunto; operaciones binarias, grupos, subgrupos, homomorfismos, isomorfismos, subgrupos normales, grupos cocientes. A lo anterior la teoría APOE comienza por agregar la noción general de satisfacer una propiedad, y la noción de axioma. La teoría requiere de explicitar, para cada uno de esos requisitos, en qué *construcción mental* se lo necesita.

Ahora bien, los textos de estudio habituales, al tratar el TIG asumen que el alumno ya ha leído las secciones anteriores del mismo, o que conoce los temas previos del currículo, que eventualmente tratan de esos temas en términos generales. Está documentado, sin embargo, que asumir sin más que los conceptos y resultados tratados previamente estén realmente disponibles para su uso no es una evaluación apropiada de la situación del alumno.

Adicionalmente, en el caso del TIG, se desaprovecha nociones que el alumno podría utilizar para abordar el teorema. En efecto, lo habitual es que la presentación del teorema se dirija a la construcción de las clases de equivalencia aN, (a en G), procure luego reunirlas en el cociente G/N y avance de inmediato a la operación $aNbN= abN$, y no es de extrañar que el alumno, a su vez, se apresure a probar en G/N las propiedades de esa operación sin comprender realmente qué es el objeto G/N.

Al respecto, hemos podido comprobar que el aprendiz posee nociones operativas de particiones y RE que le podrían servir para la (re)construcción del TIG, pero no se le invita a utilizarlas. Nuestra propuesta es separar el TIG en dos partes: la primera sin operaciones, que llamamos Teorema del isomorfismo para conjuntos o TIC, de modo que las clases en el grupo puedan ser percibidas de manera análoga a las que utiliza en la vida diaria. La segunda, ya construidas las clases y los cocientes G/N carentes de estructura, se preocupa de las operaciones en las clases.

Para lo anterior, es imprescindible la siguiente observación. La RE que un subgrupo normal N define en el grupo G es aR_Nb si y solo si $a^{-1}b\in N$; para el caso del TIG, la RE que induce el núcleo $N(f)$ del homomorfismo f en G es $aR_{N(f)}b$: $a^{-1}b\in N(f)$. Ahora bien, $a^{-1}b\in N(f)$ equivale a $f(a^{-1}b)=e_{G'}$, es decir, $f(a^{-1})f(b)=e_{G'}$, o sea, $f(a)^{-1}f(b)=e_{G'}$, equivalentemente, $f(a)=f(b)$. Basta entonces observar que, dados los conjuntos subyacentes (a las estructuras de grupo correspondientes) G, G' y dada

$f{:}G\rightarrow G'$ una función, podemos definir una RE R_f asociada a f por: $aR_f\, b{:}\ f(a)=f(b)$. Así, el TIC es: si $G,\ G'$ son conjuntos y $f{:}G\rightarrow G'$ una función, entonces G/R_f está en correspondencia biunívoca con Im(f).

La Teoría APOE y el TIG

Hay consenso en que la enseñanza del álgebra abstracta en pregrado no consigue sus objetivos (Clark, De Vries, Hemenway, St. John, Tolia y Vakil, 1997).

La revisión de la literatura lleva a concluir que quienes han hecho avances mayores y más consistentes en esta área son los miembros del grupo RUMEC, que utilizan la teoría APOE desde la década de 1980.

Los estudios de RUMEC utilizan el lenguaje computacional ISETL (Interactive Set Language), especialmente diseñado para el aprendizaje del Álgebra: el estudiante debe programar en ese lenguaje, y de esa manera va aprendiendo tanto conceptos algebraicos como a trabajar en álgebra.

La breve reseña acerca de APOE que hacemos a continuación se puede encontrar en Arnon, Cottrill, Dubinsky, Oktaç, Roa-Fuentes, Trigueros y Weller (2014).

Dubinsky se basa en la abstracción reflexiva de Piaget para describir la construcción de objetos mentales, y distingue varios tipos de ella o mecanismos: *interiorización, coordinación, encapsulación, generalización, reversión.* Estos originan diferentes construcciones (mentales): *acciones, procesos, objetos, esquemas* (de donde APOE).

Enfrentado a un nuevo concepto matemático, el individuo realiza transformaciones sobre otros construidos previamente para construir este nuevo objeto (Dubinsky et al., 2005).

Si las transformaciones que hace se realizan obedeciendo a estímulos externos, decimos que él posee una *concepción acción* del concepto.

Ahora bien, si el individuo repite y reflexiona sobre una acción, esta puede ser *interiorizada* en un *proceso* mental; esto es, construye una estructura mental que hace el mismo trabajo que la acción externa: ya sea realiza esencialmente la misma transformación enteramente en su mente, o solo imagina que tiene lugar, sin necesariamente recorrer todos los pasos específicos.

Cuando el individuo piensa en un proceso como un todo, y realiza y construye transformaciones sobre su totalidad, ha *encapsulado* el proceso y que posee ahora una *concepción objeto* del concepto. Hay casos en que es esencial volver desde un objeto al proceso que lo forma, lo que se realiza *desencapsulando* el objeto.

Un *esquema* es una colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados consciente o inconscientemente en la mente del individuo en una estructura cognitiva coherente (Trigueros, 2005). La *coherencia* es una característica fundamental del esquema, y se refiere a la capacidad del individuo para reconocer las relaciones que hay al interior del esquema y establecer si este le permite solucionar una situación matemática particular, y usarlo cuando corresponda.

Para describir la manera en que se construye el conocimiento matemático, APOE diseña una *descomposición genética,* DG (Clark et al, 1997), que describe en detalle los aspectos constructivos de un concepto o de un fragmento de conocimiento matemático, para explicitar un camino (no necesariamente único) factible de su construcción por parte de un individuo, en términos de construcciones y mecanismos mentales, de tal manera que él pueda seguirlo para tener éxito.

RUMEC ha manifestado dificultades en su manera de abordar el problema que nos ocupa. Cuando utiliza el programa ISETL, si el cardinal del grupo es 'grande', la construcción de los conceptos se hace difícil y eventualmente impracticable desde las acciones. Si la *presentación* del grupo es compleja, la construcción de las clases se hace difícil. Los alumnos declaran que algunas actividades de programación les parecieron extremadamente difíciles.

Ahora bien, hemos comprobado que la 'relación' entre las relaciones de equivalencia y las particiones en los conjuntos sobre los cuales están definidas –no necesariamente grupos– es una idea sumamente natural, y la encapsulación de las clases en cuanto conjuntos no pasa necesariamente por un proceso algebraico.

Siguiendo a (Mena, 2011) se podría primero encapsular de un conjunto cociente como el resultado de definir una relación de equivalencia en el conjunto G y estudiar luego el caso de R_N en G.

Metodología

APOE tiene una metodología explícita para investigar, el *ciclo de investigación*: análisis teórico, que comporta una DG inicial propuesta por el investigador; diseño y aplicación de enseñanza, y análisis y verificación de datos, que permite refinar la DG preliminar.

Nuestra DG preliminar comienza por RE y particiones, y el teorema que liga a unas y otras (RE/P); luego pasa por el TIC, y finalmente aborda la estructura algebraica del TIG.

Con el objeto de ampliar nuestra visión sobre el tema, entrevistamos a investigadores en álgebra, quienes manifestaron que en sus clases siempre procedían de lo particular a lo general, reconocieron el TIC (en el cual no habían reparado), pero consideran que transitar del TIC al

TIG es un paso de lo general a lo particular y por tanto desaconsejable –sin embargo, tienden a considerar a las relaciones de equivalencia y las particiones solo como un tema más a estudiar–.

Por nuestra parte, hemos considerado que RE, particiones y el teorema que liga a esos conceptos son 'naturales' para cualquier persona. Hicimos estudios exploratorios con cursos universitarios iniciales, y comprobamos esa naturalidad; aun cuando el estudiante no sepa formalmente lo que es una partición ni una RE, al ser requerido a propósito de esa conceptuación) pasa libremente de unas a otras, sin notar ese tránsito (esto es, puede responder con una partición si se le pregunta acerca de una relación de equivalencia, e inversamente). De tal manera, la DG propuesta para el TIG no necesita de una DG explícita para el teorema RE/P, que estaría disponible en una versión ingenua, no formal.

Encuestamos a alumnos del norte, centro y sur de Chile para determinar quiénes, según nuestra DG, han realizado las construcciones mentales necesarias para hacer la del TIG (la encuesta pregunta acerca de grupos, subgrupos, subgrupos normales, homomorfismos, relaciones de equivalencia, particiones, teorema RE/P). Se entrevistó luego a esos alumnos, de manera de refinar la DG, y se ha encontrado que quienes pueden hacer la (re)construcción del TIG pueden hacer la del TIC, y que usan para ello el teorema RE/P.

Conclusiones

Las entrevistas grabadas en video a profesores con trayectoria en investigación en temas relacionados con el álgebra abstracta han sido del mayor interés en cuanto a la elaboración de la DG. Su experiencia de aula, si bien sigue estrategias particulares de cada cual, tiende a confirmar los datos que hemos venido describiendo: el TIG es de difícil acceso; el concepto de subgrupo normal permanece sin ser entendido; el concepto de grupo cociente no se entiende (uno lo declaró "extraordinariamente difícil"). Ellos se inclinan por aproximaciones "concretas": la noción de isomorfismo primero y un tanto independiente de la de homomorfismo; en ningún caso tratar inicialmente el TIG como corolario del teorema fundamental del homomorfismo (que establece que el cociente G/N y la proyección canónica de G en G/N constituyen un *objeto universal* en la categoría de los grupos), aun en sus versiones más elementales. Es de notar que, en general, la manera de abordar el teorema de estos investigadores difiere de la de los textos habituales de enseñanza en la materia (Tales como Dean, 1967; Dubreil, 1975; Fraleigh, 1973; Herstein, 1999, Hungerford, 1980, Lang, 2005), en cuanto a que prefieren las aproximaciones más concretas al teorema. Reconocen que la forma en que dividimos el teorema es interesante y, para algunos, apropiada, pero no disponen de evidencias al respecto, en el sentido de que no la han utilizado en su práctica de aula.

En cuanto a los alumnos, los datos de las experiencias grupales tanto como las encuestas realizadas confirman nuestra hipótesis de que ellos hacen uso libremente del teorema RE/P, cuyo enunciado ignoran.

En una dirección un tanto más general, hemos podido encontrar evidencia de que la identificación que se suele hacer de una relación con su gráfico, justificable desde un punto de vista formal, no es conveniente desde un punto de vista cognitivo: de hecho, en experimentos en aula, al ser preguntados acerca de una partición hecha por un grupo de voluntarios –compañeros suyos–, los estudiantes responden con relaciones de equivalencia evidentemente 'diferentes' (ocasionalmente, sobre un conjunto dado, la misma partición puede obtenerse al separar hombres y mujeres y personas de pelo corto y pelo largo, e. g.).

Reconocimiento. Los autores han sido financiados parcialmente por el Proyecto FONDECYT 1120688, Chile, *Mental constructions in the learning of the isomorphim theorem for Groups.*

Referencias bibliográficas

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory. A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. New York: Springer

Clark, J., De Vries, D., Hemenway, C., St. John, D., Tolia, G. y Vakil, R. (1997). An Investigation of students' understanding of Abstract Algebra (binary operations, groups and subgroups) and the use of abstract structures to build other structures (through cosets, normality and quotient groups). *Journal of Mathematical Behavior*, *16(3)*, 181-186.

Dean, R. A. (1967). *Elements of Abstract Algebra*. New York: John Wiley & Sons.

Dubreil, P. (1975). *Teoría de Grupos. Curso de iniciación*. Barcelona: Reverté.

Fraleigh, J. B. (1973). *A first course in Abstract Algebra*. Reading, Massachussets: Addison Wesley. (Seventh ed., 2003, with V. Katz; Boston: Pearson Education).

Herstein, I. N. (1999). *Abstract Algebra.* New York: John Wiley and Sons.

Hungerford, T. W. (1980). *Algebra*. New York: Springer-Verlag.

Lang, S. (2005). *Algebra*. New York: Addison Wesley.

Mena, A. (2011). *Estudio epistemológico del teorema del isomorfismo de grupos*. Tesis doctoral. Centro de Investigación en Ciencia Avanzada y Tecnología Aplicada, Instituto Politécnico Nacional, México.

Nardi, E. (1996). *The novice mathematician's encounter with mathematical abstraction: tensions in concept-image construction and formalisation*. Thesis, University of Oxford. http://www.uea.ac.uk/~m011/thesis. Retrieved March 11th, 2014

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática*, 17 (1), 5-31

UN DISPOSITIVO DIDACTICO PARA LA ENSEÑANZA FUNCIONAL DE LAS MATEMÁTICAS: LAS ACTIVIDADES DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN - AEI

Marta Bonacina, Claudia Teti, Alejandra Haidar, Santiago Bortolato y Valeria Philippe
Facultad de Ciencias Bioquímicas y Farmacéuticas, Univ. Nacional de Rosario. Argentina
mbacuario@yahoo.com.ar, cteti@live.com.ar, alejandrahaidar@yahoo.com.ar

Resumen. En este trabajo presentamos un avance en el diseño de dispositivos didácticos con los que dar cuenta de la siguiente problemática: lograr una enseñanza funcional de la Matemática; o sea, una enseñanza que proporcione al estudiante los conceptos y técnicas necesarios para dar respuesta a situaciones problemáticas, no se limite a una presentación desarticulada y carente de sentido de los mismos.
Nuestro modelo didáctico lo constituye la *Teoría Antropológica de lo Didáctico,* dentro del cual reconocemos dos conceptos de utilidad para los fines perseguidos: los Recorridos de Estudio e Investigación (REI) y las Actividades de Estudio e Investigación (AEI). En particular, y en esta instancia, presentamos una AEI diseñada en torno a la noción de función y con el objetivo de dar respuesta al fenómeno didáctico de la falta de articulación entre las distintas formas de representar funciones.
Palabras clave: actividades estudio e investigación, funciones, representación
Abstract. In this paper we present a progress in the design of didactics dispositive with the aim of expose this issue: reach a functional math education; meaning, an education that would provide the student with the necessary concepts and techniques in order to solve problematic situations, without being limited to an unarticulated and meaningless presentation of those concepts and techniques.
Anthropological Theory of Didactics constitutes our model, in which we recognize two useful concepts for the objectives we are looking for: the Study and Research Course (SRC) and the Activity of Study and Research (ASR), In particular, and in this instance, we present a ASR designed around the notion of function and with the purpose to give an answer to the educational phenomenon of the lack of articulation between different ways of representing functions.
Key words: activity study and research, functions, representation

Introducción

Estudiar Matemática presenta dificultades tanto en el Ciclo Medio como en el Superior. En este último, el que nos ocupa, se observa actualmente un alto índice de deserción y fracasos, sobre todo en los primeros años de cursado.

Trabajos recientes de investigación en Didáctica de las Matemáticas concluyen que en las prácticas actuales se enfatiza el desarrollo de habilidades algebraicas y se desatiende la búsqueda de *comprensión* de las nociones (Artigue, 1998; Zuñiga, 2007). En este contexto surge la expresión "fenómeno didáctico" para referirse a aquellos hábitos o modos que se manifiestan en el aula con una regularidad fácilmente observable pero difícil de modificar y que tienen su correlato en la forma como el conocimiento fue impartido. Por ejemplo: "en la enseñanza de las Matemáticas en secundaria se observa el predominio del uso del registro algebraico y una marcada dificultad para articular el mismo con los demás registros, en especial, el gráfico" (Bosch, 2000). Creemos que este tipo de fenómeno, constatado en nuestros cursos habituales, constituye uno de los principales obstáculos para el aprendizaje.

El objetivo de nuestra investigación es dar cuenta de la siguiente problemática: lograr una enseñanza funcional de la Matemática; o sea, una enseñanza que proporcione al estudiante los conceptos y técnicas necesarios para dar respuesta a situaciones problemáticas, no se limite a una presentación desarticulada y carente de sentido de los mismos (a nuestro entender, principal razón de los "fenómenos didácticos" mencionados).

A tal efecto, nos hemos propuesto trabajar en el marco de lo que Chevallard denomina la "pedagogía de la investigación" o "del cuestionamiento del mundo". Para trabajar en esta dirección y sentido Chevallard propone los "Recorridos de Estudio e Investigación" (REI) y las "Actividades de Estudio e Investigación" (AEI), dispositivos que priorizan el carácter funcional de la Matemática y posibilitan un importante protagonismo de la herramienta informática.

En el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) la unidad elemental de análisis de la actividad matemática no es el concepto sino la praxeología u Organización Matemática (OM) de la que este "emerge"; en otras palabras, aquella donde se consideran y explicitan las actividades que "le dan vida".

Un REI es un dispositivo que se genera a partir de la búsqueda de respuesta a una "cuestión generatriz" que, para ser respondida, requiere la construcción de toda una secuencia de organizaciones matemáticas (OM) completas y articuladas (Serrano, Bosch, Gascón, 2007). Se reconoce el carácter abierto y dinámico de los REI como un hecho que hace a la completitud de los mismos pero que a la vez plantea cuestiones que van más allá de los límites de aplicación que, en general, son aceptados en las instituciones educativas.

La construcción de una AEI comprende los mismos pasos que la de un REI pero se pueden obviar cuestiones que caracterizan los REI y dificultan su aplicación. Estos dispositivos son anteriores a los REI y básicamente difieren de estos en lo relativo al "control del tiempo didáctico". En la construcción de las AEI el tiempo destinado a cada actividad es una variable a considerar. Si bien las AEI no resuelven acabadamente el problema de la monumentalización del saber (Bosch, Gascón et al, 2011), tienen un punto en común con los REI, exigen un cuestionamiento fuerte al contrato didáctico tradicional. En función de ello estimamos que las AEI constituyen una opción *gradualista y viable* para trabajar en medios no preparados para la pedagogía de REI; que son una alternativa válida para comenzar a introducir en las instituciones educativas la pedagogía de la investigación y del cuestionamiento del mundo.

En este trabajo en particular, presentamos una Actividad de Estudio e Investigación diseñada en torno a la noción de función con el objetivo de dar respuesta al fenómeno didáctico de la falta de articulación entre las distintas formas de representar funciones.

Marco teórico

El principio fundamental de la TAD radica en que "toda actividad humana regularmente hecha puede describirse con un modelo único denominado praxeología". En particular y respecto a la actividad matemática y el saber que de ella emerge, hablamos de praxeologías u Organizaciones Matemáticas (OM).

Una OM es una entidad compuesta por: tipos de problemas o "tareas"; tipos de técnicas que permiten resolver las tareas; tecnologías o discursos (logos) que describen y explican las técnicas; una teoría que fundamenta y organiza los discursos tecnológicos. Los tipos de tareas y los tipos de técnicas constituyen el "saber-hacer" matemático mientras que los discursos tecnológicos y teóricos conforman el "saber" matemático propiamente dicho.

En este modelo, "hacer matemática" consiste en activar una OM, es decir en resolver determinados tipos de tareas con determinados tipos de técnicas (el "saber hacer"), de manera inteligible, justificada y razonada (mediante el correspondiente "saber").

"Enseñar y aprender matemáticas" comprende la actividad de "reconstrucción" de una OM para utilizarlas en nuevas situaciones y bajo distintas condiciones.

Para realizar la actividad matemática se acude a una pluralidad de registros (escrito, gráfico, verbal). El reconocimiento de dificultades ligadas a la articulación entre ellos no es privativo de la TAD; pero en esta se enfatiza la no-diferenciación entre registros desde el punto de vista de su "valor" o "función" en el trabajo matemático.

En cuanto al desarrollo y análisis de la actividad de construcción de una OM; es decir, de cómo organizar el proceso de estudio de las cuestiones a considerar a tal efecto, aparecen dos aspectos inseparables: *el objeto matemático a construir* y *la manera como puede ser construido*. El primer aspecto es de hecho el *producto* a obtener (la OM); el segundo es el proceso de estudio y construcción de lo que llamamos su *organización didáctica* (OD). Como toda praxeología, una OD se articula a través de tareas, técnicas, tecnologías y teorías que aquí denominamos "didácticas" (Bosch, Espinoza y Gascón, 2003).Este proceso de estudio se caracteriza por tener una estructura organizada en distintos *momentos didácticos* relativos al encuentro con la actividad desde distintas perspectivas.

Diseño de un proceso de estudio para construcción de una AEI

En primera instancia procedimos a la discusión y elección de la mínima infraestructura praxeológica necesaria al efecto de alcanzar los objetivos propuestos según y acorde la OD pretendida. O sea, a la identificación de las variables *didáctico-matemáticas* a partir de las cuales

comenzar a generar la *familia de tareas* que conformarían la AEI. Se procedió también al análisis del equipamiento praxeológico con que debía contar el alumno:

Sistemas de referencia, distancia entre puntos, cónicas, ecuación de las cónicas. Definición de función (**f**); conjuntos asociados a **f**: dominio "natural", codominio e imagen; distintos registros para **f** : ***gráfico, numérico, algebraico y verbal***; criterios gráficos para el tratamiento de una ***curva/función***, operaciones entre funciones.

Concluida esta instancia, procedimos a proponer la "cuestión generatriz inicial", **CG_o**; o sea, el punto del cual partir al efecto de decidir y secuenciar las tareas (**T**) requeridas para dar respuesta a los distintos interrogantes que, indefectiblemente, debían ir presentándose al tratar de dar respuesta a la cuestión inicial.

Estructura general del AEI

OMo → CGo: "La representación algebraica de una función,

¿Se puede obtener a partir de su representación grafica?.

To: Para cada función elemental obtener su representación algebraica (ecuación) conocida su representación gráfica (curva).

OM1→ CG_1: ¿Se puede **operar** con funciones?

T1: Operaciones entre o sobre funciones: algebraicas (**± ; × ; ÷**), composición, inversa y <u>transformaciones</u>

<u>DESARROLLAMOS</u>: <u>transformaciones</u>

OM2→ CG_2:¿Existe algún criterio para **agrupar** funciones?;¿ Para **caracterizar** estas agrupaciones?

T2: Clases de Funciones, Ecuaciones Prototipo

<u>Descripción de T2</u>: Dada C_i = graf f_i (C_i = recta, potencia, recíproca) obtener la ley de $\mathbf{f_i}$ con fórmula **y=f(x)**. Luego, y en base a lo visto en **T1** (transformaciones), hallar la "ecuación prototipo" correspondiente a la clase de funciones a la que pertenece cada $\mathbf{f_i}$.

<u>OD-T2</u>: Las actividades propuestas tienen por objeto trabajar la idea de "clase o familia de funciones"; identificar los parámetros característicos para cada clase; sus propiedades *geométricas* (simetrías, asíntotas) y *analíticas* (crecimiento, decrecimiento, extremos). En cada "tarea" se proponen actividades que fuercen al estudiante a reconocer y/o justificar la "técnica" utilizada para resolverla.

En lo que sigue mostramos la secuencia de OM a través de las cuales entendemos el estudiante logrará una apropiación significativa del objeto matemático propuesto en **T1**

OM1 → CG$_1$: ¿Se puede operar con funciones "gráficamente"?

T1: TRASFORMACIONES

CG$_{1.1}$: La representación algebraica de una función:¿Se puede obtener a partir de su gráfico?

T1.1: Dada **C** = **graf. f** ; hallar ley f con fórmula y = f(x).

CG$_{1.2}$: La representación algebraica de una función; ¿Se puede obtener a partir de su gráfico y "*operaciones gráficas*" realizadas sobre la curva prototipo de la cual proviene?

T1.2: Dada **C*** = **graf g**, a partir de "*operaciones gráficas*" sobre **C (T1.1),** hallar la ley g con fórmula y = g(x) Describir la "operación" y "darle un nombre".

OD-T1.1:

1) Identificadas las variables didáctico-matemáticas relativas a esta tarea, así como el equipamiento praxeológico necesario para abordarla, para diseñar esta actividad elegimos una curva "conocida" por el estudiante: la circunferencia.

2) Si C = **arco de circunferencia**, entonces C es objeto de tres praxeologías diferentes, según el bloque tecnológico/teórico al que remita la tarea propuesta.

- Modelización funcional: C como gráfica de una función.
- Modelización geométrico-analítica: C como lugar geométrico que verifica una ecuación.
- Modelización geométrico-sintética: **C** como conjunto de puntos equidistantes del centro.
- Los tipos de tareas y técnicas que toman sentido en cada praxeología, son diferentes.

Realizar esta tarea requiere el trabajo articulado entre las tres formas de acercarse al objeto.

Las actividades a realizar por el estudiante en esta instancia son: adiestrar la "mirada" al efecto de detectar propiedades de los gráficos "visibles" para el ojo adiestrado; conjeturar, validar o refutar. O sea, un repertorio de "acciones" que la matemática escolar tiende a minimizar y que no resultan fáciles ni triviales para la mayoría de los estudiantes.

En esta actividad el acento está puesto en el "momento exploratorio"; en hacer notar la necesidad de acudir a una "técnica" para concretar exitosamente la acción propuesta. También tiene por objeto que se internalice la idea de que con datos experimentales sólo se pueden

formular conjeturas o hipótesis; que, para "afirmar" estas conjeturas hay que proceder a "validarlas" con técnicas más elaboradas; o sea, acudir a la "tecnología".

Las consignas para esta tarea son:

1) Obtener "leyendo" del gráfico las coordenadas de distintos **P**i de **C**;"registrar", con método, los datos obtenidos → tabla de valores ≈ $\mathbf{f_{num}}$ (representación numérica de **f**)

2) Calcular la distancia de **P**i a Q (punto fijo "detectado" al estudiar la curva). Registrar estos datos en la tabla, buscar un "patrón" en el comportamiento de los **P**i respecto a Q, (d(Pi ;Q) = "cte"), formular una conjetura.

En esta instancia detectamos otro fenómeno didáctico: "*los alumnos subestiman la importancia del error su tratamiento,* e *los cálculos aproximados*"

3) Proponer un método o proceso para "validar" la conjetura hecha. Ejecutarlo y concluir.

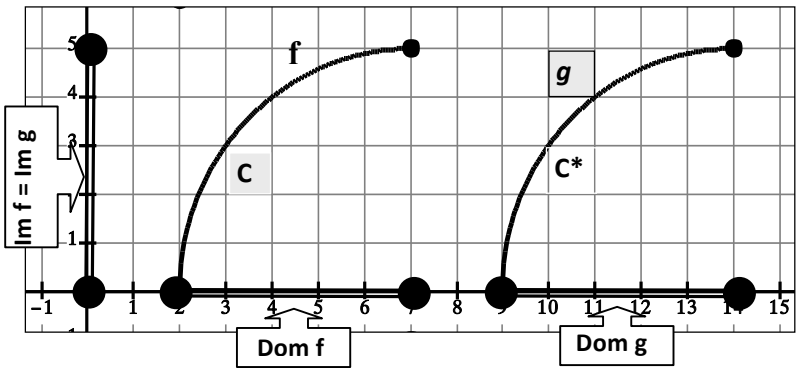
OD-T1.2:

1) T1.2 se divide en cuatro tareas, una por cada "trasformación";

T1.2(1)→traslación; T1.2(2)→reflexión; T1.2(3)→dilatación; T1.2(4)→reflexión;

2) La curva C* = **graf g** a trabajar en cada T1.2(i), es una curva obtenida al aplicar la transformación del caso a la curva C = *graf f* de T1.1. (arco circunferencia).

Ejemplo



g: <u>traslación horizontal</u>

- **g(x) = f(x-7)**

(corrimiento a derecha de **7**u.)

- **f(x) =** $\sqrt{25-(x-7)^2}$
- **g(x) =** $\sqrt{25-(x-14)^2}$

3) Si **T** = **transformación**, entonces **T** es objeto de tres praxeologías diferentes según el bloque <u>tecnológico/teórico</u> al que remita la tarea propuesta.

- <u>Modelización funcional</u>: **T** como gráfica de una función (**T_{graf}**)
- <u>Modelización geométrico-analítica</u>: **T** como lugar geométrico que verifica una ecuación

- Modelización geométrico-sintética: **T** como lugar geométrico que verifica cierta propiedad con respecto a la curva de la cual es la "transformada".

Realizar esta tarea requiere el trabajo articulado entre las tres formas de acercarse al objeto.

4) Al finalizar esta actividad el estudiante debería haber internalizado la siguiente cuestión: que cuando sobre **f** se aplica una **transformación** se genera una nueva función**, g ,** con la particularidad de que el "nexo" entre la "representación algebraica" de **f** y **g** es fácil de establecer pues **g**(x) **=** A.**f** (*a* x + b) **+** B. La presencia (o no) en la ecuación de uno o más parámetros (***a*, b, A, B**), *depende de la transformación o composición de transformaciones aplicada*. Estos parámetros son entonces el "nexo" entre la función original y su transformada. Por ello, para conocer las característica de **C** que se conservan en la curva transformada; el "efecto" sobre C de cada transformación, basta estudiar el efecto de cada uno de estos parámetros en la ecuación prototipo correspondiente, **y =** A. ***f*** (*a* x+b) **+** B.

5) Cabe aclarar que dado las importantes limitaciones que el contexto institucional nos impone, las actividades propuestas están "fuertemente dirigidas", más de lo que estimamos conveniente. Pero de otra forma no hubiéramos podido llevar a cabo la experiencia.

Las consignas para esta tarea son:

1. explorar C*, recopilar información y usarla para hallar la ***ley g*** con fórmula **y = g(x)**
2. comparar C* con C; concluir que modificación produce el parámetro no nulo en la ***ley g*** sobre la curva original (C); identificar la operación aplicada.

Primera aplicación y evaluaciòn de T1

La tarea identificada como **T1** se trabajó durante el cursado de Matemática I, el 1er cuatrimestre de 2013, con 160 alumnos. Elegimos este tema, "transformaciones", pues la experiencia indica que existen importantes dificultades para la aprehensión significativa del mismo, dificultades que son imposibles de salvar en los tiempos asignados a la materia.

Cabe observar que nuestro objetivo es el diseño de materiales que si bien pueden no resultar "ideales" en cuanto a lo teóricamente pretendido, sean posibles de ser "bajados" al aula; o sea, que no resulten "artificiales" y/o "ajenos" a la realidad institucional en la que nos desempeñamos. En función de ello y al efecto de aplicar y evaluar los materiales didácticos diseñados hemos ideado una forma alternativa a las tradicionales, adaptada al contexto y que nos provea de la información necesaria para continuar nuestra tarea.

En esta instancia la implementación se llevó a cabo según el siguiente esquema:

1. Propuesta a los alumnos del **T1** como Trabajo Práctico (optativo), a resolver fuera de las horas de clase y ser entregado, por escrito, en el término de 10 días.
2. Corrección, detección y clasificación de errores más frecuentes e importantes.

   Evaluación de la incidencia sobre dichos errores de fallas en el diseño de la actividad.
3. Una actividad presencial (optativa y por grupos) al efecto de realizar la devolución del trabajo, la corrección en pizarra de los errores, escuchar a los alumnos.
4. Horas de consulta especiales para aquellos a los que la actividad presencial no alcance.
5. Evaluación de este tema en el 1er Parcial.

Conclusiones

Si bien no hemos finalizado el procesamiento de toda la información recopilada, entre la que está el parcial, estamos en condiciones de hacer algunas apreciaciones iniciales.

Corroboramos que los alumnos "prefieren" el registro algebraico (aunque cometan graves errores en la manipulación algebraica) y consideran que la verificación por puntos es suficiente para resolver un problema. Que al registro algebraico le atribuyen una "utilidad" que no admiten para el gráfico; que tienden a privilegiar una única técnica que consideran "la manera evidente e incuestionable de resolver tareas de determinado tipo". O sea, que dan preponderancia a la función justificativa (que asegura que cada técnica sirve para lo que ha de servir y da el resultado que debe dar) por encima de la función explicativa (que debería aclarar *por qué* la técnica es correcta, *pertinente* y eficaz).

Los resultados del parcial (ya corregido pero no procesada la información) nos alientan a creer que la OD que guió la construcción de la OM fue acertada. Un indicador importante al respecto es que la mejoría producida en el tema que nos ocupa es tan importante que se detecta a primera vista. Claramente se observa que el ejercicio del tema del Trabajo Práctico (transformación) es el que más y mejor resolvieron los alumnos; que reconocen las distintas formas de representar funciones, que las dificultades para pasar de un registro a otro son menores, al igual que las relativas al trabajo algebraico con raíces y potencias.

En menor medida se observa una mejora en cuanto al reconocimiento de las diferentes técnicas existentes para abordar una tarea, a discernir criterios para elegir la más apropiada. Finalmente, estimamos importante remarcar que el desarrollo habitual del curso transcurre dentro del paradigma monumentalista o de visitar saberes, claramente opuesto a la pedagogía de la investigación y del cuestionamiento del mundo que propone la TAD y a la cual adherimos, lo que

no facilita nuestra tarea; que, no obstante ello, insistimos en buscar formas o modos de trabajar acorde con la meta propuesta: *conseguir que los conocimientos matemáticos que enseñamos en los cursos universitarios no se reduzcan a un conjunto desarticulado de conceptos y técnicas carentes de sentido.*

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 1* (1), 41–56.

Barquero, B. (2009). *Ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las matemáticas*. Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

Bosch, M. y Gascón, J. (2011). Los Recorridos de Estudio e Investigación y la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las Ciencias Experimentales. *Enseñanza de las ciencias*, 29 (3), 339-352.

Bosch, M. (2000). Un punto de vista antropológico: la evolución de los "instrumentos de representación" en la actividad matemática. En L. Contreras [et al.] (Eds.). *Cuarto simposio de la sociedad española de investigación en educación matemática* (pp. 15-28). Huelva, España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Espinoza, L. y Gascón, J. (2003). El profesor como director de procesos de estudios. Análisis de organizaciones didácticas espontáneas. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 23 (1), 79-135.

Gascón, J., Ruiz Olarría, A., Artaud, M., Bronner, A., y Larguier, M. (2011). *Un panorama de la TAD*. Barcelona: Centre de Recerca Matemática

Fonseca, C., Casas, J.M., Bosch, M. y Gascón, J. (2009). Diseño de un recorrido de estudio e investigación en los problemas de modelización. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XIII.* Santander: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Pereira, A. y Casas, J.(2011). Una herramienta para el estudio funcional de las matemáticas: los Recorridos de Estudio e Investigación. *Educación Matemática*, *23*(1), 97-121.

Llanos, V. C. y Otero, M. R. (2011). Evolución de una AEI como producto de investigación al cabo de seis implementaciones consecutivas. A. R. Corica [et al.] (Eds.). *I Congreso Internacional de*

Enseñanza de las Ciencias y la Matemática, II Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática. Tandil: Universidad Nacional del Centro de Bs. As.

Otero, M. R. y Bilbao, M. P. (2011). Funciones Polinómicas en la Secundaria: primeros resultados de una Actividad de Estudio y de Investigación (AEI). *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, *6* (1), 102-112.

Serrano, L., Bosch, M. y Gascón, J. (2007). Cómo hacer una previsión de ventas: propuesta de recorrido de estudio e investigación en un primer curso universitario de administración y dirección de empresas. *II Congreso Internacional sobre la Teoría Antropológica de lo Didáctico* [en línea] Disponible en

http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD_II/listado_comunicaciones.htm

Zuñiga, L. (2007). El cálculo en carreras de ingeniería: un estudio cognitivo. *Revista latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa ,10* (1) ,145–175.

COMPRENSIÓN DEL ENFOQUE FRECUENCIAL DE PROBABILIDAD DE ESTUDIANTES AL FINAL DEL BACHILLERATO TECNOLÓGICO

Jesús Salcedo Prado y Ana María Ojeda Salazar
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav México
jsalcedo@cinvestav.mx, amojeda@cinvestav.mx

Resumen. Tres semanas después de recibir la enseñanza de probabilidad, diez estudiantes de un bachillerato tecnológico fueron seleccionados para desarrollar una actividad extra-aula experimental, fundamentada en la aproximación de la frecuencia relativa a la probabilidad. Se utilizaron hojas de control y se videograbó la sesión. Inicialmente los estudiantes lanzaron volados individualmente y después se organizaron en equipos para analizar sus datos. En la interacción social en dos equipos se manifestó la confusión entre los conceptos de frecuencias relativa y absoluta, y se observó la subordinación de ideas de los miembros ante un líder conceptual. Los estudiantes en un inicio confundieron los valores de la variable aleatoria con el espacio muestra, lo cual corrigieron posteriormente; si bien expresaron una aproximación intuitiva a la ley de los grandes números, no lograron progresar en ella. En general los estudiantes se mostraron dubitativos al contestar a las preguntas de las hojas de control, a pesar del poco tiempo transcurrido desde la enseñanza
Palabras clave: probabilidad, frecuencia relativa
Abstract. After three weeks that the probability course was finished, ten high school students were chosen to develop an experimental out-classroom activity based on the approach of relative frequency to probability. Control sheets were used and the session was videotaped. Initially the students tossed coins singly, then they met into teams to analyze their outcomes. Within the social interaction in two teams a confusion between the concepts of absolute and relative frequencies arosed and the ideas of the members were subordinated to those of a conceptual leader. Students initially confused the values of the random variable with the sample space, but they corrected later this misunderstanding, and were able to express an intuitive approach to the law of large numbers, although they did not go on further. In general, the students were hesitant to answer the questions posed in control sheets, despite the short time since the teaching.
Key words: probability, relative frequency

Introducción

En el marco del Acuerdo Académico Colegiado Interinstitucional de Docencia-Investigación establecido entre el DME del Cinvestav y el CECyT No. 4 del IPN, cuyo objetivo principal es impulsar la investigación en Matemática Educativa en el bachillerato tecnológico, se realizó una sesión *extra-aula* en la que los estudiantes del sexto semestre de Probabilidad y Estadística, tres semanas después del final del curso según la propuesta institucional, realizaron un experimento aleatorio desde un enfoque frecuencial, propuesto para la educación secundaria. En este documento se reportan los resultados obtenidos.

Para la asignatura de matemáticas en todos los semestres del bachillerato tecnológico, el programa de estudios destina una hora por semana para la enseñanza en espacios externos al aula (DEMS, 2009), por lo que definimos *Extra-aula*: *Espacio externo al aula de matemáticas para un tratamiento adicional de sus temas o de otros relacionados*. La actividad desarrollada tuvo el objetivo de obtener datos de la comprensión de los estudiantes del enfoque frecuencial de la probabilidad después de haber recibido la enseñanza de probabilidad y estadística según el programa de

estudios de un bachillerato tecnológico (DEMS, 2009). La actividad experimental aplicada estaba diseñada para segundo grado de secundaria, para alumnos de 13 años de edad.

Elementos Teóricos

Esta investigación se fundamenta en consideraciones epistemológicas y cognitivas.

Ley de los grandes números y enfoques de la probabilidad

Se han adoptado varios enfoques para clarificar la asignación de probabilidades a eventos. En la enseñanza de la probabilidad es particularmente importante el enfoque que se elija. Konold (1991), refiriéndose a las interpretaciones clásica, frecuencial y subjetiva, argumenta que según la primera, *a priori*, la probabilidad de un evento es la razón del número de alternativas favorables a ese evento, en relación al total de alternativas, siempre y cuando éstas sean igualmente probables. Esta definición es circular: la probabilidad se define en términos de alternativas igualmente probables. Según la interpretación frecuencial, de carácter empírico, la probabilidad de un evento es el límite de su frecuencia relativa de ocurrencia en un número infinito de ensayos. De acuerdo a las interpretaciones subjetivistas, la probabilidad es la medición de la creencia en la verdad de una proposición. El significado del valor de la probabilidad en una interpretación subjetivista se puede concebir como: a) descripción de ese valor según la creencia que una persona tiene de lo que puede acontecer en una apuesta; b) consideración de todos los eventos a los cuales se les asigna una probabilidad como una colección (Konold, 1991).

En la ley de los grandes números se conjugan los enfoques clásico, frecuencial y axiomático de la probabilidad. Históricamente, el primer matemático en demostrar este resultado fue Jakob Bernoulli (1713) mediante la enunciación de su famoso teorema: Dados un suceso A, su probabilidad P de ocurrencia, y n pruebas independientes para determinar la ocurrencia o no-ocurrencia de A, sea f el número de veces que se presenta A en los n ensayos y ε un número positivo cualquiera. La probabilidad de que la frecuencia relativa f/n discrepe de p en más de ε (en valor absoluto) tiende a cero al tender n a infinito. Es decir:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{f}{n}-p\right| > \varepsilon\right) = 0$$

Ideas fundamentales de estocásticos

Desde un punto de vista epistemológico y pragmático, en el sentido de Bruner, Heitele (1975) ha propuesto una lista de ideas fundamentales de estocásticos para la enseñanza de probabilidad y de estadística en todos los niveles educativos que sigan un currículum en espiral. Considera las ideas fundamentales como:

[…] aquéllas que proporcionan al individuo un modelo explicativo en cada etapa de su desarrollo, tan eficiente como sea posible y que se distingan en los distintos niveles cognoscitivos, no de manera estructural, sino sólo en su forma lingüística y en sus niveles de elaboración (Heitele, 1975, p. 188).

Su propuesta considera cuatro puntos de vista. El marco de la concepción de Bruner, basado en: el principio de la enseñanza de un tópico es la transmisión de ideas fundamentales, las ideas fundamentales son necesarias como una guía desde la educación preescolar hasta la universitaria para garantizar cierta continuidad, las ideas fundamentales y los conceptos se tratan en los distintos niveles cognoscitivos y lingüísticos a lo largo de un currículum en espiral, la transición a un nivel cognoscitivo más alto se facilita si durante las primeras etapas cognoscitivas se ha diseñado una presentación apropiada del tópico principal; los resultados de la psicología del desarrollo con respecto a las ideas de estocásticos; las diversas fallas de los adultos en situaciones estocásticas; la historia de la probabilidad.

En esta perspectiva, el autor propone como ideas fundamentales: Medida de probabilidad, espacio muestra, adición de probabilidades, regla del producto e independencia, equiprobabilidad y simetría, combinatoria, variable estocástica, modelo de urnas y simulación, ley de los grandes números y muestra. Este listado es un modelo para construir un curriculum coherente en estocásticos, más que para resolver problemas. La utilidad de este modelo se muestra al aplicarse en la enseñanza a todos los niveles. Heitele propone integrar en la educación básica, lo más temprano posible, actividades de estocásticos a las de aritmética y geometría, para desarrollar conexiones significativas con la realidad y prevenir sesgos del pensamiento. Para ello, señala, es necesario que los profesores sepan lo que es realmente fundamental en estocásticos.

Modelos generativos

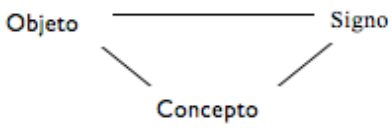
Desde un punto de vista cognitivo, Fischbein (1977) establece la hipótesis de que los modelos didácticos, específicamente los modelos intuitivos, deben tener una capacidad heurística, como sucede con los modelos científicos, porque los modelos, ya sean científicos o didácticos, deben constituir una componente viable para el pensamiento productivo. Esto lo plantea igualmente para los modelos pictóricos:

[…] un buen modelo es, necesariamente, generativo. Un modelo es genuinamente útil al pensamiento productivo si puede representar correctamente un número ilimitado de situaciones diferentes, usando un número limitado de elementos o reglas. El sistema de reglas que establece un modelo para expresar unívoca y estructuralmente al original constituye la sintaxis del modelo (Fischbein, 1977, p. 155).

Heitele (1975) señaló también la pertinencia de los modelos pictóricos en la enseñanza básica de estocásticos. La importancia de las operaciones combinatorias es clara en el caso discreto, pues al asignar probabilidades es relevante la tendencia a subestimar la cardinalidad de los eventos (Fischbein, 1975). Con el uso de los diagramas de árbol, basado siempre en las mismas convenciones, se obtiene respuesta a las posibles preguntas referentes a combinatoria y pertenecientes a la misma clase, donde se pide la cantidad de arreglos posibles en la ordenación de objetos. El modelo es consistente internamente; expresa un principio, un método para construir los arreglos. El modelo es una herramienta intelectual: con él se resuelve el problema y no sólo se describe la solución. Con un modelo tal se aprende a pensar efectivamente y a comprender activamente. Los diagramas de Venn también constituyen una técnica consistente para expresar operaciones con conjuntos. Es una técnica visual generativa, que usa una lógica figurativa; la solución a las operaciones con conjuntos, qué representan, se puede obtener usando consistentemente el lenguaje figurativo.

Triángulo epistemológico

De acuerdo con Steinbring (1991), el conocimiento probabilístico tiene un carácter de sistemas complejos en cada nivel de desarrollo. Este conocimiento se crea como una forma relacional o un mecanismo de unión entre los aspectos de cálculo formales y los contextos interpretativos. Esta forma relacional del significado matemático se caracteriza como el triángulo epistemológico del conocimiento matemático (véase la Figura 1).



1. Triángulo epistemológico del conocimiento probabilístico

El triángulo epistemológico representa un diagrama relacional en el cual el significado del conocimiento no puede ser deducido desde uno de los vértices, siempre requiere un balance entre todos ellos.

Método e Instrumento

Tres semanas después de la enseñanza de Probabilidad se seleccionó a diez estudiantes de un grupo de Probabilidad y Estadística del sexto semestre (17-18 años de edad) de un bachillerato tecnológico para el desarrollo de una actividad, con duración de 2 hrs, 45 min. La selección de los estudiantes obedeció a su mayor disposición y participación en la enseñanza. Se utilizaron hojas de control para guiar la actividad y registrar las respuestas de los estudiantes; no se permitió el uso de calculadora y la sesión se videograbó. La actividad se desarrolló en dos tiempos, con un receso de 40 minutos, como se indica en la Tabla 1.

Tiempo	Secciones
1. Frecuencia relativa en ternas de volados (1 hr, 45 min)	I, II y III
2. Simulación del sexo de cuatro hijos (1 hr.)	IV

Tabla 1: Correspondencia entre las secciones de la actividad y su duración

La primera sección de la actividad se contestaba de manera individual y pedía lanzar 25 ternas de volados, para las cuales había que indicar los valores que toma la variable aleatoria, registrar la frecuencia absoluta y la frecuencia relativa para cada uno de ellos, y finalmente comparar estas frecuencias con las de águila en todos los lanzamientos.

En la segunda sección los estudiantes formaron equipos para comparar sus resultados individuales y conjuntar sus datos, para comparar las frecuencias relativas entre grupos de datos de distinto tamaño y, finalmente, observar el comportamiento de las frecuencias relativas de ambos conjuntos de datos respecto a la probabilidad. Los diez estudiantes E_i (i = 1, 2, …, 10) formaron tres equipos T_j (j = 1, 2, 3) para el desarrollo de la actividad: T_1 {E_1, E_2, E_3, E_4}, T_2 { E_5, E_6 y E_7} y T_3 { E_8, E_9, E_{10}}.

En la tercera sección se procedió a graficar los valores de las frecuencias relativas de los dos grupos de datos de diferente tamaño y el valor a priori de la probabilidad para cada uno de los valores de la variable aleatoria; también calcularon el promedio del número de águilas obtenidas en las ternas de volados para ambos grupos de datos para, posteriormente, compararlo con la esperanza matemática de la variable aleatoria.

En la sección final los estudiantes simularon el sexo de cuatro bebés mediante volados; se les pidió el espacio muestra correspondiente con el recurso a un diagrama de árbol, indicar valores que toma la variable aleatoria y su respectiva probabilidad, así como observar esta relación en el diagrama de árbol, calcular la esperanza matemática y estimar el resultado más probable para una combinación dada en un mayor número de repeticiones.

La Tabla 2 muestra el contenido de ideas fundamentales de estocásticos por sección.

	Ideas fundamentales						
Sección	Medida de Probabilidad	Espacio muestra	Regla del Producto	Equiprobabilidad y Simetría	Combinatoria	Variable Aleatoria	Ley de los grandes números
I							
II							
III							
IV							

Resultados

Al final de la actividad experimental obtuvimos las repuestas que los estudiantes dieron a los reactivos en las hojas de control y la videograbación de sus intervenciones durante el desarrollo de la actividad, de todo lo cual a continuación presentamos los resultados

La interacción social

Inicialmente los estudiantes no contestaron correctamente todas las preguntas, por lo que el investigador guió sus reflexiones hasta que dieran la respuesta correcta. Este proceso de razonamiento siempre se realizó en equipo o por todo el grupo en general. Durante la realización de este razonamiento y del proceso de contestación de los reactivos, se observó que dentro de cada equipo había un estudiante que fungía como "líder conceptual"; este estudiante era reconocido por sus compañeros como poseedor del conocimiento suficiente para solucionar los problemas presentados y su opinión prevalecía cuando los integrantes del equipo discutían cómo responder a las preguntas; este estudiante en el proceso de interacción, el "líder conceptual", no trataba de convencer a los demás con sus argumentos. Este fenómeno se debió a que estos estudiantes tenían casi tres años de ser compañeros de aula y reconocían mutuamente sus niveles de dominios conceptuales. En el equipo T_1, E_1 fungió como líder conceptual, mientras que en T_3 lo fue E_8; en las discusiones en T_2 ninguno de sus integrantes dominó. El hecho relevante de este fenómeno es que sólo las ideas de un estudiante prevalecían en T_1 y en T_3 y los demás contestaban de la manera en que él proponía; hubo una subordinación de ideas que limitó la expresión del pensamiento del resto de los estudiantes.

El concepto de frecuencia relativa resultó difícil para los estudiantes, a pesar de que fue objeto de la enseñanza en el curso. Inicialmente un estudiante aclaró para todo el grupo la diferencia entre frecuencia absoluta y frecuencia relativa, pero durante el desarrollo de la actividad los estudiantes se mostraron dubitativos respecto al concepto; incluso una estudiante no reparó en su confusión y terminó dando una respuesta incorrecta. La Figura 2 muestra el triángulo epistemológico para el concepto de frecuencia relativa.

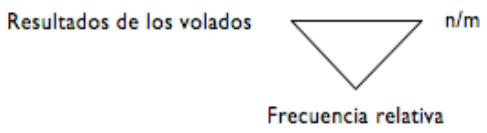


Figura 2: Triángulo epistemológico para el concepto de frecuencia relativa en el lanzamiento de volados.

Contestaciones a los reactivos

La Figura 3 presenta las contestaciones por reactivo clasificadas como correctas, incorrectas u omitidas. La Sección I corresponde a los reactivos a-h, los precedidos por la letra A son los de la segunda sección, por la letra B de la tercera y por la C de la cuarta.

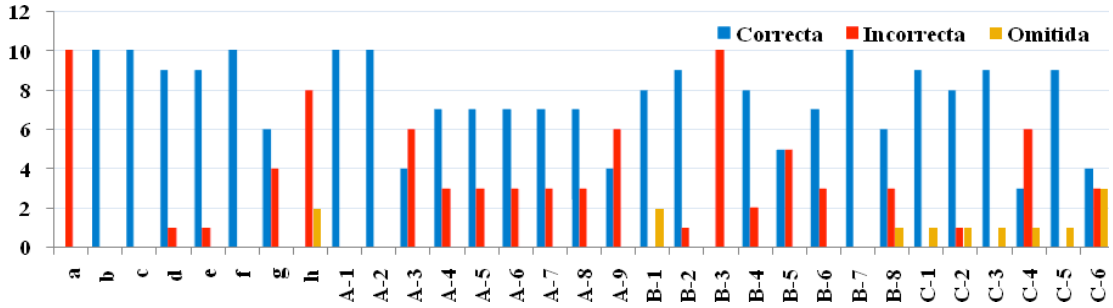
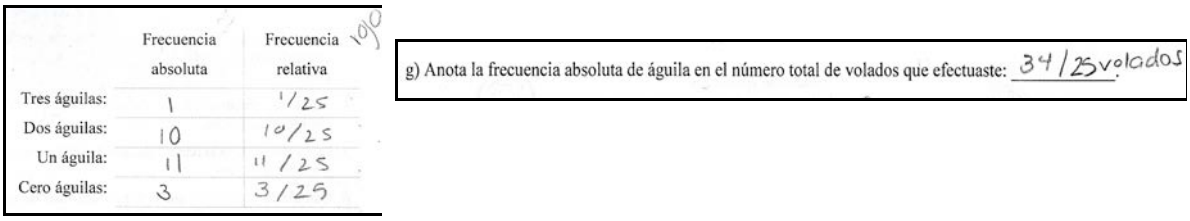


Figura 3. Clasificación de las respuestas por cada reactivo.

Sección I

El 68% de las respuestas fueron correctas. Todos los estudiantes confundieron el espacio muestra con el conjunto de valores que toma la variable aleatoria, aunque todos indicaron correctamente el espacio muestra correspondiente; para identificar el espacio muestra, sólo E_1 no recurrió al diagrama de árbol. Todos los estudiantes calcularon correctamente las frecuencias absoluta y relativa con que obtuvieron los valores de la variable aleatoria, pero sólo seis pudieron recuperar la frecuencia absoluta de águilas obtenidas en el total de volados; la Figura 4 muestra uno de estos casos.



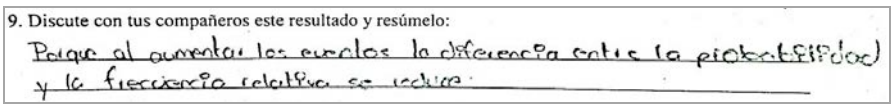
	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
Tres águilas:	1	1/25
Dos águilas:	10	10/25
Un águila:	11	11/25
Cero águilas:	3	3/25

g) Anota la frecuencia absoluta de águila en el número total de volados que efectuaste: 34/25 volados

Figura 4. Inicialmente E2 identifica la frecuencia absoluta y la relativa para cada uno de los valores de la variable aleatoria, pero al romper la agrupación de ternas no puede expresar correctamente el valor de la frecuencia absoluta de águilas en el total de volados.

Sección II

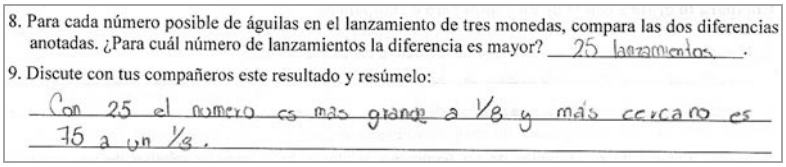
El 70% de las respuestas para esta sección fueron correctas. Ante la petición de comparar la desviación entre el valor teórico de la probabilidad y el valor de la frecuencia relativa de dos grupos de datos de diferente tamaño, E_1 señaló que a más repeticiones del fenómeno aleatorio la frecuencia relativa se acercaba a la probabilidad (véase la Figura 5).



9. Discute con tus compañeros este resultado y resúmelo:
Porque al aumentar los volados la diferencia entre la probabilidad y la frecuencia relativa se reduce.

Figura 5. Respuesta dada por E1 la que fue apropiada por todo el T1.

Después de un consenso, el equipo T_2 dio una conclusión similar (véase la Figura 6). La respuesta de estos tres estudiantes, en la que expresan de manera intuitiva la ley de los grandes números, resultó de una reflexión guiada por el investigador, en la que se hizo énfasis en observar la tendencia de la frecuencia relativa para un valor de la variable aleatoria al aumentar el número de ensayos; inicialmente este hecho les pasó desapercibido.


8. Para cada número posible de águilas en el lanzamiento de tres monedas, compara las dos diferencias anotadas. ¿Para cuál número de lanzamientos la diferencia es mayor? 25 lanzamientos.

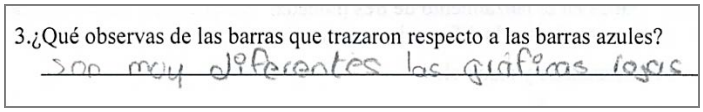
9. Discute con tus compañeros este resultado y resúmelo:

Con 25 el numero es mas grande a 1/8 y más cercano es 75 a un 1/8.

Figura 6. Respuesta dada por T2, con el consenso de sus tres integrantes.

Sección III

El 68% de las respuestas fueron correctas. Al trazar una gráfica de barras solicitada para comparar los valores de las frecuencias relativas y de la probabilidad, los estudiantes no avanzaron hacia la idea de la ley de los grandes números porque no se percataron de que las alturas de las barras de las frecuencias relativas del grupo con más datos están más próximas a la altura de la barra de la probabilidad; algunos ya habían expresado este hecho en lengua natural. E_3 dio una respuesta de naturaleza subjetiva al expresar que era grande la diferencia entre la representación gráfica de la probabilidad a priori y la frecuencia relativa de los valores de la variable aleatoria en 25 lanzamientos, pero no hizo referencia alguna a la frecuencia relativa en 100 lanzamientos; se puede interpretar esta omisión como que para E_3 fue obvio que la diferencia entre este segundo grupo de valores y el valor a priori era menor que la del primer grupo (véase la Figura 7).

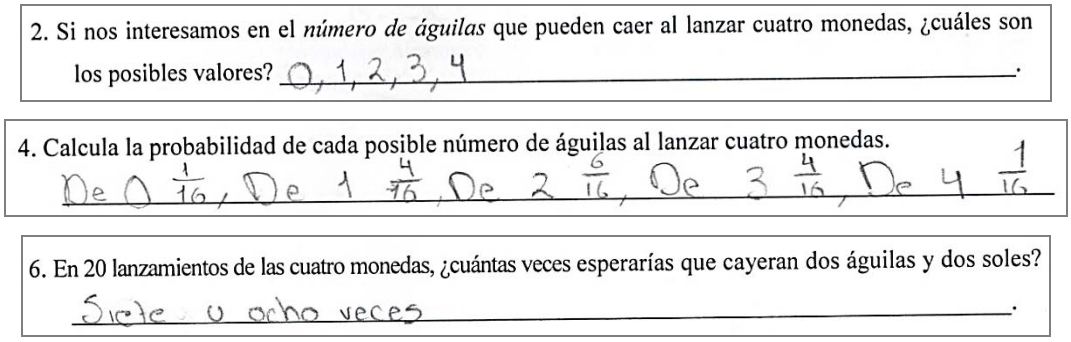

3.¿Qué observas de las barras que trazaron respecto a las barras azules?

son muy diferentes los gráficos rojos

Figura 7. Comparación de E3 de la gráfica de la frecuencia relativa de los dos grupos de datos.

Sección IV

En la última sección los estudiantes contestaron correctamente el 78% de los reactivos. Al igual que en el reactivo inicial, E_1 no utilizó un diagrama de árbol para calcular la cardinalidad del espacio muestra, tampoco E_7 lo utilizó, pero no hubo evidencia de su cálculo en ambos casos. Ocho estudiantes ahora sí pudieron identificar los valores de la variable aleatoria, aunque sólo tres indicaron su probabilidad y cuatro respondieron correctamente al resultado más probable para la combinación de dos águilas y dos soles en 20 lanzamientos de cuatro monedas.


2. Si nos interesamos en el *número de águilas* que pueden caer al lanzar cuatro monedas, ¿cuáles son los posibles valores? 0, 1, 2, 3, 4.

4. Calcula la probabilidad de cada posible número de águilas al lanzar cuatro monedas.
De 0 $\frac{1}{16}$, De 1 $\frac{4}{16}$, De 2 $\frac{6}{16}$, De 3 $\frac{4}{16}$, De 4 $\frac{1}{16}$

6. En 20 lanzamientos de las cuatro monedas, ¿cuántas veces esperarías que cayeran dos águilas y dos soles?
Siete o ocho veces.

Figura 8. Respuestas correctas de un estudiante a tres reactivos de la sección IV.

Conclusiones

Si bien las respuestas de los estudiantes en las hojas de control fueron correctas en su mayoría, en el desarrollo de la actividad mostraron sus dudas sobre los conceptos, a tan sólo tres semanas de haber recibido la enseñanza. De no tener el repaso de los temas en un corto periodo de tiempo durante su enseñanza superior, corren el riesgo de olvidar lo aprendido en el bachillerato, al igual que olvidaron lo de secundaria. El enfoque de probabilidad frecuencial no está incluido en el plan de estudios del bachillerato tecnológico, pero en extra-aula se le pudo agregar al conjunto de los temas prescritos (DEMS, 2009). Resultó ser insuficiente el tiempo asignado por la institución a la enseñanza de probabilidad, ya que los estudiantes no pudieron consolidar los temas enseñados.

Referencias bibliográficas

Bernoulli, J. (1713). *Ars Conjectandi*. Basilea: Impensis Thumisiorum, Fratrum.

Dirección de Educación Media Superior (DEMS). (2009). *Programa de Estudios de la Unidad de Aprendizaje: Probabilidad y Estadística*. México, D. F.: IPN.

Fischbein, E. (1977). Image and concept in learning mathematics. *Educational Studies of Mathematics*, 8, 153-165.

Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematics,* 6(2), 187-205.

Konold, C. (1991). Understanding Students' Beliefs About Probability. En E. von Glasersfeld (Ed). *Radical Constructivism in Mathematics Education* (pp. 139-156). Netherlands: Kluwer.

Steinbring, H. (1991). The Concept of Chance in Everyday Teaching: Aspects of a Social Epistemology of Mathematical Knowledge. *Educational Studies of Mathematics*, 22, 503-522.

ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN MEDIANTE SUS DIVERSAS REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS, A NIVEL LICENCIATURA

Marisol Radillo Enríquez y Lucía González Rendón
Departamento de Matemáticas, CUCEI, Universidad de Guadalajara. México
marisol.radillo@red.cucei.udg.mx, lgrendon2@yahoo.com.mx

Resumen. Se presentan los resultados preliminares de una investigación cuyo objetivo es analizar desde una perspectiva semiótica las dificultades que enfrentan los estudiantes ante el concepto de límite y diseñar un alternativa didáctica con apoyo en recursos de visualización que permitan al estudiante de Cálculo, por ejemplo, vincular la representación algebraica del límite de una función con su representaciones gráfica y numérica (tabular). La prueba piloto arrojó resultados favorables en el manejo de las distintas representaciones de funciones y límites, aunque aún es necesario llevar a cabo la experimentación completa con sus respectivos análisis cuantitativo y cualitativo.
Palabras clave: semiótica, enseñanza del cálculo, límite
Abstract. On present the preliminary results of an investigation whose aim is to analyze from a semiotic perspective the difficulties faced by the students to the concept of limit and designing an alternative didactics based on resources of visualization that allow students of calculation, for example, to relate the algebraic representation of the limit of a function with its representations graphical and numerical. A preliminary test of the material has showed favorable results in the management of the different representations of functions and limits, although it is still necessary to carry out the full experimentation and their respective quantitative and qualitative analysis.
Key words: semiotic, teaching of calculus, limit

Introducción

La enseñanza tradicional en los cursos de Cálculo se centra en prácticas algorítmicas y algebraicas (Salinas y Alanís, 2009), las cuales a su vez son el centro de la evaluación. En consecuencia, "la mayoría de los estudiantes piensan que la manera más segura para tratar satisfactoriamente con este dominio no es tratar de comprender, sino sólo funcionar mecánicamente" (Artigue, en Salinas y Alanís, 2009). Esta práctica se basa en la creencia generalizada de que el conocimiento matemático ya está "dado" y los profesores solamente deben "mostrarlo" a los estudiantes, por lo que la enseñanza de la materia se identifica con la enseñanza de técnicas algorítmicas para resolver problemas.

No obstante, los conocimientos así adquiridos se olvidan fácilmente y solo pueden ser utilizados en condiciones muy similares a las que fueron recibidos (Cantoral, Farfán, Cordero, Alanís, Rodríguez y Garza, 2000), como es el caso de los cursos de Cálculo Diferencial e Integral del Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías (CUCEI) de la Universidad de Guadalajara, México, pues la enseñanza recae en la explicación del profesor y se centra en la manipulación algebraica de diversos ejemplos y ejercicios.

La situación se agrava debido a que el sistema de evaluación de los alumnos en el Departamento de Matemáticas del CUCEI establece que el 60% de la calificación final corresponde al promedio de dos exámenes departamentales que se aplican simultáneamente a los aproximadamente 2300

estudiantes que cursan la materia cada semestre, en las fechas previstas para cada caso. Los reactivos de dichos exámenes se centran en ejercicios explícitos de límites, derivadas y/o integrales, pero no se incluyen situaciones en las que se requiera dar un sentido más amplio a las nociones matemáticas y reconocer, por ejemplo, cuándo es necesario calcular una derivada, o qué significado tiene la integral en un contexto determinado. Por lo tanto, la presión sobre profesores y estudiantes consiste en aprobar los exámenes, más que en aprender la materia de manera significativa.

La búsqueda de alternativas para mejorar la situación de enseñanza del Cálculo Diferencial parte de la premisa de que, para aprender un objeto matemático es necesario conocer sus diversas representaciones semióticas, así como las traducciones entre ellas (Duval, 2006).

Soporte teórico

Se considera la comprensión como un proceso mental que involucra el desarrollo de una variedad de representaciones internas apropiadas junto con las relaciones funcionales entre ellas, de tal forma que se puedan producir representaciones externas adecuadas para la resolución de tareas que involucren a dicho objeto de manera determinante (Font, 2007). A su vez, cada una de los formas de representación, junto con las normas que las rigen, propone una caracterización distinta del correspondiente concepto, por lo que se recomienda diferenciar varias representaciones en cada concepto.

En el caso del concepto del límite de una función, las principales formas de representación son la numérica o tabular, la geométrica o gráfica, la analítica o algebraica y la verbal (Duval, 1998; Blázquez y Ortega, 2001). Con la secuencia propuesta se pretende superar algunas de las dificultades para la enseñanza y aprendizaje, del límite, tales como el sentido del término en el lenguaje cotidiano, la sobregeneralización de las propiedades de procesos finitos a procesos infinitos, e incluso aquellas dificultades generadas por los términos y símbolos involucrados en la definición formal (Artigue, 1998; Jiménez, Mejía, Viveros y Castillo, 2006).

Metodología

La base del trabajo es el programa vigente de Cálculo Diferencial e Integral del CUCEI, en particular la unidad II (Límites y Continuidad de Funciones). Se hizo una investigación documental sobre la enseñanza de límites de funciones de una variable mediante sus diversas formas de representación. Posteriormente se diseñó una secuencia didáctica que contiene los contenidos teóricos necesarios y actividades que los involucren para el logro de los objetivos del programa de la materia.

Antes de comenzar el tema de límite se plantean una serie de actividades iniciales que involucran las representaciones gráfica, numérica y algebraica de tres funciones que coinciden en todos sus puntos, excepto en *x=1*: $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, $g(x) = x + 1$, $h(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases}$

Las actividades 1, 2 y 4están dirigidas a que el estudiante se familiarice con las representaciones algebraica y gráfica estas tres funciones para posteriormente introducir la noción informal del límite de una función en un punto dado, ya que al analizar cada caso se puede notar que la existencia del límite no depende de si la función está o no definida en el valor dado. La tabulación de valores que se pide en la actividad 3 corresponde a la representación numérica o tabular de la función *f(x)* pero a la vez dicha tabulación se puede "leer" interpretar como un límite, una vez que se haya introducido la definición correspondiente (figura 1).

La actividad 5 puede parecer diferente de las anteriores, pero si el resultado se analiza y contrasta con las representaciones gráfica y algebraica de las funciones que se denominaron *f* y *g*, es posible mostrar al estudiante que una aplicación del teorema "*Sea* ***c*** *un número real y* ***f(x)= g(x)*** *para toda* ***c*** *≠ 0, en un intervalo abierto que contiene a* ***c****. Si el límite de* ***g(x)*** *cuando* ***x*** → ***c*** *existe, entonces también existe el límite de* ***f(x)*** *cuando* ***x*** → ***c*** *y además* $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x)$", que permite determinar el límite de una función racional en un valor *x* = *c* en el cual, por sustitución directa se obtiene la indeterminación 0/0

Apellidos y Nombre(s) _____ Fecha: _____

Actividades iniciales:

1. Determina el dominio de las siguientes funciones:

$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ $\qquad$ $g(x) = x + 1$ $\qquad$ $h(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases}$

Dominio: $\qquad$ Dominio: $\qquad$ Dominio:

2. Evalúa cada una de las anteriores funciones en el valor indicado:

$f(1) =$ $\qquad$ $g(1) =$ $\qquad$ $h(1) =$

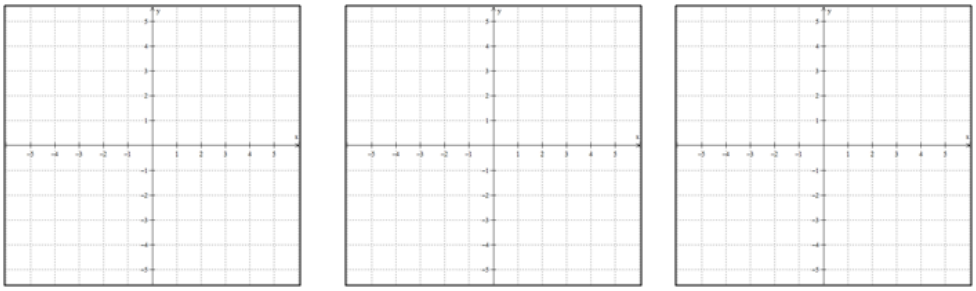
3. Completa las siguientes tabulaciones, para valores cercanos a 1, considerando $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$

x	0	0.5	0.6	0.8	0.9	0.99	1
$f(x)$							Indeterminado

x	1	1.0001	1.01	1.1	1.3	1.5	2
$f(x)$	Indeterminado						

- Si los valores de x son cercanos a 1, pero menores que 1, es decir "desde la izquierda" en la recta numérica ¿a cuál valor se acerca $f(x)$?
- Si los valores de x son cercanos a 1, pero mayores que 1, es decir "desde la derecha" en la recta numérica ¿a cuál valor se acerca $f(x)$?

4. Grafica cada una de las tres funciones dadas:



5. Factoriza y simplifica la expresión algebraica $\frac{x^2-1}{x-1}$

6. Completa la siguiente tabulación para la función $y = \begin{cases} x+2, & x \leq 5 \\ -x+10, & x > 5 \end{cases}$

x	4.5	4.9	4.99		5.001	5.1	5.5
$f(x)$							

Figura 1. Actividades previas al tema de límites

Finalmente, en la actividad 6 se pide tabular los valores de una función definida a trozos, cuando *x* tiende a 5, aunque en esta ocasión los valores de *y* no convergen. Posteriormente se abordará el hecho de que si los límites laterales de una función cuando *x* → *c* son diferentes, entonces el límite bilateral no existe.

Después de las actividades iniciales, se inicia formalmente el tema de límites con el análisis del comportamiento de un función cuando *x* tiende a un valor dado. Se proporcionan dos casos: uno con una función polinomial, cuyo límite puede determinarse por sustitución directa, y otro con la función $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ que fue analizada previamente.

En ambos casos el estudiante debe analizar las representaciones gráfica, analítica y numérica (tabular) de las funciones involucradas, al tiempo que se introducen los términos técnicos "*x tiende a*" y "*límite*", correspondientes a la representación verbal. La tabulación se utilizará posteriormente para ilustrar los límites laterales

2. ¿Cómo se comporta la función: $y = f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ cuando los valores de x se aproximan a 1?

Se sabe que la función está definida para todos los números reales, *excepto* para $x = 1$, pues $f(1) = \frac{1^2-1}{1-1} = \frac{0}{0}$, pero ¿se aproxima f a algún valor específico cuando x se aproxima mucho a 1?

Al graficar esta función, se observa un "vacío" en $x = 1$, ya que *f(1)* está indeterminada.

Dominio (-∞, 1), (1, ∞)

Imagen (-∞, 2) ∪ (2, ∞)

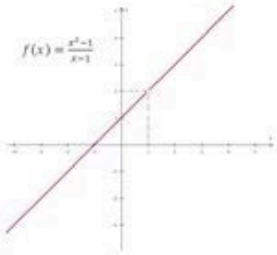


Figura 2.2 Gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$

Aunque esta función no está definida para $x = 1$, es posible tomar un valor tan cercano a 1 como se quiera, pero *sin llegar a ser igual a 1*. A esto se le llama "*x tiende a 1*"

x tiende a 1 desde la izquierda → ← *x tiende a 1 desde la derecha*

x	0	0.5	0.6	0.8	0.9	0.99	1	1.0001	1.01	1.1	1.3	1.5	2
$f(x)$	1	1.5	1.6	1.8	1.9	1.99	Indeter-minado	2.0001	2.01	2.1	2.3	2.5	3

Figura 2.2 Tabulación de la función $y = f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ *para valores cercanos a x=1*

Tanto en la gráfica como en la tabulación, se aprecia que si el valor de "x" se aproxima a 1, ya sea desde valores menores a uno (desde la izquierda de la gráfica) como desde los valores mayores que uno (desde la derecha de la gráfica), se tiene que el valor de "y" se aproxima a 2. Entonces, se dice que ***el límite de esta función, cuando "x" tiende a 1 es igual a 2*** y en notación matemática se escribe de las siguientes maneras:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2 \quad \text{ó} \quad \lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

Nota: x nunca puede tomar el valor de 1, pues $f(1) = indeterminada$

Figura 2. Introducción al límite de una función.

El resto del capítulo de límites incluye propiedades de los límites, cálculo de límites a partir de gráficas, límites indeterminados, límites infinitos y al infinito. En todos los casos se utilizan diversas representaciones semióticas, a sabiendas de que cada forma de representación semiótica enfatiza más algunos rasgos del objeto matemático. Por ejemplo, para comprender los límites al infinito las representaciones gráficas no son suficientes, ya que aún con el apoyo de la computadora no es posible captar detalladamente el comportamiento de las funciones; para estos casos el complemento ideal son las representaciones numéricas (tabulaciones).

Ejemplo: Cuando x crece, $f(x)$ se acerca cada vez más a 1, entonces $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$

x	$f(x)$
0	-1
± 1	0
± 5	0.923077
± 50	0.999200
± 100	0.999800

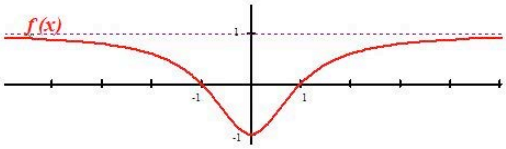


Figura 2.9. Límites al infinito de f(x)

En la misma función, se aprecia que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$

La recta $y = L$ es una asíntota horizontal de la gráfica de $f(x)$ si:

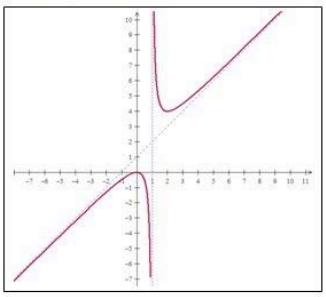
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \quad ó \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

Figura 3. Límites al infinito: representaciones gráfica y numérica (tabular)

Algunas actividades para los estudiantes se muestran en la figura 4, en las que se pide (2) leer en la gráfica valores determinados de la función, límites infinitos y/o al infinito, mientras que en otra actividad es necesario esbozar la gráfica de una función a partir de datos en forma de límites y valores determinados

2. La gráfica de $g(x)$ se muestra en la figura, determina:

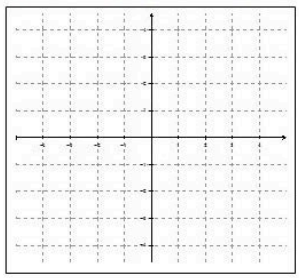
$g(0) =$
$g(1) =$
$g(2) =$
$\lim_{x\to 1^-} g(x) =$
$\lim_{x\to 1^+} g(x) =$
$\lim_{x\to\infty} g(x) =$
$\lim_{x\to-\infty} g(x) =$



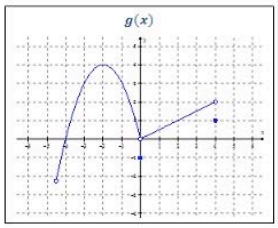
Anota todas las asíntotas de esta función:

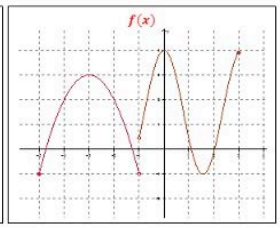
3. Construye la gráfica de la función $h(x)$ que cumpla con las siguientes condiciones:

$h(0) = 3$
$h(-2) = 2/3$
$h(2) = 2/3$
$\lim_{x\to\infty} h(x) = 0$
$\lim_{x\to-\infty} h(x) = 0$



5. Las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ se muestran en la figura, determina:





$\lim_{x\to-4} f(x) =$ $\quad \lim_{x\to 1^-} f(x) =$ $\quad \lim_{x\to 0} g(x) =$

$\lim_{x\to-3} [f(x)+g(x)] =$ $\quad \lim_{x\to-3} [f(x)\cdot g(x)] =$ $\quad \lim_{x\to-3} \frac{f(x)}{g(x)} =$

¿Por qué $\lim_{x\to 1} f(x)$ no existe?

Análisis de resultados

Los principales errores encontrados en las actividades iniciales se relacionan con determinar el dominio de la función definida a trozos en la pregunta 1 y tampoco contestaron correctamente el valor $h(1)$ de la pregunta 2, pero realizaron correctamente la tabulación de la otra función a trozos de la pregunta 6.

En la pregunta 3, se encontró que varios estudiantes contestaron de la siguiente manera:

- Si los valores de *x* son cercanos a 1, pero menores que 1, es decir "desde la izquierda" en la recta numérica ¿a cuál valor se acerca *f(x)*? Respuesta: 1.99
- Si los valores de *x* son cercanos a 1, pero mayores que 1, es decir "desde la derecha" en la recta numérica ¿a cuál valor se acerca *f(x)*? Respuesta: 2.0001

De estas respuestas se infiere que los estudiantes, antes de cursar el tema de límites, no

fueron capaces de identificar que ambos acercamientos de *x* a 1 conducen a un mismo número, el cual posteriormente será identificado como el límite de la función. Es posible que esta imprecisión se relacione con la representación numérica del límite, pero para afirmarlo sería necesario implementar otros instrumentos de recolección de información, como entrevista clínica.

La pregunta 4 (gráficas de las tres funciones iniciales) fue la que menos aciertos registró. En algunas de las respuestas se observó que los estudiantes graficaron las funciones como si fueran intervalos cerrados, ya que no prolongaron las líneas (figura 5). Hubo quienes graficaron curvas, en lugar de las rectas que corresponden a las funciones dadas (figura 6). De aquí se concluye que es necesario trabajar con mayor detalle el proceso de traducción de la representación numérica a la gráfica para que los estudiantes aprecien el carácter continuo de la función, ya que ésta es una noción central del cálculo infinitesimal.

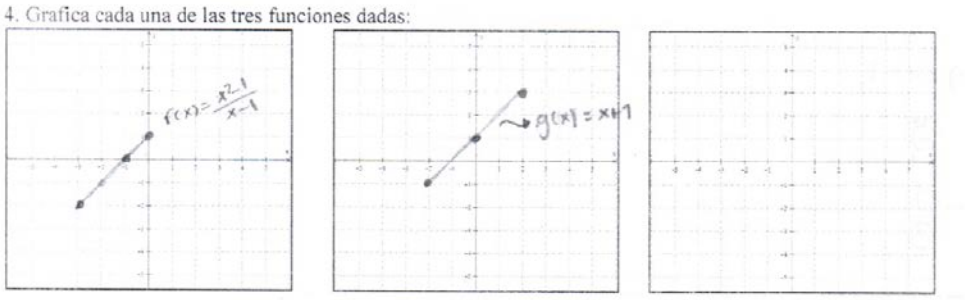


Figura 5. Respuesta del estudiante #5 a las gráficas de las funciones. No prolonga las rectas a pesar de tener las expresiones algebraicas de las funciones

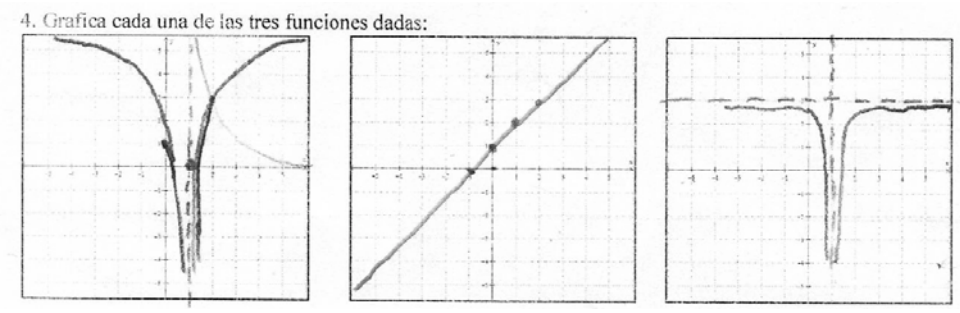


Figura 6. Respuesta del estudiante # 23 a las gráficas de tres funciones.

En cuanto a las actividades de límites que se llevaron a cabo después de dos semanas de clases (figura 4) se encontró que 38 de 42 estudiantes logran construir adecuadamente las gráficas a partir de valores concretos y límites al infinito (asíntotas horizontales (problema 3, figura 4), aunque tienen dificultades para "leer" el mismo tipo de datos en la gráfica (problema 2, figura 4) donde solo 7 estudiantes contestaron todas las preguntas acertadamente. Se detectó que los estudiantes usan indistintamente los términos "no existe" e "indeterminado" y los aplican erróneamente tanto en valores de funciones como en límites; 5 alumnos reportaron como resultado de un límite la ecuación de la asíntota, en vez de la respuesta esperada "no existe".

No hubo mayores dificultades en aplicar las propiedades de los límites a las gráficas de dos funciones (problema 5, figura 4).

Conclusiones

Si bien los resultados de la prueba piloto de los materiales instruccionales son alentadores, aún es necesario llevar a cabo la experimentación en las condiciones adecuadas para poder obtener inferencias científicamente válidas sobre la eficacia de la propuesta.

Durante esta etapa de la investigación se pone de manifiesto la necesidad de implementar actividades con apoyo de la computadora o calculadora graficadora para que los estudiantes tengan mayor libertad para explorar las funciones y sus límites.

Otro punto que debe fortalecerse es la argumentación de las respuestas que logra cada estudiante, para que éste logre un mejor dominio los diversos registros del lenguaje matemático.

A partir de los resultados parciales que se reportan, se optimizará la propuesta de enseñanza para el tema de límite de una función, con un mayor énfasis en los procesos de traducción entre las representaciones numérica y gráfica de las funciones, para evitar que las interpretaciones erróneas o incompletas distorsionen la construcción de significado del límite de la función.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 1(1),* 40-55

Blázquez, S., Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. En G. Beitía (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, (14),* 219-236. México: Grupo Editorial Iberoamericana

Cantoral, R., Farfán, R. M., Cordero, F., Alanís, J. A., Rodríguez, R. A. y Garza, A. (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Trillas.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 6,* 103-131.

Font, V. (2007). Comprensión y contexto. Una mirada desde la Didáctica de las Matemáticas. *La Gaceta de la RSME, 10(2),* 419-434.

Jiménez, M. P., Mejía, H. R., Viveros, K. y Castillo, G. (2006). Análisis de una propuesta de enseñanza-aprendizaje del concepto de límite de una función. Recuperdo el 6 de enero de 2009 en: http://hdl.handle.net/123456789/505

Salinas, P. y Alanís, J. A. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 12(3),* 355-3

CRIAÇÃO DE TAREFAS EDUCACIONAIS PARA O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE ÁREA E PERÍMETRO

Marcílio Dias Henriques, Leandro Gonçalves dos Santos, Meiriele Nonato de Oliveira, Roberta Gualberto Ferreira y Theysmara Menon
Instituto Estadual de Educação Juiz de Fora y Universidade Federal de Juiz de Fora. Brasil
mdhenriques@oi.com.br, glauker.amorim@gmail.com, leandrogsantos007@yahoo.com.br, meirinonato@yahoo.com.br, roberta_gualberto@yahoo.com.br, theysmara@hotmail.com

Resumen. O presente artigo é referente à oficina apresentada na 27ª RELME, através da qual trazemos informações sobre o que nossas pesquisas e nossa vivência no interior do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência da Área de Matemática, realizado pela Universidade Federal de Juiz de Fora (Brasil), têm indicado acerca da maneira como alunos do Ensino Fundamental produzem significado para elementos da Matemática escolar. Discutimos, ainda, como desenvolver tarefas educacionais, em diferentes ambientes (como o *software* Geogebra), de modo que nos permita identificar dificuldades de aprendizagem discentes e intervir nos processos cognitivos dos estudantes. Além disso, a abordagem que propomos discute as potencialidades do Modelo dos Campos Semânticos em auxiliar o trabalho docente.
Palabras clave: área e perímetro, criação de tarefas, produção de significados

Abstract. This article is regarding the workshop presented at the 27th RELME, through which we bring information about our research and our experience within the Institutional Scholarship Program of Initiation to Teaching (PIBID, in Portuguese) in the area of Mathematics, conducted by the Federal University of Juiz de Fora (Brazil), have indicated about how elementary school students to produce meaning elements of school mathematics. We discuss also how to develop educational tasks in different environments (such as Geogebra software), so that we can identify students' learning difficulties and intervene in the cognitive processes of students. Moreover, the approach we propose discusses the potential of the Model of Semantic Fields to assist the teaching work.
Key words: area and perimeter, task design, meaning production

Introdução

Neste trabalho, apresentamos uma das ações que desenvolvemos no interior do Projeto PIBID/UFJF/Matemática – Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) da Área de Matemática, do Ministério da Educação (ME-Brasil) e da Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), encampado pela Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF) – cujas ações têm sido desenvolvidas em uma escola pública estadual da cidade de Juiz de Fora, Minas gerais, Brasil. Entre essas ações, realizamos uma atividade de intervenção didática, na forma de um minicurso, ligada à aprendizagem de geometria plana e utilizando fichas de trabalho impressas e também o software Geogebra, e para esta atividade criamos uma interface com a pesquisa em Educação Geométrica. Segundo a Portaria Normativa nº. 38, de 12 de dezembro de 2007 (Brasil, 2007, p.39), o PIBID tem, dentre outros, por objetivo a "(...) valorização do espaço da escola pública como campo de experiência para a construção do conhecimento na formação de professores para a educação básica". E entendemos que tal interface favorece a formação inicial do futuro professor de Matemática.

Através deste minicurso, discutimos dificuldades de aprendizagem de área e perímetro, apresentadas por estudantes do Ensino Médio, quando resolviam uma pequena série de tarefas que nos possibilitasse identificar a produção de significados dos estudantes para as noções de perímetro e área. Estas tarefas foram elaboradas como uma série de fichas de trabalho impressas e também como aplicativos do software Geogebra, tendo como aportes teóricos o Modelo dos Campos Semânticos (Lins, 1993, 1999) e os trabalhos de Vygotsky (1993) e de Miskulin (1999). A aplicação das tarefas foram videografadas e os aplicativos salvos pelos alunos, ao final de cada tarefa executada. Estes registros nos permitiram identificar a produção de significados dos alunos, através do Método de Leitura Plausível (Silva, 2003). Utilizando uma abordagem qualitativa de pesquisa, o nosso estudo, ainda em desenvolvimento, já pôde identificar dificuldades dos estudantes, já observadas em estudos anteriores (French, 2004; Baldini, 2004; Henriques e Silva, 2012), mas também nos tem permitido investigar possibilidades novas de intervenção orientada, envolvendo a aprendizagem de área e perímetro através de novas tecnologias educacionais.

Para aproximar o leitor da questão central de nosso trabalho neste minicurso, vamos levantar alguns aspectos relacionados à gênese de nosso interesse em estudar caminhos para tratar as dificuldades de aprendizagem da Geometria Escolar. E esta gênese está localizada tanto nas dificuldades (discentes e docentes) que observamos em nossas salas de aula, quanto nos fatos apontados pelas pesquisas sobre deste tema.

Produção de significados: uma nova perspectiva para *ler* as dificuldades

Discutiremos agora, brevemente, algumas noções-categorias tratadas no Modelo dos Campos Semânticos (MCS), como *significado*, *produção de significado*, dificuldades, *processo comunicativo* e *processos de ensino e de aprendizagem*. Pois, como já dissemos, é este o modelo teórico e epistemológico que fundamentou todos os nossos estudos precedentes. Tais aportes ou noções-categorias são encontrados em Lins (1993, 1999, 2001 e 2004) e Lins e Gimenez (1997).

Conforme podemos entender, de acordo com o MCS, a noção de *significado* proposta por Lins (2001) é a de um conjunto de coisas que se diz a respeito de um objeto. Esta noção se refere não ao que um sujeito poderia dizer, mas ao que ele *efetivamente* diz sobre um objeto, no interior de uma *atividade* – para este termo, tomamos a acepção de Leontiev (2006).

Assim, a noção de produção de significados, proposta por Lins (1999, 2001), permite-nos afirmar que, se um sujeito produziu significados, ele produziu ações enunciativas (falas, escritas, desenhos, gestos, etc.) a respeito de um objeto, no interior de uma atividade.

Para exemplificar a noção de produção de significados, apresentamos uma situação ficcional de sala de aula, criada por Lins (1993), na qual a professora propõe aos alunos que resolvam a

equação do tipo 3x + 10 = 100. Ao perguntar a Daniel como ele resolveu, observamos a sua produção de significados: "Ora professora de um lado tem 3x + 10 e do outro tem 100, então tá equilibrado. Se eu tirar 10 quilos de cada lado, continua equilibrado. Daí, eu fico com 3x = 90 e se eu divido 90 quilos em 3 partes eu fico com x igual a 30 quilos." (Silva, 2003).

Para Daniel o sinal de igual "=" significa "tá equilibrado", porquanto percebemos que Daniel produz significados para a equação pensando em uma "balança de dois pratos". Esse modo de produzir significados é legítimo, mas poderá provocar dificuldades posteriores a Daniel, por exemplo quando ele tentar resolver outro tipo de equação, como esta: 3x + 100 = 10. (Silva, 2003).

O processo de produção de significados é um fenômeno complexo, que envolve certa atividade, significados que em seu interior são produzidos, o possível processo de transformação dos núcleos e as consequentes rupturas em busca de novos modos de produção de significados. E relaciona-se, ainda, com o papel das intervenções do professor das interações dos alunos, como interlocutores uns dos outros, além dos interlocutores não-presentes, a existência de certos modos de produção de significados que os educadores gostariam que os alunos dominassem e, for fim, a existência de certas afirmações que os alunos assumem como corretas.

A análise da produção de significados, para Lins e Gimenez (1997) fornece uma maneira de o professor interagir com seus alunos, permitindo-lhe uma leitura plausível do que os alunos estão dizendo e fazendo. A proposta de trabalho de Lins e Gimenez (1997) se baseia em significados, e não em conteúdos. A partir dessa proposta, podemos explorar certos aspectos cognitivos, introduzir novas metodologias e, com base na própria prática docente, buscar meios de tornar os instrumentos de desenvolvimento cognitivo mais seguros e familiares para os alunos.

Em relação às dificuldades de aprendizagem, Lins (1993) faz uma nova categorização, ao afirmar que dificuldade deve ser entendida de duas maneiras excludentes: ou ela caracteriza-se como um *obstáculo* ou como um *limite epistemológico*. Quando dentro de um campo semântico, um aluno poderia produzir significado para uma afirmação, mas não produz, chamamos obstáculo epistemológico. Em contrapartida, se houver a impossibilidade de se produzir significado para uma afirmação dentro de um determinado campo semântico, chamamos limite epistemológico.

Acerca dos processos de aprendizagem e de ensino, afirmou Lins (2001, p. 45): "se aprendizagem é entendida – corretamente, eu penso – como aprender a produzir significado, ensinar deve também apontar para uma discussão explícita dos limites criados nesse processo". E, desta forma, o MCS abre tal discussão, isto é, permite que sejam tratadas as dificuldades de aprendizagem que os alunos apresentem.

Nossa perspectiva não quer privilegiar, em momento algum, esse ou aquele modo de produção de significados. Pelo contrário, ela objetiva expandir sempre as possibilidades de surgimento de distintos conhecimentos sobre um mesmo tema, e do desenvolvimento de modos de leitura destes conhecimentos dos sujeitos pelos professores, no momento em que as produções ocorrem, permitindo intervenções didáticas *ao vivo*, ou seja, quando surjam as dificuldades que demandam tais intervenções.

O método criado a partir das noções-categorias do MCS e que nos possibilita uma leitura das produções de significados dos alunos, no momento em que elas ocorrem, foi descrito por Silva (2003) e denominado *Método de Leitura Plausível*. Este nos possibilita identificar os significados que são produzidos por sujeitos humanos, a partir da análise dos resíduos de suas ações enunciativas. Podemos sintetizar o Método de Leitura Plausível através da observação dos elementos envolvidos no processo de produção de significados, que são os seguintes:

i) A constituição de objetos – coisas sobre as quais sabemos dizer algo e dizemos – que nos permite observar tanto os novos objetos que estão sendo constituídos quanto os significados produzidos para esses objetos;

ii) A formação de um núcleo (as estipulações locais, as operações e sua lógica);

iii) A produção de conhecimento – que discutida anteriormente;

iv) Os interlocutores – também apresentado anteriormente, quando discutimos o processo comunicativo, a partir dos aportes do MCS;

v) As legitimidades, isto é, o que é legítimo ou não dizer no interior de uma atividade.

Além de nos permitir uma leitura do outro através de suas legitimidades, e não uma *leitura pela falta*, como acontece nas teorias piagetianas e no *ensino tradicional vigente* (ver Baldino, 1998), a importância desse método reside no fato de nos possibilitar a interação com os sujeitos, de modo que consigamos intervir intencionalmente em sua produção de significados.

A partir destas noções trazidas pelo MCS, passaremos, na próxima seção, a tratar das tarefas que elaboramos e testamos nas ações de intervenção didática e investigativas no PIBID/CAPES/UFJF, além de levantar as características e os objetivos de tais tarefas, que discutiremos mais amiúde em nosso minicurso na XI Encontro Nacional de Educação Matemática, na cidade de Curitiba.

As tarefas e suas Características

Com base nas perspectivas que assumimos, procedemos à elaboração das tarefas a serem aplicadas nas pesquisas de campo empreendidas naqueles estudos, cujo objetivo comum foi

produzir um conjunto de tarefas, orientadas por objetivos e pressupostos teóricos bem definidos, um conjunto que nos permitisse identificar as possíveis dificuldades discentes sobre os elementos das tarefas. Em termos mais particulares, estas tarefas devem conter questões que tragam à tona dificuldades dos sujeitos de pesquisa, envolvendo noções geométricas.

De uma forma mais abrangente, uma boa tarefa deveria permitir ao professor e ao pesquisador: *a)* observar a multiplicidade dos significados produzidos pelos alunos, para os elementos constituintes das tarefas; *b)* explicitar o fato de que os significados produzidos pelos estudantes, pelo professor ou pelos autores de livros didáticos são alguns entre outros tantos significados que podem ser produzidos a partir daquelas tarefas; *c)* dar o mesmo tratamento a significados matemáticos e a significados não-matemáticos que surjam no contexto das tarefas, sem juízo de valor.

Na prática, não nos preocupamos com o ineditismo das tarefas que propusemos nos trabalhos de campo dos estudos que desenvolvemos, as quais entendemos por *resíduos de enunciação* (Lins, 2001), pois a produção de significados dos sujeitos de pesquisa, para os elementos de tais tarefas, é o nosso foco de atenção. A partir dos aportes do Modelo dos Campos Semânticos (MCS), consideramos que cada tarefa proposta, com seu enunciado e seus possíveis suportes, deva possuir duas características indispensáveis para lograrmos os objetivos que assumimos: deve ser *familiar* e, ao mesmo tempo, *não-usual* (Silva, 2003).

Outro aspecto que levamos em conta, na elaboração das tarefas e questões a serem aplicadas, diz respeito à sua legitimidade de tais tarefas. Uma questão proposta, que para nós, pesquisadores, é avaliada como interessante, pode também ser considerada sem valor (e, portanto, ilegítima), de acordo com a perspectiva de um matemático. Isto é possível justamente pela diferença de objetivos. O nosso objetivo na elaboração e na proposição das tarefas – reafirmamos – será o de estimular os diversos modos de produção de significados para elementos matemáticos envolvidos em tais tarefas, que se constituirão ou não em objetos no interior de certa atividade.

Na elaboração das tarefas, temos ainda o objetivo de investigar o próprio processo de produção de tarefas que possuam algumas características gerais, tais como:

i) Que estimulem a produção de significados dos alunos;

ii) Que ampliem as possibilidades discentes de desenvolver e utilizar estratégias de resolução das tarefas;

iii) Que possibilitem que vários elementos do pensar matematicamente estejam em discussão, como a análise da razoabilidade dos resultados, a busca de padrões nas resoluções, o desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas, etc.

A opção de trabalhar também com tarefas em forma de aplicativos de um *software* de geometria dinâmica (o Geogebra) se sustenta na flexibilidade de proporcionada por tal *software*, em relação às possíveis justificativas geométricas dos alunos e suas alterações progressivas ou recursivas (Miskulin, 1999), e também a facilidade com que os jovens se apropriam dos instrumentos tecnológicos contemporâneos, para a execução de dada atividade.

Por falta de maior espaço, apresentamos, a seguir, apenas duas das tarefas que elaboramos no PIBID/UFJF e discutimos em nossa oficina na 27ª RELME.

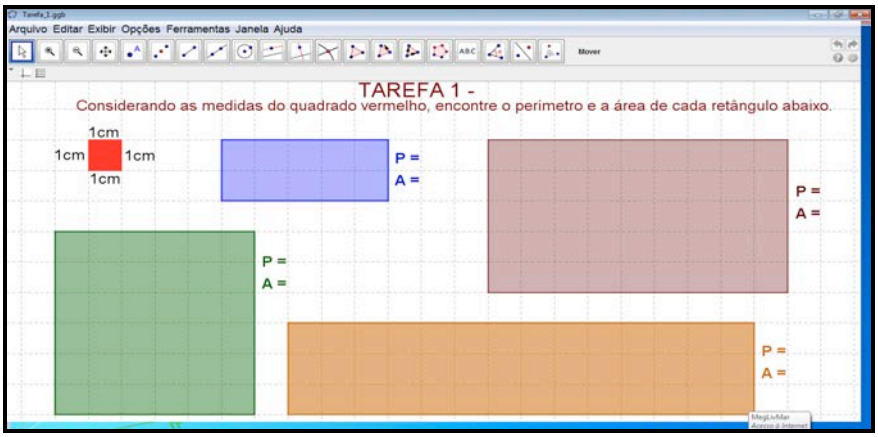


Figura 1: Tarefa geométrica elaborada no *software* Geogebra.

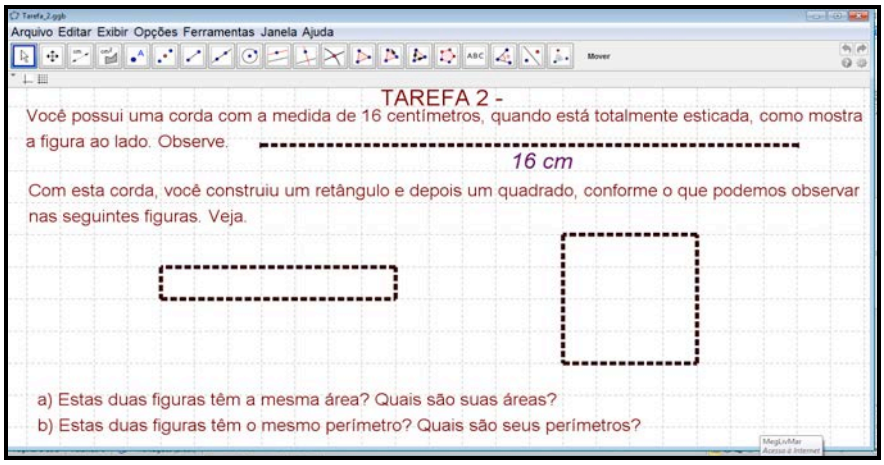


Figura 2: Tarefa geométrica elaborada no software Geogebra.

Considerações Finais

Entendemos que a ação de levantar tais dificuldades, a partir de uma série de tarefas elaboradas com este propósito, é um elemento-chave para que orientemos o nosso trabalho, em sala de

aula, de modo coerente com os pressupostos do Modelo dos Campos Semânticos (MCS), que nos oferece uma perspectiva nova para compreendermos os processos de aprendizagem de temas geométricos da Educação Básica.

O presente artigo corrobora, ainda, o nosso posicionamento em relação à questão curricular, quando afirmamos que *objetivos devem orientar conteúdos e métodos*. É isto que tínhamos em mente ao elegermos os objetivos a partir dos quais os conjuntos de tarefas (e também cada tarefa) seriam elaborados. E, aplicadas as tarefas, pudemos identificar elementos da produção de significados dos sujeitos de pesquisa que ajudariam a redefinir as noções e os conteúdos a serem tratados em cada tarefa – de uma nova elaboração – e também o modo com o qual seriam tratados e *trabalhados* pelo professor, em sala de aula ou no laboratório de informática.

Referências bibliográficas

Baldini, L. A. F. (2004). *Construção do conceito de área e perímetro: uma sequência didática com o auxílio do software de Geometria dinâmica.* Londrina, Brasil: Universidade Estadual de Londrina.

Baldino, R. R. (1998). Assimilação Solidária: escola, mais-valia e consciência cínica. *Educação em Foco,* 3 (1), 39-65.

Brasil. Portaria Normativa n°. 38, de 12 de dezembro de 2007**.** Dispõe sobre o Programa de Bolsa Institucional de Iniciação à Docência - PIBID. *Diário Oficial da República Federativa do Brasil.* Brasília, DF, 13 dez.2007. Seção1, p. 39.

Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.* (Terceiro e Quarto Ciclos). Brasília: MEC/SEF.

French, D. (2004). *Teaching and learning geometry.* London: Continuum.

Henriques, M. D. (2011). *Um estudo sobre a produção de significados de estudantes do ensino fundamental para área e perímetro.* Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Juiz de Fora. Juiz de Fora, Minas Gerais: UFJF.

Henriques, M. D. e Silva, A. M. (2012). Dificuldades de aprendizagem de área e perímetro na escola básica. In: Simpósio de Educación Matemática, 12, 2012. Chivilcoy. *Memorias…* Chivilcoy, Argentina: EDUMAT. v.1, pp. 579-601.

Henriques, M. D. y Silva, A. M. (2009). Significados producidos por estudiantes secundarios brasileños para área de figuras planas. In: Congreso Iberoamericano de Educación

Matemática, 6., 2009. Puerto Montt. *Actas*… Puerto Montt, Chile: FISEM. vol.1, pp. 580-585.

Leontiev, A. N. (2006). Uma contribuição à teoria do desenvolvimento da psique infantil. In: Vigotsky, L. S. (Dir.), *Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem.* São Paulo: Ícone. p. 59-83.

Lins, R. C. (2004). Matemática, monstros, significados e educação matemática. In: Bicudo, M.A.V. (Ed.). *Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas.* São Paulo, Brasil: EDUNESP. pp. 92-120.

Lins, R. C. (2001). The production of meaning for algebra: a perspective based on a Theoretical Model of Semantic Fields. In: Sutherland, R.; Rojano, T.; Bell, A.; Lins, R. (Eds.). *Perspectives on School Algebra*. Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers. pp. 37-60.

Lins, R. C. (1999). Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a Educação Matemática. In: Bicudo, M. A. V. (Org.). *Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas*. São Paulo: Editora da UNESP. pp. 75-94.

Lins, R. C. (1997). Luchar por la supervivencia: la producción de significados. *UNO - Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 1(14), 39-46.

Lins, R.C. (1993). Epistemologia, História e Educação Matemática: Tornando mais Sólidas as Bases da Pesquisa. *Revista de Educação Matemática* da SBEM-SP, 1 (1).

Lins, R. C.; Gimenez, J. (1997). *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI.* Campinas, Brasil: Editora Papirus (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

Miskulin, R. G. S. (1999). *Concepções teórico-metodológicas sobre a introdução e a utilização de computadores no processo ensino/aprendizagem da* geometria. 577 p. Tese (Doutorado em Educação), Faculdade de Educação, Campinas, Brasil: Universidade Estadual de Campinas.

Silva, A. M. (2003). *Sobre a dinâmica da produção de significados para a matemática.* Tese de Doutorado em Educação Matemática. Rio Claro, Brasil: IGCE/UNESP.

Vygotsky, L. S. (1993). *Pensamento e Linguagem*. São Paulo, Martins Fontes.

DE UN VIDEOJUEGO A LAS ECUACIONES DEL TIRO PARABÓLICO: UNA PROPUESTA DIDÁCTICA

Andrés Ruiz Esparza Pérez y Asuman Oktaç
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados. México
andresruizep@gmail.com

Resumen. ¿Es posible partir de un videojuego para enseñar matemáticas o física? En el presente diseño de actividades didácticas se parte precisamente del conocimiento intuitivo que puede generar en el alumno el uso del videojuego "AngryBirds", para darle significado y aplicación a lo que en él acontece, y que en escenarios escolares se estudia como la "función de posición" o bien, las ecuaciones del tiro parabólico.
Se presenta una propuesta didáctica para el estudio del tiro parabólico a partir de un ambiente lúdico en un entorno tecnológico. Se toma como base el videojuego mencionado, el cual, por una parte, recrea dicho fenómeno físico y, por otra, conforma un marco de referencia para los significados del fenómeno en cuestión. Ante estas ventajas, se propone observar el fenómeno desde este ambiente para poner al estudiante en una situación de modelación de movimiento

Palabras clave: tiro parabólico, modelación – graficación, Geogebra

Abstract. Is it possible from a video game to teach mathematics or physics? In the present design of educational activities are just part of intuitive knowledge that can generate in students using the video game "AngryBirds" to give meaning and application to what happens on stage, and that in school settings is studied as the "function position "or, parabolic shot equations.
We present a didactic proposal to the study of parabolic shot from a playful atmosphere in a technological environment. It builds on the game mentioned, which, on the one hand, recreates this physical phenomenon and on the other, forms a framework for the meanings of the phenomenon in question. Given these advantages, aims at observing the phenomenon from this environment to put the student in a state of motion modeling.

Key words: parabolic shot, modeling – use of graphs, Geogebra

Introducción

Una de las recurrentes preguntas en las clases de matemáticas es sobre la aplicación o utilidad de los conceptos abordados en el aula para la vida real. Por lo general, al no recibir respuesta satisfactoria a esta cuestión, se genera cierta desmotivación para el estudio de los contenidos. El presente diseño plantea una situación que puede considerarse una aplicación de un concepto previamente abordado en clase, y más aún, involucra un elemento con el que muchos alumnos están familiarizados dado su carácter lúdico. Se parte del videojuego llamado "AngryBirds", en el cual se impulsan desde una resortera unos pájaros (a modo de proyectil) con el propósito de derribar unos cerdos que se encuentran lejos de ellos. El lanzamiento describe un tiro parabólico, de modo que puede ser retomado para su uso educativo. El diseño parte de algunos elementos de dicho juego para analizar la situación física que se plantea y a partir de ello, poder darle significado y utilidad a los conceptos involucrados en el fenómeno.

Conceptos, población y propósitos

Los conceptos matemáticos y físicos que se abordan propiamente son el tiro parabólico y sus ecuaciones de movimiento son:

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 sen(\alpha)\, t$$

$$x = v_0 \cos(\alpha) t$$

De tales temas se presupone un conocimiento general y de algún modo intuitivo. Es por eso que la propuesta desarrolla estos tópicos para darle un significado gráfico y hasta cierto punto útil. El diseño está pensado para estudiantes de tercer o cuarto semestre de bachillerato, que han llevado al menos un curso introductorio de geometría analítica, en donde han estudiado las ecuaciones cartesianas de curvas como la recta y la parábola. Se presuponen también nociones de física elemental, como las ecuaciones del movimiento rectilíneo uniforme y particularmente, del tiro parabólico. Estos temas también son abordados usualmente entre el tercer y cuarto semestre.

Es posible también aplicarlo para estudiantes de bachillerato que han cursado ya los contenidos de precálculo (por lo general, en cuarto o quinto semestre) y que hayan estudiado las funciones reales de variable real, en especial, la función cuadrática. De modo general, se requiere que los estudiantes dominen lo suficiente las ecuaciones de lugares geométricos, como la parábola; que manejen las funciones trigonométricas elementales (seno y coseno) y sean capaces de despejar variables de las ecuaciones. Los propósitos que se persiguen en el diseño son, por un lado, de índole matemática: manipular el modelo matemático de una situación física real, para obtener –o bien– predecir resultados. En el aspecto didáctico, se pretende contribuir a la formación de un pensamiento y lenguaje variacional mediante el estudio de un fenómeno de variación y cambio.

Consideraciones teóricas

Particularmente, el interés por la modelación matemática se ha incrementado en la educación desde hace unas décadas, debido a los alcances de las matemáticas en su relación con otras ciencias (Suárez, 2008). De igual modo, el uso de la tecnología en el aula es un fenómeno que se ha venido dando junto con el desarrollo de la tecnología misma y su alcance cada vez más extendido hacia todo tipo de público. Sin embargo, Lavicza (2010) comenta que a pesar de las grandes inversiones en recursos tecnológicos para las escuelas, realmente su integración ha sido mucho menor que la esperada en la década de los 80´s. A pesar de ello, su uso es una realidad en muchas de las instituciones del sistema educativo.

En ese mismo estudio, Lavicza reporta los principales propósitos para los cuales se recurre al software (en particular, los llamados Computer Algebra Systems o CAS), entre los cuales se

puede mencionar: visualizar conceptos matemáticos, actividades de experimentación, resolver problemas de la vida real, checar soluciones de problemas, entre otros. En el presente diseño, se recurre a tales propósitos en uno u otro momento.

Por otra parte, la tecnología es una herramienta que hace dinámica la actividad matemática, con tal potencialidad que uno podría considerar que facilitaría el aprendizaje de las matemáticas (Briceño, 2013). El uso frecuente de la tecnología posibilita las representaciones gráficas y algebraicas de las funciones, pero no necesariamente ayuda a los estudiantes a construir una articulación eficiente entre dichas representaciones. (Dagher, 2010, citado en Briceño, 2013). El presente diseño considera el uso de la tecnología y de las gráficas para dotar de significados a los contenidos expuestos, y vincularlos con el fenómeno que acontece realmente, de modo que sea posible articular sus diferentes representaciones.

Como ya se mencionó, uno de los propósitos atiende a la formación de un pensamiento y lenguaje variacional (PyLVar). Para acceder al pensamiento y lenguaje variacional se precisa entre otras cosas del manejo de un universo de formas gráficas extenso y rico en significados por parte del que aprende. El conocimiento superficial de la recta y la parábola no resultan suficientes para desarrollar las competencias esperadas en los cursos de análisis. (Cantoral & Farfán, 1998). Además,

> el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional entre los estudiantes precisa de procesos temporalmente prolongados. Supone el dominio de la matemática básica y de los mecanismos del pensamiento asociados, pero exige diversas rupturas con estilos del pensamiento prevariacional. Dichas rupturas (…) deben permitir la matematización de la predicción de los fenómenos de cambio. (Cantoral y Farfán, 2003, p. 37).

Es así que Briceño (2013) subraya que las investigaciones y los diseños donde se pone en juego la variación llevan a desarrollar el PylVar en los participantes, ya que justamente dicho pensamiento se desarrolla por hacer *uso* del conocimiento a través de sus prácticas que van desarrollando en la situación. Se pretende construir una epistemología orientada hacia las prácticas, donde el participante hace uso de su conocimiento y lo resignifica para desarrollar un PyLVar, es decir, una matemática que sea funcional.

Finalmente, (Briceño, 2013) considera tres aspectos que norman una integración tecnológica en una situación de modelación de movimiento en un escenario de difusión del conocimiento, representados en un diagrama de Venn, los cuales han sido considerados también para la elaboración del diseño:

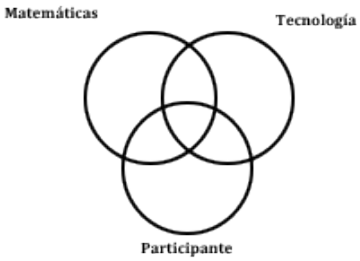


Figura 1: Consideraciones de la integración tecnológica en (Briceño, 2013)

1. En la intersección de la matemática con la tecnología, considera aquellas significaciones variacionales o construcciones que surgen con relación al pensamiento variacional al usar la tecnología en un escenario específico.
2. En la intersección de la tecnología con el participante, se busca la integración de la tecnología al participante para construir conocimiento matemático.
3. En la intersección del participante con la matemática, se considera afectar su conocimiento cotidiano para generar un conocimiento que sea funcional sobre ideas variacionales, es decir, el desarrollo del PyLVar.

De igual manera, se asume la hipótesis de Suárez (2008), según la cual la variación se resignifica a través de la categoría Modelación – Graficación. Es así que se plantea una propuesta de modelación de movimiento, en la cual se acentúa la relación entre el fenómeno a estudiar, su modelo matemático y la gráfica de dicho modelo, elementos que concurren en el mismo entorno del software y de la propuesta didáctica.

El diseño

La propuesta didáctica consta de tres momentos, a saber: exploración; discusión; interpretación y aplicación. Para la implementación de la actividad, se sugiere trabajar en parejas, para poder comentar y discutir los resultados, y hacer más ágil la toma de datos desde el software. La secuencia comprende una hoja de trabajo y cuatro archivos de GeoGebra diseñados *ex profeso*. La hoja de trabajo comprende a su vez cuatro secciones, las cuales se corresponden con los archivos de GeoGebra, y que se detallan a continuación.

a) En la primera sección, correspondiente al momento de exploración, se retoma el ambiente del videojuego y se explica cómo está siendo simulado en el software GeoGebra. Además de ser exploratoria, esta primera sección indaga en los conocimientos previos del alumno, al indagar sobre los parámetros que se están manipulando en el juego, y que a su vez determinan la trayectoria del proyectil.

b) En el segundo momento se pretende generar una discusión sobre la variación de los parámetros en el contexto del juego, en este caso, retomando una situación que ocurre en pantalla para analizar la relación entre los parámetros del tiro. A ello corresponde la segunda sección de la hoja de trabajo, donde se demandan ya valores que han de obtener por medio de la manipulación del software. En ella se retoman los parámetros acordados en la sección anterior y se piden valores específicos de dichos parámetros para lograr golpear los objetivos del proyectil. Una vez recolectados los datos, se abre una pregunta para la discusión en parejas: si esos valores reportados son únicos o no, y por qué.

Se espera que los participantes puedan determinar distintos pares de valores para los parámetros de modo que con ellos logren impactar al objetivo. En cuanto a la última pregunta, la discusión que se espera es en cuanto a la variación de los parámetros. Por ejemplo, si disminuye uno, tiene que aumentar el otro, o viceversa. Dada la popularidad del juego, aquí podrían reportarse respuestas "casuísticas", o bien, que serían posibles dentro del contexto del juego. Por ejemplo, que al tirar un cerdo éste puede tirar a otro, o el pájaro rebota, u otras situaciones similares que se dan dentro del videojuego, pero que no son simuladas en el software.

c) El tercer momento propone problemas tradicionales de este contenido escolar para resolverse en el entorno mismo del software. Además, incorpora la gráfica de posición del objeto, lo cual da pie al estudio de la función de posición y su relación con el fenómeno físico en cuestión. Así, en la tercera sección de la hoja de trabajo, se exploran aspectos variacionales en los participantes, a través de cuestionamientos sobre el cambio de las variables. Para ello, se recurre a una circunstancia que es usual en el videojuego: la trayectoria del último pájaro tirado se deja visible, de modo que el jugador pueda mejorar el siguiente tiro. A partir de eso, lo primero que se pide es igualar la trayectoria de un proyectil (que está ilustrada en la pantalla), y con ese par de parámetros, hallar otro par que mejore el tiro y logre impactar en el punto marcado como objetivo. Se explora a continuación la variación de un parámetro dejando fijo el otro.

La cuarta sección de la hoja de trabajo remite a un diseño en GeoGebra que permite visualizar dos situaciones; por una parte, el fenómeno real (de lado izquierdo), el cual se encuentra incluso ambientado por el entorno del videojuego. Por otra parte, de lado derecho se encuentra la ecuación de posición del objeto (o función de altura) que se obtiene de la fórmula discutida previamente, y ambientada como si fuera un pizarrón de clase tradicional. Tal distinción se hace intencionalmente para resaltar la diferencia entre la trayectoria del ave (el fenómeno que ocurre en realidad) de la función que determina su altura.

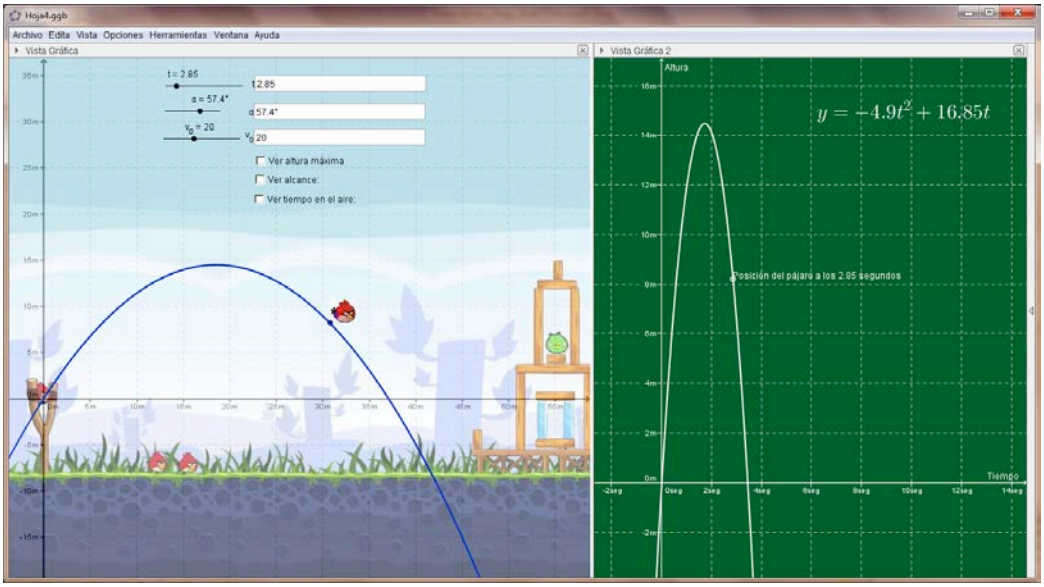


Figura 2: Entorno de la "Hoja4.ggb"

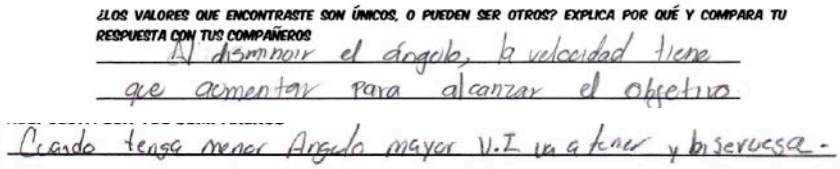
En la última sección, se pretende trabajar analíticamente y poder observar y/o comprobar los resultados en el software. Se plantean cuatro primeros problemas, los cuales se pide resolverlos de modo aproximado usando el software, de modo que pueda visualizarse en el software lo que demanda el problema. Los segundos cuatro problemas, se pide que se resuelvan de modo analítico, usando las ecuaciones antes mencionadas, y que los resultados sean comprobados en el software

Resultados preliminares

Se aplicó una prueba piloto para un grupo de diez estudiantes de quinto semestre de bachillerato, en la Preparatoria "Mons. Luis Miguel Cantón Marín" de la ciudad de Mérida, Yucatán, México. Se reportan la validación de los momentos de acuerdo a lo que se esperaba para cada uno.

a) Para el momento de exploración, todos los alumnos lograron identificar e indicar las variables del fenómeno en cuestión, términos de ángulo, ángulo de tiro, o bien, velocidad y/o fuerza.

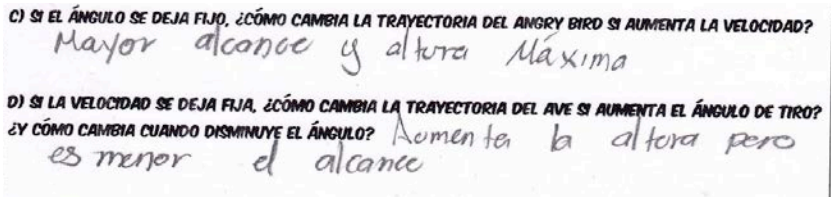
b) En el momento de discusión, los estudiantes coinciden en la no unicidad de los parámetros para generar un tiro similar. Algunos adelantan ya en este momento estimaciones sobre el efecto de la variación de un parámetro sobre el otro:

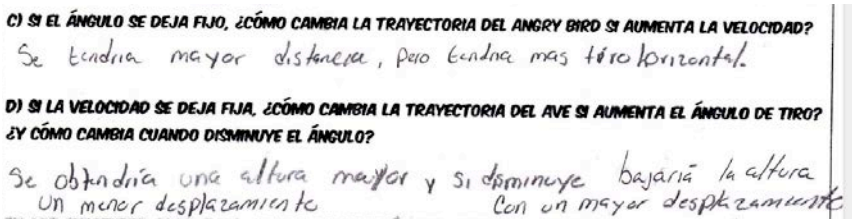

¿LOS VALORES QUE ENCONTRASTE SON ÚNICOS, O PUEDEN SER OTROS? EXPLICA POR QUÉ Y COMPARA TU RESPUESTA CON TUS COMPAÑEROS

Al disminuir el ángulo, la velocidad tiene que aumentar para alcanzar el objetivo

Cuando tenga menor Angulo mayor V.I va a tener y biseversa.

c) En el momento de interpretación y aplicación, dos de las parejas de trabajo establecen la correspondencia esperada en el análisis preliminar, esto es, identifican la relación entre los parámetros ángulo y velocidad que se dan en el contexto del juego, y por tanto, del tiro parabólico. La referencia a la trayectoria dibujada por el proyectil anterior permite tener un apoyo para establecer dicha relación:


C) SI EL ÁNGULO SE DEJA FIJO, ¿CÓMO CAMBIA LA TRAYECTORIA DEL ANGRY BIRD SI AUMENTA LA VELOCIDAD?
Mayor alcance y altura Máxima
D) SI LA VELOCIDAD SE DEJA FIJA, ¿CÓMO CAMBIA LA TRAYECTORIA DEL AVE SI AUMENTA EL ÁNGULO DE TIRO? ¿Y CÓMO CAMBIA CUANDO DISMINUYE EL ÁNGULO? Aumenta la altura pero es menor el alcance


C) SI EL ÁNGULO SE DEJA FIJO, ¿CÓMO CAMBIA LA TRAYECTORIA DEL ANGRY BIRD SI AUMENTA LA VELOCIDAD?
Se tendria mayor distancia, pero tendria mas tiro horizontal.
D) SI LA VELOCIDAD SE DEJA FIJA, ¿CÓMO CAMBIA LA TRAYECTORIA DEL AVE SI AUMENTA EL ÁNGULO DE TIRO? ¿Y CÓMO CAMBIA CUANDO DISMINUYE EL ÁNGULO?
Se obtendria una altura mayor y si disminuye bajaria la altura con un mayor desplazamiento
un menor desplazamiento

La distinción en el entorno de la Hoja4 de GeoGebra de la trayectoria (lado izquierdo) y la función de posición (derecho) permitió establecer una correlación entre el fenómeno estudiado y una de las funciones que habitualmente se estudia. El mismo diseño contribuyó a distinguir el trazo de la trayectoria, y la representación gráfica de la función. Esto se observó al solicitar datos del entorno del software que remitían indistintamente a la simulación del tiro o a su función de posición.

Conclusiones

De acuerdo con lo investigado y con la secuencia didáctica propuesta, se pueden establecer algunas conclusiones preliminares: En primer lugar, y como ya se ha dicho, el diseño parte de una situación conocida y familiar para el alumno, que en este caso es un videojuego. Ciertamente se corre el riesgo de que el estudiante pierda su atención en los detalles de dicho juego, de modo que se ha buscado minimizar los factores que puedan distraer la atención del alumno en su aplicación. El uso de la tecnología juega un papel de simulador y para la interpretación de los conceptos. Simulador en el sentido que atiende a un fenómeno real, que si bien puede ser observado directamente, no podría ser medido tan fácilmente y, por tanto, modelado. Y es también interpretador ya que permite la visualización gráfica de lo que ocurre, y darle significado a lo que se manipula algebraicamente. Por otro lado, se permite distinguir la diferencia entre la trayectoria del proyectil y la gráfica de su función de posición, relación que suele ser confusa en los primeros acercamientos. Finalmente, considera en el alumno la formación de un pensamiento

y lenguaje variacional, dado que el fenómeno de estudio en cuestión involucra la predicción del movimiento, lo cual resulta un elemento fundamental en el desarrollo de dicha estructura mental.

Referencias bibliográficas

Briceño, E. (2013). *El uso de la gráfica como instrumento de argumentación situacional con recursos tecnológicos*. Tesis inédita de doctorado. Cinvestav – IPN. México.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y Lenguaje Variacional en la introducción al análisis. *Épsilon*, 14(3), 353 – 369.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 6(1), 27 – 40.

Lavicza, Z. (2010). Integrating technology into mathematics teaching at the university level. *ZDM Mathematics Education*, 42, 105 – 119.

Suárez, L. (2008). *Modelación – Graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico*. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

El juego "AngryBirds" puede consultarse en http://chrome.angrybirds.com/

EL USO DE MANIPULABLES PARA PROPICIAR LA COMPRENSION DEL SIGNIFICADO DE ECUACIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS, Y DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES EN LA ESCUELA SECUNDARIA

Paola Tonanzy García Mendívil y Jorge Ruperto Vargas Castro
Universidad de Sonora México
paolatonanzy76@gmail.com, rvargas@gauss.mat.uson.mx

Resumen. El presente trabajo es una investigación en curso,en donde se pretende analizar el papel que juega la utilización de manipulables (balanzas concretas y balanzas simuladas utilizando GeoGebra) como recurso didáctico para propiciar la comprensión del significado de ecuaciones lineales, cuadráticas y sistemas de ecuaciones lineales en estudiantes de secundaria, de entre 13 y 15 años de edad, mediante una manipulación activa de dichos aparatos a través del contacto directo de estos con los estudiantes, empleando las piezas concretas únicamente como un puente hacia el entendimiento de ideas abstractas.
Palabras clave: balanza, registros semióticos, GeoGebra
Abstract. The present work is a researchin progress, which aims to analyze the role played by the use of manipulatives (concrete balance and simulated balance using Geogebra) as a didactic resource to foster understanding of the meaning of linear equations, quadratic and linear equations systems in secondary school students, aged between 13 and 15 years old,through active manipulation ofsuch equipment through direct contact of these with students, using specific parts only as a bridge to understanding abstract ideas.
Key words: balance, semiotics registries, GeoGebra

Introducción

Esta investigación se desarrolla en el nivel básico, concretamente en una escuela secundaria de Hermosillo, Sonora; y los temasmatemáticos de estudioson ecuaciones lineales, ecuaciones cuadráticas y sistemas de ecuaciones lineales, ubicadosen el tema de patrones y ecuaciones, que viene señalado en el eje temático Sentido Numérico y Pensamiento Algebraico, establecido en la curricula de Matemáticas de la actual reforma educativa en México. Buscándose corresponder a uno de los ocho propósitos del estudio de las Matemáticas para la educación secundaria que señala el programa de estudio; y el cual es que "modelen y resuelvan problemas que impliquen el uso de ecuaciones hasta de segundo grado, de funciones lineales o de expresiones generales que definen patrones" (Secretaría de Educación Pública, 2011, p. 14).

Los manipulables poseen un carácter exploratorio propiciando la comunicación, discusión y reflexión de los estudiantes en la resolución de problemas.

La problemática

En México los temas matemáticos ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones lineales aparecen en primero y segundo año de secundaria; ecuaciones cuadráticas aparecen en tercer año, continúa en los años siguientes de enseñanza media y llega hasta la enseñanza superior. Es importante que el

estudiante domine estos temas porque formarán parte imprescindible de otros contenidos matemáticos a lo largo de su formación académica.

La preocupación surge cuando constatamos el hecho de que muchos estudiantes de secundaria y bachillerato manifiestan serias deficiencias en torno a estos temas, y también porque en nuestra experiencia docente hemos observado que un porcentaje significativo de estudiantes de nivel superior también experimentan dificultades para resolver dichos temas.

Gerard Vergnaud (citado por Rabino y colaboradores, 2004) en su artículo: "Tiempo largo y tiempo corto en el aprendizaje del álgebra", analiza ciertos aspectos a tener en cuenta en la transición entre el tratamiento aritmético de una situación problemática a resolver y el tratamiento algebraico. Dicho autor señala que el álgebra representa una doble ruptura epistemológica: por una parte, la introducción de un desarrollo formal en el tratamiento de problemas habitualmente tratados intuitivamente, por otra parte la introducción de objetos matemáticos nuevos como ecuación e incógnita, función y variable, monomio y polinomio, también menciona algunas de las dificultades que se presentan en la introducción del álgebra como es la significación del signo de igualdad, la introducción de procedimientos matemáticos nuevos, el sentido que se le puede dar eventualmente a la solución negativa de una ecuación.

En su artículo Vergnaud alude a queel álgebra exige más a menudo que se manipulen incógnitas, lo que es no intuitivo ya que los estudiantes rechazan razonar y operar sobre incógnitas o sobre números desconocidos. Este autor plantea que el equilibrio de la balanza permite dar sentido a la vez a las propiedades de simetría y transitividad del signo de igualdad y a las manipulaciones algebraicas que permiten resolver las ecuaciones con valores positivos.

Planteamiento del problema y objetivos de la investigación

En esta investigación se está tratando de dar respuesta a la siguiente pregunta: ¿La utilización de manipulables (balanzas concretas y simuladas) resulta ser o no pertinente para propiciar en los estudiantes de secundaria, la comprensión del significado de ecuaciones lineales y cuadrática, y sistemas de ecuaciones lineales? Para dar respuesta a ella nos propusimos los siguientes objetivos:

El objetivo general de la propuesta se plantea, de acuerdo a la teoría de las representaciones semióticas de Duval, de la siguiente manera:

Analizar el papel que juega la utilización de manipulables(balanzas concretas y simuladas) en la construcción conceptual de Ecuación Lineal y Cuadrática, y de Sistemas deEcuaciones Lineales en los estudiantes de la Escuela Secundaria, a través del pasaje de los diferentes registros de representación semiótica.

Para que se logre el objetivo propuesto, a su vez, se plantean los siguientes objetivos específicos:

Propiciar en los estudiantes el inicio del proceso de construcción de las nociones de ecuación lineal, cuadrática y sistemas de ecuaciones lineales, mediante el uso de balanzas concretas al realizar acciones de exploración, reflexión y análisis.

Utilizar balanzas simuladas en el software GeoGebra para coadyuvar el inicio de un proceso de abstracción de las nociones de ecuación lineal, cuadrática y de sistemas de ecuaciones lineales.

Utilizar applets en GeoGebra, para generar en los estudiantes la capacidad de construir los conceptos de ecuación lineal, cuadrática y de sistemas de ecuaciones lineales en sus distintas representaciones.

Es importante mencionar que al utilizar manipulables, no comprometa toda la atención de los alumnos, desplazando la propia reflexión matemática.

Marco teórico

A continuación mostramos algunos elementos de la Teoría de las Representaciones Semióticas de Duval, los cuales son el referente teórico en el que se enmarca la elaboración de este trabajo.

Cuando hacemos matemáticas siempre utilizamos algún tipo de representación, debido a que los objetos matemáticos no son directamente accesibles a la percepción o a través de una experiencia intuitiva inmediata; por lo tanto en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, emplear diversas representaciones es inevitable.

Cabe señalar que "no se debe confundir al objeto matemático con su representación, pues a mediano o largo plazo, esta confusión provoca una pérdida de comprensión". (Duval, 1998, p.173). El autor sostiene que todo acceso a los objetos matemáticos (ecuaciones, funciones, etc.) pasa necesariamente por las representaciones semióticas. Sin embargo, no se puede confundir nunca un objeto matemático y su representación, el objeto puede tener otras tantas representaciones diferentes de las que uno ve.

El enfoque teórico de Duval sobre registros de representación considera que no hay conocimiento que pueda ser movilizado por un sujeto sin una actividad de representación y que la utilización de varios sistemas de representación es esencial para el ejercicio y el desarrollo de las actividades cognitivas fundamentales.

En la misma obra Duval hace notar que las representaciones semióticas no solo son indispensables para fines de comunicación, sino que son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma.

También el autor define las representaciones semióticas como producciones humanas constituidas por el empleo de signos y que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propias limitaciones de significación y de funcionamiento. Un enunciado en lengua natural, una figura geométrica, una gráfica, una expresión algebraica son representaciones semióticas que pertenecen a sistemas semióticos diferentes.

Dicho autor señala que para que un sistema semiótico pueda ser un registro de representación, debe permitir tres actividades cognitivas fundamentales:

1. La formación de una representación identificable dentro de un registro dado. Por ejemplo, el enunciado de una frase, la elaboración de un dibujo o esquema, de una gráfica, la escritura de una expresión algebraica, etcétera.
2. El tratamiento de una representación, que es la transformación de esta representación en el registro mismo donde ha sido formada. El tratamiento es una transformación interna de un registro. Por ejemplo, la transformación equivalente de una expresión algebraica.
3. "La conversión de una representación que es la transformación en una representación dentro de otro registro conservando la totalidad o solamente una parte del contenido de la representación inicial" (Duval, 1998, p. 175). Por ejemplo, la transformación de una expresión algebraica en una gráfica, o viceversa).

En la actividad matemática es esencial poder movilizar y coordinar varios registros de representación semiótica en una situación, y poder escoger entre un registro y otro.

Duval da tres razones para justificar lo anterior:

1. La conveniencia del tratamiento.
2. La complementariedad de los registros. Toda representación es cognitivamente parcial con respecto a lo que ella representa y de un registro a otro, no son los mismos aspectos del contenido de una situación los que se representan.
3. "La conceptualización implica una coordinación de registros de representación. El tener acceso a varios registros es fundamental para no confundir el objeto matemático con sus representaciones, y también para poder reconocerlo en cada una de ellas" (Duval, 1998, pp. 181-182).

   Duval llama semiosis a la aprehensión de las representaciones semióticas y noesis a la aprehensión conceptual. Afirma que no hay noesis sin semiosis, lo que significa que no hay acceso al objeto matemático sino a través de sus representaciones semióticas.

El diseño de las hojas de trabajo promueve la articulación de los registros de representación: verbal, tabular, gráfico y algebraico, y así como el realizar un tratamiento adecuado en cada registro de representación, haciendo uso como recurso didáctico de la balanza concreta y simulada, a través del software de geometría dinámica GeoGebra; que vuelva asequible en los estudiantes, la construcción de los significado de dichos conceptos matemáticos.

Un estudiante que aprende el tema de ecuaciones es necesario que tenga claro que existen varias representaciones para una misma ecuación. La aprehensión del concepto matemático demanda entonces que éste sea identificado en sus diversas formas de representación.

Cuando un estudiante tiene acceso a todas las representaciones de un objeto matemático, es capaz de identificarlas, darle un tratamiento adecuado en cada registro de representación y además hacer una articulación coherente de los diferentes registros de representación sin contradicciones, el estudiante puede acceder a ese conocimiento y apropiárselo. Sin embargo, esta articulación entre diferentes registros de representación no es espontánea, y debe por tanto ser objeto explícito de enseñanza.

En la teoría de Duval, el proceso de reformulación o tránsito de cualquiera de las representaciones equivalentes a cualquier otra de ellas constituye un tratamiento dentro del mismo registro de representación.

Método

Balanza concreta. La versión elegida consiste en una balanza de platillos, articulada en forma de paralelogramo, con sus elementos laterales siempre verticales y los elementos horizontales diseñados de tal manera, que cuando en los platillos se tenga el mismo peso, éstos deberán estar a la misma altura.

Para ecuaciones lineales con una incógnita, se utiliza una balanza sencilla, y se trabajan con ecuaciones del tipo de $x + a = b$, $ax = b$,$ax + b = c$ y $ax + b = cx + d$, donde a, b y c son números enteros no negativos.

Y para el caso de sistemas de ecuaciones lineales de $2x2$, se utiliza una combinación de balanzas (dos balanzas).

La correspondencia entre los elementos de la ecuación y los de la balanza son los siguientes:

- Una ecuación se representa mediante una balanza en equilibrio: en los platillos del lado izquierdo de la balanza se representa el primer miembro y en los platillos del lado derecho de la balanza se representa el segundo miembro.

- Los términos independientes de una ecuación se representan mediante canicas depositadas en tapaderas descubiertas.
- Los términos con incógnita se representan mediante tapaderas cubiertas, que representarán las cantidades a descubrir (incógnita).
- Los números enteros serán representados con canicas.

La balanza simulada es una representación plana de la balanza tangible desarrollada en GeoGebra. En este tipo de balanza simulada los términos independientes no requieren de un recipiente, las canicas se acomodan formando un montón; los recipientes que representan a la incógnita quedan plasmados en rectángulos apilados. Para realizar las manipulaciones de estos elementos se utilizan deslizadores que se desplazan con la ayuda del *ratón*.

Los tipos de ecuaciones serán $x + a = b$, $ax = b$, $ax + b = c$ y $ax + b = cx + d$, donde a, b y c son números enteros no negativos.

Adicionalmente se mostrará la representación algebraica del contenido de cada platillo. En la figura 4 se puede observar una balanza simulada en GeoGebra.

Mediante hojas de trabajo, se busca la vinculación entre las diferentes representaciones de ecuaciones lineales, cuadráticas y de sistemas de ecuaciones lineales como condición necesaria para la aprehensión efectiva de dichos conceptos en los estudiantes de la escuela secundaria.

Se plantea que a partir de la situación del equilibrio de la balanza, una representación icónica tangible como registro de partida, el estudiante realice la conversión a la representación en el registro verbal (lengua natural). Posteriormente se establece que el estudiante a partir de la representación hecha del registro verbal, lleve a cabo una actividad de conversión a la representación en el registro tabular; en este registro tabular se le da un tratamiento para poder llegar a la conversión de la representación en el registro gráfico; y del registro gráfico se lleve a cabo una conversión al registro algebraico, como registro de llegada; mediante una situación contextualizada como lo es el uso de las balanzas.

En las actividades se manipulan las balanzas realizando las operaciones que equivalen a las operaciones algebraicas, paulatinamente se representan los equivalentes algebraicos; el estudiante corrobora que efectivamente el equilibrio (o desequilibrio) refleja la relación entre los contenidos de canicas de ambos lados (izquierdo y derecho), ya sea de equivalencia, cuando hay equilibrio, o de mayor que, cuando hay desequilibrio; el realizar modificaciones en los contenidos manteniendo siempre el equilibrio en la balanza, sabrá que si agrega o quita cierta cantidad o proporción de un

lado, tiene que realizar lo mismo del otro lado. En la figura 1, se muestra a estudiantes manipulando las balanzas concretas.

Figura 1: Estudiantes manipulando balanzas concretas

Se tiene como escenario para la investigación, un grupo de estudiantes de la Escuela Secundaria General No. 4 *Profesor Rubén Gutiérrez Carranza* ubicada en calle Reforma y José María Mendoza de Hermosillo, Sonora.

El trabajo de implementación y observación se lleva a cabo durante 10 sesiones de 50 minutos cada una, en el aula asignada para la clase y en un laboratorio de cómputo, en donde se trabaja en la computadora, resolviendo las tareas propuestas en las hojas de trabajo.

Cabe señalar que por motivos de espacio se hace más alusión al tema de ecuaciones lineales.

En un primer momento los estudiantes manipulan la balanza concreta, las figuras 2 y 3 ilustran la balanza concreta para ecuaciones lineales; en la figura 2 muestra a la balanza en equilibrio (refleja la misma cantidad de canicas en ambos lados de los platillos), mientras que en la figura 3 se ve representado el desequilibrio.

Figura 2: Balanza concretapara ecuaciones lineales

Figura 3: Balanza concreta para ecuaciones lineales

En un segundo momento se trabaja con la balanza simulada, véase Figura 4, utilizando las características dinámicas del GeoGebra.

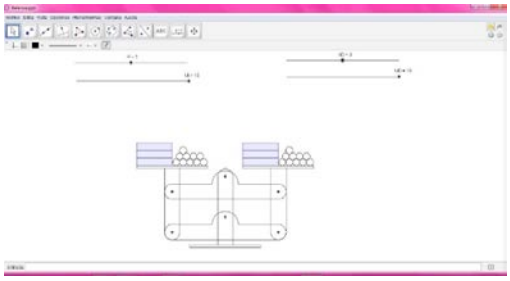


Figura 4: Balanza simulada para ecuaciones lineales

Y como última etapa se utilizaron applets de GeoGebra, para que los estudiantes construyeran los conceptos de ecuación lineal, cuadrática y sistemas de ecuaciones lineales a través de sus diversas representaciones. Este tipo de tecnología tiene la ventaja de estar dentro de los considerados software libres. La figura 5 muestra el Applet elaborado para sistema de ecuaciones lineales.

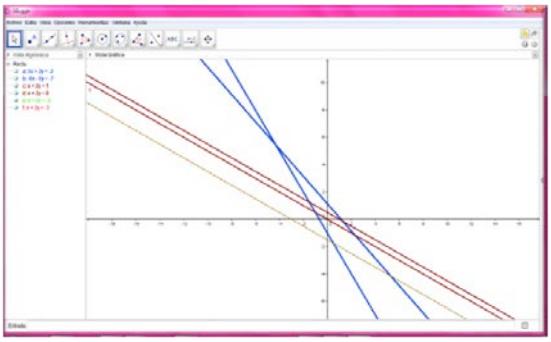


Figura 5: Applet para sistema de ecuaciones lineales

Consideraciones finales

Dado que la presente investigación se encuentra en proceso, no se presentan conclusiones. Sin embargo, cabe hacer mención que los manipulables (balanzas concretas y simuladas) crean un ambiente en donde se facilita la construcción del conocimiento sin mecanizaciones, haciendo énfasis en que las ecuaciones al igual que la balanza, tienen que conservar el equilibrio o la igualdad para encontrar la solución.

Nuestro análisis de la información se basará en las observaciones de clases, en los resultados que arrojen las hojas de trabajo, los cuestionarios y en las entrevistas individuales al final del trabajo.

La inclusión dentro del aula de clase de un modelo como la balanza, puede dotar de significado a los símbolos, facilitando en los estudiantes, los procesos de desarrollo de aprendizaje y resolución de las ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones lineales y cuadráticas.

El uso de la computadora en el campo educativo ha potenciado la posibilidad de la explotación de los recursos de representación semiótica en la enseñanza de las matemáticas

Referencias bibliográficas

Duval, R. (1995) Gráficas y ecuaciones: la articulación de dos registros. En: *Lecturas en Didáctica de las Matemáticas. Escuela Francesa*. 125-139. DME CINVESTAV IPN.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en matemática educativa II, (pp.173-201)*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Rabino, A., Cuello, P. y De Munno, M. (2004). Aprehender álgebra utilizando contextos significativos. *Revista Premisa*, *22*, 36-42.

Rojano, M. (2010). Modelación concreta en álgebra: balanza virtual, ecuaciones y sistemas matemáticos de signos. *Números,Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *75*, 5-20.

Secretaría de Educación Pública (2011). *Programas de Estudios 2011. Guía para el maestro. Educación Básica Secundaria. Matemáticas.* México: SEP.

Uicab, R. (2009). Materiales tangibles. Su influencia en el proceso enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22*, 1007-1013. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Vlassis, J. (2002). The balance model: hindrance or support for the solving of linear equations with one unknown. *Educational Studies in Mathematics 49*, 341–359.

DIFICULTADES EN LAS ECUACIONES LINEALES EN SEGUNDO GRADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Ponciano Hernández Hernández y Eugenio Filloy Yagüe
DME, Cinvestav-IPN. México
phernandezh@cinvestav.mx, poncyher@hotmail.com

Resumen. Este artículo forma parte de la investigación de maestría, se enfoca a las dificultades que presentan los estudiantes al expresar algebraicamente una situación problema de ecuaciones lineales. Se aplicó un cuestionario a 32 estudiantes de 13 a 14 años de edad de segundo grado de secundaria, consistió en seis reactivos de las ecuaciones de la forma: $a + x = b$ y $ax = b$, como resultados de este, la mayoría de las respuestas fueron dadas en forma aritmética sin hacer uso de los Sistemas Matemáticos de Signos (SMS) Algebraicos, además hubo respuestas incorrectas por el tipo de operación usada, esto se debe a la falta de comprensión de texto en una situación problema. De acuerdo al análisis de los resultados del cuestionario aplicado se identificaron diferentes dominios de los SMS aritméticos/algebraicos por lo que se clasificó por niveles de desempeño acorde a las respuestas dadas en el cuestionario: nivel de desempeño alto, medio y bajo y se entrevistó a un estudiante de cada nivel para clarificar sus respuestas.
Palabras clave: dificultades, ecuaciones lineales, situación problema
Abstract. This article is part of a master's research. It focuses on the difficulties presented by the students to algebraically express a linear equation the situation problem. An questionnaire was applied to 32 student thirteen to fourteen year old students in their 2nd year of secondary. The test consisted of six equations using the form: $a + x = b$ and $ax = b$. Because of this, most of the answers were given in arithmetic, expressed not of Mathematical Systems of Signs (MSS) algebraic, and there incorrect, answers because of mistakes in operations, which was due to lack of understanding of the text in situation of problems. Afterwards, according to the analysis of the results, different domains of arithmetic/algebraic were identified and classified into the following levels of performance: high, medium and low and interviewed a student from each level to clarify their answers.
Key words: difficulties, linear equations, problem situation

Introducción

Una de las grandes dificultades que presentan los alumnos en la educación secundaria es la transición de la aritmética al álgebra, en el primer curso de este nivel educativo se introduce este contenido por lo que es nuevo para ellos (SEP, 2011, p. 33), no tienen familiarización alguno; en la educación primaria se hace uso de las letras en el uso de fórmulas para cálculo de áreas y perímetros sin embargo este uso no es en el sentido algebraico sino como número general. Esta investigación se realizó con un grupo de segundo grado de secundaria la cual el ciclo escolar pasado se introdujo el álgebra, por lo que se espera que no manifiesten muchas dificultades para expresar algebraicamente una situación problema y puedan resolverlo.

Esta investigación forma parte de una más amplia acerca de la comprensión del lenguaje algebraico en ecuaciones lineales en primero y segundo grado de secundaria, cuyo objetivo es identificar las dificultades que presentan los alumnos en el tratamiento de las ecuaciones lineales en segundo grado de educación secundaria, al expresar algebraicamente una situación problema de las ecuaciones de la forma $a + x = b$ y $ax = b$. Uno de los propósitos de los actuales planes y

programas de estudio para este nivel educativo es que "el alumno modele y resuelva problemas que implican el uso de ecuaciones de primer grado" (SEP, 2011, p. 14); sin embargo, ése es un proceso en el que surgen varias dificultades de comprensión. La pregunta que rige esta investigación es: ¿qué caracteriza a la comprensión de los alumnos de las ecuaciones lineales cuando se inician en el estudio del lenguaje algebraico mediante la estrategia de solución de problemas aritméticos/algebraicos?

Marco teórico

Diversas investigaciones en álgebra educativa hacen referencia al concepto metodológico de modelos teóricos locales, en los que "el objeto de estudio se enfoca desde cuatro componentes interrelacionadas: modelos de enseñanza, modelos de procesos cognitivos, modelos de competencia formal y modelos de comunicación" (Filloy, 1999, p. 4).

En la componente de procesos cognitivos se consideran sus manifestaciones de la realización de formas de pensamiento matemático, como el uso de la memoria, las concepciones heurísticas utilizadas en la solución de problemas, la generalización y la abstracción que, además, requieren del uso de los Sistemas Matemáticos de Signos (SMS). En la componente de enseñanza sobre los modelajes concreto y sintáctico. En sus recursos didácticos a utilizar en el desarrollo de esta componente, se propone modelar contextos concretos familiares al alumno, para que ante las nuevas operaciones y los nuevos objetos los dote de sentido, construya los primeros rudimentos de sintaxis algebraica y aprenda a tratar la incógnita en los procesos de abstracción y generalización de operaciones (Filloy, 1999), que requieren del uso de los Sistemas Matemáticos de Signos (SMS).

Respecto a los signos empleados en el álgebra elemental en la educación secundaria, Ursini, S; Escareño, F; Montes, D; Trigueros, M. señalan que "Las letras o variables tienen tres distintos usos, como: incógnita específica, número general o una relación funcional" (2005, p.15). En esta investigación hará referencia a la letra como incógnita específica en donde se plantearán situaciones problemas a los estudiantes, ellos tendrán que expresarlo en una ecuación lineal y resolverlo usando los Sistemas Matemáticos de Signos aritméticos/algebraicos, mediante el despeje de la incógnita, por los conocimientos previos.

Método

Nos enfocamos en la componente de procesos cognitivos y en el uso de la variable como incógnita específica, a la cual el estudiante daría un sentido en su representación simbólica, en la solución de problemas aritméticos/algebraicos.

La investigación se realizó en una escuela secundaria pública mexicana, con un grupo de 32 estudiantes de 13 a 14 años de edad de segundo grado de secundaria. Con el objetivo de identificar las dificultades que exhiben los alumnos al representar algebraicamente una situación problema y las distintas formas que siguen para solucionarla, se aplicó un cuestionario al grupo, referente a la solución de problemas aritméticos/algebraicos, con un total de seis reactivos sobre ecuaciones lineales de la forma $a + x = b$ (cuatro reactivos) y $ax = b$ (dos reactivos). Los reactivos se presentaron en lengua natural, como preguntas abiertas, impresos en papel para su contestación individual escrita, durante 40 minutos como máximo en el aula de la clase de matemáticas y sin el uso de la calculadora. Posteriormente se realizaron entrevistas acerca de situaciones problema familiares al alumno, para clarificar las respuestas al cuestionario de tres estudiantes, seleccionados por el tipo de desempeño mostrado en él: uno con desempeño alto, que obtuvo correctamente todos los reactivos y representó algebraicamente las situaciones dadas; otro con desempeño medio, con sólo tres reactivos correctos del tipo $a + x = b$ y con respuestas en forma aritmética; y un alumno con desempeño bajo, sin un solo acierto, que presentó nociones de igualdad, de incógnita y que expresó en forma aritmética las situaciones presentadas.

Tipos de reactivos. Los seis reactivos plantearon preguntas abiertas referentes a ecuaciones lineales; fueron los siguientes:

Resuelve y comprueba cada una de las siguientes situaciones

1. *Un ciclista ha recorrido entre Pachuca y el Distrito Federal en dos etapas. En la segunda etapa recorre 45.750 km. Si la distancia total entre ambas ciudades es de 103.500 km, ¿Qué distancia recorrió en la primera etapa?*
2. *Por un libro y una calculadora se gastaron 485.50 pesos. Si el libro costó 225.50 pesos, ¿Cuánto costó la calculadora?*
3. *Mi hermano me depositó 2 450 pesos. Si el saldo actual es de 6 325 pesos. ¿Cuál era el saldo anterior?*
4. *Carla fue a un restaurante con su amiga. Pidió la cuenta, la cual era de 250.50 pesos más un impuesto de 37.575 pesos. Si pagó con un billete de 500 pesos. ¿Cuánto le dieron de cambio?*
5. *El perímetro de un heptágono regular es de 45.5 cm. ¿cuánto mide cada uno de los lados?*
6. *El precio de 6 computadoras es de 82 800 pesos. ¿Cuánto cuesta cada computadora? Considerando que tienen el mismo precio.*

Estos reactivos se diseñaron con el apoyo del libro de texto: Matemáticas 1, educación secundaria "inducción a las competencias" (Arriaga, A. 2008, p. 141). Los primeros cuatro reactivos hacen

referencia a las ecuaciones de la forma: $a + x = b$, los dos primeros son muy similares con el mismo nivel de dificultad solo cambian los datos en la que se espera que los alumnos no presenten dificultades para representarlo algebraicamente y solucionarla. El tercer reactivo es una situación problema que se resuelve con el mismo tipo de ecuación, sin embargo con un grado de dificultad mayor que las anteriores por lo que el alumno puede confundir la operación correcta a elegir para responder correctamente. El reactivo siguiente es una situación problema que se resuelve con una ecuación de la forma $a + x = b$; sin embargo es el de más alto grado de dificultad por los datos implícitos, por lo que se puede manifestar dificultades para su contestación por la comprensión de texto y elijan una operación incorrecta para resolverla, también puede darse el caso de que no usen todos los datos que se encuentra en este reactivo.

Finalmente en los dos últimos reactivos hace referencia a las ecuaciones de la forma $ax = b$; los dos reactivos son muy similares solo difieren en los datos, en el caso del reactivo cinco, implica que hagan uso de la memoria para recordar conceptos matemáticos. Finalmente el último reactivo es similar al anterior por el tipo de ecuación solo difiere en los datos.

Con estos reactivos se analizará cada una de las respuestas de los alumnos para discernir las posibles causas que originan las dificultades de comprensión en las ecuaciones lineales y determinar si las solución de situaciones problema ayuda a comprender o a tener más dificultades para la comprensión del lenguaje algebraico en las ecuaciones lineales para alumnos de segundo grado de educación secundaria.

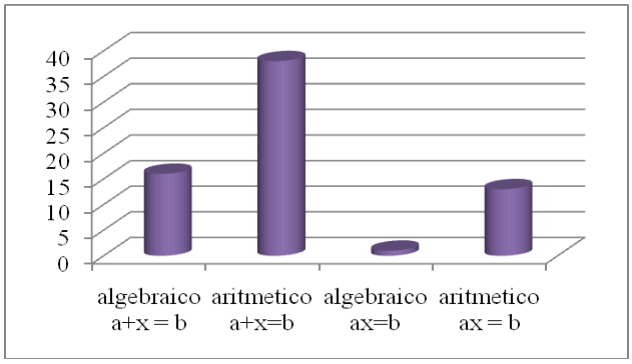
Para la revisión de este instrumento y la interpretación de los datos se implementaron las siguientes categorías de respuesta: Correcto, Noción, Mal y No Contestó. Se consideró respuesta correcta para los alumnos que respondieron utilizando el lenguaje algebraico, sin embargo se consideró también respuesta correcta para aquellos alumnos que encontraron el resultado en la situación problema aunque de forma aritmética. Además de estas respuestas, hubo alumnos que no lograron llegar al resultado, sin embargo identificaron la incógnita, el procedimiento fue el correcto, pero por algún error del valor posicional del número el resultado fue incorrecto por lo tanto se considera al alumno que tiene una noción del contenido de ecuaciones de primer grado. Se considera respuesta incorrecta en la que el alumno responde mal, puede ser por la falta de comprensión de texto y elige una operación incorrecta, finalmente existen reactivos que no tiene ninguna respuesta, por lo que se denomina no contestó.

En el análisis del cuestionario se hizo una clasificación de acuerdo a las respuestas que dieron los alumnos: nivel de desempeño alto quienes respondieron a lo más cercano al dominio de los Sistemas Matemáticos de Signos aritméticos/algebraicos, nivel de desempeño medio para

aquellos que exhibieron dominio de los Sistemas Matemáticos de Signos aritméticos y el de nivel de desempeño bajo para aquel que exhibió dificultades para responder correctamente los reactivos debido a la falta de comprensión de texto, errores en el valor posicional de los números y poco dominio de las operaciones básicas.

Resultados

En la gráfica 1 muestra el tipo de respuesta proporcionado por los alumnos, como se puede observar contestaron en forma aritmética en las situaciones problema, se considera que el alumno recurre a los conocimientos previos, tiene un dominio de la aritmética por lo que se considera que hay comprensión de texto; sin embargo no recurre al lenguaje algebraico aunque en el curso anterior en primer grado de secundaria se introdujo el álgebra.



Gráfica 1: Tipo de respuesta aritmético y algebraico

En la figura 1 muestra la respuesta de un estudiante clasificado de nivel de desempeño alto, cierto dominio de comprensión de texto en la situación problema; sin embargo tiene errores de sintaxis ya que en la respuesta escribe en dos ocasiones el signo igual, además está incompleta la respuesta porque no escribe de que unidad de medida se trata. En el caso del uso de la variable expresa correctamente la incógnita con una variable y hace uso de este para hacer el despeje hallando el valor de la incógnita.

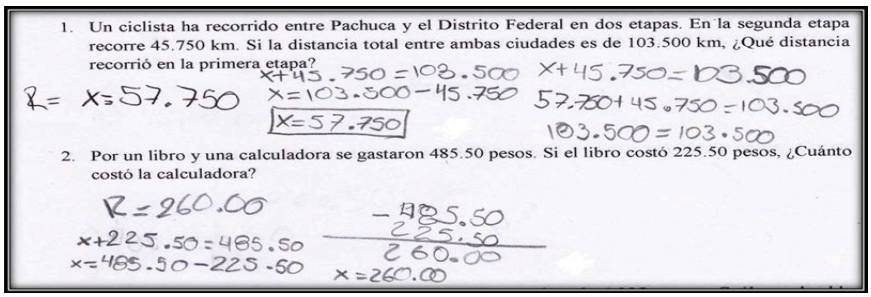


Figura 1: Uso de la variable, errores de sintaxis e incompleto

En la figura 2 el alumno elige correctamente la operación a realizar, eso indica que hay comprensión de texto en esta situación problema sin embargo responde incorrectamente por la

falta de atención al valor posicional en los números, se exhibe claramente la falta de dominio en las operaciones básicas en este caso la resta, donde no realiza correctamente esta operación básica, en las decenas y centenas aplica la operación de restar al número mayor sin importar el papel que juega el sustraendo y minuendo. Además se exhibe errores de sintaxis algebraica ya que no plantea bien la ecuación, usa los datos pertinentes pero la ecuación no corresponde. Cabe mencionar que esta respuesta lo dio un alumno con nivel de desempeño medio haciendo uso de los Sistemas matemáticos de Signos Algebraicos, sin embargo tiene errores de sintaxis algebraica y el valor posicional de los números.

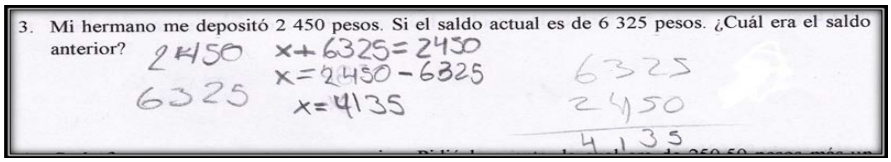


Figura 2: Falta de atención al valor posicional de los números

La figura 3 y 4 el alumno solo usa la aritmética para responder, no usa el álgebra. En la figura 3 se considera que existe un cierto dominio de comprensión de texto ya que usa los datos que contiene la situación problema, además realiza la operación precisa, para hallar el resultado; sin embargo en el proceso comete errores de valor posicional de los números, no hace correctamente la resta por lo que no obtiene el resultado deseado. En la figura 4 se exhibe lo que responde un estudiante en la cual es correcto, sin embargo solo hace uso de la aritmética para hallar el resultado, existe comprensión de texto en esta situación problema.

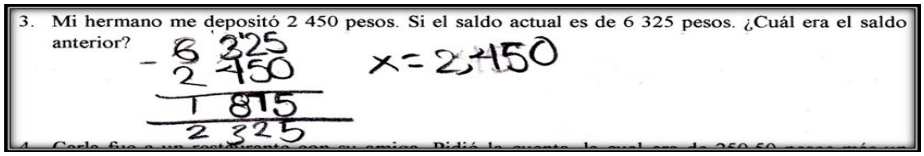


Figura 3: Falta de uso de SMS Algebraicos y errores en valor posicional de los números

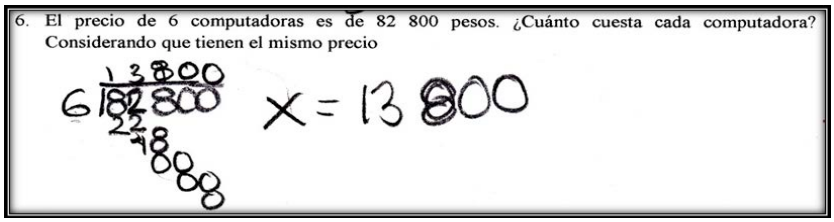


Figura 4: Uso de conocimientos previos para la solución de situaciones problemas

Finalmente de este cuestionario, la figura 5 muestra lo que responde un alumno clasificado de nivel de desempeño bajo el escaso dominio de los SMS Aritméticos/algebraicos, además la falta de comprensión de texto exhibiendo el desconocimiento de las operaciones a realizar, no hace uso de todos los datos que presenta la situación problema y elige la operación incorrecta. Esto

dificulta introducirse en la comprensión del lenguaje algebraico de las ecuaciones de primer grado.

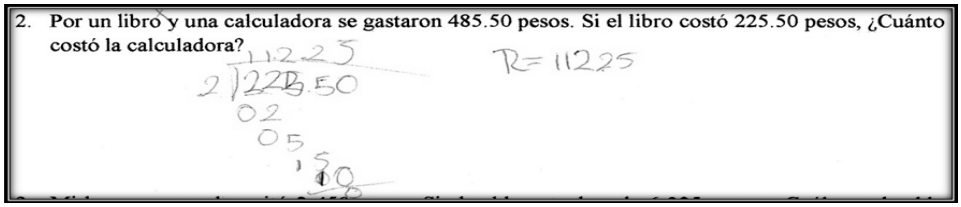

2. Por un libro y una calculadora se gastaron 485.50 pesos. Si el libro costó 225.50 pesos, ¿Cuánto costó la calculadora?

Figura 5: Falta de comprensión de texto en la situación problema

De las respuestas correctas de las ecuaciones de la forma $a + x = b$ y del tipo $ax = b$, sólo en 25% de los alumnos que presentó el cuestionario se evidenció familiarización con el Sistema Matemático de Signos algebraicos, pues en el resto se usó el de los aritméticos. Uno de cada dos alumnos tuvo incorrecto al menos un reactivo por el tipo de operación usada; incluso, un alumno usó la división en lugar de la resta, pero otro que seleccionó la operación correcta respondió incorrectamente por falta de atención al valor posicional de los números. Para los reactivos del tipo $a + x = b$, 42% de las respuestas fueron correctas, de las cuales en 16% se representó algebraicamente la situación problema y en las del 84% restante sólo se realizó una operación aritmética. Los reactivos del tipo $ax = b$ fueron más difíciles; 21% fueron contestados acertadamente, de los cuales sólo un estudiante lo representó algebraicamente; 79% de las respuestas exhibieron operaciones erróneas o no fueron contestadas.

La utilización de una operación incorrecta al responder la situación problema indicó la dificultad para comprender su enunciado. Mientras que el tratamiento deficiente del valor posicional en las cantidades implicadas en la operación, identificada correctamente, dio lugar a resultados incorrectos en el 15% del total de respuestas.

De acuerdo a la pregunta de investigación planteada desde un inicio se dan algunas respuestas como las dificultades que tienen los alumnos a la falta de uso de los SMS aritméticos/algebraicos, al no poder representar algebraicamente una situación problema por falta de uso de la incógnita, no logran plantear una ecuación.

Las entrevistas

El Objetivo de las entrevistas fue identificar las dificultades en la comprensión de una situación problema, su representación y solución algebraica de las "ecuaciones de primer grado". En particular identificar dificultades para la representación y solución algebraica de las ecuaciones de la forma $x + a = b$.

El alumno entrevistado con desempeño alto identificó con facilidad la incógnita en el enunciado planteado y la representó con una letra; expresó con una ecuación la situación problema y dominó el uso de los SMS aritméticos/algebraicos, le dio sentido al uso de la letra en la ecuación como número desconocido y con su despeje encontró el valor de la incógnita. El estudiante con desempeño medio mostró dificultades para representar el valor desconocido en la situación problema; pero durante el interrogatorio logró identificarlo y representarlo en una ecuación, sin dar sentido a la letra como incógnita, sino sólo para realizar las operaciones aritméticas y resolver la situación dada. Finalmente, el estudiante entrevistado con desempeño bajo, mostró algunas nociones de igualdad, de incógnita y expresó en forma aritmética las situaciones presentadas en el cuestionario, no identificó claramente la operación a realizar, cometió errores del algoritmo a seguir y del valor posicional de los números, por lo que en un primer momento no pudo representar; sin embargo, con preguntas que apelaron a sus conocimientos previos a lo largo de la entrevista, al final logró expresar algebraicamente la ecuación y resolverla, aunque sin un uso fluido del lenguaje algebraico en la solución de situaciones problema de ecuaciones lineales

Comentarios

De acuerdo al análisis de los resultados del cuestionario aplicado referente a las dificultades que presentan los estudiantes al expresar algebraicamente una ecuación lineal de una situación problema, se manifiesta el poco dominio de comprensión de texto lo que dificulta elegir la operación correcta para responder la situación problema, la falta de uso de los Sistemas Matemáticos de Signos aritméticos/algebraicos, los errores que comenten en el valor posicional de los números; estas son las principales dificultades que manifiestan los estudiantes de este grupo al que se hizo la investigación, se considera que el tratamiento de las ecuaciones lineales a través de la solución de situaciones problema permite el desarrollo de procesos cognitivos, como el uso de la memoria, las concepciones heurísticas utilizadas en la solución de problemas, la generalización y la abstracción que, además, requieren del uso de los Sistemas Matemáticos de Signos (SMS).

Referencias bibliográficas

Arriaga, A. (2008). *Matemáticas 1, inducción a las competencias*. México. Conaliteg.

Filloy, E. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México: Iberoamérica.

SEP, (2011). *Educación básica. Secundaria. Programas de Estudio*. México: Conaliteg.

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D. y Trigueros, M. (2005). *Enseñanza del álgebra elemental: una propuesta alternativa*. México: Trillas.

EXPLORACIÓN DEL TRIÁNGULO EN EL PLANO CARTESIANO

Evodio Jiménez Tapia
Centro de Actualización del Magisterio de Chilpancingo. México
ifadmatematicas@gmail.com, jite1965@hotmail.com

Resumen. El presente artículo, es un análisis del triángulo fundamental con el mediano, este último se encuentra formado por los puntos medios de cada lado del primer triángulo mencionado; para lo anterior, en un primer momento se inicia con el trazo de las líneas notables, encontrando con ellas los puntos de concurrencia: circuncentro, baricentro, ortocentro e incentro; en un segundo momento, se exploran las líneas trazadas con respecto a los lados y vértices del triángulo (primera tabla) y después, los puntos de concurrencia en relación con su ubicación al interior del triángulo o fuera de él (segunda tabla); y en el tercer momento se plantea un problema referente a la distribución de un terreno triangular en cuatro partes iguales, ahí radica el análisis del trabajo, el cual se resuelve de diversas maneras: con regla y compás, método algebraico, tomando en cuenta las pendientes, con software, teorema de Vazgaz y deducción de la fórmula.
Palabras clave: puntos notables del triángulo, pendiente y punto medio
Abstract. This article is an analysis of the fundamentalf triangle with the medium, the last is formed by the midpoints of ecah side of the firts triangle above; therefore, at firts begins with the stroke of remarkable lines, finding them the points of concurrency: circuncemtre, centroide, orthocenter, and incenter; in a second stage the lines draw with respect to the sides and vértices of the triangle (firts board) and then the points of concurrence in relation to their location within the triangle or outside of this (second board) are explored; and the third time a problema concerning the distribution of a triangular field into four equal parts arises, there reside the anlysis of the work, which is solved in different ways: with ruler and compass algebraic method, taking into account the slope, with software, Vazgaz theorem and deduction of the formula.
Key words: remarkable points of triangle, slope and point middle

Introducción

Para determinar los puntos notables en el triángulo, se inician con la construcción de las siguientes rectas, de acuerdo a López (1987) en su obra Geometría Euclideana, se deberán construir: las mediatrices, bisectrices, alturas y medianas, las cuales se van caracterizando durante su trazo y fortaleciendo en el proceso de enseñanza aprendizaje; posteriormente se plantean problemas para confirmar algunas competencias matemáticas.

Desarrollo

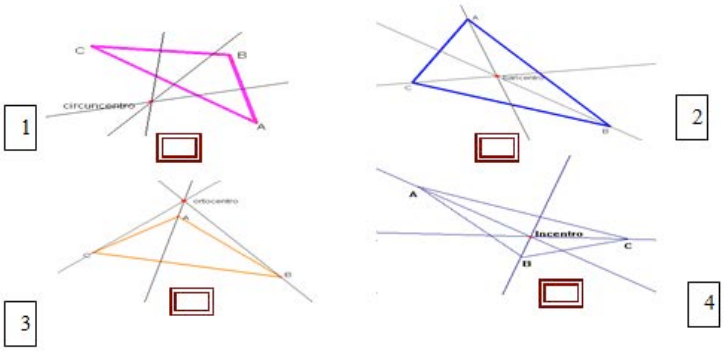


Figura 1

1. Analicen las líneas que aparecen en los triángulos y anoten una ✓ en la tabla frente al triángulo cuando las características sí se cumplan y una **X** cuando no se cumplan.

Características	Las líneas son perpendiculares a los lados del triángulo o a la prolongación de éstos	Las líneas pasan por un vértice del triángulo	Las líneas cortan los lados del triángulo en los puntos medios	Las líneas dividen a la mitad los ángulos del triángulo	Las líneas se cortan en un punto	Las líneas son paralelas a los lados del triángulo	Las líneas cortan los lados del triángulo en una razón de 2 a 1
Triángulo 1 (mediatrices)							
Triángulo 2 (medianas)							
Triángulo 3 (alturas)							
Triángulo 4 (bisectrices)							

Tabla 1

2. Analicen los puntos donde se cortan las medianas, mediatrices, bisectrices y alturas en un triángulo cualquiera y anoten una ✓ donde se cumplan las características señaladas y una X donde no se cumplan.

Características	Siempre se encuentra en el interior del triángulo	Se puede localizar en un vértice del triángulo	Puede localizarse fuera del triángulo	Es el centro de un círculo que toca los tres vértices de triángulo	Es el centro de un círculo que toca los tres lados del triángulo	Es el punto de equilibrio de un triángulo	Está a la misma distancia de los vértices del triángulo	Se encuentra alineado con otros puntos notables del triángulo
Incentro (punto donde se cortan las bisectrices)								
Baricentro (punto donde se cortan las medianas)								
Ortocentro								

(punto donde se cortan las alturas o su prolongación)								
Circuncentro (punto donde se cortan las mediatrices)								

Tabla 2

3. Exploración del triángulo fundamental y el mediano

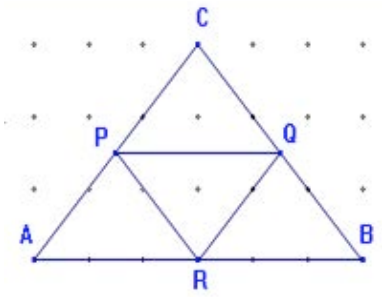


Figura 2

¿El triángulo PQR es semejante con el triángulo ABC?, ¿Cómo es el triángulo PQR en relación con los demás triángulos que están al interior del triángulo fundamental?, ¿Cómo son las rectas entre sí que pasan por los siguientes puntos AC y QR; PQ y AB; BC y PR?, ¿Qué relación guardan los segmentos que unen a los puntos medios en cuanto a magnitud con el tercer lado del triángulo?, ¿Se puede construir el triángulo fundamental (ABC) solamente con el triángulo mediano (PQR)?

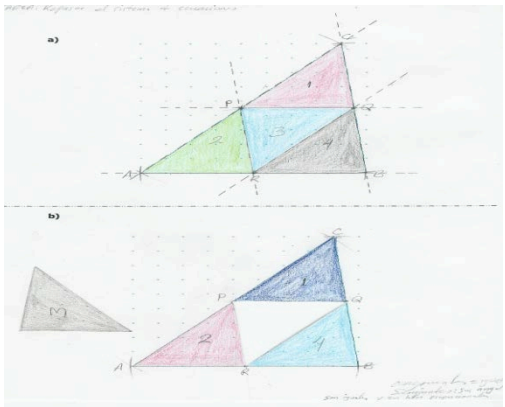


Figura 3

Al triángulo del inciso a, se le prolongaron líneas auxiliares, para comparar visualmente los lados paralelos del triángulo mediano, con respecto a los que pasan por el vértice opuesto; en un segundo momento hicieron uso de las propiedades de los triángulos para afirmar que todos los triángulos eran congruentes.

Al triángulo del inciso b, se le recortó el triángulo mediano para superponerlo en los demás y nuevamente afirmar que todos los triángulos al interior son iguales.

4. El Sr. López, desea que sus cuatro hijos se repartan equitativamente un terreno que tiene forma triangular. El cual posee las siguientes coordenadas de sus puntos medios P(2, -1), Q(9,0) y R(5, 3). ¿Cuáles son las coordenadas del terreno grande que se reparte?

Resolución

a) Regla y compás

Con la regla y compás, según Szklarz y Gutiérrez (2008), y la reflexión propia al trazado se puede construir el triángulo fundamental:

Paso 1: con el compás se toma el segmento PQ y centrando en R, se traza una circunferencia.

Paso 2: con el compás se toma el segmento PR y centrando en Q, se traza una circunferencia.

Observación: las circunferencias se interceptan en dos puntos (12,4) y (6, -4).

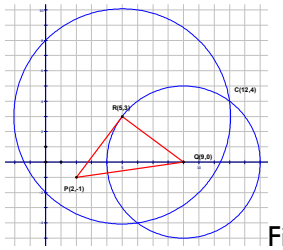


Figura 4

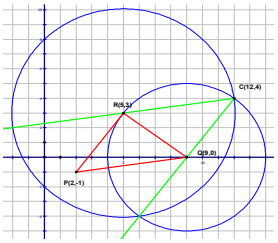


Figura 5

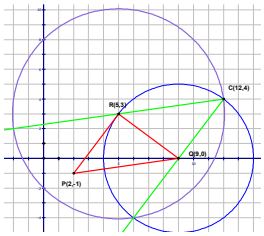


Figura 6

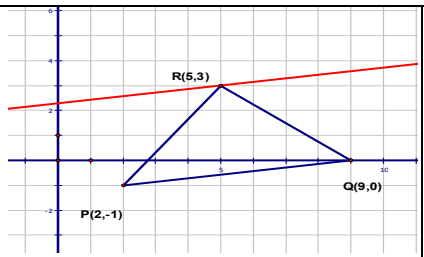
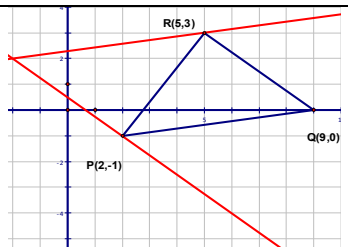
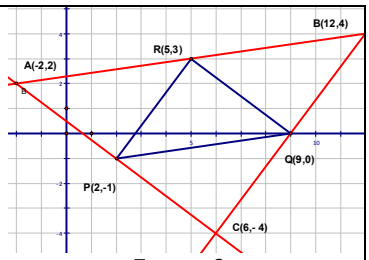
Paso 3. Del punto C(12,4), se trazan dos semirrectas, que pasen por los vértices Q y R

Paso 4. Los puntos que interceptan las dos semirrectas a las circunferencias, son los vértices del triángulo fundamental.

Las coordenadas son: A(-2, 2), B (6, -4) y C(12, 4)

b) Por método algebraico

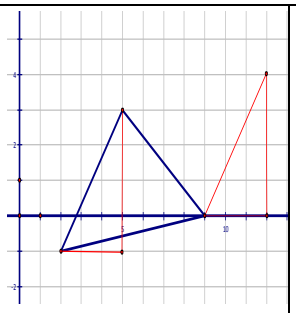
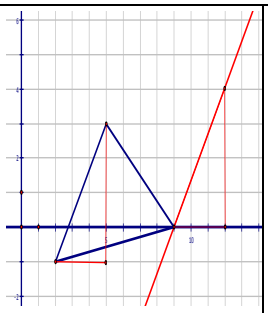
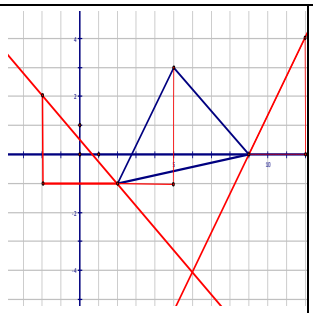
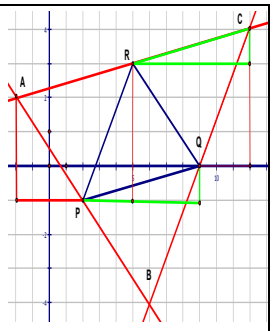
De la Borbolla, F. (1963), plantea que el triángulo fundamental se puede obtener de la siguiente manera

 Figura 7	 Figura 8	 Figura 9
Se determina la ecuación de la recta que pasa por R(5,3) y es paralela a la recta que pasa por el segmento PQ, esta es $y = \frac{x+17}{7}$	Se determina la ecuación de la recta que pasa por P(2,-1) y es paralela a la recta que pasa por el segmento QR, esta es $y = \frac{-3x+2}{4}$	Se determina la ecuación de la recta que pasa por Q(9,-0) y es paralela a la recta que pasa por el segmento PR, esta es $y = \frac{4x-36}{3}$

Por sistema de ecuaciones determina las coordenadas del triángulo fundamental A(-2, 2), B (6, -4) y C(12, 4)

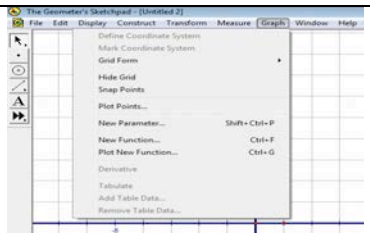
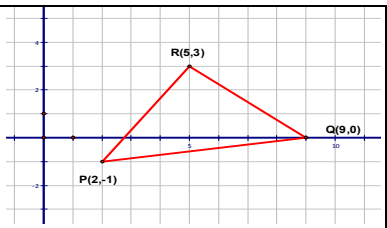
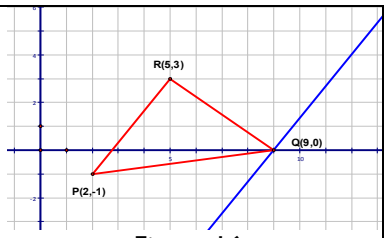
c) Tomando en cuenta las pendientes

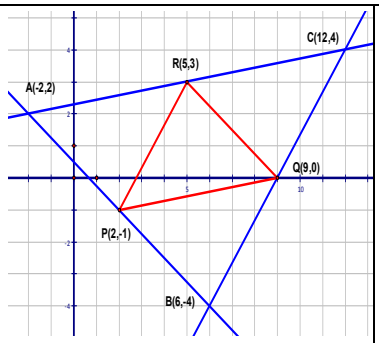
Interpretando el valor de la pendiente consultada en diversos autores como: Kindle (1980); Anfossi (1988); Fuenlabrada y Samuel (2000); Guerra y Figueroa (2004) y otros que se indican en la bibliografía.

 Figura 10	 Figura 11	 Figura 12	 Figura 13
Se toma en cuenta la pendiente de PR y se "traslada" hacia el punto Q.	Se traza una recta que inicia en el punto antes trazado y pasa por Q.	Se hace lo mismo con los demás puntos, siempre tomando el vértice con el lado opuesto.	*Las coordenadas del triángulo fundamental A(-2, 2), B (6, -4) y C(12, 4)*

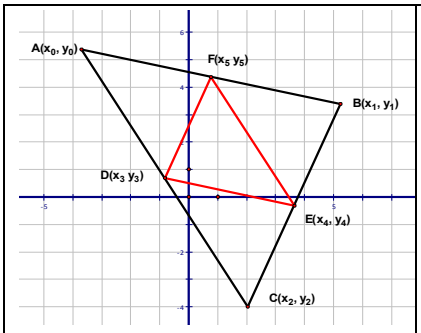
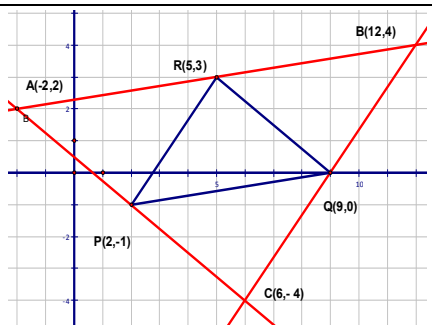
d) Con software

Se utilizó el geometer sketchpad para realizar los trazos requeridos. De acuerdo a las condiciones del problema

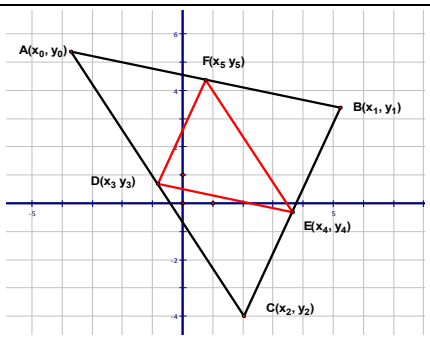
 Figura 14	 Figura 15	 Figura 16
Se grafican los puntos en el plano cartesiano	Se construye el triángulo	Se trazan una recta paralela que pasa por un vértice con respecto a su lado opuesto; lo mismo se hace con los demás vértices

 *Figura 17*	*Las coordenadas del triángulo fundamental A(-2, 2), B (6, -4) y C(12, 4)*

Por el teorema de Vazgaz

 Figura 18	*Fórmulas para calcular las coordenadas de los vértices* $A(x_0,y_0) \rightarrow x_0 = x_5 + x_3 - x_4$ $A(x_0,y_0) \rightarrow y_0 = y_5 + y_3 - y_4$ $B(x_1,y_1) \rightarrow x_1 = x_5 + x_4 - x_3$ $B(x_1,y_1) \rightarrow y_1 = y_5 + y_4 - y_3$ $C(x_2,y_2) \rightarrow x_2 = x_4 + x_3 - x_5$ $C(x_2,y_2) \rightarrow y_2 = y_4 + y_3 - y_5$	 Figura 19
Calcular "A" *Datos: D(2,-1), E(9,0) y F(5,3)* $D(x_3,y_3), E(x_4,y_4)\ y\ F(x_5,y_5)$ $x_0 = 5 + 2 - 9 = -2$ $y_0 = 3 - 1 - 0 = 2$ ***A(-2, 2)***	***Calcular "B"*** *D(2,-1), E(9,0) y F(5,3)* $D(x_3,y_3), E(x_4,y_4)\ y\ F(x_5,y_5)$ $x_1 = 5 + 9 - 2 = 12$ $y_1 = 3 + 0 - (-1) = 4$ ***B(12,4)***	***Calcular "C"*** *D(2,-1), E(9,0) y F(5,3)* $D(x_3,y_3), E(x_4,y_4)\ y\ F(x_5,y_5)$ $x_2 = 9 + 2 - 5 = 6$ $y_2 = 0 - 1 - 3 = -4$ ***C(6, -4)***

Deducción de la fórmula de Vazgaz

 *Figura 20*	*Se relacionan los puntos medios con los extremos, mediante la siguiente fórmula:* $x = \frac{x_1+x_2}{2}$; $y = \frac{y_1+y_2}{2}$; *donde el punto medio tiene las coordenadas* (x_m,y_m) ***Primer paso**:* $PM_{\overline{AC}} A(x_0,y_0), D(x_3,y_3)\ y\ C(x_2,y_2)$ *Al sustituir las coordenadas en las fórmulas del punto medio, queda:* $2x_3 = x_0 + x_2, \quad 2y_3 = y_0 + y_2$

Segundo paso:

$PM_{\overline{CB}} C(x_2, y_2), E(x_4, y_4)$ y $B(x_1, y_1)$

Al sustituir las coordenadas en las fórmulas del punto medio, queda:

$2x_4 = x_1 + x_2, \quad 2y_4 = y_1 + y_2$

Tercer paso:

$PM_{\overline{AB}}\ A(x_0, y_0), F(x_5, y_5)$ y $B(x_1, y_1)$

Al sustituir las coordenadas en las fórmulas del punto medio, queda:

$2x_5 = x_0 + x_1, \quad 2y_5 = y_0 + y_1$

Resumen

1	$2x_3 = x_0 + x_2$	*2*	$2y_3 = y_0 + y_2$
3	$2x_4 = x_1 + x_2$	*4*	$2y_4 = y_1 + y_2$
5	$2x_5 = x_0 + x_1$,	*6*	$2y_5 = y_0 + y_1$

Con las ecuaciones impares se obtienen:

$x_0 = x_5 + x_3 - x_4, \quad x_1 = x_5 + x_4 - x_3,$

$x_2 = x_4 + x_3 - x_5$

Con las ecuaciones pares se obtienen:

$y_0 = y_5 + y_3 - y_4, \quad y_1 = y_5 + y_4 - y_3$

$y_2 = y_4 + y_3 - y_5$

Formulario

$x_0 = x_5 + x_3 - x_4,$

$x_1 = x_5 + x_4 - x_3,$

$x_2 = x_4 + x_3 - x_5$

$y_0 = y_5 + y_3 - y_4,$

$y_1 = y_5 + y_4 - y_3$

$y_2 = y_4 + y_3 - y_5$

Con estas fórmulas se pueden calcular los vértices del triángulo fundamental, utilizando operaciones aritméticas.

Referencias bibliográficas

Anfossi, A. (1988). *Geometría Analítica*. México: Progreso.

Cantoral, R., Farfán R. M., Cordero F., Alanís, J.A., Rodríguez R.A. y Garza A. (2003). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Trillas

De la Borbolla, F. (1963). *Problemas y ejercicios de geometría analítica.* México: Unión Editorial Hispanoamericana.

Dirección General de Desarrollo Curricular. (2011). *Plan de Estudios 2011 Educación Básica*. México: SEP.

Fuenlabrada, S. (2000). *Geometría Analítica*. México: Mc Graw Hill.

Guerra, M. y Figueroa, S. (2004). *Geometría analítica*. México: Mc Graw Hill.

Jiménez, T.E. (2013). *Plano Cartesiano y funciones*. México: SEG.

Kindle, J. (1980). *Geometría Analítica*. México: Serie Schaum.

López, R. G. (1987). *Geometría euclideana.* México: SEP.

Steen y Ballou (1966). *Geometría Analítica*. México: Edit. Publicaciones Cultural.

Szklarz, Z.E. y Gutiérrez, S.S.E. (2008). *Geometría y trigonometría*. México: Mc Graw Hill.

IDEAS FUNDAMENTALES DE PROBABILIDAD Y ESQUEMA COMPENSATORIO VISUAL: EXPERIENCIA CON EL SÍNDROME DOWN

José Marcos López Mojica y Ana María Ojeda Salazar
CAM 18; DME; Cinvestav-IPN México
jmlopez@cinvestav.mx, amojeda@cinvestav.mx

Resumen. Para responder a las preguntas de cuáles esquemas compensatorios favorecen el pensamiento probabilístico de niños de educación especial y cómo caracterizar su desempeño en tareas de estocásticos, consideramos los ejes *epistemológico*, *cognitivo* y *social*. En el informe, se presentan los resultados de cómo el uso del esquema visual favoreció el desarrollo de nociones de estocásticos de niños con síndrome Down, de primaria y secundaria. De las tres fases de la investigación, en parte de la segunda enfocamos en la enseñanza de la probabilidad en aulas de educación especial. Los instrumentos fueron los guiones de enseñanza y de bitácora; los datos se registraron con videograbación y con escritura en papel. Los resultados conciernen a la adquisición de nociones de espacio muestra, medida de probabilidad y variable aleatoria (frecuencia absoluta). El esquema visual orientó las acciones hacia el registro de las frecuencias y a dotarle de sentido. Se identificó la contribución entre pares para explicar y facilitar la tarea.

Palabras clave: estocásticos, esquema visual, síndrome Down

Abstract. To answer the questions about 'what compensation schemes favor the probabilistic thinking of children of special education and how to characterize their performance in tasks about stochastics, we considered the epistemological, cognitive and social points of view. We report the results of the use of visual scheme favoring the development of notions of stochastics of children with Down syndrome, at primary and secondary levels. Among the three phases of the research, in part of the second one stochastics were introduced in the special education classoom. The instruments were teaching scripts and a script log, the data were videotape recorded and the writing on paper. The results concern the notions of sample space, probability and random variable (absolute frequency). The visual scheme guided the actions towards the registration of frequencies and to make sense of them. The contribution among peers to explain and facilitate the task.

Key words: Stochastic, visual scheme, syndrome Down

Introducción

Este informe se deriva de un proyecto de investigación más amplio que enfoca, de forma cualitativa y *en curso*, los esquemas compensatorios y el pensamiento probabilístico de niños con discapacidad, así mismo la pertinencia de introducir los estocásticos en la educación especial básica. Su principal antecedente fue la investigación de López-Mojica (2009), que se refirió a la comprensión de ideas fundamentales de estocásticos de niños del segundo grado de la educación especial. Aquí presentamos los resultados de cómo el uso del esquema perceptual visual favorece nociones de espacio muestra, medida de probabilidad y variable aleatoria, para los casos de síndrome Down en el nivel primaria y secundaria especial. Particularmente se plantea la pregunta de qué esquemas compensatorios favorecen el desarrollo del pensamiento probabilístico de niños de educación especial.

Perspectiva teórica: tres ejes rectores

En el orden epistemológico, Heitele (1975) ha propuesto diez ideas fundamentales de estocásticos como guía de un curriculum en espiral, para lo que consideró, entre otros aspectos,

las etapas de constitución de la idea de azar en el niño, propuestas por Piaget e Inhelder (1951). En el orden social, el triángulo epistemológico para la constitución del concepto matemático (Steinbring, 2005) proporciona un referente para examinar las interacciones en el aula durante la enseñanza de las matemáticas. En el orden cognitivo, consideramos a las fuentes intuitivas del pensamiento probabilístico (Fischbein, 1975); por otra parte, Vygotski (1997) consideró a los esquemas compensatorios como los que asumen la función de los que por ciertas circunstancias no fueron desarrollados o son deficientes en los individuos y señaló que el desempeño de los niños se ajusta a su contexto social; en ese sentido se toma en cuenta la insuficiencia, ante el tipo de tarea y en un ambiente dado. Por ejemplo, la atención, la información en forma auditiva, la memoria a corto plazo y la memoria de trabajo son deficientes para el Down (Bower y Hayes, 1994), pero pueden ser compensadas si se presenta la información de forma visual, si el mensaje es repetitivo, simplificado y capta la atención de los niños (García-Alba, 2010). La referencia a las funciones del cerebro (Luria, 2005) permite interpretar la ficha médica de cada niño, respecto a los procesos cognitivos y a su base neural, particularmente la zona prefrontal para la atención y el hipocampo para la memoria en el síndrome Down (García-Alba, 2010).

Método

El órgano operativo y la célula de análisis de la enseñanza (Ojeda, 2006) se aplicaron a las tres fases de la investigación. En la segunda de tales fases, la experienciación (Maturana, 2003) del investigador se desarrolló durante dos actividades de estocásticos que propuso al 5°-6° de primaria y 3° de secundaria de educación especial ante su docente titular, y de los resultados de otra actividad desarrollada por la docente en su aula, sin la presencia del investigador. En las aulas de educación especial participantes confluyeron distintas afecciones, pero enfocamos sólo el desempeño de los niños con síndrome Down (Tabla 1).

Aula	Nivel-grado	Casos SD	Estudiantes
Normal	1° B primaria	Vi, Di, Is	7
Alterna	5°-6° primaria	W, MA, MM, GM	13
Alterna	3° secundaria	An, Gu	9
	Totales	9 SD	29

Tabla 1: Niños con síndrome Down en las aulas participantes.

Los datos se recolectaron con los guiones de las actividades y las hojas de control; las técnicas de registro fueron la escritura con lápiz y papel, o en pizarrón, la videograbación y su transcripción.

Las actividades de referencia

El diseño de las actividades se rigió por el triángulo epistemológico (Steinbring, 2005), con el objetivo de introducir el enfoque frecuencial de la probabilidad. "La carrera" consiste en realizar giros de una ruleta con seis sectores iguales distinguidos por figuras de círculos, triángulos y cuadrados; el resultado de cada giro indicado por la flecha se registra en una tabla impresa en papel, marcando una celda de la fila correspondiente a la figura resultante, desde la línea de partida hasta que, para alguna figura, se alcanza la fila de meta por primera vez. "Distribuciones centradas y uniformes" (Piaget e Inhelder, 1951) consiste en 20 ensayos de acomodación aleatoria de 20 canicas iguales en casillas provistas en la parte inferior de bandejas rectangulares, con embudos en la parte superior para la liberación de las canicas; de una bandeja con dos casillas (I) para la distribución uniforme, se pasa a la distribución centrada con otra bandeja con tres casillas (II), otra con cuatro (III) y al tablero de Galton (IV) y luego a la distribución sesgada con el embudo en un extremo superior (V). "Las paletas de sabores" consistió en recolectar información sobre la preferencia de los niños de un conjunto de seis paletas de hielo de sabor. "Águila o sol" consiste en registrar el resultado de 20 lanzamientos de una moneda en una tabla de doble entrada, proporcionada por la docente. Se aplicaron cinco criterios de análisis a las actividades (ver Tabla 2): ideas fundamentales de estocásticos, otros conceptos matemáticos, recursos semióticos, términos que aluden a estocásticos y la situación de referencia (Ojeda, 2006).

	La carrera (Aula con el investigador)	Distribuciones centradas y uniformes (Aula con el investigador)	Águila o sol (Aula sin el investigador)	Las paletas de sabores (Aula sin el investigador)
Situación	Giros de una ruleta con sectores iguales y diferentes cantidades de figuras: círculos, triángulos y cuadrados.	Distribución aleatoria de canicas en casillas.	Lanzamiento y registro del resultado de una moneda ordinaria.	Elección, recolección y registro de datos en una tabla propuesta, según la elección de una paleta de entre un conjunto de seis sabores distintos
Ideas fundamentales de estocásticos	Espacio muestra, medida de probabilidad, variable aleatoria, equiprobabilidad.	Espacio muestra, medida de probabilidad, variable aleatoria, ley de los grandes números.	Espacio muestra, medida de probabilidad, independencia y variable aleatoria.	Espacio muestra, muestra, variable aleatoria(frecuencia absoluta), medida de probabilidad.
Otros conceptos matemáticos	Números naturales, adición, razones.	Números naturales, proporción.	Números naturales, orden de los números naturales.	Números naturales, orden de los números naturales, plano cartesiano.

Recursos semióticos	Tablas, lengua natural escrita, figuras geométricas, signos numéricos.	Figuras, lengua natural escrita.	Lengua natural, tabla, signos numéricos, figuras.	Lengua natural, tabla, figuras, signos numéricos.
Términos empleados	"del total de giros, cuántas veces", "marca con", "elegir", "lo que indique la flecha", "gira la ruleta", "llena una casilla", "más o menos igual", "muchas veces"	"Quedan", "acomodan", "distribuyen", "curva", "caen", "chocan", "más fácil que".	"más veces", "menos veces", "salió", "resultó", "cayó", "lanzar".	"más preferida", "menos preferida", "escogen", "elige" "más gustó", "menos gustó", "todos los niños del".

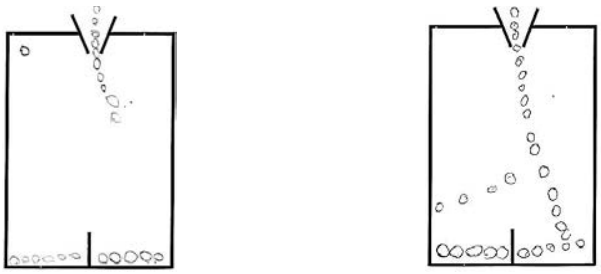
Tabla 2: Caracterización de las actividades y su conductor.

Ideas fundamentales de estocásticos en las aulas

Los niños evidenciaron el uso de los esquemas visual y motriz para espacio muestra, medida de probabilidad y variable aleatoria (frecuencia absoluta). Si bien se tuvo un acercamiento a la idea de azar, en general el espacio muestra se consideró como los resultados del fenómeno (aleatorio) y no como el conjunto de resultados posibles.

Espacio muestra

En *Distribuciones centradas y uniformes* en el sexto grado, se tuvo un acercamiento a la idea de espacio muestra **MM** y **GM** (ambas síndrome Down) dibujaron canicas desde el embudo hasta la base de la bandeja, lo que sugiere su comprensión de las instrucciones y la advertencia de las casillas posibles. **GM** advirtió que una canica podía caer en cualquiera de las dos casillas, porque dibujó una secuencia de canicas también hacia la casilla de la izquierda (véase la Figura 1b). Si bien el dibujo se debió a una petición, los trazos de **GM** y **MM** de las canicas (a manera de ir cayendo) compensaron el problema de lenguaje para comunicar su anticipación del fenómeno. Además, **GM**, **MM** y **MA** (Síndrome Down) dibujaron la misma cantidad de canicas en ambas celdas de la bandeja I (véase la Figura 1).



a) **MM** b) **GM**.

Figura 1: Producción de los casos síndrome Down. Bandeja I.

La carrera de dados, en el tercer grado de secundaria, consistió en lanzar dos dados ordinarios, sumar los puntos de las caras superiores del dado y tachar una celda de la suma correspondiente en una tabla de frecuencias dadas. **JO** (síndrome Down) se acercó a la discriminación del espacio muestra, pues después de cada lanzamiento contaba *uno a uno* y *repetidamente*, los puntos de cada una de las caras superiores de los dados, identificaba el numeral y asignaba el registro en la celda correspondiente (ver Figura 2).

Figura 2. Registro paso a paso de las frecuencias de las sumas.

Medida de probabilidad

En *Distribuciones centradas y uniformes*, **GM** dibujó la misma cantidad de canicas en las bandejas I y II, y en la bandeja III en las casillas centrales y en la de la izquierda (véase la Figura 3). Particularmente, para la bandeja II el dibujo de la misma cantidad de canicas para las tres casillas corresponde al sesgo de equiprobabilidad; ya que para **GM** las tres casillas tienen las misma posibilidad de ser ocupadas, siendo la casilla central la que tiene más posibilidad. Para la bandeja V no pareció haber confusión alguna, pues **GM** dibujó acomodos sesgados (ver Figura 3).

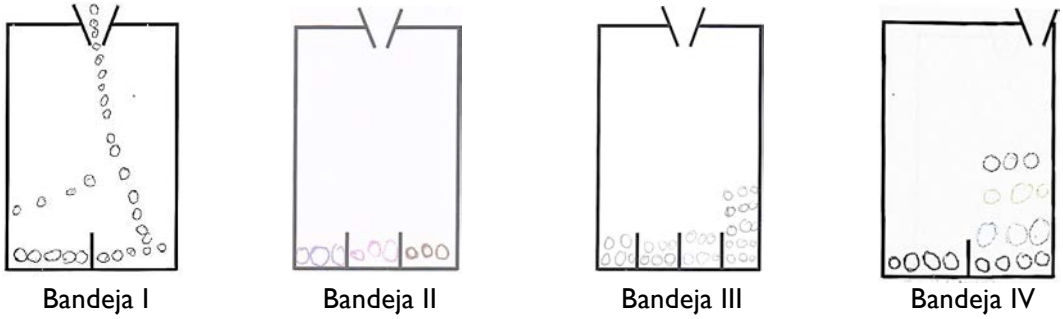


Figura 3: Sesgo de equiprobabilidad por parte de GM.

Variable aleatoria (Frecuencia absoluta)

Para variable aleatoria obtuvimos evidencia de una primera noción, de manera cualitativa, al identificar las frecuencias absolutas de los eventos del fenómeno aleatorio. Por ejemplo, en *La carrera* **MM** contó *una a una* las celdas de su figura; en cambio **W** asignó el valor de la frecuencia de su figura:

[221]	*I:*	*MM, del total de giros, ¿cuántos son para tu figura?*
[222]	*MM:*	*[Ríe].*
[223]	*I:*	*MM, contesta: ¿cuántos [giros] son de tu figura?*
[224]	*MM:*	*Uno, dos, tres [señalando las celdas].*
[225]	*I:*	*Tres, bien. W, ¿cuántos son para tu figura?*
[226]	*W:*	*[Callada].*
[227]	*I:*	*Dime, ¿cuántos son para tu figura? ¿Cuántas celdas marcadas tiene tu figura?*
[228]	*W:*	*Tre [murmurando].*
[229]	*I:*	*Tres, bien. Ye, ¿cuántos tiene tu figura?*
[230]	*Ye:*	*Tres veces.*
[231]	*I:*	*Salió tres, bien.*

En *Águila o sol* los niños con síndrome Down recurrieron insistentemente al esquema visual para identificar la frecuencia absoluta de las categorías águila y sol. El esquema visual de **GM** y de **MM** articuló sus acciones paso a paso cada vez: observaban el resultado, identificaban la celda correspondiente al resultado y seguían con el dedo índice la celda en la cual tenían que registrarlo (véase la Figura 4).

Figura 4. Registro de frecuencias orientado por el esquema visual.

En *La carrera*, **W** tachaba las celdas (véase la Figura 5) en una tabla de doble entrada, según la ocurrencia de las figuras de la ruleta; a diferencia de sus compañeros que realizaban en cada celda los dibujos de las figuras. Lo anterior, según Steinbring (2005), permite distinguir el objeto (variación de resultados al girar la ruleta) del signo (frecuencia registrada en tabla), lo cual acerca al concepto matemático (enfoque frecuencial de la probabilidad).

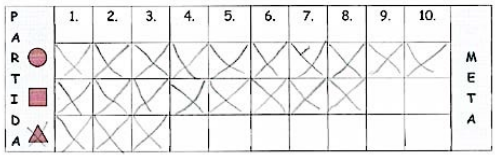


Figura 5. Registro de frecuencias de niños de sexto grado

Esquema compensatorio visual del síndrome Down

Se identificó el uso del esquema visual en acciones que apelaron a las ideas de espacio muestra, medida de probabilidad y, de manera cualitativa, variable aleatoria. El mismo patrón se identificó en el 1er grado, una niña de 6 años, y en el grupo de 5°-6° grados, niñas de 13-14 años. Los niños con síndrome Down identificaban el resultado del fenómeno aleatorio, establecían la relación con su signo en las hojas de control y dejaban una marca para registrar las veces en que ocurrieron los eventos.

Figura 6: **Di** coloca su figura en la celda.

Para la actividad *La carrera*, **MM** y **W** (5°-6° grado) fijaban su mirada en la ruleta y en el resultado para realizar su registro (véase la Figura 7), así como en la tabla para identificar las frecuencias absolutas. Cuando se pidió el valor de las frecuencias, **MM** y **W** contaban *uno a uno* los registros para cada figura, la señalaban con el dedo índice y realizaban la correspondencia con el numeral (véase la Figura 7). Es decir, el esquema visual fue un factor importante en el desarrollo cognitivo lento, pues orientó los procedimientos de las niñas.

Figura 7: Uso del esquema perceptual visual para identificar las frecuencias absolutas.

Las acciones (esquema motriz) como "girar la ruleta" permitieron a los niños dotar de sentido a la situación de enseñanza propuesta, pues al realizarlas esperaban que la ruleta se detuviera para registrar el resultado en la tabla. Una estrategia de enseñanza que favoreció este esquema fue utilizar expresiones cortas, precisas y repetitivas, para llamar la atención de los alumnos.

En la misma actividad, *La carrera*, **A** (discapacidad intelectual) utilizó expresiones gestuales para ayudar a **MM** (síndrome Down) a responder una pregunta. Éste fue un ejemplo de que se puede utilizar la contribución entre pares para facilitar el acceso al conocimiento, a lo que Vygotski (1997) se refiere como la zona de desarrollo próximo (véase la Figura 8).

Un acercamiento a la idea de azar

En *Distribuciones centradas y uniformes*, al preguntarle a **MA** en qué casillas de la bandeja III era más fácil que quedaran las canicas, señaló las separaciones entre ellas e hizo un movimiento indicando las dos casillas centrales. Lo anterior sugiere que **MA** identificó los choques de las canicas con las separaciones (véase la Figura 9).

Figura 9: Señalamiento de los muros por parte de MA.

Lo anterior es un acercamiento a la idea de azar, en el sentido propuesto por Cournot como la "interferencia de series causales independientes" (citado en Piaget e Inhelder, 1951, p. 11). Las respuestas de los niños fueron más allá de una simple expresión de "no sé", "no se puede", sus argumentos se orientaron a otras manifestaciones del fenómeno aleatorio como los choques entre las canicas, contra las paredes de la bandeja y con los muros de las casillas.

Conclusiones

De la aplicación de las actividades en las aulas alternas, los niños tuvieron un acercamiento a la idea de espacio muestra, variable aleatoria, medida de probabilidad y combinatoria. En un primer acercamiento, con las actividades se propuso a los niños el contacto con fenómenos aleatorios y medios para su estudio. En acuerdo con Steinbring (2005) consideramos necesario incluir en la enseñanza actividades como éstas, referidas a una diversidad de situaciones azarosas concretas [urnas, tómbolas, dados] y de la cotidianeidad de los niños, para que, mediante el enfoque frecuencial de la probabilidad, les suministren una base para introducir más adelante el enfoque clásico.

Los esquemas compensatorios surgen ante la insuficiencia que cierto individuo tiene en su desempeño. En la enseñanza realizada, las niñas con síndrome Down utilizaron el esquema visual compensando su desarrollo cognitivo lento, para lo cual fue necesaria la repetición de las acciones y la presentación de información en forma visual.

El esquema compensatorio visual orientó las acciones para las nociones de espacio muestra y de frecuencia absoluta. En todas las actividades que requerían el registro de los resultados del fenómeno aleatorio, fue fundamental la situación de referencia planteada para comenzar a develar el objeto por su correspondencia con el signo requerido para el acercamiento a las nociones estocásticas. Fue marcado el mismo proceso respecto al registro, no hubo diferencia en la rapidez con la que los niños realizaban las acciones. De la experienciación, se señala la importancia del uso del material concreto y de las hojas de control con instrucciones simplificadas para compensar las memorias de trabajo y a corto plazo. De paso, se ejercitó la noción de número.

Referencias bibliográficas

Bower, A. & Hayes, A. (1994). Short-term memory deficits and Down syndrome: A comparative study. *Down Syndrome Research and Practice,* 2(2), 47-50.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Holanda: Reidel.

García-Alba, J. (2010). Déficit Neuropsicológicos en Síndrome de Down y Valoración por Doppler Transcraneal. (Tesis de Doctorado inédita). Universidad Complutense de Madrid. España.

Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematics, 6*(2), 187-205.

López-Mojica, J. M. (2009). Estocásticos en el Segundo Grado de Educación Especial. (Tesis de Maestría inédita). DME, Cinvestav-IPN. México.

Luria, A. R. (2005). *Las funciones corticales superiores del hombre*. México: Fontamara.

Maturana, H. (2003). *Desde la Biología a la Psicología*. Argentina: Lumen.

Ojeda, A.M. (2006). Estrategia para un perfil nuevo de docencia: un ensayo en la enseñanza de estocásticos. En Filloy (Ed.) *Matemática Educativa, treinta años* (pp. 257-281). México: Santillana-Cinvestav.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1951). *La Génèse de l´idée de Hasard Chez l´enfant*. París: PUF.

Steinbring, H. (2005). *The Construction of new Mathematical Knowledge in Classroom Interaction*. USA: Springer.

Vygotski, L. S. (1997). *Fundamentos de la Defectología. Obra Escogidas V*. España: Visor Dis.

EL TEOREMA DE PTOLOMEO: DEL ALMAGESTO A LOS TEXTOS DE HOY

José Luis Soto Mungía
Universidad de Sonora. México
jlsoto@gauss.mat.uson.mx

Resumen. Se hace aquí una revisión de las proposiciones geométricas usadas y demostradas por Ptolomeo en la sección de *El Almagesto* titulada "sobre el tamaño de las cuerdas en un círculo". El propósito es comparar las intenciones y motivaciones que revela Ptolomeo en su obra, con las presentaciones de los libros de texto en uso, sobre el teorema conocido actualmente como *Teorema de Ptolomeo.*
Palabras clave: teorema de Ptolomeo, transposición didáctica
Abstract. This article presents a review of the geometrical propositions used and demonstrated by Ptolomy, in the section of the The Almagest entitled "On the size of chords in a circle". The purpose is to compare the intentions and motivations that Ptolomeo reveals in his work, with presentations of textbooks in use, on the theorem now known as Ptolemy's Theorem.
Key words: Ptolomy´s theorem, didactical transposition

Introducción

Posiblemente con sus convicciones filosóficas por delante, Ptolomeo decidió que su obra astronómica cumbre debía llamarse *La Composición Matemática*, pero rápidamente la obra se popularizó bajo el título de *La Gran Composición* y posteriormente, el prestigio adquirido entre los árabes hizo que intitularan la traducción del Griego al Árabe como *Al Magisti*, que significa "El mejor" y que terminó traducido al Latín como *Al Magest*, de donde ha pasado al Español como *El Almagesto*.

En la Sección 10 de este texto, de nombre tan cambiante, Ptolomeo publicó la demostración del teorema que a la postre llevaría su nombre. En lo que sigue pondremos en evidencia que este teorema, presentado actualmente en los libros de texto de Geometría, ver por ejemplo, (Shively, 1982, p. 26) o (Eves, 1969, pp. 154-155), como un teorema de geometría pura, surgió como una herramienta necesaria para resolver un problema práctico y expondremos con detalle la manera como Ptolomeo usa esta herramienta.

El problema general planteado por Ptolomeo

En la Sección 10 del Primer Libro del Almagesto, Ptolomeo se propone construir una tabla que registre los tamaños de las cuerdas que subtienden arcos de circunferencia, que van de 0° a 180°, con incrementos de medio grado. En un modelo astronómico que supone a la tierra como el centro del universo y al resto de los cuerpos celestes girando alrededor de ella, en órbitas circulares o que resultan de combinar trayectorias circulares, una tabla como ésta resulta indispensable para la medición y el cálculo astronómico.

Al más puro estilo griego, el autor se ve obligado a demostrar cada uno de los resultados matemáticos que utilizará en los cálculos. Demuestra así seis lemas de naturaleza geométrica que usará como herramientas. Para referirnos a ellos nos hemos tomado aquí la libertad de numerarlos, aunque en el texto original esta numeración no aparece. El segundo de esos lemas ahora se conoce como el Teorema de Ptolomeo.

Por razones que no están claras, pero parecieran relacionadas con el sistema sexagesimal, el autor divide la circunferencia en 360 arcos, que llamará grados y el diámetro del círculo que utilizará como base del cálculo en 120 partes, que llamará simplemente *partes* del diámetro.

El primer lema

Las cuerdas más fáciles de calcular son aquellas que se pueden construir inscribiendo en un círculo ciertos polígonos regulares, es así que en este lema, construye el pentágono y el decágono, que se ilustra en la Figura 1 y que enuncia en los siguientes términos (Ptolemy, 1952):

… sea el semicírculo ABC sobre el diámetro ADC y centrado alrededor de D y sea la recta DB trazada sobre AC en ángulo recto. Sea DC bisecada en E, y trácese EB; y sea EF trazada igual a EB, y trácese FB. Digo que el segmento FD es el lado de un decágono regular inscrito, y BF aquél de un pentágono (pp. 14-16)

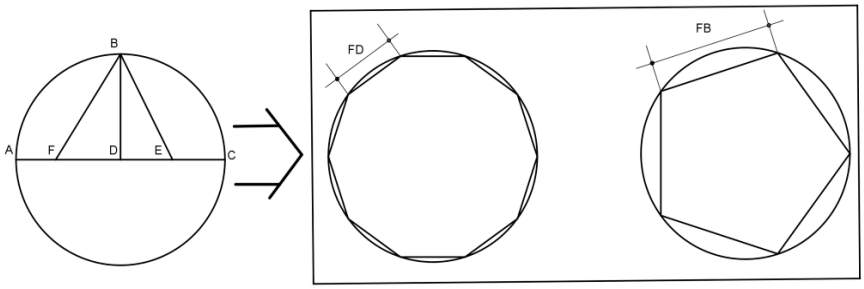


Figura 1

Al igual que en el resto de los lemas, Ptolomeo no se limita a construir los lados de estos dos polígonos regulares y demostrar que están bien construidos; antes de pasar al lema siguiente hace un cálculo de las cuerdas que le interesan y un recuento de las cuerdas que ya puede calcular. Así, obviando la construcción del cuadrado y del hexágono, ya tiene hasta aquí la longitud de las cuerdas que subtienden arcos de 90°, 60°, 72° y 36°, además de las correspondientes a los suplementos de estos ángulos, que puede calcular usando directamente el Teorema de Pitágoras.

El segundo lema

A este lema, conocido actualmente como el Teorema de Ptolomeo, está dedicado el presente artículo. La demostración es escencialmente la misma que puede verse todavía en algunos libros

de Geometría, ver por ejemplo (Shively, 1982, p. 26). En otros textos de Geometría, ver por ejemplo (Eves, 1969, p. 154; Hadamard, 2009, p. 237) el teorema es demostrado utilizando una transformación por inversión, una herramienta desarrollada muchos siglos después de la escritura del Almagesto. Ptolomeo enuncia su famoso teorema, en los siguientes términos (Ptolemy, 1952):

Y mostraremos ahora, exponiendo un lema muy útil para esta presente empresa, cómo el resto de las cuerdas pueden derivarse exitosamente a partir de aquellas que ya tenemos.

Para ello, sea un círculo con cualquier tipo de cuadrilátero inscrito ABCD, y trácense AC y BD.

Se quiere demostrar que

rect. AC, BD = rect. AB, DC + rect. AD, BC. (p. 16)

En notación moderna la tesis del teorema diría $AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC$, lo cual es interpretado ahora como una igualdad aritmética, pero para los griegos significaba que el rectángulo contenido por los segmentos AC y BD era equivalente (en contenido, en área) a los rectángulos contenidos por los segmentos AB y DC junto con el rectángulo contenido por los segmentos AD y BC.

En Ptolomy (1952), el lema aparece ilustrado como en la Figura 2.

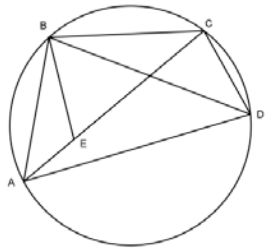


Figura 2

Para la demostración se traza el segmento BE de tal modo que ÐABE = ÐDBC (ver Figura 2); de aquí se desprende la semejanza de los triángulos AEB y DCB por un lado, y la semejanza de los triángulos ABD y EBC por otro. Las relaciones entre segmentos correspondientes que se desprenden de estas semejanzas, conducen a la relación entre segmentos establecida en el teorema. Pero independientemente de la demostración, el interés de Ptolomeo, como se verá posteriormente, pareciera centrado en la relación aritmética entre las seis cuerdas que relaciona el teorema:

$$AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC,$$

porque conociendo cinco de ellas puede calcular la restante.

El trazo del segmento BE, para que los ángulos ABE y DBC resulten iguales, es fundamental para la demostración, porque de aquí se desprende la semejanza entre los triángulos ABE y DBC. Se trata del mismo artificio que muestran algunos textos modernos y que hacen lucir la demostración muy lejos de la heurística. Pero independientemente de la demostración, el interés de Ptolomeo, como se verá posteriormente, pareciera centrado en la relación aritmética entre las seis cuerdas que relaciona el teorema ($AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC$); porque conociendo cinco de ellas puede calcular la restante. Ciertamente que el teorema tiene relación con otros temas geométricos, como lo ilustran los libros modernos: el Teorema de Pitágoras, el seno de la suma de dos ángulos y la razón áurea, pero estos temas se ligaron mucho tiempo después a este resultado.

El tercer lema

La intención de Ptolomeo (Ptolomy, 1952) queda más clara en el presente resultado, en donde su teorema es usado por primera vez:

Ahora que esto ha sido expuesto, sea el semicírculo ABCD sobre el diámetro AD, y desde el punto A trácense los dos segmentos AB y AC, y sea dada la longitud de cada uno de ellos en términos de las 120 partes del diámetro; y sea BC trazada.

Digo que BC está también dado. (p. 17)

Ptolomeo divide la circunferencia con la que está trabajando en 360 arcos iguales y su diámetro en 120 partes iguales. Para distinguir unas unidades de otras, usaremos dos notaciones diferentes; cuando queramos referirnos a las partes de la circunferencia, usaremos la notación común usada para denotar grados y cuando hagamos referencia a las partes del diámetro usaremos una ^{p} en lugar de °. Por ejemplo, $1^{p}\ 34'\ 15''$ significará $1 + \frac{34}{60} + \frac{15}{3600}$ partes como las 120 en las que se ha dividido el diámetro. Aunque no expone con detalle las razones de estas subdivisiones, es claro que subdividiendo el círculo y el diámetro de esta manera, se facilitan los cálculos en el sistema sexagesimal que usa. Es posible también que haya pensado en la subdivisión del diámetro en 120 partes para que la medida de las cuerdas que subtienden ángulos de un grado resulten próximos a la unidad tomada sobre el diámetro.

En la demostración, la igualdad $AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC$ es aprovechada directamente para establecer que BC puede ser calculada. Puesto que ABCD es un cuadrilátero inscrito, y como AB, AC y el diámetro AD están dados y las cuerdas BD y CD pueden calcularse usando el Teorema de Pitágoras (ver Figura 3), entonces BC es la única incógnita y puede ser despejada.

Con este resultado puede calcular la cuerda que subtiende un ángulo de 12°, puesto que $12° = 72° - 60°$.

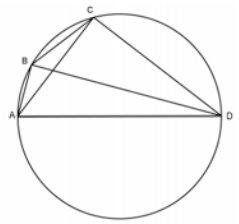


Figura 3

El cuarto lema

El siguiente resultado expuesto por Ptolomeo no usa su teorema, pero lo enunciamos aquí porque es importante para entender los preparativos del cálculo de cuerdas, Ptolomeo (Ptolomy, 1952) afirma:

De nuevo, dada cualquier cuerda en un círculo, propóngase encontrar la cuerda de la mitad del arco de la cuerda dada.

Y sea el semicírculo ABC sobre el diámetro AC, y sea CB la cuerda dada. Y sea el arco bisecado en D, y trácense AB, AD, BD, y DC, y sea DF perpendicular a AC trazado desde D.

Digo que

CF = mitad (AC – AB)

… Pero cuando la perpendicular DF se traza en el triángulo rectángulo ACD, como consecuencia los triángulos rectángulos ACD y DCF tendrán sus ángulos respectivamente iguales [Euclides, VI, 8], y

AC : CD :: CD : CF. (p. 17)

Ptolomeo no utiliza aquí el lema anterior para calcular AB, porque puede hacer el cálculo directamente del Teorema de Pitágoras, aprovechando que la cuerda AC es un diámetro. El resultado está basado en la construcción de los triángulos congruentes ABD y AED y de los triángulos semejantes ADC y DFC, que lo conduce a la igualdad AC/CD = CD/CF y de aquí a la ecuación, que en la notación actual escribiríamos como $CD^2 = AC \cdot CF$. Y como AC está dado y CF ha sido calculado, entonces CD puede ser calculada. El resultado está ilustrado en la Figura 4. Aplicando repetidas veces este lema, puede calcular cuerdas que subtienden arcos de 6°, 3°, $(1\frac{1}{2})°$ y $(\frac{3}{4})°$, a partir de la que subtiende un arco de 12°.

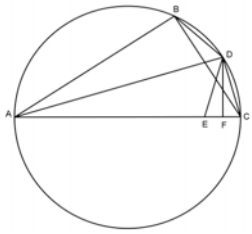


Figura 4

El quinto lema

Aquí, el Teorema vuelve a usarse para demostrar que si se tiene un arco subdividido en dos partes y se conocen las cuerdas que subtienden estas partes, entonces puede calcularse la cuerda que subtiende el todo. Ptolomeo (Ptolomy, 1952) establece este resultado en los siguientes términos:

De nuevo sea el círculo ABCD sobre un diámetro AD con centro en F. Y a partir de A córtense dos arcos consecutivos, AB y BC; y sean trazadas las cuerdas dadas AB y BC que los subtienden.

Digo que si trazamos AC, entonces AC será también dado. (p. 18)

La Figura 5 ilustra la construcción que se requiere para demostrar este lema.

Como puede verse en esta figura, si podemos calcular la cuerda CD, entonces el lema estaría prácticamente demostrado, porque AC resultaría de aplicar el Teorema de Pitágoras al triángulo ACD, puesto que AD es un diámetro. En el cálculo de CD se aplica el Teorema de Ptolomeo al cuadrilátero inscrito BCDE. En este cuadrilátero, están dados: la cuerda BC por hipótesis y BE por ser un diámetro, mientras que pueden calcularse usando el Teorema de Pitágoras: BD, DE y CE. Se tiene así que en la igualdad

$$CE \cdot BD = BC \cdot DE + BE \cdot CD,$$

la única medida desconocida es CD y por lo tanto puede ser calculada.

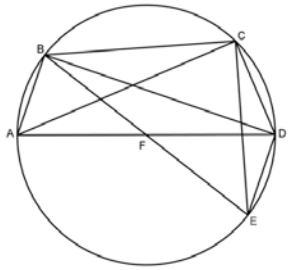


Figura 5

El sexto lema

A pesar de toda la herramienta acumulada hasta aquí, todavía los resultados obtenidos son insuficientes para calcular cuerdas que subtiendan arcos de $(\frac{1}{2})°$, porque cualquier intento enfrentaría el problema de la trisección, imposible de resolver. Por ello establece un último lema, que lo conducirá a calcular una aproximación de la cuerda que subtiende un arco de un grado. Bosquejamos aquí este lema y la manera como lo usó.

El resultado está establecido en los siguientes términos (Ptolomy, 1952):

Digo que si dos cuerdas desiguales son inscritas en un círculo, la más grande guarda con la menor una razón menor que la que el arco sobre la más grande, guarda sobre el arco de la menor.

Sea el círculo ABCD; y sean inscritas en él cuerdas desiguales, AB la menor y BC la mayor.

Digo que

cuerda BC : cuerda AB $<$ arco BC : arco AB (p. 19)

Escrito en nuestro lenguaje, este lema dice que si tenemos dos arcos $\widehat{AB}$ y $\widehat{BC}$, y sus respectivas cuerdas AB y BC (ver Figura 6), donde AB $<$ BC, entonces

$$\frac{BC}{AB} < \frac{\overline{\widehat{BC}}}{\overline{\widehat{AB}}}$$

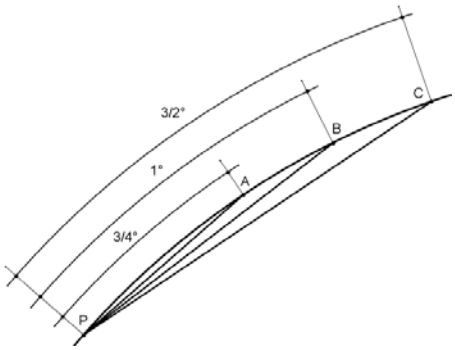


Figura 6

Establecida esta desigualdad, se puede acotar la cuerda PB por la derecha de la manera siguiente:

$$1\frac{1}{3} = \frac{\overline{\widehat{PB}}}{\overline{\widehat{PA}}} > \frac{PB}{PA}$$

O bien,

$$PB < 1\frac{1}{3}(PA)$$

Similarmente se puede acotar la cuerda PB por la izquierda:

$$1\frac{1}{2} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PB}} > \frac{PC}{PB}$$

Que puede también escribirse como,

$$PB > \frac{2}{3}(PC)$$

Pero Ptolomeo ha calculado ya las cuerdas de $(\frac{3}{4})°$ y $(1\frac{1}{2})°$, obteniendo PA= 0ᵖ 47´ 8´´ y PC = 1ᵖ 34´ 15´´, por lo que, entonces,

$$(1^p 2'50'') \approx \frac{2}{3}(PC) < PB < 1\frac{1}{3}(PA) \approx (1^p 2'50'')$$

Y concluye de aquí, que una buena aproximación para la cuerda de un grado es

$PB \approx (1^p 2'50'')$

Y es así como puede calcular la tabla, no sin antes precisar que si hubiera algún error de impresión en la tabla, el lector podrá corregirla, puesto que tiene ya todos los elementos con los que se ha construido.

Conclusiones

El recuento del texto de Ptolomeo revela que su famoso teorema fue propuesto en un contexto completamente distinto al que utilizan los libros de texto actuales de Geometría. Ciertamente que el cálculo de cuerdas es un tema que ya no está vigente en lo que se refiere a sus aplicaciones, pero mostrar el Teorema de Ptolomeo como un resultado sin más contexto que el de su consistencia geométrica, tiene sus propias repercusiones en la enseñanza de la Geometría, sobre todo en las escuelas de ciencias, donde se supone que estamos formando cuadros científicos para que puedan generar resultados científicos. Nada pareciera más lejano a la matemática como actividad humana, que la presentación de resultados, cuya validación depende de una idea genial, casi siempre muy lejana al pensamiento matemático de nuestros estudiantes. Chevallard (2000) ha llamado "transposición didáctica" al proceso de transformación de los saberes sabios en saberes a enseñar y en este caso, como en pocos, este proceso de transformación es radical. ¿Cuál debiera ser la relación entre la forma que adquiere el saber sabio y la forma que presenta el saber a enseñar? El mismo Chevallard reconoce la complejidad de esta pregunta y el Teorema de Ptolomeo seguramente no alcanza para responderla. Repensar esta transposición es a mi juicio, una parte importante del trabajo docente, porque aún cuando el contexto histórico se considerara inapropiado, esto no tendría por qué traducirse en ausencia de contexto.

Referencias bibliográficas

Chevallard, Y. (2000). *La Transposición didáctica: del Saber Sabio al Saber Enseñado*. Buenos Aires: Aique.

Eves, H. (1969). *Estudio de las Geometrías (Tomo I)*. México: Editorial Hispano-Americana

Hadamard, J. (2009). *Lessons in Geometry: I. Plane Geometry*. Rhode Island: AMS-EDC

Ptolemy, C. (1952). *The Almagest*. In Ptolemy, Copernicus, Kepler *Great Books of the Western World (16)*. Chicago: Encyclopaedia Britannica.

Shively, L. (1982). *Introducción a la Geometría Moderna*. México: CECSA

UNA PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE DERIVADA DE UNA FUNCIÓN, MEDIANTE ACTIVIDADES DE VISUALIZACIÓN

Lucía González Rendón y Marisol Radillo Enríquez
Departamento de Matemáticas, CUCEI, Universidad de Guadalajara. México
lgrendon2@yahoo.com.mx, marisol.radillo@red.cucei.udg.mx

Resumen. Se presenta un anteproyecto cuyo objetivo es diseñar una alternativa didáctica que permita al alumno construir el significado de la derivada mediante un proceso reflexivo basado en la visualización. Se proponen actividades para la enseñanza del significado geométrico de la derivada, su definición y algunas de sus propiedades, mediante el uso de diferentes representaciones semióticas, con o sin el uso de la computadora.
Palabras clave: visualización, derivada, cálculo
Abstract. On present a proposal whose goal is to design an alternative teaching allowing the student to construct the meaning of the derivative by a reflexive process based on the display. On propose activities for the teaching of the geometrical meaning of the derivative, its definition and some of its properties, using different semiotic representations, with or without the use of the computer.
Key words: visualization, derivative, calculus

Introducción

La comprensión del concepto de la derivada de una función en un punto dado conlleva un proceso complejo que involucra diversas representaciones semióticas, según el enfoque desde el cual se analice. Si se aborda el significado geométrico, se recurre a la representación gráfica de la función y la recta tangente a ella en un punto dado; la representación analítica o algebraica es más adecuada si se desea construir el significado de la derivada como el límite de un cociente. No obstante, si las actividades mencionadas no se vinculan adecuadamente entre sí mediante actividades que propicien la reflexión del estudiante sobre los objetos matemáticos involucrados, es común que se asocie la derivada a un proceso algorítmico y descontextualizado (Sánchez, García y Llinares, 2008).

Soporte teórico

El aprendizaje de los objetos matemáticos opera a nivel conceptual, pero la actividad del estudiante sobre dichos objetos solo es posible a través de sus representaciones semióticas (Hitt, 2003). Si se considera que la comprensión de un objeto matemático involucra el desarrollo de una variedad de representaciones, ya sea internas (mentales) o externas (semióticas), entonces la enseñanza debe propiciar el uso de diversas representaciones de un mismo objeto y las relaciones funcionales entre ellas (Font, 2007).

A su vez, cada una de los formas de representación, junto con las normas que las rigen, propone una caracterización distinta del correspondiente concepto, por lo que se recomienda diferenciar varias representaciones en cada concepto. Por ejemplo, la comprensión de la derivada como

razón de cambio se expresa en forma analítica o algebraica, mientras que el significado geométrico se aprecia mejor de manera gráfica.

Por otra parte la visualización matemática de un problema implica una traducción de las condiciones planteadas, usualmente expresadas en forma verbal o analítica, a otros sistemas de representación como el gráfico y/o el numérico o tabular, con lo cual es posible analizar la situación y encontrar las posibles estrategias de solución. Por ejemplo, es más sencillo percibir si la función $f(x) = x^{2/3}$ es derivable en $x = 0$, a partir de su representación gráfica, que mediante el procedimiento algorítmico de su expresión analítica, ya que en la primera se aprecia el "pico" de la curva y se asocia al teorema correspondiente sin necesidad de efectuar cálculo alguno.

Si bien el uso de la tecnología es un valioso apoyo para realizar las actividades de visualización matemática, no es la parte central de la propuesta. El objetivo de este proyecto es analizar cuáles representaciones semióticas son más adecuadas en cada etapa de la enseñanza del concepto de la derivada de una función en un punto dado.

Una parte importante de la propuesta consiste en incorporar problemas que involucran diversos contextos y que sean susceptibles de solucionarse mediante la aplicación de derivadas, para que el estudiante sea capaz de transferir el conocimiento matemático a otras ciencias. Para tal fin se plantean situaciones de crecimiento poblacional, de la eliminación de un medicamento en el organismo, o de la desintegración del carbono catorce e incluso de fenómenos sociales tales como la propagación de un rumor, de manera que la modelación matemática de estas funciones en conjunto con el planteamiento de alguna pregunta clave cuya respuesta conduzca necesariamente al concepto de la derivada. Durante el proceso de solución de cada uno de estos problemas se incorporan las actividades de visualización mediante las diversas representaciones de la derivada, ya sea con ayuda de algún programa computacional o con trabajo a lápiz y papel.

Metodología

La base del trabajo es el programa vigente de Cálculo Diferencial e Integral del CUCEI, en particular la unidad III (Derivadas) y el énfasis del trabajo se puso en el concepto de la derivada y los casos en que una función carece de derivada en un punto dado.

Para comenzar, se proporciona un adelanto del significado de la derivada como una razón de cambio en las siguientes gráficas, que describen alguna situación de nuestro "mundo real" (figura 1), y se proporcionan ejemplos de gráficas de funciones tales como crecimiento poblacional en México, la eliminación de un medicamento en el cuerpo, la desintegración del carbono 14, la propagación de un rumor y la eliminación de la cafeína consumida. Una vez analizadas todas las situaciones mencionadas, se prosigue con la siguiente explicación: Cada una de estas gráficas,

describe un cambio que está ocurriendo: el crecimiento de población, eliminación de un medicamento, propagación de un rumor y de cafeína en el cuerpo. Se puede notar que hay una relación entre estos cambios y la "inclinación" de la gráfica. El Cálculo provee la herramienta matemática para estudiar cada uno de estos cambios en forma cuantitativa. La derivada proporciona la medida numérica de la "inclinación" de una curva en un punto particular

Posteriormente se plantea la siguiente actividad inicial para introducir el concepto de la derivada desde un contexto geométrico y activar los conocimientos previos del estudiante acerca de la pendiente de una recta y la ecuación de la recta: Determine la ecuación de la recta tangente a la función $y = x^2$, en el punto P(1, 1). La solución se obtiene mediante un proceso que involucra la representación gráfica del problema y una tabulación o representación numérica de las aproximaciones de una recta secante a la recta tangente (figura 2). Se tiene diseñada una práctica mediada por la computadora para resolver este mismo problema (figura 3), aunque es opcional su implementación..

A manera de cierre de esta actividad se concluye que la pendiente de la recta tangente a una función en un punto dado es el límite de la pendiente te la recta secante ($\boldsymbol{m}_{PQ}$) a la curva $f(x)$, cuando la diferencia (***h***) entre x_Q y x_P es tan pequeña que tiende a cero.

Una vez analizado el significado geométrico de la derivada se pide calcular la pendiente de la recta tangente a la función $y = \sqrt{x}$ en (a) $x = 4$ y en (b) $x = 0$. La discusión grupal girará en torno a las siguientes preguntas: ¿Por qué no es posible obtener la pendiente para el inciso (b)? ¿En qué casos la pendiente de una recta es indeterminada? ¿Por qué no es posible determinar el límite de $y = \sqrt{x}$ cuando $x \to 0$?

UN ADELANTO DEL SIGNIFICADO DE LA DERIVADA

Para obtener una visión del objetivo final del cálculo diferencial, veremos un adelanto del significado de la derivada como una razón de cambio en las siguientes gráficas, que describen alguna situación de nuestro mundo real.

CRECIMIENTO DE POBLACIÓN EN MÉXICO

En gráfica de la figura 1, se consideraron los datos de la población de México entre los años de 1980 a 1986, para ver la forma en que estaba creciendo la población de un año a otro.

En la gráfica vemos que la población crece más y más rápido a medida que pasa el tiempo, pudiendo hacer un pronóstico para 60 años después de 1980.

En 1980 la población era de 67.38 millones, en la gráfica observamos que la población se duplicará aproximadamente en 27 años; esto recibe el nombre de *tiempo de duplicación*.

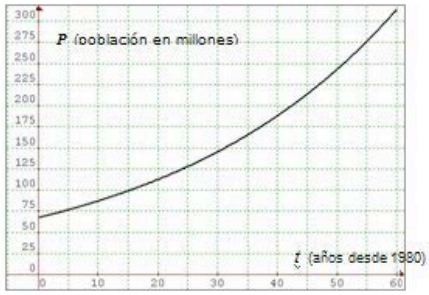


Figura 1. Crecimiento de población

ELIMINACIÓN DE UN MEDICAMENTO EN EL CUERPO

A un paciente se le suministra una dosis de 250 mg. de ampicilina. Aproximadamente 40% de este medicamento se elimina cada hora.

En gráfica de la figura 2, podemos ver que el medicamento se reduce a la mitad de su cantidad original, o sea 125 mg, después de 1.4 horas aproximadamente.

Decimos, que la *vida media* de la ampicilina es de 1.4 horas.

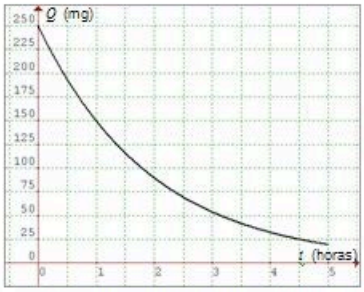
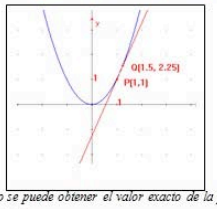


Figura 2. Eliminación de un medicamento

Figura 1. Adelanto sobre el significado de la derivada

Por ejemplo: la pendiente de la recta que pasa por P(1, 1) y Q(1.5, 2.25) tiene como pendiente:

$$m_{PQ} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{2.25-1}{1.5-1} = 2.5$$



No obstante este valor es aproximado ¿Cómo se puede obtener el valor exacto de la pendiente de la recta tangente a $y = x^2$, en el punto P(1, 1)?

Completa la siguiente tabulación de valores de la pendiente m_{PQ} conforme el punto Q se acerca al punto P:

x_Q	m_{PQ}	x_Q	m_{PQ}
0.9		1.1	
0.99		1.01	
0.999		1.001	

Se concluye que la pendiente de la recta tangente a la función en el punto (1, 1) es el ***límite*** de la pendiente de las rectas secantes $\lim_{x_Q \to x_P} m_{PQ} = 2$, que también se representa como $\lim_{x_Q \to 1} m_{PQ} = 2$

Figura 2: Representación numérica o tabular mediante la cual se determina la pendiente de la recta tangente a $y = x^2$ en (1, 1) con apoyo de la representación gráfica del problema

Actividades con computadora (opcional)

Iniciar sesión en Geogebra y seguir las siguientes indicaciones:

Comando o lugar	Acciones	Comentarios
Entrada (parte baja de la pantalla)	Capturar la función: *f(x)=x^2*	Oprimir ENTER
Entrada (parte baja de la pantalla)	Capturar: P(1,1)	Oprimir ENTER
Punto (Barra de Herramientas)	Señalar un punto sobre la función	Por default se llamará "A"
Recta que pasa por dos puntos (Barra de Herramientas)	Hacer clic sobre los puntos P y A	Por default la recta se llamará "s" Es una recta secante a f Es posible variar la posición del punto A, pero el punto P debe quedar fijo
Vista Algebraica	Colocar el cursor sobre la recta "s", oprimir el botón derecho del ratón, elegir "renombra" y cambiar nombre a "s" ; ahí mismo, elegir "propiedades" y cambiar color	La recta secante se renombra como "s" y se cambia el color.
Recta tangente (Barra de Herramientas)	Seleccionar al punto P y a un punto cualquiera de la función f	Aparece la recta tangente a f, que pasa por el punto. Por default se llamará "s"
Vista Algebraica	Colocar el cursor sobre la recta "s", oprimir el botón derecho del ratón, elegir "renombra" y cambiar nombre a "t" ; ahí mismo, elegir "propiedades" y cambiar color	La recta tangente se renombra como "t" y se cambia el color.
Entrada (parte baja de la pantalla)	Capturar: Pendiente[s]	Oprimir ENTER. En la vista algebraica aparece el valor de la pendiente de la recta secante. Por default se nombra "a". Renombrar a "ms"
Entrada (parte baja de la pantalla)	Capturar: Pendiente[t]	Oprimir ENTER. En la vista algebraica aparece el valor de la pendiente de la recta secante. Por default se nombra "a" Renombrar a "mt"

1. Arrastrar el punto A a lo largo de la función f y observar la variación de la pendiente.
2. Acercar el punto A al Punto P y comparar las pendientes de la recta secante y la recta tangente
3. Si se coloca al punto A sobre el punto P ¿qué sucede con el valor de la pendiente de la recta secante?

Figura 3. Significado geométrico de la derivada: actividad con apoyo de la computadora.

La propuesta de enseñanza continúa con la definición de derivada, su notación, algunos teoremas y la definición de derivadas laterales (figura 4).

- Una función es ***diferenciable en un punto c*** de un intervalo **[a, b]** si y solo si las derivadas laterales para ese punto son iguales.

$$f'_-(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \qquad f'_+(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

A estos límites se les conoce como "derivada por la izquierda" y "derivada por la derecha", respectivamente.

Figura 4: Definición de las derivadas laterales de una función

Después de esto se analizan los casos en que una función carece de derivada en un punto dado. Para este tema con recomendables las actividades mediadas por la computadora. En las figuras 5, 6 y 7 se muestran los casos en que una función carece de derivada en un punto dado, con imágenes obtenidas mediante el uso del *geogebra*:

- Si la recta tangente a la función en ese punto, es vertical (figura 5)
- Si el límite bilateral de la función en ese punto, no existe (figura 6)
- Si la gráfica de la función presenta un "pico" (figura 7)

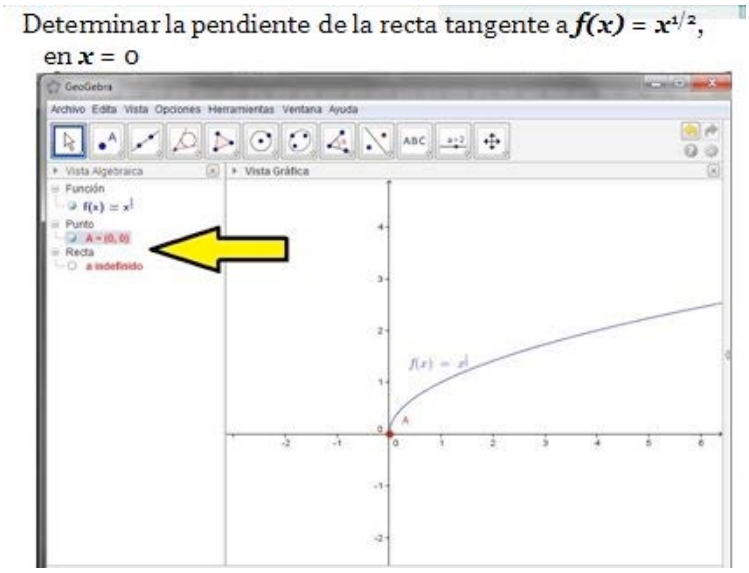


Figura 5: La función carece de derivada en un punto donde la recta tangente a ella es vertical

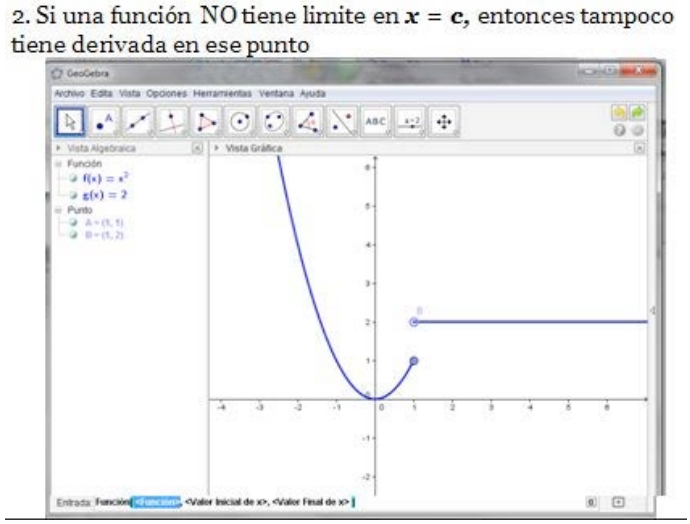


Figura 6: Si el límite de una función en un punto dado no existe, entonces la función no es derivable en ese punto.

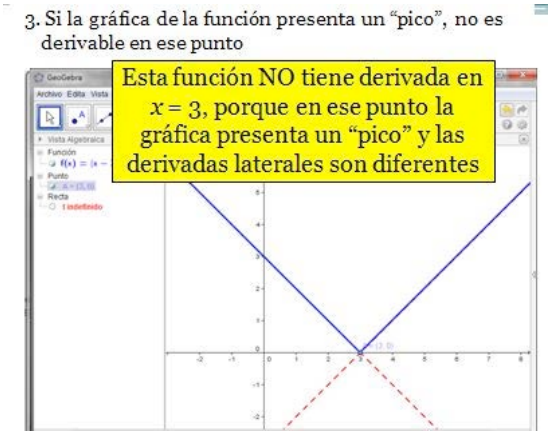


Figura 7: Si la gráfica de la función presenta un "pico" en un punto dado, entonces no es derivable en ese punto.

Consideraciones finales

El uso de las diferentes representaciones semióticas de las funciones y sus derivadas enriquece la construcción de los significados matemáticos. El resto de los contenidos del tema de las derivadas consiste en deducir las fórmulas de derivación para distintos tipos de funciones, así como las reglas del cociente, producto, de la cadena, etc., lo cual se maneja principalmente mediante procedimientos algebraicos. No obstante el manejo de las diversas representaciones semióticas que se plantean para la construcción del concepto de derivada fortalece el aprendizaje del estudiante, quien puede auxiliarse de dichos registros en cualquier momento que lo requiera.

La participación activa del estudiante en la manipulación de las representaciones semióticas, así como una secuencia de actividades apropiada, propicia el descubrimiento de la derivada de una función en un punto dado y sus propiedades.

Estas ideas son la base para una futura investigación experimental para el aprendizaje de la derivada de una función en un punto dado.

Las actividades mediadas por la computadora son un apoyo importante en esta propuesta, ya que permiten a los estudiantes construir significados mediante la manipulación de los objetos matemáticos

Referencias bibliográficas

Hitt, F. (2003). Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 10(2), 213-224.

Font, V. (2007). Comprensión y contexto. Una mirada desde la Didáctica de las Matemáticas. *La Gaceta de la RSME, 10(2),* 419-434.

Sánchez, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en la Didáctica de la Matemática. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 11(2)*, 267-296.

PRUEBAS INFORMALES EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

Rodolfo Eliseo D´Andrea; Alejandra Cañibano y Patricia Sastre Vázquez
Pontificia Universidad Católica Argentina. Campus Rosario. Argentina
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires
rodolfoedandrea@yahoo.com.ar, mac@faa.unicen.edu.ar, pasava2001@yahoo.com.ar

Resumen. En Argentina, desde fines del siglo pasado, se inició una tendencia a la supresión de demostraciones rigurosas en cursos de Matemática universitaria que utilizan esta Ciencia como herramienta. Las demostraciones informales fueron tomando su lugar, aunque no en la generalidad. El objetivo de este trabajo es mostrar los resultados de un análisis empírico acerca de la actitud cognitiva de estudiantes universitarios frente a pruebas rigurosas y pruebas informales. Los resultados, en general, muestran que las pruebas informales facilitan el acceso del estudiante universitario al abordaje de la demostración matemática. Este tipo de pruebas no tiene un rigor formal, pero permiten el razonamiento y la justificación en el estudiante en procesos de validación de proposiciones.

Palabras clave: demostraciones rigurosas, pruebas informales, estudiantes

Abstract. In Argentina, since late last century, it began a trend towards the abolition of rigorous proofs in university mathematics courses that use this Science as a tool. The Informal proofs were taking their place, though not in his generality. The objective of this work is show the results of an empirical analysis of the cognitive attitude of college students that face rigorous and informal proofs. The results generally show that informal proof provide access to student to mathematical proof. This type of proof has no formal rigor, but allow reasoning and justification in the student process validation of propositions.

Key words: rigorous demonstrations, informal proofs, students

Introducción

En Argentina, desde fines del siglo pasado se inició una tendencia a la supresión de demostraciones rigurosas, en cursos de Matemática universitaria que utilizan esta Ciencia como herramienta. Las demostraciones informales fueron tomando su lugar aunque no en la generalidad. El objetivo de este trabajo es mostrar los resultados de un análisis empírico, sustentado en un breve marco teórico, acerca de la actitud de estudiantes universitarios frente a pruebas rigurosas y pruebas informales.

La utilidad de la prueba matemática es el razonamiento que se oculta detrás de los eslabones argumentativos que constituyen la cadena de la demostración. El ejercicio cotidiano de la demostración, fundado en la práctica habitual y natural de la clase teórico – práctica, es lo que realmente estimula los diferentes tipos de razonamientos que el estudiante universitario necesita desarrollar. Esta práctica no requiere del rigor de una prueba formal, sino de una prueba que arribe al objetivo y que además permita que el estudiante pueda justificar cada eslabón de la argumentación que constituye la prueba. Dreyfus (2000), expresa que las demostraciones deberían estar presentes siempre en todos los contenidos que constituyen el currículo de Matemática. Que estén presentes no es equivalente a que el estudiante tenga que reproducir demostraciones de memoria, considerando el formalismo bourbakiano.

Las pruebas informales no requieren de artificios o construcciones complejas que permitan el arribo a la tesis, requiriendo únicamente de razonamientos simples que establecen los eslabones de la cadena argumental de la prueba. La comprensión del desarrollo de la demostración en su totalidad constituye el verdadero objetivo del proceso de validación de la proposición y esto puede satisfacerlo una prueba informal. Independientemente del rigor de la prueba y de su valor epistemológico, lo que interesa realmente es que el estudiante pueda justificar, argumentando. Como consecuencia, razonando ante el valor de verdad de una proposición, y a través de un razonamiento aunque simple y sin grandes pretensiones, de forma tal que el estudiante, no termine aceptando a esa proposición como un axioma.

Resnick (1992), afirma que la Matemática contemporánea está repleta de "*working proofs*", es decir, pruebas informales no axiomatizadas. El estudiante posmoderno, retrasa cada vez más el pensamiento formal, y aquellas pruebas tan rigurosas del pasado, son cada vez menos accesibles a su pensamiento y a través del mecanismo de la prueba informal se pretende impedir 'la muerte de la demostración'. De esta forma, se pretende que el estudiante pase por el tamiz de la demostración, y no termine aceptando axiomáticamente la propiedad con la conformidad de algunos ejemplos. Ese tamiz de la demostración, si bien es carente de rigor formal, tiene como fin, que el sujeto de aprendizaje pueda llevar a cabo un razonamiento que exceda, aunque ligeramente, una simple justificación.

Un ejemplo de prueba formal y su versión informal

A continuación consideraremos por razones de espacio, un ejemplo representativo de una prueba estructurada formalmente y su versión informal. Consideremos el teorema de la derivada de la función compuesta.

Sea I un intervalo abierto, y sea $f: I \to R$ una función derivable en $x_0 \in I$, y sea g: $R \to R$, una función derivable en $y_0 = f(x_0)$, entonces:

$F = gof: I \to R / F(x) = gof(x)$ es derivable en x_0 y resulta que:

$$[gof(x)]' = g'(y_0).f'(x_0)/y_0 = f(x_0).$$

prueba formal: Sea $h \in R / x_0 \in I$

$$F'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g(f(x_0+h))-g(f(x_0))}{h} = \lim_{k\to 0}\frac{g(y_0+k)-g(y_0)}{h}$$
$$= \lim_{k\to 0}\frac{k.g'(y_0)+k.\gamma(k)}{h} =$$

$$= \lim_{k\to 0}\frac{k.\left(g'(y_0)+\gamma(k)\right)}{h} = \lim_{k\to 0}\frac{k}{h}\left(g'(y_0)+\gamma(k)\right) =$$

$$= \underbrace{\lim_{k\to 0}\frac{k}{h}}_{\to f'(x_0)} . \left[\underbrace{\lim_{k\to 0} g'(y_0)}_{=g'(y_0)} + \underbrace{\lim_{k\to 0}\gamma(k)}_{\to 0}\right] = f'(x_0).g'(y_0)$$

Nota: Llamamos a $f(x_0+h)-f(x_0)=k$.

La prueba expuesta carece de justificaciones como en la generalidad de los textos universitarios. Es tarea del estudiante encontrar esos argumentos que sostienen las cadenas argumentativas. En esta prueba, el sostenerse sobre las hipótesis permite generar a partir del cociente incremental, la tesis que se quiere probar, teniendo en cuenta que si g es una función derivable, también es diferenciable. En la prueba informal, más allá del artificio (elemental) de multiplicar y dividir por el incremento de la función f, que permite la construcción de los cocientes incrementales que se quieren llegar a establecer de la tesis, se halla presente como en la prueba formal, el momento clave en el final. En este momento, donde se llega a la tesis a partir de que los límites de los cocientes incrementales hallados existen en función de argumentaciones que provienen de las hipótesis del teorema.

Prueba informal:

$$F'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g(f(x_0+h))-g(f(x_0))}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{g(f(x_0+h))-g(f(x_0))}{h}.\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{f(x_0+h)-f(x_0)} =$$

$$= \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{g(f(x_0+h))-g(f(x_0))}{f(x_0+h)-f(x_0)}}_{\to g'(f(x_0))} . \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{\to f'(x_0)} = g'\left(f(x_0)\right).f'(x_0)$$

Experimentación

La experimentación está desarrollada de acuerdo a la propuesta didáctica desarrollada en su investigación por D´Andrea, Curia y Lavalle (2012). Esta propuesta consiste en un proceso metodológico que pretende acercar al estudiante a la demostración matemática desde las tres facetas del lenguaje matemático: coloquial, simbólico y visual.

Durante los años 2011 y 2012, se realizó la misma experiencia con estudiantes ingresantes de Ingeniería que cursaban la asignatura Cálculo I (Cálculo en una variable). En el primer año se realizó la experiencia, con 26 estudiantes y en el segundo año con 23 estudiantes. Los estudiantes seleccionados para las actividades que se proponían eran ingresantes 'puros', es decir, estudiantes

que no habían pasado por la experiencia de cursar otra carrera universitaria en otra facultad. La experiencia tuvo dos etapas.

En la primera etapa, el estudiante se encontraba en el proceso de aprendizaje del Precálculo (PC). Esta primer etapa se dividió a su vez, en dos partes.

En la primera parte de la primer etapa, el docente les expuso a los estudiantes, la prueba formal, acerca de la siguiente propiedad del valor absoluto: $\forall x \in R: \forall y \in R: |x.y| = |x|.|y|$. A continuación, se les propuso a los estudiantes, tres actividades relacionadas con la proposición expuesta.

Nota previa: En cada una de las siguientes experiencias, se exigía que para la realización de cada prueba, fuera justificada la argumentación de cada paso que la constituía de forma coloquial.

La Experiencia 1 que se simboliza: PC.Exp.1. consistió en que los estudiantes leyeran comprensivamente la propiedad expuesta durante unos minutos. Luego se les pidió que la reprodujeran en un papel, con algunas sugerencias para su realización.

La Experiencia 2 que se simboliza: PC.Exp.2. consistió en que los estudiantes realizaran otra versión de la prueba expuesta (una prueba informal), con las sugerencias de algunas ideas para ser llevada a cabo.

La Experiencia 3, que se simboliza: PC.Exp.3. consistió en que los estudiantes pudieran generar la prueba correspondiente a la propiedad del valor absoluto correspondiente al cociente de dos números reales, apelando a un razonamiento analógico al realizado en la prueba correspondiente a la Experiencia 2.

En la segunda parte de la primer etapa, se les presentó a los estudiantes a través de la exposición en pizarrón, la prueba formal de la siguiente propiedad del valor absoluto:

$$\forall x \in R: \forall a \in R^{+}: |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a.$$

A continuación, se les propuso a los estudiantes, tres actividades relacionadas con la proposición expuesta.

La Experiencia 4, que se simboliza: PC.Exp.4. consistió en que los estudiantes leyeran comprensivamente la propiedad expuesta durante unos minutos. Luego se les pidió que la reprodujeran en un papel, con algunas sugerencias para su realización.

La Experiencia 5, que se simboliza: PC.Exp.5. consistió en que realizaran otra versión de la prueba (una prueba informal), con las sugerencias de algunas ideas para ser llevada a cabo.

La Experiencia 6, que se simboliza: PC.Exp.6. consistió en que el estudiante pudiera generar la prueba correspondiente a la propiedad del valor absoluto:

$$\forall x \in R: \forall a \in R: |x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \vee x \leq -a.$$

, apelando a un razonamiento analógico al realizado en la prueba correspondiente a la Experiencia 5.

La segunda etapa se llevó a cabo cuando el estudiante se encontraba realizando el proceso de aprendizaje del Cálculo Diferencial (CD). Esta segunda etapa, de forma similar a la primera, también se dividió en dos partes.

En la primera parte, el docente les expuso a los estudiantes, la prueba formal sobre el teorema correspondiente a la derivada de la función compuesta. A continuación, se les propuso a los estudiantes, dos actividades relacionadas con la proposición expuesta.

La Experiencia 7 que se simboliza: CD.Exp.7. consistió en que los estudiantes leyeran comprensivamente la propiedad expuesta durante unos minutos. Luego se les pidió que la reprodujeran en un papel, con algunas sugerencias para su realización.

La Experiencia 8 que se simboliza: CD.Exp.8. consistió en que los estudiantes realizaran otra versión de la prueba (una prueba informal), con las sugerencias de algunas ideas para ser llevada a cabo.

En la segunda parte, el docente les expuso a los estudiantes, la prueba formal sobre el teorema de la derivación de funciones inversas, siguiendo el mismo proceso que para la derivada de funciones compuestas. A continuación, se les propuso a los estudiantes, dos actividades relacionadas con la proposición expuesta.

La Experiencia 9 que se simboliza: CD.Exp.9. consistió en que los estudiantes leyeran comprensivamente la propiedad expuesta durante unos minutos. Luego se les pidió que la reprodujeran en un papel, con algunas sugerencias para su realización.

La Experiencia 10 que se simboliza: CD.Exp.10. consistió en que realizaran otra versión de la prueba (una prueba informal), con las sugerencias de algunas ideas para ser llevada a cabo.

Resultados

A continuación se muestran los resultados obtenidos durante las experiencias descriptas en el párrafo anterior. Los porcentajes que muestran las tablas siguientes revelan el porcentaje de estudiantes que efectivamente logró llevar a cabo la actividad propuesta en cada experiencia. Se consideró para este estudio que el estudiante fue capaz de llevar a cabo efectivamente la prueba

cuando pudo efectuar lo que Balacheff (2000) denomina *cálculo sobre enunciados.* En este tipo de prueba se establecen construcciones intelectuales basadas en teorías más o menos formalizadas o explícitas, que se originan en una definición o propiedad y se basan en la transformación de expresiones simbólicas formales.

	PC Exp.1	PC Exp.2	PC Exp.3	PC Exp.4	PC Exp.5	PC Exp.6
2011	8%	73%	69%	8%	81%	73%
2012	4%	74%	78%	8%	83%	74%

Figura 1: porcentajes obtenidos durante los años 2011/2012 de estudiantes que efectivamente logran desarrollar las actividades propuestas en la etapa del Precálculo.

	CD Exp.7	CD Exp.8	CD Exp.9	CD Exp.10
2011	8%	78%	4%	69%
2012	8%	74%	8%	78%

Figura 2: porcentajes obtenidos durante los años 2011/2012 de estudiantes que efectivamente logran desarrollar las actividades propuestas en la etapa del Cálculo Diferencial.

En la experiencia 1, los estudiantes mostraron que a pesar de las sugerencias para la realización de una prueba ya expuesta y explicada detalladamente, no pudieron llevarla a cabo. La carga formal de la prueba y las justificaciones implícitas generaron una brecha difícil de atravesar para el estudiante. Esta prueba fue reproducida por dos estudiantes en el primer año de la experiencia, mientras que solo uno pudo llevarla a cabo en el segundo año.

En la experiencia 2, un importante porcentaje de la muestra pudo llevar a cabo la prueba con porcentajes idénticos en los dos años.

En la experiencia 3, los estudiantes por razonamiento analógico pudieron llevar a cabo la prueba un importante porcentajes de forma similar en los dos años.

En la experiencia 4, los estudiantes nuevamente frente a la experiencia de tener que reproducir una prueba formal, a pesar de las sugerencias, se obtuvieron idénticos resultados en los dos años y fueron solamente dos estudiantes en cada año quiénes pudieron llevarla a cabo.

En la experiencia 5, los estudiantes en un importante porcentaje llegaron a la meta con resultados idénticos en los dos años.

En la experiencia 6, frente a un razonamiento analógico, los estudiantes pudieron llevar también la prueba a cabo con porcentajes similares en los dos años pero algo menor a la experiencia 5, aunque también un importante porcentaje.

Las experiencias 7 y 9, de estructura similar a las experiencias 1 y 4, permitieron ver resultados también similares a las mencionadas en los dos años. La casi totalidad de los estudiantes analizados en cada año no pudo reproducir la prueba propuesta.

Las experiencias 8 y 10, de estructura similar a las experiencias 2 y 5, también permitieron ver resultados similares a estas en los dos años. En ambos años, un porcentaje muy importante de los estudiantes analizados pudo llevar a cabo las pruebas.

Conclusiones

En general, los resultados de las pruebas aplicadas, obtenidos durante el segundo año fueron similares a los del primer año. Es representativo y suspicaz, que los estudiantes no pudieron llevar a cabo una prueba formal, expuesta minutos antes por el docente en clase, con las explicaciones correspondientes y sugerencias para su realización. Es claro, que esta observación hace referencia a las experiencias 1,4,7 y 9 respectivamente. En general, los estudiantes se limitaron en muchos casos, a exhibir algunos ejemplos de lo expuesto por el teorema. Esta es una actitud que se reitera en los estudiantes cuando no se sienten capaces de abordar o llevar a cabo una demostración. Se especula que esto puede obedecer también a la formalidad de la prueba, como consecuencia de los ítems a tener en cuenta para poder llevar a cabo la cadena argumentativa que constituye la prueba. Los estudiantes frente a estos desafíos no se sienten capaces de llevarlos a cabo. Paralelamente, también se especula en que la estructura de la prueba en su globalidad no fue comprendida por los estudiantes, al ser expuesta. Esta hipótesis, surge como consecuencia de los resultados obtenidos en todas las tareas que implicaban la reproducción formal de una prueba expuesta por el docente previamente. Las pruebas informales propuestas con una serie de sugerencias para ser llevadas a cabo, fueron desarrolladas por los estudiantes de forma tal que, sin sesgos formales pudieron llegar a la tesis. Asimismo, en general los estudiantes que llevaron a cabo las tareas propuestas, no justificaron las argumentaciones realizadas para llevar a cabo las demostraciones, a pesar del explícito pedido previo por parte del docente.

Azcárate Giménez (1995) explica que

> a menudo, la demostración existe para el alumno como un ritual, un discurso que debe repetir o cuyo estilo debe imitar si se le pide probar un enunciado, más que como una herramienta explicativa basada en un sistema común de validación construido y aceptado por él y su grupo (Balacheff, 1982*)*. (Azcárate Giménez, 1995, p.8).

Esto es una realidad que día a día puede experimentar cualquier docente universitario de Argentina, pero que también día a día se va debilitando ya que la cultura visual del estudiante cada vez más dominante, directamente convierte la ritualidad en una negación a la reproducción

de pruebas cargadas de rigor. El estudiante posmoderno, cada vez se va alejando de la ritualidad para abrirse a una nueva postura. Esa nueva postura equivale a la no realización de lo requerido por el docente, en oposición a la actitud ritual muy común y usual en las décadas pasadas. Esto invita a la reflexión de los docentes, acerca del valor de la prueba informal como agente eficaz y seguro para el razonamiento del estudiante.

Es intención seguir repitiendo esta experiencia con nuevos grupos de ingresantes, para recabar mayor información que permita saber y profundizar aún más acerca de lo observado. Es de destacar que en las nuevas experimentaciones se agregará en cada una de las etapas, la exposición por parte del docente de pruebas informales acerca de una propiedad del valor absoluto, y un teorema del Cálculo Diferencial. Esto, a los efectos de ver la actitud de los estudiantes frente a la exposición de este tipo pruebas por parte del docente y su posterior reproducción sin sugerencia alguna para su realización.

Los resultados expuestos podrían considerarse como un acicate para la búsqueda por parte del docente de pruebas válidas pero informales para llevar a cabo procesos de validación en el aula accesibles para la comprensión, reproducción y generación de nuevas pruebas por parte de los estudiantes.

Referencias bibliográficas

Azcárate Giménez, C. (1995). *Procesos de pensamiento matemático avanzado. Definiciones, demostraciones, ¿Por qué?, ¿Cuándo?, ¿Cómo?* Documento interno del Departamento de Didáctica de la Matemática y Ciencias Experimentales de la Universidad Autonóma de Barcelona.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas. Una empresa docente*. Bogotá: Universidad de Los Andes.

D´Andrea, R.E., Curia, L. y Lavalle, A. (2012). *Razonamiento deductivo y validación en estudiantes universitarios.* Alemania: Editorial Académica Española.

Dreyfus, T. (2000). La demostración como contenido a lo largo del curriculum. En N. Gorgorió, A. Deulofeu, y A. Bishop (Coords.). *Matemáticas y Educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional*. Graó. S.R.L.: Barcelona.

Resnick, M. D. (1992). Proof as a source of truth. En M. Detlefsen (ed.), *Proof and knowledge in mathematics,* 6-32. London: Routledge.

LA INTEGRAL ABSOLUTA GAUSSIANA

Rogelio Ramos Carranza, Armando Aguilar Márquez, Frida María León Rodríguez, Omar García León y Juan Rafael Garibay Bermúdez
Universidad Nacional autónoma de México. México
egorrc@gmail.com, armandoa@unam.mx, fridam@unam.mx egor1131@unam.mx, juragabe@unam.mx

Resumen. Una de las propiedades geométricas diferenciales como una medida de la calidad en las aproximaciones numéricas para el modelado de superficies irregulares, se considera a la denominada integral absoluta gaussiana; expresión que se refiere tanto al área como a la curvatura de un determinado cuerpo o superficie. El problema que se plantea esta experiencia en clase es, el cómo tratar al modelado numérico en el proceso enseñanza y aprendizaje matemáticos en el aula (Arrieta, 2003). Las matemáticas tienen una intencionalidad y un lugar en un determinado estadio histórico de la cultura del ser humano. Se resuelve el problema utilizando una metodología en la que se circunscribe o contiene al objeto matemático en cuestión en un marco referido a la práctica contextualizada en el ámbito profesional de las Ingenierías y de la tecnología. La práctica se realizó en torno a los objetos: determinación de la Mejor Triangulación dependiente de los datos y la Integral Absoluta Gaussiana; objetos utilizados en reconstruir una superficie de datos espaciados irregularmente.
Palabras clave: integral absoluta gaussiana, modelado numérico
Abstract. A differential geometric properties as a measure of quality in the numerical approximation for modeling irregular surfaces, is considered a so-called absolute integrated Gaussian; expression that refers to both the area and the curvature of a given body or surface. The problem that arises is this experience in class, on how to treat the numerical modeling in mathematics teaching and learning process in the classroom (Arrieta, 2003). Mathematics has an intention and a place in a specific historical stage of human culture. We solve the problem using a methodology that is limited or contains the mathematical object in question in a framework on contextualized practice in the professional field of Engineering and Technology. The practice was carried around objects: Determining the Best Data Dependent Triangulation and Integral Absolute Gaussian; objects used to reconstruct a surface from irregularly spaced data.
Key words: gaussian absolute integral, numerical modeling

Introducción

El concepto básico, del objeto matemático Integral absoluta Gaussiana, tiene una expresión gráfica (Alboul, 1999), la cual se muestra en la figura 1.

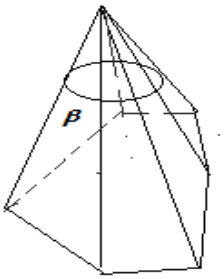


Figura 1: El objeto integral absoluta Gaussiana tiene un concepto fundamental llamado Curvatura, cuya expresión geométrica se visualiza en esta gráfica.

Un ejemplo de una aplicación (Alboul, 1999) del objeto matemático en estudio se muestra en la figura 2.

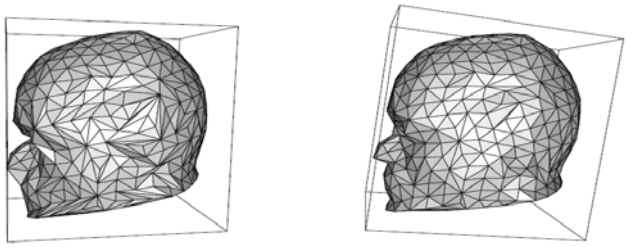


Figura 2: El antes (izquierda) y el después (derecha) de la aplicación del criterio de ajuste de la Curvatura, en la que se ilustra con un caso de aproximación a una parte del cuerpo humano

Una vez establecidos el contexto de la práctica y los objetos matemáticos de estudio, se consideran los elementos metodológicos que enseguida se refieren.

Un aspecto metodológico fundamental es la práctica social contextualizada, uno más de los elementos de la metodología es el modelado numérico y estos elementos se llevan a la actividad escolar universitaria. La propuesta teórica de este comunicado, se refiere al cómo se pueden poner en movimiento los mencionados elementos metodológicos mediante la ingeniería didáctica.

Cabe destacar que la modelación de fenómenos en el aula es posible debido a dos componentes fundamentales que son la metodología de la investigación en Matemática educativa y el desarrollo y aplicación de los medios tecnológicos, estos últimos utilizados como amplificadores de las capacidades sensoriales, motrices y racionalizadoras.

Para el diseño de la experimentación se proponen diversos casos que tratan de fenómenos ingenieriles y tecnológicos; y consiste en que, cada estudiante o equipo de estudiantes de distintas carreras (Ingeniería Mecánica, Eléctrica, Electrónica, Ingeniería Química y Licenciatura en Tecnología); propone un fenómeno asociado al objeto matemático numérico aquí tratado.

El problema es resuelto usando los medios tecnológicos que permiten realizar la práctica en el aula universitaria o bien mediante la recolección de los datos del experimento que corresponda al fenómeno planteado para procesarlos en el aula y ver los distintos resultados para su análisis e interpretación.

Se observa que el estudiante se ve motivado, debido a la puesta en escena de algunos elementos de la práctica didáctica; uno de estos elementos motivadores es la contextualización de los fenómenos propuestos por los estudiantes. Otros elementos de motivación son la visualización del fenómeno, la recolección de datos de la experimentación y el procesado de dichos datos de entrada usando medios tecnológicos.

Algunos aspectos metodológicos

Se han tratado muchas propuestas de tipo educativo, las que hacen caso omiso de la importancia que tiene el estudiante, el salón de clase y el contexto universitario. En esta comunicación se enfocan los esfuerzos en la atención a lo que sucede en el aula universitaria, y en el papel de la interacción social; argumentando que la construcción del conocimiento es un proceso social de creación conjunta y no un proceso individual aislado.

Como resultado de las prácticas ejercidas por grupos sociales en contextos sociales específicos y reproducidos por comunidades surgen los conocimientos matemáticos como construcciones sociales. Por lo tanto las matemáticas y la tecnología pueden ser vistos como empresas humanas; de ahí que es fundamental saber acerca de sus potenciales y limitaciones, y así utilizar el conocimiento científico con propósitos tanto sociales como personales. En el proceso socio epistemológico, las propuestas incluyen reflexiones sobre el papel que la universidad debe jugar.

Es muy importante mencionar que uno de los fundamentos de la metodología es el observar cómo, la modelación de un fenómeno en el aula o en el campo de acción, podría conformar una poderosa fuente de componentes para la construcción del conocimiento matemático.

Estos aspectos que hemos mencionado en esta comunicación han de ser sostenidos por los conceptos teórico-metodológicos, señalados por Jaime Arrieta en su tesis doctoral:

> Sostenemos que el aprendizaje es una actividad situada en contextos sociales, donde los actores sociales ejercen prácticas usando y construyendo herramientas, modificando con esta actividad las mismas prácticas y las herramientas, su entorno, su identidad, su cognición y su realidad (Arrieta, 2003, p. 25).

Descripción del objeto Matemátic

Concepto de triangulación

La triangulación de un conjunto de datos es una técnica esencial para la solución de problemas en la reconstrucción de superficies; mediante la aproximación con interpolación de datos dispersos o bien en aplicaciones en las que se requiere recuperar objetos en tres dimensiones. El problema de la reconstrucción de una superficie puede ser formulado de la forma descrita a continuación.

Dado un conjunto de datos:

$$\{(x^i, y^i, z^i) \in R^3\}\, i = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Ajustar una superficie al conjunto dado

Se supone que la ubicación de los datos es irregular.

En general En general no es posible interpolar o aproximar los datos sin pre procesamiento. Primero se necesita organizar los datos o, en otras palabras, construir una estructura sobre los datos. Por lo tanto el primer paso en la evaluación de una superficie es el de obtener una triangulación de los datos. La determinación de una triangulación de los datos, la aproximación más simple llamada C^0, es el camino más rápido y más barato para echar un vistazo inicial a los datos antes de pasar a la aplicación de los métodos de aproximación /interpolación de orden superior. Una buena triangulación puede ayudar a resolver muchos problemas.

Estos problemas no están limitados a la determinación de interpolaciones suavizadas, sino que también conciernen a la definición de forma del objeto (Zahn, 1971).

Utilizando criterios de geometrías puras (Alboul, 1997) han introducido nuevas triangulaciones de datos tridimensionales irregulares ubicados. El primero se denomina triangulación de ajuste y se basa en la optimización de una analogía discreta sobre la integral absoluta Gaussiana. Las Triangulaciones de ajuste son evidentemente mejor que las triangulaciones de Delaunay, como por ejemplo, la triangulación de ajuste conserva automáticamente convexidad. El segundo criterio de optimización que se propone (Alboul, 1997), concierne a triangulaciones que minimicen la *integral de curvatura media absoluta*. Hasta ahora no estaba claro cuál de los dos criterios era el mejor, y cómo se comparan con los métodos conocidos en la literatura, tales como:

Reducir al mínimo el área del objeto resultante, Criterios heurísticos los cuales se puede encontrar, Métodos basados en la minimización de un cierto funcional, como la energía de una placa de flexión, limitada por las condiciones de interpolación. (Con la desventaja de este método, que sólo funciona para los datos funcionales).

Así, en primer lugar se hará una breve revisión de los métodos de triangulación, basado en la minimización de la *absoluta* de Gauss y la curvatura media. Se han realizado experimentos numéricos para objetos cerrados con estos criterios de lo que resulta que estos últimos, en general, funcionan mejor, aunque este método puede ser que no preserve la forma: no se sabe si el método conserva convexidad en general.

La segunda parte describe la calidad de los métodos para el caso especial de datos funcionales: ambos métodos, tanto el ajuste como la minimización de la curvatura media absoluta, pueden ser comparados con los métodos conocidos en la literatura. También en estos casos el criterio principal parece ser superior cuando se trata de precisión

Criterios geométricos para una mejor triangulación

Esta sección revisará las cantidades geométricas, integral Gaussiana y la curvatura media de la triangulación, así como Gauss y curvatura media absoluta. Para suavizar los objetos curvatura de Gauss ***K*** y curvatura media ***H*** se definen en términos de las curvaturas principales λ_1 y λ_2 siendo estos los valores propios de la diferencial del mapa de Gauss.

Con lo que se define:

$$K = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \quad \text{y} \quad H = \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} H = \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2}$$

La versión integral de esas cantidades puede ser definida también para las triangulaciones, lo que permitirá definir, para diferentes criterios la mejor triangulación. Se consideran dos, de tales criterios.

Curvatura Gaussiana

La noción de curvatura gaussiana es uno de los conceptos centrales en geometría diferencial y está estrictamente relacionado con el concepto de ángulo. Sobre la base de la noción de ángulo, podemos definir las siguientes curvaturas de una triangulación Δ considerado como una superficie poliédrica:

La integral de curvatura k (análogo la integral de curvatura gaussiana).

El ángulo total $\theta(v)$ en torno al vértice v es la suma de los ángulos de todos los polígonos planos que inciden en dicho vértice, llamado el inicio de v, es decir $Star(v)$. Para cualquier punto $x \in \Delta$: $K(x) = 2\pi - \theta(x)$. La cantidad k es conocida como el déficit de ángulo. Solo para los vértices se tiene que $k(x) \neq 0$, ver figura 3.

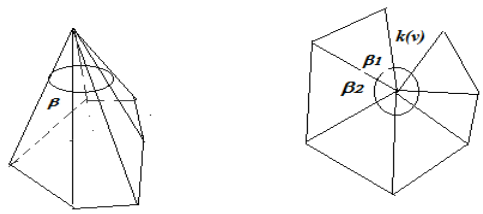


Figure 3. - Curvatura en torno al vértice: $K(v) = 2\pi - \sum \beta_i = 2\pi - \theta(v)$.

La curvatura positiva extrínseca $k^+(v)$

Supongamos que a través del vértice k pasa algún plano de apoyo (local), de una triangulación Δ. Entonces, este vértice se encuentra en el límite de la envolvente convexa de inicio $Star(v)$. Se denota el inicio v en el límite de la envolvente convexo por $Star^+(v)$ y le llamaremos el inicio

del cono convexo de un vértice. La curvatura $k^+(v)$ de $Star^+(v)$ se llama la curvatura positiva (extrínseca) de v. Si no hay ningún plano de soporte a través de v entonces se coloca, $k^+(v)$ igual a cero .

El curvatura negativa extrínseca:

$$k^-(v):\ k^-(v) = k^+(v) - k(v).$$

La curvatura absoluta extrínseca:

$$\hat{k}(v):\ \hat{k}(v) = k^+(v) + k^-(v).$$

Podemos definir los siguientes conjuntos de vértices:

Vértices convexos apropiados:

$$k(v) = k^+(v) = \hat{k}(v) \text{ y } k^-(v) = 0.$$

Geométricamente esto significa que $Star(v)$ coincide con $Star^+(v)$.

Vértices en forma de silla de montar apropiados:

$$\hat{k}(v) = k^-(v) = -k(v)$$

La curvatura gaussiana k de un montaje (silla de montar) de vértice adecuado es menor que cero y no existe plano de soporte, es decir, no existe un plano que pase a través del vértice v de tal manera que todos los vértices vecinos se encuentran en el mismo lado de (o en) este plano.

Vértices mixtos:

$$k^-(v) > 0 \text{ y } k^+(v) > 0$$

Un vértice es mixto, si no es ni convexo ni en forma de silla de montar. Por lo tanto, tiene un plano de soporte, pero existen dos sucesivas aristas incidentes en el vértice que abarcan un plano que divide el conjunto de vértices adyacentes.

Ejemplos de los tres vértices descritos se dan en la figura 4

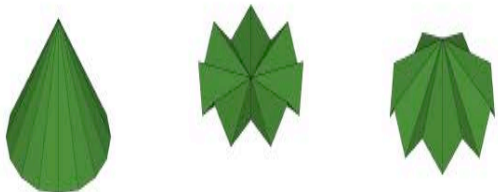


Figura 4: Los tres tipos de vértices: convexo apropiado, silla de montar apropiado y , combinada

Curvatura Absoluta Total (extrínseca) $k_{abs}(\Delta)$ de una triangulación Δ esta dada por la expresión:

$$k_{abs}(\Delta) = \sum_{v_\alpha convex} k^+(v_\alpha) + \sum_{v_\beta\ saddle} k^-(v_\beta) + \sum_{v_\gamma\ mixed}(k^+(v_\gamma) + k^-(v_\gamma)).$$

Para cualquier traingualación apropiada convexa, silla de montar apropiada y vértices combinados forman una partición de todos los vértices.

Definición. Dado un conjunto de datos $\{x^i\}\ i = 1, 2, 3, \ldots, N$. Una triangulación $\bar{\Delta}$ del conjunto de datos, utilizados para ajustar una triangulación, si es apropiado, y si $k_{abs}(\bar{\Delta})$, es mínima, es decir:

$$k_{abs}(\Delta) \leq k_{abs}(\bar{\Delta})$$

Para todas las otras posibles triangulacionesΔ.

Algunas propiedades de la triangulación ajustada (Alboul, 1997), son descritas; siendo la más importante aquella que conserva convexidad. Por otra parte se puede demostrar que con el algoritmo de intercambio local (Lawson, 1977), primero sugerido por el citado autor, en realidad este óptimo global puede obtenerse si los datos son convexos.

Por desgracia, este criterio de optimización tiene algunos resultados negativos, puesto que parece crear triángulos largos y delgados no deseados.

Otra curvatura que se puede definir para un poliedro y en consecuencia, para una triangulación, es la curvatura media. Se demuestra fácilmente que una definición apropiada para la integral de curvatura media en una tira a lo largo de un eje e, está dada por:

$$H(e) = \alpha \cdot \|x_i - x_j\|$$

Aquí x_i, x_j son las coordenadas de los vertices del eje e, y α es el ángulo entre las normales de los dos triángulos los cuales tienen al eje e en común. (Esto puede ser derivado, al considerar una aproximación C^1 de la triangulación remplazando los ejes por un cilindro de radio pequeño.

El criterio de minimización de la curvatura media absoluta esta dado por:

$$H_{abs} = \sum_e |H(e)|,$$

Y en consecuencia una triangulación de un conjunto de datos, se dice que es la triangulación de mínima curvatura media absoluta, siH_{abs} es adecuada y se reduce al mínimo. Esta definición implica que buscamos triangulaciones que minimicen:

$$\int_K (|k_1 + k_2|)\, dS$$

También como

$$\int_K (|k_1| + |k_2|)\, dS$$

Puesto que:

Los vértices no tienen contribución alguna en la integral, ya que tienen medida cero, Los puntos dentro los triángulos no tienen contribución, ya que ambas curvaturas principales son cero.

Los bordes tienen contribución, pero sólo de una curvatura principal, el otro es cero. Dado que sólo una de las dos curvaturas principales es distinta de cero, también se reducen al mínimo las siguientes cantidades:

$$\int_\Omega \max(|k_1|, |k_2|)\, dS, \quad \int_\Omega \sqrt{k_1^2 + k_2^2}\; dS$$

Este criterio da resultados muy prometedores. Este resultado se obtiene utilizando un algoritmo de intercambio local con condición inicial como la triangulación ajustada, obtenido en la subsección anterior.

Podemos concluir que minimizar la curvatura absoluta gaussiana, es decir, el criterio de ajuste, no es muy aplicable a conjuntos de datos generales. El criterio de zona se ha demostrado que conduce a resultados pobres, incluso en el caso óptimo a nivel global. El criterio más prometedora parece ser minimizar la curvatura absoluta media, o (al menos casi siempre es bueno) los dos métodos ABN (Ángulo entre normales) y JND (Jump in Derivadas normales). El método de Quak y Schumaker da triangulaciones demasiado conservadoras, en general. Aparte de eso, su método es más caro como todos los otros criterios que se pueden calcular a nivel C^0.

Resultados esperados

En este artículo ponemos nuestra atención en cómo el humano participa en contextos sociales en los que, se construye el conocimiento y la realidad. El propósito de este tipo de experimento es crear un contexto argumentativo en el que los estudiantes y profesores interactúan en el aula en la construcción y el ejercicio de las prácticas sociales, argumentos, herramientas y significados de la interacción con un fenómeno.

Agradecimiento. Por el apoyo brindado por el proyecto PAPIME: PE100112, para la realización de este trabajo.

RefRerencias Bibliográficas

Alboul, L. & Van Dame R. (1997). Polyhedral metrics in surface reconstruction: tight triangulations. In T. N. T. Goodman (ed.), *The mathematics for surfaces,* 7(1), 309-336.

Alboul, L., Kloosterman, G., Traas C. & Van Damme R. (1999). *Best data-dependent triangulations*. Memorandum No. 1487, University of Twente. Holland.

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México

Lawson, C. (1977). Software for C1 surface interpolation. In J. Rice (ed.), *Mathematical software III*, Academic Press, New York.

Zahn, C. (1971). Graph-theoretical methods for detecting and describing gestalt cluster. In IEEE. Trans. Comput., pp. 68-86.

CONJUNTOS MINIMOS DETERMINANTES PARA SPLINE BIDIMENSIONAL

Rogelio Ramos Carranza, Armando Aguilar Márquez, Frida María León Rodríguez, Omar García León yJuan Rafael Garibay Bermúdez
Universidad Nacional Autónoma de México. México
egorrc@gmail.com, armandoa@unam.mx, fridam@unam.mx egor1131@unam.mx

Resumen. La idea fundamental de esta experiencia en clase, es explorar el objeto matemático de los conjuntos mínimos, a fin de transponer (Castañeda, 2004) el modelo que corresponde a dicho objeto de estudio y así, ponerlo al alcance de los estudiantes de ingeniería y tecnología; es decir, el problema planteado es determinar el camino adecuado; tal que los estudiantes puedan apropiarse del conocimiento, manejo y aplicación del modelo de los conjuntos mínimos para el "spline" bivariado (Verlan, 2011).
La hipótesis a tratar es que si mostrando las antecedentes cognitivos requeridos en el proceso que define al objeto matemático en estudio, se podría conseguir la trasposición didáctica en el estudiante.
La metodología consiste en la construcción del andamiaje o entramado didáctico, a fin de conseguir una buena aproximación a todos aquellos antecedentes matemáticos que intervienen en el modelo matemático propuesto. Esta teoría se fundamenta en un acercamiento continuo por parte de los estudiantes entre sus niveles de desarrollo potencial y desarrollo real.
Palabras clave: conjuntos mínimos, spline bidimensional
Abstract. The basic idea of this classroom experience, is to explore the mathematical object of the minimum sets in order to transpose (Castañeda, 20045) the model that corresponds to the object of study and thus make it available to students of engineering and technology that is, the problem is to determine the right path, so that students can acquire the knowledge, model management and application of the minimum sets for the "spline" bivariate (Verlan, 2011).
The hypothesis is that if you treat the cognitive antecedents required showing in the process that defines the mathematical object under study, one could get the student didactic transposition.
The methodology consists of the construction of scaffolding or educational network in order to get a good approximation to those mathematical background involved in the mathematical model. This theory is based on a continuous approach by students between their levels of potential development and real development.
Key words: minimal sets, bidimensional spline

Introducción

Algunos ejemplos de los conjuntos mínimos determinantes se muestran a continuación. (s.n., 2000)

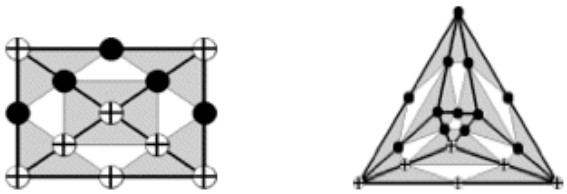


Figura 1: En esta figura se presentan ejemplos de conjuntos mínimos determinantes correspondientes a los casos de Vértice Singular (izquierda), y al de tipo Simétrico Separado de Morgan-Scott (derecha).

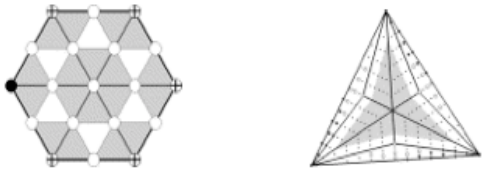


Figura 2: En esta figura se muestran dos casos de conjuntos mínimos determinantes correspondientes a los denominados Vértice No-Confinable (izquierda) y Doble Elemento Finito de Clough-Tocher C3 (derecha).

Uno de los elementos fundamentales del andamiaje es el planteamiento de un problema en el contexto de la ingeniería, el cual consiste en un caso propio para los estudiantes de las carreras de ingeniería; por ejemplo, se podría citar el fenómeno de convección y difusión del calor en un material cualquiera (metal, plásticos, etc.) y su representación mediante un mapa bidimensional obtenido mediante el spline bivariable.

Algunos otros casos en el ámbito o contexto de los estudiantes de tecnología, podrían consistir en determinar los modelos matemáticos obtenidos mediante el método spline bidimensional correspondientes a fenómenos tales como el comportamiento de campos gravitacionales o magnéticos, fenómenos asociados al comportamiento de los materiales sujetos a altas o bajas temperaturas, o al comportamiento de materiales diseñados con propósitos biofísicos o bien modelos representativos de fenómenos sociales.

El planteamiento de los casos mencionados, tiene como propósito mostrar la utilidad práctica del objeto de estudio en cuestión; así como, el de producir en el estudiante el motivo y significado del aprendizaje del objeto matemático planteado.

La experimentación se ha diseñado para estudiantes de las carreras de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Ingeniería Química y Licenciatura en Tecnología (Ramos, 2012). Consiste en mostrar todas aquellas herramientas matemáticas que intervienen en el modelado del spline bidimensional, mediante la determinación de conjuntos mínimos; es decir se le indicará al estudiante cuales son los antecedentes matemáticos requeridos, para que se asegure de que los pueda conocer y dominar.

Planteamiento del problema

El uso de la tecnología, con un diseño bien fundamentado en los conceptos propios de la teoría sociocultural del aprendizaje, puede provocar en el estudiante el facilitar la apropiación del conocimiento del objeto matemático de los conjuntos mínimos.

Hipótesis

La hipótesis a experimentar es que si mostrando las antecedentes cognitivos requeridos en el proceso que define al objeto matemático en estudio, se podría conseguir la trasposición didáctica por el estudiante.

Metodología

Para el propósito de la aplicación del objeto matemático tratado, se considera en esta breve comunicación, los fundamentos de la teoría humanista del aprendizaje. Específicamente estaremos usando el concepto de Zona de Desarrollo Próximo desarrollada por Lev Vygotsky, la cual se

puede describir en forma sintetizada como aquella que establece que, las capacidades de solución de problemas pueden ser de tres tipos: i) aquellas realizadas independientemente por el estudiante, ii) aquellas que no puede realizar aún con ayuda y iii) aquellas que caen entre estos dos extremos, las que puede realizar con la ayuda de otros.

Los procesos psicológicos superiores, que son procesos específicamente humanos, tienen su origen en la vida social, es decir, se constituyen a partir de la mediación y de la internalización, de prácticas sociales y de instrumentos psicológicos creados culturalmente (Vygotsky, 1979).

El conocimiento es un producto de la interacción social y de la cultura. Se resaltan los aportes de Vygotsky en el sentido que todos los procesos psicológicos superiores (comunicación, lenguaje, razonamiento, etc.) se adquieren primero en un contexto social y luego se internalizan. Así pues nos proponemos establecer mediante la conceptualización teórica de Vygotsky los objetivos estratégicos específicos:

a) Promover, la formación de los hábitos y actitudes que configuren un tipo humano capaz de convertirse en agente consciente del desarrollo (creatividad, capacidad de autoaprendizaje, sentido crítico, disciplina y organización en el trabajo, sentido de responsabilidad personal y social). Los medios de operar para conseguir este objetivo serán:

i) Diseñar y aplicar el entramado pedagógico que descanse más en la actividad del estudiante que en la labor informativa del maestro y que se oriente a eliminar la recepción pasiva de información, sustituyéndola por su análisis y comprensión.

ii) Conjuntar la comprensión de la teoría con su aplicación práctica. Propiciar en el estudiante la búsqueda y organización de la información. Preparar al estudiante en el uso personal de material informativo, como condición del auto-aprendizaje.

iii) Establecer sistemas de evaluación de conocimientos para considerar, junto con el aprendizaje, el logro de habilidades y hábitos positivos, que propicien una educación continua. Llevar a cabo reuniones y cursos con el personal docente para reorientar la enseñanza bajo los principios anteriores.

b) Facilitar al estudiante, la información de actualidad de la más alta calidad, con el propósito de estimular el proceso de auto desarrollo. Para la consecución de este objetivo se propone:

i) Establecer los medios que permitan el flujo, hacia la docencia, de la información sobre el desarrollo de la ciencia y la auto-evaluación y superación constante de la calidad del material informativo utilizado en la enseñanza.

ii) Implementar y aplicar la metodología para la transmisión del conocimiento de manera eficaz, que permita distribuir la información de mayor calidad al mayor número de personas en el menor tiempo posible.

Desarrollo del objeto matemático

El spline es una función polinomial segmentaria suavizada. Los splines de interés en este documento se definen como triangulaciones.

Sea T una triangulación y D la unión de triángulos en T. Así se define el espacio S.

$$S = S_d^r(T) = \{s \in C^r(D): s\,\|_t \in P^d\}$$

Este es el espacio de todas las funciones diferenciables r veces, que en cada triángulo se pueden representar como un polinomio de grado bivariable d.

Sea ***s*** el spline en ***S***. Sobre cada uno de los triángulos ***t*** en ***T***, los cuales se expresan en la forma de Bernstein-Bezier. Debido a que se requiere que ***s*** sea por lo menos continuo, se identifican los puntos de control a lo largo de los ejes compartidos con los triángulos vecinos y ordena las ordenadas de Bezier en un vector ***c***. En el caso de los splines que son continuos; es decir, ***r = 0***, se puede asignar un valor arbitrario para cada entrada de ***c*** y así obtener todos los splines que son polinomios segmentarios de grado d y globalmente continuos. Un spline ***s*** en ***S***, con ***r*** diferenciales, satisface las condiciones homogéneas de suavización:

$$Ac = 0$$

A es una Matriz ***m*** por ***n***, en la que ***m*** es igual al número de condiciones de suavidad y ***n*** es igual al número de las ordenadas de Bézier de una spline en ***S***. La dimensión de ***S*** es igual a ***n - rango*** (***A***).

Cada ordenada de Bézier corresponde a un punto de dominio ***t***. Por lo tanto, denotamos por c_t. También se denota el conjunto de todos los puntos de dominio por ***P***. Un subconjunto ***Q*** de ***P*** es un conjunto de la determinación si

$$s \in S_d^r(T) \text{ y } c_t = 0 \quad para\ toda\ t \in Q \Rightarrow s = 0$$

Si Q no es más grande que cualquier otro conjunto de la determinación entonces es un *conjunto de la determinación mínima*. Se desprende de álgebra lineal básica que el número de puntos en cualquier conjunto de la determinación mínima es igual a la dimensión de ***S.*** Las ordenadas de Bézier correspondientes a los puntos en la determinación del conjunto mínimo pueden ser elegidas arbitrariamente y luego determinar únicamente una spline ***s*** en ***S***. Se ilustran estos conceptos con un ejemplo que se muestra en la Figura 3.

Esta triangulación se conoce como la división de Clough-Tocher. Los vértices de los triángulos exteriores están etiquetados V_1, V_2, y V_3.

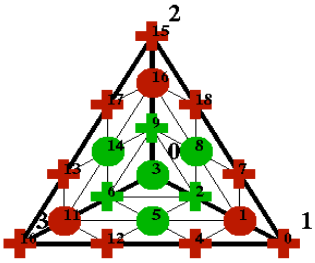


Figura 3. En esta figura se muestra la triangulación conocida como la división de Clough-Tocher

El punto interior es $V_0 = (V_1 + V_2 + V_3) / 3$

Para calcular las condiciones de suavidad a través del eje V_0V_2 , por ejemplo, se necesita expresar V_1 en términos de coordenadas Bari céntricas con respecto al triángulo $V_0V_2V_3$:

$$V_1 = 3V_0 - V_2 - V_3$$

Procediendo como se ha indicado se obtiene la matriz:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Donde por conveniencia las columnas se han etiquetado con los índices de los puntos del dominio.

En este ejemplo, r = 1 y d = 3. Hay tres bordes interiores, cada uno dando lugar a tres C^1 condiciones, para un total de 9 ecuaciones. El número total de puntos de dominio es de 19. (La etiqueta comienza con 0, porque así es como el lenguaje de programación Java considera los índices). El rango de la matriz es de 7 y la dimensión de ***S*** es de 12.

Resulta que los puntos marcados con signos más verdes y rojos forman un conjunto de determinación mínima. Por lo tanto las siguientes coordenadas de Bézier (indicado con signos más en la figura) se pueden establecer arbitrariamente:

C_0 , C_2 , C_4 , C_6 , C_7 , C_9 , C_{10} , C_{12} , C_{13} , C_{15} , C_{17} , C_{18} .

Dimensiones

Se ha demostrado (Schumaker, 1984) que para todos los d> = r> = 1 , se cumple que:

$$\dim S_d^r(T) \geq A_d^r V_B + B_d^r V_1 + C_d^r + \sigma$$

Dónde:

$$A_d^r = \frac{d^2 + d + 2rd + r^2 - r}{2}$$

$$B_d^r = d^2 - 3rd + 2r^2$$

$$C_d^r = 3rd - d^2 - \frac{3r(r-1)}{2} + 1$$

V_B =Es el número de vértices en la frontera de ***T***

V_I = Es el número de vértices interiores de ***T***

$$\sigma = \sum_{v\, interior} \sigma_v$$

Y

$$\sigma_v = \sum_{j=1}^{d-r} (r + j + 1 - je_v).$$

La suma de sigma (σ) se mueve sobre todos los vértices interiores v. e_v es el número de pendientes consideradas por los bordes que emergen de v . El término sigma (σ) captura una propiedad esencial de los espacios spline multivariados: la dimensión depende no sólo de la combinatoria de la triangulación, sino también de su geometría, es decir, la posición relativa precisa de los vértices.

Como se ha demostrado (Hong, 1991) que el límite inferior en la fórmula para el cálculo de la dimensión; la cual, determina la verdadera dimensión si:

$$d > (3r + 1)$$

Recomendaciones en la determinación de resultados

La experimentación se ha diseñado para estudiantes de las carreras de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Ingeniería Química y Licenciatura en Tecnología (Ramos, 2012). La experimentación consistirá en mostrar todas aquellas herramientas matemáticas que intervienen en el modelado del spline bidimensional, mediante conjuntos mínimos determinantes; es decir se le indicará al

estudiante cuales son los antecedentes matemáticos requeridos, para que se asegure de que los conoce y que entiende su desarrollo.

Cuando el estudiante manifieste dificultades en el conocimiento y dominio de los mencionados antecedentes; en cuyo caso, se propone dar al estudiante el apoyo necesario hasta conseguir una mejor aproximación en el dominio y aprendizaje de los antecedentes.

Se espera que una vez puesto en la escena escolar universitaria la propuesta de investigación aquí considerada, se pueda observar, que mediante la metodología utilizada, el estudiante se apropie del conocimiento del objeto matemático denominado conjuntos mínimos determinantes para el spline bivariado.

Agradecimiento . Por el apoyo brindado por el proyecto PAPIME: PE100112, para la realización de este trabajo.

Referencias Bibliográficas

Bivariate spline spaces. (sf). Recuperado 17 de julio de 2012 de http://dx.doi.org/10.1016/S0377-0427(00)00369-1.

Castañeda, A. (2004). *Un acercamiento a la construcción social del conocimiento: Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

Hong, D. (1991). Spaces of bivariate spline functions over triangulations. *Journal Approximation Thechnology Applicated 7(1)*, 56-75

Ramos, R. y Aguilar A. (2012). *Interpolación, Derivación e Integración Numéricas*. México: Comité Editorial de la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán de la UNAM.

Schumaker, L. (1984). Bounds on the dimension of spaces of multivariate piecewise polynomials. *Rocky Mountain Journal of Mathematics, 14(1)*, 251-264.

Verlan I. (2011). About one algorithm of bidimensional interpolation using splines. *Computer Science Journal of Moldova, 19(1),* 64-71.

Vygotsky, L. S. (1979). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Critica/Grijalbo.

ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA LINEAL A TRAVÉS DE SUS RELACIONES INTRA E INTER MATEMÁTICAS

Andrés González Rondell
Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Venezuela
agorondell@yahoo.es

Resumen. Describimos el proceso llevado a cabo en el desarrollo de un curso de álgebra lineal dirigido a estudiantes para Profesor de Matemática en la Universidad Pedagógica Experimental Libertador de Venezuela (UPEL), con la intención de impulsar un cambio metodológico en su enseñanza y aprendizaje fundamentado en las inmensas posibilidades que tiene esta área al explorar y explotar sus relaciones intra e inter Matemáticas. Los estudiantes escribieron, individualmente, un balance del tipo reflexivo en relación con los objetos y procesos algebraicos manipulados en el contexto de la experiencia, éstas se constituyeron en el corpus informativo que luego fue estudiado mediante técnicas de análisis. Los hallazgos muestran que el discente: concientiza la complejidad de los objetos propios del álgebra, comprende la conexión entre el lenguaje natural y el algebraico, en particular el rol del simbolismo; es capaz de articular logros en el área de álgebra a lo largo de la carrera universitaria, vislumbra el papel que jugará esta área en el reto interdisciplinar.
Palabras clave: álgebra lineal, relaciones intra e intermatemáticas
Abstract. We describe the process undertaken in the development of a linear algebra course for students to Professor of Mathematics at the Pedagogical University Experimental Libertador de Venezuela (UPEL), with the intention of promoting a methodological change in teaching and learning based on the immense possibilities for this area to explore and exploit its intra-and inter Mathematics. The students wrote individually reflective type balance in relation to objects and manipulated algebraic processes in the context of the experience, they are formed in the body of information that was then studied using analytical techniques. The findings show that the learner: raises awareness of the complexity of the proper objects of algebra, understands the connection between natural language and algebra, in particular the role of symbolism, is able to articulate achievements in the area of algebra over the college career, sees the role it will play in the challenge this interdisciplinary area.
Key words: linear algebra, intra-and intermatemáticas

Introducción

Diversos autores coinciden en la importancia de que los individuos comprendan el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, alcancen razonamientos fundados y participen en ellas en función de las necesidades de su vida; se ha enfatizado la necesidad de superar el anumerismo (Paulos, 1998) a través de un óptimo desempeño del pensamiento matemático y el desarrollo una *Cultura Matemática*. Particularmente, invocamos la importancia del pensamiento algebraico por resultar trascendente a nuestros fines; este asunto aparece relacionado con la calidad de las prácticas de enseñanza, razón por la que un sólido pensamiento de este tipo del educador matemático se percibe como un requisito necesario para el desarrollo de un proceso de enseñanza orientado a lograr un nivel de aprendizaje de la Matemática en el que se propenda su desarrollo, en consecuencia resulta clave el proceso de formación inicial de este docente.

Además, este pensamiento se considera importante pues permite: deducir lo general en lo particular, hacer y revertir operaciones, reconocer patrones, abordar procesos de modelización,

etc. Por tanto se considera importante que el educador matemático posea un nivel satisfactorio de desarrollo de su pensamiento algebraico a fin de que pueda promoverlo en sus estudiantes.

En la actualidad el pensamiento algebraico se ha constituido en un campo del pensamiento matemático, motivo de diversos estudios en los distintos niveles de la educación formal. En estos trabajos se estudia la apropiación del símbolo en Matemática, en particular los usos que se le dan a las letras (cuyo antecedente más importante es el trabajo de Küchemann en 1980), la interpretación y uso del signo igualdad, la modelización, los procesos de abstracción y de generalización, etc.

El punto de partida para el desarrollo de esta experiencia de aula fueron las diversas dificultades que tienen los estudiantes en el aprendizaje del Álgebra y la urgente necesidad de establecer cambios revolucionarios en las metodologías de enseñanza usadas por los docentes de este nivel educativo; la indagación está en desarrollo y forma parte de un estudio mayor, de carácter cualitativo, fenomenológico-interpretativo que busca plantear algunas relaciones entre los procesos del pensamiento algebraico y la mediación tecnológica.

Para una profunda discusión sobre el concepto de Pensamiento Algebraico, y dado que son autores reconocidos en este campo, son notables para esta investigación los aportes de Sierpinska (1996); Blanton y Kaput, (2003); Arzarello, Bazzini y Chiappini (1994); Kieran (1992) y Shelley (2012). La primera autora, en los últimos años, ha desarrollado trabajos de investigación acerca de la evolución del pensamiento matemático en los estudiantes. Particularmente en Álgebra Lineal, esta investigadora distingue tres modos de pensamiento matemático: sintético-geométrico (basado en el uso de figuras geométricas), analítico-aritmético (las figuras geométricas ahora pueden ser escritas como ecuaciones o desigualdades) y analítico-estructural.

En este mismo orden de ideas, Shelley (2012), compara este concepto a la luz de varias definiciones para luego presentar el pensamiento algebraico subdividido en dos componentes: desarrollo de herramientas matemáticas del pensamiento (las cuales incluyen los hábitos analíticos de la mente, específicamente habilidades de resolución de problemas, habilidades de razonamiento y habilidades de representación) y el estudio de ideas algebraicas fundamentales (dominio en el cual las mencionadas herramientas pueden desarrollarse).

Por su parte Piaget y García (1983) establecen un paralelismo entre la forma cómo han evolucionado las ciencias y la manera como las personas construyen el conocimiento, en su libro dedican dos capítulos al álgebra y a la formación de los sistemas prealgebraicos. Los autores distinguen tres períodos o etapas en la evolución de las estructuras algebraicas así como la evolución de las "relaciones lógicoaritméticas en el niño" (p. 134). Estas etapas son: intra-

operacional, inter-operacional y trans-operacional.

Caracterización de la problemática

Luego de la introducción y consolidación del simbolismo en Matemáticas en virtud de los trabajos desarrollados por F. Viete (1540-1603) comienza la etapa denominada simbólica en la evolución del Álgebra. Pese a la enorme complejidad de su simbología el trabajo de Viete (aún cuando fue reconocido después de su muerte) alcanzó un extraordinario valor pues por primera vez fue "posible la expresión de ecuaciones y sus propiedades, mediante fórmulas generales. Los objetos de las operaciones matemáticas comenzaron a ser no problemas numéricos sino las propias expresiones algebraicas" (Ríbnikov, 1987, p. 135)

Naturalmente, la introducción sistematizada y organizada de estos símbolos significó una transformación extraordinaria en la manera de hacer, enseñar y aprender Matemáticas pues se trató de una revolución en el lenguaje matemático, particularmente el algebraico, que hasta ese momento estuvo basado en el lenguaje ordinario, y permitiendo con ello la génesis del álgebra simbólica. La trascendencia de este hecho es analizado por Gómez-Granell (1997) de la siguiente manera: "El uso de la notación mediante letras posibilita la independencia con respecto al objeto que se representa, el símbolo cobra entonces un significado que va más allá del objeto simbolizado" (p.208). Esta apreciación, aún cuando es correcta, no revela algunas limitaciones que tiene tal uso metafórico de los objetos matemáticos; en efecto, la irrupción de este sistema de símbolos rápidamente se extendió y popularizó haciendo olvidar, como señala Pimm (2002), que el Álgebra "en el sentido de la formulación y manipulación de expresiones de generalidad, puede construirse sin necesidad de emplear letras, utilizando, por ejemplo, palabras o símbolos no alfabéticos" (p. 193). Es decir, a pesar de que en la práctica de manipulación el símbolo sustituye al objeto es necesario tener conciencia de la ambigüedad que une y/o separa al signo del objeto. Lo particular aquí no es que el símbolo no sea un buen representante del objeto, pues el problema no se presenta en la representación como tal, sino que el concepto matemático que aspira representar se desnaturaliza, se pierde en el nivel de las operaciones que ejecuta el estudiante, y esto ocurre pues se opera sobre el símbolo sin intentar ver si las operaciones que se desarrollan son significativas en términos del objeto que éste representan (Artigue, 2003)

En este asunto también subyace una dificultad un poco más profunda como lo es la confusión del alumno al interpretar el objeto matemático a través del símbolo, lo que a su vez no es algo trivial tomando en cuenta que "en Matemáticas, el símbolo convencional constituye el único medio de evocar el concepto mismo" (Pimm, 2002, p. 222), de manera que se opera sobre el objeto a través de la operación con el signo.

En lo que respecta al Álgebra Lineal, afirma Artigue (2003) que las investigaciones reportan un fenómeno particular con respecto al aprendizaje del concepto de espacio vectorial en los primeros años del nivel universitario, se trata de la discrepancia entre la capacidad de este concepto para resolver problemas nuevos y su valor como concepto generalizador, unificador y formalizador, es decir, una cantidad importante de estudiantes no sienten la necesidad de recurrir a la construcción abstracta de espacio vectorial para resolver la mayoría de los problemas de un primer curso de álgebra lineal, obviando así el valor epistemológico esencial del Álgebra Lineal (Artigue, 2003). De acuerdo con la óptica de esta autora romper esta anomalía pasa por desarrollar conexiones complejas entre los modos de razonamiento, los puntos de vista, lenguajes y sistemas de representaciones simbólicas.

En cuanto a las necesarias transferencias que debe realizar un docente en el aula también son reportadas algunas carencias. En este sentido Acevedo y Falk (2000) afirman que "la formación avanzada que reciben los futuros docentes de la Educación Básica en general no enriquece su enseñanza, sino que el docente retorna a su propia experiencia escolar como guía prioritaria de su ejercicio docente elemental" (p. 247). Por ejemplo, las mismas autoras señalan que "el docente no establece nexos entre la teoría de polinomios, que se supone conoce de sus cursos universitarios, y el álgebra de polinomios que se trabaja en la secundaria" (p. 248)

Esta situación puede ser vista desde en un espectro más amplio como lo es la problemática relacionada con la formación inicial de los docentes de Matemática. Esta manera de vincular este período de formación con los hallazgos en niveles más bajos de escolaridad no es algo nuevo, desde principios del siglo XX el reconocido matemático Félix Klein había expuesto su preocupación por las transferencias entre la Matemática universitaria y la Matemática escolar.

En González y González (2012) se precisan otras características más específicas, relacionadas con el pensamiento algebraico del futuro educador matemático, determinadas en nuestro propio contexto. A manera de síntesis las siguientes expresiones resumen la problemática abordada:

a) Dificultad para avanzar en la capacidad para asumir conceptos abstractos.

b) Desarrollo de un proceso de "aritmetización del Álgebra"

c) Dificultad para la manipulación del símbolo (limitación en el manejo de la sintaxis y la semántica)

d) Poco aprecio por la demostración (y dificultad para hacerlas)

e) Elevado número de estudiantes reprobados en las asignaturas del Área de Álgebra, lo cual genera un estado de ansiedad-rechazo por esta área.

f) Limitaciones de los educadores para captar el Álgebra superior (o Álgebra universitaria) como apoyo para el Álgebra escolar.

g) Dificultad para comprender el enunciado de un Problema Algebraico. Confusión cuando el lenguaje natural funciona como metalenguaje en los problemas de Álgebra.

Ante este panorama se decidió echar mano de un concepto clave en la enseñanza de las ciencias como lo es la interdisciplinariedad, en el que se hiciera posible el desarrollo de un aprendizaje contextualizado y que hiciese posible el establecimiento de relaciones-conexiones entre algunos conceptos algebraicos.

Para esto se tomó en cuenta que la búsqueda de un cambio en el modelo de asumir la enseñanza de la ciencia y, en particular, la enseñanza de la Matemática se puede considerar como un asunto complejo. De acuerdo con esto Gil, Pessoa, Fortuny, y Azcárate, (1994) plantean esta situación en los siguientes términos: "es preciso insistir, en primer lugar, contra la búsqueda ingenua de recetas de fácil aplicación. Las propuestas puntuales, no fundamentadas, han de dejar paso a elaboraciones capaces de integrarse coherentemente en un cuerpo de conocimientos teórico-prácticos que abarque todo el proceso de enseñanza/aprendizaje de las ciencias" (p.85).

Descripción de la actividad

La experiencia se desarrolló durante un período académico en los espacios del Instituto Pedagógico Rafael Alberto Escobar Lara de Maracay, Núcleo de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador, universidad encargada exclusivamente de la formación de los educadores de las diversas especialidades. Los sujetos participantes fueron los estudiantes del Departamento de Matemática integrantes de dos secciones de la asignatura denominada Álgebra Lineal correspondiente al área de Álgebra. Este curso tiene la particularidad de ser obligatorio no homologado (no todos los núcleos la contemplan en su plan de estudios) y se inserta en el componente de formación especializada de este instituto.

El proceso constó de dos partes, la primera contenía 5 fases:

(1) Informativa y estimulativa, desarrollada al comenzar el período académico, en ésta se entregó a los estudiantes un documento en el que se delineaban las directrices del trabajo, se indicó que el propósito del trabajo era establecer y hacer explícitas las relaciones, vínculos o aplicaciones del Álgebra. Esto lo podían hacer desde dos perspectivas: una intra, exhibiendo las aplicaciones o vínculos del Álgebra con otras ramas de la Matemática tales como Análisis, Geometría, etc.; y desde una perspectiva inter, mostrando las aplicaciones y/o relaciones del Álgebra con otras áreas de conocimiento como por ejemplo, Economía, Informática, Biología, Física, etc.

(2) Libre búsqueda de información tanto en formato digital como impresa

(3) Organización del contenido

(4) Consolidación de la información y

(5) Establecimiento y explicitación de las relaciones.

Como características a resaltar de esta primera parte tenemos: (a) Para realizar el trabajo era importante tener, lo más claro posible, cuáles eran los objetos y procesos matemáticos propios del Álgebra, (b) El trabajo no era una propuesta didáctica y eso tenía relevantes implicaciones, tanto en el fondo como en su forma; por ejemplo, cada trabajo tendría una estructura particular la cual vendría dada por la aplicación que se fuera a establecer, (c) Por la naturaleza del trabajo era importante dejar claro que tampoco era una investigación del tipo escolarizante-academicista en el sentido de que iban a aplicar asuntos específicos que ya se hubiese manejado antes en otra materia, por el contrario era altamente probable que se manipularan algunos conceptos, definiciones, propiedades, etc., totalmente nuevos, (d) Por lo anterior había que estimar el tiempo suficiente para que maduraran las ideas, para que la creatividad se hiciera presente y poder establecer entonces un balance en el nivel de complejidad., (e) Con respecto a esto último se aclaró que lo que se pretendía era que el estudiante fuera capaz de articular sus logros en el área de Álgebra a lo largo de su carrera universitaria, y que vislumbrara así el papel que jugará esta área en el reto interdisciplinar que deberá afrontar como educador matemático.

La segunda parte consistió en la realización de una actividad denominada *Jornadas de Aplicaciones del Álgebra* evento de carácter público al que podía asistir cualquier estudiante y docente, en este escenario expusieron la sistematización de sus trabajos enfatizando los vínculos y/o relaciones encontradas. La expresión *aplicaciones* no debe ser entendida como una relación utilitaria o de causa y efecto (como lo sería en física o en otras áreas), sino mucho más flexible y más amplia (que no niega la anterior), tiene que ver con punto de encuentro, vínculo, relación, etc. Como se puede ver la naturaleza del trabajo era altamente compleja, tanto para los estudiantes como para el profesor de la asignatura, pues la indagación a realizar por los estudiantes no era una investigación necesariamente articulada con los contenidos del Programa, aun cuando éste se desarrollaba de forma natural.

Por el contrario, los estudiantes tuvieron que manipular algunos conceptos, definiciones, propiedades, etc., totalmente nuevos.

En la siguiente tabla 1 se recogen algunas apreciaciones de los estudiantes, como se puede observar estos comentarios tienen distintas connotaciones que transitan desde aspectos

emocionales relacionados con la superación del reto que significó la exposición de un tema algebraico ante un público diverso, pasando por la visualización de algunas conexiones intra e intermatemáticas hasta la estimación del valor agregado del trabajo concentrado en el uso de la herramienta power point en su exposición.

E1	***Nunca pensé que era capaz de pararme allí al frente de muchos profesores, para explicar mi trabajo. Ya al hacerlo confirmé que soy capaz de lograr muchas cosas.***
E2	*En un principio cuando nos fue informado acerca de que se trataba, lo veíamos como un imposible. Y si, es así; porque para nadie es un secreto que en el área donde tenemos más problemas a lo largo de nuestra carrera es en el álgebra. Esa álgebra que para muchos de nosotros fue un gran dolor de cabeza, pero que ahora con orgullo cada uno de nosotros puede decir: somos casi que expertos en un determinado tema.*
E3	*A nivel general considero que esta jornada nos permitió profundizar en nuestros conocimientos pero sin la presión de estar en un aula de clase*
E4	*Para mí fue una experiencia muy valiosa, ya que me obligó a aprender a utilizar el Power Point de tal manera que me quedará ese conocimiento para ponerlo en práctica en mi vida profesional.*
E5	*El recorrido fue largo, pero valió la pena. Todo comenzó hace aproximadamente cinco meses con la escogencia de un tópico sobre el álgebra para desarrollarlo a medida que íbamos cursando el semestre. Particularmente durante el desarrollo de mi trabajo (Programación Lineal) mi compañero y yo, a medida que estábamos abordando el contenido nos dábamos cuenta que teníamos que tener una buena base del álgebra de matrices y de cálculo; algunas veces tuvimos dificultades en ciertas definiciones que manejaban algunos autores y teníamos que asesorarnos con algunos profesores del departamento.*
E6	*Es impresionante ver como muchísimas ciencias se sirven de la matemática para resolver problemas y para mejorar cada día la calidad de vida del hombre y la manera de percibir todo lo que nos rodea.*
E7	*La primera vez que realice la lectura del material que tenía sobre mi trabajo "NO ENTENDI NADA" tuve que leerlo varias veces para poder medio entenderlo, porque siempre en el material decían, por ejemplo: está demostración es evidente por teorema 4 parte ii) página 145 y cuando volvía a la página de mi tema tenía que leerlo otra vez.*

Tabla1: Algunas opiniones de los estudiantes

Conclusiones

El éxito de esta actividad se basó en: (1) La asesoría constante, tanto del docente de la asignatura, como de muchos docentes de la especialidad, (2) la flexibilidad en el tiempo para que los estudiantes maduraran sus ideas, (3) la claridad en el establecimiento del propósito del trabajo, (4) el otorgamiento de diferentes bibliografías, y (5) el desarrollo del trabajo a través de grupos de estudiantes, (6) Cambio de actitud frente al conocimiento y aprendizaje, (7) modificación de la verticalidad de la relación por el establecimiento de una comunicación horizontal entre el estudiante y el docente y (8) no se le otorgó importancia a la extensión del trabajo (cantidad) sino a las múltiples conexiones que se establecieran (calidad).

Luego que se realizaron las dos partes del trabajo se instó a los estudiantes a que escribieran, de manera libre y de forma individual un balance del tipo reflexivo en relación con los objetos y procesos algebraicos manipulados en el contexto de la experiencia que significó llevar adelante la indagación y su posterior exposición pública. Una vez obtenida esta información, se procedió a organizarlas y a examinarlas mediante técnicas de análisis cualitativo de contenido. Algunos hallazgos preliminares muestran que el discente: concientiza la complejidad de los objetos propios del álgebra, comprende la conexión entre el lenguaje natural y el algebraico específico, en particular el rol del simbolismo en éste último; es capaz de articular sus logros en el área de álgebra a lo largo de la carrera universitaria; muestra potencialidad para vislumbrar el papel que jugará esta área en el reto interdisciplinar que deberá afrontar como futuro educador matemático. Además, constatamos un cambio actitudinal que propende al favorecimiento de la comprensión de los contenidos. Estas conclusiones resultan importantes si se les consideran en el contexto de las necesarias reformas que se deben introducir en la formación inicial del educador matemático con miras a la incorporación en ella de conceptos como la interdisciplinariedad.

Referencias bibliográficas

Acevedo de M. y Falk de L. (2000). Formación del pensamiento algebraico de los docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 3(3), 245-264.

Artigue, M. (2003). ¿Qué se Puede Aprender de la Investigación Educativa en el Nivel Universitario? *Revista de la Asociación Matemática Venezolana,* 10(2), 117-134.

Arzarello F., Bazzini L. y Chiappini, G. (1994). Intensional semantics as a tool to analyze algebraic thinking, *Rendiconti del Seminario Matematico*, 52(2), 105-125.

Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2003). Developing elementary teachers' "algebra eyes and ears." *Teaching Children Mathematics,* 10(2), 70-83.

Gil, D., Pessoa, A., Fortuny, J. y Azcárate, C. (1994). *Formación del profesorado de las ciencias y la Matemática, tendencias y experiencias innovadoras*. Madrid: Editorial Popular S.A.

Gómez-Granell, C. (1997). Hacia una epistemología del conocimiento escolar: El caso de la Educación Matemática. En M. J. Rodrigo y J. Arnay, (Comp.) *La construcción del conocimiento escolar.* 195-215, España: Paidos

González, R. y González F. (2012). *Exploración Del Pensamiento Algebraico De Profesores De Matemática En Formación. La Prueba EVAPAL*". Recuperado el 14 de marzo de 2013 en: http://www.ulbra.br/actascientiae/edicoesanteriores/acta_scientiae_v.13_%20n1_2011.pdf.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. En D. A. Grows (Ed.). *Handbook of*

Research on Mathematics Teaching and Learning. 707-762, N Y: McMillan Publishers Co.

Küchemann, D. (1980). The *understanding of generalized arithmetic (Algebra) by secondary school children,* tesis de doctorado, University of London, Institute of Education.

Paulos, J. (1998). *El hombre anumérico. El analfabetismo matemático y sus consecuencias*. España: Tusquets, Editores, S.A.

Piaget, J. y García, R. (1983). *Psicogénesis e historia de las ciencias*. México: Siglo XXI.

Pimm, D. (2002). *El lenguaje matemático en el aula*. Madrid: Morata.

Ríbnikov, K. (1987). *Historia de las Matemáticas*. Moscú: Mir

Shelley, K. (2012). *Exactamente ¿qué es el pensamiento algebraico*. Recuperado el 18 de noviembre de 2012 en http://www.cfn609.org/uploads/4/6/9/6/4696562/just_what_is_algebraic_thinking.pdf

Sierpinska, A. (1996). Whither mathematics education? En C. Alsina, J.M. Alvarez, M. Niss, A. Pérez, & A. Sfard (Eds.), *Proceedings of the 8th International Congress on Mathematics Education*, 21–46.

PROPOSTA DE CORREÇÃO DE ATIVIDADES DE INTRODUÇÃO A ÁLGEBRA EM SALA DE 7ª SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL

Ronaldo Sovenil de Oliveira y Maria Helena Palma de Oliveira
Universidade Bandeirante de São Paulo. Brasil
rsovenil@hotmail.com, mhelenapalma@gmail.com

Resumen. Neste estudo nos propomos a descrever e discutir as respostas de alunos de sétima série do ensino fundamental na resolução de atividades de introdução à álgebra. As atividades, realizadas em outubro de 2011, constam do material didático oficial da Secretaria Estadual de Educação de São Paulo e fazem parte de um estudo mais amplo, com alunos de uma sala de aula regular de 7ª série do Ensino Fundamental, em que foram alternadas atividades com resolução individual e atividades com resolução em duplas. A correção e análise das atividades mostrou a necessidade de romper com a polaridade do *Certo ou Errado* como se entre eles não houvesse um fértil espaço de aprendizagem em potencial. Consideramos nas análises dos resultados apresentados pelos alunos os acertos parciais, que evidenciaram a aprendizagem em processo e um nível de conhecimento desejado, mas ainda não atingido, confirmando que não deve ser considerado somente o erro.
Palabras clave: matemática, introdução à álgebra, análise de erros
Abstract. In this study we propose to describe and discuss the responses of students from seventh grade of elementary school in solving activities of introduction to algebra. The activities, carried out in October 2011, listed in the official courseware of the State Secretariat of education of São Paulo, and are part of a broader study with students from a regular classroom of 7th grade of elementary school, they were alternated with individual resolution activities and activities with resolution in doubles. the correction and analysis of activities showed the need to break with the polarity of right or wrong as if among them there wasn't a fertile learning space. We consider the analysis of results presented by the students the partial hits, which showed the learning process and a level of knowledge desired, but has not yet reached, confirming that should not be considered only the error.
Key words: mathematics, introduction to algebra, error analysis

Introdução

Este trabalho surgiu de uma pesquisa mais ampla, em nível de mestrado acadêmico (Oliveira, 2012). Durante o processo discussões de como corrigir e avaliar as respostas das atividades propostas, deparamo-nos com a necessidade de considerar não somente os acertos totais, mas analisar também os possíveis caminhos percorridos pelos alunos em cada tentativa de resolução. Se existe um caminho, um pensamento matemático, ele precisa ser considerado. Não se pode considerar a resposta como um erro total, pois se houve um caminho trilhado, houve um avanço.

Para Luckesi (1998), uma avaliação não faz sentido em si mesma, mas só faz sentido quando articulada a um projeto de ensino, subsidiando uma ação no sentido da construção de um resultado previamente definido. Ainda, segundo esse autor, o comum entre os educadores escolares é a preocupação com número de acertos das questões e não com uma aprendizagem ativa, inteligível e consistente. Quando a avaliação é feita dessa maneira demonstra que o professor está fora da sua ação docente.

Nesse sentido, não se pode avaliar a aprendizagem no ensino fundamental ou médio desconsiderando o caminho percorrido durante a resolução, mesmo que ele não leve a resposta

completa ou *certa*. Os alunos ainda estão em formação e ainda não são engenheiros ou médico, para quem um erro de cálculo pode ruir um prédio ou indicar uma dosagem inadequada de medicamento a um paciente. Muitos professores de matemática ainda não conseguem ver o espaço potencial de aprendizagem entre os polos *certo* e *errado.*

O conceito de Vigotsky (2007) de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP), permite considerar um acerto parcial como um aprendizado ainda em processo que deve ser explorado pelo professor e não tratado apenas como um erro. Ao mediador cabe se posicionar exatamente entre o nível real de conhecimentos retrospectivos, representado pelo que o aluno sabe fazer sozinho e o nível de desenvolvimento potencial, representado pelas atividades que o aluno pode fazer com ajuda de alguém mais experiente. Assim, com um trabalho adequado do mediador, o potencial se tornará real e poderá criar então uma nova e mais avançada zona de desenvolvimento.

Referencial teórico

Na década de 1930, Vigotsky propôs o conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal.

> Ela é a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes (Vigotski, 2007, p.97).

Esse conceito define dois níveis de desenvolvimento: o real e o potencial. O primeiro representa ciclos de desenvolvimento já completados, são as atividades que a criança faz sozinha e mostram as funções nela já amadurecidas. O segundo representa aqueles problemas em que o professor inicia a solução e a criança completa, ou então ela o resolve na companhia de crianças mais desenvolvidas. São funções que estão em processo de maturação. Com esses pressupostos, podemos levar em conta que uma resolução incompleta em que o aluno não chegou ao resultado esperado deve ser considerada como expressão de um nível potencial e não um erro.

Vigotsky (2007), ao estabelecer como critério o nível de desenvolvimento potencial, dá importância ao papel da imitação, da interação, da troca no aprendizado e fere um princípio da psicologia clássica de que somente uma atividade independente, e não a imitação, é indicativa do nível de desenvolvimento da criança. Para a psicologia clássica, a imitação é um processo puramente mecânico que não pode impulsionar nenhum tipo de aprendizado. Para Vigotski, as crianças, quando imitam adultos, desenvolvem ações que vão além dos limites das suas capacidades e sob a orientação dos mais experientes, ampliam seu repertório de atividades.

Na perspectiva da dualidade *Certa ou Errada*, o professor ignora a ZDP e o aprendizado em processo e, por consequência, evidencia mais os erros ou respostas incompletas.

Também a teoria de Vergnaud traz elementos importantes para o entendimento dos erros ou das respostas incompletas como manifestação de processos de aprendizagem. Nesse sentido, Vergnaud (2009) afirma:

> Sendo a primeira função do conhecimento de fazer e ter êxito, a análise da atividade em situação é um meio essencial para se compreender os processos de aprendizagem. Por mais delicada e difícil que ela seja. Ela passa notadamente pela análise dos erros, das hesitações e dos desfuncionamentos, assim como pela identificação das diferentes etapas pelas quais se constrói uma forma nova de organização da atividade (Vergnaud, 2009, p.14).

Alguns conceitos de Vergnaud são extremamente importantes para esse entendimento.

Em relação ao de esquemas afirma: "Chamemos de esquema uma organização invariante da conduta para uma dada classe de situações. É nos esquemas que se tem de procurar os conhecimentos-em-acto do sujeito, ou seja, os elementos cognitivos que permitem a acção do sujeito ser operatório" (Vergnaud, 1996, p.157).

Para o autor acima, o conceito-em-ação e o teorema-em-ação expressam conhecimentos contidos nos esquemas que são generalizados como "invariantes operatórios" e considerados conhecimentos implícitos que o aluno não consegue demonstrar explicitamente. Na medida em que acontece o processo de aprendizagem e a consequente explicitação, os conhecimentos poderão tornar-se verdadeiros teoremas e conhecimentos científicos (Vergnaud, 1996).

Os aspectos teóricos das teorias de Vigotski e de Vergnaud dão suporte para a reflexão sobre o modo tradicional de corrigir as atividades dos alunos, marcado pela avaliação do passado, ou seja, níveis já completados na aprendizagem e pela desconsideração da expressão de processos futuros da aprendizagem, esboçados nos erros cometidos, nas repostas incompletas ou nas respostas fora do padrão do algoritmo tradicional.

Há ainda que destacar o aspecto afetivo que envolve no modo tradicional de se trabalhar com os erros dos alunos em sala de aula. Chevallard e Feldmann (1986) como citado por Cury (2008) afirmam que os momentos de correção de atividades deveriam ser de serenidade como os demais momentos pedagógicos, mas muitas vezes é um momento de pequena crucificação. Muitas vezes, o erro é execrado, e o aluno teme a reação do professor quando não consegue dar a resposta *certa* (Cury, 2008).

Também nesse sentido Luckesi (1998) afirma que quando o professor utiliza apenas um processo de aferição dos resultados, impõe aos alunos a condição de viver sob o medo e a ameaça da reprovação.

Cury (2008, p. 13) afirma que os erros podem demonstrar muito sobre o que o aluno já sabe. "Mas quem garante que os acertos mostram o que o aluno sabe? E quem diz que os erros evidenciam o que ele não sabe?". Essa autora ainda propõe o trabalho baseado nos erros dos alunos como forma de superar as dificuldades em matemática

Método

Procedemos a uma análise qualitativa descritiva das resoluções de duas atividades de introdução à álgebra, de um total de 8, que foram aplicadas entre maio e outubro de 2011 e que constam do material didático oficial da Secretaria Estadual de Educação de São Paulo e que fazem parte dos instrumentos de coleta de dados de pesquisa mais ampla (Oliveira, 2012). As atividades foram aplicadas a todos os alunos, um total de 30, em uma sala de 7ª série do Ensino Fundamental. Nas análises das respostas dos alunos para as atividades, partimos das considerações de Vergnaud (1996) sobre esquema, conceitos e teoremas em ação, a fim de entendermos o processo de formação do conceito, bem como das considerações de Vigotski sobre o Desenvolvimento Potencial, que permitem compreender a aprendizagem matemática que ainda está em processo, mas que já se evidencia nas respostas dos alunos.

Utilizamos também a *análise de erros* proposta por Cury (2008), que afirma que não devemos execrar os erros, pois eles podem mostrar muito mais do que somente o que o aluno não sabe, mas o que ele já sabe e, ainda, também o que pode saber.

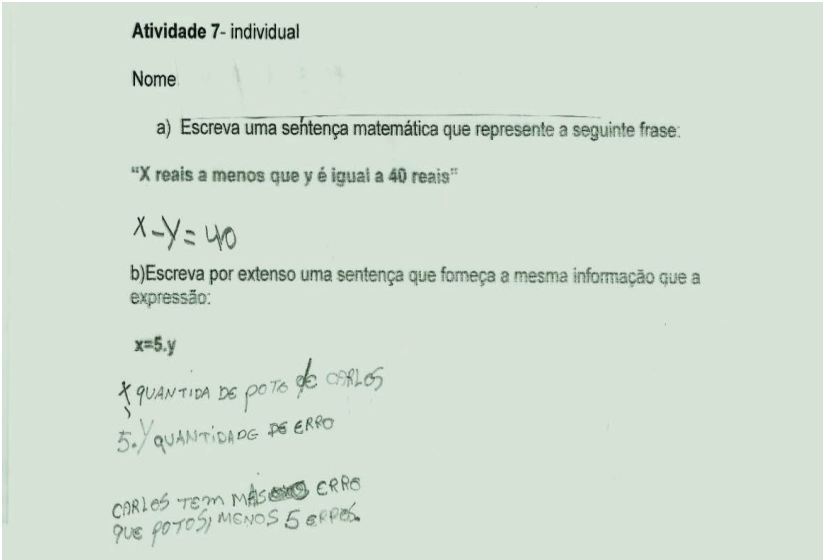
Assim, buscamos entender nas respostas dos alunos, os esquemas mobilizados na tentativa de resolução, o nível de aprendizado apresentado e a pertinência das respostas dentro do campo da matemática.

Análise das respostas nas atividades

Apresentamos, a seguir, a atividade de dois alunos (dupla), sujeitos da pesquisa. Primeiramente, a resposta dada à atividade 1, conforme expõe a Figura 1.

Atividade 1

A atividade da Figura 1 mostra um exemplo do que seria considerado um erro. No item *a,* o aluno apresentou uma resposta que é comum até entre alunos universitários conforme a análise a *priori* dessa atividade feita pela Secretaria da Educação de São Paulo (São Paulo, 2009), escrevendo (x-y=40) no lugar de (y-x=40).



Atividade 7- individual

Nome

a) Escreva uma sentença matemática que represente a seguinte frase:

"X reais a menos que y é igual a 40 reais"

X-Y= 40

b)Escreva por extenso uma sentença que forneça a mesma informação que a expressão:

x=5.y

X QUANTIDA DE POTO DE CARLOS
5.Y QUANTIDADE DE ERRO

CARLES TEM MAIS ERRO
QUE POTOS, MENOS 5 ERROS.

Figura 1: Resposta de um aluno da 7ª série (Oliveira, 2012, p. 107)

No item *b*, o aluno chamou de "X de quantidade de pontos ('poto') de Carlos" e escreveu que ele tem "5.Y a quantidade de erro", o que está correto. Y é definido por ele como erros. Logo abaixo, escreve que "carlos tem mais erro que pontos ('potos')", menos 5 erros". Parece-nos que a tentativa aqui foi demonstrar que se X fosse considerado pontos e Y, erros, então, segundo a fórmula X=5Y, Carlos teria mais erros que pontos.

Muitos alunos, quando se deparam com certas equações, isolam parte dela, no caso, 5Y, e afirmam que este Y é maior que X do outro lado do membro. Esse tipo de erro foi mostrado, como possibilidade, inclusive, na análise *a priori* para essa atividade feita pela Secretaria da Educação de São Paulo (São Paulo, 2009).

O procedimento do aluno, expresso no item *b* da Atividade 1 (Fig. 1), na busca de um esquema de resolução pode ser entendido na perspectiva de (Vergnaud, 1996, p.159) para quem "os esquemas são frequentemente eficazes, mas nem sempre efectivos." Se o esquema utilizado por um aluno é ineficaz na situação em que se aplica, ele é levado a mudar de esquema ou fazer alterações no próprio esquema. Aqui percebemos conceito-em-ação e teorema-em-ação que são conhecimentos contidos nos esquemas, que são generalizados como "invariantes operatórios" e considerados conhecimentos implícitos, uma vez que o aluno não consegue expressá-los (Vergnaud, 1996).

Na perspectiva da dualidade *certo* ou *errado*, os esquemas mobilizados (Vergnaud, 2009) nessa atividade não seriam levados em conta e as respostas seriam consideradas como um erro, nem um *meio certo* seria considerado. Não devemos execrar os erros ou ignorar as representações pertinentes como as demonstradas nessa atividade. Não se deve considerar somente o produto

final, pois "a performance é radicalmente insuficiente para compreender e definir competência" (Vergnaud, 2009, p. 17)

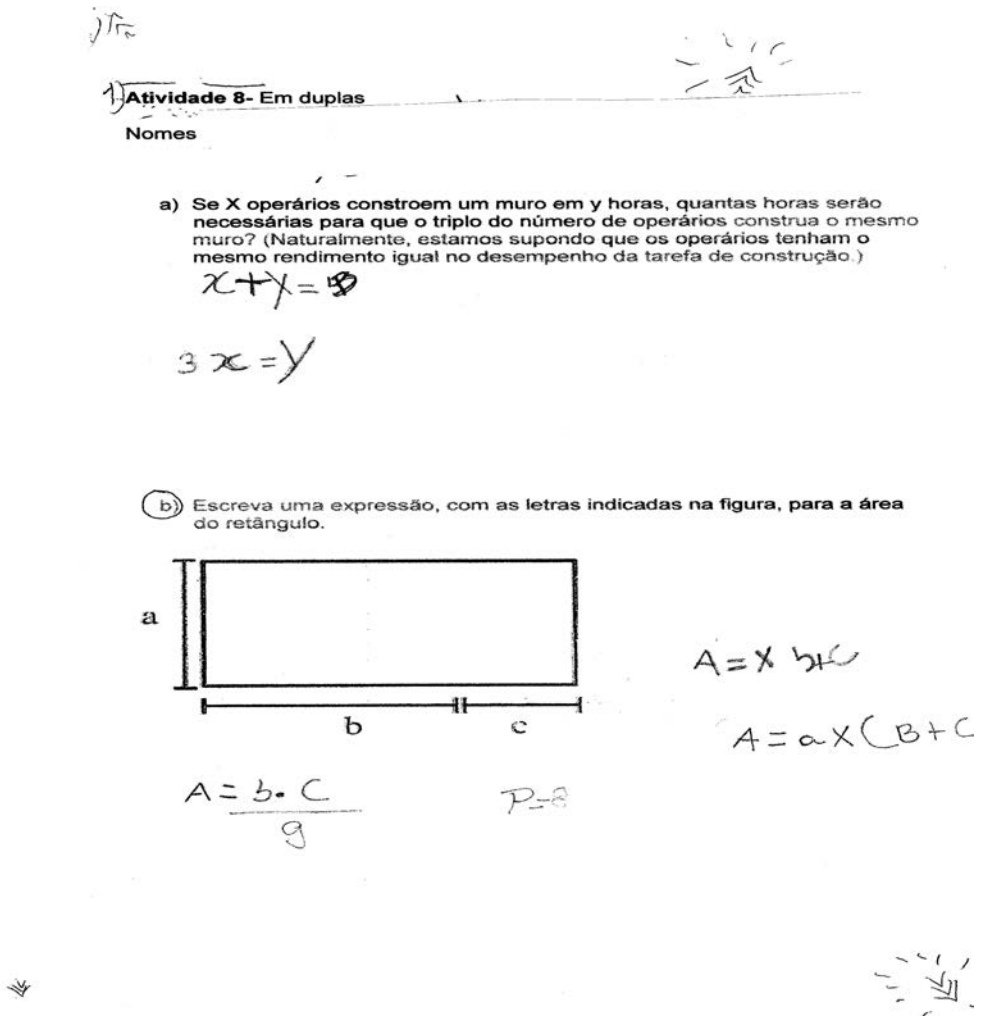


Figura 2- Resposta de uma dupla de alunos da 7ª série (Oliveira, 2012, p.108)

Atividade 2

Nessa atividade, resolvida em dupla pelos alunos, o item *a* trouxe, o desafio de uma "transposição de problemas para linguagem algébrica" (São Paulo, 2009b, p.12), e, além disso, exigiu dos alunos conhecimento de grandezas inversamente proporcionais. Como resposta, a dupla somou o número de operários (x) com o número de horas (y), obtendo como resultado uma outra incógnita (B). Como esse esquema de soma parece não ter dado um resultado esperado, a dupla escreveu abaixo a seguinte equação: (3.x=y). Nessa resposta, a dupla demonstra que reconheceu uma parte da questão inicial desse problema que propõe: "(...) o triplo do número de operários (...)", mas não reconheceu que se tratava de um problema "inversamente proporcional", pois não dividiu o outro lado do membro por 3.

Para o item *b*, a dupla utilizou vários esquemas já aprendidos para dar conta da solução, começando com (A=b.c/9). Aqui, eles possivelmente relembraram e testaram a fórmula para encontrar a área da figura de um triângulo (A=b.h/2). Depois demonstraram entender que a figura da questão tratava-se de um quadrado e utilizaram a expressão utilizada para calcular a área dessa figura. Ao lado aparece a expressão (P=) que possivelmente está relacionada com o perímetro da figura. Aparece, ainda, na tentativa de resolução, (A= x b+c) e por último expressão escrita corretamente [A= a x (b+c]. Nessa última expressão escrita pela dupla, "faltou" fechar os parênteses. Entendemos que a letra *x* que aparece nessa expressão representa o símbolo da multiplicação. Esses fatos não comprometem o entendimento daquilo que a dupla deveria representar.

Fica evidente que diversos esquemas foram testados a fim de dar conta de um resultado. Podemos notar, na primeira representação, uma conduta automatizada e organizada por meio da fórmula para encontrar a área de um triângulo; apareceu ainda (P=) que possivelmente está relacionada com o perímetro, mas esse esquema foi logo abandonado e depois apareceram mais duas expressões, como demonstrado acima. No início, observamos "uma mesma classe de situações, condutas em grande parte automatizadas, organizadas através de um esquema único". Depois, pudemos notar "o desencadeamento sucessivo de diversos esquemas que podem entrar em competição (...)" e que até chegar a uma solução podem ser combinados, recombinados, ou abandonados. (Vergnaud, 1996, p. 156).

As potencialidades podem ser vistas nas várias tentativas de resolução, nos esquemas mobilizados, nos conceitos matemáticos anteriormente aprendidos, que agora surgem dentro de um novo problema a fim de dar conta de uma solução. Dentro de um quadro de potencialidades como esse, reconhecemos uma Zona de Desenvolvimento Proximal, que, se corretamente explorada por meio da interação entre esse aluno e outro mais experiente ou entre o aluno e o professor ou, ainda, entre o aluno e as tecnologias ou material didático, pode transformar esse conhecimento potencial em real.

Considerações finais

As atividades propostas aos alunos e aqui analisadas mostram que os esquemas mobilizados pelos alunos na tentativa de resolução podem ser suficientes para considerarmos como pertinentes a um campo matemático mesmo que as respostas ainda não sejam uma solução esperada ao problema. Em algumas situações as respostas não poderiam ser consideradas totalmente *certas* ou completas, mas revelam um nível potencial de aprendizagem, evidenciado pelos caminhos percorridos na tentativa de resolução.

Quando nossa preocupação ao avaliar uma atividade é a aprendizagem e temos por princípio que o conhecimento é construído, passamos a olhar cada "erro" como parte de um processo esperado, como os tombos que toda criança toma ao tentar ficar em pé para tentar dar seus primeiros passos por volta do primeiro ano de vida. Assim, erros cometidos por alunos na tentativa de resolução de atividades matemáticas podem ser considerados aprendizados, mostram o que eles também já sabem e o que também precisam saber. Polarizar a correção de uma atividade somente entre o certo e o errado é desconhecer os pesos instrumentais de conceitos como *esquemas* e *Zona de Desenvolvimento Proximal* ou de conceitos e teoremas em ação o que pode privar os alunos de uma análise, de uma reflexão de seus próprios procedimentos e, enfim, de tomada de decisões bem mais produtivas de seus próprios erros.

Referências bibliográficas

Cury, H. N. (2008). *Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos.* Belo Horizonte: Autêntica.

Luckesi, C. C. (1998). Verificação ou avaliação: o que pratica a escola. *Série Idéias*, São Paulo: FDE, n. 8, pp. 71-80.

Oliveira, R. S. (2012). *Introdução à álgebra para alunos de sétima série com necessidades educacionais especiais em sala de aula regular*. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, Brasil.

São Paulo, Secretaria Estadual da Educação. (2009). *Caderno do professor. Matemática, Ensino Fundamental - 7ª série,* volume 3, São Paulo: SEE.

Vergnaud, G. (1996). A Teoria dos campos conceituais. In: Brum, Jean. *Didácticas da matemática* (pp. 155-191). Lisboa: Instituto Piaget.

Vergnaud, G. (2009). O que é aprender? In: Bittar, M. e Muniz, C. A. (orgs.). *A Aprendizagem matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais* (pp.13-36), Curitiba: Editora CRV.

Vigotsky, L.S. (2007). *A formação social da mente*. 7ª ed. São Paulo: Martins Fontes.

SOBRE EL APRENDIZAJE DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE: ALGUNAS DIFICULTADES Y UNA PROPUESTA DIDÁCTICA

Ana Mabel Juárez y Liliana Irassar
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. Argentina
mjuarez@fio.unicen.edu.ar, lirassar@fio.unicen.edu.ar

Resumen. El presente trabajo muestra, en primer lugar, algunos de los resultados de un estudio descriptivo realizado con el objetivo de localizar errores y dificultades que presentan los alumnos de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNCPBA), durante el aprendizaje de la transformada de Laplace y sus aplicaciones. Se seleccionaron, en este caso, los errores relacionados con el cálculo de la transformada de Laplace de funciones continuas por tramos. A continuación, este trabajo pretende compartir una propuesta didáctica, elaborada desde un enfoque constructivista del aprendizaje con los aportes de las teorías de Ausubel y Duval. El diseño de esta propuesta está orientado a asimilar el concepto de función escalón; adquirir habilidad para describir funciones continuas por tramos en términos de escalones unitarios y resolver problemas que involucran procesos discontinuos

Palabras clave: aprendizaje, errores, dificultades, propuesta didáctica

Abstract. This paper shows, at first, some of the results of a descriptive study carried out in order to locate mistakes and difficulties that students use to make and run throuh in Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNCPBA), while learning Laplace transform and its applications. In this case, mistakes associated with Laplace transform calculus of piecewise continuous functions, were selected. Then, this paper aims to share a didactic proposal, built up from a constructivist approach to learning with the contributions of Ausubel and Duval's Theories. The design of this proposal is intended to assimilate the concept of step function; to gain ability to describe piecewise continuous functions in terms of unitary steps, and to solve problems that involve discontinuous processes

Key words: learning, mistakes, difficulties, teaching proposal

Introducción

La asignatura Análisis Matemático III, que se dicta para todas las carreras de Ingeniería de UNCPBA, trata el estudio de las ecuaciones diferenciales y sistemas de ecuaciones diferenciales para modelar sistemas complejos. En algunas situaciones, los modelos tienen que representar bruscos cambios en estos sistemas como puede ser, por ejemplo, un circuito eléctrico LR en serie, que se modela mediante la ecuación diferencial lineal para la corriente $l(t)$: $L\frac{dl}{dt}+Rl=E(t)$donde $E(t)$ puede aplicarse sólo durante un breve periodo de tiempo y después se suspende o puede tenerse un interruptor para abrir y cerrar de manera que el voltaje se aplique, se suprima y luego se vuelva a aplicar. En términos matemáticos se estaría tratando con funciones continuas por tramos expresadas de la siguiente manera, por ejemplo:

$$E(t)=\begin{cases} f(t) & 0\le t\le a \\ 0 & t>a \end{cases} \quad \text{o} \quad E(t)=\begin{cases} f(t) & 0\le t\le a \\ 0 & a<t<b \\ f(t) & t\ge b \end{cases}$$

Para estos casos, la transformada de Laplace es una herramienta especialmente útil, concretamente, en la resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes cuando el término no homogéneo o término de forzamiento tiene discontinuidades de salto (que modelan la acción de un interruptor).

Una de las primeras funciones de este tipo que se estudia en asignaturas anteriores, es la función escalón unitario, también llamada función de Heaviside en ingeniería. Esta función, además, permite describir otras funciones definidas por intervalos, lo cual resulta muy útil en el cálculo de sus transformadas de Laplace usando propiedades, sin recurrir a la definición que muchas veces presenta integrales laboriosas. Justamente, expresar una función de manera conveniente en términos de funciones escalones unitarios, ocasiona diversas dificultades a los alumnos. Los obstáculos que suelen aparecer resultaron ser el motor para la elaboración de una propuesta didáctica que permita intervenir, en primer lugar, sobre los conocimientos previos, en este caso las funciones discontinuas como el escalón unitario, avanzando en una comprensión adecuada del tema usando distintos registros de representación y realizando conversiones entre los registros. También, se busca ampliar los conocimientos previos, incorporando la interpretación física del escalón unitario al asignarle la función de "interruptor" o de "activar" y "desactivar" funciones, por resultar útil para representar distintas funciones continuas por partes. Por otro lado, se pretende que la propuesta contenga actividades de resolución de ecuaciones diferenciales cuando el término no homogéneo presente discontinuidades de saltos finitos, para aplicar los conocimientos aprendidos. Por último, que este tratamiento didáctico incorpore actividades de control diseñadas con algunos de los errores encontrados en el estudio exploratorio.

La propuesta didáctica fue elaborada tomando como base un modelo de enseñanza que ubica al docente en mediador entre las experiencias de los alumnos y los conceptos matemáticos, asumiendo la responsabilidad del diseño de actividades de aprendizaje y la búsqueda de condiciones que promuevan la apropiación de los conocimientos por parte del alumno.

Marco conceptual

La teoría de Ausubel acuña el concepto de "aprendizaje significativo" definido como un proceso a través del cual una nueva información se relaciona con un aspecto relevante preexistente en la estructura cognitiva del aprendiz. Este proceso incluye la interacción de la nueva información con una estructura de conocimiento específica, a la cual Ausubel define como concepto subsunsor (inclusor, subordinado), ya existente en la estructura cognitiva del individuo. Ausubel (1978, citado por Pozo, 2006) llama estructura cognitiva a una estructura jerárquica de conceptos que son representaciones de experiencias sensoriales del individuo. Considera que el almacenamiento de informaciones en el cerebro se da de manera organizada, formando una jerarquía conceptual en la cual los elementos más específicos de conocimientos son asimilados con conceptos más inclusivos. Señala el papel que juegan los conocimientos previos del alumno en la adquisición de nuevas informaciones. La significatividad sólo es posible si se relacionan los nuevos conocimientos con los que ya posee el sujeto. Según Ausubel, un aprendizaje es significativo cuando "puede

relacionarse, de modo no arbitrario y sustancial (no al pie de la letra) con lo que el alumno ya sabe" (Ausubel, Novak y Hanesian, 1978, citado por Pozo, 2006, p. 211).

En Matemática, la adquisición conceptual de un objeto pasa necesariamente a través de la adquisición de una o más representaciones semióticas. No existe noética sin semiótica: no existe adquisición conceptual de un objeto sin una representación realizada por medio de signos (Duval, 1993, citado por D'Amore, 2005). Las características de la semiótica involucran tres actividades cognitivas diversas: representación, tratamiento y conversión. La construcción de los conceptos matemáticos depende estrechamente de la capacidad de usar distintos registros de representaciones semióticas de dichos conceptos: de *representarlos* en un registro dado, de *tratar* tales representaciones al interior de un mismo registro y de *convertir* tales representaciones de un dado registro en otro registro. Desde el punto de vista cognitivo, la conversión resulta más relevante, en tanto, desde un punto de vista matemático se da mayor importancia al tratamiento (D'Amore, 2005). De una forma más específica, Duval menciona la operación cognitiva de conversión, que consiste en la transformación de una representación producida dentro de un sistema de representación a otro, de tal manera que la última representación permite explicitar otras significaciones relativas al contenido representado. Enfatiza la condición de que los objetos matemáticos no deben ser confundidos con el contenido de la representación. Es decir, la acción de convertibilidad entre los registros, permite discriminar el concepto, no por medios intuitivos como se maneja tradicionalmente, sino por acciones organizadas para establecer la correspondencia entre los registros, además se debe recordar que toda representación contiene parcialmente el objeto representado, por lo que las representaciones de diferentes registros no contienen los mismos aspectos del contenido conceptual. Fortalecer la conversión, contribuye a establecer la articulación de varios registros semióticos de representación, y con ello enriquecer las estructuras cognitivas en el estudiante.

El estudio de los errores en el proceso de aprendizaje es clave en Educación Matemática. El error es una posibilidad permanente en la adquisición y consolidación del conocimiento y puede llegar a formar parte del conocimiento científico que emplean las personas. Brousseau (1983) sostiene que el aprendizaje de Matemática genera muchas dificultades a los alumnos y que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en forma de errores, los cuales pueden tener procedencias diferentes pero en cualquier caso son considerados como la presencia en el alumno de esquemas cognitivos inadecuados y no solamente como consecuencia de una falta específica de conocimiento. Analizar los errores tiene un doble interés: por una parte, sirve para ayudar a los profesores a organizar estrategias generales y específicas para conducir mejor la enseñanza y el

aprendizaje de Matemática, insistiendo en aquellos aspectos que generan más dificultades, y por otra, contribuye a una mejor preparación de estrategias de corrección de los mismos.

Consideraciones metodológicas

Para investigar los errores y dificultades que presentan los alumnos de Ingeniería de la UNCPBA en el aprendizaje de la transforma de Laplace, se realizó un estudio exploratorio, donde se analizaron los protocolos de exámenes parciales de los últimos años en los ítems relacionados con el tema transformada de Laplace. La metodología se centró en una descripción de los errores detectados en las producciones de los alumnos.

Para elaborar una alternativa didáctica superadora de las dificultades encontradas, se clasificaron los errores encontrados y se diseñaron actividades para atacar, en la medida de lo posible, algunas de esas dificultades.

Errores y dificultades de los alumnos

Los errores y dificultades detectadas durante el aprendizaje de la transformada de Laplace y sus aplicaciones se clasificaron en tres categorías:

a) Cálculo de la transformada de Laplace de funciones definidas por intervalos escritas en forma analítica por partes o dadas en forma gráfica.

   Los errores aparecen en dos momentos: cuando tienen que expresar tales funciones en forma compacta combinando escalones unitarios y, luego, cuando tienen que hacer los "arreglos" necesarios para calcular sus transformadas usando propiedades (especialmente el segundo teorema de desplazamiento). Los errores surgen de manera natural al realizar manipulaciones dentro de uno de los registros o bien al hacer la conversión entre dos registros.

b) Resolución de Ecuaciones Diferenciales cuyo término no homogéneo es una función continua por partes expresada analíticamente en términos de la función escalón unitario o dada en forma gráfica o analítica por partes. Los errores surgen de manera similar que lo descrito en el ítem a).

c) Resolución de problemas que involucran procesos discontinuos.

   Comprender y plantear un problema siempre es una dificultad pero los errores surgen durante el proceso de modelación, específicamente en la representación de funciones definidas por intervalos usando funciones escalones unitarios.

De los resultados anteriores se interpreta, en el contexto de la resolución de ecuaciones diferenciales, que el concepto de la función escalón unitario (conocimientos previos) y la interpretación de la función de interruptor de los escalones unitarios representa obstáculos durante el aprendizaje de la transformada de Laplace.

Propuesta didáctica

La alternativa didáctica que se propone está estructurada en una secuencia de actividades: iniciales, intermedias, de aplicación y de control, con la sugerencia que estas actividades se integren a la guía de trabajos prácticos de la asignatura, en forma ordenada y articulada para que los alumnos avancen en forma paulatina al logro de los objetivos, teniendo acercamientos iniciales al contenido y avanzando niveles más amplios de comprensión y generalización. Los objetivos de la propuesta son:

- Expresar funciones continuas por tramos en términos de escalones unitarios.
- Calcular la transformada de Laplace de funciones continuas por tramos.
- Resolver ecuaciones diferenciales y problemas que involucren procesos discontinuos.

Actividades iniciales

Se diseñaron estas actividades para revisar el concepto de función escalón unitario (conocimiento previo) y para interpretar su función de interruptor, de activar y desactivar funciones, es decir, entender el efecto físico de "apagar" y "encender" una función dada f. Para ello se utilizaron distintos registros de representación (verbal, gráfica y analítica), proponiendo la traducción de un lenguaje a otro para lograr una mayor comprensión del tema. Con estas actividades se pretende, además, que los alumnos adquieran habilidad para representar analíticamente en forma compacta las funciones continuas por partes.

Ejemplos

1) Representar las funciones $u(t-1)$ y $u(t-a)$ $(a \geq 0)$ en forma analítica por partes, gráfica y verbal. (Considerar $(t \geq 0)$, en todos los casos.)

2) Representar en forma analítica por partes, gráfica y verbal las siguientes funciones:

a) Aa2 $\mathrm{u}(\mathrm{t}-1)$

b) $2-2\mathrm{u}(\mathrm{t}-1)$

c) $\mathrm{u}(\mathrm{t}-1)+2\mathrm{u}(\mathrm{t}-3)-5\mathrm{u}(\mathrm{t}-4)$

d) $\mathrm{f}(\mathrm{t})\mathrm{u}(\mathrm{t}-1)$, siendo $\mathrm{f}(\mathrm{t})=\mathrm{t}$

e) $\mathrm{f}(\mathrm{t})-\mathrm{f}(\mathrm{t})\mathrm{u}(\mathrm{t}-\mathrm{a})$

f) $f(t) + [g(t) - f(t)]u(t-a) + [h(t) - g(t)]u(t-b)$

3) Expresar analítica y gráficamente la función $\mathrm{f(t)} = \cos 3\mathrm{t}$ que se activa a partir de $t = \pi$.

4) Expresar analíticamente la función $f(t) = 3t$ que se activa a partir de $\mathrm{t} = 2$ y se desactiva para los $t \geq 5$. Graficar.

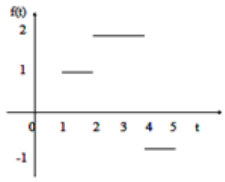
5) Graficar la función $\mathrm{f(t)} = \sin \mathrm{t}$ sabiendo que deja de actuar a partir de $t = \frac{5\pi}{2}$. Expresarla analíticamente en forma compacta.

6) Expresar analíticamente, en términos del escalón unitario, y gráficamente la función que es igual a $2t$ hasta que t llega a 3, donde la función toma un valor constante 6 hasta que t llega a 5, allí realiza un salto de 2 unidades y continua constante para todos los t mayores que 5.

7) Expresar en términos de la función escalón las siguientes funciones definidas por partes.

Actividades intermedias

$$(t) = \begin{cases} 0 & t \leq \pi \\ t - \pi & \pi \leq t < 2\pi \\ 0 & 2\pi < t \end{cases}$$



$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \cos t & 0 < t < \pi \\ \sin t & t > \pi \end{cases}$$

Estas actividades están propuestas para determinar la transformada de Laplace de funciones continuas por tramos. Los alumnos tienen que aplicar lo aprendido en las actividades iniciales para calcular la transformada de Laplace sin recurrir a la definición. Esto implica, además de expresar las funciones definidas por partes en forma compacta utilizando f(t)escalones unitarios, realizar los "arreglos" u artíficos necesarios para calcular transformadas aplicando propiedades

Ejemplos

Usando propiedades de la transformada de Laplace, calcular $\mathrm{L\{f(t)\}}$ para las funciones dadas a continuación:

a) $\mathrm{f(t)} = 4(\mathrm{t} - \pi)^2 \mathrm{u}(\mathrm{t} - \pi)$

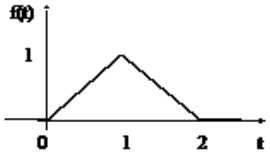
b) $\mathrm{f(t)} = \mathrm{t}^2\, \mathrm{e}^{-3\mathrm{t}}\, \mathrm{u}(\mathrm{t} - 1)$

c) $\mathrm{f(t)} = \begin{cases} 0, & \mathrm{t} < 0 \\ \mathrm{t}, & 0 < \mathrm{t} < 2 \\ 4 - \mathrm{t}, & 2 \leq \mathrm{t} \leq 4 \\ \mathrm{o}, & \mathrm{t} > 4 \end{cases}$

d) $\mathrm{f(t)} = (\mathrm{t} - 2)[\mathrm{u}(\mathrm{t} - 2) - \mathrm{u}(\mathrm{t} - 3)]$

e) $g(t) = \begin{cases} 0, & t < 3 \\ t, & t \geq 3 \end{cases}$

f)



Actividades de aplicación

Estas actividades están pensadas para que los alumnos aprendan a modelar, resolver e interpretar problemas físicos y técnicos que involucran procesos discontinuos. Son problemas con valores iniciales donde las ecuaciones diferenciales tienen coeficientes constantes y término no homogéneo o término de forzamiento con discontinuidades de salto (que modelan la acción de un interruptor). Con estas actividades los alumnos deben poner en juego lo aprendido hasta el momento, con acciones adicionales de determinar la transformada inversa de Laplace.

Ejemplos

1) Expresar el término forzado discontinuo en términos de la función escalón unitario, cuando corresponda, y resolver el problema con valores iniciales:

a) $y'' + 2y' + 5y = h(t), \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0, \qquad h(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 7 \\ 0, & t > 7 \end{cases}$

b) $y'' + 3y' = u_2(t), \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0$

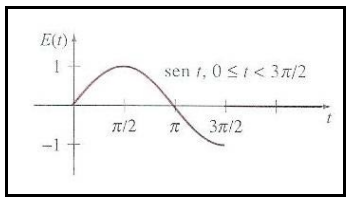
2) Un circuito en serie contiene un inductor, un resistor y un capacitor para el cual $L = 0.5h$, $R = 10\,\Omega$ y $C = 0.01f$ respectivamente. El voltaje $E(t)$ dado por:

$$E(t) = \begin{cases} 5, & 0 \leq t < 5 \\ 0, & t \geq t \end{cases}$$

se aplica al circuito. Determinar la carga instantánea $q(t)$ en el capacitor para

$t \geq 0$ si $q(0) = 0, \qquad q'(0) = 0.$

3) Determinar la corriente $i(t)$ en un circuito en serie RL cuando $i(0) = 0$, $L = 1h$, $R = 1\Omega$ y $E(t)$ es la que se muestra en la figura.



Actividades de control de resultados y procedimientos

Las actividades de control se diseñaron con errores propios de los alumnos con el objetivo de promover la reflexión y análisis crítico sobre lo realizado. Están pensadas para intercalarse entre las actividades anteriores para que el alumno, vaya desarrollando la capacidad de control chequeando sus resultados y procedimientos, a la vez, que va mejorando sus aprendizajes. Se busca, con estas actividades, que los alumnos aprendan estrategias de control para conocer si lo que están realizando es correcto o no, sin tener que resolver estas actividades, en algunos casos.

Ejemplos

1) Dado el problema: "Hallar la carga $q(t)$ en el capacitor de un circuito en serie RC, sujeto a las siguientes condiciones indicadas: $q(0) = 0,\ R(0) = 2.5\Omega,\quad C = 0.08f$ y

$$E(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 3 \\ 5, & t \ge 3 \end{cases}$$

Determinar cuál de los siguientes planteos es correcto, explicando procedimientos utilizados para el control.

$$2.5\,q'(t) + 0.08\,q(t) = 5\,u(t-3) \qquad\qquad 2.5\,q'(t) + 0.08\,q(t) = 5 - 5\,u(t-3)$$

2) Dado el problema:

Determinar la corriente en un circuito LRC en serie para el cual $\mathrm{L} = 0.1\mathrm{h},\quad R = 20\Omega$ $C = 10^{-3}\,f$ y la corriente inicial es nula. La tensión aplicada $\mathrm{E(t)}$ es:

$$E(t) = \begin{cases} 120t, & 0 < t < 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$$

Controlar si el desarrollo propuesto (incompleto) es correcto. En caso contrario, señalar el o los errores cometidos, y proponer la solución correcta.

$$0{,}1\,\frac{di(t)}{dt} + 20\,i(t) + 10^{-3}\,q(t) = 120t - 120t\,u(t-1)$$

$$0{,}1\,\frac{di(t)}{dt} + 20\,i(t) + 10^{-3}\int_0^t i(z)\,dz = 120t - 120t\,u(t-1)$$

$$\frac{di(t)}{dt} + 200\,i(t) + 10000\int_0^t i(z)\,dz = 120t - 120t\,u(t-1)$$

$$s\,I(s) + 200\,I(s) + \frac{10000}{s}\,I(s) = \frac{120}{s^2} - \frac{120}{s^2}\,e^{-s}$$

$$(s^2 + 200s + 10000)\,I(s) = \frac{120}{s} - \frac{120}{s}\,e^{-s}$$

$$I(s) = \frac{120}{s(s+100)^2} - \frac{120}{s(s+100)^2}\cdot e^{-s}$$

Reflexiones finales

La mayor riqueza de la propuesta didáctica reside en las actividades iniciales, que contemplan los conocimientos previos, considerando que una base sólida contribuye a un aprendizaje significativo del tema central de estudio.

Las actividades presentadas pueden encontrarse en libros de texto, pero la selección de ellas con objetivos concretos, su combinación, usando además recursos de experiencias de aprendizajes de los alumnos y un sustento teórico que respalde el trabajo anterior podría ser la clave para diseñar alternativas de enseñanza que promuevan aprendizajes de calidad.

Referencias bibliográficas

Bachelard, G. (1985). *La formación del espíritu científico* (13ª ed.). España: Siglo veintiuno editores.

Boyce, W. E. DiPrima, R. C. (1994). *Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera* (3ª ed.). México: Limusa Noriega Editores.

Brousseau, G. (1983). 'Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *4* (2), 165-198.

D'Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática*. México: Reverté Ediciones.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotuque et fonctionnement cognitif de la penseé. *Annales de Didáctique et de Sciences Cognitives*, 5, IREM de Strasbourg, pp. 37-65.

Duval, R. (2002). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. En F. Hitt, (Ed.), *Representations and Mathematics Visualization*, *North American Chapter of PME,* pp. 311-335. Cinvestav-IPN, México.

Pozo, J. I. (2006). *Teorías Cognitivas del Aprendizaje* (9ª ed.). Madrid: Ediciones Morata. S.L.

Rico L., (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas. En J. Kilpatrik, P. Gomez y L. Rico (Eds.) *Educación Matemática*, cap. 3, pp. 69-108. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

.

EMERGENTES DE UNA PROPUESTA DIDÁCTICA EN EL MARCO DE UN APRENDIZAJE COLABORATIVO

Raúl Katz y Pablo Sabatinelli
Universidad Nacional de Rosario. Argentina
rdkatz@fceia.unr.edu.ar, pablos@fceia.unr.edu.ar

Resumen. Dada la importancia que tiene en la Ingeniería Civil las superficies regladas, en particular el paraboloide hiperbólico, hemos tomado esta superficie como objeto de aprendizaje para nuestros estudiantes de Ingeniería. Les proponemos una actividad que propicia el reconocimiento del paraboloide hiperbólico como una superficie reglada.
En el trabajo mostramos la actividad y las dificultades que emergieron durante el desarrollo de la misma. Consideramos que actividades como ésta deben ocupar mayor espacio en el aula por cuanto permiten explorar los razonamientos que ponen en juego los estudiantes, ofreciendo elementos para actuar didácticamente y generar líneas de acción para futuras prácticas educativas
Palabras clave: aprendizaje colaborativo, superficie reglada
Abstract. Given the importance of ruled surfaces (in particular the hyperbolic paraboloid) in Civil Engineering applications, we have chosen this surface for a learning activity for Civil Engineering students. We propose an activity to ease the recognition of hyperbolic paraboloid as a ruled surface. In this paper we show the difficulties that emerged during the development of this activity. We believe that activities like this should gain more space in the class for they allow us to scout the way students approach a problem, offering didactic elements for generating different courses of action in our classes
Key words: collaborative learning, ruled surface

Introducción

El paraboloide hiperbólico es una de las superficies de mayor aplicación en la Ingeniería Civil. Aun siendo una superficie con *doble curvatura* puede generarse con líneas rectas, razón por la cual es conveniente a la hora de realizar encofrados o simplemente darle forma a una estructura.

A pesar de ello, en nuestro curso de Algebra y Geometría para Ingeniería Civil, el estudio de las superficies cuádricas, en particular el paraboloide hiperbólico, se realiza a partir de sus ecuaciones canónicas. Se analizan las intersecciones del paraboloide hiperbólico con los planos coordenados y con planos paralelos a los mismos, esbozándose una gráfica en la que se destaca solo un par de rectas contenidas en la superficie, las que se encuentran en uno de los planos coordenados. Desde esta perspectiva, no se enfatiza el hecho de que el paraboloide hiperbólico es una superficie reglada. Ante esta situación nos preguntamos:

a) ¿Cómo organizar la clase para que los estudiantes se apropien de esta propiedad?

b) ¿Disponen los estudiantes de los conocimientos previos necesarios para lograrlo?

c) En este proceso de apropiación, ¿será el uso de un software matemático un recurso facilitador?

A partir de estos interrogantes propusimos a los estudiantes, en el marco de un aprendizaje colaborativo, una secuencia de actividades con dos objetivos. Por un lado, lograr que se apropien

de la propiedad señalada, y por el otro, aportar información sobre las dificultades y el nivel de desarrollo potencial de aprendizaje alcanzado por los estudiantes en los temas implicados en la actividad. Esto último, con la intención de generar líneas de acción para futuras prácticas educativas.

Objetivos de la actividad

En este trabajo conviven dos objetivos, que atienden a diferentes intereses. Un primer objetivo es de carácter didáctico: hacer patente que el paraboloide hiperbólico es una superficie reglada y la aplicación práctica que esto tiene dentro del ámbito de la ingeniería civil. El segundo objetivo surge desde y para la investigación educativa: a partir del trabajo de los alumnos sobre una propuesta didáctica tomar nota de las dificultades emergentes como recurso para nuestro accionar didáctico.

Metodología de trabajo implementada en el aula

El desarrollo de la clase se hizo en el marco del aprendizaje colaborativo, por cuanto consideramos que el mismo se presenta como un proceso social donde se respeta la autonomía del estudiante, quien aprende a partir de su propia experiencia y no a partir de la transferencia pasiva de los contenidos. "El conflicto que surge del desacuerdo del grupo crea un desequilibrio, y el ajuste resultante a ese estado es una causa primaria del desarrollo cognitivo." (Brown, Metz y Campione, 2000, p.192).

el alumno *reconstruye* un saber, pero no lo hace solo, porque ocurren procesos complejos en los que se entremezclan procesos de construcción personal y procesos de *coconstrucción* en colaboración, con los otros que intervinieron, de una o de otra forma, en ese proceso (Wertsch, 1993, citado en Rojas, 2001, p.232).

El docente tiende los puentes entre lo que los estudiantes supuestamente saben, y un nuevo contenido de aprendizaje. En este contexto el uso de los conocimientos previos es esencial para elaborar nuevos significados

Participantes

La actividad se desarrolló con alumnos de primer año de la asignatura Álgebra y Geometría Analítica de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario, durante una clase práctica. Las docentes a cargo del curso conocían la actividad a desarrollar de una reunión previa en la que además se explicitó la modalidad de trabajo que teníamos diseñada. Ese día condujimos la actividad de la que participaron los 21 alumnos presentes y las dos docentes. Se les indicó a los alumnos que formasen cuatro grupos (se

formaron tres grupos de cinco alumnos y uno de seis) y de cada grupo participó un docente a cargo o un docente investigador. Los docentes teníamos que registrar los emergentes que surgían en cada grupo, en el transcurso de la resolución de la propuesta. Nuestra intervención debía restringirse a encauzar el rumbo de la actividad mediante nuevas preguntas en la medida que surgieran dificultades o errores.

En el momento de llevar a cabo la actividad, los alumnos ya habían abordado en clases prácticas y teóricas los siguientes contenidos: álgebra vectorial, geometría lineal del plano y del espacio, cónicas y estudio de la ecuación general de segundo grado y superficies cuádricas.

Algunas consideraciones sobre la actividad propuesta

Desde hace unas décadas uno de los objetivos fundamentales de la enseñanza de la matemática es lograr que los estudiantes sean capaces de resolver problemas. Para Santaló (1994, p.31) "la verdadera matemática ha consistido siempre en la resolución de problemas".

Existen diferentes significados para la expresión "solución de problemas". En ocasiones se utiliza la expresión para referirse a actividades de resolución de ejercicios consistentes en la aplicación de mecanismos conocidos que conducen a una solución casi inmediata. En contraste con este punto de vista, la existencia de un problema implica la existencia de una dificultad que obligue a plantearse un camino a seguir para alcanzar la meta. Desde esta última perspectiva un problema sería una propuesta que no es posible resolver por aplicación directa de un resultado conocido; requiere de la búsqueda de nuevas relaciones, de la aplicación de distintos conocimientos.

En la planificación de la actividad propuesta, hemos tomado como punto de partida el enunciado siguiente: "Describir el lugar geométrico determinado por las rectas que se apoyan simultáneamente sobre tres rectas no coplanares dos a dos". Este enunciado fue desmenuzado en una secuencia de actividades más simples y lo presentamos a los alumnos a través de una guía de actividades. Los alumnos conocían al momento de resolver esta guía de actividades la ecuación reducida del paraboloide hiperbólico. La intención fue la de proponer en la guía de trabajo ecuaciones de rectas lo suficientemente simples como para que la ecuación del paraboloide resultante no fuese tan complicada. La representación de la superficie se realizó en un segundo momento de la actividad, en el laboratorio de informática con el software wxMaxima.

La actividad propuesta

1. Las ecuaciones que se dan a continuación representan tres rectas en el espacio.

$$r_1:\begin{cases} x=t, \\ y=0, \\ z=0, \quad t\in R, \end{cases} \qquad r_2:\begin{cases} x=0, \\ y=s, \\ z=3, \quad s\in R, \end{cases} \qquad r_3:\begin{cases} x=u, \\ y=u, \\ z=6, \quad u\in R. \end{cases}$$

Analice si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.

a) La recta r_1 representa al eje x.

b) La recta r_2 representa al eje y.

c) La recta r_2 representa una recta contenida en el plano de ecuación $z = 3$, $\forall\, x$, $\forall\, y$.

d) Las rectas r_1, r_2 y r_3 están contenidas en planos paralelos.

e) Las rectas r_1, r_2 y r_3 son paralelas.

f) Las rectas r_1, r_2 y r_3 son alabeadas dos a dos.

2.

a) Halle la ecuación del plano π_1 determinado por el punto $A(1,0,0) \in r_1$ y la recta r_2.

b) Halle la ecuación del plano π_2 determinado por el punto $A(1,0,0) \in r_1$ y la recta r_3.

c) Escriba ecuaciones paramétricas para la recta r, intersección de los planos π_1 y π_2.

d) ¿Corta la recta r a cada una de las rectas r_1, r_2 y r_3? Justifique.

3. Repita el apartado 2 considerando un punto cualquiera de r_1 de la forma $(t, 0, 0)$. Observe que el caso $t = 1$ corresponde a lo resuelto en el apartado 2.

Al finalizar la propuesta y al variar t en el conjunto de números reales, obtendrá unas ecuaciones paramétricas del lugar geométrico formado por las rectas que cortan a las tres rectas alabeadas contenidas en planos paralelos. Este lugar geométrico es un paraboloide hiperbólico. Utilizaremos un software para visualizar "una parte" de él.

Descripción de la producción de los grupos

Todos los grupos responden de manera correcta el punto 1a y 1b de la actividad. Llama la atención que ningún grupo haya justificado la falsedad del enunciando 1b diciendo que z debía asumir constantemente el valor 0 sino que uniformemente justifican argumentando que r_2 representa una recta en el espacio que contiene al punto $P(0,0,3)$ y es paralela a la dirección del vector $(0,1,0)$. En ningún caso se presentó un gráfico de la situación sino que se mantuvieron en el plano de lo algebraico.

En cuanto punto 1c, la respuesta del grupo 2 es incorrecta; sostienen que la afirmación es falsa y lo justifican reiterando lo respondido en el apartado 1b. Cuando el docente propone realizar una representación gráfica, dibujan el punto $P(0,0,3)$ el vector $(0,1,0)$ con origen en el origen de coordenadas y luego grafican correctamente la recta r_2. Aún así no rectifican su respuesta. Nuevamente, la docente les pide que vinculen la condición $z = 3$ (en las ecuaciones paramétricas de r_2) con la ecuación del plano $z = 3$, $\forall\ x$, $\forall\ y$. Esto les permite darse cuenta del error cometido y que la afirmación en cuestión es verdadera.

Los cuatro grupos responden correctamente el punto 1d. En el caso del grupo 3, la respuesta surge de la representación gráfica. En los restantes casos reconocen que las rectas se encuentran contenidas en los planos $z = 0$, $z = 3$ y $z = 6$ que son planos paralelos.

La respuesta dada en el punto 1d les provoca dudas en el momento de responder el punto 1e. La intervención de un alumno del grupo cuatro, diciendo con tono de duda "*rectas que se encuentran en planos paralelos no tienen porqué ser paralelas*" fue captado por los restantes alumnos que de este modo fueron inducidos a justificar la falsedad del punto. Alumnos del grupo 3 afirman que las rectas no son paralelas, "*se ve en las gráficas*", argumentan. Cuando la docente preguntó acerca de cómo justificar que las rectas tienen distintas direcciones, los alumnos de este grupo se remitieron correctamente a la condición de paralelismo entre los vectores direcciones de las rectas.

La respuesta del punto 1f, se deduce de manera inmediata de las respuestas dadas en los dos puntos anteriores como argumentó el grupo 4. Sin embargo los grupos 1 y 3, para decidir, se remiten al cálculo del producto mixto entre los vectores dirección de las rectas y un vector con extremos en puntos de cada recta. Nuevamente, necesitan del apoyo algebraico para responder cuestiones que razonan correctamente fuera de ese marco. En el caso del grupo 2, surge una confusión sobre el significado de rectas alabeadas. Consideraban que dos rectas son alabeadas cuando "no están contenidas en un mismo plano". En el momento que estaban contenidas en planos paralelos, inferían que eran alabeadas, sin considerar que podía darse el caso que estas rectas fuesen paralelas.

Un alumno consideró que el par de rectas podía ser considerado tanto alabeado como coplanar. Reproducimos sus propias palabras referidas al gráfico 1: "si consideramos el plano que las contiene las rectas son coplanares, pero si consideramos el par de planos paralelos que las contienen entonces no están en un mismo plano, son alabeadas"

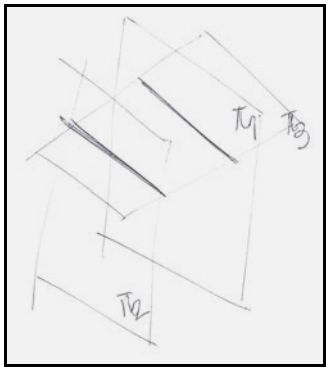


Gráfico 1: Rectas paralelas y alabeadas.

Los alumnos no presentaron dificultades para responder a los puntos 2a, 2b y 2c. En clases previas a la experiencia habían trabajado en la obtención de la ecuación de un plano determinado por una recta y punto exterior a la misma y en el pasaje a las ecuaciones paramétricas de una recta en el espacio expresada como intersección de dos planos.

En cuanto al punto 2d, se repite el fenómeno observado al responder el punto 1f. Para responder si la recta r se intercepta con cada una de las rectas r_1, r_2 y r_3 se remiten a la resolución de un sistema de ecuaciones cuando tenían todos los elementos para responder sin necesidad de hacer nuevos cálculos. Nuevamente, la acción de los alumnos destaca la importancia que le dan a la justificación algebraica, posiblemente fomentada desde nuestra acción didáctica como docentes.

En el punto 3 el comportamiento y dificultades que presentaron los grupos fueron muy similares, razón por la cual no haremos distinción del grupo en cuestión. Ningún grupo presentó dificultades para obtener la ecuación del plano repitiendo el procedimiento que utilizaran en el punto 2a, pero ahora reemplazando la coordenada 1 del punto A, por la coordenada t. Sin embargo, ya no resultó tan evidente que la ecuación obtenida correspondía efectivamente a un plano, ya que consideraban que en la ecuación estaban interviniendo *cuatro* variables. Se les sugirió que escribieran la ecuación para el caso particular $t = 1$, hecho que les permitió reconocer la ecuación del plano obtenido en su momento. De este modo resultó claro que al tomar t diferentes valores, se obtendrían diferentes ecuaciones correspondientes a diferentes planos. La repetición de los puntos 2b, 2c y 2d cambiando la coordenada 1 por t no presentó dificultades a los grupos.

En el segundo momento de la actividad, llevamos a los alumnos al laboratorio de informática e indicamos los comandos para graficar con wxMaxima la superficie dada en ecuaciones paramétricas. Los alumnos graficaron varias veces (para diferentes intervalos paramétricos) y reconocieron que se trataba de un paraboloide hiperbólico. También se sugirió encontrar a partir de las ecuaciones paramétricas de la superficie, una ecuación cartesiana de la misma. Al obtenerla,

observaron que no correspondía a la ecuación reducida del paraboloide hiperbólico que conocían. Se explicó en ese momento, que se podía obtener un sistema de ejes coordenados rectangulares de tal forma que respecto de ese sistema, la ecuación cartesiana del paraboloide hiperbólico asumía la forma reducida. Esta observación fue relacionada con la roto-traslación de ejes en el plano al estudiar la ecuación general de segundo grado en dos variables.

Aprovechando el laboratorio, también se buscaron en Internet construcciones que presentaran en su estructura la forma de paraboloides hiperbólicos, como es el caso del *Puente de la mujer*, que se encuentra en Puerto Madero (Buenos Aires, Argentina). Entre otras obras arquitectónicas, se mencionaron el *Puente de la Constitución* (Italia), el *World Trade Centre* (Estados Unidos).

Conclusiones

El desarrollo de la actividad propuesta en el marco del trabajo colaborativo y la animación gráfica generada por el docente fueron decisivos para que los estudiantes reconocieran al paraboloide hiperbólico como una superficie reglada.

En la resolución de los diferentes puntos, merece destacarse la preponderancia del recurso algebraico por sobre el recurso geométrico. Los alumnos calculan un determinante para decidir que las rectas son alabeadas, cuando en realidad bastaba con relacionar las respuestas dadas en los apartados previos, donde probaron que las rectas no son paralelas y se encuentran en planos que sí lo son. Lo mismo ocurre cuando deciden que las ecuaciones de las rectas que obtienen en el punto 2c se interceptan con las dadas, planteando la resolución de un sistema de ecuaciones, cuando en realidad esa conclusión podía derivarse directamente de la misma construcción. En sus resoluciones se percibe una tendencia a reproducir procedimientos estereotipados que limitan la posibilidad de obtener respuestas por medios más simples o directos. El accionar de algunos alumnos sugiere que no se encuentran abocados a encontrar la solución de un problema, más bien buscan dar fe de que aprendieron un procedimiento aplicado en actividades anteriores.

La cantidad de estudiantes y de docentes permitió un seguimiento cercano de los trabajos de cada grupo y una disposición en el aula propicia para generar espacios de intercambio y construcción de conocimientos.

De la interacción de los docentes con los diferentes grupos, emergieron dificultades derivadas de inferencias lógicas incorrectas vinculadas al significado de rectas alabeadas.

Consideramos que actividades como la descripta deben ocupar mayor espacio en el trabajo en el aula por cuanto permiten explorar y analizar los razonamientos que ponen en juego los

estudiantes al resolver un problema, ofreciendo de este modo interesantes elementos para actuar didácticamente y contribuir a la superación de las dificultades que se identifican.

Referencias bibliográfias

Brown, A., Metz, K. y Campione, J. (2000). La interacción social y la comprensión individual en una comunidad de aprendizaje: la influencia de Piaget y Vygotsky. En A. Tryphon y J. Vonèche (comps.) *Piaget-Vygotsky: la génesis del pensamiento.* (pp. 191-223). Buenos Aires: Paidós.

Panizza, M. (2005). *Razonar y conocer. Aportes a la comprensión de la racionalidad matemática de los alumnos.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Rey Pastor, J., Santaló, L. y Balanzat, M. (1959). *Geometría Analítica.* Buenos Aires: Kapelusz.

Rojas, G. (2001). *Paradigmas en psicología de la educación*. México: Paidós.

Santaló, L. (1994). Matemática para no matemáticos. En C. Parra e I. Saiz (comps.) *Didáctica de matemática. Aportes y reflexiones.* (pp.21-38).

Xambó Descamps, S. (2000). *Geometría*. Barcelona: Alfaomega.

DIFICULTADES EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS DEL ESTADISTICO COMO VARIABLE ALEATORIA EN LA DISTRIBUCION DEL MUESTREO DE MEDIAS

José Armando Albert Huerta y Blanca Ruiz Hernández
Tecnológico de Monterrey. México
albert@itesm.mx, bruiz@itesm.mx

Resumen. En esta investigación mostramos cómo el estadístico visto como una variable aleatoria es una idea clave para el desarrollo y fundamento de la estadística inferencial. Abordamos, en particular, el caso de la media por ser el más recurrente en el discurso matemático escolar a nivel universitario y porque resulta ser un buen punto de partida para el desarrollo de conceptos como el de estadístico. Se muestra como a través de hacer interactuar a los estudiantes de ingeniería con elementos constructivos del bloque generador de variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ los estudiantes pueden construir funciones $f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de valor real, en particular, la media, que también son variables aleatorias cuyo valor esperado puede estimar el valor del parámetro. Se reportan aspectos relevantes identificados en este proceso de construcción conceptual de los estudiantes relativos al estadístico como concepto fundamental de las distribuciones muestrales, así como de su naturaleza de variable aleatoria

Palabras clave: educación estadística, distribución muestral, media

Abstract. In this research we show how the statistic seen as a random variable is a key idea for the development of inferential statistics. We approach, in particular, the case of the mean to be a highly recurrent concept in school mathematical discourse at university level and it turns out to be a good starting point for the development of concepts such as statistical. We show how to interact through engineering students with constructive elements $X_1, X_2, \ldots, X_n$ of the random variable generator block, they can build real-valued functions $f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, in particular the average which are also random variables whose expected value can estimate the value of parameter. We report relevant aspects identified in this process students' conceptual construction of the statistic as a fundamental concept, and its nature of random variable

Key words: education statistics, sampling distribution, average

Introducción

Esta investigación hace un acercamiento a una de las ideas fundamentales para el desarrollo del razonamiento alrededor de la estadística inferencial. Sin lugar a dudas el *estadístico* es un concepto clave para el desarrollo de otros como el de distribución del muestreo y estimación. Sabemos que la enseñanza de la estadística inferencial es una tarea compleja. A este respecto Chance, delMas y Garfield (2004) afirman que la dificultad en su comprensión se debe a que los estudiantes requieren de la integración y combinación de muchas ideas de estadística, no sencillas, a su vez, de aprender. En el caso del *estadístico*, podemos observar la conjunción de ideas que se involucra sólo en su definición:

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de tamaño *n* de una población y sea $T(x_1, \ldots, x_n)$ una función evaluada en valores reales o valores vectoriales cuyo dominio incluye el espacio muestral de $(X_1, \ldots, X_n)$. Entonces la variable aleatoria o vector aleatorio

$Y = T(X_1, \ldots, X_n)$ es llamado un estadístico. La distribución de probabilidad del estadístico Y es llamada la distribución muestral de Y. (Casela y Berger, 2001, p. 211).

La complejidad del concepto de estadístico, desde una perspectiva didáctica, es notable porque integra muchos otros conceptos tales como: variable aleatoria, aleatoriedad, muestra aleatoria, función de varias variables y distribución del muestreo, entre otros. Es por eso que en esta investigación nos hemos dado a la tarea de estudiarlo más de cerca desde una perspectiva de la compresión del estudiante universitario.

Antecedentes

Algunos estudios realizados con estudiantes universitarios reportan dificultades didácticas para su aprendizaje. Vallecillos y Batanero (1997) concluyen que una dificultad importante fue la falta de apreciación de la característica de variable aleatoria del estadístico muestral. En su estudio, todos los alumnos cometieron errores que evidencian falta de comprensión referidas a las relaciones entre la distribución del estadístico, las regiones y el nivel de significancia. Reportan, además, que el alumno no considera la media muestral como una variable aleatoria, lo que puede ocasionar la creencia en que la hipótesis pueda referirse indistintamente a la media de la muestra, tanto como a la de la población. Well, Pollatsek y Boyce (2004) sostienen que para el desarrollo de una buena comprensión de la inferencia estadística se necesario entender que cuando las muestras se obtienen de una población de referencia, estas muestras variarán y como consecuencia también el valor numérico de los estadísticos derivados de dichas muestras, conformando un patrón predecible de variación, las distribuciones del muestreo que, según Vallecillos (1995), son el concepto esencial de la Inferencia estadística porque cualquier procedimiento inferencial implica conocer la distribución muestral de algún estadístico. Por otra parte, c pudieron observar que los estudiantes tienden a enfocarse en muestras individuales y resúmenes estadísticos de las mismas, en vez de enfocarse en cómo se distribuyen las colecciones de estadísticos muestrales. De manera similar, Cox y Mouw (1992) señalan que la mayoría de sus sujetos estudiados en su investigación sobre muestreo vieron a una muestra como una representación fija y exacta de una población y no tuvieron claridad para ver a un estadístico como un estimador que resulta de una distribución muestral. Por otra parte, Ruiz (2006) reporta la dificultad de los estudiantes de reconocer la existencia de la variable aleatoria al hacer composición entre variables aleatorias. Esto es especialmente importante para el caso del estadístico por ser una función de valor real de variables aleatorias. Esta investigación se circunscribe en el enfoque sistémico y sólo desarrolla una de sus componentes: la cognitiva.

Metodología y resultados

El contexto de la investigación se sitúa en una universidad del norte de México con estudiantes de tercer semestre que ingeniería que estaban llevando el curso de probabilidad y estadística y que contaban con acceso a computadoras personales y al software Excel. Se implementó una secuencia de actividades con uso de tecnología justo como punto de partida para el desarrollo del tema de distribuciones muestrales. La muestra de estudiantes consistió en dos grupos de estudiantes de 40 alumnos cada uno y divididos en equipos de 2 personas o tres. Se trató de tres secuencias didácticas realizadas una por clase y se le dedicó la última media hora de cada clase de hora y media. Las actividades fueron:

Distribución de Población

Bloque aleatorio

Estadístico

Con el propósito de observar a través del desarrollo constructivo del concepto del estadístico de la media muestral basado en un bloque aleatorio de $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias idénticamente distribuidas, las concepciones y dificultades de los estudiantes.

Distribución de Población

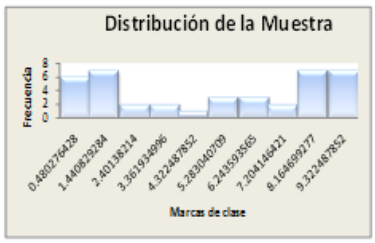
En esta primera fase, se buscó que los estudiantes identificaran una estrategia que les permitiera descubrir aproximadamente qué tipo de distribución tiene la Población. La actividad consistió en tomar muestras aleatoria del tamaño que crean conveniente (de una población infinita de tiempos

de caída de paracaidistas a un punto en tierra fijo) para que al graficar su distribución de frecuencias, y analizar si es posible encontrar algún patrón al aumentar el tamaño de la muestra. También se les pidió que a cada muestra le calcularan su media e identificaran cuál podría ser el valor aproximado de la media de población.

La población era una hoja oculta de Excel con 50 mil datos obtenidos con el software R y distribución uniforme con dominio [0,10]. Los estudiantes tenían acceso a los datos a través de una Urna virtual (otra hoja Excel) que elegía muestras al azar de esos datos del tamaño que ellos eligieran y les daba los datos de la muestra. Podían recurrir al Excel o R para graficar el histograma de la distribución de la muestra obtenida.

La mayoría de los equipos escogieron muestras de no más de 50 datos y no hicieron repeticiones, con una vez les resultó suficiente para concluir. Se puede observar que para ellos "grande"

significa no más de 50 datos. La mayoría no pudo identificar alguna forma de la distribución de frecuencias de la muestra.



"el histograma muestra una distribución muy dispareja". "no encontramos patrón entre sus barras".

Figura 1. Grafico representativo de la mayoría de los grupos de trabajo.

Pero un equipo había ensayado con 1000 datos y concluyeron:

"se nota una tendencia a distribución uniforme, la gráfica asemeja más a un rectángulo con todas las marcas de clase y cada valor de x tiene la misma probabilidad"

Y en la fase de institucionalización, los demás compañeros, al ver este resultado también ensayaron con muestras más grandes y pudieron concluir que se trataba de una distribución uniforme. Pudieron percatarse que a través del muestreo aleatorio es posible conocer características de la población y que ese conocimiento era mejor a medida que la muestra era de mayor tamaño.

Respecto a la media también les bastó el cálculo de la media muestral para proponerla como valor aproximado de la población, pero a nadie se le ocurrió explorar tendencias con varias medias. No mostraron necesidad de repetir el experimento, ni de considerar la variabilidad.

Bloque aleatorio

Con el propósito de familiarizar a los estudiantes con más de una variable aleatoria y algunas de sus operaciones y propiedades, se les propuso la siguiente actividad la cual consistió en que ellos construyeran un bloque de 50 muestras de tamaño 40 obtenidas aleatoriamente con la Urna virtual. Los encabezados de las columnas fueron $X_1, X_2, \ldots, X_n$. De esta matriz resultante se les preguntó sobre si X_1 era una variable, y si la consideraban aleatoria, si podían identificar su distribución y su valor esperado. Y así X_2, hasta X_{40}. Posteriormente se les preguntó sobre si $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ era también aleatorio. Los resultados se muestran en la Tabla 1.

X	Pregunta	Comentarios	Proporción
X1	¿es variable?	"sí, porque varía", "sí porque está tomando Distintos valores…" "sí porque adquiere Valores distintos"	100%
	¿es variable Aleatoria?	"sí porque no sabías Que valores iba a obtener"	100%
		"sí porque los valores fueron Tomados al azar"	
		"sí porque cualquier muestra De la población tiene la misma Oportunidad de ser elegida"	
		"sí porque se tomaron valores Sin seguir un orden"	
	¿distribución?	"más o menos uniforme"	42%
		"no se puede identificar"	33%
		"distribución normal"	25%
	¿valor	"5 idealmente, 5.4 realmente"	8%
	Esperado?	"5.49, 5.4, 4.92, 5.0, 4.9, etc."	92%
X2	¿es variable?	"de la misma manera que x1"	100%
	¿es variable	Sí, por las mismas razones que x1	100%
	Aleatoria?		
	¿distribución?	"más o menos uniforme"	42%
		"no se puede identificar"	42%
		"distribución normal"	17%
	¿valor esperado?	"5 idealmente, 5.8 realmente"	8%
		"5.02, 5.23, 6.4, … con el promedio"	92%
X40	¿es variable?	Sí, por las mismas razones que	100%
		Las otras.	
	¿es variable	Sí, por las mismas razones que	100%
	Aleatoria?	Las otras.	
	¿distribución	"no, porque todos sus valores	75%
	Similar a las	Son diferentes"	
	Otras?	"debe ser muy parecido"	25%
	¿distribución?	"tiende a ser uniforme"	67%
		"no se identifica distribución"	33%
	¿valor esperado?		
		"5 idealmente, 4.9 realmente"	8%

		"5.81, 4.89, 5.3 … es la media"	92%

Tabla 1. Sobre las concepciones de los alumnos en el bloque aleatorio

Se puede observar que, aparentemente, el hecho de repetir varias veces el muestreo y graficar cada vez, les permitió identificar una tendencia en los gráficos. Así, en la actividad 1, sólo el 8.3% había identificado una distribución uniforme, para X_1 identifican el 42% de los alumnos que es uniforme, para X_{40} ya es el 67%.

En cambio, no sucedió lo mismo con el valor esperado pues sólo el 8% del grupo identificó su valor durante las distintas repeticiones del experimento.

Hasta aquí, tenemos que los estudiantes han identificado a $X_1, X_2, \ldots, X_n$ como variables aleatorias. Además, se puede observar que los estudiantes pueden, en su mayoría, identificar una propiedad común a $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ como una unidad aleatoria aunque no siempre con los mismos argumentos. A un porcentaje bajo le costó desprenderse del contexto de la medición de la distancia en la caída entre el punto de aterrizaje del paracaidista y el blanco. Puede observarse que los estudiantes le atribuyen a $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ aleatoreidad porque cada una de las variables que lo componen es aleatoria. Sin embargo, en estudios previos (Ruiz y Albert, 2008) hemos podido identificar su dificultad para aceptar a Y como variable aleatoria si Y es variable dependiente de otras variables aleatorias.

Estadístico

Con los antecedentes sobre variables aleatorias de las actividades anteriores, la siguiente actividad tiene por propósito hacer a los estudiantes interactuar con una variable aleatoria específica: la media muestral que es una función dependiente de variables aleatorias independientes, es decir, $\bar{x} = f(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$. La actividad consistió en calcular las medias de las anteriores muestras y analizar si se trataba este promedio de una nueva variable y si así fuera, si era aleatoria. Luego, se les pidió identificaran su distribución, su valor esperado y dieran una aproximación de cuál podría ser el verdadero promedio de la población. Finalmente, se les pidió identificar estadísticos y si eran variables aleatorias. Los resultados se muestran en la Tabla 2.

Preguntas	Comentarios tipo de los estudiantes	Proporción
Observe la nueva columna obtenida de promedios de las muestras obtenidas, ¿Será este promedio una variable?	"Sí, ya que al variar las variables también la media lo hará"; "es variable dependiente"	58%
	"No, porque no puede ser sustituido por algún miembro del universo, es dependiente"	8%
	"Sí, porque varía el promedio de una muestra a	33%

	otra"	
¿El promedio será una variable aleatoria?	"Sí, ya que las muestras fueron aleatorias, el promedio depende de las muestras, este será aleatorio también"	33%
	"No, deja de ser aleatorio ya que es un número calculado"	67%
Grafique los valores de los promedios obtenidos ¿Cómo qué tipo de distribución identifica?	"Normal"	42%
	"No se puede identificar con el gráfico"	58%
Calcule el promedio de los promedios. ¿Cuál sería de todos los promedios el más adecuado para proponerlo como una mejor aproximación del promedio general de la población?	"5, ya que es el valor esperado"	20%
	"El promedio de promedios, ya que es un valor en función de todas las medias de las muestras realizadas"	80%
Si definimos un estadístico como cualquier cantidad cuyo valor puede ser calculado a partir de datos muestrales, ¿qué estadísticos pueden hallarse en las muestras antes encontradas?	"Media, mediana, moda, varianza, desviación estándar, rango,…"	84%
	"Los que producen una gráfica con distribución normal"	8%
	Otras respuestas	8%
¿Cuáles estadísticos hallados pueden considerarse variables aleatorias y cuáles no?	"todos porque dependen de los valores aleatorios que tome la muestra" "todos porque vienen de variables aleatorias".	30%
	Ninguno, ya que son calculados a partir de los datos obtenidos" Ninguno porque no pueden tomar el lugar cualquier miembro del conjunto el cual crea el valor de estos estadísticos"	50%
	"Algunas como la Media, mediana y moda"	20%

Tabla 2. Sobre las concepciones de los alumnos en torno al estadístico.

Aunque rápidamente la mayoría de los estudiantes (84%) identificaron lo que es un estadístico, no así que se trataba de una variable aleatoria pues sólo un 30% lo pudo ver. Influyó en esto su creencia errónea de que al ser un estadístico variable dependiente, no hereda el ser también variable aleatoria. Sin embargo, esto es importante, para poder asociarla a una distribución de probabilidad que más adelante se usaría para la inferencia estadística. Por otra parte, aunque su intuición de valor esperado de la media poblacional es acertada, no para todos fue claro que la distribución del estadístico es aproximadamente normal. En parte se debió a un error de interpretación de los gráficos pues algunos no consideraron igualar las escalas de los ejes para luego comparar las formas. Se pudo constatar que a los estudiantes les resultó de mucha utilidad

observar el contraste entre la forma aproximada de la distribución de población obtenida a partir de muestras grandes (en nuestro caso fue uniforme) con la distribución obtenida de las medias de las muestras (aproximadamente normal).

Conclusiones

Esta investigación pudo mostrar algunas dificultades de los estudiantes para la construcción de una nueva variable aleatoria, el estadístico, a partir de otras variables aleatorias independientes. Esto sugiere hacer diseños de actividades más finos que permitan describir mejor este fenómeno didáctico para construir una posible forma de superarlo, desde un punto de vista didáctico. Sin embargo, también se pudo comprobar la riqueza conceptual que se gana en favor de la variable aleatoria cuando los estudiantes se ven involucrados en situaciones de varias variables que son el punto de partida para el desarrollo del concepto de estadístico como variable aleatoria y su distribución.

Abre otras posibles vías de investigación sobre las dificultades de los estudiantes en el razonamiento interpretativo de gráficos, particularmente en lo referido a la consideración de las escalas.

La complejidad de la inferencia estadística queda manifiesta por los múltiples conceptos que intervienen cada vez que se usa. Es por eso que pareciera más oportuno investigar, no sobre conceptos aislados, como tal vez podría hacerse en otras áreas de las matemáticas, sino en complejos formados por redes de conceptos cercanos es el caso del *estadístico*.

Referencias bibiográficas

Casella, G. & Berger, R. L. (2001). *Statistical Inference*. (2nd ed.). Duxbury Press.

Chance, B., del Mas, R. y Garfield, J. (2004). Reasoning about sampling distributions. *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking*. Kluwer Academic Publishers.

Cox, C., & Mouw, J.T. (1992). Disruption of the representativeness heuristic: Can we be perturbed into using correct probabilistic reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 163-178.

Ruiz, B. (2006). *Un acercamiento cognitivo y epistemológico a la didáctica del concepto de variable aleatoria*. Tesis de Maestría. CICATA. México.

Ruiz, B. R., & Albert, J. A. (2008). Obstáculos epistemológicos sobre la variable aleatoria. *Encuentro Latinoamericano De Educación Estadística*. México.

Vallecillos, A. y Batanero, C. (1997). Análisis del aprendizaje de conceptos clave en el contraste de hipótesis estadísticas mediante el estudio de casos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 17(1), 29-48.

Vallecillos, A. (1995). Sugerencias metodológicas para la introducción del teorema central del límite en la enseñanza secundaria. *Actas del I congreso nacional de bachillerato*. Universidad de Granada.Well, A., Pollatsek, A. & Boyce, S. (2004). Understanding the effects of sample size on the variability of the mean. *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, 47(2), December 1990, 289-312.

ESTUDIO EPISTÉMICO DEL NÚMERO π: IMPLICACIONES DIDÁCTICAS

Patricia M. Konic, Juan D. Godino, Walter F. Castro y Mauro Rivas
Universidad Nacional de Río Cuarto. Argentina
Universidad de Granada España
Universidad de Antioquia. Colombia
Universidad de los Andes Venezuela
pkonic@gmail.com, jgodino@ugr.es, wfcastro82@gmail.com, rmauro@ula.ve

Resumen. La realización de un estudio documental epistemológico de la evolución de π, nos permitió reconstruir un referente global para este número. Concretamente hemos recuperado a lo largo de su construcción científica, tipos de situaciones problemas y sistemas de prácticas en que se pone en juego este objeto. Si bien el punto de partida fue la detección de problemas que hicieran emerger algún significado de π, interesó estudiar las técnicas, los lenguajes, las entidades conceptuales, proposicionales y argumentativas puestas en juego en cada momento y circunstancia. Los sistemas de prácticas identificados por ese conjunto de objetos permitieron estudiar y describir, desde el punto de vista epistémico, como se configuran los mencionados objetos matemáticos y poner en descubierto la complejidad epistémica de π. Así, la construcción de un referente global permitió describir tres etapas en las que se ponen de manifiesto que π va asumiendo diferentes estatus y características, posibilitando dar respuesta a algunos interrogantes vinculados a la enseñanza

Palabras clave: número π, estudio epistémico, enseñanza

Abstract. The writing of a documental epistemic study on the evolution of π allows us to reconstruct a global referent for this number. Specifically we have recover types of problems and systems of practices that are put into play while working with π. Even though we wanted to find problems that promote the emergence of some meanings related to π, we were also interested in studying the techniques, the language, the conceptual entities, the propositions and the justifications put into play in each and every moment and circumstance. The systems of practice identified for the aforementioned set of mathematical objects leaded us to study and to describe, from an epistemic perspective, the configuration of such objects and to display the complexity of the number π. Thus, the construction of a global referent allow us to describe three stages that reveal how π assumes a number of status and characteristics, making it possible to answer some questions related to teaching

Key words: number π, epistemic study, teaching

Introducción

El número π es un objeto que no solo ha motivado a matemáticos de primera línea y en todos los tiempos sino que evoca reconocimiento e interés en personas que no están implicadas en el tema de manera profesional (Beckmann, 2006; Posamentier y Lehmann, 2006). En la comunidad educativa π es un número que tiene presencia temprana en la escolaridad elemental. La indagación de algunos procesos de enseñanza y estudios referidos a libros de textos muestran que π comienza a tener presencia escolar en forma directa con la longitud de la circunferencia hacia el final de la escolaridad primaria, se torna ausente, o sin un tratamiento explícito en los primeros años de la escolaridad media, y más aún en los cursos siguientes cuando aparecen los números reales. Estos hechos muestran que π se convierte en un dato que no solo obstaculiza la posibilidad de un trabajo consciente sobre este objeto, sino que enfrenta al estudiante ante la paradoja de proponerle inicialmente un objeto "familiar" pero al que será poco probable que en el futuro, le atribuya su verdadero estatus numérico.

Convencidos que profundizar en el análisis de la naturaleza y desarrollo de los contenidos matemáticos permite dilucidar factores que condicionan los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, nos hemos propuesto en esta investigación abordar una reconstrucción histórica/epistemológica de este número, con el propósito de identificar qué aspectos de π se estudian en los niveles educativos y hacer visibles posibles cambios curriculares que podrían implementarse en la enseñanza obligatoria (Konic y Godino, 2005). Dicha reconstrucción se ha realizado tomando en cuenta problemas que han determinado su emergencia (Berggren, Borwein, Borwein, 1997), las técnicas desarrolladas para cada problema, su crecimiento, así como las nociones y propiedades matemáticas que se han ido construyendo de modo progresivo (Fauvel y Maanen, 2000). Algunos de los interrogantes que motivaron y guiaron nuestra investigación fueron: ¿Cuál es el papel que desempeña el número π en la educación matemática de los niveles pre-universitarios? ¿Qué aspectos de π se estudian en dichos niveles? ¿Con qué otros objetos matemáticos se relaciona? ¿Qué cambios se podrían hacer en los diseños curriculares de la enseñanza primaria y secundaria para aprovechar las posibilidades educativas de π? Definimos entonces el problema de investigación como el estudio de los elementos epistémicos inherentes a π con el propósito de caracterizar a dicho número como objeto de enseñanza.

Marco teórico y metodología

La metodología adoptada para abordar el problema fue la realización de un estudio documental con carácter descriptivo. Se trata de un estudio epistémico de π, esto es, la identificación de las componentes del contenido matemático involucrado en dicho número, su secuenciación y modo en que se configuran (Godino, Batanero y Font, 2007). Las herramientas teóricas que permitieron llevar a cabo el mencionado proceso metodológico están insertas en el Enfoque Ontosemiótico para el Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) (Godino et al, 2007).

La noción neural considerada es la de Significado Institucional de Referencia, entendido como el sistema de prácticas que es utilizado como referencia para elaborar el significado pretendido, es decir, como una parte del significado holístico del objeto matemático. Se considera práctica matemática a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas. Las situaciones-problemas son el origen o razón de ser de la actividad; el lenguaje representa las restantes entidades y sirve de instrumento para la acción; los argumentos justifican los procedimientos y proposiciones que relacionan los conceptos entre sí. Estos objetos a los que hacemos alusión se denominan en el EOS objetos primarios y son identificados como: Situaciones/problemas, definiciones/conceptos, procedimientos, proposiciones, argumentos y

tipos de lenguaje. La descripción de estos objetos intervinientes en una práctica matemática, en su versión institucional, y el modo en que se relacionan aluden a una configuración epistémica.

Reconstrucción de un significado institucional de referencia para π

Considerando el estudio histórico realizado hemos llegado a la conclusión que los tipos de problemas en los cuales ha emergido el número π se pueden agrupar asi:

1. La medida directa de la longitud de la circunferencia por los hebreos del tiempo de la Biblia.
2. La cuadratura del círculo realizada en el antiguo Egipto, como se describe en el Papiro de Rhind.
3. La acotación del perímetro del círculo por inscripción y circunscripción de polígonos, proceso desarrollado por Arquímedes.
4. La interpretación de una longitud medida a lo largo de una circunferencia o de alguna otra curva.
5. La interpretación del argumento de sen(x).
6. La cantidad de decimales de π.
7. La naturaleza de los decimales de π.
8. También han generado un tipo de problemas los siguientes interrogantes:
9. ¿Es π algebraico?
10. ¿Con quién se relaciona π?

En esta tipología π va asumiendo diferentes estatus lo que permitió distinguir tres etapas básicas, donde a cada una de ellas hemos asociado una serie de problemas que intentan representarlas. En la primera etapa, rescatamos aquellos problemas plasmados en documentos originales o en sus primeras reconstrucciones, dado que aportan indicios sobre situaciones, contextos y modos en que se manifiesta la presencia de π. En esta etapa, los problemas originales resultan esenciales ya que de ellos se puede obtener información sobre los orígenes de este objeto matemático. Se encuentran situaciones reales, con resolución en el contexto geométrico y con justificaciones basadas fundamentalmente en la evidencia. En una segunda etapa abordamos aquellos problemas que se dirigen hacia la búsqueda de la "caracterización" de π como objeto matemático, donde ahora es el contexto el que permite un avance en dicho propósito. Esto se da por la fuerte evolución del cálculo, brindando herramientas de estudio que permiten abordar la problemática

desde diferentes contextos (geométrico, trigonométrico, analítico) produciendo a su vez nuevos resultados en esa rama de la matemática. Por último, y en una tercera etapa, ante la identificación de este elemento como objeto matemático, estudiamos aquellos problemas relacionados con las propiedades y los vínculos que π, como objeto formal, adquiere dentro de una estructura matemática. También su inserción como modelo en diferentes ámbitos matemáticos.

El estudio se materializó, en primera instancia, detectando las nociones, proposiciones, lenguaje, acciones, argumentos y problemas que subyacen en cada problema. Para los tres primeros problemas, además, se elaboró una red epistémica que permita visualizar las relaciones entre las componentes que los configuran. Con todos estos elementos y del estudio de sus relaciones, avanzamos hacia la búsqueda de la estructuración de π.

El esquema de la figura 1 permite visualizar el enriquecimiento del significado de π a través de su evolución histórica. En este sentido queda explícita por un lado cada una de las etapas de evolución y por el otro, las diferentes situaciones que han promovido la búsqueda de problemas que las representan. Estos problemas a través del sistemas de prácticas que desarrollan permiten detectar claramente elementos de significado tales como conceptos, argumentos, procedimientos, propiedades, lenguaje que conforman los significados parciales del objeto matemático π.

Los elementos figurativos que integran el esquema refieren a las siguientes cuestiones: en paralelepípedos se ubican las situaciones, las que permiten la búsqueda y selección de problemas representativos. El esquema de nube contiene y representa a cada uno de dichos problemas, intentando reflejar el carácter relativo en cuanto a su selección. Los sistemas de prácticas que se desprenden del análisis del problema se agrupan en hexágonos, dados que en ellos se concentran los seis elementos básicos de significado que hemos querido detectar en este estudio. Las flechas marcan distancia y evolución entre las distintas situaciones en cuanto al desarrollo histórico del número π. Los hexágonos ubicados en la parte superior del esquema contienen una "expresión" de π que intentan simbolizar, a lo largo de su trayectoria, su evolución en cuanto a su estatus como objeto matemático. Por último cabe destacar que las flechas de bloque junto a las etapas señalan un cambio epistemológico sobre el enfoque de la problemática de π. En efecto, pasamos desde la solución a problemas en un contexto real a través de la medida hasta la la concepción de π como número con infinitas cifras decimales y como elemento del cuerpo de los números reales.

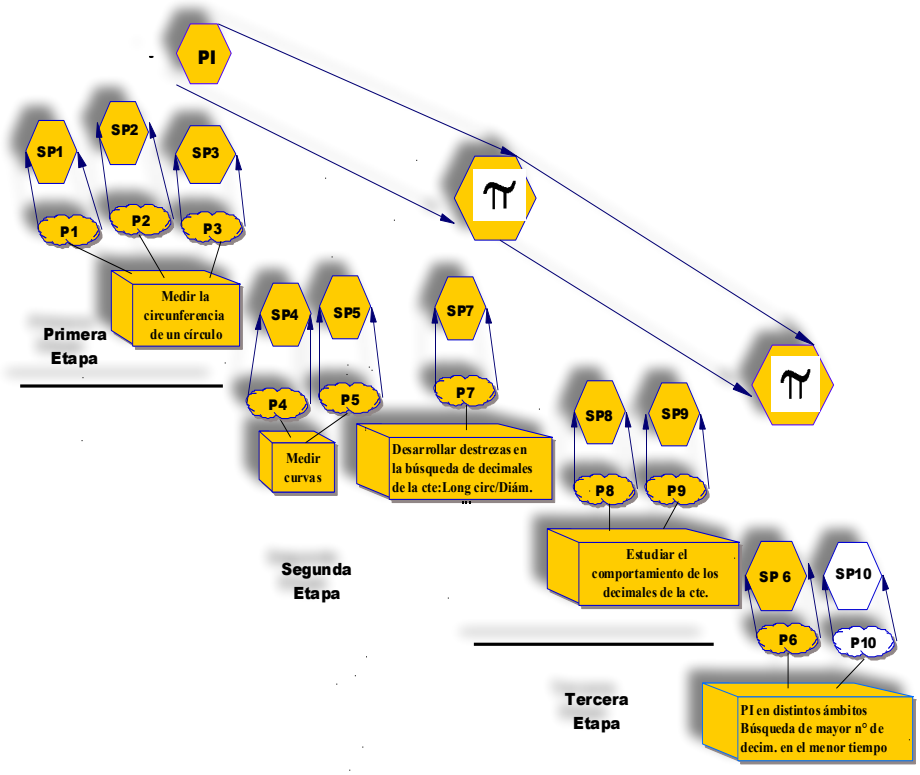


Figura 1: Configuración de los sistemas de prácticas desde las situaciones generadas durante la evolución histórica de π.

Por razones de espacio, y a los fines de ilustrar el tipo de estudio realizado, seleccionamos un problema representativo del tipo 2, el cual corresponde a la primera etapa de nuestra clasificación.

Problema tipo 2: La cuadratura del círculo en el antiguo Egipto

El problema 50 que encontramos en el Papiro de Rhind se enuncia y resuelve del siguiente modo (Berggren, Borwein y Borwein, 1997, p.1):

Problema 50: "Ejemplo de un campo redondo de diámetro 9 khet. ¿Cuál es su área?

La solución que se describe es:

"Resta 1/9 del diámetro, esto es, 1; el resto es 8. Multiplica 8 veces 8; resulta 64. Por tanto contiene 64 setat de tierra.

En estos problemas el área del círculo se iguala a la de un cuadrado cuyo lado es (8/9) del diámetro del círculo.

No se sabe cómo pudieron llegar a esta fórmula para hallar la "cuadratura del círculo", pero un pequeño diagrama geométrico (Fig. 2 (a)) que acompañaba al problema 48 ofrece una posible clave (Eves, 1969; reproducido en Berggren, Borwein y Borwein, 1997, p.402).

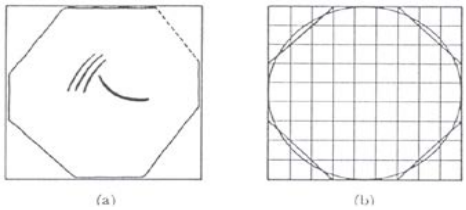


Figura 2: Diagrama geométrico que acompaña al problema 48

El diagrama sugiere que al cuadrado se le han cortado las cuatro esquinas a una distancia 1/3 del lado. Si la figura se dibuja con cuidado y se inscribe un círculo se observa que el área del círculo inscrito se ajusta bastante bien mediante el área de la figura octogonal obtenida (Figura 2(b)). Si el diámetro del círculo se toma como 9, también será 9 el lado del cuadrado, por tanto el octógono tendrá de área: 81 - 4(9/2) = 63, y el lado del cuadrado de igual área que el circulo será √63 que, a su vez se puede aproximar por √64, o sea, 8.

Por consiguiente, el lado de un cuadrado equivalente es aproximadamente los 8/9 del diámetro del círculo dado.

En la figura 3 presentamos de manera esquemática la configuración epistémica asociada al problema de la cuadratura del círculo según la conjetura sugerida por Eves (1969) y reformulada por nosotros.

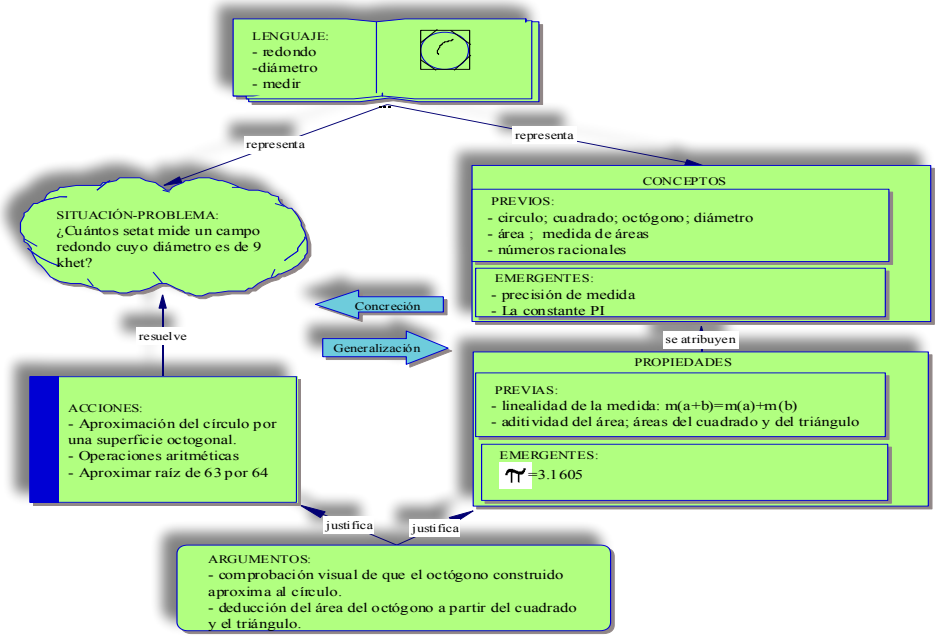


Figura 3: Configuración epistémica de la cuadratura del círculo

Tanto este problema como los otros dos desarrollados en sus orígenes, remiten a un contexto donde predominan técnicas geométricas. Las que se corresponden naturalmente con la primera etapa de la evolución histórica que hemos mencionado. Observamos que en el problema del

Papyrus de Rhind, la "estimación" de los egipcios es de 3,1605. En este como en los otros problemas desarrollados se evidencia que π no podría ser considerado como un número que participa en una fórmula, dado que en esa época se enunciaban programas de cálculo formulados en lenguaje corriente. Somos nosotros los que realizamos interpretaciones para obtener los valores de π descriptos en cada caso.

Un segundo esquema, (Fig.4) permite visualizar cómo se agrupan los distintos sistemas de prácticas para luego identificarse a través de un objeto emergente común. Consideramos que la potencialidad de esta presentación radica en la puesta en descubierto de los contextos en los que se desarrollan estos sistemas de prácticas. (Contextos de uso).

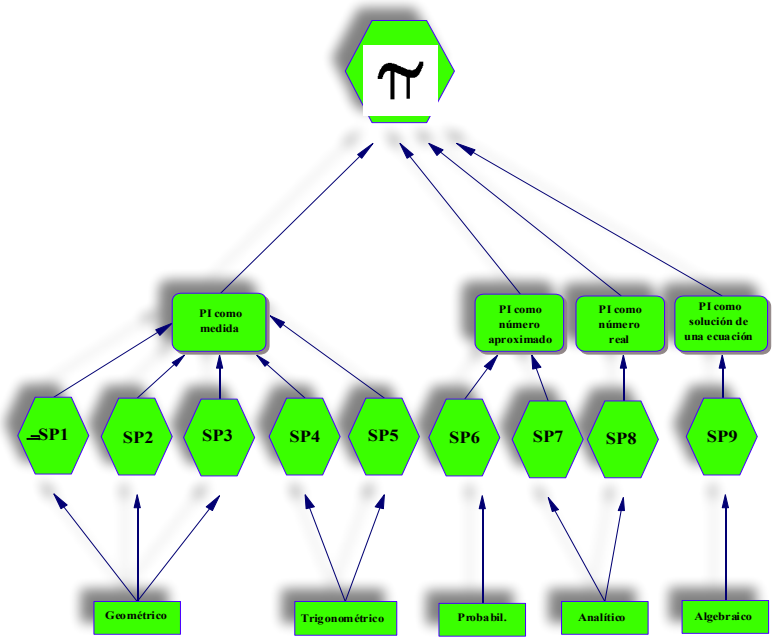


Figura 4: Configuración de los sistemas de prácticas estudiados y su relación con los contextos de uso.

Conclusiones

La reconstrucción del significado global de π ha permitido por un lado caracterizar tres etapas de su evolución histórica: 1) Medir la circunferencia de un círculo; 2) Medir curvas, desarrollar destrezas en la búsqueda de decimales de la constante long. circunf./diámetro, estudiar el comportamiento de los decimales de la constante; 3) π en distintos contextos, búsqueda de la mayor cantidad de decimales de π en el menor tiempo. A partir tanto de la selección de problemas representativos de dichas etapas, que marcaron cambios en su estatus, como del análisis de prácticas emergentes de ellos se detectaron multiplicidad de objetos (conceptos, acciones, propiedades, argumentos, lenguaje) tanto presentes en la base de su concepción como emergentes de las relaciones entre ellos, lo que ha permitido poner en evidencia la complejidad epistémica que este objeto encierra.

Algunos de los objetos vinculados a π detectados en la primera etapa fueron: La consideración del diámetro de una circunferencia como unidad de medida, la relación entre el diámetro y el perímetro del círculo, la emergencia de π como una constante, la precisión de la medida, la aproximación del área del círculo por medio de otras áreas, la acotación de una medida. La distinción entre la expresión decimal de un número y un número decimal. Algunos de estos objetos aparecen en los diseños curriculares pero la forma en que se solicitan así como su tratamiento en los libros de textos de enseñanza obligatoria se hace de un modo que no promueve la emergencia de significados de π. En las etapas siguientes se detectan otros objetos que conllevan mayor complejidad epistémica y por ende están asociados a otros niveles del sistema educativo. Tal es el caso de la concepción de la longitud de una circunferencia como el límite del perímetro de un polígono regular inscripto (circunscrito) de *n* lados cuando el número de lados crece indefinidamente, el problema de la medición de cualquier curva, sistemas de medición adecuados, determinación de la cantidad de decimales de π, caracterización de los decimales de π, reconocimiento de π como número irracional, la trascendencia de π. La investigación nos ha permitido mostrar la posibilidad de alcanzar significaciones de π desde la escolaridad elemental a través del estudio de las configuraciones epistémicas asociadas a los problemas seleccionados, las que nos brindan información de los objetos necesarios y de sus relaciones internas, dando cuenta de la presencia y jerarquía de cada una de ellos.

Referencias bibliográficas

Beckmann, P. (2006). *Historia de π*. Ciudad de México. D.R Libraria, SA de CV.

Berggren, L., Borwein, J. y Borwein, P. (Eds.) (1997). *PI: A source book.* NewYork:Springer.

Fauvel, J. y Maanen, J. Van (Eds.) (2000). *History in mathematics education.* The ICMI Study. Dordrecht: Kluwer.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39(1-2), 127-135.

Konic, P. y Godino, J. D. (2005). Configuraciones epistémicas asociadas al número PI. En A. Contreras, L. Ordoñez y C. Batanero (Eds.), *Aplicaciones y desarrollos de la teoría de las funciones semióticas.* (pp. 215-217). Jaén (España): Servicios de Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Posamentier, A. y Lehmamm I. (2006). *La proporción trascendental: La historia de π, el número más misterioso del mundo.* Barcelona. Editorial Ariel S.A

EL ÁREA BAJO LA CURVA. CONSTRUCCIÓN DE SIGNIFICADO EN CONTEXTOS FÍSICOS

Mario Armando Giordano Moreno e Ignacio Garnica y Dovala
Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos No. 4 "Lázaro Cárdenas del Río". México
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav.IPN.
mgiordano@prodigy.net.mx, igarnicad@gmail.com

Resumen. Se desarrolló una estrategia de enseñanza con el objetivo de hacer significativos conceptos relativos al teorema fundamental del cálculo en el contexto de la realización de prácticas en el laboratorio de Física. La estrategia se orientó a dotar de sentido al concepto de área bajo la curva, a partir de resultados obtenidos de los experimentos movimiento rectilíneo uniforme, movimiento rectilíneo uniformemente variado y elongación de un resorte. Se analizó el caso de un estudiante ante la tarea de dotar de significado al área bajo la función fuerza ejercida sobre un resorte. El estudiante llegó a reconocer la relación entre la fuerza ejercida y el trabajo acumulado en el resorte en términos de una función y una función antiderivada correspondiente, sin embargo no se logró observar en su desempeño un reconocimiento del teorema en el sentido de la equivalencia entre la razón de cambiodel área bajo la curva de la función y la función misma

Palabras clave: cálculo, teorema fundamental, contextos físicos

Abstract. It was developed a learning strategy in order to make sense about concepts referred to the fundamental theorem of the calculus in the context of Physics laboratory. The strategy was aimed to make sense referred to the concept of area under the curve, beginning from results obtained of the experiments uniform linear motion, uniform varied linear motion an elongation of a spring. It was analyzed the performance of a student challenging the task of to make sense respect to the area under the curve corresponding to the force exerted on a spring. This student was able to recognize the relation between the force function and the accumulated energyin terms of a function and an antiderivative, however it was not observed in his performance recognition of the theorem in the sense of equivalence between the rate of change of area under the curve of the function and the function itself

Key words: calculus, fundamental theorem, physical contexts

Introducción

El enfoque en competencias busca promover la articulación de contenidos, no solo al interior de cada disciplina, sino estableciendo conexiones con otras disciplinas. En este sentido, las matemáticas se corresponden con otras asignaturas, entre ellas las de ciencias. Si bien tal correspondencia está justificada históricamente, por ejemplo, el desarrollo del Cálculo ante la necesidad de describir el movimiento en la Física de Newton, en el contexto de la enseñanza es necesario construir conexiones entre las ciencias y las matemáticas de manera que tales correspondencias lleguen a ser valoradas por profesores y por estudiantes,promoviendo una comprensión más rica de los conceptos científicos y de los conceptos y los procedimientos matemáticos que se ponen en juego al llevar a cabo experiencias concretas como las que se practican en un laboratorio de Física.A partir de estas consideraciones y con el propósito de incorporar en la enseñanza del Cálculo en el bachillerato tecnológico experimentos típicos de la Física, como contextos reales, se aplicó una estrategia de enseñanzapara que los estudiantes de quinto semestre (17 años) descubrieran relaciones entre dos funciones asociadas mediante la

antiderivada, en los casos de la velocidad de un objeto y su desplazamiento y de la elongación de un resorte y el trabajo acumulado. La estrategia se sustentó en la construcción y el análisis de representaciones de los fenómenos físicos, a partir de los datos recogidos de los experimentos respectivos. El objetivo de investigación fue determinar de qué manera esta incorporación de experiencias promueve la dotación de sentido al área bajo una curva y contribuye a la comprensión del teorema fundamental del cálculo (TFC).

Marco de referencia

Las partes que constituyen el TFC.Edwards (1979) señala la equivalencia entre la variación instantánea del área bajo una curva y el valor funcional correspondiente a dicha curva, como la noción embrionaria del TFC. Es decir, este teorema establece la relación entre una función y la función área asociada. Algunos autores consideran el teorema fundamental en dos partes; una referida a la equivalencia señalada por Edwards, y la otra que reglamenta a la integral definida (teorema de Barrow; Cruse & Lehman, 1982). Si bien ambas partes son complementarias, o de forma más precisa, una, la regla para evaluar integrales, es consecuencia de la otra: "la razón de cambio del área bajo la curva $y = f(x)$ conforme x crece es igual a la altura de la curva en el punto x" (Courant & Robbins, 2002, p. 479), consideramos que los procesos cognitivos involucrados en cada una son distintos. Al respecto, Orton (1983) señala que si bien los estudiantes pueden llegar a ejecutar con eficacia procedimientos rutinarios para la obtención de funciones derivadas o de funciones antiderivadas, en contraste, su comprensión conceptual de los conceptos y de los procedimientos involucrados es limitada. Mientras que la evaluación de una integral definida se fundamenta en la capacidad de determinar una antiderivada conveniente y operar con eficiencia, llegar a establecer una relación significativa entre una función y la función área asociada a ella requiere de una coordinación entre registros asociados a esas dos funciones y entre procesos de cambio y procesos de acumulación, particularmente entre la razón de cambio del área bajo la curva y el valor funcional de ésta.

El contexto curricular. El programa de estudios (SEMS, 2009) al que atañe esta investigación señala como actividades sustantivas de aprendizaje que los estudiantes analicen el problema que dio origen al cálculo integral y sus propuestas de solución, que deduzcan la relación entre el método de las particiones y la integral definida einvestiguen el teorema fundamental del cálculo y las propiedades de la integral definida. También se señalan actividades sustantivas de enseñanza (centradas en el profesor) como las siguientes: propone un ejercicio guiado para determinar el área bajo una curva y así llegar al concepto de la integral definida, induce a la investigación del teorema fundamental del cálculo integral. Se espera que los estudiantes utilicen el teorema fundamental del cálculo como herramienta en la solución de problemas geométricos y en otros

ámbitos del conocimiento. Consideramos que los estudiantes pueden avanzar hacia la consolidación de la relación entre las dos partes de que consta el TFC mediante la realización de actividades de aprendizaje dirigidas a hacer explícita y significativa la equivalencia entre la razón de cambio del área bajo la curva y su propio valor funcional. El punto de partida para esas actividades está en el tratamiento matemático de la información obtenida por los propios estudiantes al llevar a cabo experiencias en el laboratorio de Física.

Métodos e instrumentos

Se concibe esta experiencia como un proceso de enseñanza-investigación en el que el profesor planea yconduce las actividades de enseñanza y de aprendizaje y simultáneamente recoge registros del desempeño de sus estudiantes.Los métodos e instrumentos se definen a partir de la reflexión y la discusión generadas en el seminario referido.A continuación se describen las fases planeadas y llevadas a cabopara el desarrollo de la estrategia de enseñanza y la recolección de registros. Se presentan en el orden en el que fueron realizadas:

- *Exploración de las nociones que los estudiantes tenían relativas a la construcción e interpretación de gráficas de relaciones funcionales y procesos de acumulación*.A un grupo de estudiantes de Cálculo Integral del quinto semestre del bachillerato tecnológico se les aplicó un cuestionario formado por cuatro reactivos,el primero de opción múltiple y los tres restantes de respuesta abierta. El primero requiere seleccionar la gráfica de fuerza contra distancia que representa adecuadamente la elevación de una persona por un ascensor y justificar la selección realizada. El segundo requiere formular afirmaciones referidas a la información que perciben de un gráfico que presenta los movimientos registrados en una cuenta bancaria a lo largo de una semana. El tercer reactivo plantea un movimiento de caída libre en el que se pide elaborar una gráfica de velocidad contra tiempo, conocida la velocidad en función del tiempo, se pide también calcular el área limitada por la curva y el eje de las abscisas, así como atribuir significado al resultado obtenido. El cuarto reactivorequierecalcular el área limitada por la gráfica de una parábola y el eje de las abscisas, proporcionadas la gráfica y la ecuación. El diagnóstico fue aplicado a 60 estudiantes que formaban parte de los tres grupos atendidos durante el semestre "2012/2013-A" por uno de los autores de este reporte. El total de estudiantes atendidos en dicho periodo fue de 90.

- *Enseñanza del concepto de función área*. Se desarrolló el concepto de función área como un medio para calcular áreas contenidas por curvas. Se empleó el método de particiones para deducir casos sencillos de reglas para calcular áreas bajo curvas y se llevaron a cabo

actividades de enseñanza y de aprendizaje orientadas a establecer la relación entre una función y la función área asociada, en términos de función derivada y función primitiva, abordando situaciones geométricas. Esta fase de actividad fue llevada a cabo en el aula, con la participación del total de estudiantesatendidos.

- *Realización de prácticas en el laboratorio de Física*.En colaboración con un profesor de Física — participante en el seminario— en una sola sesión se llevaron a cabo las prácticas de *movimiento rectilíneo uniforme* (MRU), *movimiento rectilíneo uniformemente variado* (MRUV) y *elongación de un resorte* (ER).Considerando las limitantes de espacio, tanto físico como temporal, que impone el desarrollo de un curso en condiciones institucionales,se seleccionó a un grupo de 13 estudiantes, quienes realizaron, en equipos de trabajo, cada una de las tres experiencias utilizando aparatosconvencionales de un laboratorio de Física y siguiendo un guión de actividad elaborado especialmente para esta fase.

- *Análisis de la relación entre desplazamiento y velocidad para el caso del MRU*. Esta actividad se llevó a cabo con el total de estudiantes atendidos y utilizando los datos recogidos en los experimentos de laboratorio. Una vez construida la gráfica de desplazamiento contra tiempo, se procedió a encontrar un modelo funcional de esta relación. Esta actividad fue orientada mediante preguntas como las siguientes: ¿qué tipo de movimiento está representado por los pares (tiempo, desplazamiento)?, ¿cómo es la relación entre desplazamiento y tiempo? La siguiente actividad consistió en encontrar la velocidad, para lo cual se recurrió al cálculo de velocidades medias por intervalos, los obtenidos directamente del experimento. Con estos antecedentes se procedió a establecer la relación entre desplazamiento y velocidad tanto desde un enfoque de la Física como desde un enfoque del Cálculo. En el primero, la discusión se centró en descubrir la forma en que ambas magnitudes están intrínsecamente representadas. En el segundo,la discusión se centró en establecer la relación entre la función área en la gráfica de velocidad y el valor funcional de la gráfica de desplazamiento.

- *Análisis de la relación entre desplazamiento y velocidad para el caso del MRUV*.La actividad se realizó con el total de los estudiantes atendidos,se llevó a cabo en equipos colaborativos ysiguiendo instrucciones impresas en hojas de trabajo.La primera parte consistió enconstruir una gráfica de los pares (tiempo, desplazamiento) y determinar la velocidad. A diferencia del experimento de MRU, en el que los intervalos de tiempo pueden asumirse prácticamente constantes, en el de MRUV estos intervalos decrecen, dado que las lecturas se hacen a intervalos constantes de desplazamiento sobre una regleta graduada, lo cual representa una dificultad adicional para la estimación de la velocidad.

Esto se resolvió también recurriendo al cálculo de velocidades medias por intervalos. A partir de ese momento, la secuencia se orientó aestablecer una relación entre desplazamiento y velocidad, mediante la comparación entre valores obtenidos del área limitada por la gráfica de velocidad y valores correspondientes —para un intervalo de tiempo dado— en la gráfica de desplazamiento.

- *Entrevista en cámara Gesell.*Para esta fase se preparó un guión de entrevista cuyo objetivo fue registrar y analizar el desempeño de un estudiante ante la tarea de dotar de significado a la gráfica obtenida del experimento ER.El estudiante seleccionado para la entrevista participó en todas las fases previas de la estrategia de enseñanza, teniendo un desempeño aceptable.

Resultados

Se presentan resultados obtenidos de la estrategia de enseñanza en tres partes. En la primera se señalan, de manera resumida, resultados del cuestionario de indagación. En la segunda se presentan resultados generales de las actividades llevadas a cabo con la totalidad de los estudiantes, esencialmente de las que consistieron en el trabajo en el aula con los datos de los experimentos de movimiento. En la tercera parte se describen tres episodios de la entrevista realizada.

- *Cuestionario de indagación.*El análisis de las respuestas lleva a los siguientes resultados. Reactivo 1: en 30 casos seasocia correctamente la representación gráfica con el enunciado, reconociendo el invariante en la situación planteada. Reactivo 2: en 8 casos se reconoce o se intuye un proceso de acumulación, puesto que se proporciona información no explícita, como el monto acumulado al final de la semana. Reactivo 3: en 14 casos se asocia el área bajo la gráfica de velocidad con el desplazamiento del objeto, en la mayoría (65 %) se tabula y se construye una gráfica adecuada. Reactivo 4: en 9 casos se presenta una estimación del área bajo la curva o se prevé un método plausible para ello.

- *Tratamiento de los datos en el salón de clase*. Con los datos obtenidos en el laboratorio de Física se procedió a modelar las funciones implicadas en cada experimento. Para esto, utilizando papel milimétrico, los estudiantes construyeron las gráficas de desplazamiento contra tiempo para los dos experimentos de movimiento. En el caso del MRU se obtuvieron gráficas lineales, trazando sobre el conjunto de pares una recta siguiendo la tendencia mostrada. En el caso del MRUV los estudiantes dibujaron curvas, guiados por la disposición de los pares en el plano. La determinación de la velocidad, tanto en el caso de MRU como del MRUV, se concretó a partir del cálculo de velocidades medias por

intervalos, la interacción entre los estudiantes y entre los estudiantes y el profesor generó esta condición de común acuerdo, aun cuando se tenía previsto utilizar modelos de regresión para encontrar los registros funcionales. En el caso del MRU se calculó, a su vez, un promedio de las velocidades medias, el cual fue considerado como la velocidad del experimento, una constante en este caso. En el caso del MRUV la velocidad quedó representada por una función a intervalos, dejando ver claramente un carácter creciente. En ambos casos fue posible hacer sentido de la relación entre las gráficas de desplazamiento y de velocidad: la gráfica de velocidad contiene al desplazamiento como área bajo la curva o bajo la función y la gráfica de desplazamiento contiene a la velocidad como la razón de cambio del desplazamiento. Este hecho permitió avanzar en la dotación de significado del TFC en términos de lo que se muestra en la Tabla 1.

Enfoque de la Física	***Enfoque del Cálculo***	***Visualización gráfica***
El desplazamiento (*s*) y el tiempo (*t*) son proporcionales.	$s(t) = k \cdot t$	Una función lineal cuya ordenada al origen es cero.
La gráfica *s-t* "contiene" la velocidad (*v*), la rapidez con que cambia la posición del objeto es constante.	$v(t) = s'(t) = k$,	La velocidad corresponde ala pendiente de la función lineal.
La gráfica *v-t* "contiene" el desplazamiento.	$A(t) = s(t)$	El desplazamiento está dado porla función área $A(t)$, asociada a la función de velocidad.
La rapidez con que cambia el desplazamiento está dada por la velocidad.	$s'(t) = v(t); A'(t) = s'(t)$, así: $A'(t) = v(t)$,	La razón de cambio del área bajo la curva de la función es igual a la función.

Tabla 1. Análisis del MRU.

Entrevista. Erick, uno de los estudiantes que participaron en todas las fases de la estrategia de enseñanza, fue entrevistado por su profesor —quien es coautor de este reporte— trabajando con el guión de actividad preparado para el análisis del experimento ER. A continuación se describen 3 episodios, indicando el objetivo de cada uno.

Episodio 1: Obtener una regla para la fuerza aplicada en el resorte en términos del alargamiento.A partir de los datos obtenidos del experimento, Erick construyó la gráfica de fuerza contra alargamiento (Figura 1). A continuación el entrevistador le pidió encontrar el valor de la constante de proporcionalidad característica el caso bajo estudio, para lo cual seleccionó un punto de la gráfica, el (3.5, 10) y realizó la operación 10/3.5, tomando como resultado 2.85. Con esto, Erickplanteó una relación adecuada entre fuerza y alargamiento, aunque de forma implícita.

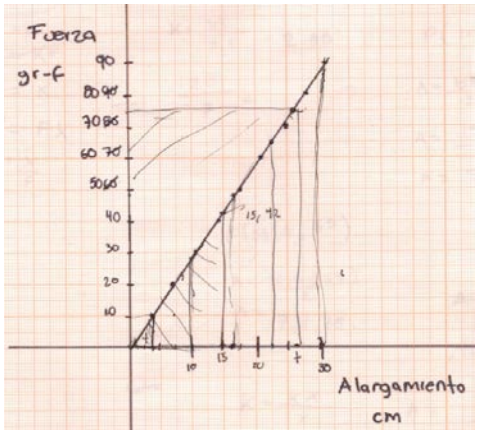


Figura 1.Fuerza contra alargamiento del resorte.

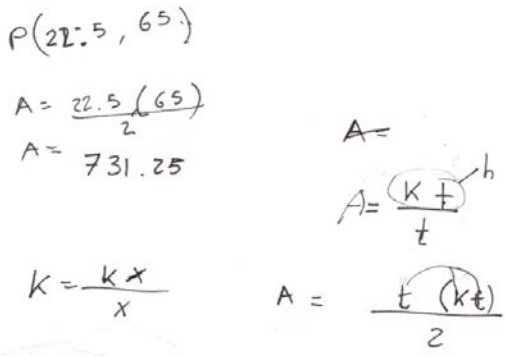


Figura 2. Una regla para el área bajo la función fuerza

<u>*Episodio 2*</u>: Obtener una regla para determinar el área contenida en el diagrama de fuerza contra alargamiento y utilizarla.Erick asoció convenientemente la regla para el área de un triángulo a la situación que se estaba analizando y la utilizó adecuadamente para calcular un área, una vez que seleccionó un valor en *x* (Figura 2). Sin embargo, enfrentó cierta dificultad para identificar el caso general, es decir, el caso en el que *x* toma un valor cualquiera denotado por *t* (a sugerencia del entrevistador). No se percató de que si la primera componente es *t*, la segunda sería$f(t) = 2.85t$, en este caso. Inicialmente, Erick recurrió a la expresión de la constante elástica como una razón ($k = F/x$), con la intención de hallar una reglapara el área bajo la curva. Al interactuar con el entrevistador, Erick se percató del error e identificó un elemento fundamental para modelar el área bajo la curva: *kt* define la altura del triángulo, es decir, la fuerza. Esto le permitío llegar a formular, de manera conveniente, la regla para el área.

<u>*Episodio 3*</u>. Relacionar ambas reglas desde dos enfoques: el de la Física y el del Cálculo.

Si bien Erick llegó a hacer explícitala función fuerza aplicada en el resorte en términos del alargamiento, no logró verbalizar con claridad esta relación. Esto quizá impidió el reconocimiento a profundidad de una relación entre las dos funciones, la que describe la relación entre fuerza y alargamiento y la que describe la relación entre el área bajo la curva (energía acumulada en el resorte) y el alargamiento. La interacción con el entrevistador facilitó que llegará a escribir explícitamente esa relación (Figura 3). Es hasta este momento que fue posible iniciar un proceso para discernir una relación entre ambas funciones.

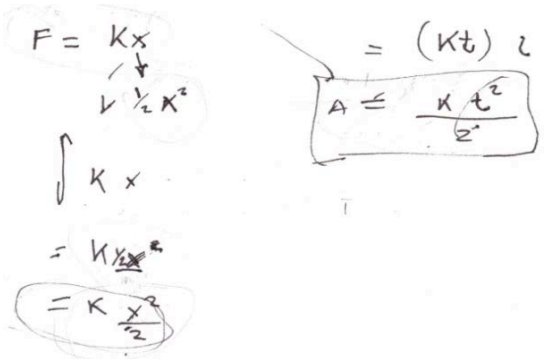


Figura 3. Funciones vinculadas.

Ante el requerimiento de encontrar alguna relación entre las dos reglas, la de fuerza aplicada en el resorte y la de área bajo la gráfica de dicha fuerza, Erick procedió a obtener una antiderivada de la función fuerza, lo cual logró resolver adecuadamente. El entrevistador retomó la afirmación que aparece en el guión que Erick tenía a la mano para desarrollar la actividad: "La derivada de la función área equivale a la función fuerza aplicada". Erick hizo sentido de la afirmación, señalando que la función área es antiderivada de la fuerza.

Conclusión

Si bien la inclusión de un contexto físico permitió referirse a variables o funciones específicas, como en el caso de la entrevista al alargamiento ya la fuerza aplicada en el resorte, y permitió también avanzar en la dotación de sentido de la información que el contexto proporciona, inclusive en términos del área bajo una curva, la tarea de relacionar los conceptos abordados en la actividad entre un enfoque de la Física y un enfoque del Cálculo constituyó una tarea compleja.Relacionar un enfoque con otro resultó más complejo que establecer la relación al interior de cada enfoque (ver la Tabla 1).El análisis de la entrevista y las observaciones realizadas en el aula abordando los casos de MRU y MRUV, ponen al descubierto la importancia de promover el significado de la derivada en el sentido de razón de cambio y de su conexión con la integral, entendida a su vez en el sentido de la acumulación del cambio, como requisitos para involucrar a los estudiantes en un proceso de dotar de significado al teorema fundamental, particularmente a la primera parte de éste, la que pone el énfasis en la relación entre razón de cambio y cambio acumulado.La habilidad operativa en el Cálculo es un recurso para hacer sentido del concepto del área bajo la curva y del TFC, sin embargo no implica una competencia matemática en un sentido amplio. El desarrollo de actividades de aprendizaje a partir de información extraída directamente de contextos físicos permitió dotar de significado a la relación entre una función y una función antiderivada asociada, promoviendo el reconocimiento de una relación funcional entre las variables involucradas en los contextos abordados. Sin embargo, para

llegar a alcanzar un nivel de formalización matemática de dicha relación, en términos del TFC, se percibe la necesidad de establecer relaciones explícitas entre la razón de cambio y el cambio acumulado, es decir, es necesario que los estudiantes lleguen a ser conscientes de que la razón de cambio del área bajo la curva de una función está dada por la función misma y que, simultáneamente, el cambio acumulado (el área bajo la curva) está definido por una antiderivada de esa función.

Referencias bibliográficas

Courant, R. & Robbins, H. (2002). *¿Qué son las matemáticas?* México: Fondo de Cultura Económica.

Cruse, A. B. & Lehman M. (1982). *Lecciones de Cálculo 2. Introducción a la integral*. México: Fondo Educativo Interamericano.

Edwards, C. (1979). *The Historical Development of the Calculus*. EE.UU: Springer-Verlag.

Orton, A. (1983). Students' unsderstanding of integration. *Educational Studies in Mathematics* 14, 1 – 18.

SEMS IPN (2009). *Programa de Estudios de la Unidad de Aprendizaje Cálculo Integral*. México.

LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA A ALUMNOS CIEGOS Y DISMINUIDOS VISUALES. EL RELATO DE UNA EXPERIENCIA

Ana María Mántica, Marcela Götte y María Susana Dal Maso
Universidad Nacional del Litoral. Facultad de Humanidades y Ciencias Argentina
ana.mantica@gmail.com, marcelagotte@gmail.com, mariasusanadalmaso@gmail.com

Resumen. Se presenta una experiencia realizada con alumnos del profesorado de matemática para trabajar en esta disciplina con alumnos ciegos integrados en escuelas comunes. Los objetivos son mejorar el aprendizaje de la matemática de los alumnos ciegos o disminuidos visuales capacitando a docentes integradores y de matemática, realizando apoyo personalizado a los alumnos ciegos y estudiando y adaptando propuestas didácticas. Se pretende aportar a la formación de los alumnos del profesorado estudiando y vivenciando las dificultades concretas que se producen en el aprendizaje de conceptos matemáticos cuando se trabaja con alumnos ciegos o disminuidos visuales. Se trabaja conjuntamente con los docentes especiales en la adaptación de contenidos y materiales

Palabras clave: ciegos, disminuidos visuales, aula de matemática

Abstract. Introducing an experience made with students from math teachers to work in this discipline with blind students assisting ordinary schools. The objectives are improve the mathematical learning from blind or visually impaired through the capacitation of blind student teachers and math teachers, doing personalized assist to blind students and studying and adjusting didactical proposals. Our intention is to contribute the training of math teacher trainees through studying and experimenting particular difficulties produced in the teaching of mathematical concepts while working with blind and visually impaired students. Working side by side with blind student teachers in the adjustment of content and materials

Key words: blind, visually impaired, Maths classroom

Introducción

El trabajo se realiza de manera conjunta con el personal directivo y docente de la Escuela Especial N° 2075 "Dr. E. Manzitti" para niños ciegos y disminuidos visuales de la ciudad de Santa Fe. Esta institución recibe a los alumnos ciegos o disminuidos visuales de secundaria en contra turno del que concurren a la escuela común para atender consultas semanales de todas las disciplinas.

En virtud de la preocupación de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la UNL por formar docentes comprometidos con la sociedad, que dispongan de herramientas diversas que les permitan abordar los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las distintas disciplinas con responsabilidad y rigor científico, se propone el presente proyecto con la finalidad de que los alumnos del Profesorado de Matemática participantes desarrollen herramientas conceptuales y metodológicas para abordar esta problemática trabajando en pos de atender la demanda de los docentes de la escuela Manzitti, que no cuentan con la formación disciplinar para atender las consultas sobre los conceptos de matemática que se abordan en la escuela secundaria.

La nueva ley de educación establece la obligatoriedad escolar hasta la finalización de la Escuela Secundaria garantizando la integración de los alumnos con discapacidades en todos los niveles y modalidades según las posibilidades de cada persona y compromete a las autoridades jurisdiccionales a proporcionar los procedimientos y recursos necesarios para brindar atención

interdisciplinaria y educativa con el objeto de lograr la inclusión de los alumnos con necesidades educativas derivadas de la discapacidad o de trastornos en el desarrollo desde el Nivel Inicial.

Fundamentación

Para concretar el apoyo, a los alumnos ciegos integrados en escuelas comunes, la Escuela Manzitti cuenta con un cargo para un docente especial y con cuatro horas cátedra del nivel secundario en el área de matemática (concentradas en un sólo día de la semana). Los alumnos asisten a las clases de apoyo los distintos días de la semana (en función de sus disponibilidades horarias, determinadas por el horario que deben cumplir en la escuela secundaria) y van planteando sus dudas en torno a los contenidos matemáticos trabajados en clase.

En lo que respecta al aprendizaje de la matemática de niños ciegos, Rosich Sala, Núñez Espallargas & Fernández del Campo (1996) afirman que existen investigaciones en relación con la educación de ciegos y la Didáctica de la Matemática que permiten afirmar que no hay ámbito o dominio de la matemática vedado para ciegos y "que el proceso de desarrollo psicológico del niño ciego padece, en general, un retraso medio de cerca de dos años en lo referente a la adquisición de experiencias lógico-matemáticas. Retraso que se va aminorando, hasta neutralizarse a la edad de doce a catorce años" (p.149).

Más allá de que la investigación permita afirmar que los jóvenes ciegos en los primeros años del nivel secundario están en condiciones de desarrollar conocimientos matemáticos sin mayores dificultades, conviene recordar que "en general, algunos alumnos casi siempre, y algunas veces casi todos, tienen dificultades y cometen errores en el aprendizaje de la matemática" (Socas, 1997, p. 126).

El estudio de las dificultades y errores durante el aprendizaje de la matemática constituye un campo de estudio muy prolífico en Educación Matemática (Rico, 1997; Socas, 1997). Socas (1997) ha organizado en cinco tópicos las dificultades asociadas a: la complejidad de los objetos de las matemáticas; los procesos de pensamiento matemático; los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de la matemática; los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos; y a actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas.

Si bien el autor en su análisis no aborda la problemática del aprendizaje de la matemática en alumnos con necesidades especiales, podemos reflexionar acerca de algunas situaciones que pueden presentarse. Por ejemplo, en el primer grupo de dificultades, Socas (1997, p. 127) reconoce la existencia de "diferentes conflictos asociados a la comprensión y comunicación de objetos matemáticos", que surgen como consecuencia de las características propias del lenguaje de las matemáticas. La necesidad de traducir al lenguaje Braille genera una complejidad mayor en

el caso del aprendizaje por parte de alumnos no videntes, que necesitan traducir a este lenguaje todo lo que el profesor de matemática trabaja en su clase. La escritura en Braille es lineal por lo que por ejemplo, para expresar una fracción se anota primero el denominador y luego el numerador (exactamente lo opuesto a la escritura usual). El docente de matemática tiene que ser muy cuidadoso y preciso en el vocabulario que emplea en clase, dado que una referencia inadecuada "al número de arriba" (para referirse al numerador) generará una interpretación errónea del alumno no vidente.

Otro ejemplo que resulta importante destacar es el hecho de que en matemática, durante el estudio de los conceptos suele hacerse hincapié en la importancia de articular distintos registros simbólicos (Artigue, 1995). El docente que tiene en su clase un niño ciego debe prever con anticipación que, en caso de que se hagan referencias a imágenes (consistentes, por ejemplos, en dibujos de figuras geométricas o en representaciones gráficas de funciones) debe contar con material preparado previamente (las imágenes pueden realizarse por diversos métodos, entre otros utilizando impresora Braille o thermoform) para que estos alumnos puedan participar de las discusiones.

A partir de esta descripción del tipo de dificultades que pueden presentarse, se pone de manifiesto el hecho de que las consultas de los alumnos del nivel secundario requieren de la atención por parte de un equipo integrado por un docente especializado en Ciegos y Disminuidos Visuales y un docente de matemática.

Por un lado, se presenta el obstáculo de que el docente de matemática asiste a la escuela un día a la semana, en tanto que la concurrencia de alumnos se da a lo largo de toda la semana. Por otro lado, los docentes especiales que realizan las tareas de apoyo a los alumnos con discapacidades visuales comienzan a detectar la falta de formación en contenidos matemáticos para trabajar con los alumnos, dado que su formación inicial estuvo pensada para la escuela primaria (en ese momento la escolaridad obligatoria alcanzaba ese nivel). Como consecuencia, los docentes se ven en la necesidad de brindar apoyo sin contar con la suficiente formación disciplinar que les permita realizar la adaptación de los contenidos trabajados por los docentes de las escuelas comunes. A estas limitaciones que se presentan en la institución, se suma la necesidad manifestada por los docentes de matemática de las escuelas secundarias comunes.

Además el docente de matemática que realiza el apoyo a los alumnos integrados a las escuelas comunes no dispone de tiempo suficiente para realizar un acercamiento con el docente de matemática de la escuela común. Esto impide en muchos casos que este último disponga de una posibilidad de informarse sobre las particularidades de la enseñanza de la matemática a un alumno

con discapacidad visual, así como de cuestiones generales que deben ser atendidas en clases de matemática en la que concurren alumnos con este tipo de necesidades educativas especiales.

Nos propusimos con este trabajo: mejorar el aprendizaje de la matemática de los alumnos ciegos o disminuidos visuales; capacitar a los docentes de la escuela Manzitti en contenidos y procedimientos específicos de matemática; favorecer la articulación de propuestas de enseñanza de la matemática entre los profesores de la escuela Manzitti y los profesores de las escuelas que cuentan con alumnos ciegos o disminuidos visuales integrados; profundizar y difundir aspectos a tener en cuenta para la enseñanza de la matemática en el aula con alumnos ciegos o disminuidos visuales; aportar a la formación de los alumnos del profesorado en las dificultades concretas que se producen en el aprendizaje de conceptos matemáticos cuando se trabaja con alumnos ciegos o disminuidos visuales.

Desarrollo

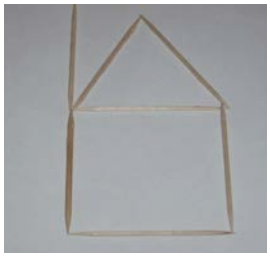
Se realizan diversas acciones en función de atender las demandas y dar mayor difusión a la enseñanza de la matemática a alumnos ciegos y disminuidos visuales con el propósito de llegar a un mayor número de docentes interesados en la temática.

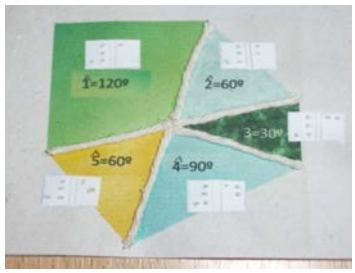
Se diseñan folletos informativos acerca de la problemática específica de la enseñanza de la matemática a alumnos con discapacidades visuales que son distribuidos en las escuelas de Enseñanza Media de nuestra ciudad y zonas de influencia de la UNL y la escuela Manzitti.

Se realizan dos talleres "Adaptaciones curriculares de alumnos con discapacidad visual: Importancia de los recursos materiales en las clases de matemáticas" a cargo de alumnos del profesorado, docentes responsables del proyecto y docentes de la escuela Manzitti y “Recursos y materiales para la enseñanza de la matemática a alumnos ciegos”, a cargo del Lic. Della Barca, dirigidos a todos los actores involucrados en la propuesta.

Se dicta la conferencia “Enseñanza de la matemática a personas ciegas en la Escuela Secundaria” a cargo del Licenciado en Matemática Della Barca, que tiene esa discapacidad, de la que participaron más de 400 personas entre docentes, alumnos de distintos profesorados de la zona de influencia de la UNL y público en general. En la misma subraya la importancia del sistema Braille como único medio de lectoescritura para personas ciegas y destaca la importancia de concientizar a los docentes que tienen un alumno ciego en el aula que éste merece el mismo nivel de enseñanza y exigencias que cualquier alumno.

Los alumnos del profesorado, acompañados por un docente integrante del proyecto, concurren semanalmente a la Escuela Manzitti donde trabajan coordinadamente con los docentes de dicha escuela en relación a contenidos matemáticos. Efectúan también actividades de apoyo escolar en función de las demandas de los alumnos que están integrados en las escuelas secundarias comunes. También concurren a una jornada completa, en la escuela común que tiene un alumno ciego integrado, en la cual observan y registran los distintos espacios curriculares y realizan un período de ayudantía en la clase de matemática que consiste en trabajar conjuntamente con el docente en el aula. Una de esas clases deben diseñarla e implementarla. Los voluntarios plantearon actividades según lo trabajado con los docentes de la escuela especial utilizando materiales de modo de integrar al alumno ciego. Presentamos el material diseñado por uno de los grupos que desarrolló en primer año el tema ángulos.





Esta experiencia les permite a los alumnos del profesorado ampliar su formación académica, poniéndolos en contacto directo con la realidad de las aulas de escuelas secundarias donde conviven alumnos con diferentes problemáticas.

Otra de las tareas planificadas en el proyecto es el diseño de propuestas de trabajo según el concepto matemático.

Nos propusimos plantear una secuencia utilizando recursos y materiales didácticos que permitan trabajar un contenido específico y que puedan ser utilizados por todos los alumnos, ya sea que tengan o no una discapacidad visual, con el fin de que establecer relaciones, conjeturar y validar respuestas sea tarea de todos los integrantes de la clase de matemática.

Uno de los conceptos que presenta dificultades para su comprensión es el de número racional. "Los números racionales se crearon en el intento de resolver problemas que no podían ser resueltos utilizando números naturales. Estos campos numéricos tienen características diferentes […] En cuanto al comportamiento de estos números, las fracciones pondrán en evidencia ciertas diferencias con los números naturales; por ejemplo, la necesidad de utilizar dos números (numerador y denominador) para expresar una única cantidad; la posibilidad de expresar el mismo número de distintos modos (fracciones equivalentes); la insuficiencia de comparar en

forma independiente numerador y denominador para establecer relaciones de orden entre fracciones; la imposibilidad de interpretar siempre a la multiplicación como una suma reiterada" (Broitman, Itzcovich, Sancha, Escobar & Grimaldi, 2007, pp. 4- 5). Por estas razones, es que elegimos tratar el concepto de fracción.

La secuencia se basó en una propuesta de Saiz (2000), que ha sido modificada y adaptada para trabajar con el mismo material con todos los alumnos del aula integrada y ha sido puesta en consideración en un taller al cual asistieron docentes de matemática de escuelas secundarias que tienen alumnos ciegos integrados y docentes especialistas, recogiendo todos los aportes que ellos hicieron para su mejora.

La secuencia original utiliza seis rompecabezas confeccionados en hojas de papel común. Para la adaptación utilizamos madera (MDF) de aproximadamente el tamaño de una hoja A4 para cada rompecabeza. Los mismos tienen en su borde un bastidor rectangular del mismo material de las piezas para armar el rompecabezas en su interior.

Para otra de las actividades se utiliza una copia con la representación de los seis rompecabezas para que los alumnos tengan en sus carpetas. La adaptación en este caso para el alumno no vidente, consiste en entregar el dibujo de los rompecabezas en hoja punteada con perforación, confeccionando cada rompecabezas en una hoja para evitar confusiones al tacto. Dada la importancia de la socialización en la clase de matemática, una vez terminado el trabajo individual, el alumno no vidente identificará cada pieza con una letra y la clase se guiará con esta denominación para que todos puedan hacer corresponder cada pieza con la fracción que representa. El alumno disminuido visual o ciego puede también realizar esta consigna dibujando con crayón en el tablero de dibujo o en la hoja de geometría para marcar cada pieza para poder establecer relaciones.

Otra consigna consiste en que por grupos los alumnos dibujen rompecabezas con ciertas condiciones, por ejemplo, que contengan piezas que representen tercios, sextos y novenos. Esta actividad tiene un fuerte componente visual por lo que consideramos de una dificultad mayúscula para un alumno ciego, el cual se debería imaginar un rectángulo y las piezas que cumplieran las condiciones solicitadas y luego plasmarlas en una hoja utilizando, por ejemplo, el tablero de dibujo. En el caso de un alumno vidente, puede ensayar distintas posibilidades, dibujando y corrigiendo sobre ese dibujo. La adaptación para esta actividad consistió en una variante de la misma en la cual se utilizó un bastidor (de los realizados para la primera actividad) por grupo y se fabricaron varias piezas que representan tercios, sextos, novenos, medios, cuartos, doceavos. Este material se realiza en madera. La actividad indica que en el bastidor (entregado por grupo), armen

un rompecabezas con piezas que representen tercios, sextos y novenos, ... Así los alumnos deben identificar que piezas cumplen con esas condiciones y establecer el número de cada una de ellas para que aparezcan las solicitadas.

En otra de las actividades se trabaja a partir de un rectángulo dividido en doce partes iguales a través de tres segmentos paralelos a dos de los lados y dos paralelos al otro par de lados, en el cual están sombreadas ocho de esas partes. Se les solicita que sin realizar nuevas divisiones expresen la parte sombreada mediante fracciones y operaciones de fracciones. En la adaptación propuesta el gráfico se realiza en una hoja con las divisiones y bordes hechos en hilo y las partes sombreadas con un punteado perforado. Para el disminuido visual se realizará en colores que resalten. Se pide además que algún alumno de la clase describa la figura para que el alumno ciego se la pueda representar, con lo cual se aprovechará esta instancia para revisar conceptos geométricos.

Como producto final del proyecto para la comunidad educativa en general se realizó un video que cuenta la experiencia en la que se pueden oír las voces de los voluntarios, los docentes participantes del proyecto de la universidad, de la escuela Manzitti y de las escuelas comunes con alumnos ciegos integrados, como también de los alumnos ciegos que recibieron el apoyo en matemática de los voluntarios.

Reflexiones

Della Barca sostiene que la integración bien hecha se logra a través de una escuela especial porque ésta le da los medios necesarios para interactuar con otros que tienen la misma discapacidad. Por ejemplo, el niño va a la escuela común, y dos veces por semana, en turno contrario, a la escuela especial. Allí le enseñan bien el uso del Braille, orientación y movilidad, la vida diaria, cosas específicas para un chico ciego. No obstante, debo reconocer que no todo chico es integrable (Daneri, 2011, p.5).

Consideramos importante plantear situaciones de aprendizaje-servicio, estrategia de enseñanza en la que los estudiantes aplican sus habilidades y conocimientos académicos y profesionales específicos en situaciones reales contribuyendo a posibles soluciones a las diversas y complejas problemáticas sociales, dado que estas prácticas están destinadas a relacionar el aprendizaje con la vida real y que les propone realizar actividades en las que, a partir de esa conexión con la práctica, desarrollarán experiencias que plantean poner en diálogo en situación auténtica las habilidades y los conocimientos teóricos que poseen, evaluarán el estado de situación de los procesos sociales, enriquecerán esos conocimientos y habilidades, realizarán aportes a posibles soluciones e identificarán nuevos problemas.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos. En P. Gómez (ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 97-140). México: Una empresa docente y Grupo Editorial Iberoamericana.

Broitman, C., Itzcovich, H., Sancha, I., Escobar, M. y Grimaldi, V. (2007). *Serie Curricular MATEMÁTICA Nº 4. Números Racionales y Geometría.* Buenos Aires: Dirección Provincial de Educación Primaria. Dirección de Gestión Curricular.

Daneri, G. (2011, 12 de febrero). Cuando la vocación y el deseo de superarse traspasan todos los límites. *Revista Nosotros, El Litoral,* 6-7.

Della Barca, J. L. (2010, agosto). *Enseñanza de la matemática a personas ciegas en la Escuela Secundaria*. Conferencia presentada en la Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, Argentina.

Rico, L. (1997). Reivindicación del error en el aprendizaje de la matemática. *Épsilon*, *38*, 185-198.

Rosich Sala, N., Nuñez Espallargas, J. y Fernández del Campo, J. (1996). *Matemáticas y deficiencia sensorial*. Madrid: Síntesis.

Saiz, I. (2000, agosto). *Resignificación del concepto de fracción.* Trabajo presentado en el II Conferencia Argentina en Educación Matemática, Santa Fe, Argentina.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en Educación secundaria. En L, Rico (coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: Horsori.

ESPACIOS DE REFLEXIÓN SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA EN LA ESCUELA MEDIA. ANÁLISIS GRÁFICO COMO PUERTA DE ENTRADA HACIA EL APRENDIZAJE DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES DE 2X2

Analía Edith Bozzalla ySilvina Aida García Serrano
Universidad Argentina de la Empresa Argentina
abozzalla@uade.edu.ar, silvinags@gmail.com

Resumen. Este trabajo surge del deseo de colaborar, desde nuestra labor en el aula, con el proceso de comprensión y apropiación del concepto de sistemas de ecuaciones lineales de 2x2. El abordaje tradicional de la temática, ubica a los alumnos en un lugar estático, meramente algorítmico, con escasas situaciones de transferencia y en contextos carentes de pluralidad. Este escueto panorama nos motiva a diseñar estrategias didácticas, en las cuales el tema sea indagado desde distintos sistemas de representación
Palabras clave: sistemas, análisis gráfico, registros, rectas
Abstract. This work comes out from the desire to aid, from our classroom work, with the process of understanding and appropriation of the concept of 2x2 systems of linear equations. The traditional approach places students in a static, purely algorithmic way of work, with very few transfer situations and contexts devoid of plurality. This brief overview motivates us to design teaching strategies, in which the matter is investigated from different registers of representation
Key words: systemsm, graphical analysis, registers, lines

Introducción

El interés que nos convoca a realizar este trabajo radica en la necesidad de elaborar una secuencia didáctica que facilite el aprendizaje del objeto matemático: sistemas de ecuaciones lineales.

Consultando con algunos textos usados en la escuela media (destinada a alumnos de 13 a 17 años), hemos observado que el recorrido más habitual, en la presentación de la temática, comienza con la especificación de los métodos utilizados en la resolución de sistemas, siguiendo con la verificación de los resultados obtenidos a través de la representación gráfica y por último, la presentación de algunos problemas para que el alumno modele a través de un sistema lineal.

Partiendo de este panorama nos pareció interesante, y aún más fructífero, generar una secuencia didáctica donde el eje constructor de la misma radique en la circulación, en ambos sentidos, de los distintos registros de representación: registros verbales (RV), algebraicos (RA) y gráficos (RG). Según Duval (1999), la relación entre las representaciones y los diferentes registros genera una interpretación semiótica del vínculo entre los diferentes sistemas de signos que simbolizan el mismo objeto. Según el autor, las representaciones en los diferentes registros, no sólo son necesarias a fines de comunicar, sino esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento; en el pasaje de un registro a otro no son los mismos aspectos del objeto los que se representan, de ahí la importancia del recorrido por todos los registros. La conceptualización implica coordinación entre registros, con lo cual, según el autor, la comprensión de un objeto matemático radica en la coordinación de al menos dos registros de representación.

Problemática

Como docentes en el nivel superior, recibimos a alumnos, egresados de la escuela media (con edad mínima de 17 años), con importantes dificultades a la hora de resolver sistemas de ecuaciones lineales; los mismos radican en problemas sobre la manipulación aritmética del sistema, en la verbalización de las ecuaciones involucradas y en la resolución gráfica del sistema presentado (Guzmán, 1999). Esto sucede en un contexto, en el cual, los algoritmos de resolución son perfectamente aplicados y explicados por el docente a cargo. De acuerdo a investigaciones consultadas, (Panizza, Sadovsky y Sessa, 1999), los alumnos no son capaces de verificar la solución obtenida y en pocas ocasiones, a partir del análisis gráfico, pasan al abordaje algebraico. Los resultados de estas investigaciones han motivado nuestro deseo de proponer un recorrido diferente en la presentación del objeto matemático: sistemas de ecuaciones lineales, trabajando sobre el eje central de la circulación de los registros mencionados (RV↔RG) (RG↔RA) (RA↔RV) y de los factores que hacen posible dicho pasaje.

Por otro lado, en general, los alumnos presentan dificultades en el tratamiento y en la expresión de la solución de una ecuación con infinitas soluciones.

El trabajo de indagación sobre textos de escuela media que contienen el tema estudiado, nos permitió sintetizar un panorama en donde el desarrollo algorítmico prevalecía sobre cualquier otra actividad. Esta situación, entre otras, consideramos genera una ruptura entre el pensamiento aritmético y el algebraico; los alumnos (con edades de entre 13 y 17 años) en escasas ocasiones son capaces de realizar pasajes del registro verbal al algebraico y viceversa. Consideramos que enmarcar el inicio de la actividad en el registro verbal puede generar un espacio en donde el paso entre los diferentes registros de representación resulte indispensable para avanzar en la actividad propuesta. Según Duval (1999), cuando se pasa de un registro a otro, los aspectos del objeto que se ven representados no son los mismos, de ahí que los sistemas son complementarios. Llegar a la conceptualización requiere de una actividad de coordinación de al menos dos registros de representación.

Las actividades propuestas a continuación han sido pensadas para desarrollar en clases de primero y segundo año de la escuela media (alumnos de 14 y 15 años de edad) guiadas por el docente a cargo

Nos propusimos iniciar la secuencia didáctica con una situación problemática, de forma de indagar sobre la capacidad de los alumnos para producir una escritura de una ecuación con dos variables aislada de una sistema de ecuaciones lineales.

Actividad 1

a) Halle dos números enteros ***a*** *y* ***b*** tales que la suma del primero y el doble del segundo sea igual a 100.

b) ¿Es posible hallar más de un par de números que cumplan dicha condición?

i. Halle por lo menos tres pares.

ii. Halle por lo menos 20 pares.

Con este problema nos proponemos entre otras cosas:

- Introducir de forma muy sencilla la idea de solución no única.
- Crear la necesidad de realizar un registro algebraico del problema de forma de poder generar rápidamente distintos pares de números que cumplan la condición pedida.
- Enfatizar el trabajo con el registro verbal: ¿cómo leo $a + 2b = 100$?
- Repasar el concepto de ecuación visto anteriormente en clase.

Seguimos Trabajando…

Actividad 2

La dueña de una casa de té decide renovar la decoración de su local. Para ello compra telas para cortinas, las cuales cuestan $200 el metro, y otras para mantelería cuyo costo es $ 50 el metro. Si en total pagó $2500, ¿podría determinar cuántos metros compró de cada tela?

Registro Algebraico
$200c + 50m = 2500$ |
Donde la variable c representa la cantidad de metros de tela para cortinas y m es la cantidad de metros en telas para mantelería

Una vez generada la escritura de la ecuación que responde al problema planteado, se les pedirá a los alumnos hallar las soluciones buscadas.

¿Qué esperamos de esta actividad?

Las investigaciones (Panizza, Sadovsky y Sessa, 1999; Grimaldi, Baldassari, Sivori, 2012; Segura de Herrero, 2004; Font, Godino y D' Amore, 2007) muestran que:

- Los alumnos se apoyan en sus conocimientos previos de ecuaciones con una variable, este hecho los conduce a querer hallar un valor para c y otro para m.
- Al situarse en el contexto del problema los alumnos anticipan la unicidad de la solución del problema.

- Al intentar despejar una variable los alumnos evidencian desconcierto al no poder interpretar la expresión algebraica encontrada.

De acuerdo a las respuestas presentadas por los alumnos se puede acompañar la actividad planteada con pares ordenados para que el alumno determine si son o no solución y vean que la ecuación no posee solución única.

Nuestra experiencia junto con las investigaciones indagadas nos permiten arribar a las siguientes reflexiones:

- Algunos alumnos son capaces de sustituir el par dado en la ecuación original pero presentan dificultades en el análisis de los resultados obtenidos 3=3; 3=8, etc.
- En otros casos, los alumnos insisten en la resolución de la misma para lograr arribar a alguna de las soluciones propuestas.

Ante nuestra pregunta y la inquietud de algunos alumnos respecto de la cantidad de soluciones de la ecuación planteada, encontramos el momento propicio para introducir el registro gráfico.

Nota: Para representar gráficamente la ecuación se utilizo el utilitario GEOGEBRA. Se consensuó la necesidad de expresar la ecuación en términos de x e y, dado que el graficador propuesto no reconoce otra variables.

Actividad 3

Sabiendo que: *x=c=* cantidad de metros de tela para cortina

y=m= cantidad de metros de tela para mantelería

Represente $200c + 50m = 2500$ | ¿Qué obtiene?

1- Ubique los pares $(9, 14)$; $(5, 20)$; $(5,30)$; $(8.5, 16)$ $(9,10)$ en el gráfico realizado. ¿Cómo se relacionan las soluciones de la ecuación planteada con el gráfico obtenido?
2- Proponga otros pares que sean solución de la ecuación. Proponga al menos tres

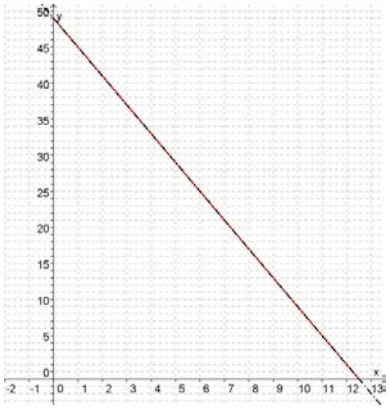
¿Qué preguntas esperamos que esta actividad genere en el aula?

- ¿Cuántas soluciones tiene el problema?
- ¿Cómo se relacionan las soluciones con los puntos de una recta?
- ¿Por qué un par es solución y otro no?
- ¿Podría un par poseer componentes negativas?
- ¿Siempre las soluciones son los puntos de una recta?

En este momento sería importante destacar la correspondencia entre las distintas expresiones obtenidas en la resolución de la actividad 2 y la gráfica de la ecuación.

Distintas investigaciones ya mencionadas, muestran que cualquiera haya sido el trabajo realizado alrededor de la "ecuación de una recta", este trabajo no parece suficiente como para que los alumnos puedan establecer una relación entre los puntos de una recta y las soluciones a la ecuación planteada.

Esta tarea nos permite introducir otro registro en la resolución de ecuaciones.

Registro verbal	Registro Algebraico	Registro gráfico
Si la dueña de una casa de té para renovar la decoración de su local requiere de c metros de tela para las cortinas cuyo costo es de $200 el metro su gasto para las cortinas será 200c pesos. Por otro lado si su local requiere de m metros de tela para mantelería cuyo costo es $ 50 el metro, su gasto será de 50m pesos. Con lo cual el gasto total será: $200c + 50m = 2500$	$200c + 50m = 2500$ Donde la variable c representa la cantidad de metros de tela para cortinas y m es la cantidad de metros en telas para mantelería	

La idea de incorporar otro registro de representación tiene como propósito que el alumno participe en el proceso de transformación del objeto sistemas de ecuaciones lineales. Es decir, la conversión de la representación de un objeto que se encuentra en un registro en la representación del mismo objeto en otro registró. Esta secuencia didáctica pretende generar espacios donde el alumno pueda "moverse" con fluidez entre los distintos registros, donde el camino de ida y vuelta, le permita realizar actividades de autocorrección y comprensión del concepto estudiado.

Una vez discutida la unicidad del conjunto solución de las ecuaciones lineales con dos incógnitas se propone una actividad de mayor complejidad con el propósito de introducir el concepto de sistemas de ecuaciones.

Actividad 4

Dadas las ecuaciones $2x + 3y = 5$ y $5x - 4y = 1$

a- Proponga al menos tres pares que sean solución de cada una de ellas. Explique cómo obtiene cada par y qué estrategia uso para hallarlos?

b- ¿Existe algún par que sea solución de ambas ecuaciones? ¿Cómo y donde lo buscaría?

c- ¿El punto (1,1) es solución de la ecuación $2x + 3y = 5$?

Los alumnos podrán hallar el punto de intersección, solución del sistema utilizando el comando "Intersección de dos objetos" correspondiente al software Geogebra. A partir de lo hecho para ecuaciones lineales de dos incógnitas será natural buscar la solución en la intersección entre las dos rectas.

Luego de definir el concepto de sistemas de ecuaciones lineales y de discutir desde el registro gráfico el conjunto solución, los alumnos arribarán a la conclusión de que el par (1,1) es solución del sistema planteado.

Ahora bien, planteamos otro interrogante que intenta volver sobre lo trabajado:

¿El punto (1,1) es solución de la ecuación $2x + 3y = 5$?

De acuerdo con investigaciones mencionadas se pude ver que los estudiantes consideran que el par (1,1) es solución de ambas ecuaciones y no de una de ellas. Esta respuesta se relaciona con la concepción que mantienen los alumnos de que una ecuación con dos variables en un sistema es un objeto diferente de una ecuación con dos variables.

Esta actividad tiene como principal propósito afianzar el concepto de solución de una ecuación de dos variables, estableciendo una relación entre los puntos de una recta y las soluciones de la ecuación correspondiente; afianzando la idea de que una ecuación con dos variables en un sistema, es el mismo objeto que dicha ecuación fuera del sistema.

En esta actividad el recorrido sobre los distintos registros podría seguir esta dirección: RG→RV →RA.

El pasaje de un registro al otro implica un tratamiento del sistema en el cual el alumno está trabajando y un diseño de estrategias para pasar al otro. En este sentido la conversión resulta muy interesante, porque se pretende hacer transitar al alumno en un recorrido no habitual e incongruente.

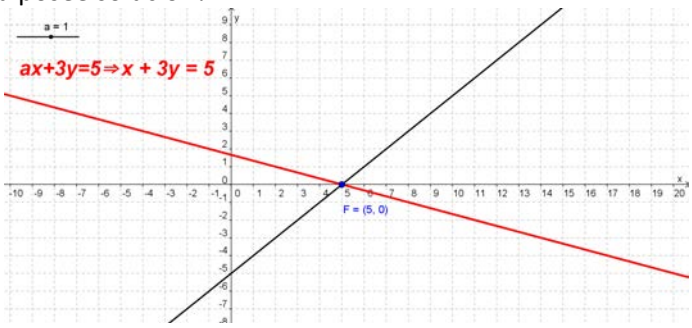
Actividad 5

El siguiente gráfico representa un sistema de ecuaciones lineales:

Se pide:

a) Determine si el mismo posee solución. Si la respuesta es afirmativa determine las coordenadas del punto solución del mismo
b) Escriba las ecuaciones que definen el sistema.

c) A partir de la modificación del parámetro a responda ¿Siempre un sistema posee solución?

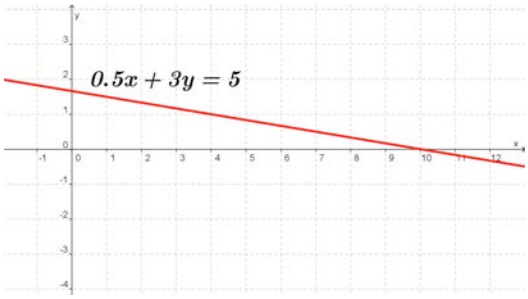


A partir de la discusión y resolución de esta actividad, esperamos que el alumno:

- Sea capaz de pasar del registro gráfico al registro algebraico
- Sea capaz de identificar la solución del mismo
- Identifique que el sistema no posee solución cuando las rectas son paralelas, discutir a partir del registro algebraico como ver en las ecuaciones que las rectas son efectivamente paralelas llevándolas a la forma $y = mx + b$

Actividad 6

El siguiente gráfico es la representación de una de las ecuaciones que integran un sistema, si la otra ecuación involucrada es $x - 6y = 10$. Determine si el mismo posee solución. Si la respuesta es afirmativa determine si la misma es única.



Con la siguiente actividad se espera que el alumno aborde el análisis de sistemas con infinitas soluciones y a partir del análisis de los parámetros de las rectas involucradas discutir como reconocer este tipo de sistemas.

A modo de síntesis se propone la siguiente actividad:

Actividad 7

Dada la ecuación $2x + 4 = 8y$ proponga otra ecuación de forma tal que el sistema resultante posea:

1-El punto (2,1) como única solución.

2-Tenga infinitas soluciones.

3-No posea solución

Conclusión

A partir del análisis realizado hemos observado las dificultades en el manejo y la interpretación por parte de los alumnos de una ecuación lineal con dos incógnitas, en parte motivado por el fraccionamiento que propone el docente en los contenidos impartidos. Los alumnos no son capaces de extrapolar los conocimientos que poseen sobre rectas y función lineal a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Esta problemática creemos tiene su origen en la elecciones didácticas realizadas por los docentes a cargo, respecto del orden y correlaciones temáticas.

Como resultado de lo anterior los alumnos no son capaces de moverse con fluidez entre los registros gráfico, analítico y verbal careciendo en consecuencia de estrategias de autocontrol

Esto genera la mecanización en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, transformando esto último en una mera acumulación de algoritmos, los cuales se aplican sin justificación y con escasa comprensión por parte de los alumnos.

Frente a esta realidad, el presente trabajo pretende mostrar una secuencia didáctica basada en el recorrido constante entre los distintos registros de representación del objeto matemático sistemas de ecuaciones lineales. Dicha secuencia pretendemos que invite al alumno a "entrar al tema" desde un contexto gráfico alejado de los métodos de algorítmicos de forma de evitar la confusión del objeto matemático con los algoritmos de resolución.

Esperamos que este trabajo pueda sentar las bases para futuras investigaciones referidas a los procesos algoritmos vinculados con la resolución de sistemas de ecuaciones, de manera de dotarlos de sentido para los alumnos.

Referencias bibliográficas

Duval, R. (1999), *Sémiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Colombia: Universidad del Valle.

Font, V., Godino, J. y D'Amore, B. (2007). Enfoque ontosemiótico de las Representaciones en Educación Matemática. *For the learning of Mathematics, 27(2),2-7.*

Grimaldi,V., Baldassari,V. y Sivori, A. (2012). El mejor camino… ¿para quién…?. Maneras alternativas de abordar el estudio de sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. III Jornadas de Enseñanza e Investigación Educativa en el Campo de las Ciencias Exactas y

Naturales. Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación, Universidad Nacional de la Plata.

Guzmán, R. I. (1999). *Apuntes del curso Fundamentos teóricos de la didáctica de la matemática* (Magister en Enseñanza de las Ciencias con mención en Didáctica de la Matemática) Valparaiso, Chile: Universidad Católica de Valparaíso.

Habre, S & Abboud, M. (2006). Student's conceptual understanding of a function and its derivative in an experimental calculus course. *Journal of Mathematical Behavior*, 25 (1), 52-72.

Panizza, M. , Sadovsky, P. y Sessa, C. (1999). La ecuación Lineal con dos variables: entre la unicidad y el infinito. *Enseñanza de las Ciencias,* 17, 453-461.

Segura de Herrero, S. (2004). Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 7 (1), 49-78.

DESARROLLO DE UNA TAXONOMÍA DE COMPRENSIÓN TABULAR

Soledad Estrella, Arturo Mena y Raimundo Olfos
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso Chile
soledad.estrella@gmail.com arturo.mena@ucv.cl raimundo.olfos@ucv.cl

Resumen. Algunas investigaciones muestran que la ordenación de datos en forma de tabla y su interpretación, resultan problemáticas para los sujetos. Esta baja competencia en el uso de tablas se explica por la poca importancia de su aprendizaje escolar, pese a incluirse en el currículo de matemáticas y ciencias. Sin embargo, el nivel de problemas presentados conduce a que las tablas se enseñen a un nivel elemental, y así los alumnos no las apropien como herramientas cognitivas. Este trabajo muestra parte del desarrollo de una taxonomía de comprensión tabular, principalmente se identificanlos flujos de lectura (centrado en ítems TIMSS) y los roles del sujeto activados al enfrentarse a situaciones con tablas

Palabras clave: tablas, taxonomía de comprensión tabular, lectura de tablas

Abstract. Some research shows that the ordination of tabular data and its interpretation, are problematic for the subjects. This low proficiency in the use of tables is explained by the lack of importance of their school learning, although included in the math and science curriculum. However, the level of problems presented leads to tables are taught at an elementary level, so students will not be appropriated as cognitive tools. This paper shows part of the development of understanding tabular taxonomy, are identified principally reading flows (focusing on items TIMSS) and the roles of the subject turned to face situations with tables

Key words: tables, tabular taxonomy, reading of tables

Introducción

Algunas investigaciones muestran que tanto la ordenación de datos en forma de tabla como la interpretación de las tablas resultan problemáticas para los alumnos de edad escolar. Los investigadores creen esta falta de competencia en el uso de las tablas se explique por la poca importancia que tiene su aprendizaje en la escuela, pese a que el currículo escolar la incluye como contenidos de enseñanza en las áreas de matemáticas y ciencias en primaria y en secundaria. Sin embargo, el nivel de problemas presentados y la ausencia de una secuencia didáctica específica, conducen a que las tablas se enseñen a un nivel elemental, y por lo tanto los alumnos no se apropien de ellas como herramientas cognitivas (Martínez y Brizuela, 2006; Martí, et al, 2010; Gabucio et al. 2010). Duval (2003) enfatizaque no existe construcción de tablas en las aulas sino lecturas y comparaciones de bajo nivel cognitivo. Espinel y Antequerra (2009) consideran que los resultados obtenidos de alumnos de secundaria sobre cuatro actividades de situaciones de PISA 2003, respecto a tablas de doble entrada, muestran un bajo desempeño con el manejo de tablas, y es menester considerar estas dificultades en la enseñanza de las matemáticas y en la formación de profesores.

La tabla es más que solo un apoyo para organizar datos pues también puede convertirse en una herramienta para pensar y razonar sobre los datos.Aunque existe una taxonomía gráfica no existe una específica para las representaciones tabulares.Un conocimiento de los niveles de

comprensión tabular permitiría a los profesores, autores de texto y desarrolladores de currículo, secuenciar ítems o actividades según niveles de dificultad de las tareas, y posibilitar una secuencia de las representaciones con conocimiento de las dificultades que conlleva el tratamiento de esta representación.

El presente estudio se centra en los roles del sujeto y las lecturas que hace frente a ítems liberados del TIMSS 2003, 2007y 2011,y algunos del Departamento de Educación de un estado de EEUU, del año 2008, que llamaremos DEO.Para cada uno de los ítemes se realizó un análisis de las tareas cognitivas que exigían, las que abarcaron inicialmente: búsqueda, compleción y construcción. También, se realizó un estudio sobre los flujos de lectura activados, considerandoflujos de lectura simple y ausencialectura. Finalmente cada ítem fue clasificado según los cuatro niveles de la taxonomía de comprensión tabular propuesta (ver Anexo 1).

Metodología

1) Estudio sobre los Roles del sujeto

Tras un estudio epistemológico de la tabla y un análisis de las exigencias cognitivas de los ítems recolectados de pruebas internacionales, se identificaron diferentes exigencias y con ello diferentes roles activados en la comprensión gráfica.

En esta búsqueda de los esquemas de los sujetos enfrentados a tablas, primeramente se levantaron protocolos para registrar los tipos de prácticas, de contextos, y de objetos matemáticos y las variables en juego. Identificadas las actividades exigidas con las variables en juego, se determinaron los esquemas y acciones vinculadas a ellos. Posteriormente, se procedió a diferenciar el conocimiento implícito del explícito. En este análisis se teorizó respecto a los esquemas (idea) que activaban los roles, y se identificaron las acciones generadas.

La Figura1muestra las características identificadas para cada rol y precisa dos niveles de disposiciones del sujeto: unas disposiciones más básicas (señaladas con “a”) y otras que requieren disposiciones superiores (señaladas con “b”).

Como se indicaba los protocolos dieron paso a la identificación de disposiciones y roles, se estudiaron los esquemas que se activan en la resolución de los problemas referidos a tablas. Esta teorización se presenta en la Tabla 1.

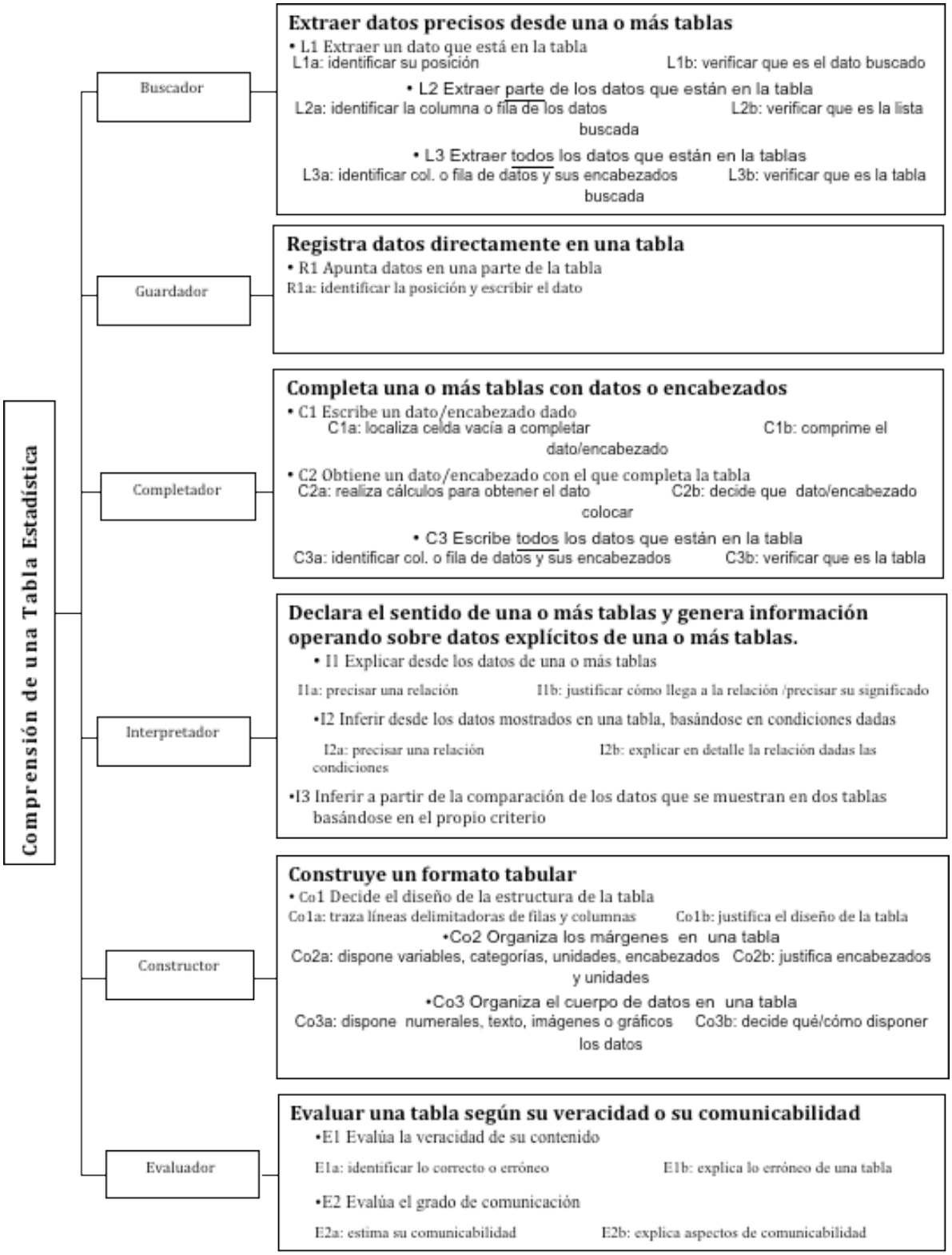


Figura.1. Marco de comprensión de tablas

Roles →	**buscar**	**completar**	**registrar**	**construir**	**interpretar**	**evaluar**
Esquema	Extracción de datos y/o de categorías dadas para obtener información.	Completación y compresión de relaciones entre datos y categorías de la clase.	Mantención de registros de datos para eventualmente obtener información. Memoria atemporal.	Comunicación a través de disposición organizativa funcional que muestra una partición y sus categorías y clases	Comparación y determinación de relaciones entre categorías. Explicación de relaciones y de la información obtenida.	Valoración de la utilidad de la disposición elegida del formato tabular, en cuanto a comprensión y a claridad.
Acción	Lee categorías de los encabezados lateral y/o superior. Cuenta y/o reconoce marcas, numerales, unidades lingüísticas o no.	Completa con nombres de las categorías en encabezados laterales y/o superior. Completa con marcas o numerales según conteo. Lee encabezados de celdas vacías. Compara.	Registra con unidades lingüísticas o no y/o numerales los datos de interés, principalmente en el cuerpo de datos.	Explicita a través de filas y columnas, y combinaciones de las mismas: los encabezados lateral y superior, y el cuerpo de datos en celdas. Explicita cada categoría y escribe marcas, numerales, unidades lingüísticas o no.	Relaciona datos y categorías para explicar y comparar. Identifica relaciones y/o patrones surgidos desde la visualización de la tabla.	Monitorea claridad y comprensión. Realiza juicios acerca de la tabla.
Acción implícita	Recorre visualmente la tabla localizando celdas no vacías y relacionando con encabe-zados. Busca y reconoce.	Localiza celdas vacías relacionando encabezados. Identifica, compara, y decide.	Lee, compara, y clasifica para registrar. Focaliza y repite.	Determina espacios a completar. Decide y diseña.	Explora, compara, relaciona, evalúa y desecha o no.	Analiza, monitorea y evalúa. Busca errores o dificultades.
Acción explícita	Busca y señala física u oralmente. Localiza e identifica.	Recorre visualmente localizando celdas vacías a completar relacionando encabezados. Busca, identifica, compara, interpreta y escribe.	Escribe o dibuja marcas, numerales o unidades lingüistas o no, dada una categoría fija tanto de encabezado lateral como superior.	Trazado de segmentos horizontales y verticales, que generan las celdas. Escribe y determina unidades lingüísticas comprimidas en los encabezados lateral y superior.	Justifica relaciones y comparaciones Explica y explicita. Provee respuestas y/o predice.	Expresa la evaluación de la claridad y comprensión del formato y de las relaciones.

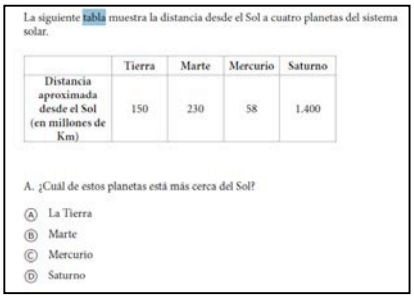
Tabla 1. Roles del sujeto según el esquema activado por la tarea en torno a las tablas.

2) Estudio sobre flujos de lectura

Se realizó un estudio sobre los flujos de lectura activados -en concordancia con los flujos de información en tablas de Janicki (2001)- que incorporaron esquemas de lectura y sus combinaciones, distinguiendo si la respuesta -con o sin operación- estaba en el cuerpo de datos o en sus encabezados (▣); si la respuesta involucraba realizar una completación de la tabla (▣); o si la respuesta generaba otra representación fuera de la tabla dada o una relación algebraica externa o requería el resultado de operaciones más complejas (▢). Asimismo,los flujos consideran la lectura simple (rectángulo) y la no lectura (rectángulo de guiones).

Se realizó una búsqueda de los ítems liberados por el TIMSS (2003, 2007 y 2011) referidos a tablas (Mullis et al., 2012). Se seleccionaron ítems de matemáticas y de ciencias cuyo planteamiento se centraba en el formato tabular.Se eligieron 18 ítems que tras los análisis de dominio cognitivo y los niveles de desempeño que provee TIMSS se restringieron a 8 ítems.Se procedió a clasificar los ítems según los flujos de lectura y el esquema que activaban, como se ejemplifica a continuación.

Ítem



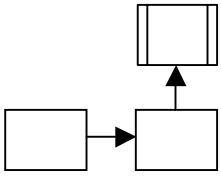
La siguiente tabla muestra la distancia desde el Sol a cuatro planetas del sistema solar.

	Tierra	Marte	Mercurio	Saturno
Distancia aproximada desde el Sol (en millones de Km)	150	230	58	1.400

A. ¿Cuál de estos planetas está más cerca del Sol?

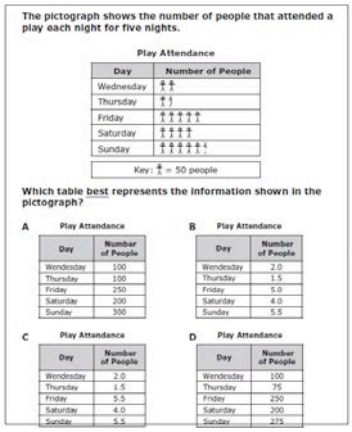
Ⓐ La Tierra
Ⓑ Marte
Ⓒ Mercurio
Ⓓ Saturno

Tabla planetas. (TIMSS, 2007; Ciencias; dominio cognitivo: aplicación; Nivel de desempeño: Alto.)



La tarea solicita buscar un dato en el cuerpo de datos para indicar el encabezado superior de esa celda. Esta tarea requiere la comprensión del encabezado lateral, luego una operación de orden ("el más cercano a") para luego determinar el nombre del planeta dado en el encabezado superior. En el diagrama que señala el flujo de lectura de esta tarea de tabla, se observa un recuadro de línea doble, pues la respuesta está contenida en el encabezado superior, entrada desde encabezado lateral de fila a celda del cuerpo de datos y luego a encabezado superior.

Este ítem se ha clasificado en el nivel 2 pues realiza lectura secuencial, relacionando la colección con los encabezados asociados de la lista. Compara (busca el valor menor) entre las celdas del cuerpo de datos (lista de distancia de cada planeta). Es una lectura que prescinde de algunas celdas del cuerpo de datos y/o encabezados, por ejemplo no requiere leer la última columna.



The pictograph shows the number of people that attended a play each night for five nights.

Play Attendance

Day	Number of People
Wednesday	
Thursday	
Friday	
Saturday	
Sunday	

Key: = 50 people

Which table best represents the information shown in the pictograph?

A Play Attendance

Day	Number of People
Wendesday	100
Thursday	100
Friday	250
Saturday	200
Sunday	300

B Play Attendance

Day	Number of People
Wendesday	2.0
Thursday	1.5
Friday	5.0
Saturday	4.0
Sunday	5.5

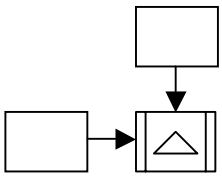
C Play Attendance

Day	Number of People
Wendesday	2.0
Thursday	1.5
Friday	5.5
Saturday	4.0
Sunday	5.5

D Play Attendance

Day	Number of People
Wendesday	100
Thursday	75
Friday	250
Saturday	200
Sunday	275

Ítem de tabla a tabla. (Test DEO, 2008, de Matemática. Nivel de referencia: Intermedio, según TIMMS pues se solicita Identificar el gráfico que relaciona un gráfico dado.)



La tarea solicitada requiere buscar el símil de una tabla con pictogramas (los que debe convertir según una clave dada) entre otras tablas sin pictogramas (con numerales). El flujo de lectura de la tabla indica que se requiere leer secuencialmente desde el encabezado superior (la lista de personas) y asociar con el encabezado lateral (la categoría de la variable día) para convertir a numeral en las celdas del cuerpo de datos.

Este ítem se ha clasificado en el nivel 3 que implica leer la tabla (lectura intensiva) relacionando las categorías de las variables con las listas, la interpretación incluye los cálculos contenidos en la tabla o de los producidos desde ella. Específicamente, incluye formular una tabla similar a la original (mismos encabezados y número de celdas en el cuerpo de datos), realizando una lectura global de la tabla.

Resultados

Se encontró que según las tareas cognitivas exigidas, los test TIMSS y DEO presentaban diferencias en los tipos de ítemes de tablas. El test TIMSS (2003, 2007 y 2011) presentaba tres tipos de tareas: buscar, completar y construir. En cambio, los ítems del test DEO (2008) requerían solo la tarea de búsqueda. Otra diferencia entre los ítems según la taxonomía propuesta, precisa que los ítems TIMSS se clasifican en nivel 2, 3 y 4; en cambio, los ítems DEO ocupan los tres primeros niveles, 1,2 3. Para cada ítem, al cruzar el nivel taxonómico con las tareas cognitivas, el nivel 4 presentó solo la tarea de construir, una habilidad cognitiva más compleja que buscar y completar.Ninguno de los ítemes liberados incluyó un perfil de usuario de interpretador y/o de evaluador.

Conclusiones

El estudio referido a los roles del sujeto y a los flujos de lectura, permitieron precisar los esquemas en acción y los tipos de lectura. Estos hallazgos fueron los insumos principales para

especificar la taxonomía propuesta de Estrella y Mena (2012), inspirada en los trabajos de Curcio (1989) y Aoyama (2007). Se identificaron los tipos de lectura: puntual, secuencial, intensiva y global constructiva. Específicamente, se preciso una lectura total de la tablas para el nivel 4, la lectura total de la tabla, del cuerpo y sus encabezados; para el nivel 3, la lectura intensiva involucra la lectura global de la tabla pero no el detalle; para el nivel 2, la lectura secuencial puede prescindir de algunas celdas del cuerpo de datos y/o los encabezados (superior y/o lateral); y el nivel 1, implica una lectura puntual que prescinde totalmente de los encabezados.

Referencias bibliográficas

Aoyama, K. (2007). Investigating a hierarchy of students' interpretations of graphs. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *2*(3), 298-318.

Curcio, F. R. (1989). *Developing graph comprehension.* Reston, VA: N.C.T.M.

Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G. & Contreras, J.M. (2011). Las Tablas y Gráficos Estadísticos como Objetos Culturales. *Números*, (76), 55–67.

DEO. (2008).Oklahoma School Testing Program.Ítems Specification Mathematics, Grade 5.Recuperado http://arch-alca.s3.amazonaws.com/alca/v3/gsacket/g/eej9BXnJjJ.pdf

Duval, R. (2003). Comment Analyser le FonctionnementRepresentationnel des Tableaux etleurDiversite? *Spirale - Revue de Recherches en Éducation -*, *32*, 7-31.

Espinel, M.C., &Antequera, A.T. (2009). Un estudio sobre la competencia de los alumnos en el manejo de tablas para resolver situaciones cotidianas. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 227-236). Santander: SEIEM.

Estrella, S. & Mena, A. (2012). Hacia una taxonomía de comprensión tabular. Ponencia presentada en SOCHIEM XVI, Santiago, Chile.

Gabucio, F., Martí, E., Enfedaque, J., Gilabert, S. & Konstantinidou, A. (2010). Niveles de comprensión de las tablas en alumnos de primaria y secundaria. *Cultura y Educación*, *22*(2), 183-197.

Janicki, R. (2001). On a formal semantics of tabular expressions.*Science of Computer Programming*, *39*(2), 189-213.

Martí, E., García-Mila, M., Gabucio, F. & Konstantinidou, K. (2010). The construction of a double-entry table: a study of primary and secondary school students' difficulties. *European Journal of Psychology of Education*, *26*(2), 215-234.

Martínez, M. & Brizuela, B. (2006).A third grader's way of thinking about linear function tables.*Journal of Mathematical Behavior*, *25*, 285–298.

Mullis, I. V., Martin, M. O., Foy, P. & Arora, A. (2012). *TIMSS 2011 International Results in Mathematics.* International Association for the Evaluation of Educational Achievement.Herengracht 487, Amsterdam, 1017 BT, The Netherlands.

TIMSS. (2003, 2007 y 2011). Recuperado desde http://timss.org

Anexo I

Nivel 1	Lee las celdas (lectura puntual) o lee las listas (lectura secuencial) para solo asociar el dato con el encabezado superior o lateral (a nivel local). Es una lectura puntual que atiende al dato de la celda y/o de la lista, pero sin interpretación. Puede operar, pero no compara ni interpreta, y prescinde totalmente de los encabezados (la variable y sus categorías).
Nivel 2	Lee la lista (lectura secuencial) para relacionar los datos con los encabezados de la lista. Es una lectura que atiende a los encabezados, a la estructura básica de la tabla y a las relaciones contenidas en ella. Compara e interpreta entre listas (dispuestas en columnas o filas), incluye operar con los datos de las celdas, y prescinde parcialmente de algunos datos y/o encabezados.
Nivel 3	Lee la tabla (lectura intensiva) para relacionar los encabezados con las listas (dispuestas en columnas o filas) a nivel global de la tabla. Interpreta y compara los cálculos contenidos en la tabla o los producidos desde ella, utiliza su conocimiento del contexto externo o interno de los datos. Incluye reformular -desde la tabla- otra tabla similar.
Nivel 4	Lee más allá de la tabla (lectura total constructiva) involucra una lectura total de la tabla, de los datos y sus encabezados. Incluye formular otra representación (algebraica, o gráfica, o tabular o semi-tabular) en base a la totalidad de la tabla o de la lista. También evalúa el diseño de la tabla, o su grado de comunicabilidad, o su efectividad en apoyar un punto de vista.

Propuesta de una Taxonomía Tabular (versión 4)

LA MATEMÁTICA EN LA PINTURA COSTARRICENSE: UN PRIMER ACERCAMIENTO

Jesennia Chavarría Vásquez
Universidad Nacional Costa Rica
jessenia.chavarria.vasquez@una.cr

Resumen. El objetivo de la investigación consistió en determinar las formas en que la matemática puede influir en la pintura costarricense, lo cual permite contextualizar la matemática para su enseñanza y aportar en el desarrollo del conocimiento de esta disciplina.Las técnicas utilizadas para la investigación fueron, entrevista semiestructurada, entrevista a profundidad, análisis de textos. Los principales resultados detallan la necesidad de considerar previo a abordar la relación entre la matemática y la pintura costarricense, la presencia de elementos geométricos o aritméticos, elementos de diseño y composición, presencia de elementos geométricos y su impacto sensorial, y los efectos de la utilización de las tecnologías
Palabras clave: *matemática, interdisciplinariedad, pintura*
Abstract. The objective of this research was to determine the ways mathematics can influence Costa Rican painting. This allows to contextualize mathematics teaching and collaborates with its development. The following techniques were utilized in this research: Semi estructured interview, in-depth interview and text analysis.
The main findings of this research reveal the need to consider, prior to address the relationship between mathematics and Costa Rican painting, the presence of geometric or arithmetic elements of design and composition, presence of geometric elements and their sensory impact, and the effects of the use technological tools
Key words: *mathematics, interdisciplinary, painting*

Introducción

La reflexión sobre la influencia que tiene la matemática sobre otras disciplinas, y cómo éstas nutren el quehacer matemático, ha tomado auge en la sociedad actual a partir de la multi, inter y transdisciplinariedad.

Al preguntarnos sobre la relación entre la matemática y la pintura, surge como respuesta natural el pensar en el uso del espacio, de las simetrías, de las proporciones y de la perspectiva; lo cual a pesar de no aislarse de la realidad, no profundiza o determina realmente los alcances que ambas disciplinas tienen entre sí.

Corrales (2000), en su obra Un paseo por el siglo XX de la mano de Fermat y Picasso, insta a la sociedad a realizar un cambio de imagen de las matemáticas, evidenciando su aporte y relación con otras disciplinas, más allá de su papel en el desarrollo científico y tecnológico, pues según considera este autor:

> No puede haber verdadera transmisión de cultura si no somos conscientes de qué contribuye a la evolución y construcción de esta cultura. Y qué duda cabe de que la contribución de la mirada matemática al desarrollo del proceso de abstracción que han seguido las artes y ciencias en nuestra cultura occidental ha sido y está siendo fundamental. (Corrales, 2000: 4)

Particularmente, la relación entre matemática y pintura tiene sus orígenes desde el Renacimiento, incluso desde épocas anteriores; no obstante, a nivel nacional no se ha profundizado sobre dicha relación particularizada a obras pictóricas costarricenses.

Por lo anterior, y en búsqueda de lograr contextualizar la matemática a través de otras disciplinas, que colabore no sólo con su enseñanza sino que aporte al desarrollo del conocimiento, se estableció como objetivo general de la investigación el determinar la forma o formas en que la matemática puede influir en la pintura costarricense.

Los objetivos específicos planteados para la investigación consistieron en:

1. Identificar en pintores costarricenses su perspectiva sobre el uso o influencia de la matemática en sus creaciones pictóricas
2. Indagar sobre los aspectos matemáticos presentes en el diseño o composición de las pinturas
3. Identificar líneas de investigación en torno a la influencia de la matemática en la pintura costarricense

Matemática en la pintura

El recorrido histórico de la pintura de la mano de la matemática inicia, según Pérez (2001), desde la pintura rupestre; dado que desde esta época surgen manifestaciones del ser humano por expresar el espacio en forma gráfica, esta necesidad de expresión continua en las culturas griega y romana. Por otra parte, Pérez (2001) resalta la aparición de la volumetría de los cuerpos en los trabajos decorativos presentes en los siglos III y IV respectivamente. En el siglo XV, a finales de la Edad Media, se resuelven las primeras dificultades de la representación tridimensional mediante la prolongación de líneas que convergen.

Según Martínez (2011) en su obra titulada Para entender la Perspectiva: Historia, pintura, geometría y literatura, la discusión entre las relaciones existentes entre conocimiento y disciplina, inicia desde el siglo VII, donde siete disciplinas constituían las artes liberales: gramática, retórica y dialéctica, aritmética, geometría, música y astronomía.; en las cuales la matemática está presente en las últimas cuatro. En el siglo XII, por su parte, se organiza el conocimiento a través del cuadrivio que constituye el conocimiento que ilumina el intelecto y el trivio conformado por las disciplinas que dan una expresión elegante, racional, adornada. En esta clasificación la mecánica, la óptica, la pintura y la arquitectura no estaban incluidas, de hecho fueron aceptadas como disciplinas hasta el Renacimiento.

Según Martínez (2011),

La creciente influencia del neoplatonismo en el Renacimiento generó mayor sustento a la idea de que las matemáticas, además de útiles, constituían el elemento clave de todas las ciencias y de muchas de las artes, casi antecediendo con ello a Galileo. Este auge de las matemáticas vino acompañado por todos los nuevos usos a los que dio lugar y que hizo de ellas algo socialmente útil. (Martínez, 2011, p.1).

En el siglo XV, en los albores del Renacimiento se evidencia una clara relación entre la pintura y la geometría, distinguiendo al arte de esta época el "esfuerzo de someter la experiencia visual a un orden racional geométricamente establecido" (Martínez, 2011, p. 2). Más aún, en este siglo se creó, según Martínez, un espacio-sistema en el que los objetos presentan ubicaciones precisas y se organizan de forma ordenada y unitaria, lo cual es posible sólo a través del uso de la geometría, a partir de una perspectiva lineal o artificial. Aquellos que observaban u observan un cuadro de esta época pueden maravillarse de la precisión en las obras respecto a la representación de la realidad, de forma que es sumamente difícil poder distinguir entre la realidad y dicha representación.

Precisamente a quien se le atribuye la introducción de esta nueva concepción del arte es al pintor Leon Battista Alberti, en su obra De Pictura, del año 1435. Alberti y en general, el Renacimiento pretendió, "promover el artista, del artesano que era, a la posición de una persona docta, con el refinamiento intelectual suficiente para satisfacer las demandas de un arte que consideraba virtualmente una rama de la filosofía" (Martínez, 2011, p. 2) . Este recorrido iniciado por Alberti, llega a su culmen cuando John Dee, en su prefacio a los "Elementos" de Euclides 3 en el año 1570, posiciona la perspectiva como una de las ciencias y artes derivadas en su clasificación de las ciencias y las artes matemáticas.

En el siglo XXI, la perspectiva es un centro de discusión multidisciplinario, en donde resolver cuestionamientos sobre si ésta es parte de la filosofía o de la geometría, o si es un código, un sistema semiótico, un lenguaje o una rama de la geometría sólo pueden ser contestadas a través de la participación de diversas disciplinas.

Corrales (2000) realizó un análisis a partir de la obra de Picasso identificando sus correlaciones indiscutibles con el avance matemático contemporáneo de la mano de Fermat, haciendo hincapié en la forma en la cual matemáticos y pintores influyen y dan testimonio de cómo se mira en un momento dado. En dicho análisis, Corrales aporta ejemplos concretos de la interrelación entre ambas disciplinas, uno de ellos, es la evolución en la noción matemática de espacio desde la imagen del espacio cúbico; este concepto es introducido por Newton y mejorado por Euler durante el siglo XVII, y replanteado considerándose actualmente como la definición más adecuada

de espacio, por Hausdorff en el año 1914 y precisamente en forma contemporánea, Velásquez y Kandinsky plasman en sus obras dicha noción en el primer caso a través del cubismo y en el segundo caso, espléndidos espacios abstractos de las acuarelas como espacios red de relaciones, luz, color o forma de los impresionistas.

Otro ejemplo, brindado por Corrales es la ya mencionada relación entre Fermat y Picasso, particularmente el teorema de Fermat demostrado por Wiles en el año 1994, en cuya demostración utiliza estrategias y resultados obtenidos sobre la resolución de ecuaciones desarrolladas a lo largo del siglo XX. Corrales argumenta que dicha demostración dada por Wiles y los cuadros de Picasso, además de asombrar a la sociedad durante el siglo XX, reflejan la óptica desde la cual matemáticos y pintores visualizan el mundo

Metodología

La investigación realizada es de carácter cualitativo (Denzin y Lincoln, 2005), y utiliza como métodos la entrevista semiestructurada, la entrevista a profundidad y el análisis de textos y documentación. Es descriptiva, en tanto que, se pretende una representación del fenómeno estudiado a partir de sus características y de percepciones plausibles.

La investigación consideró las siguientes estrategias metodológicas:

1. Selección de la población

2. Revisión bibliográfica

3. Diseño, validación y análisis de entrevistas semiestructuradas

4. Diseño, aplicación y análisis de entrevistas a profundidad

5. Análisis de los resultados finales para identificar y caracterizar las conclusiones detectadas a partir de la aplicación de ambas entrevistas.

Los participantes fueron 20 pintores, escogidos por conveniencia, a través de la saturación teórica, a los cuales se les aplicó la entrevista semiestructurada. Este instrumento se planteó para responder al primer objetivo de la investigación, es decir, responder a la interrogante sobre ¿cómo visualizan o valoran pintores costarricenses el aporte de la matemática en la construcción de sus obras? La mayoría de los pintores entrevistados cuentan con una vasta experiencia en su área, superior a los quince años. Las técnicas que utilizan en sus pinturas abarcan el óleo, acrílico, carbón, tizas, plumilla, tinta china y acuarela.

Por otra parte, se aplicaron dos entrevistas a profundidad, siguiendo también el criterio de conveniencia, una de ellas al director de la Escuela de Arte y Comunicación Visual de la

Universidad Nacional, el cual es máster en Artes Visuales (2003) y desde el 2004 dedica parte de su tiempo a impartir clases de dibujo, pintura y gráfica en la Escuela de Arte y Comunicación Visual de la UNA. La otra entrevista se aplicó a una académica de la Escuela de Arte y Comunicación Visual de la UNA, docente del taller Dibujo y Metodología del Diseño.

Las entrevistas a profundidad se aplicaron con el propósito de responder al segundo y tercer objetivo de la investigación, en tanto que se requería visualizar los componentes de una pintura que pueden ser analizados o influenciados por la matemática e identificar líneas de investigación en torno a la influencia de la matemática en la pintura costarricense.

Algunos resultados

A partir de la aplicación de la entrevista semiestructurada a los pintores se obtuvieron los siguientes resultados:

1. La matemática que la mayoría de los pintores dice utilizar en el diseño de sus obras, es una matemática instrumental, basada en simetría, ubicación en el espacio, uso de figuras geométricas, medición, porcentajes, proporciones, ampliación de un dibujo a escala.
2. El uso de la matemática en la realización de sus pinturas es considerado necesario, por la mayoría de pintores, puesto que la matemática es visualizada como parte esencial de la estética de las pinturas, en tanto que les da equilibrio, perspectiva, detalle, entre otros. No obstante, la mayoría de los entrevistados dice no utilizar la matemática conscientemente.
3. Existe un desconocimiento, por parte de la mayoría de los pintores entrevistados (a excepción de cuatro artistas) sobre del desarrollo de la pintura costarricense utilizando conscientemente la matemática en el diseño y composición de las obras. La mayoría conoce el trabajo de Leonardo Da Vinci, Salvador Dalí, y en menor medida de Picasso y Diego Velásquez, pero desconocen el trabajo realizado por pintores costarricenses que enfocan sus obras en matemática, o bien que involucran conscientemente matemática en sus pinturas.

Por otra parte,en las entrevistas a profundidad se obtuvieron los siguientes resultados:

1.Existen diversas formas en las cuales es posible determinar la matemática utilizada en una creación pictórica

Entre las principales estrategias para determinar o visualizar la matemática utilizada en una pintura se pueden mencionar:

a) Identificar la utilización de elementos geométricos, aritméticos, entre otros, que forman parte de la obra

b) Analizar los elementos matemáticos presentes en el diseño y composición de la obra

c) Identificar la matemática presente en la tecnología utilizada para la creación de la obra. Es decir, cómo las fórmulas y algoritmos se posicionan en las técnicas artísticas clásicas, por ejemplo en el arte fractal.

Este aspecto es indispensable, puesto que según la entrevista a J.P.Solís, al analizar una pintura puede ocurrir que a simple vista no se visualicen elementos geométricos o matemáticos presente en las obras, sin embargo, un experto en arte puede identificar a nivel de diseño y composición dichos elementos. (P.Solís, comunicación personal, 21 de setiembre de 2012)

1. Para el análisis de obras artísticas en pintura, desde el punto de vista matemático, es necesario tener claro el concepto de matemática o elemento matemático que se analizará en la obra, y desde qué perspectiva, es decir, desde el diseño y composición, desde la representación simbólica o desde el impacto sensorial de los elementos matemáticos presentes en la obra

a) Representación Simbólica

Por ejemplo, los artistas del Arte Pop Jasper Johns y Robert Indiana utilizan números en sus obras, en este caso interesaría el significado de dichos símbolos y su utilidad artística para el sentido global de la obra.

b) Diseño y Composición

Si el interés está basado en la matemática utilizada a nivel de diseño y composición de la obra, la atención se dirigirá a los métodos y técnicas para el tratamiento de la perspectiva y el visado. Según la académica Priscila Romero de la Escuela de Arte y Comunicación Visual de la UNA, uno de los métodos que se enseñan en el primer curso de Dibujo y Metodología de Diseño es el método Basilea. (P.Romero, comunicación personal, 20 octubre, 2012)

El propósito de este método es orientar a los estudiantes en la abstracción de la realidad a través de formas prismáticas, es decir, geometrizar el espacio, es decir, transcribir una realidad tridimensional a la bidimensión, el tratamiento de la perspectiva y de la estandarización del mundo a través de la geometría.

En toda perspectiva, ya sea elaborada por un artista o por alguien con dominio de los métodos perspectivos, siempre se encontrarán cuatro elementos básicos: línea de horizonte, línea de tierra, punto o puntos de fuga y líneas de fuga. Es importante resaltar que estos cuatro elementos siempre estarán en una perspectiva, pero nunca serán visibles pues corresponden a líneas de procedimiento que desaparecen una vez que se ha elaborado el objeto en perspectiva.

c) Impacto Sensorial de los elementos matemáticos

Otra forma para el abordaje de las relaciones entre matemática y la pintura costarricense, extraída de la entrevista a la académica Romero, consiste en la interpretación de una obra pictórica por medio de las leyes de la Gestalt. La Gestalt es una Escuela psicológica desarrollada en Alemania en oposición al estructuralismo y al conductismo naciente en los Estados Unidos a principios del siglo XX. Esta Escuela basa sus principios en la idea de que la mente configura los elementos que llegan a ella a través de los sentidos o de la memoria a partir de leyes.

Según lo ilustra la académica Romero, dichos principios establecen una relación, por ejemplo, entre las figuras geométricas y las sensaciones producidas a partir de las mismas, como por ejemplo el triángulo con la sensación de perfección. (P.Romero, comunicación personal, 20 octubre, 2012)

1. Otro de los resultados, a partir de dichas entrevistas consistió en la identificación de futuras líneas de investigación que vinculan la pintura costarricense con la matemática, entre las que se pueden mencionar las divergencias y convergencias entre pintores con formación académica y autodidácticas en el uso de elementos matemáticos en el diseño y composición de obras; la matemática utilizada a nivel de composición en las obras de un pintor o de una época determinada, el impacto sensorial de elementos matemáticos presentes en las obras de uno o más pintores costarricenses, entre otros.

Conclusiones

A partir de los resultados obtenidos, se pueden establecer las siguientes conclusiones:

1. Para realizar una investigación que determine las relaciones existentes entre la matemática y la pintura costarricense es necesario clarificar el concepto de matemática del cual va a partir la investigación.
2. Cuatro aspectos a considerar para abordar la relación e influencia entre la matemática y la pintura costarricense son: la presencia de elementos geométricos o aritméticos en las obras, los elementos de diseño y composición, la presencia de elementos geométricos y su impacto sensorial, la incursión de la tecnología.
3. A partir del punto anterior, surgen como opciones de investigación las relaciones entre pintores con formación académica y pintores autodidáctas en el uso de elementos de diseño y composición. O bien, enfocar la investigación en una época y analizar los elementos de diseño y composición presentes, o el análisis de una obra a través de su composición en figuras geométricas, la influencia o presencia de ciertas figuras geométricas respecto a las sensaciones que produce, es decir, dinamismo, rigidez, entre otros.

4. El realizar investigaciones en esta temática, puede aportar importantes resultados para la enseñanza de la matemática, especialmente en la actualidad en donde se pretende contextualizar el conocimiento que se enseña.

Referencias bibliográficas

Corrales, C. (2000). *Un paseo por el siglo XX de la mano de Fermat y Picasso*. Madrid: Consejo social de la Universidad Complutense(Depto de Álgebra).

Denzin, N. K. y Lincoln, Y. S. (eds.) (2005). *The Sage Handbook of Qualitative Research*. Londres: Sage.

Gadamer, H-G. (2001). *Verdad y método I*. Salamanca: Sígueme.

Martínez, R. (2011). Para entender la perspectiva. Historia, pintura, geometría y literatura. *Ludus Vitalis*, 19(35).

Pérez, J. (2001). *Secuencias Gráficas de Perspectiva*. Instituto Politécnico Nacional: México.

RESCATANDO LOS POLIEDROS DE ARQUÍMEDES

Mario Dalcín y Verónica Molfino
Departamento de Matemática. Consejo de Formación en Educación. Uruguay
mdalcin00@gmail.com, veromolfino@gmail.com

Resumen. ¿Por qué prismas y poliedros regulares tienen un rol protagónico en la matemática escolar? Los poliedros arquimedianos, ¿pueden ser relevantes para su inclusión en la matemática escolar de Educación Secundaria y Formación de profesores? En este taller proponemos reconocer y visualizar poliedros semirregulares con el uso del programa Poly Pro, descubrir y describir algunas de sus propiedades, identificar cuáles de ellos son arquimedianos, analizar las relaciones entre esta familia de poliedros y los poliedros regulares, explorar maneras de construirlos -a partir del análisis de grabados del artista renacentista W. Jamnitzer-, conjeturar acerca de la cantidad de elementos de esa familia y ensayar diferentes justificaciones. Es decir, proponemos una actividad que favorezca el tránsito entre los niveles 0, 1 y 2 propuestos por Van Hiele en el contexto de la geometría euclidiana del espacio, articulada a su vez con la forma de concebir la actividad geométrica de Kuzniak, a través de paradigmas caracterizados por el interés por resolver problemas específicos

Palabras clave: paradigmas, poliedros arquimedianos, tránsito entre niveles

Abstract. Why prisms and regular polyhedra play a leading role in school mathematics? May Archimedean polyhedra be relevant for inclusion in school mathematics Secondary and Teacher Educaion? In this workshop we propose to recognize and visualize semiregular polyhedra using Poly Pro program, discover and describe some of their properties, identify which ones are Archimedean, analyze the relationship between this family of polyhedra and regular polyhedra, explore ways to build them -from the analysis of Renaissance artist prints W. Jamnitzer-, make conjectures about the number of elements of that family and try different justifications. That is, we propose an activity that promotes the transition between levels 0, 1 and 2 proposed by Van Hiele in the context of Euclidean geometry of space, articulated in turn with Kuzniak's way of conceiving geometric activity, through paradigms characterized by the interest in solving specific problems

Key words: paradigms, Archimedean polyhedra, transit between levels

Introducción

Explorando currículos de Enseñanza Secundaria de diferentes países encontramos que en la mayoría de ellos se sugiere el tratamiento de los poliedros regulares, prismas y pirámides. En particular, en los programas de Uruguay se encuentran también "Posiciones relativas entre rectas y planos en el espacio", "Paralelismo" y "Perpendicularidad" como contenidos a ser desarrollados independientemente de su aplicación a los poliedros y en forma abstracta, es decir con un rigor deductivo mayor del que los estudiantes pueden desarrollar por sí mismo o incluso entender.

Frente a esta situación nos cuestionamos: ¿por qué prismas y poliedros regulares tienen ese rol protagónico dentro de los poliedros? ¿Qué otras familias de poliedros pueden ser relevantes para su inclusión en la matemática escolar de Educación Secundaria? En ese sentido, y buscando una manera de organizar estos contenidos para un curso de Geometría en el primer año de la carrera de Profesorado de Matemática en el Instituto de Profesores 'Artigas' de Montevideo, utilizamos como criterio de clasificación de poliedros el hecho de que sus caras sean polígonos regulares.

Así, los poliedros regulares, por ejemplo, se encuentran dentro de la familia 'poliedros cuyas caras son polígonos regulares de un solo tipo'. Pero, continuando con la clasificación, propusimos la familia 'poliedros cuyas caras son polígonos regulares de más de un tipo'… De esta forma, nos podemos cuestionar:

- ¿Existen prismas cuyas caras sean polígonos regulares de más de un tipo? ¿Y antiprismas? ¿Y pirámides? ¿Cuántos?
- ¿Existen otros tipos de poliedros con caras polígonos regulares de más de un tipo? ¿Cuáles y cómo son?

Buscando responder estas preguntas, diseñamos una serie de actividades que son las que proponemos en este taller. Desde hace tres años, estas mismas actividades son propuestas también a los estudiantes de primer año de Profesorado de Matemática en su curso de Geometría Euclidiana. Se centran en reconocer y visualizar poliedros semirregulares con el uso del programa Poly Pro, descubrir y describir algunas de sus propiedades, identificar cuáles de ellos son arquimedianos, analizar las relaciones entre esta familia de poliedros y los poliedros regulares, explorar maneras de construirlos -a partir del análisis de algunos grabados del artista renacentista W. Jamnitzer-, conjeturar acerca de la cantidad de elementos de esa familia y ensayar diferentes justificaciones.

¿Cómo concebir la geometría y la actividad geométrica?

Houdement y Kuzniak (1999) proponen tres geometrías:

Geometría I. La geometría natural. La fuente de validación es la realidad, el mundo sensible. Hay una cierta confusión entre el modelo y la realidad. La deducción se hace centralmente mediante la percepción y el uso de instrumentos.

Geometría II. La geometría axiomática natural. La fuente de validación se basa sobre lo hipotético deductivo en un sistema axiomático lo más preciso posible. Pero dicho sistema axiomático se mantiene lo más fiel posible a la realidad.

Geometría III. La geometría axiomática formalista. Se cortan los lazos de la geometría con la realidad. El razonamiento lógico se impone y los axiomas no se basan en lo sensible, en lo real.

Estas tres geometrías nos dan un marco desde el cual dar cuenta de toda la geometría, desde la que se trabaja en la enseñanza primaria hasta aquella con la que trabaja un matemático. Lejos de pensar una jerarquía entre estos paradigmas de pensamiento geométrico, los autores postulan tres geometrías posibles, tres enfoques distintos de un mismo hecho, pero donde ninguno niega a los otros. Las prácticas permiten ver en cuál se está trabajando en cada momento, son tres

dimensiones distintas: el camino deductivo es uno de esos caminos (Geometría II), pero también puede ser el de constatar mediante mediciones (Geometría I), o validar al interior de un sistema axiomático formal (Geometría III). Esto permite concebir la formación de un estudiante en el ámbito de la geometría como un tránsito continuo entre estas tres dimensiones.

Entendemos que este modelo puede ser de utilidad para entender el trabajo geométrico de los estudiantes de profesorado y así poder contribuir a su desarrollo. Específicamente, en las clases hemos observado que las producciones de nuestros estudiantes al iniciar sus estudios de profesorado y en lo que hace referencia a temas de geometría del espacio, se ubican dentro de la Geometría I, pero con la dificultad extra que implica la representación (plana o espacial) de figuras tridimensionales. Aspiramos a que el tipo de actividades que proponemos en este taller promueva un tránsito entre las otras dimensiones.

Por otro lado, en Kuzniak (2006) se presenta una articulación entre esta manera de concebir la actividad geométrica y la teoría del desarrollo del pensamiento geométrico desarrollada por Van Hiele (1986). La consideración de cómo los estudiantes transitan entre los niveles de pensamiento geométrico (0: visualización, 1: análisis, 2: deducción informal, 3: deducción formal y 4: abstracción) enriquece el modelo de los paradigmas geométricos, permitiendo diseñar secuencias para la matemática escolar.

La actividad que se propone en el taller fue pensada para facilitar el tránsito entre los niveles 0, 1 y 2 de la teoría de van Hiele en un contexto que tan áspero suele resultar para los estudiantes, como el de la geometría euclidiana del espacio.

Algunas actividades propuestas y su justificación

Actividades 1, 2 y 3

a) ¿Hay prismas/antiprismas/pirámides cuyas caras sean todos polígonos regulares de un solo tipo? En caso de que sí, ¿cuántos?

b) ¿Hay prismas/antiprismas/pirámides cuyas caras sean todos polígonos regulares de más de un tipo? En caso de que sí, ¿cuántos?

Esta es una actividad enmarcada en el nivel 0 de los propuestos por Van Hiele (1986), con el objetivo de que los estudiantes reconozcan y visualicen poliedros con condiciones dadas: por ejemplo, para el caso de los prismas (actividad 1), deberán en primer lugar visualizar la familia de los prismas (puede ser imaginándola o una representación concreta, en libro, Internet o software como el PolyPro). Y, dentro de ella, identificar cuáles elementos verifican además que sus caras son polígonos regulares de un solo tipo, o más de un tipo, según lo solicitado.

Actividad 4

- En esta actividad analizaremos las siguientes propiedades de algunas familias de poliedros: Poliedro convexo.
- Sus caras son polígonos regulares.
- Sus caras son uniformes (iguales entre sí).
- Sus aristas son uniformes (todas están incluidas en el mismo par de caras).
- Sus vértices son uniformes (concurren la misma cantidad de caras, del mismo tipo y en el mismo orden).

A continuación se propone una tabla de doble entrada: en las columnas las propiedades y en las filas las familias: poliedros platónicos, arquimedianos, prismas, antiprismas, pirámides, deltaedros, bipirámides, de Johnson y de Catalán.

Asimismo, se aclara que en casos en que las caras pueden o no ser polígonos regulares (como prismas o antiprismas), se considerará la subfamilia formada por los que sí las tienen.

Esta actividad tiene por objetivo favorecer el tránsito entre niveles 0 y 1 de la teoría de Van Hiele (1986): a partir de la visualización de cada elemento de cada familia, se deben reconocer sus elementos, las diferencias y semejanzas entre los mismos miembros de una familia, y comprobar, a partir de un análisis de cada uno, si la familia verifica o no una determinada propiedad. De esta manera, se descubrirá, entre otras cosas, que los únicos que verifican todas las propiedades son los platónicos y que los deltaedros tienen caras regulares y uniformes y aristas uniformes pero sus vértices no lo son. Y, en particular, se reconocerá algo que nos permitirá definir a los arquimedianos: que las familias que verifican tener caras regulares y vértices uniformes a la vez son solamente los arquimedianos, prismas y antiprismas. De esta manera, definimos:

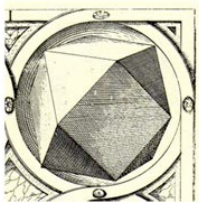
- Llamaremos *poliedros semirregulares* a los poliedros convexos que tienen caras polígonos regulares (de uno o varios tipos) y con vértices uniformes.
- Llamaremos *poliedros arquimedianos* a los poliedros semirregulares que no sean regulares (platónicos), ni prismas, ni antiprismas.

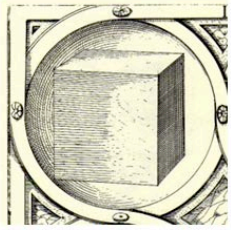
En la propuesta de las actividades 5 a 10, 15 y 16 utilizamos imágenes tomadas del libro *Perspectiva corporum regularium*, publicado en Nuremberg en 1568 y cuyo autor es Wenzel Jamnitzer (1508–1585)

Exponemos a modo de ejemplo algunas de ellas:

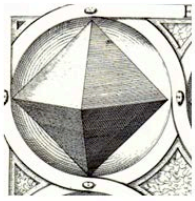
Actividad 5

a) Marca en la figura que representa el cubo cómo lo truncarías para obtener el poliedro representado en esta imagen:



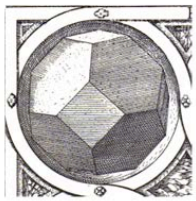


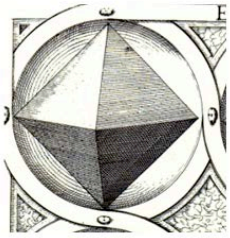
b) Ahora considera el mismo tipo de truncamiento para el octaedro: ¿Qué poliedro obtendrías?

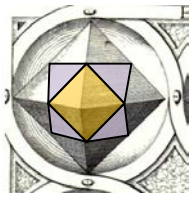


Actividad 9

Marca en la figura que representa el octaedro regular cómo lo truncarías para obtener el poliedro representado en esta imagen:







En este tipo de actividades se recorren posibles truncamientos por puntos medios de aristas y puntos que las dividen en tres partes iguales, para los cinco poliedros platónicos. Se analizan todos los casos posibles, lo que implica un tránsito entre los niveles 1 (análisis) y 2 (deducción informal).

Por ejemplo, en la actividad 5, cuando se pide truncar al octaedro por puntos medios, los estudiantes cuentan con herramientas teóricas para demostrar que uno de los tipos de caras obtenido es triángulo equilátero (los lila en la figura): utilizan el concepto previamente abordado de paralela media.

Sin embargo, si bien pueden deducir que el cuadrilátero naranja tiene cuatro lados de igual medida, no cuentan con herramientas teóricas para demostrar que es plano, ni tampoco que es un cuadrado. Por lo que estaríamos admitiendo una deducción de tipo informal, pero bajo un tipo

de actividad propia del paradigma II, según el modelo de Houdement y Kouzniak (1999). Esas herramientas teóricas se abordan después en el curso. En el caso del taller, todos los asistentes, profesores de Educación Media e investigadores en Matemática Educativa, contaban con ellas por lo que pudo elaborarse una reflexión al respecto.

Dentro de este análisis de casos, proponemos algunos truncamientos que no conducen a la obtención de un poliedro arquimediano, como por ejemplo en la siguiente actividad:

Actividad 11

a) Si consideramos el mismo tipo de truncamiento que en la Actividad 9 (por puntos que dividen a las aristas en tres partes iguales) para el cubo, ¿se obtiene un poliedro arquimediano? ¿Por qué?

b) ¿Y para el dodecaedro?

Y, a continuación, una alternativa para sugerir otro tipo de truncamientos a los ya analizados:

Actividad 12

Vimos que truncando el cubo por los puntos "al tercio" de sus aristas no se obtiene un arquimediano. Ahora, ¿es posible, considerando algún otro par de puntos que separe a la arista en tres partes no necesariamente iguales, construir uno que sí lo sea? ¿Cómo? Explica cómo construir, a partir de la arista, los segmentos que permitirían hacer tal truncamiento.

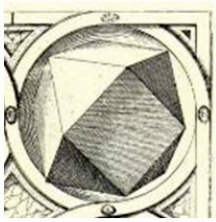
Esta actividad requiere otro tipo de procesos cognitivos diferentes a los ya evocados: el cálculo de medidas y la construcción en verdadera magnitud.

Por último, y dado que con este tipo de truncamiento no se pueden obtener todos los poliedrosarquimedianos, proponemos una actividad que conduce a una nueva forma de construirlos:

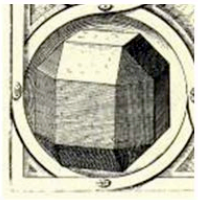
Actividad 15

En nuestra búsqueda de poliedros arquimedianos, un camino posible sería ahora considerar truncamientos de los que ya tenemos, por ejemplo por los puntos medios de sus aristas.

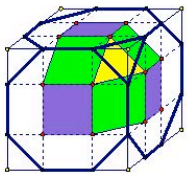
Consideremos por ejemplo el cuboctaedro: ¿se obtiene un poliedro arquimediano al truncar por los puntos medios de sus aristas?



Obtenemos algo parecido a esto, ¿no?



Adjuntamos ahora otra figura que puede sugerir un camino posible:



Explica con tus palabras cómo se haría.

Reflexiones finales

Las actividades propuestas en el taller fueron disparadoras de reflexiones interesantes entre los asistentes: se reconoció el valor de las mismas como favorecedoras del tránsito entre los niveles 0, 1 y 2 propuestos por Van Hiele. Asimismo, los asistentes pudieron identificar en sus propias producciones, características del paradigma II (en el cual están acostumbrados a situarse en su rol de profesores e investigadores), pero también características del paradigma I, lo que resultó removedor.

Quienes hemos estudiado ya varios años de Matemática, solemos pensar que ya no validamos afirmaciones sólo mediante la percepción o la medición, hasta que nos enfrentamos frente a un problema no analizado previamente, y que se encuentra fuera de lo tradicionalmente institucionalizado y difundido en la matemática escolar. Estas actividades referidas a poliedros arquimedianos son un ejemplo de ello.

Por último, consideramos que la inclusión de los poliedros arquimedianos en la formación de profesores y en la Enseñanza Media es una buena forma de mantener viva la obra de Arquímedes (287 a.C.-212 a.C.) a más de 2200 años de su muerte. El taller que presentamos propone una forma de hacerlo.

Referencias biblográficas

Houdement, C. y Kuzniak, A. (1999). Geometríe et paradigmenes geometriques. *Petit x*, 51, 5-21.

Jamnitzer, W. (1568). *Perspectiva corporum regularium*. Nuremberg

Kuzniak, A. - Equipe Didirem Université Paris VII. (2006). *Paradigmes et espaces de travail geometriques. Elements d'un cadre theorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en geometrie*. Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education. 6 :2, April 2006, pp. 167 – 187.

Van Hiele, P.M. (1986). *Structure and insight. A theory of mathematics education.* Orlando, FL: Academic Press.

DEMOSTRACIONES Y CONSTRUCCIONES ELABORADAS POR ESTUDIANTES DE PROFESORADO A PARTIR DE UNA CLASIFICACIÓN DE CUADRILÁTEROS

Mario Dalcín y Verónica Molfino
Instituto de Profesores 'Artigas', Departamento de Matemática del Consejo de Formación en Educación Uruguay
mdalcin00@gmail.com, veromolfino@gmail.com

Resumen. Se describe y fundamenta una secuencia de actividades llevada a cabo con tres grupos de estudiantes de primer año de Profesorado del Instituto de Profesores 'Artigas' (Montevideo), en su curso regular de Geometría Euclidiana. El objetivo de la misma fue indagar sobre la posibilidad de construcción o justificación de inexistencia de cuadriláteros generados a partir de una clasificación de los mismos tomando como criterio la cantidad y posición de lados iguales, de ángulos iguales y de segmentos de diagonal iguales. Proponemos esta serie de actividades acorde a una modalidad de trabajo que consideramos necesaria en la formación de profesores: los estudiantes son quienes construyen conocimiento, en particular conocimiento que no puede ser encontrado usualmente en libros de texto u otras referencias. Sostenemos que con este tipo de experiencias, los estudiantes, futuros profesores de Matemática, no sólo se van formando en lo que hace a su conocimiento matemático, sino también en lo que hace a su concepción de qué es ser docente y cómo ponerlo en práctica

Palabras clave: demostración, construcción, clasificación de cuadriláteros

Abstract. In this report a sequence of activities carried out with three groups of first-year students of the Institute of Teachers Teachers 'Artigas' (Montevideo), in its regular course of Euclidean Geometry, is described and based. The purpose of it was to inquire about the possibility of construction or justification for absence of quadrilaterals generated from a classification of them using as criteria the number and position of equal sides, equal angles and equal diagonal segments. We propose this series of activities according to a way of working that we consider necessary in the initial training of teachers: students are those who construct knowledge, especially knowledge that cannot usually be found in textbooks or other references. We argue that with these experiences, students, future teachers of mathematics, are formed not only in regard to their mathematical knowledge, but also in regard to his conception of what being a teacher and how to implement it

Key words: proof, construction, quadrilaterals classification

Introducción

Los estudiantes que inician su formación como profesores de matemática de enseñanza media en el Instituto de Profesores "Artigas" (IPA, Montevideo – Uruguay), enfrentados a la tarea de nombrar y dibujar todos los cuadriláteros que conocen, incluyen en su lista a cuadrado, rectángulo, rombo, paralelogramo, paralelogramo tipo, trapecio, trapecio isósceles, trapecio birrectángulo, trapezoide, romboide… Reuniendo todas sus respuestas, la lista nunca sobrepasa la docena de nombres. Dado que estos son los cuadriláteros que generalmente se presentan en Enseñanza Primaria, las respuestas de los estudiantes nos sugieren que durante su formación posterior ha sido reforzada la idea de que esos son los únicos cuadriláteros que existen. Primer problema: los estudiantes conocen un número restringido de familias de cuadriláteros. (Dalcín, 2006; Dalcín y Molfino, 2011a)

Si a estos estudiantes se les pide que definan cada uno de los cuadriláteros que previamente nombraron, la diversidad de definiciones que surgen en el colectivo de estudiantes que inician su

formación como docentes de matemática de Enseñanza Media es abrumadora: la totalidad de las definiciones hacen referencia a lados, ángulos, diagonales en una misma definición; en muchos casos no son definiciones mínimas; y pudimos constatar que bajo un mismo nombre los ejemplos que se pueden construir de cuadriláteros son distintos. Segundo problema: los estudiantes manejan un conjunto de definiciones no minimales y bastante caótico de las distintas familias de cuadriláteros. (Dalcín, 2006; Dalcín y Molfino, 2012).

Cuando se les pide que clasifiquen de alguna manera los cuadriláteros nombrados, en la mayoría de los casos lo hacen recurriendo a tres clases: paralelogramos, trapecios, trapezoides, asumiendo el paralelismo de los lados como criterio: dos pares de lados paralelos, un solo par de lados paralelos o sin lados paralelos. Hasta aquí la clasificación cumple las propiedades de una partición del conjunto de los cuadriláteros (si un cuadrilátero está un una clase no está en otra, y la unión de las clases conforman los cuadriláteros). Dentro de cada una de estas tres clases hacen nuevas distinciones pero recurriendo a diversos criterios. Por ejemplo, en el caso de los trapecios usan como criterio la igualdad de lados y la igualdad de ángulos, para distinguir trapecio isósceles y trapecio birrectángulo respectivamente. En esas subclases, en ocasiones la partición se comienza a desdibujar, o queda tan trivial como "el trapecio es birrectángulo o no lo es". Pero ya no es compatible, si lo queremos pensar como una partición, con la de "el trapecio es isósceles o no lo es". El cruzamiento de tantos criterios a la vez hace que las propiedades de partición ya no sean tan explícitas. Tercer problema, reconocido a partir de reflexiones en torno a la vinculación de la teoría en Enseñanza de la Geometría con nuestras prácticas docentes: los estudiantes conocen una única manera de clasificar los cuadriláteros y en dicha clasificación interviene más de un criterio de clasificación.

Fundamentación de una propuesta de actividades

Haciendo una revisión de los libros de texto usados en nuestro país, tanto en enseñanza primaria como media, constatamos que hay una compatibilidad entre estos y los conocimientos de los cuadriláteros expresados por los estudiantes que ingresan al profesorado. Una característica común a los textos revisados es que privilegian explicitar las definiciones así como enunciar y demostrar las propiedades (Dalcín y Molfino, 2013b).

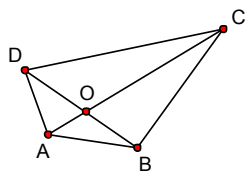
Nos propusimos revertir los tres problemas detectados en las concepciones sobre los cuadriláteros que manejan los estudiantes y diseñamos para ello una serie de actividades incluidas en el libro *Geometría Euclidiana en la formación de profesores* (Dalcín y Molfino, 2013a) que permitieran a los estudiantes: i) concebir y construir nuevos cuadriláteros, o fundamentar la imposibilidad de su existencia; ii) elaborar nuevas definiciones y analizar su equivalencia; iii) hacer

clasificaciones de los cuadriláteros distintas a las que aparecen en los libros de texto y conocidas por ellos. Todas estas actividades proponen una alternativa al tratamiento que se da de estos temas en los textos, es decir, buscan involucrar a los estudiantes en los procesos de definición, construcción, formulación de conjeturas y su demostración en el ámbito de los cuadriláteros en vez de explicitar definiciones y demostrar propiedades. Las actividades buscan enseñar a definir más que enseñar definiciones, involucrar a los estudiantes en hacer construcciones, formular conjeturas y elaborar pruebas más que enseñar propiedades y sus demostraciones, y estudiar diferentes clasificaciones según criterios previamente establecidos, así como el cruzamiento entre dos o más de ellas.

Estas actividades fueron pensadas tomando en cuenta que el trabajo en Geometría puede hacerse desde diferentes paradigmas, propuestos por Houdement y Kuzniak (1999) y Kuzniak (2006), denominados Geometría I, II y III. La Geometría I se corresponde con la *geometría natural*: La fuente de validación es la realidad, el mundo sensible. Hay una cierta confusión entre el modelo y la realidad. La deducción se hace centralmente mediante la percepción y el uso de instrumentos. La Geometría II se corresponde con la *geometría axiomática natural*: La fuente de validación se basa sobre lo hipotético deductivo en un sistema axiomático lo más preciso posible. Pero dicho sistema axiomático se mantiene lo más fiel posible a la realidad. Por último, la Geometría III se refiere a la *geometría axiomática formalista*: Se cortan los lazos de la geometría con la realidad. El razonamiento lógico se impone y los axiomas no se basan en lo sensible o en lo real. En particular, las actividades fueron pensadas para el trabajo de los estudiantes en los dos primeros paradigmas: en instancias de descubrimiento, construcción y formulación de conjeturas se desarrolla sobre todo la Geometría I, en instancias de demostración y sistematización, principalmente la Geometría II.

Este reporte: un diseño de actividades

Desde 2005 a la fecha hemos diseñado-puesto en práctica-rediseñado actividades que apuntan a lo señalado previamente y lo hemos ido consignando en distintas ocasiones. Esta forma de trabajo nos ha llevado a cuestionarnos la definición misma de cuadrilátero (Dalcín y Molfino, 2013b), lo que nos condujo a la consideración de cuadriláteros convexos, no convexos simples y no convexos "cruzados". Sin embargo, dado el estado actual del desarrollo de nuestra investigación nos restringiremos a los cuadriláteros convexos. En este reporte damos cuenta del último rediseño, puesto en práctica en el curso de Geometría 2013, de primer año en la carrera de Profesorado de Matemática en Uruguay. Los estudiantes cuentan con computadoras con

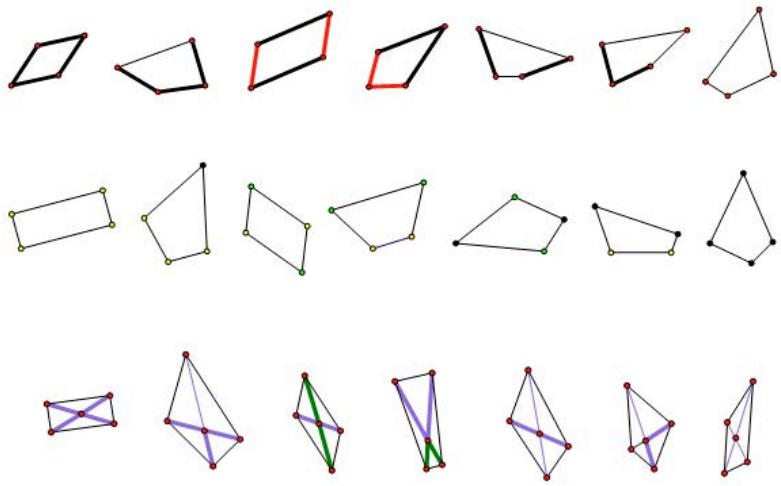


el software GeoGebra instalado para trabajar en clase, que utilizan además de figuras realizadas en papel. Consideramos como elementos del cuadrilátero a tener en cuenta: lados, ángulos y segmentos de diagonales.

Una primera serie de actividades consiste en realizar una clasificación de los cuadriláteros tomando como criterio de clasificación exclusivamente la cantidad de i) lados iguales, ii) ángulos iguales, iii) segmentos de diagonales iguales.

Las clases que surgen son: cuatro lados iguales, solo tres lados iguales, dos pares de lados iguales (pero diferentes entre sí), sólo un par de lados iguales, sin lados iguales. Considerando las clases dos pares de lados iguales y sólo un par de lados iguales, vemos que se puede hacer una distinción según si los lados son opuestos o consecutivos (agregando al criterio de igualdad el de posición de los lados en el cuadrilátero), llevando así a siete las clases posibles. Siete clases análogas se presentan para las clasificaciones ii) y iii). Puntualicemos que cada clase es disjunta con las restantes, y así las consideraremos en el resto del reporte.

Una segunda serie de actividades consiste en construir cuadriláteros para cada una de las siete clases de las clasificaciones según i) lados, ii) ángulos, iii) segmentos de diagonales.



Una tercera serie de actividades consiste en formular conjeturas acerca de los elementos del cuadrilátero no considerados en la construcción bajo cada clasificación, y demostrarlas. Por ejemplo, si la clasificación tuvo como criterio la igualdad y posición de los lados, se pide formular conjeturas referidas a la igualdad y posición de ángulos o a la igualdad y posición de los segmentos de diagonales, y demostrarlas. Veamos algunos ejemplos:

❖Si un cuadrilátero tiene cuatro lados iguales, necesariamente tiene dos pares de ángulos opuestos iguales (que pueden o no ser iguales entre sí) y dos pares de segmentos de diagonales iguales (que pueden o no ser iguales entre sí).

❖Si un cuadrilátero tiene dos pares de ángulos opuestos iguales, necesariamente tiene dos pares de lados opuestos iguales y dos pares de segmentos de diagonales opuestos iguales.

❖Si un cuadrilátero tiene dos pares de segmentos de diagonales consecutivos iguales, necesariamente tiene un par de lados opuestos iguales y dos pares de ángulos consecutivos iguales.

Para la demostración de estas propiedades los estudiantes cuentan con axiomas tratados en instancias anteriores del curso: las relaciones entre ángulos entre paralelas, derivadas del axioma de Euclides (ángulos alternos internos, correspondientes, etc.) y los cuatro criterios de congruencia de triángulos (Dalcín y Molfino, 2013a).

Una cuarta serie de actividades consiste en construir (si existen), o fundamentar que no existen, cuadriláteros que cumplan simultáneamente condiciones referidas a la cantidad de: i) lados iguales y ángulos iguales, ii) ángulos iguales y segmentos de diagonales iguales, iii) lados iguales y segmentos de iguales.

Proponemos para la sistematización de esta actividad, la consideración de tablas de doble entrada considerando de a dos los tres elementos de partida: lados, ángulos y segmentos de diagonales. Estas tres son tablas con 49 casilleros cada una, o sea con 49 cuadriláteros para construir o fundamentar su inexistencia

Consideremos la tabla de doble entrada de lados y ángulos.

Tener en cuenta las actividades previas puede simplificar la tarea: ya se concluyó que todo cuadrilátero con cuatro lados iguales necesariamente tiene dos pares de ángulos opuestos iguales o cuatro ángulos iguales. De esa manera, al considerar la columna correspondiente a cuatro lados iguales se puede concluir que no es posible construir cuadriláteros con solo tres lados iguales, ni con dos pares de ángulos consecutivos iguales, ni con un solo par de ángulos consecutivos iguales, ni con un solo par de ángulos opuestos iguales, ni sin ángulos iguales.

Cantidad y posición de los ÁNGULOS Iguales como criterio					
Sólo 3 iguales	2 pares opuestos iguales y diferentes entre sí	2 pares consecutivos iguales y diferentes entre sí	Sólo 1 par opuestos iguales	Sólo 1 par consecutivos iguales	Sin ángulos iguales

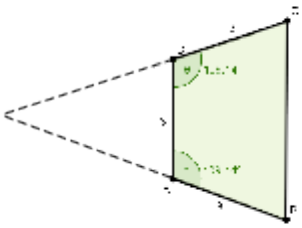
Un argumento análogo al anterior puede considerarse para la fila de cuatro ángulos iguales, habiendo analizado previamente qué implicancia tiene sobre la cantidad de lados iguales.

Los resultados obtenidos en actividades anteriores y la dualidad vista para la columna de cuatro lados iguales y para la fila de cuatro ángulos iguales puede ser tenida en cuenta para la columna (fila) de dos pares de lados (ángulos) opuestos iguales y para la columna (fila) de dos pares de lados-(ángulos) consecutivos iguales. Esto reduce sensiblemente el trabajo a hacer sobre el cuadro y genera una interrogante acerca de la dualidad del cuadro cuando se intercambian lados y ángulos: ¿es simétrica la tabla respecto de su diagonal? ¿Si consideramos las demostraciones, se puede establecer alguna dualidad?

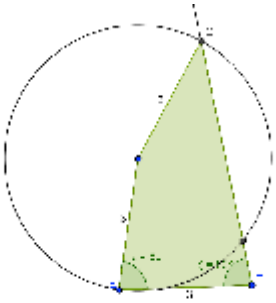
Respecto a dualidades

Analicemos por ejemplo los dos casilleros duales "sólo tres lados iguales y sólo un par de ángulos consecutivos iguales", por una parte, y "sólo un par de lados consecutivos iguales y sólo tres ángulos iguales", por otra.

En el primer casillero se pueden considerar tres situaciones diferentes:



Caso 1: Los ángulos iguales están comprendidos entre lados iguales.



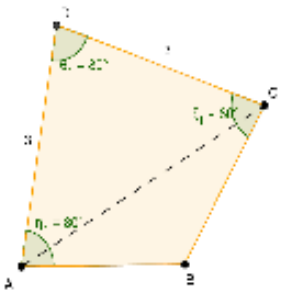
Caso 2: Uno de los ángulos iguales está comprendido entre lados iguales y el otro es adyacente al desigual.

Caso 3: Los ángulos iguales son adyacentes al lado desigual.

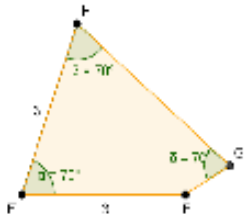
Tanto en el caso 1 como en el 3, se puede comprobar, utilizando el hecho de que un triángulo es isósceles sí y sólo si es isoángulo, que no existen cuadriláteros que cumplan lo pedido en el casillero. En ambos casos quedan necesariamente los otros dos ángulos también iguales, por lo que pasarían a ser ejemplos para el casillero "cuadrilátero con sólo tres lados iguales y dos pares de ángulos consecutivos iguales".

Sin embargo, el caso 2 se diferencia de los anteriores: para esa situación sí pueden encontrarse ejemplos. Si bien existen restricciones para que el cuadrilátero exista (los ángulos iguales tienen que medir entre 60° y 90°), en la figura se muestra la construcción de uno (EFGH) y puede apreciarse que el cuadrilátero EFIH también cumple las condiciones exigidas.

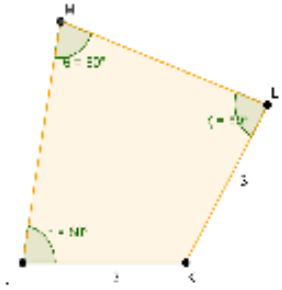
Cuando pensamos en el casillero dual (sólo tres ángulos iguales y sólo un par de lados consecutivos iguales), vuelven a presentarse tres casos según la posición de los lados iguales respecto a los ángulos iguales.



Caso 1: Los lados iguales son adyacentes a los ángulos iguales.



Caso 2: Uno de los lados iguales está comprendido entre ángulos iguales y el otro es adyacente al desigual.



Caso 3: Los lados iguales comprenden al ángulo desigual.

Invitamos al lector a comprobar que nuevamente dos de los casos generan situaciones imposibles, pero sí existen ejemplos para uno de ellos, cuando uno de los lados iguales tiene como adyacente a uno de los ángulos iguales pero su otro ángulo adyacente es el desigual. En los otros casos, se genera un cuadrilátero que tiene necesariamente dos pares de lados consecutivos iguales, lo que nos deja fuera del casillero.

Reflexiones finales

A partir de nuestra práctica docente, y contrastando lo experimentado con consideraciones teóricas (Houdement y Kuzniak, 1999; Kuzniak, 2006), hemos reportado la presencia de tres problemas en lo que respecta a la construcción de conocimiento relativo a los cuadriláteros: los estudiantes conocen pocas familias de cuadriláteros, las definiciones que presentan no son minimales, en un mismo grupo hay una amplia diversidad de definiciones para un mismo cuadrilátero, y el único criterio de clasificación que conocen es el del paralelismo de los lados, al que subordinan la igualdad de lados o de ángulos, a semejanza de como aparecen en algunos libros de texto.

Frente a esta problemática, hemos desarrollado una secuencia de actividades con el fin de abordar esos problemas. Consideramos que para hacerles frente, es necesario desestructurar la enseñanza tradicional del tema, en la que se dan una cantidad reducida de familias, sus definiciones, y a partir de ellas los estudiantes deben demostrar propiedades previamente enunciadas en un libro o por el profesor.

Con las actividades que proponemos, los estudiantes -futuros profesores- se ven enfrentados a las tareas de clasificar utilizando criterios establecidos por el profesor o por ellos mismos; definir, teniendo en cuenta las clases derivadas de esas clasificaciones, y demostrar propiedades que surgen como cuestionamientos intrínsecos de la actividad propuesta al intentar cruzar dos de los criterios de clasificación; construir o fundamentar la inexistencia de cuadriláteros.

Consideramos que este tipo de actividades representa una posibilidad de desarrollo para los futuros profesores en dos sentidos: por un lado posibilita la consideración de nuevos contenidos que amplían y reubican los conocimientos con los que ingresan los estudiantes al profesorado de matemática, por otro, la construcción del conocimiento en las clases se hace de una manera acorde a como se espera que el estudiante se desempeñe en su futura tarea como profesor de enseñanza media.

Referencias biblográficas

Dalcín, M. (2006). La definición y clasificación de cuadriláteros en los libros de texto de ayer y de hoy. En G. Martínez (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19 (ALME 19)*, pp. 472-477.

Dalcín, M. y Molfino, V. (2011a). Clasificación particional de cuadriláteros como fuente de demostraciones y construcciones en la formación inicial de profesores. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, 1(1).

Dalcín, M. y Molfino, V. (2012). Una propuesta para el trabajo en Geometría en la formación inicial de profesores de matemática. *Unión*, 30 (Junio), pp.171-185.

Dalcín, M. y Molfino, V. (2013a). *Geometría Euclidiana en la formación de profesores*. Montevideo: Ediciones Palíndromo.

Dalcín, M. y Molfino, V. (2013b). ¿De qué hablamos cuando hablamos de polígono? *Actas del Congreso Iberoamericano de Educación Matemática 7 (CIBEM 7)*. Disponible en http://www.cibem.org/home.php

Disponible en http://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/8841.

Houdement, C. y Kuzniak, A. (1999). Geometríe et paradigmenes geometriques. *Petit x*, 51, 5-21.

Kuzniak, A. (2006). Paradigmes et espaces de travail geometriques. Elements d'un cadre theorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en geometrie. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 6 (2), 167–187.

LOS ESPACIOS VECTORIALES, COMO ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS, EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA LINEAL: UNA PROPUESTA DE INVESTIGACIÓN

Ángela Martín Sánchez, Olga Lidia Pérez González, Ramón Blanco Sánchez y Laura Casas Fuentes

Universidad APEC — República Dominicana
Universidad de Camagüey — Cuba
m.angela24@gmail.com, olguitapg@gmail.com

Resumen. El objetivo de este trabajo es argumentar la necesidad de investigar sobre el perfeccionamiento didáctico, a través del enfoque sistémico, en el estudio de los Espacios Vectoriales en el Álgebra Lineal. Como resultado se identifica y delimita un diseño metodológico, como propuesta de investigación, a través del cual se define el problema de investigación, objeto de estudio y el objetivo. Es un estudio descriptivo-interpretativo, se adopta la metodología cualitativa y se utiliza el método de revisión de literatura

Palabras clave: álgebra lineal, espacios vectoriales

Abstract. The purpose of this work is to argue for the necessity of researching about the educational advancement, through a systematic approach, of the study of Vectorial Spaces in Lineal Algebra. As a result of this study a methodological design was identified and delimited as a research proposal, through which is defined the study problem, object and objective. This design is a descriptive-interpretative study, where the qualitative methodology is adopted and the method of literature inspection is used

Key words: álgebra lineal, espacios vectoriales

Introducción

Uno de los conceptos que es objeto de estudio en el Álgebra Lineal es el de Espacio Vectorial, el cual relaciona otros conceptos como dependencia lineal, base, generador, dimensión, coordenada de un vector en una base y transformación lineal. Varias investigaciones señalan que los estudiantes usan los procedimientos algorítmicos sin comprender el significado de estos conceptos y que no saben relacionar sus diferentes representaciones semióticas (Soto, 2003).

Se aprecia, además, que existe una tendencia de los estudiantes a comportarse como si las representaciones simbólicas formales de los objetos del Álgebra Lineal fueran los objetos en sí mismos, por lo cual manipulan las representaciones mecánicamente sin comprender su significado y sin percibir las relaciones entre ellas. (Sierpinska, 2000).

En la búsqueda de explicaciones, reflexiones, autores y propuestas de investigación, en relación a las problemáticas anteriores, el objetivo de este trabajo es argumentar la necesidad de investigar sobre el perfeccionamiento didáctico, a través del enfoque sistémico, en el estudio de los Espacios Vectoriales en el Álgebra Lineal. Como resultado se identifica y delimita un diseño

metodológico, como propuesta de investigación, a través del que se define el problema de investigación, objeto de estudio y el objetivo.

Metodología

Dado que nuestro objetivo es fundamentalmente descriptivo-interpretativo, se adoptó la metodología cualitativa, por ser la idónea para este tipo de investigación (Blanco & Barrantes, 2003). Se utilizó el método de revisión de literatura, con carácter selectivo, para lo que sirvió de guía la investigación realizada por Sociales y Fernández (2013) y Serna (2013). El mismo consistió en detectar, obtener y consultar la bibliografía para los propósitos del estudio. Para precisar las fuentes de datos, primero se procedió a investigar qué revistas, de habla hispana, relacionadas con la Matemática Educativa están ubicadas en la Web of Science (WoS), debido a que es considerada uno de los sitios web más importantes, de citas y resúmenes de literatura arbitrada y de fuentes de alta calidad (Cañedo, Rodríguez, & Montejo, 2010).

Se identificó a la Revista Latinoamericana de Matemática Educativa (Relime), la cual, según la evaluación de revistas científicas en humanidades que realiza la European Science Foundation (ESF), es la única de Iberoamérica, en el área de Pedagogical and Educational Research, ubicada en el grupo de revistas con el más alto nivel de visibilidad internacional (Cantoral, 2011). Pero, como las revisiones basadas únicamente en datos de la WoS ofrecen un retrato muy limitado de la realidad, especialmente para Humanidades y Ciencias Sociales (Maldonado, Giménez, González-Albo, Corera-Álvarez, & Aguillo, 2013), como segunda opción de fuentes de datos, se identificó al Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (ALME), ya que estas actas constituyen un espacio importante de divulgación de los aportes que docentes de Matemática e investigadores en Matemática Educativa, de Latinoamérica, hacen en relación a sus prácticas docentes, a su experiencia y a su actividad investigativa. (Lara, 2013). Se realizó, además, la búsqueda de informes de investigación en opción al título de doctor o de máster en ciencias que estuvieran relacionados con el objeto de estudio de la presente investigación. Esta búsqueda se realizó a través de las referencias bibliográficas de los artículos de Relime y ALME.

Las búsquedas bibliográficas y el desarrollo de la investigación estuvieron guiadas por las siguientes preguntas: ¿Qué se ha investigado sobre las dificultades en el proceso de enseñanza aprendizaje del Álgebra Lineal? Y ¿Qué se sugiere investigar en relación al proceso de enseñanza aprendizaje del concepto de Espacio Vectorial y sus conceptos relacionados (dependencia lineal, base, generador, dimensión y coordenada de un vector en una base)?

Para determinar la población objeto de estudio, se utilizaron los términos de búsqueda: “espacio”, “vectorial”, “dependencia”, “lineal” y “álgebra”, no se incluye el término Matemática debido a que

en las revistas seleccionadas todo su contenido está relacionado con la Matemática. El intervalo de tiempo es uno de los criterios asumidos, lo cual fue considerado desde 2009 y el 2013. (5 años), aunque de Relime se analizaron todos sus volúmenes. El criterio de inclusión, el que a su vez es de exclusión (Serna & Serna, 2013) es que el trabajo esté relacionado con los espacios vectoriales y los conceptos asociados a él (dependencia lineal, base, generador, dimensión, coordenada de un vector en una base y transformación lineal) o con temáticas relacionadas con las representaciones semióticas de los conceptos algebraicos, modos del pensamiento y con el sentido estructural del Álgebra Lineal. A partir de este análisis queda definida la muestra del estudio.

Para la recopilación de datos se tuvo en cuenta la perspectiva de la investigación, la cual se asume como el punto de vista desde el cual se considera o se analiza un asunto, en este caso las investigaciones sobre portafolio en el contexto educativo (REAL ACADEMIA ESPAÑOLA). El análisis de los resultados estuvo en función de las respuestas a las preguntas de investigación, por lo que primero se determinaron la cantidad de documentos publicados y las perspectivas con que se estudia el proceso de enseñanza y aprendizaje del Álgebra Lineal.

Por último se aplica la triangulación de la información dado que es una de las técnicas más empleadas para el procesamiento de los datos en las investigaciones cualitativas, por cuanto contribuye a elevar la objetividad del análisis de los datos y a ganar una relativa mayor credibilidad de los hechos. (Ruíz, 1999).

Análisis de los resultados

Pregunta # 1

Al realizar la búsqueda y aplicar los criterios de inclusión se obtuvo la población objeto de estudio y la muestra. Se encontraron 82 trabajos, pero al aplicar los criterios de inclusión el total fue de 29 trabajos.

A1	Oropeza, C., & Lezama, J. (2009). ¿Puede favorecer la visualización a la caracterización de la dependencia lineal para un conjunto de polinomios? En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.22*, págs. 15-24. México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C
A2	Álvarez, J; Molina,. J. (2009). Influencia de los modelos intuitivos en el aprendizaje de la transformación lineal en contexto geométrico. En P. Léstón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.22*, págs. 773-778. México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C
A3	Parraguez, M; Oktaç; A. (2010). Construcción esquema del concepto espacio vectorial. En P. Léstón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.23*, págs. 45-54. México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C
A4	Dias, M; Da Costa, M; Pietropaolo, R; Campos, T (2010). Articulação dos ostensivos e não ostensivos no ensino da noção de sistemas de duasequações lineares e duas incógnitas. En P. Léstón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.23*, págs.535-544. México: Colegio

	Mexicano de Matemática Educativa A. C
A5	Mendonça , T; Simião, F; Alves, M (2010). A articulaçãomatrizes e transformações lineares em algebra linear. En P. Léstón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.23*, págs.599-610. México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C
A6	Miyar, I; Legañoa, M; Blanco; R (2010). Perfeccionamiento de la formación de conceptos algebraicos en estudiantes universitarios con el empleo de los asistentes matemáticos. En P. Léstón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.23*, págs.1207-1216 México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C
A7	Parraguez, M (2011). Comprensión del concepto combinación lineal de vectores desde el punto de vista de la teoría APOE. En P. Léstón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.24*, págs.263-272 México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C
A8	Maturana, I; Parraguez, M (2012). Los modos de pensamiento en que el concepto de dimensión finita de un espacio vectorial real es comprendido por estudiantes universitarios. En P. Léstón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.25*, págs.227-234 México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C
A9	Rodríguez, M; Parraguez, M (2013). Un reporte de la investigación: construcción cognitiva de los conceptos espacio vectorial R2 y R3 desde la teoría APOE. En P. Léstón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.26*, págs.573-583 México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C
A10	Morales, Z (2013). Transformando las representaciones semióticas: un enfoque cognitivo en el estudio del álgebra. En P. Léstón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.26*, págs.667-674 México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C
A11	Parraguez, M (2013). Los modos de pensar el álgebra lineal y ejemplos ad hoc en problemas específicos de su enseñanza y aprendizaje. En P. Léstón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.26*, págs.695-704 México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C
A12	Maturana, I; Parraguez, M (2013). Transformaciones lineales. Una mirada desde la teoría APOE. En P. Léstón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.26*, págs.879-888 México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C
A13	Karrer, M. (2006). *Articulação entre Álgebra Linear e Geometria um estudo sobre as transformações lineares na perspectiva dos registros de representação semiótica.* Tese apresentada para obtenção do título de Doutor em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. Retrieved from http://www.sapientia.pucsp.br//tde_arquivos/13/TDE-2006-05-16T09:17:18Z-2105/Publico/tese_monica_karrer.pdf, http://www.pucsp.br/pos/edmat/do/tese/monica_karrer.pdf
A14	Miyar, I. (2009). *Perfeccionamiento de la formación de conceptos algebraicos en estudiantes universitarios con el empleo de los asistentes matemáticos.* Tesis en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas, Universidad de Camagüey, Universidad APEC, Santo Domingo.
A15	Parraguez, M. (2009). *Evolución Cognitiva del Concepto de Espacio Vectorial.* Tesis para optar por el grado de Doctor en Matemática Educativa, Instituto Politécnico Nacional, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. Unidad Legaria., México, D.F
A16	Pavlopoulou, K. (1994). *Propédeutique de l`algèbrelinèaire: la coordination des registres de représentationsémiotique*, Thèse de Doctorat, Université Louis Pasteur (Strasbourg I); prépublication de l`Institut de RechercheMathématiqueAvancée. France.
A17	Soto, J. L. (2003). *Un estudio sobre las dificultades para la conversión gráfico-algebraica relacionadas con los conceptos básicos de la teoría de espacios vectoriales en R^2 y R^3*. Tesis para optar por el grado de Doctor en Matemática Educativa. Cinvestav-IPN, México, D.F., México
A18	Uicab, R., &Oktaç, A. (2006). Transformaciones lineales en un ambiente de Geometría dinámica. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 9*(3), 459-490.

A19	Molina, J., &Oktaç. (2007). Concepciones de la trasnformación lineal en contexto geométrico. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 10*(2), 241-273.
A20	Fuentes, S., &Oktaç. (2009). Construcción de una descomposición genética: análisis teórico del concepto de trasnformación lineal. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 13*(1), 89-112.
A21	Aranda, C., & Callejo, L. (2010). Construcción del concepto de dependencia lineal en contexto de Geometría Dinámica: Un estudio de casos. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 13*(2), 129-158.
A22	Oktaç, A., & Trigueros, M. (2010). ¿Cómo se aprenden los conceptos de álgebra lineal? *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 13*(4-II), 373-385.
A23	Roa-Fuentes, S., &oktaç, A. (2012). Validación de una descomposición genética de transformación lineal: Un análisis refinado por la aplicación del ciclo de investigación de la tepría APOE. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 15*(2), 199–232.
A24	Berger, M. (2010). A semioticviewofmathematicalactivitywithcomputer algebra system. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 13*(2), 159-186.
A25	Vega-Castro, D., Molina, M., & Castro, E. (2012). Sentido estructural de estudiantes de bachillerato en tareas de simplificación de fracciones algebraicas que involucran igualdades notables. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 15*(2), 233–258.
A26	Vargas, X. N. (2007) *El estudio de los espacios vectoriales desde el punto de vista de la teoría APOE*. Tesis para optar por el grado de Maestra en Ciencias, especialidad de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.
A27	Saldanha, L. A. (1995): T*heNotions of Linear Independence/Dependence: A Conceptual Analysis and StudentsDifficulties*. Master'sThesis. Concordia University. Montréal, Québec, Canada.
A28	*Andreoli, D. (2009). Análisis de los obstáculos en la construcción del concepto de Dependencia Lineal de vectores en alumnos de primer año de la universidad.* . Tesis para optar por el grado de Maestra en Ciencias, especialidad de Matemática Educativa, Instituto Politécnico Nacional, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. Unidad Legaria., México, D.F
A29	Mora, B. (2000). *Modos de Pensamiento e Interpretación de la solución de un Sistema de Ecuaciones*, Tesis para optar por el grado de Maestra en Ciencias, especialidad de Matemática Educativa, CINVESTAV, IPN, México, D.F.

Tabla 1: Artículos que constituyeron la muestra de investigación

Se valoró que por ser Relime una fuente indiscutible para la consulta, lectura y análisis de investigaciones innovadoras y de alto valor científico (Cantoral & Reyes-Gasperini, 2012), es muy bajo el número de artículos relacionados con el Álgebra Lineal (8,01% con respecto al total contando desde el volumen 0 hasta el volumen 15(3)). Con respecto a la muestra, el 27,5% corresponde a Relime. El mayor número de trabajos aparecen en ALME, aunque si se comparan con respecto al total de trabajos publicados en esta publicación, también es bajo.

En los 29 trabajos, los autores que más publicaron son, en Relime, Asuman Oktaç y en ALME Marcela Parraguez González. Según el análisis de las tesis de doctorado y de maestría, se observa que se repiten estos nombres, como asesores y doctorantes y que 3 de 4 tesis de maestría y 2 de 5 tesis de doctorado se realizaron en el Instituto Politécnico Nacional, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. Unidad Legaria., México, D.F, donde investigan las autoras anteriormente mencionadas.

Se ha investigado sobre espacios vectoriales, dependencia lineal, transformación lineal, Sistema de ecuaciones lineales, combinación lineal, dimensión finita de un espacio vectorial y de forma general del Álgebra Lineal. No se encontraron trabajos de autores de República Dominicana. En las investigaciones realizadas en Relime se plantean como dificultades: Presencia o ausencia de un pensamiento sistémico en los estudiantes, al resolver el problema de extensión lineal. No realizan las conexiones adecuadas entre los conceptos involucrados(A18), concepciones erróneas que hacen que los estudiantes tengan dificultades para entender el Algebra Lineal, lo cual se puede expresar bajo la forma de automatismos o interpretaciones personales que en muchos casos difieren de la interpretación que el Álgebra Lineal pretende comunicar y, en algunos casos, obstaculizan su entendimiento. (A19), la naturaleza epistemológica del álgebra lineal, los problemas con diseños didácticos y el uso de diferentes tipos de lenguajes son algunas de las fuentes de obstáculos que se identifican en estas investigaciones. (A22) y por último, que los estudiantes mecanizan definiciones de los conceptos de Álgebra Lineal, sólo replican algunas palabras que saben están relacionadas con el concepto pero sin un sentido real además del uso nulo de la notación matemática. Estas dificultades se relacionan con el tipo de actividades que los individuos deben tener para enfrentar la construcción de un nuevo concepto. (A23).

Los fundamentos de estos trabajos, descansan en la aproximación teórica del pensamiento teórico versus el pensamiento práctico, donde se destaca que uno de los rasgos del pensamiento teórico es que intenta enfocarse en el establecimiento y estudio de las relaciones entre los conceptos y su caracterización dentro de un sistema que también contiene otros conceptos (Sierpinska, 2000).

Entre las tesis de maestría y de doctorado A15, A26, A28 y A29, se cuestiona: ¿Hasta qué punto los alumnos comprenden la definición de espacio vectorial?, ¿Cuáles son las razones que hacen que este concepto sea difuso para los estudiantes? Y ¿Estarán los estudiantes en condiciones de hacer evolucionar cognitivamente un conocimiento tan abstracto (el de espacio vectorial), y dar a éste una estructura de objeto matemático con un nuevo significado a medida que van integrándose al conocimiento del estudiante nuevos conceptos tales como: independencia-dependencia lineal y base?

En A15 y A27 se precisan algunas de las dificultades que muestran los estudiantes para alcanzar una adecuada comprensión de los conceptos del álgebra lineal, en particular el de espacio vectorial, teniendo orígenes diversos; uno de ellos es el epistemológico: el concepto de espacio vectorial no fue creado para resolver problemas, sino para unificar y generalizar métodos y conceptos ya existentes, sin embargo no hace referencia a la necesidad de sistematizar lo relacionado a los diferentes registros semióticos de este concepto.

Las propuestas A3, A7, A9, A12, A15, A20, A23, A26, A28 y A29 consideran el análisis de conceptos particulares del álgebra lineal, en especial el de espacio vectorial, en el marco de referencia a la teoría APOE (Acción-Proceso-Objeto-Esquema), la que es asumida como una herramienta potente para explicar el por qué de esas dificultades, mediante la aplicación del ciclo de investigación: análisis teórico; diseño e implementación de enseñanza, observación, análisis y verificación de datos. El análisis teórico es la componente más investigada, al describirse las construcciones (acciones, procesos, objetos y esquemas) y los mecanismos mentales (interiorización, coordinación, encapsulación, asimilación) que puede realizar un estudiante para construir un concepto matemático determinado.

Los trabajos A1, A2, A18, A19, A21, investigan en relación a la enseñanza aprendizaje de los conceptos de la teoría de espacios vectoriales en un contexto geométrico – analítico, que aunque no lo relacionan directamente con los registros semióticos de esos conceptos, hacen propuestas concretas para la dependencia lineal y la transformación lineal. En el A13 se estudia la articulación del álgebra con la Geometría a través de los registros semióticos.

Varios trabajos hacen propuestas para el desarrollo de actividades y el perfeccionamiento de conceptos del Álgebra Lineal, desde la perspectiva de los sistemas informáticos, la conversión gráfico algebraico de los conceptos y los registros semióticos (A6, A14, A17, A24).

Otro marco teórico abordado es el de los modos de pensamiento (Sierpinska, 2000), como es el A8 y A11, a través de los cuales se explican los enfoques (analíticos, geométricos o estructurales) que priorizan los estudiantes al momento de desarrollar distintas tareas y cuáles son las conexiones que logran establecer entre ellos. En estos trabajos se abordan tres modos de pensamiento: pensamiento práctico –sintético-geométrico, pensamiento teórico –analítico-aritmético y analítico-estructural.

Aunque llama la atención que en las investigaciones realizadas se investiga el tránsito por cada una de ellas, pero no la interacción sistémica entre los tres modos de pensamiento.

En el A16 es el único trabajo en que se hace referencia a la coordinación entre diferentes registros de representación semiótica, desarrollado para todo el Álgebra Lineal.

Aunque en la generalidad de los trabajos se hace alusión a lo abstracta de esta asignatura, llama la atención que sólo un trabajo hace referencia a la articulación de lo ostensivo y no ostensivo en la enseñanza del Álgebra Lineal, lo cual es investigado en la temática de sistemas de ecuaciones lineales.

Del análisis anterior se pudo determinar que los temas objetos de estudio son: combinación lineal, álgebra, álgebra lineal, dependencia lineal, dimensión finita de un espacio vectorial, espacio vectorial, fracciones algebraicas que involucran igualdades notables, sistemas de ecuaciones lineales y transformación lineal. Las perspectivas de investigación identificadas son: análisis conceptual, aprendizaje de conceptos, articulación de ostensivos y no ostensivos, articulación de contenidos, comprensión del concepto, construcción del concepto, concepciones del concepto, modelos intuitivos en contextos geométricos, modos de pensamiento, representaciones semióticas, sentido estructural, tecnología, visualización.

Conclusiones

Pregunta # 2

De acuerdo a los hallazgos obtenidos con esta revisión, las investigaciones actuales sobre el proceso de enseñanza aprendizaje del Álgebra Lineal, se comprobó que aunque son pocos los estudios en esta temática, por lo general no se aborda el perfeccionamiento didáctico a través del enfoque sistémico en el estudio de los espacios vectoriales.

También se comprobó que si bien el concepto de espacio vectorial pareciera simple, la introducción por primera vez de una Matemática tan abstracta, a opinión de los profesores lo hace lento y el estudiante muchas veces no tiene clara en su mente la serie de requisitos que debe tener un conjunto V para ser un espacio vectorial sobre un cuerpo K, así como el concepto de estructura de Grupo. (A15).

Haciendo un análisis de A25 se pudo inferir que muchos alumnos poseen una pobre comprensión de las relaciones y estructuras matemáticas y muestran una falta de relación entre sus conocimientos aritméticos y sus conocimientos algebraicos. Además, existen dificultades en el desarrollo de las habilidades, de los alumnos, para reconocer y usar la estructura matemática. A esto se añade la comprensión del significado de las letras y el cambio de convenciones, como otras de las principales dificultades en la introducción del álgebra.

De esta forma, se puede afirmar que en el álgebra existe una escasez de instrumentos ostensivos y ausencia casi total de discurso explícito que contribuya a que los alumnos identifiquen y utilicen los conceptos. Entendiendo en este caso como ostensivo cualquier objeto que se puede mostrar a otro (Godino, Font, & Wihermi, 2006).

Todo lo anterior argumenta la necesidad de investigar en las dificultades que tienen los estudiantes para probar que un conjunto dado tiene la estructura de espacio vectorial, considerando como problema de investigación, que dado el carácter no ostensivo de los objetos

matemáticos, en particular de las estructuras algébricas, los estudiantes no identifican su estructura sistémica cuando es presentada en diferentes registros semióticos.

Siendo el objeto de estudio el proceso enseñanza aprendizaje del álgebra lineal en los estudiantes universitarios, con el objetivo de diseñar una metodología basada en las transformaciones de registros semióticos, que permita ampliar las posibilidades del estudiante en la identificación de los espacios vectoriales.

Referencias Bibliográficas

Blanco, L., & Barrantes, M. (2003). Concepciones de los estudiantes para maestro en España sobre la Geometría escolar y su enseñanza aprendizaje. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 6(2), 107-132.

Cantoral, R. (2011). Relime en ERIH. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 14(2), 131-138.

Cantoral, R., & Reyes-Gasperini, D. (2012). Editorial 0.167. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa,* 15(2), 131-135.

Cañedo, R., Rodríguez, R., & Montejo, M. (2010). Scopus: la mayor base de datos de literatura científica arbitrada al alcance de los países subdesarrollados. *ACIMED*, 21(3), 270-282.

Godino, J., Font, V., & Wihermi, M. (2006). Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 9(3), 131-155.

Lara, C. (2013). Presentación. (R. Flores, Ed.) Acta Latinoamericana de matemática Educativa, 26, XXII-XXIV.

Maldonado, Á., Giménez, E., González-Albo, B., Corera-Álvarez, E., & Aguillo, I. (2013). Evaluación Científica, Indicadores y Bases de Datos Bibliográficas. Recuperado el 8 de Agosto de 2013, de CSID: http://hdl.handle.net/10261/7313

REAL ACADEMIA ESPAÑOLA. (s.f.). http://www.rae.es/rae.html. Recuperado el Agosto de 2013, de Real Academia Española: http://www.rae.es/rae.html

Ruíz, A. (1999). La Triangulación. En A. Ruíz, *Metodología de la investigación Educativa* (pp. 1-4). Chapecó. Bra: Editorial Grifo.

Serna, E., & Serna, A. (2013). ¿ Está en crisis la ingeniería en el mundo? Una revisión a la literatura. *Revista de la Facultad de Ingienería de Universidad de Antioquia,* 66, 199-208.

Sierpinska, A. (2000). On Some Aspects of Student's Thinking in Linear Algebra. En J. Dorier, & C. M. University (Ed.), On the Teaching of Linear Algebra (pp. 209-246). Michigan: Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Sociales, S., & Fernández, F. (2013). Raves y consumo de drogas desde una perspectiva epidemiológica y psicosocial: una revisión bibliográfica sistemática Raves and drug use from an epidemiologic and psychosocial approach: a bibliographic systematic re. *Adicciones,* 25(3), 269-279.

Soto, J. L. (2003). *Un estudio sobre las dificultades para la conversión gráfico-algebraica relacionadas con los conceptos básicos de la teoría de espacios vectoriales en R2 y R3*. Tesis para optar por el grado de Doctor en Matemática Educativa, Instituto Politécnico Nacional, CINVESTAV, México, D.F.

SOBRE OS CONHECIMENTOS DE UM GRUPO DE PROFESSORES PARA ENSINAR EQUAÇÕES

Angélica da Fontoura Garcia Silva y Etienne Lautenschlager
Universidade Bandeirante Anhanguera, UNIBAN Brasil
angelicafontoura@gmail.com, elautens@yahoo.com.br

Resumen. Este artigo tem como objetivo de investigar os conhecimentos necessários ao professor de Matemática, para ensinar equações. Trata-se de uma pesquisa qualitativa que envolveu um grupo formado por 10 professores que lecionam para os Ensinos Fundamental e Médio, da rede pública do Estado de São Paulo- Brasil, participantes de uma formação continuada. A coleta de dados inclui um questionário – de caráter diagnóstico. Para tanto, sustenta-se em contribuições teóricas de obras Shulman e Ball. A análise dos dados indicou lacunas nos conhecimentos dos sujeitos envolvidos relacionadas aos processos de ensino e de aprendizagem das equações

Palabras clave: conhecimento profissional docente, equações

Abstract. This article aims to investigate the knowledge necessary to mathematics teacher, to teach equations. This is a qualitative study involving a group of 10 teachers who teach for primary and secondary education in public schools in the state of São Paulo-Brazil, participating in a continuing education. Data collection includes a questionnaire - the diagnostic character. Therefore, it is argued on theoretical inputs works Shulman and Ball et al. Data analysis indicated gaps in knowledge of the subjects involved related to the processes of teaching and learning equations

Key words: professional content knowledge, equations

Introdução

Neste estudo apresentamos resultados parciais de uma pesquisa em que se preocupou em investigar os conhecimentos necessários ao professor de Matemática, para ensinar equações. Trata-se de uma pesquisa que envolveu um grupo colaborativo formado por 10 professores dos Ensinos Fundamental e Médio, da rede pública do Estado de São Paulo- Brasil. Para a realização da pesquisa, desenvolvemos um curso de formação continuada que priorizou o estudo, a análise e a discussão das diferentes concepções de Álgebra, sobretudo no que se refere às diferentes formas de ver e de tratar a noção de equação. Discutimos também noções relativas aos processos de ensino e aprendizagem de equações. Para esta comunicação apresentamos resultados da aplicação de um questionário – de caráter diagnóstico, visando identificar as concepções dos professores sobre esse tema e sobre seu ensino na Educação Básica.

Relevância e Fundamentação Teórica

No que se refere ao objeto matemático "equação", observamos que há um grande número de pesquisas no Brasil ou no exterior voltadas a esse tema. Ball, (1990), Attorps (2003, 2008), Ribeiro (2007) entre outros, indicam que muitos professores de matemática não possuem a compreensão conceitual de muitos tópicos de matemática elementar e, por isso, acaba por

privilegiar em suas aulas o desenvolvimento de habilidades algorítmicas e a memorização de regras, dando menor ou nenhuma atenção ao desenvolvimento do conhecimento conceitual. Para elaborar o questionário e realizar a análise dos resultados, consideramos as categorias de conhecimentos para o ensino propostas por Shulman (1986) – conhecimento do conteúdo específico; conhecimento pedagógico do conteúdo e conhecimento curricular do conteúdo –, que foram refinadas por Ball, Thames e Phelps (2008).

Attorps (2003), por exemplo, desenvolveu um estudo com dez professores que lecionavam matemática para o ensino secundário. A investigação buscou analisar a concepção dos docentes acerca da noção de equação. Seus resultados são fundamentais para a nossa pesquisa, uma vez que a autora identificou dentre outras concepções que a maioria dos professores tinha uma concepção de equação muito ligada aos procedimentos, ou seja, à forma de resolução da equação. Durante as entrevistas realizadas pela pesquisadora também foi possível verificar que tais concepções eram fortemente influenciadas pela forma como esses professores aprenderam equações na escola.

Essa mesma autora, em 2006, realizou outro estudo com cinco professores de matemática no início de carreira, cinco professores experientes e setenta e cinco estudantes de licenciatura em matemática. Attorps utilizou dados coletados em questionários, entrevistas gravadas, gravação de vídeo de seis aulas de matemática e observações. No estudo, segundo a autora, a abordagem fenomenográfica foi utilizada a fim de revelar as diferenças entre as concepções e experiências dos professores sobre equações. Os resultados da pesquisa indicaram que para os sujeitos deste estudo as equações estavam intimamente relacionadas com os símbolos x e y e com os procedimentos de solução. E da mesma forma que no estudo anterior as experiências de ensino e aprendizagem da matemática dos professores quando eram estudantes podem ter influenciado suas concepções. Ficou evidente para Attorps (2008), que para os professores não estava claro, de acordo com o currículo, o que os alunos deveriam saber em álgebra na escola básica.

Resultados como os de Attorps (2003, 2008) foram também encontrados nos estudos de Ball (1990) e Ribeiro (2007). Esses estudos também observaram que professores de matemática privilegiavam, muitas vezes, no ambiente escolar o desenvolvimento de habilidades algorítmicas em detrimento ao desenvolvimento do conhecimento conceitual e, indicaram com uma das causas a falta de compreensão conceitual de tópicos da matemática elementar.

Como fundamentação para a elaboração do instrumento de coleta e respectivas análises dessa investigação optamos pelos estudos de Ball, Thames e Phelps (2008) e Shulman (1986). Ball e colegas discutiram questões relacionadas à forma pela qual os professores necessitam saber

determinado conteúdo para ensiná-lo e, além disso, "o que mais" os professores precisam saber sobre Matemática e seu ensino. Esses autores refinaram as categorias definidas por Shulman (1986) em: conhecimento do conteúdo (comum/especializado); conhecimento do conteúdo e dos estudantes e finalmente, conhecimento do conteúdo e do ensino. A correspondência entre as categorias estabelecidas por Ball et al(2008) e Shulman (1986) e Ball são apresentadas pela autora na imagem a seguir:

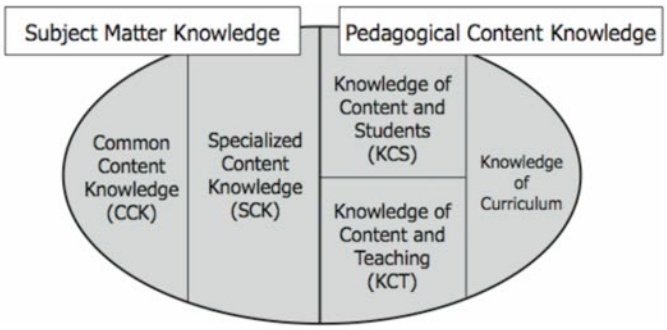


Figura 1: Comparação entre as categorias propostas por Shulman (1986) e Ball et al(2008)

Fonte: Ball et al (2008, p.393)

Como para esse estudo analisaremos, em especial, a nossa interpretação do que seriam os *Conhecimentos Especializados* e o de *Conteúdo e de Ensino* apresentados pelos docentes, nos ateremos a descrever como Ball et al (2008) os define. Os autores definem o *Conhecimento Especializado do Conteúdo* como o "[...] conhecimento distintamente matemático, mas ele não é necessariamente conhecimento matemático familiar aos matemáticos" (Ball et al, 2008, p.394). Já, o *Conhecimento do Conteúdo e do Ensino*, segundo os autores, "[...] combina o saber sobre o ensino e o saber sobre a Matemática" (Ball et al, 2008, p.401). Nesse sentido, conforme já afirmado, para elaborar as questões aqui apresentadas e analisar os resultados obtidos, levamos em conta estas duas categorías.

Procedimentos Metodológicos

Para este estudo fez-se uso da metodologia qualitativa, que se desenvolveu por meio da análise dos protocolos dos professores participantes de todo processo formativo.

O questionário aplicado aos professores constituiu-se de seis itens que versavam sobre as equações, em suas distintas representações e interpretações. Os protocolos apresentados a seguir, ilustram duas questões enunciadas em nosso estudo:

1-Um professor de matemática propôs ao seu aluno que resolvesse a seguinte equação do 2° grau:	*2- Para resolver a equação x (x+2) = 5, um aluno deu a seguinte resolução:*

$4x^2 - 20x + 26 = 0$ $4x^2 - 20x = 0 - 26$ $4x^2 - 20x + 25 = -26 + 25$ $(2x - 5)^2 = -1$ *Discuta a resolução dada pelo aluno. Justifique sua resposta. O que você diria ao aluno que apresentou essa resolução?*	$x(x + 2) = 5$ $x = 5 \ ou \ x + 2 = 5$ $x = 5 \ ou \ x = 3$ *Discuta a resolução dada pelo aluno. Justifique sua resposta. O que você diria ao aluno que apresentou essa resolução?*

Figura 2: Questões apresentadas aos professores antes da formação

A questão 1 foi selecionada para avaliar o que Ball et al (2008) considera como *Conhecimento de Conteúdo e de Ensino.* Esperávamos que o professor observasse o método utilizado e que o aluno não validou a resposta encontrada. O que se esperava era que nossos sujeitos reconhecessem um procedimento de resolução além da "fórmula de Báskara". Esperávamos que o professor discutisse, por exemplo, a importância de que o aluno também resolva por meio da fatoração e que analisasse também a conclusão do resultado apresentado pelo estudante e propusesse possíveis intervenções. Já com a questão 2 buscávamos analisar o *Conhecimento Especializado do Conteúdo*, ou seja, verificar se o professor identificava propriedades associadas às estruturas algébricas afim de identificar causas de erros cometidos pelos estudantes ao resolver a equação

Análise e discussão dos resultados

Para a *questão 1* observamos que dentre os 10 professores analisados, nenhum deles indicou o método de completar quadrados, mas 9 mencionaram o trinômio quadrado perfeito. A nosso ver o reconhecimento de que esta equação pode ser resolvida pela fatoração é importante visto que tal procedimento poderia favorecer o encaminhamento dado à resolução de algumas equações de grau maior que dois.

Além disso, observamos que nem todos os sujeitos investigados observaram a falta de validação do resultado: somente 3 docentes apresentaram tal indicação. Quanto aos encaminhamentos, observamos também que somente esses 3 professores os apontaram. Dentre eles, observamos haver por parte dos docentes propostas distintas:

(...) Parabéns por ter conseguido enxergar um quadrado perfeito, mas cadê o conjunto solução? (Professor E)

(...) basta fazer a verificação e dizer ao aluno a importância da equivalência. (Professor H)

(...) Diria a ele que utilizasse Bhaskara; ele encontraria o valor do discriminante e com isso observaria que Δ seria negativo e diria que não existe uma resposta no U |R [referindo-se a universo Reais] (Professor I)

Houve por parte dos professores E e H a concordância quanto à preocupação com a falta de validação do resultado, todavia somente a apresentam; o Professor E reitera a necessidade da problematização. Já o professor I mostrou-se preocupado em apresentar outro procedimento de Cálculo ao aluno. Observamos que as respostas ao questionário indicaram lacunas nos conhecimentos dos professores investigados, em relação à análise do da resolução da equação, como por exemplo, quando o professor F não reconhece a resolução pela estratégia apresentada. Nosso sujeito de pesquisa declara: "Nos itens 1, 2, 3, 4 foi mantido a igualdade, mas não houve resolução do problema caso ele procurasse a resolução iria encontrar o Δ=-16, onde a resposta é (nenhum número real)^2=-16" (Professor F).

Para o docente, a resolução passaria necessariamente pelo cálculo do Δ. Nesse sentido, assim como o professor F, a maioria dos professores não menciona o que diria ao aluno. Dessa forma, pudemos observar que os professores se restringem somente a analisar o aspecto processual assim como descrito por Attorps (2003, 2006). Analisando esse resultado sob o ponto de vista de Shulman (1986) e de Ball et al (2008), observa-se que a ausência de compreensão de procedimentos para resolução de equação implicaria igual falta de conhecimentos para o seu ensino.

Reiteramos que para a questão 2, reapresentada a seguir, procuramos analisar o *Conhecimento Especializado do Conteúdo:*

2- Para resolver a equação x (x+2) = 5, um aluno deu a seguinte resolução:

$$x(x+2) = 5$$

$$x = 5 \;\; ou \;\; x+2 = 5$$

$$x = 5 \;\; ou \;\; x = 3$$

Discuta a resolução dada pelo aluno. Justifique sua resposta.

O que você diria ao aluno que apresentou essa resolução?

Na análise da questão esperávamos verificar se o professor identificava, por exemplo, que o produto 5 era um número primo, e desta forma permitiria como fatores somente os números 1 ou 5, o que resultaria em um número reduzido de combinações de respostas.

Os professores poderiam também chamar a atenção para o fato de que a equação do tipo $x(x+a)\neq 0$, com x e $a\in\Re$ tem sua forma muito próxima a equações do tipo $x(x+a)=0$, o que poderia ter gerado tal equívoco por parte do aluno, uma vez que tais equações são comuns em livros didáticos. Analisando as respostas dos professores observamos que dois professores estabeleceram tal relação:

Ele utilizou o conhecimento em resolução para equações incompletas. Mas na verdade não trata-se de uma equação incompleta e sim de uma equação completa que foi apresentada em sua forma fatorada. (PROFESSOR G)

Ele imaginou a solução da equação do 2° grau com igualdade zero e não observou que a resposta é cinco. O aluno lembrou que o produto de dois fatores é zero quando um dos termos é zero e resolveu esta equação pensando assim. (PROFESSOR I)

Consideramos que os conhecimentos destes professores contribuíram para identificar as causas do erro cometido pelo aluno. Todavia esperávamos que ao sugerir a interversão o professor indicasse que faria uma discussão sobre esse tipo de equação e utilizaria as propriedades associadas às estruturas algébricas para justificar a validação deste procedimento para resolução. Neste caso, a análise dos dados nos permitiu observar que a maioria dos professores se restringiu apenas em analisar se o procedimento realizado pelo aluno estava ou não correto. Com exceção dos professores E, H e I, que apresentaram sua intervenção diante do que foi apresentado:

Então eu retomaria a explicação à parte para ele e entregaria em suas mãos com uma etapa resolida. (PROFESSOR E)

Diria para ele fazer a verificação dos valores das raízes para ver se satisfaz, ou se é verdadeira, depois igualar a zero a equação. (PROFESSOR H)

Diria que ele deveria fazer a distributiva e resolver por outro método, por exemplo, Bhaskara. (PROFESSOR I)

Analisando os três encaminhamentos, observamos que os três professores demonstraram preocupar-se com retomada do conteúdo, porém, somente o Professor H, foi além ao demonstrar sua preocupação em problematizar o erro do aluno. Todavia, vale ressaltar que não houve menção às propriedades.

Analisando os resultados das respostas as duas questões observamos que as concepções dos professores envolvidos estavam próximas aos indicados por Ball (1990), Attorps (2003, 2008) e Ribeiro (2007). Desta forma, essa investigação mostra que há necessidade de rediscutir as formas como os conteúdos matemáticos, em especial, os da equação vem sendo desenvolvidos nos cursos de formação inicial e continuada.

Nesse sentido a partir resultados encontrados no questionário aqui apresentado, que foi respondido no início da formação continuada, foi possível constituir uma visão da possível influência de dificuldades relativas ao conhecimento matemático na prática docente. Assim,

procuramos por meio do processo formativo, que não foi descrito neste artigo, superar essa ausência de conhecimento de forma a permitir que houvesse a (re)construção do conceito de equações.

Considerações Finais

Analisando os dados coletados antes da formação continuada aqui apresentado é possível afirmar que os professores não tinham total compreensão de conceitos, propriedades e procedimentos de resolução de equações e isso, provavelmente, limitava sua prática docente.

Assim sendo, analisando este resultado sob o ponto de vista de Shulman (1986) e de Ball et al (2008), observamos os conhecimentos adquiridos por esses profissionais até então parecem não contribuir de forma significativa para a efetivação do seu ensino. De tal modo, este estudo indica que há necessidade de rediscutir as formas como os conteúdos matemáticos e, em especial, a as equações são introduzidos tanto nos cursos de formação inicial, quanto em cursos de formação continuada.

Referências Bibliograficas

Attorps, I. (2003). Teachers' images of the 'equation'concept. *European Research in Mathematics Education*.

Attorps, I. (2006). *Mathematics teachers' conceptions about equations*. Doctoral dissertation, University of Gävle.

Ball, D.L. e Wilson, S. (1990). Knowing the subject and learning to teach it: examining assumptions about becoming a mathematics teacher. *Research Report N.C.R.T.E.*

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching What Makes It Special?. *Journal of teacher education*, 59(5), 389-407.

Chazan, D. & Yerushalmy, M. (2003). On appreciating the cognitive complexity of school algebra: Research on algebra learning and directions of curricular change. *A research companion to principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Garcia Silva, A. F. (2007). *O desafio do desenvolvimento profissional docente:* análise da formação continuada de um grupo de professores das séries iniciais do ensino fundamental, tendo como objeto de discussão o processo de ensino e aprendizagem das frações.Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Lautenschlager, E. (2012). *Discutindo os multisignificados de equação num curso de formação continuada de professores.* Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Bandeirante de São Paulo.

Ribeiro, A. J. (2007). *Equação e seus multisignificados no ensino de Matemática: contribuições de um estudo epistemológico*. (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher*, 15(2), 4-14.

ESTUDIO EXPLORATORIO ACERCA DE LAS DIFICULTADES QUE MUESTRAN ALUMNOS DE BACHILLERATO PARA TRANSITAR DE UN RAZONAMIENTO INDUCTIVO A UNO DEDUCTIVO

Jesús Salinas Herrera y Salvador Moreno Guzmán
CCH Plantel Vallejo, UNAM. (México), CCH Plantel Naucalpan, UNAM. México
jes54@unam.mx, salvador.cchnauc@gmail.com

Resumen. Se replica un experimento de enseñanza considerando la dimensión histórica de las matemáticas, en el cual se considera la aritmética pitagórica para explorar las dificultades que tienen los alumnos de segundo semestre de bachillerato para transitar de un razonamiento inductivo a un razonamiento deductivo. Se muestran los resultados de este experimento y la manera en que el profesor-investigador gestiona dicho experimento para propiciar que los estudiantes realicen dicha tarea

Palabras clave: números poligonales, razonamiento inductivo y deductivo

Abstract. It replicates a teaching experiment considering the historical dimension of mathematics, which is considered the Pythagorean arithmetic to explore the difficulties of students in the second semester of high school to move from inductive reasoning to deductive reasoning. It shows the results of this experiment and how the teacher-researcher managed the experiment to encourage students to perform this task

Key words: polygonal numbers, inductive and deductive reasoning

Introducción

En este estudio se replicó un experimento de enseñanza (Steffe & Thompson, 2000) considerando la histórica de las matemáticas como recurso didáctico (Salinas, 2010), y se enriqueció dicho experimento en su contenido y gestión. El enfoque histórico (Fauvel, 1991) se tomó con una doble función: para mostrar un rostro humano de las matemáticas, considerando su papel en la cultura (Bishop, 1995) y, utilizar los diagramas de los números poligonales como instrumentos psicológicos (Vygotsky, 1995; Kozulin, 2000; Wertsch, 1988) para el desarrollo del pensamiento deductivo a través de la aritmética pitagórica.

En el experimento anterior (Salinas y Maz Machado, 2012), se observaron diversas dificultades que tienen alumnos de matemáticas, de primer año del bachillerato del Colegio de Ciencias y Humanidades, UNAM, para demostrar un teorema de la aritmética pitagórica. No obstante, que mostraron avances en la identificación de los patrones numéricos y geométricos de los números poligonales, no pudieron transitar de un razonamiento inductivo a un razonamiento deductivo para efectuar dicha demostración. En el trabajo que aquí se presenta se replicó dicho experimento de enseñanza, y se enriqueció su contenido y la manera de gestionarlo, para avanzar en alcanzar dicha meta.

Problema de Investigación

Enfocamos nuestra atención fundamentalmente en: analizar el tipo de dificultades que tienen alumnos de primer año de bachillerato para elaborar un razonamiento deductivo, a partir de la identificación de los patrones de los números poligonales, y observar si logran superar dichas dificultades con cierta orientación del profesor-investigador.

Marco teórico

En el diseño del experimento de enseñanza que se llevó a cabo se considera el dominio histórico, social y cultural del desarrollo de las matemáticas (Fauvel, 1991, Bishop, 1999). De esta manera, se aborda el conocimiento matemático como parte de la cultura que produce una sociedad en determinado momento histórico (Rico, 1998). Paralelamente, seguimos la perspectiva teórica de Vygotsky (2009). Así, utilizamos los diagramas pitagóricos como signos externos de la teoría numérica, y de esta manera, usamos dichos diagramas como instrumentos psicológicos, instrumentos de mediación semiótica (Kozulin, 2000), para propiciar el desarrollo de un pensamiento deductivo en los alumnos.

De acuerdo con lo anterior, consideramos el aprendizaje de los estudiantes como un proceso de apropiación de los métodos de acción y de representación de una cultura dada (Radford, 1997). En dicha apropiación, consideramos que los instrumentos psicológicos o simbólicos desempeñan una función esencial en el desarrollo cognitivo (Wertsch, 1988).

Metodología

Se llevó a cabo una secuencia didáctica con una duración de 10 horas. Las actividades se realizaron en parejas de estudiantes, constituidas por ellos mismos.

La población observada fue un grupo de 24 alumnos de segundo semestre de bachillerato del Colegio de Ciencias y Humanidades, UNAM, durante las actividades escolares de un curso ordinario. Participaron 10 hombres y 14 mujeres con edades entre 15 y 17 años.

Se resolvieron problemas adaptados de la aritmética pitagórica. Se llevó a cabo un análisis cualitativo de las respuestas de los estudiantes.

Procedimiento

En la secuencia didáctica los alumnos realizaron diversas actividades. La duración fue de 10 horas. En la apertura de la secuencia, en dos sesiones de una hora y media cada una, el profesor-investigador describió y explicó a los estudiantes algunas ideas centrales del pensamiento numérico de los pitagóricos, en el marco de su contexto cultural. En el desarrollo de la secuencia, en 3 sesiones, con una duración de hora y media cada una, los estudiantes, debían observar e interpretar los patrones aritméticos y geométricos que se representan en una tabla donde se

dibujan los primeros cinco números triangulares, cuadrados, pentagonales y hexagonales, respectivamente. Después, debían demostrar un teorema adaptado de la aritmética pitagórica. Finalmente, en el cierre de la secuencia, dos sesiones de una hora, los alumnos debían probar, con cierta orientación del profesor-investigador, dos teoremas más de la aritmética pitagórica.

Análisis de los contenidos matemáticos implicados en las actividades

Los números poligonales se forman por puntos que describen polígonos regulares (Fig. 1). Las figuras geométricas que construyeron los pitagóricos con los números poligonales, proporcionan una evidencia visual de numerosas propiedades de los números naturales. De esta manera, estos diagramas han mostrado ser heurísticamente ricos, por ejemplo, para establecer relaciones entre propiedades de órdenes consecutivos de números de un determinado tipo, así como relaciones entre números poligonales de tipos diferentes. Todas estas propiedades y relaciones se obtienen de simples comprobaciones aritméticas. Sin embargo, su prueba requiere de un simbolismo algebraico.

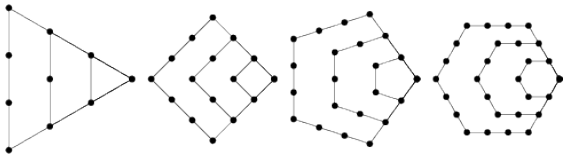


Figura 1. Primeros cuatro números poligonales

Los diagramas anteriores, Fig. 1, ilustran gráficamente el proceso mediante el cual los números poligonales se construyen. La regla para formar un número triangular es agregar, a cada triangulo de lado n, un lado con n+1 puntos, así obtenemos 1, 3, 6, 10, 15, 21, ... que resultan de la serie 1+2+3+4+5+6 ... Por lo tanto, el n-ésimo número triangular está dado por $T(n) = [n \cdot (n+1)]/ 2$

La misma observación de las figuras señala que $T(n) = T(n-1)+n$, donde $T(1) = 1$, lo cual proporciona una definición recursiva de números triangulares que permite obtener cada uno de ellos en términos del número anterior. Similarmente, los diagramas ilustran como construir los demás números poligonales a partir de los números triangulares. Por ejemplo, es posible observar que todo número cuadrado es la suma de dos números triangulares sucesivos.

1+3=4

3+6=9

6+10=16,

Es decir, $C(n)= T(n)+T(n-1)$ (*Teorema de Teón de Esmirna* (González Urbaneja, 2009)

$C(n)= [n\cdot(n+1)]/2 + [(n-1)\cdot n]/2 = n^2$

Además, podemos observar cual es la regla recursiva para la construcción de los números cuadrados $C(n) = n^2$.

$1+3=2^2$

$1+3+5=3^2$

$1+3+5+7=4^2$

$1+3+5+7+9=5^2$, En general, $C(n)= C(n-1) + (2n-1)$, $C(1)=1$. Esto además pone de manifiesto la relación entre los números cuadrados con los números impares.

Instrumentos de observación

De los instrumentos de observación que se aplicaron en el experimento de enseñanza nos centraremos sólo en el cierre de la secuencia didáctica, en la cual los alumnos debían demostrar algunos teoremas adaptados de la aritmética pitagórica. Los datos que aquí se reportan fueron tomados de las hojas de actividades realizadas en el salón de clase. Tales datos fueron expresados en forma de textos y se realizó un análisis cualitativo de ellos.

La primera de dichas actividades fue la siguiente:

1. Demostrar que todo número cuadrado es igual a la suma de dos números triangulares sucesivos

Partimos de observar que hacen los estudiantes al pedirles demostrar este teorema. Como parte de la gestión del experimento, una vez que llevaron a cabo esta actividad, el profesor-investigador comentó con el grupo los errores y explicó que la demostración de un enunciado universal requiere de la utilización de una simbolización algebraica que contemple el aspecto general del problema. Se proporcionó a los alumnos las expresiones algebraicas para los números triangulares, cuadrados, pentagonales y hexagonales; y se ejemplifico como hallar dichas expresiones algebraicas para los números triangulares y cuadrados. .

Posteriormente, se realizaron dos actividades más de demostración de otros dos teoremas de la aritmética pitagórica. La primera de estas dos actividades fue:

2. De acuerdo a los diagramas de los números poligonales pitagóricos, observa si se cumple que todo número pentagonal se compone de un número triangular del mismo orden más otros dos de orden previo. Si consideran que se cumple esta situación, demuestra que ese enunciado es verdadero.

Después de la realización, por parte de los alumnos, de esta actividad, el profesor volvió a explicar los aspectos que se deben tener en cuenta, e hizo énfasis en distinguir el carácter

universal del enunciado en cuestión, asociado con su representación algebraica, de los casos particulares expresados aritméticamente.

Una vez hecho lo anterior, se les pidió realizar la siguiente actividad:

2. Observa si se cumple que todo número hexagonal se compone de un número triangular del mismo orden y otros 3 de orden previo y demuestra que dicho enunciado es verdadero.

Resultados y discusión

Actividad 1: Demostrar que todo número cuadrado es la suma de dos números triangulares sucesivos.

En esta actividad los alumnos manifiestan fundamentalmente habilidad para la representación aritmética y sólo algunos manejan una representación geométrica de los números poligonales (triangulares y cuadrados). Sin embargo, en sus respuestas, para probar el enunciado general, todos los alumnos solo responden poniendo ejemplos en los que se cumple el enunciado en cuestión.

Actividad 2: De acuerdo a los diagramas de los números poligonales pitagóricos, observa si se cumple que todo número pentagonal se compone de un número triangular del mismo orden más otros dos de orden previo. Si consideran que se cumple esta situación, demuestra que ese enunciado es verdadero.

Dos parejas de alumnos utilizaron adecuadamente la información y la orientación dada por el profesor-investigador para realizar correctamente la actividad. Distinguen los casos particulares del caso general. Plantean correctamente el enunciado en términos algebraicos y desarrollan correctamente el procedimiento algebraico para demostrar que el enunciado es verdadero.

Sin embargo, la mayor parte, seis parejas de alumnos, sigue proponiendo casos particulares para justificar la verdad del enunciado. Y, otros alumnos pretenden demostrar el enunciado mediante la sustitución de un valor particular en la "fórmula general", como se muestra en la Fig. 3. Aquí, confunden comprobación con demostración.

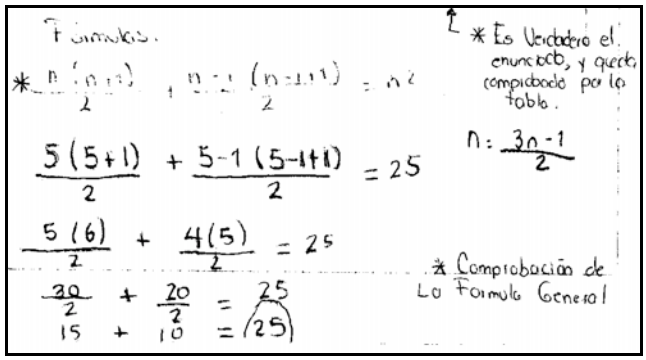


Figura 3.

Actividad 3: Observar y mostrar que todo número hexagonal se compone de un número triangular del mismo orden y otros tres de orden previo y demostrar que dicho enunciado es verdadero.

Las respuestas a esta última actividad reflejan un avance cualitativo y cuantitativo muy importante en los alumnos. Más de la mitad de ellos, ocho parejas, responden correctamente a esta actividad. Ver Fig. 4. Otras tres parejas plantean bien el problema pero comenten errores en el desarrollo algebraico.

Así pues, se observa, análogamente al experimento de enseñanza anterior, que desde las primeras actividades de la secuencia didáctica, un número importante de alumnos reconocen el patrón geométrico y aritmético que se encuentra en la fig. 1, y la conversión (Duval, 1999), es decir, el pasaje de un registro de representación a otro se da de manera espontánea sin intervención del profesor-investigador. Los alumnos vinculan ambos patrones de representación y dan continuidad a las secuencias de números representados. Esta situación les permite realizar tareas donde trabajan con sucesiones y series de números y relaciones entre ellas, es decir hay un desarrollo en el tratamiento del registro de representación aritmético (Duval, 1999). Así, podemos afirmar que sin instrucción explicita los alumnos desarrollan un proceso de interiorización de los patrones de los números poligonales.

En su primer intento de probar un teorema de la aritmética pitagórica los alumnos reconocen el cumplimiento de ciertas relaciones entre diferentes tipos de números poligonales. Pueden identificar el cumplimiento de dichas relaciones para casos particulares, pero no son capaces de justificar su cumplimiento general. En esta fase siguen utilizando fundamentalmente un razonamiento inductivo para tratar de mostrar el carácter general de las propiedades y relaciones entre los números poligonales. Las estrategias que utilizan son fundamentalmente dos: indicar algún ejemplo o sugerir un procedimiento recursivo.

Sobre esta base, en el cierre de la secuencia didáctica, se observa que los alumnos tienen un obstáculo que requiere ayuda para involucrarse en otros procesos de desarrollo cognitivo. Así, a través de la mediación del profesor-investigador y la interacción que se produce entre los alumnos y los alumnos y el profesor-investigador en la realización de las actividades, se propicia una negociación de significados que les permite a los alumnos distinguir, gradualmente, el aspecto particular de los ejemplos del carácter general de una demostración. De esta manera, prácticamente todos los alumnos avanzan en la demostración del tercero de los teorema de la aritmética pitagórica que se les proponen.

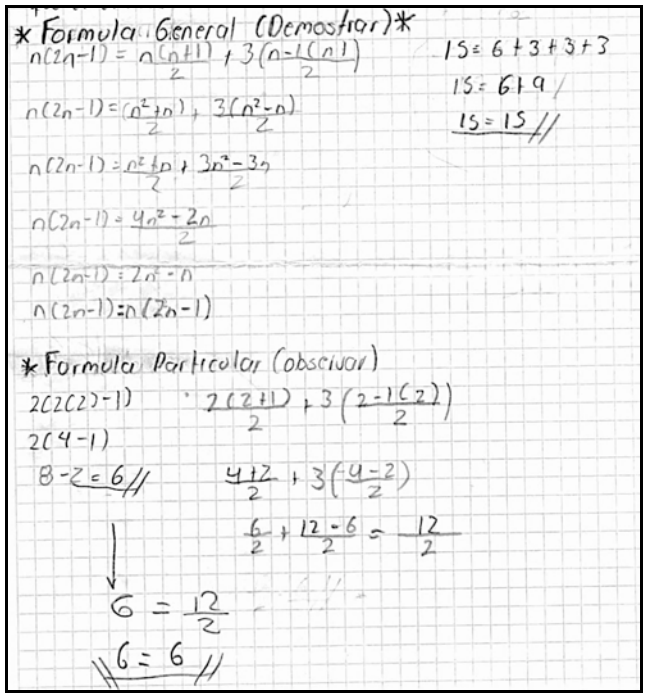


Figura 4

Conclusiones

En este experimento de enseñanza, la dificultad fundamental que muestran alumnos de bachillerato para transitar de un razonamiento inductivo a uno deductivo, es comprender la diferencia entre el caso particular de los ejemplos y el aspecto general de la demostración.

Los alumnos van interiorizando gradualmente los patrones aritméticos y geométricos de los números poligonales, y en las diferentes actividades que realizan se basan en un razonamiento inductivo. Este tipo de razonamiento es la estrategia central que utilizan para identificar los patrones y generalizar, sin embargo, cuando se trata de probar un resultado general no logran desvincularse del mismo tipo de razonamiento y se restringen sólo a mostrar el cumplimiento de casos particulares. Así, implícita o explícitamente, confunden la demostración con una comprobación de casos.

La distinción de los casos particulares y el general, en una demostración, es algo que los estudiantes no logran asimilar espontáneamente y requiere la intervención del profesor-investigador para negociar el significado del simbolismo algebraico y comprender la necesidad de su uso en la realización de esta tarea. Así, la mayor parte de los alumnos avanzan en elaborar un razonamiento deductivo. .

Referencias bibliográficas

Bishop, A. J. (1999). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultura*. Barcelona, España: Paidos.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education. *For de learning of mathematics*. 11 (2), 13-16.

González Urbaneja, P. M., (2009). *Pitágoras. El filósofo del número.* Madrid: Nivola libros y ediciones.

Kozulin, A. (2000). *Instrumentos Psicológicos*. Barcelona: Paidós.

Radford, L. (1997). L`invention d`une idée mathematique: la deuxieme inconnue en algebra. *Repères, Revue des IREMs* 28 (july), 81-96

Rico, L. (1998). Conocimiento numérico y formación del profesorado. *Revista de la Universidad de Granada*. Vol. 11. Granada: Universidad de Granada.

Salinas, J. (2010). El uso de la historia de las matemáticas para el aprendizaje de la geometría en alumnos del bachillerato. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* Lleida: SEIEM. pp. 557-568.

Salinas, J. y Maz-Machado, A. (2012). Una aproximación a la prueba a través de la aritmética. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 25, pp. 283-290*. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Steffe, L. y Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements. En A. E. Nelly y R. A. Lesh (Eds). *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Mahwah: NJ: Lawrence Erlbaum.

Vygotsky, L. S. (2009). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores.* Barcelona: Crítica.

Wertsch, J. (1988). *Vygotsky y la formación social de la mente.* Barcelona: Paidos.

CONFRONTACIÓN DE MODELOS DE ENSEÑANZA EN LA TRANSICIÓN DE LA SUMA ARITMÉTICA A LA SUMA ALGEBRAICA

Andrea Aurora Pérez Esguerra, Eugenio Filloy Yagüe, Aurora Gallardo Cabello
DME, CINVESTAV – IPN México
aaperez@cinvestav.mx; efilloy@cinvestav.mx; agallardo@cinvestav.mx

Resumen. En este trabajo realizamos una confrontación de tres diferentes modelos de enseñanza, durante la transición de la suma aritmética a la suma algebraica, en alumnos de primero de secundaria. Se utilizaron el modelo de enseñanza sintáctico, el modelo continuo de la recta numérica contextualizada y un modelo discreto consistente en una actividad lúdica denominado "la cucaracha". Los resultados obtenidos muestran las tendencias cognitivas presentadas en cada modelo, por los alumnos del estudio.

Palabras clave: modelos, enseñanza, transición, suma algebraica

Abstract. In this work we perform a comparison of three different models of teaching, during the transition from arithmetic to algebraic sum, in seventh grade students. We used the syntactic teaching model, continuous model number line contextualized and a discrete model consisting of a recreational activity called "la cucaracha". The results show cognitive trends presented in each model, students study.

Key words: models, teaching, algebraic sum, transition

Diversos investigadores como Glaeser (1981) y Gallardo (2002) entre otros, han evidenciado la resistencia a la aceptación de soluciones con números negativos en ecuaciones y problemas, tanto en el ámbito histórico del desarrollo de la matemática como en estudiantes que se inician en el estudio del algebra simbólica (Gallardo, 2002). El objetivo de este estudio es identificar como transita un alumno de primero de secundaria de una suma aritmética a una algebraica. Las preguntas de investigación son: ¿identifican y operan correctamente los elementos necesarios para realizar una suma aritmética? ¿Qué procesos cognitivos se desencadenan para transitar de la suma aritmética a la algebraica?

Marco teórico-metodológico

Dentro de los Modelos Teóricos Locales (Filloy, 1999), una perspectiva semiótica para la observación experimental en Matemática Educativa, se señala la existencia de tendencias debido a las estructuras cognitivas del sujeto que aparecen en cada estadio del desarrollo individual, que da preferencia a distintos mecanismos de proceder, diferentes maneras de codificar y descodificar los mensajes matemáticos pertinentes al estadio en cuestión. Se sugiere la existencia de una etapa pre – operacional en la que se presentan obstrucciones, que generan después errores naturales de sintaxis como: uso inadecuado de los signos de igualdad, ausencia de éstos, olvido de algunos términos, etc.

Estas tendencias (TC) son "hechos" que siempre se presentan cuando en una situación de enseñanza se está tratando de pasar de un estrato de un lenguaje de Sistema Matemático de Signos (SMS) más concreto a uno más abstracto. Las tendencias cognitivas identificadas por Filloy son once, en este estudio se identificaron: la TC2 la dotación de sentidos intermedios; la TC4 la imposibilidad de desencadenar operaciones que podían hacerse momentos antes; la TC7 la presencia de mecanismos apelativos que centran el desencadenamiento de procesos erróneos de resolución; la TC8 la presencia de mecanismos inhibitorios; y la TC10 la generación de errores sintácticos debido a la producción de códigos personales en las actividades que realizaron los estudiantes en los modelos de enseñanza aplicados, especialmente la solución de ejercicios con presencia de soluciones negativas da lugar a obstrucciones de reglas sintácticas ya dominadas.

Respecto a la TC2, (Gallardo, 2002), identificó cuatro sentidos intermedios de los números negativos. Estos sentidos se designan e interpretan a continuación: *Número sustractivo:* la noción de número está subordinada a la magnitud. En la resta de dos cantidades $a - b$, siempre b será menor que a, donde a, b son números naturales, es decir, el signo menos sólo tiene carácter binario en el nivel de la operación de sustracción. Por ejemplo: $7 - 4 = 3$. *Número signado:* Es el número natural al que se le asigna un signo más o un signo menos. Surge la dualidad del signo: binario (signo de la operación de adición o sustracción) y unario (signo asociado al número natural). Por ejemplo: $6 + (-8)$. *Número relativo:* Se hace presente cuando se concibe la idea de opuestos en situaciones discretas, y la idea de simetría en situaciones continúas. Por ejemplo: $+4$, -4. *Número aislado:* Se acepta un número negativo como la solución de una operación, un problema o una ecuación. Por ejemplo: -6.

En relación con los modelos de enseñanza, hay posiciones encontradas respecto al tipo de recursos didácticos a utilizar en el desarrollo curricular: una propone "modelar" en contextos más "concretos" o contextos familiares para el alumno, las nuevas operaciones, con el propósito de dotarlos de significados y tomando éste como punto de partida, construir los primeros elementos de sintaxis. Una posición opuesta es la que propone partir del nivel sintáctico y enseñar las reglas sintácticas, modelo tradicional en la enseñanza de la resolución de ecuaciones basado en el modelo sintáctico – viético (transposición de términos de un miembro a otro) para aplicarlas en la resolución de ecuaciones y problemas.

Los contrastes entre los dos modelos saltan a la vista: mientras que en el modelo concreto se pone énfasis en trabajar con una gran carga semántica en todos los signos y operaciones involucrados. En el modelo sintáctico, el énfasis se pone en la regla general utilizada para construir los hábitos que desencadenarán las operaciones.

El aprendizaje de la suma y la resta comienza en la etapa infantil de una manera informal, a través de situaciones cotidianas y está presente, con diferentes grados de abstracción, a lo largo de la escolaridad obligatoria, a medida que se introducen los sistemas numéricos. Bruno, sugiere el uso de la recta numérica como un modelo para las operaciones con números negativos, siempre que su uso se dote de significado concreto: "los estudiantes lograrían un uso más productivo de la recta numérica si ésta fuese considerada más como una representación contextualizada que como un modelo abstracto". (Bruno, 1994, p.47)

La enseñanza de los números negativos con alumnos de 12 o 13 años, supone la modificación de creencias fuertemente arraigadas construidas a lo largo de la enseñanza Primaria. Hay muchos alumnos que cometen errores al efectuar operaciones simples con números negativos.

En general, la operación más sencilla de efectuar es la suma y la más difícil es la resta, ya que la multiplicación y división suelen resultar más fáciles que la resta. Las respuestas erróneas son debidas a malas aplicaciones de las reglas. A veces los alumnos inventan reglas falsas que les pueden llevar a resultados correctos o incorrectos, según sean los signos de los números, es por ello, que les resulta complicado modificarlas. No debemos minimizar los errores de los alumnos, ya que son el reflejo de ciertas dificultades que producen los cambios en la introducción de los números negativos. Siguiendo la terminología de Socas (1997), podemos distinguir entre:

Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos

- Hay una nueva notación para los números positivos: +2 = 2.
- El signo menos tiene dos significados distintos, como signo del número y como operación de resta.
- Aparece una mayor complejidad sintáctica: paréntesis y signos.
- Se dan nuevas reglas para las operaciones.

Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático

- Los números negativos tienen menos usos que los números positivos. Por ejemplo, con los números negativos no podemos establecer el cardinal de un conjunto.
- Se identifican las operaciones de suma y resta.
- Hay un cambio en el efecto de las operaciones: sumar (multiplicar) no siempre es aumentar, restar (dividir) no siempre es disminuir.

Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza

- La enseñanza basada sólo en las reglas que rigen la operatoria puede causar problema a muchos estudiantes que necesitan situaciones concretas en las que apoyarse.
- No se conecta con el conocimiento previo de los estudiantes sobre los números positivos.

Instrumentos y procedimiento

Esta etapa de la investigación consta de dos momentos. En el primero, de diagnóstico (Pérez Esguerra, 2012, p.265), a un grupo de 20 alumnos de primero de secundaria de entre 11 y 13 años, se aplicó un cuestionario donde resolvieron ejercicios como: "escribir el inverso de algunos números como: – (–9)…"

En un segundo momento, reportado en este escrito, localizaron números y realizaron operaciones del tipo: + (+27) – (+11) – (–15) =. Partiendo de un modelo de enseñanza sintáctico, se les propusieron tareas en el aula que partían de sumas de números naturales para llegar a sumas de números enteros. Estas tareas se fundamentan en Filloy y Rojano (2001). Con respecto al modelo sintáctico, la evidencia empírica señala que aparte de generarse semánticas privadas del sujeto que confieren significado a los términos propuestos por la regla general y a las operaciones involucradas, además, aparecen fenómenos de lectura de las situaciones propuestas, guiadas por los sentidos que se les han conferido a las reglas que han de desencadenarse para ejecutar la tarea sintáctica.

Un ejemplo de los ejercicios realizados en el modelo sintáctico es el siguiente:

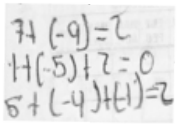
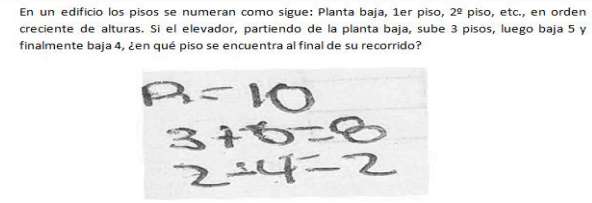


Ilustración 1. Ejemplo modelo sintáctico

Se aplicó también un modelo de enseñanza continuo, en el que los alumnos usaron la recta numérica contextualizada con ejercicios del tipo de temperaturas, deudas y ascensor, estos ejercicios se basaron en lo expresado por Bruno (1994). Las dificultades de estos problemas vienen determinadas por los siguientes aspectos: la estructura del problema; la posición de la incógnita; el contexto y los tipos de números (signos de los números). A continuación se ilustra este modelo, con un ejemplo:


En un edificio los pisos se numeran como sigue: Planta baja, 1er piso, 2º piso, etc., en orden creciente de alturas. Si el elevador, partiendo de la planta baja, sube 3 pisos, luego baja 5 y finalmente baja 4, ¿en qué piso se encuentra al final de su recorrido?

R= 10
3+5=8
2-4=-2

Ilustración 2. Ejemplo modelo continuo

Además se empleó un modelo de enseñanza discreto que consistió en la aplicación de la actividad lúdica denominada "La cucaracha", consistente en avanzar o retroceder casillas (Waldegg, Villaseñor, García, & Montes, 2008, p.15). Este es un juego de mesa en que participan de 2 a 5 jugadores o equipos. Se necesita un dado, un tablero de 10 X 10 (Ilustración 3) con una leyenda de "SALIDA" donde comienza el juego y otra de "META" que indica el fin del mismo; en cada casilla se encuentran factores como x (+ 6), x (– 4), y divisores como: ÷ (+1), ÷ (– 1), etc., acompañados de una etiqueta con un número colocado en el extremo superior izquierdo y una ficha por cada jugador.

SALIDA

1 x (+6)	2 x (+7)	3 x (+5)	4 x (+5)	5 x (+4)	6 ÷ (+1)	7 x (−2)	8 ÷ (−1)	9 x (+3)	10 x (−1)
11 ÷ (−1)	12 x (−2)	13 ÷ (+1)	14 x (−2)	15 x (−1)	16 ÷ (−1)	17 x (+3)	18 x (−2)	19 ÷ (−1)	20 x (−1)
21 ÷ (−1)	22 x (−3)	23 ÷ (−1)	24 x (−3)	25 x (−2)	26 ÷ (−1)	27 ÷ (−1)	28 x (−4)	29 x (+3)	30 x (−2)
31 ÷ (−1)	32 x (−4)	33 x (+6)	34 x (+7)	35 ÷ (−1)	36 x (−2)	37 x (−3)	38 x (−1)	39 x (−4)	40 x (+5)
41 x (−6)	42 x (−4)	43 ÷ (−1)	44 x (+5)	45 x (−4)	46 x (−3)	47 x (−1)	48 ÷ (−1)	49 x (+3)	50 x (−2)
51 x (+6)	52 x (+9)	53 x (−5)	54 x (−3)	55 x (+5)	56 x (−2)	57 x (+8)	58 x (−1)	59 x (−4)	60 x (+7)
61 x (−2)	62 ÷ (−1)	63 x (−4)	64 x (−6)	65 x (−3)	66 x (+7)	67 x (−1)	68 x (+7)	69 x (−5)	70 ÷ (−1)
71 x (−5)	72 x (+8)	73 x (−3)	74 x (−1)	75 x (+4)	76 ÷ (−1)	77 x (−6)	78 x (−4)	79 x (−3)	80 x (−1)
81 x (−4)	82 ÷ (−1)	83 ÷ (−1)	84 x (−5)	85 ÷ (−1)	86 x (+4)	87 x (−4)	88 ÷ (−1)	89 x (−5)	90 x (−2)
91 x (−3)	92 x (−2)	93 x (−3)	94 x (−4)	95 x (+4)	96 ÷ (−1)	97 x (−2)	98 x (−5)	99 x (−3)	100 x (−4)

META

Ilustración 3. Tablero de actividad lúdica

Las instrucciones de la actividad lúdica denominado la cucaracha son:

1. En la primera jugada, cada jugador tira una vez el dado y avanza el número de casillas que indique la tirada.

2. En los siguientes turnos cada jugador tira el dado, al número que obtenga le aplica la operación indicada en la casilla en que se encuentre, y se mueve los lugares que indiquen los resultados obtenidos. Ahí espera nuevamente su turno.

3. Cuando el resultado es positivo, el jugador se mueve en el sentido en el que aumenta la numeración; si es negativo, cambiará el sentido del movimiento y se moverá en el sentido en el que disminuye la numeración.

4. Gana el jugador que primero llegue a la meta; el jugador que regresa a la salida vuelve a empezar el juego.

El objetivo de aplicar los modelos de enseñanza (sintáctico, continuo, discreto) permitió que los estudiantes hicieran uso de los sentidos intermedios de los números negativos: sustractivo, signado, relativo y aislado. Es importante señalar que en el modelo discreto, los números aislados se concentran en la salida, es decir, fuera del tablero y no aparecen en forma escrita.

Resultados

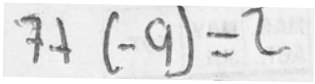
En la tabla que sigue, se realizó un comparativo de las respuestas dadas por los estudiantes en los ejercicios de los modelos de enseñanza empleados.

Modelos / respuestas	Sintáctico	Continuo	Discreto
Correctas	4 (cuatro)	13 (trece)	16 (dieciséis)
Incorrectas	14 (catorce)	6 (seis)	4 (dos)
No contestadas	2 (dos)	1 (una)	0 (cero)

Ilustración 4. Resultados comparativos por modelo de enseñanza

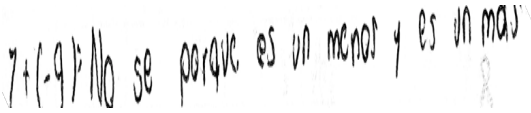
Como se observa en la tabla, en el modelo sintáctico, el 20% de los estudiantes contestaron correctamente los ejercicios que se les plantearon; al analizar las respuestas dadas, se encontró que identificaron los números sustractivo, signado y relativo (TC2), y se manifestaron las TC8 y TC10, al darse respuestas como las siguientes:

Ilustración 5. Ejemplo TC10



Se omitió signo negativo en respuesta.

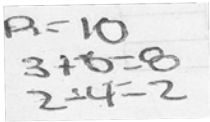
Ilustración 5. Ejemplo TC8



Mecanismo inhibitorio.

Siguiendo con el desglose de la tabla comparativa, (Ilustración 4), encontramos que en el modelo continuo, el 65% advirtieron los cuatro sentidos intermedios de los números negativos, sin embargo, algunos de los estudiantes cometen errores relativos a la TC7.

Ilustración 6. Ejemplo TC7



Proceso erróneo de resolución

En el modelo discreto, el 80% solucionaron de forma correcta los ejercicios de este modelo, de acuerdo a la multicitada Ilustración 4, identificaron todos los sentidos y se presentó la TC4 y TC10. Un caso particular fue el de un equipo que se encontraba en la etiqueta 7 con el factor **x (–2)**, al lanzar el dado salió el número 6, que debía multiplicarse por el **x (–2)** señalado en la casilla, el resultado arrojaba **– 12** que debía sumarse al 7 de la casilla en la que se encontraban: **(–12) + 7 = – 5;** por lo que debieron regresar a la "SALIDA" para recomenzar el juego. Este modelo de enseñanza es principalmente oral pues los estudiantes verbalizan sus respuestas. A continuación se ilustra parte de la transcripción donde se presentaron las tendencias mencionadas en este modelo de enseñanza.

	Diálogo	*Observaciones*
J	Salió **6 más 3 nueve**	Se presentó la **TC10**, ya que generó un error sintáctico por la omisión de una operación, al intentar darle sentido a lo que tenía que realizar.
I	Espera un momento... recuerda que al seis que te salió debes aplicarle la operación correspondiente ¿qué acción indica la casilla?	
J	Estaba en 3, y dice: "Por más 5", entonces el seis que me salió por más cinco, **son 30, más 3... 36**, ¿entonces voy al 36?	
I	¿Seguro? 30 más 3 ¿son 36?	Se mostró también la **TC4**, que se refiere a la imposibilidad de realizar operaciones que se podían efectuar momentos antes, en este caso una suma.
J	Ah, no, 33... ¿entonces al 6 que me sale lo multiplico por más 5 y le sumo el tres de la casilla? Creo que ya entendí.	

Ilustración 7. Modelo Discreto

Con estos resultados, podemos concluir que en una combinación de los modelos aplicados, se logró que los alumnos lograran en diferentes medidas la transición de la suma aritmética a la algebraica, pues identificaron los elementos que son necesarios para realizar los diferentes tipos de sumas, lo cual responde a nuestra primera pregunta de investigación: ¿identifican y operan correctamente los elementos necesarios para realizar una suma aritmética?

También logramos identificar las tendencias cognitivas que se presentaron en la transición en cada modelo aplicado, con lo que se dio respuesta a nuestra pregunta: ¿Qué procesos cognitivos se desencadenan para transitar de la suma aritmética a la algebraica?

Referencias bibliográficas

Bruno, A. (1994). La recta en el aprendizaje de los números negativos. *Suma.* 18, 39-48

Filloy, E. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Filloy, E., Rojano, T. (2001). *Álgebra.* México. Grupo Editorial Iberoamérica.

Gallardo, A. (2002). The extension of the natural negative number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 171 – 192

Glaeser, G. (1981). Epistemologie des nombres relatifs. *Recherches en Didàctique des Mathèmatiques,* 2 (*3*), 303 – 346.

Pérez Esguerra, A. (2012). La transición de la suma aritmética a la suma algebraica en estudiantes de 1° de secundaria. En L. Montejano (Ed). *Congreso Nacional Sociedad Matemática Mexicana 45,* 265. México: Sociedad Matemática Mexicana.

Socas, M.M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en Educación Secundaria. En L. Rico, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra y M. Socas, (Eds), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*, (pp. 125-154). Universidad de Barcelona: ICE/HORSORI.

Waldegg, G., Villaseñor, R., García, V., Montes, D., (2008). *Matemáticas 2. En contexto.* México: Esfinge.

PREFERENCIA DE REGISTROS DE REPRESENTACIÓN EN EL CONCEPTO DE LÍMITE DE FUNCIONES DE ALUMNOS DE PRIMER AÑO DE INGENIERÍA

María Rosa Romiti, Natalia Sgreccia y Marta Caligaris
Universidad Tecnológica Nacional
Universidad Nacional de Rosario
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas
mromiti@arnet.com.ar, sgreccia@fceia.unr.edu.ar, mcaligaris@frsn.utn.edu.ar

Argentina

Resumen. Límite de funciones se ubica en la primera unidad de Análisis Matemático I, en la que los alumnos necesitan desenvolverse con distintos registros de representación semiótica y realizar conversiones entre ellos para obtener una mejor comprensión del concepto. No obstante, los docentes de primer año observan la preferencia que los alumnos manifiestan en ciertas actividades de tratamiento de registros en detrimento de otras. Ante esto se analiza la preferencia de los alumnos acerca de los registros de representación semiótica y los motivos de tal inclinación. Consecuentemente se formula una propuesta de enseñanza que contempla los diversos registros en forma equitativa.

Palabras clave: límite, registros de representación semiótica

Abstract. Limits is part of the first subject in Calculus courses in which students need to handle different registers of semiotic representation and to make conversions between them, to get a better understanding of the concept. However, teachers of a first course of Calculus observe students' preference for activities in determined registers rather than others. Considering this fact, the students' preference for different registers of semiotic representation and the reasons for such trends are analyzed. Consequently, a teaching proposal equally considering the diverse registers is formulated.

Key words: limits, registers of semiotic representations

Introducción

El concepto de límite de funciones es relevante para plantear otros contenidos del Análisis Matemático I, como los del Cálculo Diferencial e Integral, que se apoyan en el mismo para su formalización y comprensión, incluso para otras ciencias, como Física. Dentro de la asignatura Análisis Matemático I, de las carreras de Ingeniería de la Facultad Regional San Nicolás, la unidad que comprende el concepto de límite de funciones es la primera en la que los alumnos se acercan a un contenido en el que necesitan gran manejo simbólico, abstracto y visual, para abordar definiciones, teoremas de la misma unidad y de las siguientes y utilizarlos en distintos registros de representación semiótica, tanto en actividades de tratamiento como de conversiones entre ellos, para obtener una mejor comprensión del concepto.

Sin embargo, los profesores de primer año observan la preferencia y mayor seguridad que los alumnos tienden a demostrar en ciertas actividades de tratamiento de registros de representación semiótica en detrimento de otras. Muchas veces tal preferencia está asociada, a su vez, con las de los docentes, y que plasman en sus propuestas de enseñanza (Hitt, 2003).

Una vez trabajadas las definiciones de límite ordinario y límites laterales, acompañadas de gráficas

mostrando las distintas situaciones que pueden presentarse, es notable la dificultad que a los estudiantes les trae graficar, buscar leyes que verifiquen determinadas condiciones impuestas sobre límite o la inseguridad que les provoca expresar en palabras el resultado de un límite.

Hacer que los alumnos lean y expliquen un texto donde prevalecen los símbolos matemáticos es más difícil y provoca mayor resistencia que solicitar que realicen cálculos de límites, aplicando algunas de las técnicas dadas. A éstos los resuelven por lo general de manera rutinaria sin detenerse a interpretar su resultado o significado.

Ante estas dificultades, y en el marco de la teoría de Duval (1999), se planteó como objetivo analizar la preferencia de los estudiantes acerca de los registros de representación semiótica y los motivos de tal inclinación.

Marco teórico

Para esta investigación el referente esencial es Duval (1999), con el enfoque basado en los registros de representación semiótica, analizando su incidencia en los procesos de aprendizaje de Análisis Matemático I en la unidad de límite y continuidad de funciones, particularmente en el concepto de límite.

Los Registros de Representación Semiótica (Registros, en lo que sigue) son sistemas semióticos de representación que involucran tres actividades cognitivas. Estos sistemas deben:

- *Ser identificables*, es decir, constituir una marca o conjunto de marcas que sean reconocibles como una representación externa de alguna cosa en algún sistema determinado: un gráfico, un símbolo, una frase, entre otros.
- *Permitir su tratamiento*, esto es, la manipulación y transformación dentro del mismo sistema, de acuerdo a sus propias reglas que puedan ofrecer cierto plus de conocimiento en comparación con las representaciones iniciales.
- *Permitir la conversión*, que consiste en transformar las representaciones producidas en un sistema de representación a otro. La coordinación o conversión entre sistemas se refiere a la vinculación de dos representaciones en distinto registro de un mismo objeto.

Los registros presentados para trabajar con los alumnos fueron tres: el gráfico, natural y simbólico.

Registro gráfico: contempla representaciones de funciones en un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales y bocetos informales que prescindan de un sistema de referencia. Está vinculado al concepto de visualización de Zimmermann (1990, citado en Hitt, 2003), quien afirma que conceptualmente el papel del pensamiento visual es tan fundamental para el aprendizaje del

Análisis Matemático que es difícil imaginar un curso exitoso de esta materia que no enfatice los elementos visuales del tema si se tiene la intención de promover un entendimiento conceptual.

Registro natural: se lo asocia a la lengua materna, primera lengua que una persona aprende y que se emplea como modo de expresión habitual en los diversos ámbitos de la vida corriente, para realizar descripciones, explicaciones, argumentaciones, deducciones, con el objetivo de comunicarse. Puede emplearse en forma oral o escrita, considerándose esta última en el presente trabajo.

Registro simbólico: la Matemática se apoya en un lenguaje simbólico formal, a veces denominado algebraico, que sigue una serie de convenciones propias. Los símbolos pueden considerarse objetos con valor propio y representan un concepto, una operación, una entidad matemática según ciertas reglas.

Los símbolos pueden involucrar una sola letra: x, y, etc. o varias letras y números: $sen\ x$, $log\ x$, $lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$, etc.

A su vez se considera el registro simbólico integrado por dos partes:

❖ *Simbólico de predominio procedimental:* aquel en el que el alumno deba aplicar, para resolver un problema planteado, estrategias sencillas o rutinarias, como ser:

-casos de factoreo, por ejemplo calcular $lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5}$.

-resultados de límites conocidos: $lim_{x\to 0}\frac{sen x}{x}$, $lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, entre otros.

-aplicaciones directas de propiedades relacionadas con el concepto (álgebra de los límites, composiciones de funciones, etc.).

❖ *Simbólico de predominio conceptual:* aquel en donde el alumno necesite conocer y manejar los símbolos matemáticos propios de las definiciones y propiedades de límite. En este tipo de actividades es necesario trabajar con mayor rigurosidad para entender la lógica de las definiciones y propiedades para poder resolverlo, si bien por lo general se aplican procedimientos algebraicos en busca de la solución. Se trata de una instancia en la que se involucra un pensamiento más formal, abstracto y comprensivo que la anterior.

Duval (1999) focaliza su estudio en el desarrollo de las actividades cognitivas que se requieren en el aprendizaje de la Matemática y que comprenden la utilización de sistemas de expresión o representación distintos del lenguaje natural, como ser el lenguaje simbólico o gráfico. Este aprendizaje además constituye un campo privilegiado para el desarrollo de actividades que

involucran la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la comprensión de textos.

> La especificidad de las representaciones semióticas consiste en que son relativas a un sistema particular de signos: el lenguaje, la escritura algebraica o los gráficos cartesianos, y en que pueden ser convertidas en representaciones "equivalentes", en otro sistema semiótico, pero pudiendo tomar significaciones diferentes para el sujeto que las utiliza. La noción de representación semiótica presupone, pues, la consideración de sistemas semióticos diferentes y una operación cognitiva de conversión de las representaciones de un sistema a otro. Esta operación puede describirse en primer lugar como un "cambio de forma" (Duval, 1999, p.27).

También sostiene el autor que el estudio del desarrollo de los conocimientos y de los obstáculos hallados, en torno al razonamiento, la comprensión de textos y la adquisición de tratamientos lógicos y matemáticos, enfrenta tres fenómenos que se relacionan.

El primero es el de diversificación de registros de representación semiótica. Ya Piaget tuvo cuidado en señalar que el lenguaje natural no era el único sistema semiótico al que le correspondía esta función. El lenguaje natural, el simbólico, las figuras geométricas, los gráficos cartesianos o las tablas, no pueden considerarse como un único y mismo registro. Cada sistema es diferente y plantea preguntas específicas sobre el aprendizaje.

El segundo fenómeno es el de la diferenciación entre representante y representado o, al menos, entre forma y contenido de una representación semiótica. Una tal diferenciación no se adquiere de golpe, cualquiera sean el registro de representación y cualquiera sea el estadio de desarrollo.

El tercer fenómeno es el de la coordinación entre los diferentes registros de representación semiótica disponible.

> Para los sujetos, una representación puede funcionar verdaderamente como tal, es decir, permitirles el acceso al objeto representado, sólo cuando se cumplen dos condiciones: que dispongan de al menos dos sistemas semióticos diferentes para producir la representación de un objeto o de una situación y que "espontáneamente" puedan convertir de un sistema semiótico a otro las representaciones producidas, sin siquiera notarlo. Cuando estas dos condiciones no se cumplen, la representación y el objeto representado se confunden y no se pueden reconocer dos representaciones diferentes de un mismo objeto (Duval, 1999, pp.30-31).

Metodología y desarrollo

De acuerdo a la problemática que se aborda y a los objetivos propuestos, se empleó el enfoque cualitativo, ya que se trabajó sobre las particularidades de la realidad, intentando ser lo más fiel en la interpretación de los hechos que se observaron. Refiriéndose a este enfoque, Hernández Sampieri, Fernández Collado y Baptista Lucio (2003) afirman "Su propósito consiste en 'reconstruir' la realidad, tal y como la observan los actores de un sistema social previamente definido" (p.5). Dicha percepción de la realidad no es invariante, cambia de acuerdo a las observaciones y recolecciones de datos. Entre las metas de este tipo de enfoque se hallan describir, comprender e interpretar los fenómenos a través de las percepciones y significados producidos por las experiencias de los participantes.

Bravin y Pievi (2008) sostienen que para el campo educativo, en general, los métodos cualitativos suelen resultar los más apropiados.

Para realizar el trabajo de campo, se centró el estudio en las especialidades de Ingeniería Industrial (18 alumnos) e Ingeniería Electrónica (15 alumnos). Para la experiencia se consideró a aquellos estudiantes que realizaron la totalidad de los trabajos prácticos diseñados y que estaban cursando la asignatura por primera vez. Las edades de los mismos oscilaban entre los 18 y 20 años.

Para preservar el anonimato de los mismos, se los representó mediante un código alfanumérico: N1,…, N15 para los de la especialidad Electrónica y T1,…, T18 para los de Industrial.

Se construyó el objeto de la investigación, que es la preferencia de registros en el contenido límite de funciones así como los motivos de tal inclinación. Se coincide con Bravin et al. (2008) en que el objeto es siempre una construcción, encuadrada, en la medida en que se parte de la elección de una teoría aceptada como buena por la comunidad científica, en el campo disciplinar dentro del cual se trabaja.

Se diseñaron trabajos prácticos especialmente para este objeto. Se utilizó la técnica de recolección de datos de cuestionario abierto autoadministrado para obtener los indicadores concretos (Hernández Sampieri et al., 2003). Se les proporcionó directamente a los respondientes (los alumnos), quienes los contestaron sin intermediarios. Las cuestiones del mismo fueron abiertas y consistieron en consignas en donde se les solicitó alguna actividad a resolver relacionada con el tópico en estudio.

Para complementar la información brindada por los cuestionarios, se aplicó la técnica de observación participante de clases.

Instrumentos y resultados

A continuación se presentan los instrumentos utilizados al aplicar la técnica de cuestionario en la

realización de la experiencia. Los mismos fueron planteados a partir de consignas en donde se les solicitó a los estudiantes resolver actividades. Por tener que elegir los alumnos, al simbólico se lo consideró desde lo procedimental -donde el alumno deba aplicar estrategias sencillas-, por sobre uno "conceptual" -donde se necesita conocer y manejar los símbolos matemáticos propios de las definiciones y propiedades de límite- (Romiti et al., 2012). Tal consideración se debió a que ésta es la forma predominantemente conocida por los estudiantes, al inicio de esta unidad, tanto en el concepto de límite finito para variable finita como en el de límites (finito o infinito) para variable infinita y límite infinito para variable finita.

A continuación se presentan las consignas de los dos trabajos prácticos empleados para la recolección de la información:

<u>Trabajo práctico correspondiente al concepto de límite finito para variable finita</u>

a) Elegir una de las siguientes opciones y realizar lo allí mencionado:

I. Justificar gráficamente el siguiente resultado $lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=1$

II. Calcular $lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=1$ $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$

III. Formular con tus palabras la siguiente expresión: $lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=1$ $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=1$

b) Explicar brevemente los motivos de la elección anterior.

<u>Trabajo práctico correspondiente al concepto de límites (finito o infinito) para variable infinita y límite infinito para la variable finita</u>

a) Elegir una de las siguientes opciones y realizar lo allí mencionado:

I. Justificar gráficamente que no existe $lim_{x\to\frac{\pi}{2}} tg\ x$

II. Calcular $lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x-5}\right)^x$

III. Explicar con tus palabras por qué no existe $lim_{x\to+\infty} tg\ x$

b) Explicar brevemente los motivos de la elección anterior.

En la Tabla I se detalla la distribución de los alumnos según sus registros de preferencia correspondiente al concepto de límite finito para variable finita.

Tabla 1: Distribución de los alumnos según sus registros de preferencia

REGISTRO	ELECTRÓNICA (15 alumnos)	INDUSTRIAL (18 alumnos)
GRÁFICO	1 alumno	**0 alumno**
SIMBÓLICO PROCEDIMENTAL	14 alumnos	**13 alumnos**
NATURAL	**0 alumno**	**3 alumnos**

Los resultados fueron contundentes al mostrar que 13 alumnos (de un total de 18) de Industrial y 14 (sobre un total de 15) de Electrónica optaron por el registro simbólico con predominio procedimental. Este hallazgo se condice con la característica que al respecto presenta la propuesta de práctica de la asignatura existente al momento y con la que los estudiantes en cuestión se prepararon, ya que en la misma hay prácticamente un tratamiento exclusivo de dicho tipo de registro.

En cuanto a los motivos de tal inclinación, en ambas especialidades, indicaron que eligieron trabajar con este registro, porque: "me resultó más fácil o sencillo", "era el más rápido para trabajar", "lo sabía hacer", "era el más corto y sabía a qué tenía que llegar", "era lo último trabajado en la clase", "era lo que tenía más claro" y "era en el que más confianza me tenía". Cabe observar que el registro natural fue elegido por pocos alumnos en la especialidad Industrial, argumentando que les resultó el más sencillo, y en Electrónica ningún alumno lo eligió.

En la Tabla 2 se puede ver la distribución de los alumnos correspondiente al concepto de límites (finito o infinito) para variable infinita y límite infinito para la variable finita.

Tabla 2: Distribución de los alumnos según sus registros de preferencia

REGISTRO	ELECTRÓNICA (15 alumnos)	INDUSTRIAL (18 alumnos)
GRÁFICO	9 alumnos	**5 alumnos**
SIMBÓLICO	2 alumnos	**4 alumnos**
NATURAL	**4 alumnos**	**6 alumnos**

Los datos indican que el registro gráfico fue el que más eligieron los alumnos. En cuanto a los motivos de tal inclinación, los nueve alumnos de la especialidad Electrónica que optaron por este registro argumentaron que: "me resultaba el más fácil para trabajar", "los límites se ven bien en la gráfica", "conocía la gráfica", "me resultaba el más cómodo", "no me salió el límite y me di cuenta a último momento cómo explicarlo con palabras", "era una de las opciones del ejercicio" y "me resultó más rápido".

Los dos alumnos que eligieron trabajar con el registro simbólico sostuvieron que: "no me acordaba el gráfico de la tangente" y "era más rápido".

Los tres alumnos que eligieron el registro natural sostuvieron que lo hicieron porque: "no me acordaba el gráfico de la tangente", "quería ponerme a prueba" y "no me acordaba los otros".

En Ingeniería Industrial, en esta oportunidad, la preferencia por los registros fue bastante equilibrada entre los tres tipos. De los cinco alumnos que eligieron trabajar con el registro gráfico, argumentaron que les resultaba más fácil y conocían la gráfica de la función, ya que se había trabajado en clase.

Los cuatro alumnos que eligieron trabajar con el registro simbólico, sostuvieron que lo hicieron porque no sabían realizar los otros o porque era la mejor opción para realizar.

Refiriéndose a los motivos de su inclinación, los seis alumnos que eligieron el registro natural dijeron: "era lo más seguro para realizar", "se había dado en clase", "era lo más fácil" y "era el más cómodo".

Conclusiones

Puede notarse que las preferencias de registros de representación por parte de los alumnos fueron cambiando entre un contenido y otro. Uno de los motivos puede encontrarse en que en el transcurso de los trabajos prácticos, los docentes tomaron una serie de decisiones con el objetivo de revertir el resultado inicial, teniendo en cuenta lo planteado por Duval con respecto a la compresión de un objeto. Incorporaron actividades de tratamientos en los registros natural y gráfico que estaban prácticamente ausentes en la cartilla de la asignatura. Esto les dio más seguridad al momento de elegir por uno u otro.

Otra de las decisiones consistió en analizar en clase, en el momento de la devolución de los trabajos corregidos, las distintas resoluciones y los errores cometidos en los mismos. También se les permitió conservar fotocopias de sus producciones para que cada alumno pudiera analizar su resolución en detalle y con tranquilidad en otro momento y, si lo requerían, realizar consultas puntuales sobre su propia producción en horarios extras a la clase.

Se cree que estos cambios influenciaron al momento de evaluar el segundo contenido, ya que los estudiantes tenían más herramientas, no sólo porque habían realizado trabajos prácticos anteriores, sino porque contaron oportunamente con las devoluciones de los mismos y con actividades extras elaboradas para tal fin.

Consecuentemente con este resultado se formuló una propuesta de enseñanza para la materia que contempla, entre sus actividades de tratamientos y conversiones, los diversos registros de

representación semiótica en forma equitativa y equilibrada, lo suficientemente amplia para que al tener el alumno la obligación de trabajar con los tres registros de representación mencionados, logre manejo y seguridad en los mismos.

Referencias bibliográficas

Bravin, C. y Pievi, N. (2008). *Documento Metodológico Orientador para la Investigación Educativa*. Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación e Instituto Nacional de Formación Docente.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali: Universidad del Valle.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, P. (2003). *Metodología de la investigación* (3ra. ed.). México DF: McGraw Hill.

Hitt, F. (2003). Una reflexión sobre la construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, X*(2), 213-223.

Romiti, M.R., Sgreccia, N. y Caligaris, M. (2012). *Propuesta de mejora en el aprendizaje del concepto de límite de una función real*. Ponencia presentada en la X Conferencia Argentina de Educación Matemática. Buenos Aires, septiembre.

EL LENGUAJE MATEMÁTICO EN PROBLEMAS DE CINEMÁTICA

Felipe Matías, Aurora Gallardo
Cinvestav - IPN México
fmatias@cinvestav.mx, agallardo@cinvestav.mx

Resumen. Analizamos el desempeño de un alumno de 14 años que resuelve problemas de cinemática en entrevista video-grabada. Estos problemas conducen a resultados con números enteros y no solo "positivos" lo que permite la interpretación física de números menores que cero y el significado de soluciones negativas. El estudiante manifiesta un manejo fluido del lenguaje matemático de fórmulas, magnitudes y unidades de medición. Aún falta compresión en los fenómenos físicos involucrados.
Palabras clave: tendencias cognitivas, cinemática, enteros
Abstract. We analyze the performance of a 14 years old student who is solving kinematic problems in a videotaped interview. These problems lead to results with integer numbers, and not just "positive", which allows the physical interpretation of the meaning of numbers that are less than zero and the understanding of negative solutions. Student demonstrates a fluid use of mathematical language in formulas, quantities and units of measurement but he still doesn´t understand the physical phenomena involved.
Key words: cognitive tendencies, kinematics, integers

Introducción

Los estudiantes de secundaria cometen errores al resolver problemas de enunciado verbal debido en muchas ocasiones a que no extienden el dominio numérico de los naturales a los enteros Gallardo (2002). En este artículo se analiza el desempeño de un alumno de 14 años de edad en problemas de cinemática, específicamente del movimiento rectilíneo uniforme (M.R.U), movimiento uniformemente acelerado (M.U.A), caída libre y tiro vertical. Se realizó una selección de situaciones planteadas en libros de texto de Secundaria (SEP) que conducen a resultados con números enteros y no sólo "positivos" con el propósito de indagar la interpretación física de los números menores que cero y el significado que daba el estudiante a soluciones negativas. La investigación se llevó a cabo con un grupo de 27 alumnos de 13 a 15 años de edad de una escuela secundaria pública urbana de México, D. F. De esta población estudiantil, se eligió al alumno (Estudio de Caso) que tuvo más respuestas correctas en el cuestionario. Los diálogos sostenidos en la entrevista video-grabada, se dividieron en episodios cuyos nombres son metáforas que interpretan la concepción del estudiante.

Marco teórico

La perspectiva semiótica elegida en esta investigación es la de los Modelos Teóricos Locales (MTL), donde este autor introduce Tendencias Cognitivas (TC) ..."como una serie de hechos que siempre se presentan cuando en una situación de enseñanza se transita de un estrato de leguaje más concreto a otro más abstracto" (Filloy, 1999, p. 43).

Se describen a continuación:

TC 1. Presencia de un proceso de abreviación de los textos para producir reglas sintácticas nuevas.

TC 2. Dotación de sentido intermedios.

TC 3. Retorno a situaciones más concretas, cuando se presenta una situación de análisis.

TC 4. Imposibilidad de desencadenar operaciones que podían hacerse antes.

TC 5. Centración en lecturas hechas en estratos de lenguaje que no permitirán resolver la situación problemática.

TC 6. Articulación de generalizaciones erróneas.

TC 7. Presencia de mecanismos apelativos centrados en procesos erróneos de resolución.

TC 8. La presencia de mecanismos inhibitorios.

TC 9. Presencia de obstrucciones de la semántica sobre la sintaxis y viceversa.

TC 10. Generación de errores sintácticos debido a la producción de códigos personales intermedios, para dotar de sentido a las acciones concretas intermedias.

TC 11. Necesidad de dotar de sentidos a las redes de acciones cada vez más abstractas hasta convertirlas en operaciones.

"Los estudiantes de secundaria dotaban de sentidos intermedios [T.C. 2 para Filloy] a los números negativos en la resolución de tareas aritmético-algebraicas antes de lograr la extensión de los números naturales a enteros." (Gallardo, 2008, p. 19).

Los cuatro sentidos intermedios de los números negativos son:

- Número Sustractivo.- Donde la noción de número está subordinada a la magnitud. En la resta de dos cantidades **a - b**, siempre **b** será menor que **a**, donde **a** y **b** son números naturales, es decir, el signo menos sólo tiene carácter binario en el nivel de la operación de sustracción.
- Número Signado.- Es el número natural al que se le asigna un signo más o un signo menos. Surge la dualidad del signo: binario (signo de la operación de adición o sustracción) y unario (signo asociado al número natural).
- Número Relativo.- Se hace presente cuando se concibe la idea de opuestos en situaciones discretas, así como la idea de simetría en situaciones continuas.

- Número Aislado.- Surge cuando se acepta un número negativo como la solución de una operación, un problema o una ecuación. (Gallardo, 2008, p. 19).

Por otra parte, autores manifiestan que: "existe mayor dificultad en la compresión del fenómeno físico que en el lenguaje matemático utilizado" (Torigoe & Gladding, 2011, 138). Así también, afirman: "...en un fenómeno físico se puede cambiar su descripción matemática por medio del uso de un eje de referencia diferente pero también válido" (Mochón, 1997, p. 43). Además, mencionan: "las unidades de medida asociadas a las magnitudes deben mantenerse en la mente del estudiante durante todo el proceso de resolución del problema" (Encalada & Gallardo, 2001, p. 7).

A continuación se presentan los episodios del Estudio de Caso, manifestando las tendencias cognitivas surgidos en el análisis de los problemas. Las producciones escritas por el estudiante aparecen entre comillas.

M.U.A. "DEBEMOS CAMBIAR"

Problema: Un camión que iba a 60 km/h se detuvo frente a un semáforo en 10s. ¿Cuál fue su aceleración?

TC 2. Surge el Número signado.

" $A = \frac{0 - 16.6\ m/s}{10s}$

TC 2. Surge el Número aislado.

$A = -1.66\ m/s^2$ "

TC 3. Al aplicar fórmulas, el estudiante reconoce la necesidad de convertir las unidades para trabajar en un mismo sistema.

M.U.A. "ARRASTRÁNDOLAS SIEMPRE"

Problema: Un auto se encuentra en reposo en la línea de arranque de una pista recta, después el conductor pisa a fondo el acelerador hasta alcanzar una velocidad de 72 km/h. El tiempo que tardó en alcanzar esta velocidad fue 10s. ¿Cuál es la aceleración del auto?

TC 2. Surge el Número sustractivo.

" $A = \frac{20\ m/s - 0\ m/s}{10s}$ "

TC 3. Aplicación directa de fórmulas. Mientras que el Entrevistador intenta convencer al Alumno que sólo coloque las unidades en el resultado, éste reconoce que el arrastrar las unidades durante el proceso de resolución del problema le sirve de guía.

M.R.U. "POR LÓGICA"

Problema: Si corres a 15 km/h durante 20 minutos y después caminas a 4 km/h durante media hora. ¿Qué distancia recorriste en total?

TC 3. Realiza una secuencia del comportamiento del movimiento y fracciona los datos en 1/3 y 1/2.

" 15 km / 60 min 4 km / 60 min

10 km / 40 min 2 km / 30 min

5 km / 20 min "

No aplica fórmulas físicas literalmente, es decir, relaciona distancia tiempo sin mencionar la velocidad.

M.U.A. "FRENAR SIN DETENERSE"

Problema: Un tren viaja en línea recta y cambia su velocidad de 60 km/h a 20 km/h en 8 segundos. ¿Cuál es su aceleración?

TC 2. *Surge el Número signado.*

" $A = \frac{20\ km/h - 60\ km/h}{8\ s}$

TC 2. *Surge el Número aislado.*

$A = -1.3\ m/s^2$ "

TC 11. El Alumno reconoce la facilidad que lleva trabajar con fórmulas, una vez que dotó de sentido a las operaciones involucradas. Manejo de Velocidad, al frenar sin detenerse, es decir V_f diferente de 0 m/s.

M.U.A. "ME ESTÁS CONFUNDIENDO"

Problema: Un móvil viaja a 200 m/s aplica los frenos y se detiene después de recorrer 80 m. Calcula la aceleración y el tiempo que demora en detenerse.

TC 2. Surge el Número signado.

" $A = \frac{0 - 200\ m/s}{.4\ s}$

TC 2. Surge el Número aislado.

$A = -500\ m/s^2$ "

TC 5. Al no identificar el tipo de movimiento, usa fórmulas que no le permiten resolver el problema.

TC 6. Usa la fórmula para resolver un M.R.U. en lugar de un M.U.A.

M.U.A. "NO SIEMPRE DICE LO QUE PIENSA"

Problema: Los automóviles apasionan a Roberto y a Benito, y siempre consultan las ventajas de los nuevos modelos que salen cada año. En un anuncio, los fabricantes de un automóvil anuncian que éste acelera de 0 a 50 m/s en 10 s. ¿Cuál es su aceleración?

El auto anterior frena de repente y tarda 2 s en detenerse. ¿Cuál es su aceleración?

TC 2. Surge el Número signado.

" $A = \frac{0 - 50\ m/s}{2s}$

TC 2. Surge el Número aislado.

$A = -25\ m/s^2$ "

TC 8. No puede explicar la diferencia entre rapidez y velocidad.

TC 9. Escribe las unidades correctamente, pero verbaliza otras. Dice metros cuadrados (m^2) y escribe metros sobre segundo (m/s).

M.U.A. "AL MEJOR CAZADOR SE LE VA LA LIEBRE"

Problema: Un automóvil se desplaza en línea recta y cambia su velocidad de 2 m/s a 8 m/s en 4 segundos; después cambia nuevamente de 8 km/h a 16 m/s en 11 segundos. ¿Cuál es su aceleración en cada caso?

TC 2. Surge el Número sustractivo.

" $A = \frac{16\ m/s - 2.2\ m/s}{11s}$ "

TC 9. Colocación incorrecta de Velocidades inicial y final, al sustituir en la fórmula de aceleración.

TC 5. Conversión parcial de unidades para el caso 2. Aunque domina las conversiones y la identificación de datos, convierte la distancia a metros y el tiempo lo deja igual, colocando las unidades correctas como si hubiese hecho la conversión completa.

CAÍDA LIBRE. "CUANDO DEJE DE CAER, SERÉ LA MISMA"

Problema: Un globo aerostático se eleva verticalmente con una velocidad constante de 5 m/s. Cuando este se encuentra a 30 m del piso se deja caer una piedra. ¿Con qué velocidad y después de cuantos segundos caerá la piedra al piso?

TC 2. Surge el Número sustractivo.

" $t = \frac{24.49\ m/s - 0\ m/s}{10\ m/s^2}$ "

TC 5. Indica que el valor de la velocidad inicial y final en caída libre son iguales, cuando parte del reposo y se detiene al dejar de caer, sin recordar que antes de tocar el suelo la piedra lleva cierta velocidad.

TC 9. No reconoce que la piedra al compartir el movimiento del globo, tiene una velocidad diferente de cero, ya que no parte del reposo. **"Aunque dejes de empujarme me seguiré moviendo".**

CAÍDA LIBRE. "ABUSANDO DEL TIEMPO"

Problema: Una piedra cae desde una altura de 100 metros. Calcular la velocidad y el tiempo que demora en llegar al piso.

TC 2. Surge el Número sustractivo.

$$" t = \frac{44.72\ m/s - 0\ m/s}{10\ m/s^2} "$$

TC 5. No reconoce la fórmula para resolver el problema. Usando la correspondiente a un movimiento rectilíneo uniforme.

TC 6. Asigna erróneamente el valor del tiempo.

Reflexiones finales

Algunas observaciones adicionales surgidas a partir de la resolución de problemas y la entrevista video-grabada son:

- El alumno no diferencia entre rapidez y velocidad.
- Él concluye que en caída libre la V_i y la V_f tienen el mismo valor, pues el móvil iniciaría en reposo y terminaría igual. Este hecho es incorrecto porque el objeto antes de tocar el suelo, lleva una velocidad diferente de cero.
- Cuando se le pide encontrar simultáneamente aceleración y tiempo, el sujeto recurre a la fórmula (**$a = V_f - V_i / t$**). Si bien esta expresión corresponde a la situación física del problema, no le sirve para resolverlo porque tiene dos incógnitas "**a**" y "**t**". Busca entonces otra fórmula (**$V = d/t$**) con una de estas variables alterando la situación del movimiento original.
- Rescata la igualdad de velocidades en tiro vertical cuando el móvil pasa por el punto inicial del movimiento pero en sentido contrario.

- Menciona de forma errónea que en caída libre la velocidad del cuerpo corresponde a la gravedad.
- Reconoce que si una velocidad es constante la aceleración sería igual a cero.

Referencias bibliográficas

Encalada, N. & Gallardo, A. (2001). Difficulties with negative solutions in kinematics problems. Proceedings of the 25th Conference, *3, 1-9.*

Filloy, E. (1999). Aspectos teóricos del álgebra educativa. *México: Grupo Editorial Iberoamérica.*

Gallardo, A. (2002). The extension of natural-number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra, *Educational Studies in Mathematics. An International Journal, Anna Sierpinska (ed.)*, 49, (2), 171-192.

Gallardo, A. (2008). Historical epistemological analysis in mathematical education: negative numbers and the nothingness, En Figueras, O., Cortina, J. L., Alatorre, S., Rojano, T. y Sepulveda, A. (Editors), *International Group for the Psychology of Mathematics Education. Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX*, Vol. 1, 17-29 Morelia, México.

Mochón, S. (1997). ¿Qué signo tiene realmente la "g"? el significado y la enseñanza del signo negativo en la física. *Educación Matemática,* 9, (3), 64-76.

Torigoe, E. & Gladding, E. (2011). Connecting simbolic difficulties with failure in physics. Physics Education Research Section. *79 (1), 133-140.*

CONSTRUCCIÓN DE CONOCIMIENTOS GEOMÉTRICOS A TRAVÉS DEL PLEGADO

Mónica Lorena Micelli
Instituto Superior del Profesorado "*Dr. Joaquín V. González*" Argentina
monikmathis@gmail.com

Resumen. El presente trabajo forma parte de una investigación que se está llevando a cabo sobre el estudio de las técnicas del Origami en la clase de Matemática. La investigación se enmarca dentro de los lineamientos de la construcción social del conocimiento matemático, la Socioepistemología. Se entiende por Origami a la técnica del plegado de papel y se considera que en el desarrollo de esta actividad se construyen determinados conceptos matemáticos en escenarios no académicos que pueden incluirse en la clase de geometría.

Palabras clave: origami, construcciones geométricas, modelos geométricos

Abstract. The present work is part of an research is carried out on the study of Origami's techniques in the Math classes. The research is framed within the lines of the social construction of the mathematical knowledge, the socioepistemology. The Origami is a technique of paper folding. We think in these activities with Origami the students can build math concepts in non academic scenes. These techniques can be taken in the geometric classes.

Key words: origami, geometric building, geometric models

Introducción

Origami es la disciplina que permite crear diferentes objetos, animales o personajes reales e imaginarios, a partir de una hoja de papel. El fin no es sólo tomar a esta disciplina como una mera recreación sino que la propuesta que aquí se presenta se encuadra en el marco de la Socioepistemología pues permite analizar de qué forma influyen los conocimientos adquiridos fuera de la escuela y pueden ser empleados como un recurso para la construcción o aplicación de conceptos geométricos. Para esta ponencia se propone trabajar con Origami, disciplina que se desarrolla en escenarios no académico pero que puede transformarse en una práctica que se traslade a escenarios académicos con una intencionalidad didáctica, especialmente para la construcción y desarrollo de contenidos de la Geometría

Aproximaciones teóricas

Como se ha dicho el trabajo se desarrolla desde la mirada de la Socioepistemología y para ello se presentan algunos términos propios de esta teoría para luego explicar qué se entiende por Origami.

> La Socioepistemología, como sistema teórico para la investigación en Matemática Educativa se ocupa específicamente del problema que plantea la constitución del saber matemático entre la población. Es importante precisar que en este enfoque, asumimos la legitimidad de toda forma de saber, sea este popular,

> técnico o culto, pues en su conjunto constituyen la sabiduría humana (Cantoral y Reyes, 2013, p.1).

En este marco se reconocen dos clases de escenarios distintos: el académico y el no académico. Para comprender el primero se toman las palabras de Crespo Crespo quien incluye en estos escenarios académicos tanto a los escolares como a los científicos y amplia la idea planteando que son:

> aquellos en los cuales el conocimiento científico es intencionalmente central, ya sea a través de actividades matemáticas de investigación o de enseñanza. En estos escenarios uno de los objetivos explícitamente planteados por sus actores es la construcción del conocimiento, en nuestro caso, el conocimiento matemático (Crespo Crespo, 2007, p.38).

Mientras que los escenarios no académicos

> el conocimiento científico no es central de manera intencional, pero eso no significa que en ellos no se pueda construir y manejar este tipo de conocimiento, e incluso influir en la construcción de conocimiento que se lleve a cabo en un escenario académico (Crespo Crespo, 2007, p.38).

Los conceptos matemáticos y los procesos asociados que se desarrollan en el aula de matemática pueden provenir de estos escenarios no académicos. Al respecto Cantoral y Reyes manifiestan:

> los conceptos y procesos matemáticos que se ponen en funcionamiento en un acto didáctico pueden no ser propiamente objetos matemáticos en el sentido clásico, el saber culto, típicamente aceptados por la comunidad matemática o en el ámbito de la noosfera educativa que se expresa en la currícula oficial, en forma explícita o táctica, sino son más bien se trata de nociones, preconceptos, acciones, actividades y prácticas que participan de otros ámbitos de la actividad humana como la construcción de artefactos, las innovaciones tecnológicas, los diseños de ingeniería, las ciencias, las técnicas, las artesanías, las actividades comerciales, entre otras. Actividades que en su conjunto son extraídas de prácticas socialmente compartidas de índole cultural (Cantoral y Reyes, 2013, p.2).

Bajo esta mirada se parte en esta investigación de entender al Origami como una actividad extraída de una práctica, culturalmente reconocida. Una actividad que se origina y desarrolla fuera del aula pero que esto no quita que sus técnicas requieran de conceptos matemáticos que pueden llevarse al aula para ser trabajados en relación a un contexto geométrico. Para entender un poco

más sobre qué se entiende por la técnica del Origami a continuación se describe en qué consiste esta actividad.

Algunas consideraciones sobre el Origami

Se conoce bajo el nombre de Origami al arte japonés en el cual se dobla el papel para construir figuras variadas. La palabra Origami se traduce de "ori" como doblado y "kami" como papel. En español esta técnica es conocida con el nombre de Papeloflexía, "palabra de origen latino que deriva de papiro (papel) y flectere (doblar)" (Blanco y Otero, 2005, p.1). Aunque se supone que el origen del Origami es japonés, hay que remontarse hasta el lugar en donde se inventó del papel, China, entre el siglo I ó II y recién en el siglo VI llega a Japón tan sólo para las clases más pudientes, ya que el papel era muy valioso por aquella época. Entre los siglos XIV y XVI, el papel se hizo más accesible, pero dicha actividad seguía teniendo características particulares en cada clase social, cada una poseía un adorno que la distinguía. Recién en el período 1603 -1867 desaparece esta distinción y el Origami pasa a ser una actividad para todos por igual. En esta época surge la base para la construcción de la grulla ("zuru"), símbolo popular Japonés. Luego, son los árabes los que traen esta disciplina desde Asia para toda Europa y desde España se extienda a toda América latina (Royo, 2002).

Existen distintas clases de Origami, clasificando las técnicas según distintos aspectos como: su finalidad, el papel utilizado y la cantidad de piezas de papel empleadas (Leal, Suárez, Fernández y Moreno, 2010).

Según su finalidad:

- Artístico: las figuras son de distinta naturaleza: animales, flores, personas o formas abstractas, pero todas ellas tienen por objetivo ser un objeto de ornamentación.
- Educativo: las construcciones de las figuras tienen por objetivo el estudio de propiedades geométricas.

Según la forma del papel:

- A partir de un papel con forma de cuadrado (clásico) pero así también puede ser rectangular o triangular.
- A partir de tiras largas de papel.

Según la cantidad de papeles empleados:

- Tradicional: donde se emplea un solo trozo de papel cuadrado y no se permiten ni tijeras ni pegamentos
- Modular: donde se emplean varios trozos de papel los cuales se pliegan para formar módulos o pequeñas unidades que luego se ensamblan para crear figuras complejas. Estos módulos pueden ser basados en las caras, vértices o aristas del sólido geométrico construido.

Según la construcción obtenida:

- Figuras planas
- Figuras volumétricas

Estas técnicas que conforman el Origami fueron estudiadas por matemáticos y han propuesto un conjunto de axiomas, por ejemplo Huzita propone los siguientes axiomas para el Origami:

1) Dados dos puntos A y B construibles, podemos construir la línea que los une;
2) El punto de coincidencia entre dos líneas construibles es construible;
3) Dado un segmento delimitado por dos puntos construibles, su mediatriz es construible;
4) La bisectriz del ángulo formado por dos líneas construibles es construible;
5) Dados dos puntos A y B y una línea r construible, la línea que pasa por A y que refleja a B sobre r es construible;
6) Dados dos puntos A y B construibles, y dos líneas construibles r y s, la línea que refleja al punto A en r y B en s, si es que existe, es construible (Royo, 2002).

¿Por qué trabajar con Origami en la clase de Geometría?

"Durante la segunda mitad de este siglo, la geometría parece tener una pérdida progresiva de su posición formativa central en la enseñanza de las matemáticas de la mayoría de los países. Este decaimiento ha sido tanto cualitativo como cuantitativo" (Villani, 2001, párr. 21). Estas razones llevaron a buscar nuevos recursos didácticos para la clase de Geometría, siendo el Origami una alternativa que está al alcance de todos pues no requiere gran cantidad de materiales, solo papel. El primero libro que se conoce donde se presenta el doblado y cortado de papel en un contexto matemático es *Wakoku Chiyekurabe* de Kan Chu Sen. Este libro se publicó en 1721 y presenta una variedad de problemas que incluyen un razonamiento matemático (Ferreira de Oliveira, 2004).

Desde el punto de vista didáctico aplicando técnicas de Origami se puede trabajar:

- Construcción de figuras planas como tridimensionales

- Identificación de elementos de las figuras, tales como: lado, ángulo interior, diagonal, base media, etc. Con respecto a la construcción de poliedros se requiere identificar: caras, aristas y vértices.
- Pasaje del plano al espacio y del espacio al plano.

A su vez, en algunas construcciones pueden trabajarse conceptos geométricos como por ejemplo: paralelismo, perpendicularidad, simetría, bisectriz de un ángulo, mediatriz de un segmento, etc.

Por otro lado, su práctica favorece las destrezas motoras y perceptivas, siendo algunos de sus beneficios:

- Coordinación bilateral
- Coordinación ojo - mano
- Destreza manual
- Incremento de fuerza digital
- Percepción figura fondo
- Posición en el espacio del papel en relación al sujeto (Rodríguez y Fernández, s/f).

La construcción implica seguir una serie de pasos motrices que tienen un orden específico en una secuencia determinada. Relacionado con estas acciones que el Origami fomenta puede decirse que favorece el desarrollo cognitivo basado en las palabras de Piaget quien sostenía que "la actividad motora en la forma de movimientos coordinados es vital en el desarrollo del pensamiento intuitivo y en la representación mental del espacio" (citado en Leal et. al, 2010, p.9).

Describiendo los beneficios del orden cognitivo puede mencionarse:

- Cumplimiento de directrices orales, escritas o gráficas
- Interpretar signos y símbolos
- Desarrollo del pensamiento lógico
- Aumento de la atención
- Favorecer el ejercicio de la memoria

Además puede verse no solo como una acción para realizase en forma aislada sino también como una actividad cooperativa, favoreciendo el trabajo en pequeños grupos en el aula como así también fomentando el gusto por lo estético y lo creativo muchas veces ausente en la clase de Matemática.

Metodología

Para esta investigación se han estudiado distintas construcciones, especialmente aquellas relacionadas con Origami modular y en base a dichas construcciones se han seleccionado algunas construcciones sobre las cuales se ha confeccionado una secuencia de actividades con la intención de implementarlas en las clases de Enseñanza de la Matemática en el Profesorado de Nivel Primario. El objetivo de la implementación es analizar como los estudiantes, futuros docentes, resuelven la secuencia para luego en una segunda etapa puedan reflexionar sobre qué conceptos matemáticos están presente en estas actividades de diseño.

A continuación a modo de ejemplo se presenta una actividad diseñada en esta investigación para trabajar con técnicas de Origami modular para la confección de una "caja de base cuadrada".

Actividad: Caja modular de base cuadrada

Construye cuatro módulos iguales según los pasos que se describen a continuación

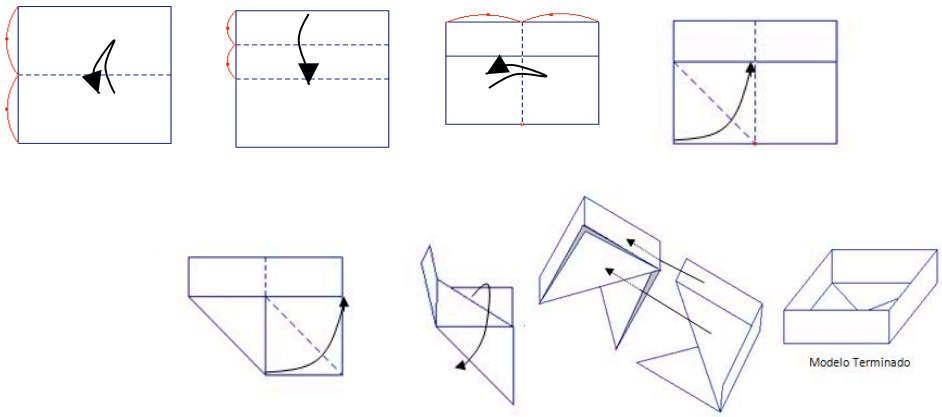


Figura 1: Construcción de una caja de base cuadrada

1. Si necesitásemos una caja con una altura de 6 cm. ¿Qué medidas debe tener el papel para dicha construcción? justifica
2. Calcula el volumen de la caja en función del lado l de cuadrado de papel
3. Si se duplica el lado del cuadrado, ¿se duplica el volumen? Justifica tu respuesta.
4. Se quiere construir una caja de base cuadrada de 10 cm de lado, ¿cuánto tendría que medir la pieza de papel que utilizaríamos en la confección de cada módulo?
5. Para construir una caja cúbica que modificaciones habría que hacer en la pieza de papel antes de seguir el mismo procedimiento detallado más arriba. Explica los pliegues que sufrirían alguna modificación menor y explica cual sería en cada caso.

6. Para construir una caja cúbica de 12 cm de lado, ¿cuáles son las medidas de cada una de los cuatro cuadrados de papel necesarios? ¿Cuántos cm2 se necesitan para su construcción? Pruébalo construyendo una caja con los pasos que modificaste en la actividad anterior.

La investigación que se presenta en este artículo se encuentra en proceso. Las etapas realizadas hasta el momento tienen que ver con la selección de las construcciones modulares para elaborar a partir de ellas una secuencia de actividades. Los pasos a seguir en esta investigación son: la implementación de la secuencia en el ciclo 2014 en la clase de Enseñanza de la Matemática del Profesorado de Nivel Primario de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires. Luego de esta implementación se confeccionarán los instrumentos necesarios para analizar los resultados obtenidos. Además se tiene pensado entrevistar a determinados estudiantes que intervinieran en la implementación de la secuencia para complementar la información obtenida de las producciones realizadas.

Algunos comentarios a partir de este trabajo

Llevar la técnica del Origami a la clase de Matemática, más precisamente al momento de hacer Geometría, significa proponer un método de trabajo con un valor cultural que favorece el desarrollo de nociones espaciales, destrezas manuales y a su vez fomenta la concentración y la creatividad. El plegado de papel es una técnica que se creó en escenarios no académicos pero que bien puede llevarse al aula como una práctica que permite visualizar figuras tanto en el plano como en el espacio.

La intención de introducir al sistema didáctico técnicas, como la del Origami, que tienen su origen muy alejado de las aulas es trabajar con los futuros docentes el reconocer al saber matemático como un saber que se ha constituido socialmente en escenarios no académicos. El enfoque de la Socioepistemología "plantea una nueva visión hacia la educación de la matemática concebida como acción áulica, partiendo de las actividades cotidianas de los individuos" (Cantoral y Reyes, 2013, p.2).

Referencias bibliográficas

Blanco, C. y Otero, T. (2005). Geometría con papel (papiroflexia matemática). *Sctm05*. Recuperado el 28 de marzo de 2013 de http://imarrero.webs.ull.es/sctm05/modulo3tf/1/cblanco.pdf

Cantoral, R. y Reyes, D. (2013). *Socioepistemología y disciplinarización de la Matemática Educativa*. Recuperado el 20 de mayo de 2014 de http://www.cihem2.com/docs/propuestas/pta.051.pdf.

Crespo Crespo, C. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología.* Tesis de Doctorado no publicada, Cicata-IPN, México.

Ferreira de Oliveira, F. (2004). *Origami: Matemática e Sentimento*. Recuperado el 28 de marzo de 2013 de http://educarede.homedns.org/educa/img_conteudo/File/CV_132/2004-10-18_-_Origami-Matem_tica_e_sensibilidade1.pdf

Leal, C., Suárez, G., Fernández, M. y Moreno, H. (2010). *El plegado en geometría. Líneas notables del triángulo*. Recuperado el 28 de marzo de 2013 de http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles-110452_archivo.pdf

Rodríguez, A. y Fernández, A. (s/f). *Análisis de la actividad de Origami.* Universidad Nacional de Colombia. Recuperado el 3 de marzo de 2013 de http://www.pajarita.org/articulos/pdfs/An%C3%A1lisis%20de%20Origami.PDF

Royo, J. (2002). Matemáticas y papiroflexia. *Sigma* 21, 174-192.

Villani, V. (2001). *Perspectives en l´ensenyament de la Geometria pel segle XXI*. Traducción: Víctor Hernández y Martha Villalba. Recuperado el 28 de marzo de 2013 de http://www.euclides.org/menu/articles/article2.htm

UNA DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA TEÓRICA PARA EL CONCEPTO ESPACIO VECTORIAL R^2

Miguel Rodríguez Jara, Marcela Parraguez González
Universidad de Playa Ancha Chile
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
mrodriguez@upla.cl, marcela.parraguez@ucv.cl

Resumen. Presentamos un diseño teórico de un modelo cognitivo denominado descomposición genética, (DG). En ella se explicitan las construcciones mentales y los mecanismos de abstracción reflexiva que permiten a un estudiante universitario construir el concepto de espacio vectorial R^2 a partir de su cartesiano R^2. El diseño de la DG está sustentado en un análisis histórico epistemológico que comprende los siglos XVII al XX. Resaltan, en el período indicado, la axiomatización y unificación como eventos que imprimen niveles de abstracción y rigor a las construcciones matemáticas. El marco teórico que sustenta esta investigación –la Teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema)– permite poner en sintonía, los ingredientes cognitivos que se desprenden de dicho análisis, además de proveer elementos para interpretar y organizar los aspectos matemáticos que se pesquisaron.

Palabras clave: eoría APOE, descomposición genética

Abstract. We present a theoretical design of a cognitive model called genetic decomposition (DG), which makes explicit the mental constructions and reflective abstraction mechanisms that allow a college student to construct the concept of vector space R2 from its cartesian R^2. The design of the DG is supported by a historical epistemological analysis that runs from the seventeenth to the twentieth century. Notable from the indicated period, are the axiomatization and unification as events that give levels of abstraction and rigor to mathematical constructs. The theoretical frame work used in this research–APOS Theory (Action, Process, Object, Schema)– allows us to balance cognitive ingredients that emerge from this analysis, as well as provide elements to interpret and organize the mathematical topics that were considered.

Key words: APOS theory, genetic decomposition

Fundamentación del estudio y la pregunta de investigación

Los R^2 espacios vectoriales son de las estructuras algebraicas más utilizadas en todas las ramas de la ciencia. En física e ingeniería se utilizan recurrentemente para modelar el espacio, las funciones periódicas, el conjunto solución de ecuaciones lineales y diferenciales y los polinomios, por citar algunos ejemplos. Por otro lado, dada la riqueza de su estructura algebraica, que incorpora lo algebraico y lo geométrico, los R^2 espacios vectoriales son muy utilizados para ejemplificar cuestiones del álgebra lineal: combinaciones lineales, base, conjunto generador, transformaciones lineales, dual, entre otros. Probablemente quienes los utilizan, en el proceso de enseñanza, no se detienen en su construcción y sólo apelan a él como ente ejemplificador de nociones ligadas al aprendizaje y enseñanza del álgebra lineal, menos aún, en una articulación entre R^2 como espacio vectorial y como plano cartesiano.

Este trabajo se aboca a la construcción cognitiva del R^2 espacio vectorial, atendiendo a algunas experiencias exitosas que consideran su utilización en la enseñanza de los conceptos ligados al

álgebra lineal (Harel, 2000), esfuerzo que está en reacción con los antecedentes que reportan investigadores franceses, en relación al obstáculo del formalismo (Robinet, 1986, Dorier, 2000), en estudiantes universitarios de Francia y Marruecos.

A la luz de lo que se ha indicado, declaramos que el propósito de este reporte es atender la diversidad de miradas para el concepto de vector en el $\boldsymbol{R}^2$ espacio vectorial, desde las estructuras algebraicas que subyacen; a veces un punto (Geometría Ordenada), un par ordenado (Plano Cartesiano), otras un segmento dirigido o flecha (Geometría Vectorial), incluso hasta puede llegar a ser una matriz (Espacio Vectorial Isomorfo a $\boldsymbol{R}^2$); cuestión que desorienta a un aprendiz, y hace necesario una mirada unificadora de esos aspectos. Atendiendo al propósito declarado, cabe formular la siguiente pregunta que guiará esta investigación, ¿a través de qué elementos se da la coordinación entre los distintos aspectos asociados al $\boldsymbol{R}^2$ espacio vectorial y el $\boldsymbol{R}^2$ plano cartesiano? y ¿cuál es el rol que desempeñará la geometría para que un aprendiz reconstruya el concepto $\boldsymbol{R}^2$ espacio vectorial, desde su cartesiano?

Antecedentes de la investigación

Diseñar un camino viable para la construcción cognitiva del concepto $\boldsymbol{R}^2$ espacio vectorial, a partir del $\boldsymbol{R}^2$ plano cartesiano, es una tarea que requiere de una mirada histórica epistemológica; por un lado, para indagar en las construcciones matemáticas vinculadas a la estructura de espacio vectorial y, por otro, reparar en los procesos cognitivos que están involucrados en dichas construcciones.

La axiomatización del álgebra lineal, hacia 1930, desde la concepción del concepto espacio vectorial demandó un alto nivel de abstracción (Dorier, 2000; Dorier, *et al.* 2002). Por otro lado, el concepto espacio vectorial, desde un punto de vista epistemológico, más que ayudar a resolver nuevos problemas es visto como un concepto unificador, generalizador y formalizador, al igual que el concepto de límite (Dorier, 2000; Artigue, 2003). En la Figura 1 se indican algunos conceptos y procedimientos que se estructuraron en torno al concepto de espacio vectorial.

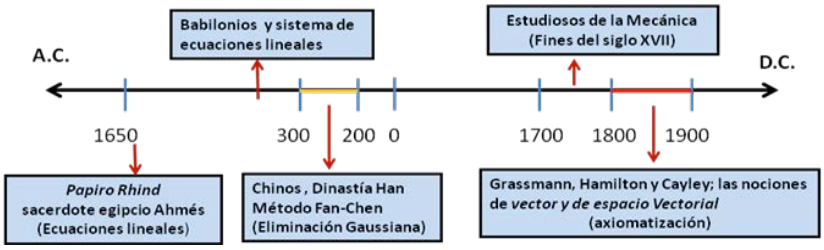


Figura 1, una panorámica histórica de conceptos ligados al álgebra lineal.

En la Figura 2, se muestran dos hechos que están relacionados y dan cuenta, de manera implícita, de la lentitud en la maduración de un concepto en su proceso de formalización, como objeto

matemático. El primero dice relación con la dependencia inclusiva, trabajada por Euler, desde la relación de las ecuaciones que están involucradas al resolver un sistema de ecuaciones y el segundo, desde otro concepto asociado al mismo problema, el determinante nulo planteado por Cramer en 1.750. Por otro lado, si bien en la etapa anterior se percibe la dependencia lineal entre las ecuaciones, debe transcurrir más de un siglo, 1875, para que Frobenious la presente como un concepto más general, ya no vinculada sólo a los sistemas de ecuaciones (Dorier, 1995).

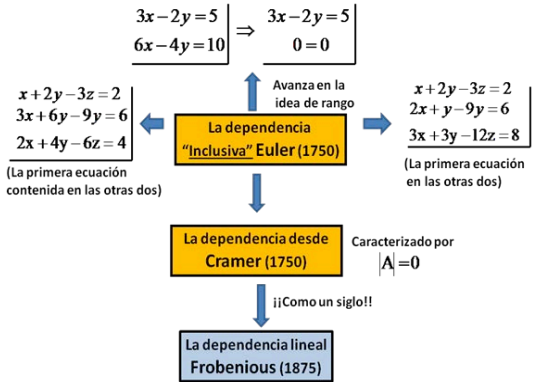


Figura 2: Dos hitos históricos y la evolución de la dependencia lineal desde la resolución de un sistema de ecuaciones.

Ciclo de investigación de APOE

A los tres casos de estudio se les aplicará el ciclo de investigación previsto en la teoría APOE, el cual establece: un análisis teórico, conocido como Descomposición Genética, DG; un diseño de instrumentos, basado en la DG, y aplicación de esos instrumentos; seguido de un análisis y verificación de datos (Asiala et al., 1996). La aplicación de este ciclo permite obtener una descripción de las construcciones mentales que realizan los estudiantes; y a partir del análisis de los datos obtenidos, se lo puede repetir, para refinar tanto el análisis teórico como los instrumentos. Una DG propiamente tal es el resultado de la aplicación completa de las tres componentes de ese ciclo, que permite documentarla con los datos empíricos. Descripción de las tres componentes:

Análisis teórico

El análisis teórico consiste en el estudio profundo de los conceptos matemáticos inmersos en el espacio vectorial $\boldsymbol{R}^2$ para determinar las construcciones mentales necesarias en el aprendizaje del teorema, y es mediante una descripción hipotética de las construcciones mentales del aprendiz, esto es, lo que llamamos una Descomposición Genética, que es una modelación epistemológica-cognitiva del concepto en estudio. Hemos de aclarar que tal descomposición no es única, pues depende de los caminos de construcción del concepto y de las construcciones mentales a considerar.

Diseño y aplicación de instrumentos

Una vez definida la descomposición genética teórica es necesario probarla, es decir, tener alguna certeza de la viabilidad del camino señalado en ella. Para esto se diseñan y aplican instrumentos que permitan identificar las construcciones mencionadas en la(s) descomposición(es) genética(s) inicial(es), de modo de reflejar de modo explícito las construcciones mediante las cuales los estudiantes pueden aprehender el concepto espacio vectorial $\boldsymbol{R}^2$.

Se trabajó con una unidad de análisis de 10 estudiantes, atendiendo a los criterios antes mencionados y se diseñaron registros de observación y protocolos de entrevistas semi-estructuradas, previstas por la teoría las cuales se video grabaron.

Análisis y verificación de datos

En esta etapa y a partir de los resultados obtenidos con la aplicación de los instrumentos –cuestionarios, entrevistas y registros de observación–. Damos cuenta del inicio del ciclo de investigación, pues valida la DG que se propone luego de ajustar la que se postula inicialmente de acuerdo a los datos empíricos obtenidos. A partir de ella, se puede hacer propuestas didácticas para la enseñanza y aprendizaje del concepto espacio vectorial, pues se posee información clara con respecto a las construcciones mentales y mecanismos mentales que los estudiantes han realizado.

Una descomposición genética para la construcción cognitiva del R2 espacio vectorial desde el R2 plano cartesiano

En el siguiente diagrama, figura 3, se explicitan aquellas construcciones y mecanismos mentales que determinan una modelo cognitivo hipotético o DG sobre la cual un estudiante universitario puede construir cognitivamente el concepto$\boldsymbol{R}^2$espacio vectorial desde su cartesiano $\boldsymbol{R}^2$.

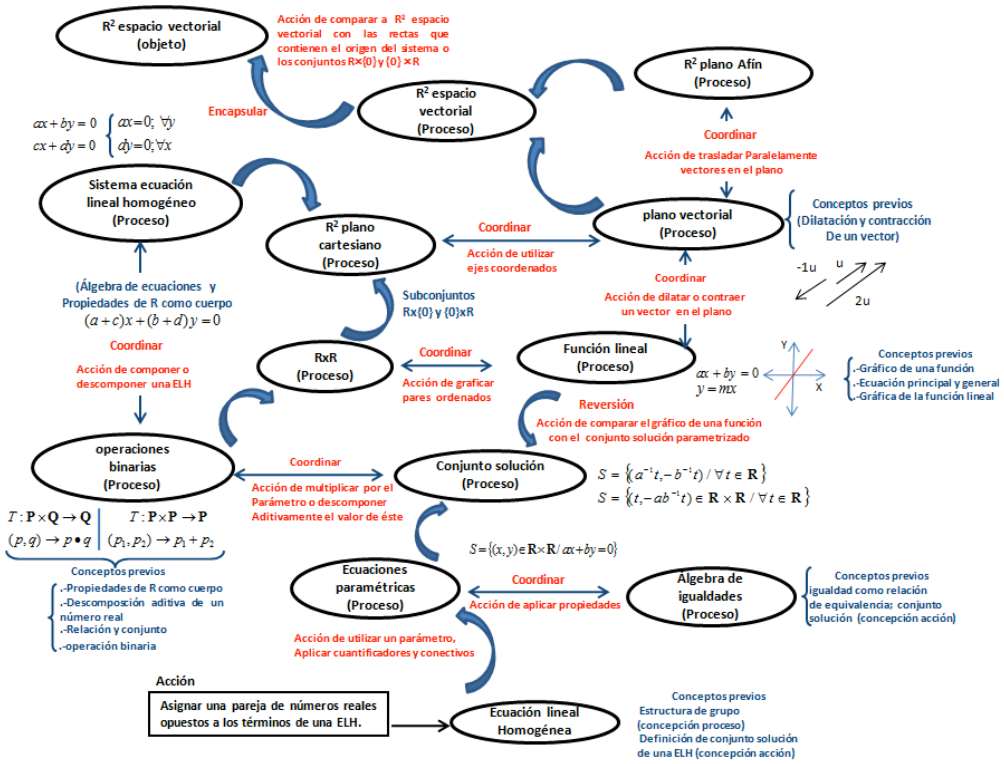


Figura3: Construcciones y mecanismos mentales en la construcción de R2 espacio vectorial.

Atendiendo a los antecedentes descritos anteriormente se ha considerado pertinente utilizar un diseño metodológico de, estudio de caso, en la medida que "…Los estudios de casos son adecuados para un análisis intensivo y profundo de uno o pocos ejemplos de ciertos fenómenos;..." (Goetz y LeCompte, 1988, p. 69).En esta investigación hacemos referencia a estudios de caso "Múltiple" en la medida que: analiza en concreto realidades específicas y singulares, que adquieren su valor como indagaciones intensivas y con profundidad en casos particulares; contrasta realidades específicas de las que pueden extraerse problemas comunes y matizaciones singulares, pero de ninguna manera explicaciones genéricas y definitivas sobre la realidad estudiada.

En búsqueda de evidencias empíricas para la DG

Para ello se aplica un cuestionario con la intensión de documentar las construcciones y mecanismos mentales dispuestos en la DG, la cual consideró dos momentos. En un primer momento, la aplicación de un cuestionario de 6 preguntas construidas a la luz de la DG; y en un segundo momento la indagación en profundidad, a través de una entrevista, de ciertos aspectos de la DG, que el análisis del cuestionario anterior nos proporcionó. Para ello se ha considerado detallar dos preguntas del cuestionario aplicado a estudiantes de una Universidad del Consejo de Rectores, en Chile (Caso1).

Primer momento: el cuestionario

Análisis a priori del cuestionario

Se ha seleccionado una pregunta del cuestionario, para dar a conocer en este artículo, las que a continuación serán analizadas a la luz de la DG presentada.

Pregunta 1 del cuestionario

1) Dada la Ecuación Lineal Homogénea (ELH) $3x+5y=0$, y su conjunto solución $S=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 / 3x+5y=0\}$, responda las siguientes preguntas:

a) Determine, utilizando el procedimiento de la tabla 1, cinco pares ordenados que pertenezcan al conjunto solución de la ELH.

b) Considerando el procedimiento dado, reescriba el conjunto solución de la ELH.

c) ¿Existirá una ecuación lineal homogénea de dos incógnitas cuyo conjunto solución sea el conjunto vacío? Explique.

d) Considerando los pares ordenados del inciso **a)**, y el conjunto solución de inciso **b)**, ¿qué operaciones binarias se sugieren para el conjunto *S*? Explique.

Análisis a la pregunta:

Esta pregunta tiene por objetivo situarnos en la estructura algebraica que se puede explicitar para el Conjunto Solución ELH, es decir, provisto de dos operaciones binarias, una interna y la otra externa, desde la resolución de una ELH. Además de situarnos en la DG teórica, como se aprecia en la figura 4.

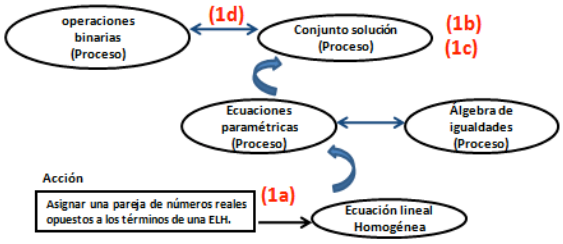


Figura 4: Aspectos de la DG que se consideran desde la pregunta 1

Observaciones sobre el desempeño de los estudiantes y análisis a posteriori

Con el fin de mostrar ejemplos de los datos obtenidos, a continuación se presenta una selección del desempeño realizado por 5 estudiantes universitarios a las preguntas antes descritas. Para ello nos referiremos, por ejemplo, al Estudiante 1 como **E1**.

Análisis a posteriori Pregunta 1

Estudiante 3: En la tabla 1, este estudiante reescribe el conjunto solución de la ELH en términos de un parámetro, que anota como "*a*", a la luz del procedimiento indicado; lo que muestra que **E3** generaliza la forma de los pares ordenados que sugiere el procedimiento asignar un par de números reales a los términos de la ELH.

Tabla 1: Sobre los argumentos que despliegan los estudiantes a la pregunta 1, apartado 1a), y su relación con las construcciones y mecanismos mentales de conceptos.

Estudiante	Argumentos que manifiestan los estudiantes	Construcciones y mecanismos mentales que se asocian al argumento observado.
E3	Según la Figura 5: **Ar5E3P1b**: Utiliza un parámetro para reescribir el CSELH en términos de dos ecuaciones paramétricas asociadas a la ELH. **Ar6E3P1b**: Indica la variación del parámetro en ***R***.	El **Ar5E3P1b**evidencia que la *acción* asignar un par de números reales, uno inverso aditivo del otro, *se interioriza* en un *proceso*, el CSELH. Donde el uso de un parámetro actúa como un mecanismo de *interiorización*.

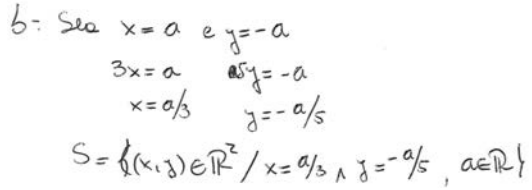


Figura 5: Respuesta de E3 a la pregunta 1b.

Por otro lado, destaca la respuesta de **E4** a los apartados 1b y 1d en la tabla 2. Pues reconoce en el conjunto solución un sub-espacio vectorial con las operaciones usuales del ***R*²** espacio vectorial.

Tabla 2: Respuestas del E4 a la pregunta 1 y los apartados 1b y 1d.

Estudiante	Argumentos que manifiestan los estudiantes	Construcciones y mecanismos mentales que se asocian al argumento observado.
E4	Según la Figura 6: **Ar5E4P1b**: Determina un vector generador del CSELH. **Ar6E4P1b**: Reescribe el conjunto solución de la ELH definiendo la multiplicación de un par ordenado específico por un escalar en ***R***.	Los **Ar5E4P1b y Ar5E4P1b** dan cuenta que la *acción* multiplicar un vector del CSELH por un escalar cualesquiera en ***R***, evidencia una *concepción proceso* de operación binaria externa y una *concepción proceso* del CSELH.

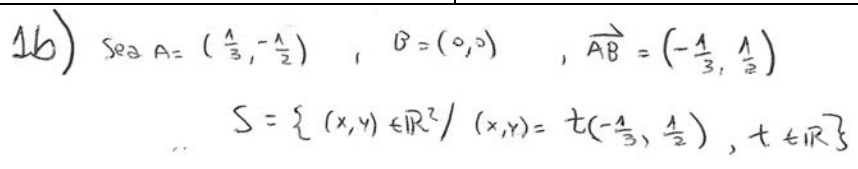


Figura 6: Respuesta de E4 a la pregunta 1b).

E4	Según Figura 7: **Ar9E4P1d**: Define, en términos de una función, la multiplicación por escalar. **Ar10E4P1d**: Describe el rol de un vector generador en el CSELH.	Los **Ar9E4P1d** y **Ar10E4P1d** muestran que la *acción* reconocer estructura de espacio vectorial de un subconjunto de $\boldsymbol{R^2}$, evidencia una *concepción objeto* de $\boldsymbol{R^2}$ espacio vectorial.

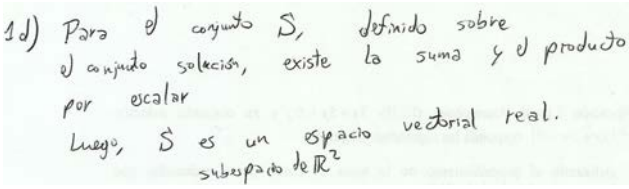

1d) Para el conjunto S, definido sobre el conjunto solución, existe la suma y el producto por escalar
Luego, S es un espacio vectorial real.
subespacio de $\mathbb{R}^2$

Figura 7: Respuesta de E4 a la pregunta 1b).

Conclusiones del comportamiento observables de los estudiantes del Caso 1

Los estudiantes **E1**, **E3**, **E4** y **E5** manifiestan explícitamente, de distintas maneras, la posibilidad de una operación binaria interna o externa, en el conjunto de solución de la ELH, desde esta relación que sugieren los pares que se desprenden del procedimiento dado, e inclusive, lo que manifiesta el **E4**, de manera implícita, al considerar el conjunto solución como el gráfico de una función lineal, figura 8.

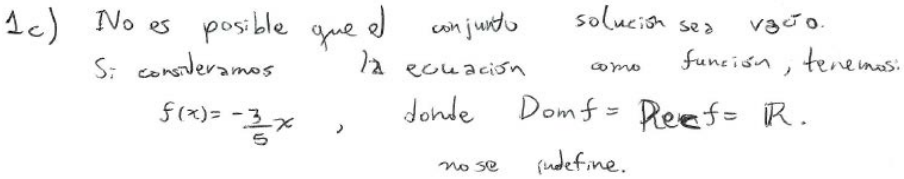

1c) No es posible que el conjunto solución sea vacío.
Si consideramos la ecuación como función, tenemos:
$f(x) = -\frac{3}{5}x$, donde Dom f = Rec f = $\mathbb{R}$.
no se indefine.

Figura 8: Respuesta al apartado 1c de la pregunta 1 del estudiante E4

En definitiva, se rescata el desempeño del **E4**, el cual manifiesta dominio de distintos aspectos considerados en la DG para la construcción del $\boldsymbol{R^2}$ espacio vectorial; a saber el $\boldsymbol{R^2}$plano cartesiano, geometría vectorial y el $\boldsymbol{R^2}$ espacio vectorial. En términos de APOE, **E4** manifiesta una *concepción objeto* del $\boldsymbol{R^2}$ espacio vectorial cuando compara el conjunto solución como subconjunto de $\boldsymbol{R^2}$ con la misma estructura algebraica.

Referencias bibliográficas

Asiala, M., Brown, A., De Vries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. *Research in Collegiate Mathematics Education II*, *CBMS Issues in Mathematics Education 6*, 1-32.

Artigue, M. (2003). ¿Qué Se Puede Aprender de la Investigación Educativa en el Nivel Universitario? *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana. 10*(2), 117-132.

Dorier, J. L. (2000). Epistemological analysis of the genesis of the theory of vector spaces. En J. L. Dorier (ed.): *On the Teaching of Linear Algebra*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, pp. 3-81.

Dorier, J. L. (1995). Meta level in the teaching of unifying and generalizing concepts in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *29(2),* 175-197.

Dorier, J. L. y Sierpinska, A. (2002). The Teaching and Learning of Mathematics at University Level. *New ICMI Study Series, 7*(3), 255-273.

Harel, G. (2000). Principles of Learning and Teaching Mathematics, With Particular Reference to the Learning and teaching of Linear Algebra:Old and New Observations. En J-L. Dorier (Ed).*On the teaching of Linear Algebra*, (pp. 177-189). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Goetz, J.P. y Lecompte, M.D. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. España: Morata.

Robinet, J. (1986). Esquisse d'une Genèse des Concepts d'Algèbre Linèaire. *Cahier de Didactique des Mathèmatiques*. Francia: 29 IREM de Paris VII.

ESPEJITO, ESPEJITO: ¿CUÀLES SON LOS NUEVOS NUMERITOS?

Dalys Alvarado
Universidad de Panamá. Centro Regional de San Miguelito Panamá
crusamatys@gmail.com

Resumen. Debido a la transformación curricular que se viene dando en Panamá desde el 2010, los programas de enseñanza han sido modificados de manera tal que el estudio de los números **enteros** propio del 7º de premedia, fue reubicado en 6º de primaria. Tribulación didáctica para los maestro(a)s, generalmente no especialistas, a quienes les resulta difícil integrar e interpretar dichos conceptos de manera adecuada.
Para varios autores los números enteros constituyen el primer concepto abstracto al que se enfrenta el estudiante, entonces es más que añadir información, presentar modelos; se requieren modificaciones y reelaboraciones sustanciales. A continuación una actividad que exhibe la construcción de la recta de los números naturales y su extensión, de manera diferente usando un espejo
Palabras clave: números naturales, enteros, negativos, espejo
Abstract. Due to the Educational curriculum transformation which has been taking place in Panama since 2010, teaching programs have been modified in a way that topics such as the study of the integers which belongs to 7th grade program, now it is included in 6th grade. This represents a didactic worry for elementary teachers, usually non-specialists, who find it difficult to integrate and interpret these concepts properly. For several authors, integers are the first abstract concept that students face, for that reason, it is more than adding information or presenting models, it needs relevant and substantial modifications. Now let's check an interesting activity that shows the construction of the line of natural numbers and its extension using a mirror.
Key words: natural numbers, integers, negative, mirror

Introducción

Durante años en Panamá el programa de matemática inicia con los números, sus relaciones y operaciones, específicamente los contenidos relacionados a los números naturales, ocupando predominantemente luego los seis primeros grados del nivel primario de la escuela básica general. No era hasta llegado el 7° grado de premedia; cuando los contenidos programáticos indicaban la inclusión del tema de los números enteros.

Desde entonces era una realidad tácita las dificultades manifiestas de los alumnos para comprender y manipular correctamente los enteros positivos y negativos, provocando un significativo grado de ansiedad en los docentes de matemática, dada su responsabilidad de modificar el concepto de número, trabajado hasta ese momento como "secuencia de un conteo o medida de una magnitud".

Gracias a la innovación curricular de los programas la preocupación crece, pues actualmente el tema de los números enteros positivos y negativos, sus operaciones y propiedades se reubica en el 6° grado (un año antes de lo acostumbrado). A simple vista puede considerarse saludable familiarizar a los niños con los conceptos antes mencionados, dada la importancia que adquieren los enteros al utilizarse con mayor frecuencia en situaciones de la vida real. No obstante aumentan

las tribulaciones didácticas pues generalmente quienes enseñan de 1° a 6° grado en la primaria, no son especialistas en matemática; entonces les resulta más difícil combinar, integrar e interpretar didácticamente los respectivos conceptos.

Por otro lado en relación al concepto de número, autores familiarizados con el desarrollo del currículum en matemática y la formación de maestros en nuestro país, señalan: "Aunque la comprensión de los números proviene de expresiones con objetos concretos, este es un concepto abstracto". (Agard, Ardila y Tejada de Castillo, 2002, p.4).

Gran parte de los textos tradicionales de secundaria, plantean el tema de los enteros en base a modelos de construcción intuitiva apoyados en la recta numérica, por ejemplo:

- *Direcciones en los desplazamientos según un punto de referencia.*
  1. *En forma horizontal: avances o retrocesos en un camino.*
  2. *En forma vertical: altitudes por encima del nivel del mar y profundidades por debajo; ascensores o escaleras que se suben o bajan.*
- *Temperaturas en el termómetro.*
- *Años antes y después de Cristo, separando épocas para un mejor estudio de la Historia.*
- *En el comercio la representación de gastos, retiros, pérdidas o bien; ahorros, depósitos o ganancias.*

Pero la pregunta es: ¿será suficiente este tipo de planteamiento? A simple vista da la impresión que la mayoría de los docentes en ejercicio son conscientes que los números constituyen el primer concepto abstracto al que se enfrenta el estudiante desde su primaria, por lo tanto las dificultades les exigirán ir más allá de añadir información, presentar modelos gráficos. Las propiedades vistas durante los primeros años de escolaridad y asumidas como ciertas, ahora con la introducción del conjunto de los números enteros, no lo son. Esto requiere modificaciones sustanciales para las prácticas habituales encontradas en la mayoría de los textos de enseñanza de los números enteros pues no contribuyen a poner de manifiesto la necesidad de esta reelaboración.

La importancia del conocimiento y manejo de la recta numérica, dentro del estudio de la matemática, radica en que es una representación común y fundamental en todos los sistemas numéricos, sirve como hilo conductor para el conocimiento y comprensión de los números. Por ende su manejo se incluye desde los primeros niveles de la escuela primaria, cuando se utiliza como un modelo para ordenar números. Sin embargo es importante recordar que el concepto per sé va mucho más allá, pues tiene una doble representación, a considerar:

- Como modelo aritmético: los puntos sobre la recta están numerados de manera que la medida de la distancia entre ellos, representa su diferencia.
- Como modelo geométrico: la recta representa un intercambio continuo y de doble vía, entre los números y el conjunto de puntos marcados, sobre ella; bien sean como posiciones o desplazamientos.

No cabe duda entonces que el manejo simultáneo de estos modelos condiciona el desempeño satisfactorio de los alumnos al desarrollar tareas matemáticas futuras, de allí la importancia de la implementación adecuada de ambos modelos a fin de evitar errores conceptuales y de procedimiento.

Más adelante cuando se entra al estudio y manejo de los números enteros negativos, los docentes insisten que las actividades realizadas tradicionalmente muestran que la recta, no es un modelo tan obvio y de fácil manejo para los estudiantes. De hecho los errores más usuales cuando se trabaja con números negativos, pueden identificarse en:

- *Interpretación inadecuada de las representaciones en la recta.*
- *Dificultades al utilizar escalas diferentes a la unidad.*
- *Representación incorrecta de situaciones de la vida real en la recta.*
- *Confusión al comparar y ordenar números enteros.*

Esto pone de manifiesto que los profesores deberían conocer aspectos más minuciosos en relación al proceso de enseñanza-aprendizaje de la recta para mejorar, completar o complementar las actividades propias en los libros de texto, pues en algunos casos las representaciones resultan inadecuadas o con significativas carencias.

Por supuesto, dependerá de las decisiones metodológicas que los profesores puedan considerar en el tratamiento y manejo de los conceptos propios de la asignatura, como se señala a continuación:

> La recta debe tener un tratamiento a lo largo de toda la escolaridad a medida que los alumnos van conociendo los diferentes tipos de números. Sin embargo, la realidad es que su uso depende del docente y, en ocasiones, de la propuesta curricular que él siga. (Bruno y Cabrera, 2006, p. 127).

Las experiencias vividas en el aula observando el desempeño diario de los estudiantes de 7° grado, nos impulsan a describir y documentar mediante imágenes visuales, esta actividad usada para la

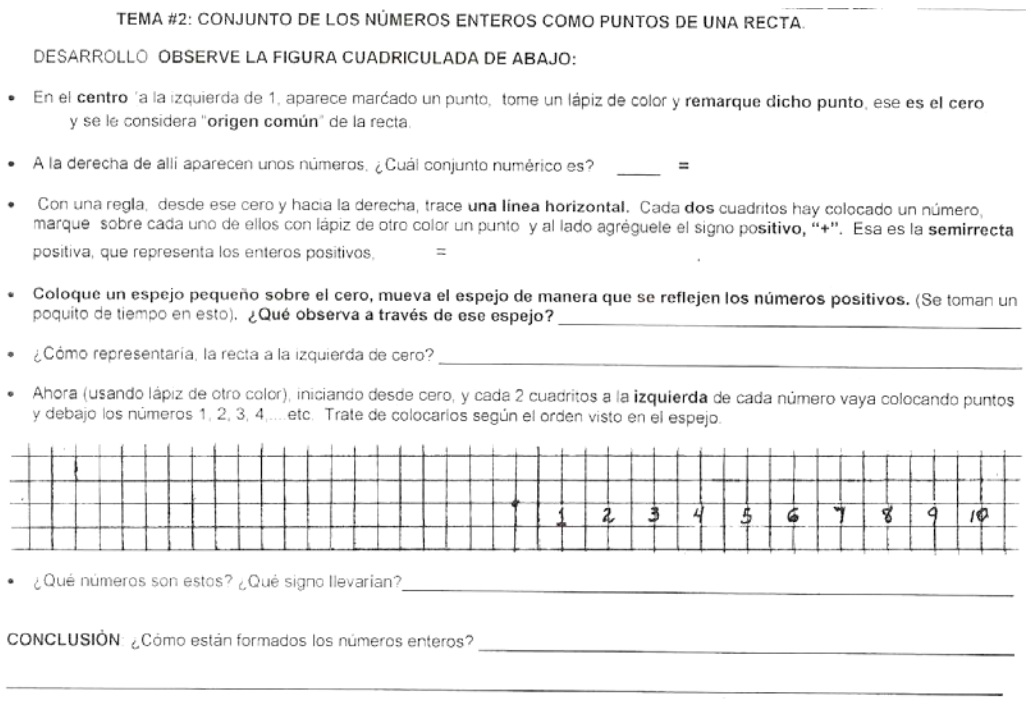
construcción de la recta de los números naturales y explicar "de forma intuitiva la extensión" de ese conjunto original hasta obtener los números enteros, apoyados en el uso de un espejo.

Descripción de la actividad

Los chicos ya tienen como conocimiento previo la existencia del conjunto de los enteros, que sirven para representar situaciones de la vida real, y están formados por números enteros negativos, el cero y los enteros positivos. Con antelación se les asigna de tarea llevar a clase: regla, lápices de colores (mínimo 3), espejo pequeño y goma.

Ya en clase reciben una hoja con una serie de instrucciones que deben seguir con la ayuda del docente. (Ver Imagen **# 1).**

Imagen 1 Hoja de trabajo que se les entrega a los alumnos para desarrollar la actividad.



TEMA #2: CONJUNTO DE LOS NÚMEROS ENTEROS COMO PUNTOS DE UNA RECTA.

DESARROLLO OBSERVE LA FIGURA CUADRICULADA DE ABAJO:

- En el **centro** a la izquierda de 1, aparece marcado un punto, tome un lápiz de color y **remarque dicho punto**, ese **es el cero** y se le considera "**origen común**" de la recta.
- A la derecha de allí aparecen unos números. ¿Cuál conjunto numérico es? ____ =
- Con una regla, desde ese cero y hacia la derecha, trace **una línea horizontal.** Cada **dos** cuadritos hay colocado un número, marque sobre cada uno de ellos con lápiz de otro color un punto y al lado agréguele el signo **positivo, "+".** Esa es la **semirrecta** positiva, que representa los enteros positivos. =
- **Coloque un espejo pequeño sobre el cero, mueva el espejo de manera que se reflejen los números positivos.** (Se toman un poquito de tiempo en esto). **¿Qué observa a través de ese espejo?** ____
- ¿Cómo representaría, la recta a la izquierda de cero? ____
- Ahora (usando lápiz de otro color), iniciando desde cero, y cada 2 cuadritos a la **izquierda** de cada número vaya colocando puntos y debajo los números 1, 2, 3, 4,....etc. Trate de colocarlos según el orden visto en el espejo.

- ¿Qué números son estos? ¿Qué signo llevarían? ____

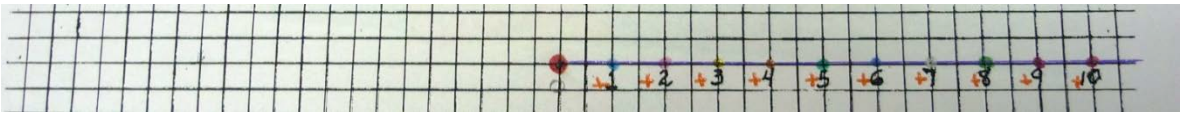
CONCLUSIÓN: ¿Cómo están formados los números enteros? ____

En una sección cuadriculada, en donde aparecen los números del 1 en adelante (representando a los naturales), en primera instancia deben:

- Marcar un punto a la izquierda del 1, a fin de incluir al cero como primer valor, origen de la recta.
- Marcar con lápices de colores cada uno de los números naturales, los cuales gráficamente se convierten en puntos de la recta**.**
- Agregarle también signo positivo.

Quedaría como se aprecia en la imagen # 2**,** abajo:

Imagen 2. Imagen de los números naturales ya colocados por los estudiantes en la sección cuadriculada.

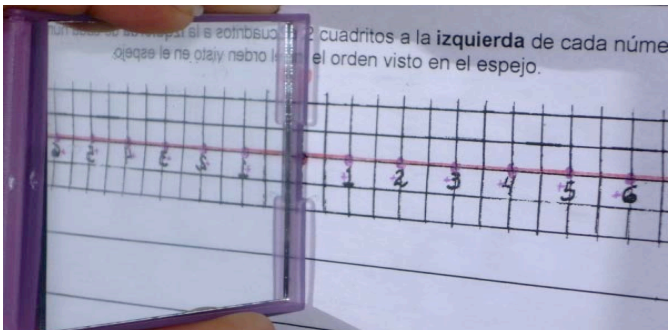


Por su parte el docente simultáneamente y con la ayuda de una lámina ilustrativa (Ver imagen **# 3),** poco a poco les detalla a sus estudiantes lo que están haciendo, para ayudarlos a comprender los procedimientos.

Imagen 3. Imagen de los enteros positivos ubicados a la derecha, en la lámina usada por el docente.

Acto seguido, los estudiantes ellos colocan un espejo sobre la hoja de trabajo, en posición perpendicular, justo sobre el cero, como se muestra a continuación en la imagen **# 4:**

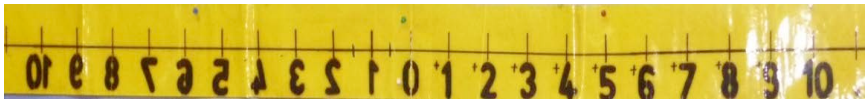
Imagen 4. Imagen de cómo va colocado el espejo sobre la hoja de trabajo y además como los números naturales se reflejan.



Se recomienda aquí la cuidadosa intervención del docente, pues a los estudiantes les corresponde describir con sus palabras cómo observan los números reflejados en el espejo. Llama poderosamente la atención de los chicos, (generalmente así lo expresan), que los números parecen estar al revés.

Al docente le corresponde con la ayuda de su lámina (ver imagen ***# 5),*** *aclarar de manera contundente esta idea confusa.*

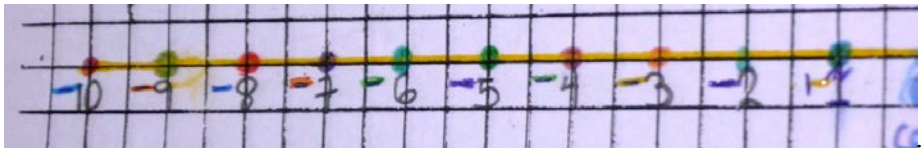
Imagen 5 Lámina del docente que procura ilustrar como a simple vista los enteros positivos reflejados en el espejo "parecen" estar al revés.



Obsérvese aquí como el espejo, y la lámina resultan instrumentos valiosos de visualización, pues ayudan a determinar que percibir los números al revés, es producto más bien de una ilusión óptica.

Detallada esta parte, los estudiantes proceden a colocar con lápices de colores a la izquierda de la recta numérica los números opuestos a los números naturales, y reconocidos como enteros negativos, (Ver imagen # 6) siguiendo el patrón que tenía los números enteros positivos a la derecha.

Imagen 6. Números enteros negativos ya colocados por los alumnos en la hoja de trabajo



Luego de revisada la hoja de trabajo y terminadas de contestar las preguntas concluyen que los números enteros están formados por los subconjuntos a continuación:

- Los enteros positivos (números naturales, ahora acompañados por el signo positivo).
- El cero [0].
- Los enteros negativos (acompañados por el signo negativo).

Resultados observados

El nivel recomendado para esta actividad es 6° - 7° de Básica general, en sesión de 40 – 45 minutos. En un principio se inicia con la construcción de la recta de los enteros, sin embargo se puede ir complementando con otras actividades auxiliares y que surgen de la contextualización de los números enteros en otros temas a saber, por ejemplo:

Diversos Contenidos matemáticos se ven directa e indirectamente favorecidos por la consideración de estas atracciones:

1. *Números enteros.*
2. *Línea recta (hay que posicionar el espejo). Posición, Simetría y reflexión*
3. *Medida - Distancia entre dos puntos.*
4. *Orden y comparación de cantidades.*

Los Contenidos no matemáticos también pueden beneficiarse al considerar estas atracciones cognitivas, de modo que se potencie la sinergia entre distintas disciplinas como:

1. Historia y la línea del tiempo.
2. Ciencias y el uso del termómetro.
3. Geografía y Localización de puntos cardinales, elevaciones y profundidades.
4. Comercio: Ahorros – ganancias y gastos - pérdidas.

5. Arte, humanidades, letras y relaciones con otros ámbitos que enriquecen el proceso de aprendizaje de la matemática:

Por otro lado incentiva el uso de:

1. *Organizadores previos (como ilustraciones y láminas).*
2. *La investigación (curiosidad por hechos históricos, religiosos, geográficos y científicos).*
3. *El aprendizaje cooperativo y uso de redes sociales para compartir ideas: etc.*

Conclusiones

Visto de esta forma aunque no lo parezca, la construcción de la recta de los naturales, y su posterior extensión al conjunto de los números enteros, es sin duda un concepto abstracto al que se enfrenta el estudiante de primaria – premedia; por lo tanto es necesario ir más allá de añadir un signo o información contextualizada como lo presentan los libros de texto a estos niveles.

Como maestros muchas veces nos quejamos a falta de material para trabajar, y es por eso que la matemática se hace aburrida; quien diría que un instrumento como un **espejo** ayudaría a comprender el tema de números enteros.

Con esto se deja claro que con un poco de paciencia y creatividad no hay tema que no pueda presentarse atractivamente, por muy "áspero", "árido" o "difícil" que aparezca; todo sea para incentivarnos a continuar mejorando el planteamiento y desarrollo de la asignatura de una mejor manera.

Referencias bibliográficas

Ardila, A., Agard, E., y Tejada de Castillo, G. (2009). *Nociones de Aritmética y Geometría para el Maestro en Formación*. Costa Rica: Coordinación Educativa y Cultural Centroamericana, CECC/SICA.

Bruno, A., y Cabrera, N. (2006). La recta numérica en los libros de texto en España. *Revista Educación Matemática 18(3)*, 125-149.

LA MATEMÁTICA COMO HERRAMIENTA DE MODELIZACIÓN PARA DAR RESPUESTA A SITUACIONES PROBLEMA

Isabel Dorado Auz, José Luis Díaz Gómez
Universidad de Sonora México
auz3@correom.uson.mx, jdiaz@gauss.mat.uson.mx

Resumen. Se presenta un avance de un proyecto de trabajo docente que tiene como objetivo implementar un Recorrido de Estudio e Investigación en la carrera de Químico Biológicas. Se abordan algunas modificaciones que se han propuesto a los procesos de enseñanza y aprendizaje desde la perspectiva de la resolución de situaciones problema. Se plantea lo útil que puede ser la modelización para resolver problemas del área de Ciencias Químico-Biológicas, mediante el uso del cálculo, en la Universidad de Sonora. Se resalta la importancia de contar con la Teoría Antropológica de lo Didáctico como el marco teórico de referencia, al mismo tiempo, se recomienda iniciar la transformación del proceso pedagógico, para darle respuesta a uno de los problemas mayores de la matemática planteado por Freudenthal.

Palabras clave: modelización matemática, teoría antropológica de lo didáctico

Abstract. We report the progress of a project of teaching work which aims to implement a Study and Research Course in Chemical Biology Career. It addresses some modifications have been proposed to the teaching and learning processes from the perspective of problem solving situations. Arises how useful it can be to solve modeling problems in the area of Chemical and Biological Sciences, through the use of calculus, at the University of Sonora. The Anthropological Theory of Didactics will be the framework reference. So, this is the beginning of pedagogical processes to give answer a one of the great problems of the mathematics raised by Freudenthal.

Key words: mathematical modeling, anthropological theory of didactics

Introducción

Desde los 1970´s se intentó modificar los procesos de enseñanza y aprendizaje retomando la resolución de problemas como herramienta y motivo para enseñar y entender mejor las matemáticas. Esto se hizo por dos vías: la resolución de problemas, donde se ponía atención al uso de estrategias heurísticas para resolver problemas matemáticos puros y la modelación matemática y sus aplicaciones, para resolver un tipo particular de problemas generados en situaciones del mundo real (Voskoglou, 2011).

Modelización matemática

García (2011) nos dice que los procesos de modelización matemática han ocupado un papel central en la investigación en educación matemática desde una faceta dual: como herramienta didáctica para la enseñanza de las matemáticas y como objeto de enseñanza y aprendizaje. La Teoría Antropológica de lo Didáctico describe los "procesos de modelización" como procesos de reconstrucción y articulación de praxeologías de complejidad creciente (puntuales→locales→regionales), los cuales deben comenzar a generarse a partir del cuestionamiento sobre las *razones de ser* de las organizaciones matemáticas que se desean

reconstruir y articular. Además, Esta línea de trabajo es claramente convergente con el tipo de actividades y competencias matemáticas que evalúa la OCDE mediante las dos ediciones del informe PISA (OECD, 2006) y que designa con el término de "matematización", (Fonseca, Bosch y Gascón, 2009). Se puede decir que el proceso de modelización matemática abarca cinco estados principales (Voskoglou, 2011):

1. Análisis del problema, comprender los requerimientos del sistema real y sus restricciones.
2. La matematización, que involucra la formulación de la situación real y la construcción del modelo.
3. Solución del modelo, a través de manipulación matemática.
4. Validación del modelo, cuando da una predicción confiable del comportamiento del sistema
5. La implementación del resultado matemático final en el sistema real.

La modelización proporciona al alumno una mejor aprehensión de los conceptos matemáticos y los capacita para leer, interpretar, formular y resolver situaciones problema, así como despertar el sentido crítico y creativo (Hein y Beimbengutt, 2006).

Situación actual de la modelización en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

Barquero, Bosch, y Gascón (2010) proponen que la modelización matemática no solo debe enseñarse en las carreras de ingeniería, sino que podría tener un gran impacto para los estudiantes de Ciencias Experimentales (CCEE), aunque reconocen que la modelización matemática se mantiene como una aspiración utópica que rara vez logra implementarse en las aulas. Proponen una visión más instrumental de las matemáticas como herramienta de modelización, integrando así en el proceso de estudio la actividad de modelización matemática y las cuestiones extramatemáticas que la generan. Recomiendan, también, que deben tomarse en consideración dimensiones del problema didáctico que han sido relativamente ignoradas y que incluyen: la ampliación del planteamiento clásico del problema en torno a la modelización matemática; la integración de la modelización matemática en un modelo epistemológico general de las matemáticas; la ampliación del espacio institucional tradicionalmente reservado a la didáctica de las matemáticas: la dimensión ecológica del problema; y la formulación del problema didáctico de la enseñanza de la modelización matemática en el ámbito de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, TAD, (Barquero, Bosch, y Gascón, 2011).

Problemática de la enseñanza y el aprendizaje de la modelización

Al analizar el programa del curso de introducción al cálculo diferencial e integral de la carrera de Químico-Biólogo se encontró que los objetivos de la asignatura, justifican el diseño del programa en base a un doble propósito: por un lado el de proporcionar a los estudiantes una formación matemática básica y, por otro, el de introducir a los estudiantes en la modelización matemática aplicada a la especialidad científica correspondiente. Sin embargo, la parte que hace referencia a la modelización matemática se plantea siempre con posterioridad y como una consecuencia (o aplicación) de lo que se presenta como la formación matemática básica. Hoy en día, se busca reformular los objetivos en términos de capacidades y competencias a desarrollar, por lo que se hará más referencia al *uso de las matemáticas* dentro del estudio de cada disciplina.

Hein y Beimbengutt (2006) señalan que la principal dificultad que presenta la modelización está centrada en la formación de los profesores y en la falta de vivencia del alumno en un trabajo de esta naturaleza. Se trata, dice Cruz (2010), que frente a los nuevos retos, en cierto sentido, los docentes dejen de lado los roles tradicionales: monopolizador del saber, trasmisor de conocimientos, controlador del trabajo de los estudiantes y único organizador del currículo, y sustituirlos o superponerlos con los de: diagnosticador, especialista en recursos, clarificador de valores, investigador, promotor de la investigación contextualizada y organizador de equipos de producción. En mi opinión, la modelización da respuesta a uno de los problemas mayores enunciados por Freudenthal (1981), crea contextos convenientes para enseñar a matematizar y, por tanto, tendrá aplicación en el desarrollo profesional del Químico-Biólogo.

La enseñanza del cálculo

Courant y Robbins (1996), nos dicen que durante el siglo XVII y gran parte del siglo XVIII, en el análisis matemático, el ideal griego de razonamiento claro y riguroso parecía haber sido descartado. La "intuición" y el "instinto" de un pequeño grupo de hombres extremadamente competentes reemplazaban a la razón en muchos aspectos. Por ello, se pensaba generalmente que una presentación clara de los resultados del cálculo no solo era innecesaria sino imposible. De igual forma, Artigue (1995) agrega que se ha aceptado el hecho de que es imposible enseñar de golpe los saberes del cálculo bajo su forma definitiva, por lo que se opta por una aproximación intuitiva que pretende darle significado al cálculo por medio de la selección de problemas. Menciona, sin embargo, que la enseñanza tradicional del cálculo y específicamente la enseñanza universitaria tienden a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica y se evalúan, en esencia, las competencias adquiridas en este dominio. La autora afirma que, producto de lo anterior, se han desarrollado investigaciones didácticas centradas en el campo conceptual del cálculo y también se han generado proyectos de innovación de la enseñanza, lo cual incluye el uso de nuevas

tecnologías. Sin embargo, ambos esfuerzos han tomado rumbos distintos y están lejos de establecer vínculos estrechos.

El concepto de función

El concepto de función ocupa un lugar primordial en el currículum, ya que es fundamental para otros conocimientos, incluso en otras disciplinas. Sin embargo, este concepto se limita a ser representado a través de una fórmula, una tabla o una gráfica sin articulación entre ellos, y no representa aprendizajes significativos para el estudiante. En este trabajo se pretende que la noción de función sea tratada desde otra perspectiva, haciendo que la modelización adquiera un estatus diferente, en el cual se le reconozca como que "es todo aquello que es utilizado para entender, predecir o intervenir el comportamiento de un fenómeno, en el cual se incluyen contextos gráficos, numéricos, algebraicos, entre otros" (García, 2007, p.3). En consecuencia, pretendemos que los estudiantes, a través de la modelización, logren re significar la noción de función al trabajar con una problemática que presente una situación cotidiana para ellos. Esto requiere otorgarle otro estatus a la modelización, es decir, la modelización ya no es una representación del concepto, sino que se hace parte del argumento del concepto de función como algo propio.

La función exponencial y la modelización

El interés principal en el trabajo es el de desarrollar el enorme potencial de la función exponencial como modelo matemático para resolver problemas relacionados con el crecimiento de la E. coli así como el combate a una posible infección. Para el estudio de la función exponencial se requerirá que otros significados sean retomados o generados: razón de cambio, covariación y crecimiento (Vargas, 2011), con lo cual el estudiante podrá valorar el enorme potencial de la función exponencial como modelo matemático.

La modelización, como una herramienta potente para el estudio escolar de las matemáticas, puede ser sumamente útil si se acompaña de una renovación general de los instrumentos del trabajo matemático a partir de las nuevas tecnologías de la información. De hecho, Yves Chevallard y colaboradores han propuesto un nuevo dispositivo didáctico, llamado Recorrido de Estudio e Investigación (REI), dentro de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, donde se pone en operación la modelización matemática con un fin claramente pedagógico (Fonseca, 2011).

Los recorridos de estudio e investigación

El Recorrido de Estudio e Investigación, sitúa la actividad matemática en el conjunto de actividades humanas y de instituciones sociales. Se admite, en efecto, que *toda* actividad humana regularmente realizada puede describirse con un modelo *único*, que se resume en esta teoría con la palabra de *praxeología* (Chevallard, 1999). Toda actividad matemática institucional puede modelizarse

mediante la noción de praxeología (u organización) matemática. En las praxeologías (Chevallard, Bosch, y Gascón, 2007) es posible distinguir dos componentes principales, interrelacionados: la **praxis o parte práctica** (los tipos de tarea y las técnicas utilizadas), y el **logos o razonamiento humano** (la tecnología, discurso racional que justifica la pertinencia de la tarea concreta, y la teoría, que justifica la producción de la tecnología). En los REI además de primar en todo momento el proceso dinámico, se prioriza el carácter funcional de las matemáticas, situándolo como el corazón de la construcción de la actividad matemática. Además, la herramienta informática tiene un importante protagonismo.

El trabajo experimental

El programa actual del primer curso de cálculo se puede dividir en cuatro temas: Números Reales, Funciones, Límites y Derivadas, y Aplicaciones de la Derivada. En este trabajo docente tomaremos una sección de un tema, el de funciones y específicamente la función exponencial, para darle viabilidad al objetivo principal del curso, tal como consta en el programa vigente: "*El alumno será capaz de emplear las funciones para modelar fenómenos de Química, Biología, Física y otros relacionados con su carrera…*". El trabajo consistirá en la implementación de un recorrido de estudio e investigación que tome como base un problema de la vida real, el crecimiento bacteriano, propio del área de Químico Biológicas, como vía para contribuir al desarrollo de las habilidades de los estudiantes en la solución de problemas en la vida fuera del aula. Se tendrá como apoyo la Teoría Antropológica de lo Didáctico y se desarrollará con alumnos del curso Introducción al Cálculo Diferencial e Integral de la Carrera de Químico-Biólogo, que ofrece el Departamento de Ciencias Químico-Biológicas de la Universidad de Sonora.

Diseño preliminar de REI

En nuestro caso, la intención es que los estudiantes hagan un recorrido de estudio e investigación que les permita encontrar la solución óptima a la cuestión generatriz que da inicio a la investigación. Este dispositivo didáctico comprende los siguientes elementos:

1. Un problema didáctico-matemático al que el sistema de enseñanza tiene que dar respuesta: Introducir las funciones exponenciales a partir de una Cuestión Problemática que surge en la carrera de Químico Biólogo Clínico.

2. Institución concreta en la cual se plantea el problema en cuestión: Departamento de Ciencias Químico-Biológicas (Químico-Biólogo, especialidad análisis clínicos) de la Universidad de Sonora. Asignatura: Introducción al Cálculo Diferencial e Integral.

3. Razón de ser las organizaciones matemáticas

El alumno:

a) Investigará el potencial de la función exponencial como modelo matemático.

b) Investigará sobre la idoneidad de la E. Coli como un microorganismo modelo para extrapolar resultados a otro tipo de infecciones, así como el hacer uso de herramientas tecnológicas para facilitar la solución de situaciones problemas.

c) Resolverá, mediante la modelización matemática, como detener una infección por E. coli, bajo diversas posibilidades.

d) Evitará el aprendizaje mecánico de cálculos algorítmicos.

4. Cuestión generatriz: Se planteará en función de cómo controlar una infección bacteriana.

5. Proceso de estudio

Momento del primer encuentro:

Se concreta la presentación de la Cuestión generatriz, dando una introducción al tema de estudio.

La Escherichia coli, bacteria descrita por primera vez en 1885 por Theodore Von Escherich, forma parte de los microorganismos que colonizan el intestino, por lo que se define como un comensal que integra la biota intestinal de diferentes mamíferos, incluido el hombre. Ésta y otras bacterias que colonizan el intestino, son necesarias para el funcionamiento correcto del proceso digestivo, además de participar en la producción de las vitaminas B y K no sintetizadas por el organismo (Eslava, Navarro, Hernández y Salazar, 2013). Sin embargo, varios clones de E. coli son responsables de una diversidad de enfermedades, incluyendo infección del tracto urinario, sepsis/meningitis y diarreas. Esta bacteria es importante porque es el principal organismo modelo de la biología (Iguchi et al., 2009).

Cuestión Generatriz:

Ante una infección bacteriana por E. coli ¿qué medicamento hipotético dará mejores resultados: un medicamento A con un factor de efectividad del 75% y que se suministra cada tres horas; un medicamento B con un factor de efectividad del 90% y que se suministra cada 6 horas; o un medicamento C con efectividad de 99.5% y que se suministra cada 24 horas?

Se plantea un enunciado abierto, sin datos numéricos, rompiendo el contrato didáctico habitual, en el que el profesor siempre da todos los datos necesarios para que el alumno resuelva el problema. Estamos pues ante una tarea matemática «abierta».

Momento del segundo encuentro:

Actividad 1. Si una población de E. coli se duplica cada 20 minutos, ¿en qué momento se tiene una población de 2,000 bacterias?

Con esta cuestión inicia el momento exploratorio de la técnica y se espera que el estudiante acuda a sus conocimientos de álgebra para darle solución al problema planteado, pero también se inducirá la creación del modelo matemático que representa la situación planteada.

Actividad 2. Recientemente la Organización Mundial de la Salud ha dicho que una mutación de E. coli ha causado la muerte de más de 50 personas, solo en Alemania, se trata de la cepa O104:H4. Por la importancia de este tipo de mutaciones, supongamos que después de 30 duplicaciones, el 1.5% de las bacterias sufre este tipo de mutación. ¿Cuántas bacterias habrán mutado en ese tiempo?

Se le planteará al estudiante la viabilidad del modelo matemático creado anteriormente o la posibilidad de crear uno nuevo.

Actividad 3. Se les pide a los alumnos que investiguen qué factores influyen en el crecimiento poblacional de los microorganismos.

Se pretende que el estudiante profundice en el conocimiento del tema y encuentre que son varios los factores que impiden o promueven el crecimiento bacteriano.

Momento del tercer encuentro:

Actividad 4. Para una población inicial de 2,000 bacterias, la cual incrementa en una proporción de 40%/h, se suministra un *antibiótico A* cada tres horas que tiene una efectividad del 75%, ¿cuánto tiempo tomará disminuir la población por debajo de 50 microorganismos, para asegurar que la infección está controlada?

¿Cuánto tiempo tomará controlar la misma población inicial con un *antibiótico B*, cuya efectividad es del 90% y se suministra cada 6 h; o bien, un *antibiótico C*, con efectividad del 95%, que se suministra cada 24 h?

¿Cuál de las tres situaciones planteadas nos arroja mejores resultados?

Actividades planeadas

El trabajo se desarrollará con alumnos voluntarios del curso de cálculo en seis u ocho sesiones extra clase con dos horas de duración, cada una, para desarrollar el proyecto. Será una sesión por semana en un día específico acordado con los alumnos. Se trabajará en forma individual y por equipo y se ocupará de apoyo tecnológico, computadoras, para desarrollar adecuadamente el

proyecto. Se trabajará con la técnica de lápiz y papel, además, los alumnos podrán utilizar libremente hojas de cálculo y aprenderán algunas de las ventajas que ofrece el software de geometría dinámica, GeoGebra, lo cual permitirá a los alumnos desarrollar el momento exploratorio de las técnicas y finalmente les permitirá obtener el modelo matemático que describe el comportamiento del fenómeno.

Conclusiones

El REI que se presenta aquí pone de manifiesto el carácter funcional de las matemáticas y a disposición de los estudiantes los recursos que van a necesitar en su vida profesional. Permite que sean los estudiantes los encargados de estudiar colectivamente la cuestión generatriz y se genere una respuesta propia. Se espera también que conduzca a los estudiantes en su aprendizaje, dando lugar a un ambiente de trabajo propicio para que a través de la modelización los estudiantes utilicen la matemática como una herramienta para solucionar problemas de su área.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.). *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. México. Grupo Editorial Iberoamerica. 97-140.

Barquero, B., Bosch, M., Gascón, J. (2010). Génesis y desarrollo de un problema didáctico: el papel de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las CCEE. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 235-244). Lleida: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Barquero, F. B., Bosch, C.M. y Gascón, P. J. (2011). Los recorridos de estudio e investigación y la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales. *Enseñanza de las ciencias* 29(3), 339–352

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas: El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Anexo D. Editorial Horsori. Barcelona, España.

Chevallard, Y. 1999. El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol.19, 2:221-266. Traducción de Ricardo Barroso Campos (Universidad de Sevilla).

Courant, R. and Robbins H. (1996). What is Mathematics? An elementary approach to ideas and methods. Oxford University Press. U.S.A.

Eslava, C.C.A., Navarro, O.A., Hernández, C.U., y Salazar, J.E.P. (2013). Escherichia coli microorganismo divergente con actitud dual en su relación de convivencia con sus hospederos. Recuperado: Septiembre 17 de 2013 de www.facmed.unam.mx/deptos/salud/ourprofs/ecoli_divergente.htm

Fonseca, B. C. (2011). Una herramienta para el estudio funcional de las matemáticas: Los Recorridos de Estudio e Investigación (REI). *Educación Matemática*, vol. 23, núm. 1, Agosto-abril, 2011, pp. 97-121.

Fonseca, C.; Casas, J.M.; Bosch, M.; Gascón, J. (2009). Diseño de un recorrido de estudio e investigación en los problemas de modelización. En González, M. J.; González, M. T.; Murillo, J. (Eds.). *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación. XIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Santander.

Freudenthal, H. (1981). Problemas mayores de la educación matemática. Conferencia dada en la Sesión Plenaria del ICME 4 en Berkeley. *Educational Studies in Mathematics* 12:133-150. Versión en español de López Yáñez, A.

García, M. (2007). Resignificando el concepto de función lineal en una experiencia a distancia. (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México

García, G. F. J. (2011). Análisis de praxeologías didácticas en la gestión de procesos de modelización matemática en la escuela infantil. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 14, núm. 1, marzo. pp. 41-70. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Hein, N. y Biembengut, M. S. (2006). Modelaje Matemático como Método de Investigación en Clases de Matemática. *V Festival Internacional de Matemática*.

Iguchi A., Thomson N.R., Ogura Y., Saunders D., Ooka T., Henderson I.R., Harris D., Asadulghani M., Kurokawa K., Dean P., Kenny B., Quail M.A., Thurston S., Dougan G., Hayashi T., Parkhill J., Frankel G. (2009). Complete genome sequence and comparative genome analysis of enteropathogenic Escherichia coli O127:H6 strain E2348/69**.** *Journal of Bacteriology.* 191:347-354.

Vargas, H.J. (2011). Descomposición genética de la función exponencial: mecanismos de construcción. XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática, Recife, Brazil.

Voskoglou, M. Gr. (2011). Mathematical modelling in classroom: the importance of validation of the constructed model. Proceedings *of the 11th International Conference*, 352-357, Rhodes University, Grahamstown, South Africa.

PROPUESTA DE EVALUACIÓN DE COMPETENCIAS EN PROCESOS DE FORMACIÓN DE ESTUDIANTES DE PEDAGOGÍA EN EDUCACIÓN MEDIA EN MATEMÁTICA

Ricardo González Méndez, Raúl Fuentes Fuentes
Universidad Católica de la Santísima Concepción Chile
Universidad Nacional Andrés Bello
rgonzalez@ucsc.cl, rafuentes0@gmail.com

Resumen. Una de las principales preocupaciones en el aseguramiento de la calidad de los aprendizajes y desempeños a nivel de la formación de profesionales en la Educación Superior, pasa por centrar especialmente la atención en la evaluación. En este contexto surge la necesidad de contar con un mecanismo de evaluación intermedia de medición de los desempeños asociados a las competencias del perfil de egreso del *Profesor de Matemática*, en la Facultad de Educación de la Universidad Católica de la Santísima Concepción. En esta presentación se da cuenta de los pasos realizados por los investigadores en orden a diseñar y disponer de un prototipo de dispositivo académico que proporcione información relevante respecto del nivel de logro de las competencias preestablecidas, necesarias para la toma de decisiones al momento de diseñar procesos de mejora.
Palabras clave: evaluación de competencias de formación
Abstract. One of the main concerns in ensuring the quality of learning and performance level of training professionals in higher education, especially going by focusing on the evaluation. In this context arises the need for interim evaluation mechanism for measuring the performance associated with the powers of the graduate profile of Professor of Mathematics, Faculty of Education at the Catholic University of the Holy Conception. In this paper realizes the steps performed by researchers in order to design and have an academic prototype device that provides relevant information regarding the level of achievement of pre-established skills necessary for decision-making processes when designing improvement.
Key words: training competency assessment

Problemática interrogante

La necesidad de contar con un mecanismo de evaluación intermedia del nivel de logro de las competencias de formación profesional de un profesor de Matemática, en particular de la carrera de Pedagogía en Educación Media en Matemática (PEMM), de la Facultad de Educación de la Universidad Católica de la Santísima Concepción (UCSC), plantea el desafío de contar con una instancia o un dispositivo que entregue información relevante respecto del nivel de logro de las competencias preestablecidas, de modo de contar con parámetros para la toma de decisiones, y tener información válida respecto de qué aspectos deben ser mejorados en el proceso, estimando juicios respecto de la pertinencia, eficacia y efectividad del proceso formador. Es así como a partir de esta propuesta será posible estimar y definir un conjunto de procedimientos, instrumentos e instancias que reporten respecto de estos aspectos. Desde este contexto surgen las siguientes preguntas que podrán ser atendidas con el diseño propuesto:

¿Cuáles son los mecanismos más pertinentes para evaluar el nivel de logro de los resultados de aprendizaje y de las consecuentes competencias a las cuales tributan éstos?,

¿Cuáles son los aspectos relevantes que deben estar presentes en el proceso formador a nivel intermedio para considerar que se están cumpliendo los propósitos de formación profesional?

¿Cuáles son los niveles de cumplimiento y logro de los niveles de competencias y resultados de aprendizaje establecidos para los estudiantes del programa de formación en un nivel intermedio?

¿Qué aspectos son detectados como no desarrollados de acuerdo a lo esperado en el proceso formador a un nivel de formación intermedio en el modelo basado en resultado de aprendizaje y competencias?

Antecedentes

En los procesos de formación profesional en general, y de profesores en particular, el tema de la pertinencia de la enseñanza y la calidad de los aprendizajes traducidos en desempeños adecuados constituyen aspectos que están en permanente reflexión. Los indicadores internacionales cuando miden el Índice Global de Competitividad (IGC) del Foro Mundial de Educación de 2007, Chile figura en el lugar veintiséis (26) entre 131 países, no obstante en educación superior se ubica en el lugar cuarenta y dos (42) con los mismos países de referencia, lo que hace necesario atender la calidad del efecto que este fundamental ámbito significa en el desarrollo, atenuando y revirtiendo lo que el mismo foro ha denominado "desventajas competitivas". La Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos, OCDE (2007), citado por González, Fuentes, y Ruay, (2013), también hace referencia a las tasas de graduación y la razón de graduados por habitantes que son inferiores a la de los treinta países miembros de la OCDE y sus seis países asociados en este periodo, no obstante mostrar una tasa de matriculados por habitante y de ingreso a la educación superior a programas de carácter teórico y prácticos altas, 28%, 48% y 37% respectivamente.

Por otra parte, sabemos que el perfil profesional es el elemento que define las competencias profesionales para el desempeño de funciones profesionales, constituyéndose en referente fundamental para la formación en el contexto universitario y su evaluación (Villardón, 2006; Pey & Chauriye 2011). Riesco (2008), aporta elementos que ayudan a la evaluación de las competencias como son los conocimientos, habilidades y actitudes; la movilización estratégica de estos elementos, los desempeños sujetos a determinados criterios y el logro de determinados dominios de competencia. Finalmente cabe señalar que estos procesos de evaluación deben considerar las variadas modalidades de trabajo en aula que se utilizan para evidenciar desempeños, como son por ejemplo: aprendizaje colaborativo, aprendizaje orientado a proyectos, contrato de aprendizaje, aprendizaje basado en problemas (ABP), exposición/lección magistral, estudio de casos y finalmente simulación y juegos (Fernández, 2006; Pimienta, 2012).

Dado este escenario internacional, al incorporar la mirada competencial es necesario señalar que la conceptualización de la idea de competencia genera en forma natural inquietud, asociado esto a su carácter polisémico que la complejiza; es así que para Le Boterf (2001), citado por Bonsón (2009), la conceptualización asociada a la formación de competencias es de carácter dinámico al ser considerados "en vías de desarrollo". Sumado a lo anterior los objetivos y las competencias son considerados como temas complejos por algunos docentes, (Zabalza 2005), citado por González y Fuentes (2011). Sin embargo se ha consensuado la idea de instalar el enfoque de formación profesional basada en competencias, ya que es un modelo que ofrece la mirada desde la demanda del desempeño en el ámbito académico y laboral. Es necesario señalar que las competencias desde la mirada de distintos autores no son directamente evaluables sino que esto se realiza en el ejercicio considerado como práctica de aprendizaje.

Consecuentemente es necesario resaltar además la función que cumple la evaluación para el desarrollo de competencias, de este modo cabe mencionar los elementos que propone Villardón (2006), en que las características de la evaluación de competencias son: actividad, mejora, información, reflexión, autoevaluación y colaboración; considerados como elementos que colaboran en forma sinérgica al desarrollo de las competencias. Del mismo modo Gibbs (2006) citado por González y Fuentes (2011), describe once condiciones para que la evaluación favorezca el aprendizaje y que agrupa en cinco categorías, las que se refieren a: Cantidad y distribución del esfuerzo del estudiante, calidad y nivel del esfuerzo del estudiante, calidad, cantidad y temporalización del feedback y respuesta de los estudiantes a éste; todos ellos son elementos que facilitan la tarea del desarrollo de competencias.

Finalmente cabe señalar que el diseño curricular depende del enfoque teórico que se adopte; sin embargo la mayor parte de las propuestas curriculares basadas en competencias tienen elementos comunes que los caracterizan. Este se inicia con la identificación y el análisis de las competencias, las que identifican el campo de actuación, el grado de autonomía y el tipo de responsabilidad que se requiere, todo lo cual condiciona el nivel de formación necesario, y posteriormente continua con lo que señala la teoría al respecto y se explicita en el referente metodológico.

Desde las directrices que entregan las competencias establecidas se pueden deducir las capacidades que se requieren, así como las situaciones problemáticas en relación con y en las que éstas se desarrollan. Los procesos formativos de profesionales se dirigen al desarrollo de estas capacidades y a la evaluación individual de las mismas, las que se relacionan estrechamente con los contenidos aportados por los ejes temáticos mediante el desarrollo de estas competencias (González y Fuentes, 2011).

El diseño curricular debe establecer las relaciones existentes entre el módulo, curso o actividad curricular, las capacidades, y las unidades y elementos de competencia, así como la relación entre estos módulos o actividades curriculares entre sí. Este diseño debe también considerar y prever el entorno de aprendizaje necesario (infraestructura, equipamiento, insumos, entre otros), la carga horaria, la especificación de los criterios de enseñanza y de evaluación, así como las capacidades básicas requeridas para el desarrollo de las nuevas (que deberán ser adquiridas, consolidadas o desarrolladas como prerrequisito). Por último, se elaboran los materiales didácticos.

Luego la propuesta de rediseño curricular debe incorporar procesos de inducción y capacitación para los académicos para su implementación, en lo que se refiere a la incorporación de las metodologías activas en los procesos de aula para el desarrollo de los cursos y a su vez diversificar los procedimientos de evaluación, lo que corresponde a un nivel de detalle mayor respecto del diseño curricular en comento.

Metodología de trabajo

El conjunto de acciones de medio tiempo consideradas para constituir un mecanismo de evaluación de competencias durante el proceso formador, que caracterizan la acción llevada cabo en la carrera de PEMM en la UCSC, son:

1) Sistematización de evidencias que den cuenta del nivel de cumplimiento del proceso de formación de los estudiantes, visualizado mediante productos tales como: informes, videos, ensayos u otras constataciones de desempeño de éstos. Lo anterior se concreta con la selección de una muestra de trabajos de las distintas Actividades Curriculares (AC), incorporando las rúbricas y/o pautas con la evaluación y la descripción de los Resultados de Aprendizaje (RA) logrados, parcialmente logrados y no logrados en cada etapa. (De Miguel Díaz, 2006). Toda esta sistematización se incorpora a un portafolio de evidencias de desempeño y productos realizados por los estudiantes, quedando plasmado en él aspectos referidos a la correspondencia entre lo declarado a ser logrado y lo logrado efectivamente.

2) Selección de procedimientos y construcción de instrumentos que permiten evaluar el conjunto de saberes asociados a los niveles de dominio que los estudiantes deben adquirir en un primer ciclo de formación, lo que se materializa en acciones como la elaboración de ítems asociados a RA, a ejes de contenidos y, a competencias genéricas y específicas respectivamente, para configurar instrumentos que permitan recabar información respecto de los niveles de desempeño en las competencias de nivel intermedio del Perfil de Egreso (PE), propuestas en el currículo para el primer ciclo formativo.

3) Aplicación sistemática de dispositivos evaluativos que proporcionan la información relacionada a los niveles de desempeño logrados por los estudiantes, en función de indicadores de logros cualitativos y cuantitativos, los que permiten: sistematizar, interpretar, analizar y tomar decisiones respecto del proceso formador.

4) Generación de acciones que permitan lograr los niveles de dominios de competencias preestablecidos en los estudiantes con resultados descendidos a través de actividades formalizadas para el efecto. Esto requiere definir actividades y recursos necesarios para la consecución del objetivo a la luz de la evidencia obtenida del proceso evaluador.

5) Del mismo modo es necesario considerar realizar los ajustes al currículo, de tal forma que permita compatibilizar el itinerario formativo de la carrera de PEMM con los Estándares Orientadores para carreras de Pedagogía en Educación Media, así también analizar este itinerario formativo respecto del criterio de coherencia y articulación interna entre los ejes disciplinares y pedagógicos, como también entre las dimensiones teóricas y prácticas consideradas en la formación del Plan de Estudios.

Resultados y conclusiones

Desde el diseño de la carrera de PEMM como plan de formación, se ha contado con una serie de instancias que permiten ser consideradas fuentes de información directa para la evaluación de los procesos, sin embargo, se requiere incorporar un conjunto de dispositivos y a la vez sistematizar la información de carácter cualitativo como cuantitativo que del mismo proceso formador surgen, y a la vez establecer los aspectos que a la luz de la instalación de este proceso se visualizan como susceptibles de ser ajustados y mejorados:

Desde esta perspectiva, entonces se puede señalar que los mecanismos más pertinentes para evaluar el nivel de logro de los RA y de las consecuentes competencias a las cuales tributan, son visibles desde el mismo proceso formador y del conjunto de evidencias que hasta una etapa de medio tiempo ha sido posible acopiar respecto del desempeño de los estudiantes en las distintas AC y los resultados tanto cuantitativos como cualitativos que se han emitido como juicio valorativo emitido por los docentes a cargo del proceso formador, es decir, los mecanismos más pertinentes dicen relación con las evidencias de desempeño, entre ellas las tareas integradoras señaladas por Denyer (2007), citada por Ruiz (2009).

Otro de los elementos que surgen desde este análisis inicial, es que los aspectos relevantes que deben estar presentes en el proceso formador a nivel intermedio para considerar que se están cumpliendo los propósitos de formación profesional, dicen relación con el currículo, su estructura e implementación en el aula, esto último se visibiliza en la modalidad de trabajo docente puesto al

servicio de este propósito, el nivel de desarrollo de las competencias por parte de los estudiantes correspondiente al nivel de carácter intermedio y los mecanismos de autorregulación que garantizan una permanente revisión de los procesos académicos y administrativos asociados al PE, es decir, la estructura curricular y su puesta en escena son los aspectos relevantes e imprescindibles en el proceso formador.

A su vez para establecer cuáles son los niveles de cumplimiento y logro de los niveles de competencias y RA establecidos para los estudiantes del programa de formación en un nivel intermedio, es posible contar con el conjunto de reportes cuantitativos de las distintas AC y a la vez sistematizar la información contenida en el soporte documental de las evidencias que se van acopiando con los desempeños y descripción cualitativa respecto de la calidad de éstos; es así como las pautas con la apreciación en un conjunto importante de indicadores de los cuales se componen los instrumentos de evaluación de desempeños de los estudiantes, contribuyen a configurar una imagen bastante aproximada respecto de este nivel de cumplimiento y logro en relación a las competencias preestablecidas, es decir, estos niveles de cumplimiento se determinan y visibilizan en los indicadores asociados a los instrumentos evaluativos.

Del mismo análisis realizado al conjunto de evidencias mencionadas para establecer el nivel de logro, es posible también detectar los aspectos no desarrollados de acuerdo a lo esperado en el proceso formador a un nivel de formación intermedio en el modelo basado en RA y competencias, luego esta propuesta de instalación de dispositivo obliga a visibilizar, sistematizar y someter a revisión externa el conjunto de evidencias e información que surge como resultado natural del proceso de formación, todo lo cual, en su conjunto permite constituir información relevante para hacer las correcciones y mejoras en forma anticipada al término del ciclo formador.

Referencias bibliográficas

Bonsón, M. (2009). Desarrollo de competencias en educación superior, En A. Blanco (Coord). *Desarrollo y Evaluación de Competencias en Educación Superior* (pp. 17-34), Madrid: Narcea, S.A. Ediciones.

De Miguel Díaz, M. (coord.) (2006). Metodologías de enseñanza y aprendizaje para el desarrollo de competencias. Orientaciones para el profesorado universitario ante el espacio europeo de educación superior. Madrid: Alianza Editorial.

Fernández, A. (2006). La evaluación orientada al aprendizaje en un modelo de formación por competencias en la educación universitaria. *Revista de Docencia Universitaria*, 8 (1), 11-34.

González, R. y Fuentes, R. (2011, 10 de mayo). *Propuesta para la elaboración del perfil profesional en educación inicial docente. El caso de pedagogía en matemática*, Ponencia presentada en

el VII Congreso Internacional sobre el Enfoque Basado en Competencias. CIEBC 2011, Medellín – Colombia.

González, R.; Fuentes, R. y Ruay, R. (2013). Implementación de un enfoque competencial en el rediseño curricular de las carreras de ingeniería en una universidad regional pública en Chile, una reflexión crítica. En Varios autores, *La evaluación ante los nuevos paradigmas educativos: Retos y desafíos para el docente* (pp. 107-116). Bogotá: Editorial Redipe.

Le Boterf, G. (2001). La Gestión por Competencias, *Revista Idea*, *Management*. Octubre 2000, 110-113.

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico [OCDE]. (2009). *La Educación Superior en Chile, Revisión de Políticas Nacionales de Educación.* París, Francia: Publicación OCDE.

Pey, R. & Chauriye S. (2011). *Innovación curricular en las universidades del consejo de rectores 2000 – 2010. Consejo de Rectores de Universidades Chilenas*. Recuperado el 03 de marzo de 2013, de http://vra.ucv.cl/ddcyf/wp-content/uploads/2013/06/Informe_innovacion_curricular.pdf

Pimienta, J. (2012). *Estrategias de enseñanza – aprendizaje docencia universitaria basada en competencias*. México D.F.: Editorial Pearson Educación de México S. A.

Riesco, M. (2008). El enfoque por competencias en el EEES y sus implicaciones en la enseñanza y el aprendizaje. *Tendencias Pedagógicas* 13, 79-105.

Ruiz, M. (2009). Cómo Evaluar el Dominio de Competencias, México D.F.: Editorial Trillas S.A.

Villardón, L. (2006). Evaluación del aprendizaje para promover el desarrollo de competencias. *Educatio siglo XXI* 24, 57 – 76.

PRESABERES MATEMÁTICOS CON LOS QUE INGRESAN ESTUDIANTES A LA UNIVERSIDAD

Silvia Johanna Rojas S., Sonia Rocío Suárez C., Sandra Evely Parada Rico
Universidad Industrial de Santander. Colombia
Silviajoha_1105@hotmail.com, joncia91@hotmail.com, saevpa@hotmail.com

Resumen. Exponemos en este documento los resultados de un estudio realizado en el año 2012 que consistió en la elaboración e implementación de una prueba diagnóstica para identificar algunos presaberes matemáticos con los que ingresan los estudiantes a la universidad. Dicha prueba tiene como propósito establecer su nivel de desempeño en los componentes variacional y algebraico. Para el diseño de este instrumento se tomó como apoyo las competencias matemáticas enunciadas por los lineamientos curriculares de matemáticas (Ministerio de Educación de Colombia MEN, 1997) y los estándares básicos de matemáticas para Colombia (Ministerio de educación de Colombia MEN, 2006), fue aplicada a 255 estudiantes matriculados en el curso de cálculo diferencial. El desempeño de los estudiantes fue básico presentando mayor dificultad en el componente variacional.
Palabras clave: presaberes, instrumento de evaluación
Abstract. We expose in this document the results of a survey performed in 2012 which consisted in the development and implementation of a diagnostic test to identify some prior knowledge in mathematics which bring the students entering to the university. This test has as purpose to establish their level of performance in the variational and algebraic components. For the design of this instrument was taken as support the mathematical competences enunciated by the curriculum guidelines for mathematics (MEN, 1997) and the basic standards of mathematics to Colombia (MEN, 2006), was applied to 255 students registered in the course of differential calculus. The performance of the students was basic, presenting major difficulty in the variational component.
Key words: previous knowledge, evaluation instrument

Introducción

El estudio surge para atender una problemática identificada en estudiantes de nuevo ingreso a la universidad, quienes en una prueba inicial dejan ver que sus respuestas incorrectas refieren más a su baja interpretación de enunciados que a la incorrecta aplicación de algoritmos. Esta problemática es reportada también por el proyecto diagnóstico de las causas de deserción y retención estudiantil en los programas de pregrado presencial de la universidad industrial de Santander presentado por la vicerrectoría académica en el 2013.

En Parada (2012) se reporta que estudios previos realizados por la Escuela de Matemáticas muestran que aproximadamente el 70% de la población estudiantil que semestralmente toma la asignatura la reprueba o la cancela. Dichos estudios también mencionan que los estudiantes no traen las bases conceptuales necesarias de su formación escolar, lo que constituye una causa principal de la problemática, y por ello no logran comprender los contenidos del curso.

Esta situación no solo se ve reflejada en la UIS sino instituciones universitarias al interior del País y de diferentes países han manifestado su gran preocupación por la problemática que se vislumbra al respecto. Ante ello, la Escuela de Matemáticas ha desarrollado algunos iniciativas, mismas que se han condensado en un proyecto institucional en el que se plantean alternativas curriculares para

atender la problemática mencionada anteriormente (Parada, 2012). Dichas alternativas se organizan desde dos frentes: las preventivas y las remediales. Desde las primeras se busca atender dicha problemática antes de que los estudiantes se enfrenten con las dificultades de aprendizaje de los contenidos de la materia.

Por lo anterior, se propone aplicar una prueba diagnóstica inicial a estudiantes de primer nivel con el fin de identificar o caracterizar sus presaberes, para que a partir de allí se le puedan plantear alternativas de apoyo: i) participación en un curso de precálculo y, ii) seguimiento y acompañamiento académico durante el semestre.

Referentes conceptuales

Ser considerado competente en la práctica matemática tiene mucho que ver con ser considerado competente en el contexto cultural y social donde se produce dicha práctica, y esto conlleva necesariamente compartir o simular determinados significados y valores legitimados en ese contexto (Pinxten, 1997). En este sentido, la construcción del conocimiento matemático y el buen desarrollo de los procesos de comunicación son del todo inseparables. En particular las intervenciones positivas o negativas que se intercambian en estos procesos de comunicación facilitaran o dificultaran la construcción del conocimiento matemático.

Competencia matemática

Según Godino (2002) expone la competencia matemática como la capacidad para realizar adecuadamente tareas matemáticas específicas, debe complementarse con la comprensión matemática de las técnicas necesarias para realizar las tareas y de las relaciones entre los diversos contenidos y procesos matemáticos puestos en juego. La competencia y la comprensión en matemáticas son nociones cognitivas complementarias cuyo logro implica un proceso de crecimiento progresivo que debe tener en cuenta las diversas facetas del conocimiento matemático.

El programa PISA de la OCDE (2006) estipula que "el concepto general de competencia matemática se refiere a la capacidad del alumno para razonar, analizar y comunicar operaciones matemáticas. Es, por lo tanto, un concepto que excede al mero conocimiento de la terminología y las operaciones matemáticas, e implica la capacidad de utilizar el razonamiento matemático en la solución de problemas de la vida cotidiana" (pp.3).

Según los National Council of Teachers of Mathematics(NCTM) (2000) ser competente en un campo complejo como el matemático supone tener habilidad para usar los conocimientos con flexibilidad, y aplicar con propiedad lo aprendido en un contexto en otro contexto. Se basa en un aprendizaje en el que se comprende lo aprendido. Los estudiantes deben aprender matemáticas

comprendiéndolas, y construir activamente nuevos conocimientos a partir de la experiencia y de los conocimientos previos.

Teniendo en cuenta las definiciones dadas por cada uno de estos autores encontramos algunos puntos en común que nos orientan para plantear que un estudiante es competente en matemáticas cuando es capaz de formular, plantear, transformar y resolver problemas mediante el lenguaje cotidiano y los distintos lenguajes matemáticos. De igual manera, utilizando las diferentes representaciones de un objeto matemático y justificando los procedimientos realizados.

Instrumento de Evaluación por competencias

Nos referimos a *instrumento*, de acuerdo a lo planteado en el libro *Evaluación general de diagnóstico 2009, Marco de la evaluación,* del instituto de evaluación de la secretaria de Estado de Educación y Formación Profesional del Ministerio de Educación de España, donde considera la evaluación diagnostica mediante diferentes tipos de pruebas, entre ellas las de reactivos de opción múltiple.

La evaluación de competencias básicas del alumnado requiere el empleo de instrumentos que incluyan ítems adecuados al tipo de competencias que han sido consideradas, que tengan en cuenta los contextos o situaciones definidos para que los sujetos demuestren su dominio y aplicación, y cuya administración resulte viable en el marco de una evaluación de diagnóstico (Ministerio de Educación España 2009).

Aspectos metodológicos

Este reporte hace parte de una investigación que tuvo como objetivo posibilitar experiencias que permitieran valorar las competencias comunicativas en estudiantes de once grado y analizar como dichas competencias influyeron en sus procesos de resolución de problemas, específicamente los relacionados con el pensamiento algebraico.

Los resultados que vamos a presentar corresponden al estudio preliminar de dicha investigación que tenía como objetivo analizar los conocimientos que traen los estudiantes al ingresar a la Universidad Industrial de Santander (UIS) a un curso de cálculo I. Conocimientos que evidenciamos en el diseño e implementación de una prueba diagnóstica elaborada por competencias, siguiéndonos de la caracterización propuesta por el instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior en las pruebas de estado ICFES.

La investigación fue de tipo cualitativo de corte fenomenológica que se desarrolló por medio de cinco etapas: Etapa preliminar, plan de intervención, sistematización de datos, análisis de la información y elaboración del reporte de investigación.

Frente al estudio preliminar se diseñó e implementó una prueba diagnóstica que constó de 19 ítems (10 del componente algebraico y 9 del componente variacional). Cada pregunta, de la prueba hace referencia a las competencias matemáticas enunciadas por los lineamientos curriculares de matemáticas (MEN, 1997) y los estándares básicos de matemáticas para Colombia (MEN, 2006). El instrumento fue aplicado como prueba diagnóstica a 93 estudiantes en el primer semestre y a 162 en el segundo semestre, en cada semestre se variaron los ítems. Dicha prueba se aplicó en los semestres correspondientes al año 2012 y en el primero del año en curso, a un total de 683 estudiantes que cursaban calculo I. Para el análisis de resultados y procesos se tuvo en cuenta la prueba que se aplicó en el segundo semestre de 2012.

Las pruebas diseñadas se presentaron de manera física y constaron de 3 hojas: una con los enunciados de los problemas, otra con la hoja de respuestas (selección múltiple con única respuesta) y la última con la hoja de procesos. En la hoja de procesos los estudiantes justificaban las respuestas a los problemas planteados.

Inicialmente se realizó un análisis en general para tener una visión de las posibles dificultades que presentan los estudiantes, posteriormente estos resultados se revisaron a partir de las competencias mencionadas previamente.

Análisis de resultados

A continuación presentamos algunos resultados que sobresalieron del análisis descriptivo que se realizó a los datos obtenidos.

En la Figura 1, encontramos los porcentajes de respuestas correctas e incorrectas para cada ítem

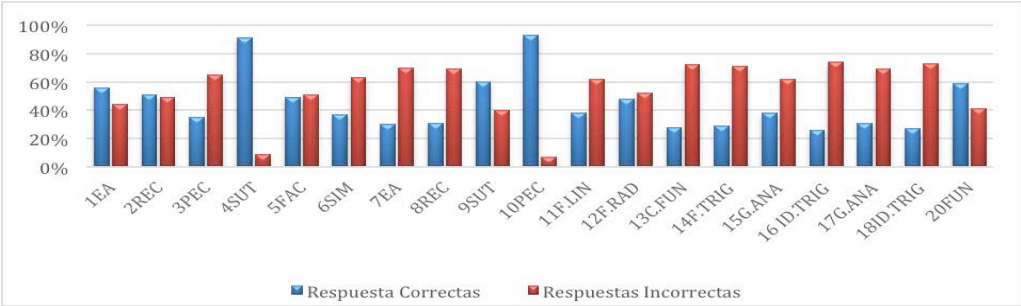


Figura 1. Porcentaje de respuestas correctas e incorrectas para cada ítem

En la Figura 1, vemos que los ítems de mayor porcentaje de respuestas correctas fueron los correspondientes a sustitución de variables (ítem 4) y planteamiento de ecuaciones (ítem 10). Los ítems referentes a trigonometría (ítems 16-18) pertenecientes a la competencia de razonamiento y argumentación se caracterizaron por altos porcentajes de respuestas incorrectas, al igual que los ítems relacionados con Geometría analítica (ítem 17) y composición de funciones (ítem 13)

pertenecientes a la competencia de comunicación y representación, con respecto a la competencia de modelación, planteamiento y resolución de problemas, podemos decir que los ítem que hacen parte de ésta tuvieron mayor porcentaje de respuestas incorrectas que correctas especialmente el correspondiente al manejo de expresiones algebraicas (ítem 7). En general, se hace evidente que los estudiantes en cada una de las competencias evaluadas presentan bajo desempeño principalmente en el componente variacional y en los ítems referentes a trigonometría.

De la revisión de las hojas de procedimientos se pudo observar que los estudiantes no contestaron o contestaron mal los problemas por su baja interpretación y comprensión de los enunciados. A continuación se presentan dos ejemplos de los procesos realizados por estudiantes que hace evidente lo expuesto previamente.

Para almacenar gasolina se utilizan depósitos cilíndricos como los que se muestran en la siguiente figura. Si x=2dm, la capacidad del depósito B es:

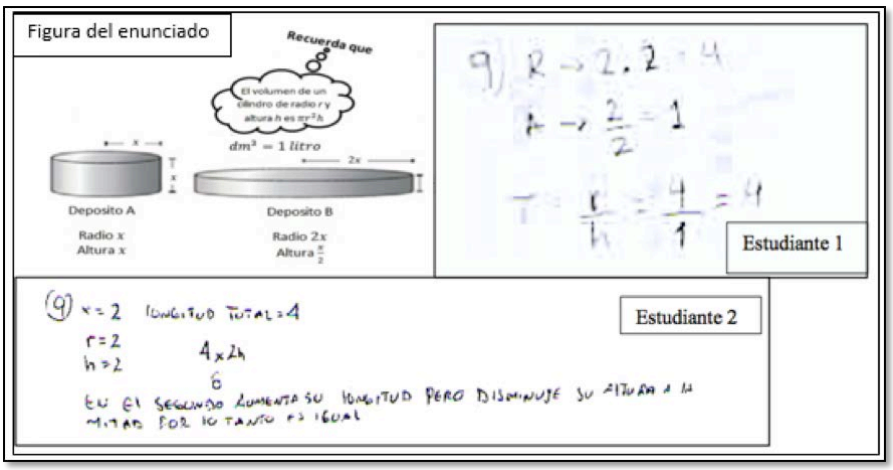


Figura 2 Solución dada por estudiantes en el enunciado número 9 de la prueba diagnóstica

En las soluciones dadas por dos estudiantes para este problema se observa:

- El estudiante 1 al querer dar respuesta al enunciado, realiza operaciones que lo llevan a despejar y dar el valor de π sin hacer un análisis a profundidad de lo realizado, puesto que se puede observar que el valor que obtuvo no es realmente el valor de π, y además no halló el volumen del depósito B que era lo que planteaba el problema
- El estudiante 2 claramente no entendió lo que debía realizar, puesto hace una comparación entre el ancho y el alto de los depósitos y no da una respuesta acertada.

En el siguiente enunciado el estudiante debía hacer uso de la identidad trigonométrica *seno de la suma de dos ángulos,* pero como se puede observar en la Figura 3 carecen del conocimiento de dicha identidad para aplicarla en el ejercicio.

Si $sen(x) = \frac{1}{3}$ *y* $sec(y) = \frac{5}{4}$ *donde x e y están entre 0 y* $\frac{\pi}{2}$ *al evaluar* $sen(x+y)$ *se obtiene:*

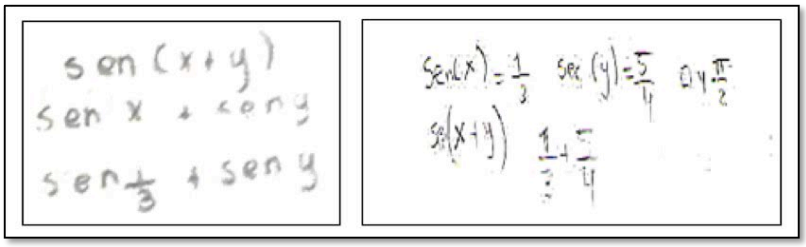


Figura 3. Soluciones dadas por estudiantes al enunciado número 18 de la prueba diagnóstica

Primeras reflexiones

- Los estudiantes no traen las bases conceptuales necesarias de su formación escolar, lo que constituye una causa principal de la problemática, y por ello no logran comprender los contenidos del curso de Cálculo Diferencial.
- Los estudiantes que presentaron la prueba tienen bajos pre saberes en trigonometría, como se muestra en la Figura 3.
- Se evidenció la escasa interpretación de enunciados lo que nos conduce a percibir el bajo nivel de las competencias comunicativas de los estudiantes.

Por todo lo anterior, se proyecta un estudio con alumnos de último grado de bachillerato en el que se trabajen las competencias lecto-escritoras bajo la hipótesis de que un dominio adecuado de dichas competencias pueden ayudar a los estudiantes a tener una mejor comprensión de los problemas matemáticos.

Referencias bibliográficas

Godino, J. (2002) Competencia y comprensión matemática. ¿Qué son y cómo se consiguen? Revista Uno, volumen 29, 9-19.

Ministerio de Educación Colombia (MEN) (1997). Lineamientos curriculares. Recuperado el 21 de diciembre de 2012 de: http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

Ministerio de Educación Colombia (MEN) (2006). Estándares Básicos de Competencias. Recuperado el 21 de diciembre de 2012 de: http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-116042_archivo_pdf.pdf

Ministerio de Educación España (2009). Evaluación general de diagnóstico 2009 Marco de la evaluación. Madrid. Gráficas Naciones

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000).Principles and standards for school mathematics. Reston, VA, EUA: National Council of Teachers of Mathematics.

OCDE (2006).El programa PISA de la OCDE: Qué es y para qué sirve. Recuperado el 15 de diciembre de 2012 de http://www.oecd.org/pisa/39730818.pdf

Parada, S. (2012).Alternativas curriculares para atender la problemática relacionada con el curso de cálculo diferencial de la Universidad Industrial de Santander (UIS). En memorias del IV Seminario Taller en Educación Matemática: La enseñanza del cálculo y las componentes de su investigación. Bucaramanga, Colombia.

Pinxten, R. (1997). Applications in the teaching of mathematics and sciences. En A.B. Powell & M. Frankenstein (Eds.), Challengingeurocentrism in mathematics education (pp. 373-402). New York: SUNY.

CONSTRUCCIONES MENTALES PARA LA APROPIACIÓN DEL CONCEPTO DE LA INTEGRAL DESDE REGISTROS GEOMÉTRICOS

Karla Liliana Puga Nathal, Eduardo Miranda Montoya
Instituto Tecnológico de Cd Guzmán México
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Occidente
karlalpn4@gmail.com, emiranda@iteso.mx

Resumen. Se presentan los resultados de una investigación de corte cualitativo en la que se describen los niveles de construcciónpor los que transita un sujeto cuando bosqueja la gráfica de una función primitiva a partir de acumulación de áreas. En la investigación participaron estudiantes universitarios inscritos en los cursos de Cálculo Diferencia y Mecánica Clásica. La metodología aplicada fue de tipo descriptiva, a partir de la observación y exploración; esto debido a que la investigación tuvo como objetivo analizar las estructuras mentales que desarrolla un estudiante para comprender y apropiarse del concepto de Integral a partir de registros de representación geométricos.
Palabras clave: esquema mental, APOE, abstracciones
Abstract. The results presented by this qualitative research originate from the description of levels of construction which a subject traverses when a primitive function of a graphic is outlined from the accumulation of areas. Graduate students registered in the courses of Differential Calculus and Classic Mechanics participated in this research. The methodology used was descriptive, based on observation and exploration, by reason of analyzing the development of mental structures of students when trying to understand and comprehend the concept of Integral derived from geometric representation registers.
Key words: mental schemme, APOE, abstractions

Antecedentes

La idea de sumar cantidades infinitamente pequeñas ha venido a resolver una gran variedad de problemas en diversos campos de la ciencia, los cuales son abordados en las universidades. Específicamente en las carreras de Ingeniería el Cálculo Integral se ubica en los dos primeros periodos escolares. La importancia que tiene particularmente la Integral en la retícula básica, es fundamental, debido a que se trata de uno de los conceptos medulares para los subsecuentes cursos de matemáticas, así como para los diversos cursos dentro del mismo programa educativo en otras áreas del conocimiento, por ejemplo, en Ingeniería Electrónica el concepto se aplica en los cursos de Física, Instrumentación, Teoría de control, Electrónica en Comunicaciones, Electrónica de Potencia, entre otros.

En diversos libros de cálculo (Boyce y Diprima, 1994; Edwards y Penny, 2008; Larson, Hostetler y Edwards, 2009; Leithold, 1983; Stewart, 2008; Swokowski, 1989) la Integral se aborda inicialmente desde distintos enfoques como: el área limitada por curvas, un límite con características especificas, la operación inversa a la derivada, el trabajo realizado por una fuerza, la longitud de una curva, el volumen de un sólido y como la función primitiva.

Diferentes autores hacen alusión a que la Integral debe ser abordada desde diversos registros de representación, al respecto Souto y Gómez (2010) mencionan que para entender el concepto de la Integral, se deben coordinar diferentes registros de representación: registro analítico, visual (geométrico) y numérico. Sin embargo, algo que escasamente se observa en los libros citados de cálculo es el énfasis en la relación geométrica entre la Integral ysu Derivada lo que se considera de gran ayuda, dado que si el estudiante comprende esta relación, principalmente desde un registro geométrico, será una alternativa para interpretar diferentes fenómenos físicos, por citar algunos: la obtención de una función posición a partir de la gráfica de la función velocidad, la obtención de una función trabajo a partir de la representación geométrica de una fuerza variable y otras aplicaciones dentro del campo de acción de los estudiantes de ingeniería

Para entender cómo se apropia un sujeto del concepto de la Integral desde registros de representación geométrico se consultaron diversas investigaciones respecto a la construcción del concepto de la Integral (Boigues, 2010; González y Aldana 2010; Delgado, 2009; Sealey, 2006, Torres y Martínez (2008), Souto y Gómez, 2010; Crisóstomo, 2011; Ordóñez y Contreras, 2010; Prabhu & Vidakovic (2001); Paschos & Farmaki, 2006). Se encontró que tales reportes relacionan registros geométricos con numéricos, otros algebraicos con algebraicos, algebraicos con numéricos, pero al momento del desarrollo de la investigación no se encontraron investigaciones que describieranun mecanismo —con fundamentación teórica y metodológica— que posibilitara documentar la construcción de un esquema mental para la apropiación del concepto *"Integral de una función"* desde registros geométricos, lo cual posibilitaría el análisis y obtención de funciones primitivas (a partir de la grafica de su Derivada), desde un registro geométrico (acumulación de cantidades que varían) a otro registro geométrico (la gráfica de una función primitiva).

El objetivo de la investigación fue describir las construcciones mentales que tiene lugar en la estructura cognitiva de un estudiante de ingeniería para apropiarse del concepto de la Integral desde registros de representación geométrico. Para ello, se identificaron los esquemas previos que trajo a su mente así como las dificultades que enfrentó en sus construcciones.

Marco teórico

Para entender el objeto de estudio, la investigación se fundamentó dentro del marco de la epistemología genética, la cual afirma que los individuos nacen con una tendencia a organizar sus procesos de pensamiento en estructuras psicológicas las cuales les permiten adaptarse y comprender el medio que les rodea (Woolfolk, 1996). La organización también se refiere a relacionar diferentes estructuras que posee el individuo para que éstas generen estructuras coordinadas más complejas o de más alto nivel que las actuales. Las estructuras cognoscitivas no son fijas, ya que se modifican a medida que el individuo desarrolla y enfrenta nuevas experiencias,

lo que promueve la construcción de *estructuras* de pensamiento más complejas que le permiten mejores adaptaciones al entorno y a la nueva información (Piaget y García, 2004).

Para interpretar cómo tiene lugar la organización de las estructuras mentales que desarrolla el sujeto en la apropiación del concepto de la Integral, fue necesario retomar algunos planteamientos de la teoría APOE, tales como acciones, procesos, objetos. Esta teoría propone elementos que permiten reflexionar sobre la comprensión de un concepto matemático y además de elementos didácticos para su instrucción. El desarrollo de la comprensión de un concepto inicia cuando el sujeto realiza las acciones, que son la parte medular del marco APOE, esto es, acciones sobre objeto matemáticos, ya que mediante éstas es como el sujeto se acerca al objeto de conocimiento, a partir de un procesos dialéctico logra internalizar y generalizar en procesos que son encapsulados en objetos matemáticos. El nivel de comprensión del concepto se evidencia en la manera en que el sujeto intenta dar solución a una situación problema (Dubinsky, 1991). Toda esta relación de acciones, procesos, objeto y otros esquemas son denominados esquema mental.

Las *acciones* se refieren a la ejecución de una instrucción emitida desde el exterior del sujeto. La acción se manifiesta cuando éste realiza una actividad sin reflexionar sobre ella, sino que se limita a sólo repetir los pasos que otros siguieron.

Los *procesos* son construcciones internas, lo que los diferencia de las acciones y se refieren al momento en que el sujeto logra interiorizar las acciones. Las actividades y transformaciones sobre un objeto que realiza están en su mente y son tan claras que puede desarrollar todo un procedimiento de transformación del objeto sin necesidad de escribirlo.

Si el estudiante es capaz de generalizar un proceso como un todo, e internaliza las acciones y los procesos aplicados sobre un objeto, se dice que ha logrado construir un *objeto*. En el mecanismo de encapsulamiento de un objeto matemático, el individuo recurre a esquemas mentales previos, lo que implica realizar acciones y acudir a los procesos que se requirieron para dar lugar a otros esquemas, e incluso a objetos matemáticos y esquemas que ya posee.

Metodología

Dado que la investigación tuvo como objetivo analizar las estructuras mentales que desarrolla un estudiante universitario para comprender y apropiarse del concepto de Integral a partir de registros de representación geométricos, la metodología empleada fue de tipo descriptiva e interpretativa, a partir de la observación y exploración. El método utilizado fue el de exploración crítica (Inhelder, Sinclair y Bovet, 1996). Los instrumentos para la recolección de datos consistieron en una serie de situaciones problema ubicadas en diferentes contextos en los que el estudiante debía construir la función primitiva a partir de la acumulación de áreas. Las técnicas

consideradas para estudiar el fenómeno fueron la observación no participante (Hernández, Fernández y Baptista, 2010) acompañada por la entrevista en profundidad (Rodríguez, Gil y García, 1999), cuyos tópicos fueron: indagar sobre los argumentos que proporciona el estudiante para cada paso del proceso de solución de cada problema que se le solicitó resolver, indagar sobre las estructuras mentales que posee, necesarias para la apropiación el concepto de la Integral, observar e indagar cómo el sujeto moviliza y coordina diversas estructuras mentales, así como el análisis, descripción e indagación de los niveles de construcción que el sujeto manifestó.

Resultados

De acuerdo con la teoría APOE, un objeto matemático es construido a partir de las acciones que el sujeto realiza sobre otros objetos. En esta interacción sujeto-objeto, en la mente del sujeto se desencadena una serie de abstracciones que dan lugar a la construcción de estructuras, entonces se entiende que detrás de los objetos matemáticos hay un andamiaje mental que le permite al sujeto tener ciertos niveles de comprensión de un objeto o concepto matemático. Esto es precisamente lo que se pretende a continuación, explicar los mecanismos que conducen a las construcciones de un estudiante de Ingeniería Electrónica; para ello, fue necesario entender primero los objetos matemáticos (y su nivel de construcción) que el estudiante coordinó con y hacia las nuevas construcciones.

El sujeto resolvió una serie de situaciones problema que permitieron indigar sobre su proceso de construcción,el cual inició cuando al sujeto se le presentó la primer situación en la que debía trazar la gráfica de f(x) = x, a partir de conocer la gráfica de f(x) = 1, la cual representaba la velocidad con la que se mueve una persona.

Para acercar al sujeto al objeto Integral, se le sugirió la *acción* de acumular áreas limitadas por las gráficas y = 0 y y =1, ubicarlas en el plano cartesiano. Además, se le solicitó (*E*) que representara, a través de una gráfica,las acumulaciones obtenidas. El estudiante obtuvo la gráfica de la figura 1. En la entrevista el sujeto (S_3) comentó:

> *S_3: …la velocidad es constante y la recta va así (señala la gráfica g(t)=1) porque no está ni acelerando ni desacelerando. Va a la misma velocidad. En ese mismo tiempo, pensé que era esa misma velocidad y por eso así la ubiqué.*
>
> *E: …¿Qué fue lo que hiciste cuando calculaste áreas? Por ejemplo A_1*
>
> *S_3: El área A_1 es lo mismo de éste (señala un cuadrito en la gráfica) nomás multipliqué lo que es la hora por la velocidad. Tomé como referencia la fórmula v=d/t.Al principio no me di cuenta, saqué el área pero dije ¿quéme representa esa área? no sabia como qué me representaba, la multipliqué primero. Fui sacando la áreas más acá (señala la gráfica). Me*

fui dando cuenta que era este la distancia, asínomás,como sacar el área del cuadro, lado por lado.

E: …¿Cómo calculaste área A_4?

S_3: La representé como si fuera un rectángulo, de aquí a aquí (señala los puntos 0 y 4 sobre el eje horizontal) pues tiene base 4. Bueno, 4 hr.,Aquí pues no cambia su altura que es un kilómetro; sólo multiplique 4x1.Aquí todavía no me checaban las unidades de lo que me estaba dando,porque lo tomé km/hr. Ya después, más adelante me di cuenta de que son km/hr y por hrs, y fui calculando los km

E: …Generaste ésta recta que llamaste f(t), ésta recta ¿qué representa?

S_3: Para mi es la distancia que recorre el señor.

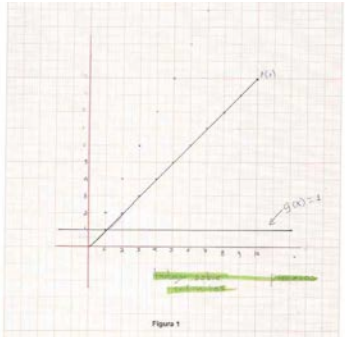


Figura 1. Respuesta del alumno

El estudiante logró resolver exitosamente la situación planteada, logró construcciones a partir de imitar procedimientos. Cuando el sujeto resuelve la situación, recurrió a esquemas mentales previos relacionados con el cálculo de áreas de cuadrados y rectángulos, operaciones de sumas, restas, multiplicación de números reales y esquemas relacionados con el el plano cartesiano. Recurrió a esquemas relacionados con la cinemática (velocidad, posición, aceleración). Además, infirió cantidades infinitesimales cuando se le preguntó cómo encontraría los puntos de la recta y = x en el intervalo [0. 1], el estudiante supuso rectángulos cuya base sería muy pequeña y debía acumular áreas.

Con la idea de provocar un conflicto cognitivo y desequilibrar su estructura mental, se le preguntó al estudiante cómo sería la gráfica distancia de la situación problema planteada si se considera la velocidad constante de 2 km/hr, el estudiante respondió correctamente. Se le mostraron diferentes gráficas velocidad, como las que aparecen en la figura 2, en donde debía asociar la gráfica velocidad con la de distancia. Logró responder correctamente y dado el argumento de sus respuestas se consideró como información sufiente para entender que el sujeto logró generalizar las acciones en procesos.

Para asociar las gráficas, el sujeto acumuló áreas asumiendo que el signo de éstas se debe al sentido geométrico de la gráfica velocidad.

Para describir las construcciones que surgen en la mente del estudiante cuando enfrenta la situacion problema, se elaboró el diagrama de la figura 3, en el que se muestran los esquemas que el sujeto trae a su mente así como las abstracciones que tiene lugar cunado el sujeto realiza acciones.

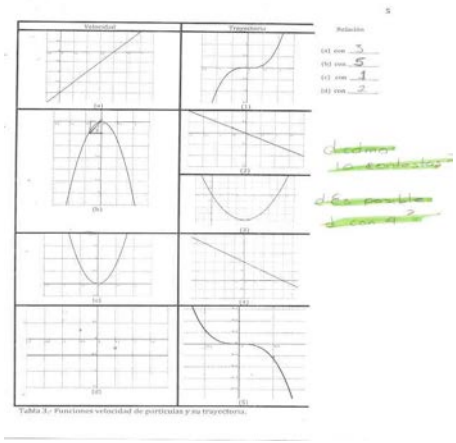


Figura 2.- Gráficas velocidad y distancia.

Se mencionó que el proceso de construcción inició cuando el sujeto realiza la acción I para manipular uno de los objetos matemáticos definido en la investigación como *acumulación de áreas*. Entonces, para que esto fuera posible, como consecuencia del mecanismo de adaptación, en su mente se desencadena una serie de abstracciones, tanto de reflejamiento como de reflexión, ya que el sujeto recurrió a esquemas mentales previos, relacionados con el cálculo de áreas de cuadrados y rectángulos (A_3), operaciones de sumas, restas, multiplicación de números reales (R_6) y esquemas que le permiten ubicar coordenadas en el plano cartesiano (F_7), como se indica en el diagrama.

El *reflejamiento,* se refiere a que el individuo es capaz de establecer representaciones (o proyectar) de un estadio inferior (actual) de conocimiento a uno superior a partir de las acciones que haya realizada sobre un objeto (de la acción a la representación). Y una *reflexión* se refiere a la reconstrucción y reorganización de aquel conocimiento para formar nuevas estructuras mentales (Piaget y García, 2004).

Además, el estudiante recurrió a conceptos comovelocidad, posición y aceleración. Se observó que aún tratándose de niveles de construcción, en donde el estudiante imita procesos o sigue instrucciones, tiene lugar un reacomodó de sus estructuras actuales, adaptándoseasí a la nueva información.

El sujeto interioriza las acciones en procesos (ver figura 3) que le permiten acumular áreas y los encapsula en objetos. Para ello, trae a su mente esquemas relacionados con operaciones con los números reales (R_6) y esquemas relacionados con cantidades infinitesimales (R_7), en el proceso de interiorización el sujeto necesitó recurrir constantemente a esquemas relacionados con la cinemática, particularmente velocidad y posición (M_5) así como a esquemas que le permitieron localizar puntos en el plano cartesiano (F_7).

En el diagrama de la figura 3 se puede observar que el sujeto logra la obtención de la gráfica de la primitiva y esto lo internaliza como un objeto matemático. Lo que le permitió resolver problemas para modelos similares, para curvas que pertenecen a la misma familia. Sin embargo, se observó que fue capaz de realizar la operación con autonomía, logrando internalizar procesos los cuales manipuló con evidente habilidad cuando se trató la parte operativa de una situación problema. El sujeto construyó gráficas de funciones primitivas por acumulación de áreas e incluso recurrió a esquemas relacionados con la derivada para corroborar si la gráfica de la primitiva es correcta o no. También en el diagrama de la figura 3 se observan las acciones, procesos y objetos que se desencadenan y en la medida que el sujeto se acerca más al objeto matemático; los esquemas a los que recurre son más complejos, ya que logró identificar familias de curvas, y la aplicación de las acciones encomendadas a varios miembros de diferentes familias (F_7).

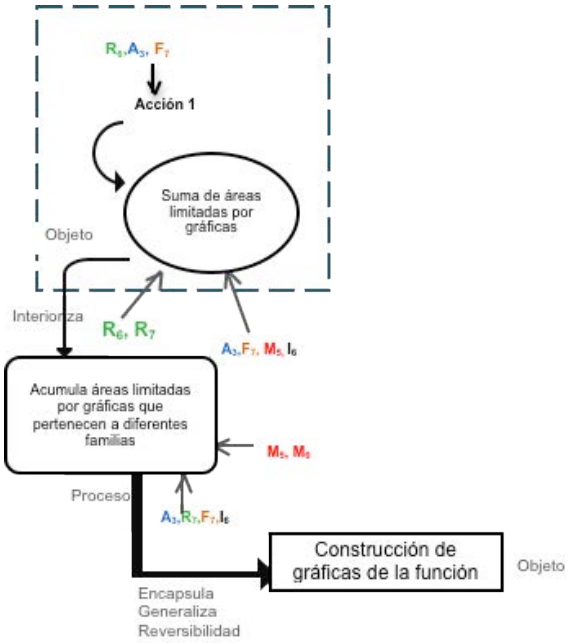


Figura 3.- Construcciones del estudiante

En el esquema se incluye elementos que le permiten al sujeto ampliar su campo de trabajo con el objeto matemático *suma de áreas limitadas por curvas*, ya que los procesos que desarrolló le

permitieron acumular áreas limitadas por curvas que pertenecían a diferentes familias, no sólo para gráficas lineales como sucedió inicialmente, además mostró una mayor autonomía en la solución de las situaciones que se le plantean, no requiere de imitar procesos o que se le indique cómo deberá resolver tales situaciones.

Referencias bibliográficas

Boyce, W. y Diprima, R. (1994). Cálculo. Primera edición. México: CECSA.

Eduards, H. y Penney, D. (2008). Cálculo con trascendentes tempranas. (7ª edición). México: Pearson Education.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. Recuperado el 2 de Septiembre del 2010 de http://www.math.kent.edu/~edd/publications.html#C.)%20Mathematics%20Education%20-%20Refereed

Boigues, F. (2010). Una propuesta de descomposición genética para la integral definida en estudiantes de ingeniería. Recuperado el 24 de febrero del 2011 de: http://www.seiem.es/actividades/archivosactividades/JORNADASDIDACTICAANALISIS.pdf

Crisostomo, E. (2011). Conocimiento profesional de los profesores-formadores sobre la didáctica del cálculo. XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil.

Delgado, M. (2009). Matemática visual: Simulaciones relativas al Teorema Fundamental del Cálculo. *El Cálculo y su Enseñanza*. Cinvestav del Instituto Politécnico Nacional, México D.F. Recuperado el 12 de abril del 2011 de: http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/data/docs/Em3v4rTYf11.pdf

González, T. y Aldana, E. (2010). Comprensión de la Integral Definida en el marco de la Teoría APOE. 4-22. Recuperado el 24 de Febrero del 2011 de: http://www.seiem.es/actividades/archivosactividades/JORNADASDIDACTICAANALISIS.pdf

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). Metodología de la investigación. (5a Edición). México: Mc Graw Hill.

Inhelder, B., Sinclair, H. y Bovet, M. (2002). Aprendizaje y Estructuras del Conocimiento. (3ra edición). España: Ediciones Morata

Larson, R., Hostetler, R. y Edwards, B. (2009). Cálculo Integral. (1ª Edición). México: Mc Graw Hill.

Leithold, L. (1983). El Cálculo con Geometría Analítica. (4ª edición). México: FEM.

Piaget, J. y García, L. (2004). Psicogénesis e Historia de las ciencias. (10ª Edición). México: Siglo XXI Editores.

Paschos, T. & Farmki, V. (2006). The Reflective Abstraction In The Construction Of The Concept Of The Definite Integral: A Case Study. Recuperado el 2 de Febreo del 2011 de: ftp://ftp.emis.de/pub/EMIS/proceedings/PME30/4/337.pdf

Rodríguez, G. Gil, J. y García, E. (1999). Metodología de la investigación cualitativa. España: Ediciones Aljibe.

Sealey, V. (2006). Definite Integrals, Riemann Sums, and Area under a Curva: What is necessary and suffuent?. Recuperado el 3 de Febrero del 2011 de: http://www.pmena.org/2006/cd/ADVANCED%20MATHEMATICAL%20THINKING/ADVANCED%20MATHEMATICAL%20THINKING-0007.pdf

Stewart, J. (2008). Cálculo, trascendentes tempranas. (6ta edición). México: CENGAGE learning.

Souto, B. y Gómez, I. (2010). Comprensión visual y concepto de la Integral en la enseñanza universitaria, 80-94. España: Memoria de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Swokowski, E. (1989). Cálculo con Geometría Analítica. (2ª edición). México: Grupo editorial Iberoamérica.

Torres, A. y Martínez, D. (2008). The understanding of the Integral defined as mathematical object in the university students. Recuperado el 3 de Febrero del 2011 de: http://tsg.icme11.org/document/get/383

Woolfolk, A. (1996). Psicología Educativa. México: Prentice Hall.

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN EL APRENDIZAJE ESTADÍSTICO

Blanca Dulce Miriam Benítez Pérez, Alma Alicia Benítez Pérez
Facultad de Ciencias - UNAM México
CECyT 11 "Wilfrido Massieu" - IPN
blanca.benitez@gnp.com.mx, albenper@gmail.com

Resumen. La presente investigación identifica las estrategias que emplea el alumno de nivel superior (22-23 años) de la carrera de Actuaría (Octavo Semestre), en la resolución de un problema de Teoría de Riesgo, el entendimiento de métodos para la identificación de la distribución de la suma de variables aleatorias y el paso de un enfoque determinístico a un enfoque estadístico, para ello se emplearon diversas representaciones en situaciones que abordan tópicos del Cálculo Actuarial. Particularmente se evidencia la identificación y exploración que el alumno desarrolla cuando analiza y discute la representación de la "agregación" de la pérdida en términos de monto y de frecuencia, donde cada pérdida (en este caso 2) es una variable aleatoria. La agregación es la suma de las 2 variables aleatorias, esta expresión es validada y discutida para poder calcular la masa de probabilidad, su densidad y distribución. Los registros y las transcripciones de las clases fueron analizados considerando un modelo particular de la investigación cualitativa, empírico / experimental

Palabras clave: representaciones, contexto, datos, riesgo.

Abstract. This research identifies strategies used by the top-level students (22-23 years) career Actuary (Eighth Semester), the resolution of a problem in Risk Theory, understanding of methods for identifying the distribution of the sum of random variables and the passage of a deterministic approach to a statistical approach to this diverse representations in situations that address topics of Actuarial calculation were used. Particularly the identification and exploration develops when the student analyzes and discusses the representation of the "aggregation" of loss in terms of amount and frequency, where every loss (in this case 2) is a random variable evidence. Aggregation is the sum of two random variables, this expression is validated and discussed in order to calculate the probability mass, density and distribution. The records and transcripts of the classes were analyzed considering a particular model of qualitative research, empirical/ experimental.

Key words: representations, context, data, risk.

Introducción

La enseñanza y aprendizaje de la Estadística en Escuelas de Actuaría es un procesos dirigido a la adquisición por el alumno de conocimientos científicos, prácticos y eficaces dirigidos a la adquisición de conocimientos, habilidades y destrezas prácticas y útiles que se acumulen en sus acervo, de tal suerte les capaciten para afrontar problemas contextualizados en el área de seguros, aspectos de gran relevancia tanto personal como profesional (Campos, 2007). El término "Contexto" en el aprendizaje de la matemática y en particular en el aprendizaje actuarial, está enfocado al desarrollo de las competencias de los alumnos para aplicar las matemáticas escolares a los contextos extra matemáticos de la vida real, ya que consiste en entender con más detalle el entorno de la situación, considerando el importante papel que adquiere el contexto entre un objeto matemático y la práctica en la que dicho objeto es determinante. Bajo esta óptica las situaciones extra matemáticas, que contextualizan un objeto matemático, los "Problemas contextualizados" permiten simular situaciones del mundo real. Para poder tratar con la

incertidumbre existente en todo proceso estadístico, es necesario estimar a partir de las muestras un modelo de tipo estadístico que defina el proceso del que proceden los datos, proceso que permite al alumno realizar tareas de interés en Actuaría como para conseguir un mejor entendimiento de los datos disponibles.

Marco teórico

Las investigaciones en educación matemática (Jurdak y Shahin, 2001; Díez, 2004) muestran que las matemáticas informales son dominantes en la resolución de problemas en la vida cotidiana y en el mundo laboral, mientras que las matemáticas más formales son las que predominan en la escuela. Por otro lado en situaciones de la vida real donde los alumnos se encuentran involucrados, se ha observado el empleo de un tipo especial de matemáticas, ajenas a las que estudiaron en la escuela. No obstante, las nuevas tendencias sobre la introducción de problemas en contextualizados en el currículum destaca su participación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, uno de sus principios básicos afirma que para conseguir una actividad matemática significativa hay que partir de la experiencia real de los estudiantes (Freudenthal, 1983). Por lo que los lineamientos Curriculares de las Matemáticas preparan la transición hacia el dominio de las competencias al incorporar una consideración pragmática del conocimiento matemático, en que se emplean conceptos, proposiciones, y estructuras matemáticas como herramientas para ser llevadas a la práctica desarrollando con ello un pensamiento lógico y matemático que será desarrollado dentro y fuera del aula.

Con base a ello se consideran dos elementos básicos: La práctica, que expone los escenarios sociales de relación del estudiante con su entorno, y contribuye a su vida profesional. La formal, constituida por los sistemas matemáticos y sus justificaciones.

En este sentido, en la práctica Actuarial, donde predomina la resolución de problemas relacionados con la identificación y medida de los riesgos, es necesario el diseño de situaciones que permitan al alumno contextualizar y analizar registros y métodos apropiados, así como la asociación de la semántica y el método, la póliza será en adelante un riesgo, la frecuencia un contador de eventos, y reclamo la ocurrencia del evento desfavorable, así, un portafolio (línea de negocios) tiene n-riesgos independientes (póliza), entonces la frecuencia anual de reclamos para este portafolio es la suma de las frecuencias anuales de reclamos para cada póliza individual.

Supongamos que un portafolio tiene n-riesgos (pólizas) con pérdidas con pérdida anuales totales $x_1, x_2, \ldots x_n$ son independientes e idénticamente distribuidas. La pérdida anual agregada para el portafolio completo es representado por la suma $S = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$

El método de las Convoluciones, es utilizado para calcular la distribución de la suma de las variables aleatorias independientes. Es un método recursivo, el cual a continuación se describe:

Si $f_x(x)$ y $f_y(y)$ son las funciones de densidad de las variables aleatorias independientes X y Y, entonces la función de densidad de la suma S= X+ Y es referida como la convolución de f_x con f_y y en algunos casos se denota como $f_x * f_y(s)$

$$f_x * f_y(s) = p_r(X + Y = S) = \sum_x P_r(X = x, Y = S - X) \rightarrow caso\ discreto$$

$$= \sum_x P_r(X = x) P_y(Y = s - x) \rightarrow por\ independientes$$

$$= \sum_x f_x(x)\, f_y\,(s - x)$$

$$f_x * f_y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)\, f_y(s - x) dx \rightarrow caso\ continuo$$

En la teoría de "pérdidas" las variables aleatorias puedan tomar solamente valores no-negativas. Esta suma debe ser muy intuitiva, los posibles caminos para obtener X + Y = S consiste en todas las combinaciones donde X está entre 0 y S, y donde Y= S –X

Por inducción se puede demostrar cómo será la suma de n-variables aleatorias independientes, utilizando este método.

En ésta dinámica las representaciones (Duval, 2002), juegan un papel fundamental, ya que potencializa la resolución de problemas en las ciencias y en particular en matemáticas, permitiendo al estudiante dar significado a la información que brinda el problema y operar con ella hasta dar respuesta a la exigencia del mismo. Duval (2000), considera que los sistemas semióticos proveen nuevos significados a la representación parte fundamental en la resolución de problemas, ya que el objeto matemático presenta diversas representaciones producidas por diferentes sistemas semióticos, por lo cual expone la necesidad de enfocar la atención a tres aspectos básicos para lograr la aprehensión conceptual; el objeto, un sistemas semióticos y la composición de signos. Además externa la necesidad de emplear varios sistemas semióticos para la aprehensión del objeto, pero advierte los problemas que origina la coordinación de estos sistemas. Particularmente, Benítez (2009) considera que el estudio de las representaciones son básicas, no obstante puntualiza la importancia de la primera representación con la cual se inicia el proceso de solución, pues de ella depende el desarrollo del problema o bien la deserción del proceso.

El presente trabajo identifica las diferentes estrategias en alumnos universitarios de la carrera de Actuaría, cuando se impulsa la resolución de problemas contextualizados (Actuarial) para generar conocimiento significativo, empleando diversas representaciones en un ambiente franco de discusión académica La situación que se plantea es un problema cotidiano en la ciencia actuarial, para determinar el costo de un seguro (prima), es muy importante conocer el tamaño de las obligaciones contraídas es decir el riesgo cubierto. En este sentido el riesgo se entiende como la esperanza (como uno de los momentos que se estudian) de la pérdida, ésta pérdida se traduce en el análisis cuantitativo y cualitativo de las reclamaciones o siniestros.

Metodología

La experiencia educativa se llevó a cabo con un grupo del nivel superior de la Facultad de Ciencias de la carrera de Actuaría que cursaban el octavo semestre del ciclo escolar con 10 semanas de duración. El grupo se conformó de 20 estudiantes cuyas edades fluctuaban ente 22-23 años, cuyo trabajo en el aula se organizó por pequeños grupos, así como la metodología de la resolución de problemas. A menudo los conceptos se presentaron al inicio de la clase, sobre la base de las ideas previas de los estudiantes, estimulando de manera constante las discusiones que realizaban alrededor de una problemática, fomentando las diversas conjeturas que surgieron y las explicaciones escritas y orales que el alumno emitirá para justificar sus afirmaciones a sus compañeros. De manera paralela se realizaron entrevistas a los estudiantes y se analizaban los temas que se debían incluir durante el desarrollo del programa. Los temas incluían el uso de estrategias y habilidades desarrolladas en los cursos preliminares de probabilidad y cálculo actuarial, en particular lo relativo a la suma de variables aleatorias independientes. Se proporcionaron definiciones tanto matemáticas como del ramo de seguros poniendo énfasis en el desarrollo de habilidades cognitivas que le permitieran aprehensión del objeto de estudio, pues se esperaba que los estudiantes fueran capaces de describir y explicar estos conceptos en situaciones problemas en el ramo de daños (seguros), por lo que el propósito de la experiencia educativa fue proporcionar al estudiante diversas situaciones asociados al estudio de los datos a partir de las muestras para generar un modelo de tipo estadístico que defina el comportamiento de los datos actuariales.

Los instrumentos utilizados para la recolección de datos durante la investigación fueron:

- Reportes escritos elaborados en forma individual.
- Reportes escritos elaborados por cada pareja de estudiantes.
- Grabaciones en audio del trabajo de los estudiantes.
- Reportes elaborados por el profesor-investigador.

Análisis de Datos

Los objetivos que guiaron la investigación fueron:

- Identificar y organizar la información relevante para resolver un problema.
- Aplicar modelos destacados, así como de elaboración, construcción y validación de otros nuevos para el tratamiento de problemas novedosos.
- Desarrollar tratamientos que le permiten analizar e interpretar las representaciones gráficas de datos experimentales.
- Interpretar de los resultados a partir de los modelos estadísticos considerados.

Como parte de la teoría de riesgo se consideraron los siguientes tópicos a discutir:

a) Ubicar cuándo se trata de un modelo individual de riesgo y cuándo de un modelo colectivo de riesgo.

b) En qué tipo de seguros la variable de pérdida puede ser modelada como un modelo individual o colectivo.

c) Exposición de una serie de ejemplos y contraejemplos para ubicar al seguro de daños y al comportamiento de la variable de pérdida que cuenta el Número de reclamos como un modelo individual de riesgo.

La actividad a desarrollar fue la siguiente:

Sea Pr(N=j-1)=j/10 para j=1, 2, 3, 4 y sea X una distribución de pérdida que toma solo dos valores con probabilidades f(1) = 0.4 y f(2) = 0.6. Encontrar las correspondientes funciones de densidad y distribución de $S = X_1 + X_2$ calculando la convolución. S es la pérdida agregada anual en un modelo individual de riesgo, las distribuciones de N y X son discretas, las siguientes afirmaciones están en el contexto del cálculo actuarial:

Una compañía de seguros existe porque tiene la habilidad de manejar riesgos. En seguros muchos riesgos individuales se combinan en un riesgo agregado que sea manejable y cuya cobertura pueda tener un precio justo para los clientes.

La distribución de N no depende de ninguna manera de los valores de $x_1, x_2, \ldots x_n$ tenemos:

N: Frecuencia (cuántos) de reclamos, en el ejemplo n=0,1,2,3

X: severidad (monto) de las reclamaciones

S: tiene una distribución compuesta

$\Pr(N = (j = 1) - 1) = 0.1 \rightarrow n = 0$

$\Pr(N = (j = 2) - 1) = 0.2 \rightarrow n = 1$ y así hasta n=3

La función de densidad de **S** está dada por

$$f_S(x) = p_r(S = x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n f_x^{*}(x) \qquad x = 0, 1, \ldots$$

Desde el punto de vista actuarial, las posibles consecuencias económicas (pérdidas de sufrir un evento no deseado, se cubren a través de una póliza, por lo que existen 2 preguntas de interés:

a) ¿Cuántos pagos de beneficio se realizarán por la ocurrencia de un siniestro?

b) ¿Cuál será el monto de los pagos?

Desde el punto de vista estadístico, la incertidumbre sobre estos aspectos relacionados al riesgo, puede caracterizarse a través de una variable aleatoria

Las estrategias identificadas durante el proceso de solución fueron las siguientes:

- Los equipos efectuaron el cálculo de la convolución utilizando un paquete estadístico libre R,
- Desarrollo el cálculo en una forma intuitiva y muy explícita, este proceso no es común, ya que para estudiantes de este semestre es más común generalizar y/o utilizar otras herramientas.

La actividad se centró en determinar alguna forma de sumar las variables aleatorias independientes que forman parte de un modelo individual de riesgo. La Figura 1 muestra el desarrollo del alumno, el cual consiste primero en ubica la probabilidad que tiene cada variable X y N.

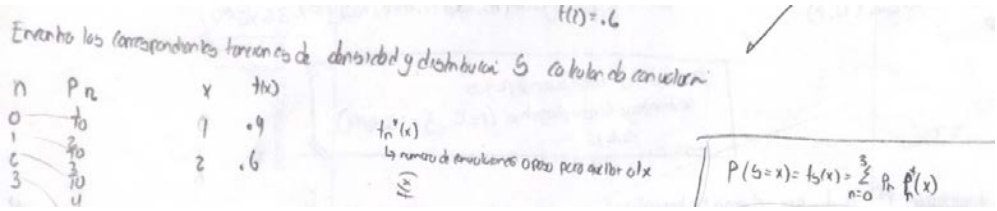


Figura 1. Primer acercamiento al tratamiento de la Información

Posteriormente incorpora las pérdidas a través de la suma desarrollando en forma puntual el cálculo de la convolución para obtener la densidad de "S", para lo cual construye una tabla de valores al evaluar la función para cada valor de "x", lo cual se aprecia en la Figura 2.

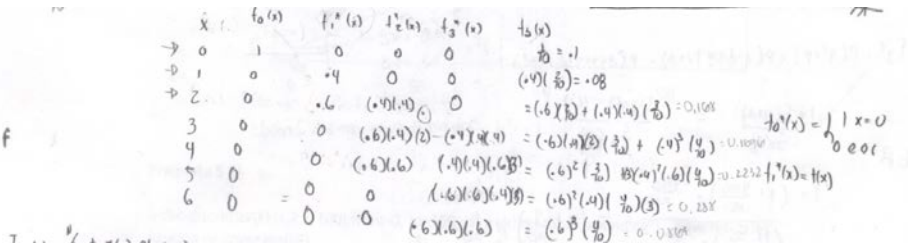


Figura 2. Exploración de la Representación Numérica

Respecto al cálculo de la función de distribución (Ver Figura 3), el alumno desarrolla la acumulación o agregación de probabilidades, utiliza nuevamente la representación numérica

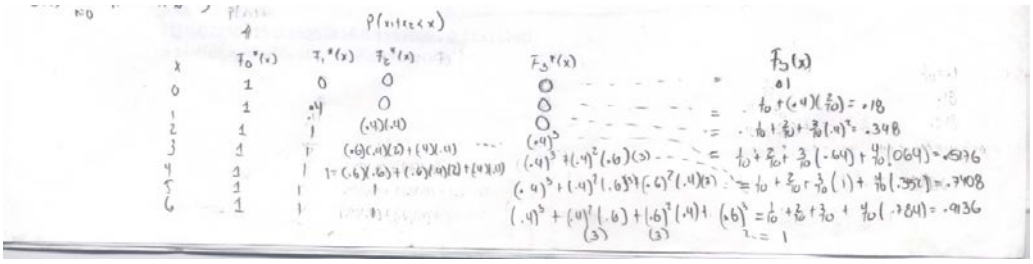


Figura 3. Tratamiento en la Representación Numérica

Para ambos casos, es decir tanto para el cálculo de la densidad como de la distribución, el recurso de la Representación Numérica le permite resolver el cálculo de cada convolución, de manera lógica y ordenada. Aplica paso a paso este método de cálculo, llega sin error a la densidad y distribución correcta. Se asegura del procedimiento desarrollando cada término de la suma.

Durante el proceso de solución de la situación el alumno compara con su compañero de equipo (Ver Figura 4), la cual presenta la simplificación que realiza el alumno, no obstante éste desarrollo le impide concluir o por lo menos no muestra su conclusión en la distribución de los datos.

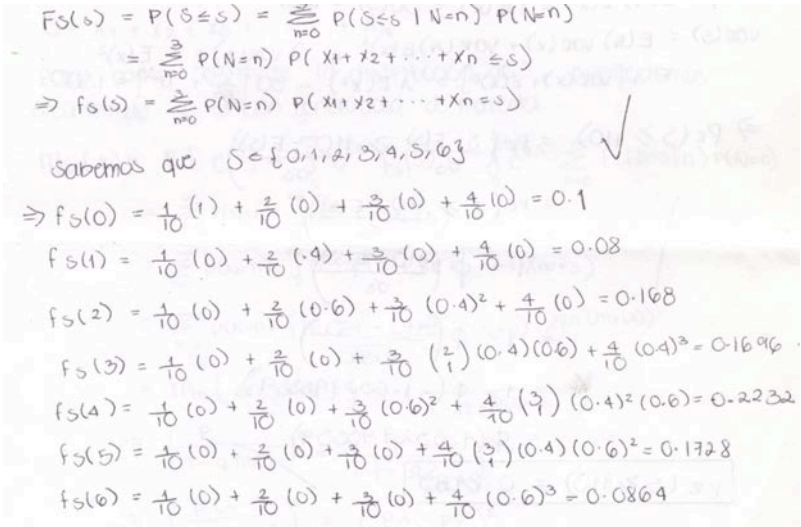


Figura 4.Presentación simplificada de la Distribución de Datos

Las variables aleatorias, "N" y "X" son de tipo discretas, ya que son de conteo, otro recurso no explorado por el alumno y/o por el equipo fue utilizar las fórmulas recursivas, para obtener la función paramétrica de la cual provienen estos datos.

Durante la experiencia el uso de representaciones fue determinante para la resolución del problema, siendo fundamental el pensamiento flexible, pues fue evidente, la tendencia a quedar sujetos a los contextos, en los cuales se presentaban la situación o debido a la familiaridad de los tratamientos en la exploración de las representaciones que los alumnos emplearon.

Hallazgos

La evaluación de la Unidad de Aprendizaje de Cálculo Actuarial del seguro de daños, mediante cuestionarios de tipo test debe cubrir los diferentes aspectos de la Estadística en la Actuaría. Hay que realizar un análisis de los conceptos aplicados correctamente y con mayor frecuencia por los estudiantes.

El diseño de los problemas contextualizados tuvieron como objetivos determinar si el alumno logra discriminar las variables en función de sus características más relevantes y si el alumno comprende los conceptos incluidos.

El uso de diversas representaciones permitió que los alumnos implementaran diversas estrategias para abordar la situación, no obstante como se menciona en el análisis, los estudiantes generalizan de manera inmediata, minimizando la intuición, elemento fundamental para construir conjeturas de la situación.

> Durante el proceso de la resolución de problemas, las representaciones adquieren un papel fundamental, ya que potencializa los diversos caminos para las posibles soluciones, permitiendo al estudiante dar sentido a la información que le brinda el problema y operar con ella hasta dar respuesta a la exigencia del mismo.

Agradecimientos Las autoras agradecen el apoyo otorgado por la Secretaría de Investigación y Posgrado del IPN, a través de la investigación con número de registro 20130860.

Referencias bibliográficas

Benítez, A. (2009). Estudio de la primera representación gráfica de ecuaciones algebraicas de ecuaciones algebraicas en contexto. *Innovación Educativa 9(46),* 41-50.

Campos, C. (2007). *Aprender practicando*. Recuperado el 09 de abril de 2010 de http://ice.unizar.es/uzinnova/jornadas/pdf/95.pdf

Díez, J. (2004), *L´ensenyament de les mate átiques en l´educació de persones adultes. Un model dialógic*, tesis doctoral no publicada, Universitat de Barcelona. Barcelona.

Duval, R. (2002). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. En F. Hitt (Ed.), *North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 311-335): México: Cinvestav-IPN.

Freudenthal, H. (1983), *Didactical phenomenology of mathematical structures.* The Netherlands: Riedel-kluwer A. P.

Jurdak, M. y Shahin I. (2001). Problem solving activity in the workplace and the school: the case of constructing solids. *Educational Studies in Mathematics Education* 47(3), 297-315.

Mogens, B. (2004). *Teoría de Riesgo I*. Recuperado el 10 de enero de 2010 de http://www.dpye.iimas.unam.mx/bladt/riesgo/notas.pdf

Stuart, A., Harry, H. y Gordon, E. (2004). *Loss Models from data to decisions*. USA: A John Wiley & Sons, INC.

INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO DERIVADA: UN DISEÑO EXPERIMENTAL CON ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS DE HUMANIDADE

Juan Carlos Sandoval Peña
Universidad San Ignacio de Loyola Perú
sandovaljc007@gmail.com, jcsandoval07@hotmail.com

Resumen. La investigación presenta una propuesta didáctica sobre el aprendizaje de la derivada, a través de las relaciones entre pendiente y razón de cambio, conceptos que permitirán al estudiante construir un sistema de representaciones más sólido para acceder al estudio variacional. El estudio tiene el propósito de aminorar las dificultades que estos estudiantes enfrentan al realizar el estudio de las derivadas, dificultades como: la comprensión del concepto derivada, la relación entre la razón de cambio promedio y la razón de cambio instantáneo, concebir a la derivada como una función y deducir información relevante de situaciones gráficas, entre otros. Parte fundamental del experimento consiste en recurrir a la noción de representación, pues la función simbólica es la actividad cognitiva, que permite al ser humano acceder al conocimiento. Para desarrollar la investigación nos apoyaremos en algunos aspectos de la teoría de registros semióticos de Duval (2004) y la metodología de diseños experimentales (Cobb, P. Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R., Schauble, L. y Hodge, L. 2003).
Palabras clave: Derivada, diseño experimental, laboratorio, registros de representación.
Abstract. The research presents a didactic proposal about derivative learning, through the relationship between slopes and rate of change, concepts that will allow students to build a more solid representation system to access the variation study. The study aims to reduce the difficulties these students face in the study of derivative, difficulties such as: understanding the concept derived the relationship between the average rate of change and instantaneous rate of change, conceive the derivative as a function and deduce the relevant information from graphs situations, among others. A fundamental part of the experiment consists in using the notion of representation, because the symbolic function is the cognitive activity that allows humans to access knowledge. To develop the research we will rely on some aspects of Duval's theory Semiotic Representation Registers (2004) and the methodology of experimental designs (Cobb, P. Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R., Schauble, L. and Hodge, L. 2003).
Key words: derived, design experiment, laboratory, representation records.

Introducción

Los estudiantes de una universidad particular de Lima, del primer ciclo de humanidades, tienen dificultades cuando estudian el concepto de derivada. En ese sentido, nuestra investigación tiene el propósito de dar una alternativa, que permita aminorar dichas dificultades.

Investigaciones en didáctica de la matemática sobre la enseñanza y el aprendizaje de la derivada justifican este estudio, (Azcárate, Bosch, Casadevall y Casellas, 1996; Sánchez- Matamoros, 2004; Sánchez-Matamoros y García, 2008 y Dolores, 2007). Dichas investigaciones muestran diversas dificultades, entre otras: la comprensión del concepto derivada, la relación entre la razón de cambio promedio y la razón de cambio instantáneo, concebir a la derivada como una función y deducir información relevante de situaciones gráficas, uso de la derivada en forma mecánica, entre otros.

Ante esta problemática se plantea la siguiente pregunta de investigación: *¿De qué manera un diseño experimental, en el que se introduzca el concepto de derivada utilizando los conceptos razón de cambio*

promedio, razón de cambio instantáneo y sus diversas representaciones puede favorecer el aprendizaje de este concepto?

Para dar respuesta a la pregunta de investigación, tomaremos como marco teórico la teoría de registros de representación semiótica (Duval, 1998, 2004) y como metodología algunos aspectos de Design Experiment (Coob et al, 2003).

Marco Teórico:

Las representaciones semióticas, son aquellas producciones constituidas por el empleo de signos, medio por el cual un individuo exterioriza sus representaciones mentales.

Duval (1998), se refiere a los sistemas de representación semiótica, como aquellos que tienen características particulares y permiten sostener la conceptualización en la matemática sujeta a la comunicación, así como en la actividad cognitiva del pensamiento.

El mismo autor señala que las representaciones semióticas, deben cumplir las siguientes funciones: a) la función de comunicación (intercambio social), b) objetivación (toma de conciencia) y c) tratamiento (manipulación de la información).

Además sostiene que no es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento, sin recurrir a la noción de representaciones, porque no hay conocimiento que un sujeto pueda movilizar, sin una actividad de representación.

Los conceptos matemáticos admiten una gran variedad de registros de representación; este trabajo se interesa en analizar los distintos registros, que se abordan en la aprehensión del concepto de derivada, el cual se puede analizar al menos de tres representaciones, como: lo gráfico, lo simbólico y lo natural.

En el esquema de la Figura 1, se muestra cuatro sistemas de representación que generan las posibles conversiones de un sistema a otro o tratamientos dentro de cada sistema.

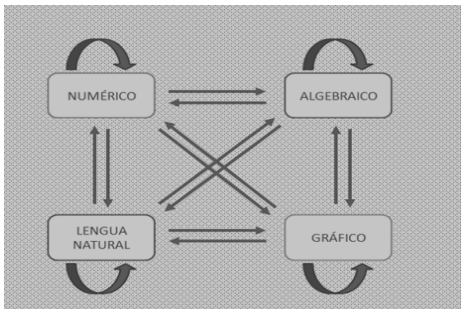


Figura 1. Relación entre los registros

Duval (2005) afirma que la originalidad de la actividad matemática está en movilizar simultáneamente, al menos dos registros de representación al mismo tiempo, o la posibilidad de cambiar todo el tiempo de un registro de representación.

Existen dos tipos de transformaciones de representaciones semióticas que son radicalmente diferentes: los tratamientos y las conversiones. Por eso, cuando se describe la resolución de un problema de matemática y en el análisis de la producción de los estudiantes, nadie se hace cargo de distinguirlas.

El *tratamiento* de una representación lo cual significa, la transformación de la representación en el mismo registro, de acuerdo con las únicas reglas propias del sistema, debemos pensar en una transformación que se lleva a cabo dentro del mismo registro donde ha sido formada dicha representación. El tratamiento, es una transformación interna a un registro.

La *conversión* de una representación de un registro a otro manteniendo la totalidad o parte de la representación inicial, es decir, la conversión es una transformación externa al registro de partida. La conversión es una actividad cognitiva diferente e independiente del tratamiento. Son operaciones de conversión la traducción, la ilustración, la transposición, la interpretación, la codificación, entre otras.

En lo que se refiere a la parte didáctica, las carreras de humanidades se apoyan en textos de *matemáticas para la administración y la economía* (estudiantes de negocios, economía y ciencias sociales), que básicamente desarrollan temas de nuestro interés, como el cálculo de una variable. Por otra parte realizan problemas aplicados y que a menudo se dan argumentos intuitivos e informales.

Para esta investigación tomaremos a tres textos que cumplan con la descripción anterior, (Arya y Lardner, 2009; Haeussler, Paul y Wood, 2008 y Hoffman y Bradley, 1995).

Metodología

Dado lo relevante de la investigación acerca de la comprensión de la derivada y su naturaleza, utilizaremos algunos aspectos del *Design Experiments* (D.E.) (Coob et al ,2003). Así, el D.E. señala que la investigación tiene como foco entender e interpretar datos y discursos, cuando se trata de grupos de estudiantes, razón por la cual se vale de la observación tanto del docente-observador como del investigador.

Se puede sintetizar las características de *Design Experiments* que utilizaremos en el experimento así tenemos: el papel del investigador y su rol en la actividad, el tiempo que puede variar de acuerdo a

los resultados que se van logrando, la colección de datos y la refinación de datos, que consiste en volver a realizar un experimento, si no se logra la información esperada.

Además, para el registro y colecta de información, utiliza varios instrumentos como fichas de observación, fichas de actividades, y grabaciones de audio y video que ayudan al registro de los datos del experimento.

El experimento

EXPERIMENTO	
Lugar	Universidad particular de Lima
Sujetos	3 alumnos de carreras de humanidades
	1 docente-investigador
	2 docentes-observadores
Tiempo	4 semanas
Nro. de fases	2 fases
Nro.de sesiones	2 sesiones por fase
Instrumentos	- Prueba diagnóstica
	- Fichas de actividades
	- Videos y cuestionarios
	- Fichas de observación

Figura 2. Experimento sobre la comprensión de la derivada

El experimento consiste en desarrollar actividades relacionadas con la comprensión de la Derivada (ver Figura 2) donde se analiza el uso de diversos registros de representación tanto tratamientos como conversiones, lo que nos llevará a la conclusión de un uso apropiado acerca de la comprensión de la Derivada.

Para desarrollar el experimento se tomo una prueba diagnóstica que nos dio una idea de cómo estaban sus saberes previos para el estudio de las derivadas, en particular sobre el tema nociones básicas sobre funciones. Los resultados proporcionaron una serie de dificultades, que en el transcurso del experimento se fueron modificando, así tenemos que los estudiantes ven a ahora a la pendiente no solo como un simple número si no su interpretación como la medida de la razón de cambio de la variable "y" con respecto al cambio de la variable"x", reconocen cuando una grafica es función o no, realizan una buena lectura de graficas sobre funciones reconociendo y enunciando sus características.

Luego, describiremos las actividades de la primera fase del experimento (razón de cambio promedio):

Se pasa un video sobre razón de cambio promedio a continuación responden un cuestionario sobre el video, luego los estudiantes reciben una ficha de actividades, en ella encuentran el concepto sobre razón de cambio promedio, así como cuatro situaciones problemas; el primero sugiere una conversión del registro de lengua natural al registro numérico, a continuación se realiza una conversión de un registro numérico a un registro de lengua natural. Situaciones

similares se presentan en las otras situaciones problemas que buscan el manejo de los registros en tratamientos y conversiones.

Para finalizar la sesión, los estudiantes exponen sus ideas y procedimientos en forma voluntaria .Con los resultados en mano se comentan sobre aciertos y errores. El docente cierra el laboratorio *formalizando* el concepto en estudio.

A continuación presentamos dos preguntas del experimento:

En la pregunta (1), se espera que los estudiantes reconozcan y utilicen la definición de Razón de Cambio Promedio, que realicen los cálculos correspondientes, (los estudiantes realizan una conversión, del registro de lengua natural al registro numérico) y finalmente, den el resultado con sus correspondientes unidades, (los estudiantes realizan una nueva conversión, del registro numérico al registro de lengua natural).

Pregunta 1:

Un automóvil se encuentra a una distancia s, en millas , en relación con su punto de partida en t horas , dado por: $s(t) = 10t^2$

Halle la razón de cambio promedio de la distancia respecto al tiempo, cuando t cambia de $t_1=2$ a $t_2=5$.

En la Figura (3), se muestra la producción realizada por dos estudiantes:

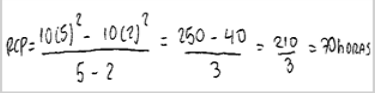
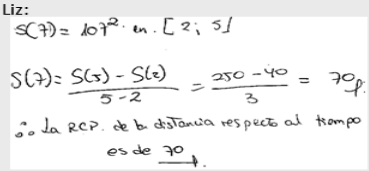
PRODUCCIÓN DE LOS ESTUDIANTES	ANÁLISIS
Tito:  $RCP = \frac{10(5)^2 - 10(2)^2}{5-2} = \frac{250-40}{3} = \frac{210}{3} = 70$ horas	El estudiante aplica la fórmula de RCP; es decir, identifica la variable independiente, reemplaza los valores correspondientes en la función; efectúa operaciones, elabora una diferencia mental en el denominador y obtiene el valor esperado. Como evidencia en la presente figura. Sin embargo, no responde la pregunta del problema, no relaciona las unidades.
Liz:  $S(7) = 10t^2$ en $[2;5]$ $S(7) = \frac{S(5)-S(2)}{5-2} = \frac{250-40}{3} = 70$ ∴ la RCP de la distancia respecto al tiempo es de 70	Identifica las variables que se relacionan mediante la función s(t), luego aplica la fórmula de RCP utilizando la función, reemplaza en los extremos del intervalo dado, efectúa operaciones aritméticas y logra el valor esperado. Además da respuesta al problema relacionando las magnitudes involucradas en el problema.

Figura 3. Producción de los estudiantes de la pregunta 1

En el problema tres se planifica desarrollar una conversión de registro de lengua natural, a registro numérico, luego realiza una conversión del registro numérico, a un registro de lengua natural, el problema muestra dificultad por la unidades y sus operaciones con las fracciones.

Problema 3:

Se estima que dentro de t años la población de cierta comunidad será:

$$P(t) = 20 - \frac{6}{t+1} \text{ Miles de habitantes.}$$

Determine la razón de cambio promedio en el intervalo [2;3]

En la Figura (4), se muestra la producción realizada por dos estudiantes:

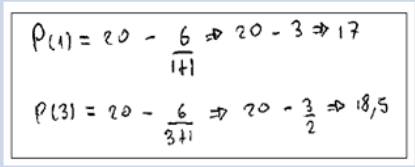
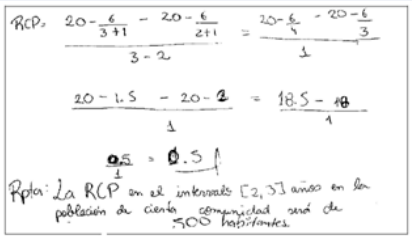
PRODUCCIÓN DE LOS ESTUDIANTES	ANÁLISIS
Tito: 	En este caso Tito, identifica las variables tiempo y cantidad de habitantes. Sin embargo, no reemplaza de acuerdo al intervalo indicado lo hace de t = 1 a t = 3. De acuerdo con lo desarrollado, se conjetura que el estudiante no comprendió el problema, lo que podemos constatar en la figura adjunta.
Lucero: 	Reconoce que se trata de una RCP, realiza las operaciones correspondientes, opera sin tomar en cuenta los paréntesis, sin embargo, los resultados parciales son correctos, se presume que los cálculos lo realizó mentalmente, incluso da como respuesta 500 habitantes . Su resultado final es el óptimo dado que da su resultado con unidades incluidas.

Figura 4. Producción de los estudiantes de la pregunta 3

Reflexiones

Los estudiantes mostraron dificultades, cuando se enfrentaron a situaciones que involucran decimales, números negativos o cantidades grandes, se corrobora dificultades en la parte operativa básica.

Los estudiantes muchas veces relacionan las unidades involucradas en el contexto del problema, sin embargo no lo declaran como parte de la respuesta del problema, porque piensan que es suficiente el resultado numérico, por ello no colocan las unidades como parte de la solución del problema.

Los estudiantes tienen dificultades cuando enfrentan a problemas que involucran a las conversiones. Tienen un mejor desenvolvimiento con los tratamientos.

Los estudiantes muestran mejores resultados en registros algebraicos que en los registros gráficos. Resultado que involucra un uso muy frecuente por parte de docentes y muchos textos de consulta.

Los estudiantes mostraron una mejor comprensión del concepto matemático cuando se realizo el camino didáctico del concepto pendiente a razón de cambio promedio para llegar a una razón de cambio instantáneo que nos conduce a la derivada. Por lo que se propone realizar el estudio de la derivada utilizando este camino didáctico.

Referencias bibliográficas

Arya,J. y Lardner,R. (2009). *Matemáticas Aplicadas a la Administración y a la Economía*. México: Pearson.

Azcárate, C.,Bosch, D.,Casadevall, M. y Casellas, E. (1996). *Cálculo diferencial e integral*. Madrid: Síntesis.

Cobb, P. Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. y Hodge, L. (2003). *Design experiments in education research* .Educational ressearcher 32(1), 9-13

Dolores, C. (2007). *Elementos para una aproximación variacional a la derivada*. México:

Universidad Autónoma de Guerrero. Ediciones Díaz de Santos.

Duval, R. (1998).*Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento.* En Hitt, F. (Ed) Investigación en Matemática Educativa (pp.173-201), México: Grupo editorial Iberoamericana.

Duval, R. (2004). *Semiósis y pensamiento Humano*. Cali: Universidad del Valle. Grupo de educación Matemática.

Duval, R. (2005). *Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación*. La Gaceta de la RSME 9(1), 143-168

Haeussler, E., Paul, R. y Wood, R. (2008*). Matemáticas para Administración y Economía.* México: Pearson.

Hoffmann, L. y Bradley, G. (1995). *Cálculo aplicado a administración, economía, contaduría y ciencias sociales.* Colombia: McGraw-Hill.

Sánchez–Matamoros, G. (2004). *Análisis de la comprensión en los alumnos de Bachillerato y primer año de Universidad sobre la noción matemática de derivada* .Tesis de doctorado no publicada. Universidad de Sevilla.

Sánchez–Matamoros, G.; Linares, S. y García, M. (Ed), Acta latinoamericana de Matemática educativa, *La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática*. 11,267-296. México: Comité Latinoamericana de Matemática Educativa.

REGULACIÓN CONTINUA DEL APRENDIZAJE DEL CÁLCULO Y RENDIMIENTO ACADÉMICO EN ALUMNOS UNIVERSITARIOS DE PRIMER AÑO

Susana González de Galindo, Lisa Holgado de Mejail, Patricia Villalonga de García
Universidad Nacional de Tucumán Argentina
sgalindo@fbqf.unt.edu.ar, lvholgado@yahoo.com, pvillalonga@fbqf.unt.edu.ar

Resumen. Los docentes de Matemática I, asignatura de primer año de una Facultad de Ciencias, se enfrentan a problemas generados por aulas multitudinarias. En este sentido se formuló un Proyecto denominado "Estrategia didáctica que valoriza la regulación continua del aprendizaje en aulas multitudinarias de Matemática", donde se identificaron criterios orientadores de la enseñanza y evaluación del aprendizaje, derivados de teorías cognitivas. Los instrumentos: *cuestionario a alumnos y diario del profesor,* posibilitaron verificar el cumplimiento, en el aula, de tales criterios. La estrategia se implementó en 2010 y participaron alrededor de 400 estudiantes. Se empleó un material curricular sobre la unidad: *Límite de una función*. En este trabajo se analiza si la implementación de la estrategia didáctica se tradujo en un mejor rendimiento académico en el *primer parcial* de la asignatura que el logrado con la metodología anterior. Se evidenciaron mejores resultados. Resta triangular con el rendimiento académico alcanzado en los *exámenes finales*.
Palabras clave: matemática, regulación del aprendizaje, rendimiento
Abstract. Teachers of Mathematics I, 1st year subject of a Faculty of Sciences, face problems generated by massive classrooms. In this sense we developed a project called "Teaching strategy that values continuous learning Math classroom mass", which identified the criteria of teaching and assessment of learning derived from cognitive theories. Instruments: daily questionnaire to students and teacher's diary, allowed verifying compliance, in the classroom, such criteria. The strategy was implemented in 2010 and involved about 400 students. Curricular material was used on the unit: Limit of a function. In this paper we analyze whether the implementation of the teaching strategy resulted in better academic performance in the first part of the course that achieved under the previous methodology. It showed better results. Triangulation left to do with achieved academic performance in the final examinations.
Key words: mathematics, regulation of learning, performance

Introducción

Los docentes de Matemática I, asignatura del primer cuatrimestre de primer año de una Facultad de ciencias, se enfrentan a problemas generados por aulas multitudinarias, entre otros: alumnos pasivos, escasa comunicación, evaluaciones sumativas y desarticulación académica entre el nivel medio y universitario. Para superar estas deficiencias se comenzó por caracterizar un marco teórico a partir de los consensos en los que confluyen los modelos de aprendizaje propios de las teorías cognitivas sostenidas por Piaget, Ausubel, Vigotsky Moreira, Jorba y Casellas, entre otros. Se formuló entonces el Proyecto: "Estrategia didáctica que valoriza la regulación continua del aprendizaje en aulas multitudinarias de Matemática" aprobado por el Consejo de Investigaciones de la Universidad Nacional de Tucumán. Se derivaron del marco teórico una serie de criterios orientadores para el desarrollo metacognitivo y para la enseñanza y evaluación del aprendizaje de Matemática. Estos criterios se constituyeron en referentes durante todo el desarrollo (Villalonga, González, Holgado, Marcilla y Mercau, 2009).

La estrategia didáctica recurre al empleo de un material curricular elaborado desde una óptica constructivista sobre la unidad: *Límite de una función* (González de Galindo y Villalonga de García,

2010). Este material presenta un conjunto de actividades diseñadas para favorecer la construcción del conocimiento. Cada alumno debía completarlo en clase, interactuando con sus compañeros y con el docente. La estrategia didáctica, se implementó en el año 2010 en 6 horas reloj. Los estudiantes que participaron fueron alrededor de 400. Durante las clases el docente se preocupó por estimular los cuestionamientos, la formulación de hipótesis, la conexión entre contenidos y el cambio entre distintos sistemas de representación semiótica. El énfasis estuvo puesto en que el alumno tuviera un protagonismo principal, para lograr que fuera él quien construyera comprensión.

Se recogieron datos provenientes de distintas fuentes. Por un lado, los instrumentos destinados a evaluar la práctica didáctica acontecida en el aula (*cuestionario a alumnos* y *diario del profesor*) permitieron afirmar que los distintos aspectos relacionados con la nueva estrategia tuvieron muy buena acogida y que se cumplieron en su mayoría los criterios derivados del marco teórico (Villalonga de García, González de Galindo y Mercau de Sancho, 2011 (a); González de Galindo, Villalonga de García, Marcilla y Holgado de Mejail, 2012).

Por su parte, para evaluar los aprendizajes de los estudiantes se diseñó un instrumento (*Primer parcial de la asignatura*) que fue aplicado en forma inmediata a la finalización de la implementación de la estrategia didáctica. El objetivo de este trabajo es precisamente analizar si ciertos aspectos relacionados con el diseño y aplicación de la estrategia didáctica se traducen en un mejor rendimiento académico de los estudiantes, comparándolos con los aprendizajes alcanzados por los alumnos del año 2009 en el primer parcial de la asignatura.

Previo a la comparación del rendimiento académico de ambos años se verificó la homogeneidad de ambas poblaciones en las variables: edad, escuela de procedencia (pública, privada y escuelas universitarias), sexo, número de alumnos recursantes y rendimiento académico alcanzado en la prueba de admisión a la Institución.

Marco teórico

Se lo elaboró considerando lineamientos de teorías cognitivas: Psicogenética de Piaget, Aprendizaje significativo de Ausubel, Enfoque Histórico Cultural de Vigotsky, pautas relativas a la metacognición y normas establecidas en los Estándares de Evaluación para la educación Matemática ((Villalonga, González, Holgado, Marcilla y Mercau, 2009). Se construyó un **modelo orientador** sintetizado en los siguientes **criterios** (Villalonga de García, González de Galindo y Mercau de Sancho, 2011 (b)):

El docente en sus clases debe desarrollar actividades matemáticas que:

Criterio 1: revisen el grado de alcance de los prerrequisitos de aprendizaje.

Criterio 2: favorezcan la comunicación de los objetivos.

Criterio 3: promuevan la conexión entre contenidos.

Criterio 4: desarrollen la flexibilidad para expresar los contenidos empleando distintos sistemas de representación semiótica de la Matemática: verbal, simbólico o gráfico.

Criterio 5: desarrollen la potencia matemática del estudiante.

Criterio 6: aprovechen el error como medio para promover el aprendizaje.

Criterio 7: evidencien la utilidad de la Matemática en la vida diaria y en las ciencias.

Criterio 8: ayuden al estudiante a tomar conciencia de los logros alcanzados.

Criterio 9: favorezcan la apropiación, por parte del estudiante, de los criterios de evaluación.

Criterio 10: fomenten la interacción social en el aula.

Criterio 11: promuevan una actitud positiva hacia la Matemática.

A partir de una extensa búsqueda bibliográfica el concepto de *rendimiento académico* que se adopta en este trabajo es la capacidad intelectual evidenciada por un estudiante en un proceso de enseñanza y aprendizaje para actuar en situaciones problemáticas, haciendo uso de sus estructuras mentales y del razonamiento lógico y deductivo.

Metodología

Hipótesis: "La estrategia que enfatiza la regulación continua del aprendizaje y favorece un aprendizaje reflexivo a partir del uso de un material instruccional elaborado ad hoc, implementada en 2010 en el contexto de referencia, conduce a un mejor rendimiento académico que el que se alcanza con el proceso de enseñanza implementado en 2009.

Variable Independiente (VI): estrategia didáctica caracterizada por recurrir al empleo de un material instruccional elaborado ad hoc, enfatizar la regulación continua del aprendizaje y promover un aprendizaje activo.

Variable Dependiente (VD): rendimiento académico de los alumnos, relativo al grado de corrección y de reflexión de la acción. Su definición conceptual es:

Grado de corrección de la acción: grado en el que el conocimiento procesual del alumno se realiza conforme a las conceptuaciones científicas.

Grado de reflexión de la acción: grado de la capacidad del alumno para razonar matemáticamente.

La definición operacional de esta variable se muestra en la Tabla 1.

VARIABLE DEPENDIENTE	DIMENSIONES	VALORES E INDICADORES
RENDIMIENTO ACADÉMICO	*Grado de corrección de la acción*	• Muy bueno: si $P \geq 85$ (P: porcentaje de tareas realizadas correctamente) • Bueno: si $70 \leq P < 85$ • Regular: si $50 \leq P < 70$ • Malo: si $P < 50$
	Grado de reflexión de la acción	• Muy bueno: si $P \geq 85$ (P: porcentaje de fundamentaciones correctas) • Bueno: si $70 \leq P < 85$ • Regular: si $50 \leq P < 70$ • Malo: si $P < 50$

Tabla 1: Dimensiones, valores e indicadores de la variable dependiente.

La Población 1 estuvo constituida por 382 alumnos que rindieron el Primer Parcial de la asignatura Matemática I en el año 2009 y la Población 2 por 396 alumnos que rindieron el Primer Parcial de la asignatura Matemática I en el año 2010.

De cada población se seleccionaron 80 pruebas, mediante un muestreo aleatorio.

Las unidades de análisis fueron los protocolos de las respuestas a los ítems relacionados con *Límite de una función*, incluidos en el Primer Parcial de Matemática I.

Instrumentos

Instrumento de la Población 1(año 2009): Los ítems con los que se determinó el rendimiento académico en la dimensión ***grado de corrección***, correspondieron a:

- Cálculo analítico del límite de una función para x tendiendo a un valor constante, que conduce a una indeterminación del tipo 0/0. En este caso, para resolverlo, el alumno debía aplicar conocimientos acerca de límites particulares y propiedades del límite de una función (ver Tabla 2, Ítem 3c).
- Cálculo analítico del límite de una función definida en ramas (ver Tabla 2, Ítem 4b). Para analizar la continuidad en un determinado punto (extremo de intervalo), se debía estudiar la existencia del límite. Para su resolución el alumno debía constatar la existencia de los límites laterales y la igualdad entre ambos.

Estos problemas, en los que predominan el cálculo y aspectos procedimentales, constituyeron tareas con alta demanda cognitiva ya que requerían, a través del empleo de instrumentos matemáticos como *Límite*, el conocimiento de distintos conceptos y procedimientos implícitos en

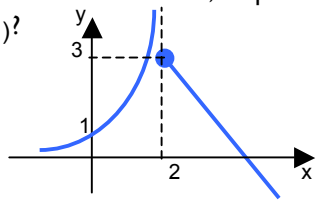
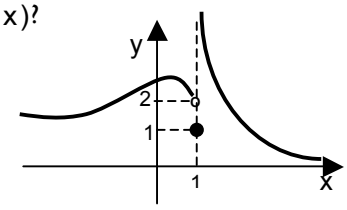
Teoremas y Criterios

Para analizar el rendimiento académico alcanzado por los alumnos en el ***grado de reflexión***, se incluyeron actividades que requirieron de procesos de abstracción. Los ítems incluidos fueron:

- Un ejercicio de verdadero o falso, de carácter netamente conceptual. El alumno además de calificar una proposición, debía justificar su calificación. Las argumentaciones podían ser escritas en lenguaje simbólico, coloquial o bien consistir en un contraejemplo (ver Tabla 2, Ítem 3b).
- Un gráfico de una función definida en ramas. El alumno debía analizar la existencia del límite en un punto en el que se presentaba una discontinuidad infinita (uno de los límites laterales existía, el otro tendía a infinito) (ver Tabla 2, Ítem 1d).

Instrumento de la Población 2 (año 2010): Contenía actividades similares a las incluidas en el instrumento implementado en la Población 1. Así, para el análisis del rendimiento logrado en el *grado de corrección*, se diseñaron los ítems 1 y 2b y para el *grado de reflexión* los ítems 4c y 7b (ver Tabla 2). Los *diseños similares* de los subtest de ambos instrumentos posibilitaron comprobar el logro de los mismos objetivos.

Tabla 2: Ítems correspondientes al tema Límite incluidos en el 1º Parcial de los años 2009 y 2010

1º Parcial de 2009	**1º Parcial de 2010**
1) d) Dado el gráfico de la función f, responde ¿existe el $\lim_{x\to 2} f(x)$? 	1) Dada la función definida por $f(x)=\begin{cases} 2^x & si\ x<0 \\ 2 & si\ x=0 \\ \sqrt{x} & si\ x>0 \end{cases}$ existe $\lim_{x\to 0} f(x)$? Justifica analíticamente
3) b) Justifica si la siguiente afirmación es verdadera o falsa Si $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = 4$ entonces f (2)=4	2) b) Evalúa, si existe, el siguiente límite: $\lim_{x\to -1} \frac{3x^2+3x}{2x^2+x-1}$
3) c) Calcula, si existe, el $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-x-6}{3x-9}$	4)c) Observa el gráfico de la función f y responde ¿ existe el $\lim_{x\to 1} f(x)$? 
4) b) Dada f definida por $f(x)=\begin{cases} -x^2+2 & si\ x<0 \\ 0 & si\ x=0 \\ e^x & si\ x>0 \end{cases}$ estudia analíticamente la continuidad de f en c = 0	7) b) Califica V o F y justifica tu respuesta. Si no existe $\lim_{x\to 4} f(x)$ entonces no existe el

	$\lim_{x \to 4^-} f(x)$ o no existe el $\lim_{x \to 4^+} f(x)$

Características técnicas

Para determinar la ***validez de contenido*** de cada una de las pruebas se recurrió al ***juicio de expertos*** (cuatro docentes de la Cátedra)**,** para que analizaran la correspondencia entre el contenido de las pruebas y los constructos que las mismas intentaban medir. Se basó en el análisis de la ***Tabla de especificación*** (Tabla 3). Los docentes emitieron juicios que permitieron validar los instrumentos en cuanto al contenido.

Confiabilidad: Se consideraron para el análisis las calificaciones, en el rango de 1 a 10, obtenidas por los 80 alumnos, en cada uno de los cuatro ítems incluidos para evaluar los contenidos relativos a *Límite de una función*. Estos ítems constituyeron el subtest cuyas propiedades técnicas interesaba analizar, excluyéndose, en este trabajo, la información que podría haberse obtenido del resto de las actividades propuestas en ambos exámenes, por no estar vinculadas a los contenidos de interés.

Para determinar la *consistencia interna del subtest*, se calculó el coeficiente Alfa de Cronbach, recurriendo al paquete estadístico SPSS (Filgueira López, 2001), obteniéndose un valor de 0,86. Resultó aceptable, entonces, el grado de *confiabilidad* del subtest.

CAPACIDADES	CONTENIDOS	ITEMS
-Conocer la definición de límite de una función, identificando las condiciones para la existencia del mismo. -Desarrollar los procedimientos inherentes al cálculo de límites de una función para la variable independiente tendiendo a un valor fijo	-Definición de límite de una función para la variable tendiendo a un valor fijo. -Procedimientos involucrados en el cálculo de límites para la variable independiente tendiendo a un valor fijo. (Requiere dominio de Identidades trigonométricas, Límites notables, Factoreo de expresiones algebraicas, etc.).	1 (uno) *(grado de corrección)*
-Interpretar y comprender la notación simbólica matemática empleada en la escritura de una función definida por ramas. -Traducir una función expresada en una representación semiótica en otra, en particular, traducir una función del lenguaje simbólico al gráfico. -Comprender e interrelacionar los distintos conceptos involucrados en la graficación de una función. -Comprender e interrelacionar los distintos conceptos involucrados en la definición de límite de una función.	-Logogramas (símbolos referidos a conceptos totales utilizados dentro de contextos matemáticos: <, >, +, -, x, ÷, etc. -Sistemas semióticos de representación y transformaciones entre ellos. -Límites laterales de una función y límite de una función, para la variable tendiendo a un valor fijo.	1 (uno) *(grado de corrección)*

-Convertir o sea transformar una representación en un registro a una representación en otro registro (reconocer el mismo objeto en dos representaciones distintas).	-Sistemas semióticos de representación y transformaciones entre ellos. -Límites laterales y límite de una función, para la variable tendiendo a un valor fijo.	I (uno) *(grado de reflexión)*
-Seleccionar la opción que se considere válida, brindando argumentos que requieren de procesos de abstracción para justificar dicha elección.	-Lenguaje matemático. -Sistemas semióticos de representación. -Límites laterales y límite de una función, para la variable tendiendo a un valor fijo. -Valor de una función en un punto.	I (uno) *(grado de reflexión)*

Tabla 3: Tabla de especificación

Resultados

Grado de corrección: El alumno debía evidenciar el dominio de los conceptos involucrados en el procedimiento, entender la lógica en la que se apoyaba y distinguir los procedimientos que resultaban adecuados para la situación planteada. Estos fueron los aspectos del conocimiento procesual que fueron valorados al analizar las respuestas dadas a los ítems en cuestión, teniendo presentes los principios de los Estándares 8 y 9 de Evaluación (NCTM, 1989). Los resultados comparativos de ambas muestras se presentan en el gráfico siguiente:

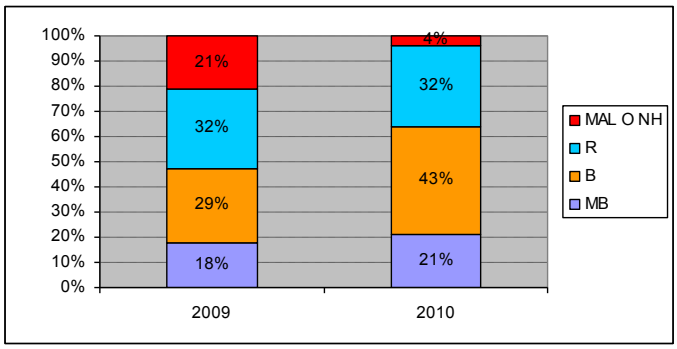


Gráfico 1: Grado de corrección de la acción: Distribución de los resultados, en porcentajes, según grupo bajo estudio

La diferencia a favor de la nueva metodología tuvo que ver con el cumplimiento de las condiciones establecidas para la existencia del límite de una función en un punto y la aplicación de las propiedades de límite. Observando el gráfico de la distribución porcentual de las calificaciones para ambos años, podría concluirse que la diferencia se debería a una importante disminución del porcentaje en la categoría Malo y a un notable incremento en la categoría Bueno.

Grado de reflexión: Según Talízina (1993), en la obtención íntegra de un concepto lo importante no es que el alumno recuerde de memoria los rasgos esenciales, sino que logre apoyarse realmente en estos rasgos para ejecutar la acción. La capacidad de *poder hacer* a partir del *saber* las definiciones es fundamental en la comprensión de los conceptos y se manifiesta por

medio de las habilidades matemáticas. Así, los ítems incluidos intentaban evaluar el aprendizaje significativo de los distintos conceptos involucrados en el tema, la habilidad para establecer relaciones lógicas y el manejo de diferentes representaciones semióticas: algebraica, gráfica y verbal. Se tuvo presente que este último tipo de representación podía expresarse de forma aislada o en combinación con uno de los otros dos tipos. La distribución en las cuatro categorías fue la siguiente:

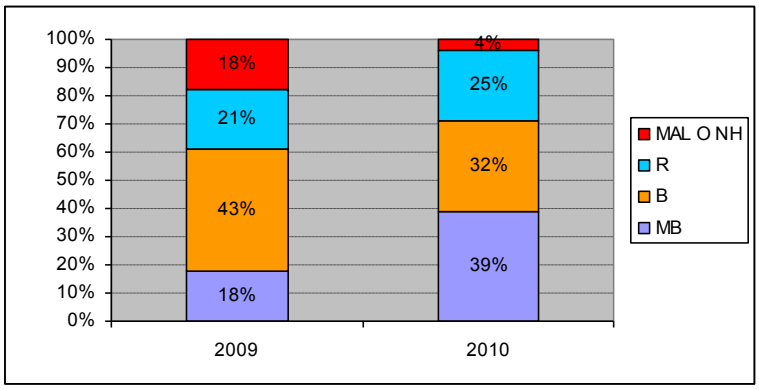


Gráfico 2: Grado de reflexión: Distribución de los resultados, en porcentajes, según grupo bajo estudio

La diferencia entre ambas muestras estaría en la disminución del porcentaje de Malos incrementándose notablemente el de Muy Bueno. Esto se debió a una mejora en el dominio del concepto de límite a partir de la lectura de gráficos para los que experimentaron la nueva estrategia, pero fundamentalmente al aprendizaje del concepto mismo de límite reflejado en las justificaciones en los ejercicios de verdadero o falso.

Conclusiones

Del análisis descriptivo se presume que habría mejoras en el desarrollo de los grados de corrección y reflexión al implementar la nueva estrategia. Restaría corroborarlo con un estudio de tipo inferencial.

Estos resultados sugerirían que la nueva estrategia metodológica provocaría mejoras en el aprendizaje de aquellos contenidos desarrollados en la guía, que corresponden a la categoría Conocimientos.

Referencias bibliográficas

Filgueira López, E. (2001). *Análisis de datos con SPSSWIN*. Madrid: Alianza Editorial S. A.

González de Galindo, S. y Villalonga de García, P. (2010). Metacognición: Diseño de un material curricular para aulas multitudinarias. *Revista electrónica de Investigación en Educación en Ciencias, 5(2), 58-68.*

González de Galindo, S., Villalonga de García, P., Marcilla, M. y Holgado de Mejail, L. (2012). *Diario del profesor: instrumento para analizar la práctica docente de matemática.* Comunicación presentada en la X Conferencia Argentina de Educación Matemática. Buenos Aires.

NCTM. (1989). *Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Mat*emática. España: Ed. Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales".

Talízina, N. (1993). Citado por Dolores, C. (1997). El desarrollo de ideas variacionales y la derivada en situación escolar. En R. M. Farfán, J. Lezama, A. Arellano y E. Oaxaca (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 11,* 6-10. Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica.

Villalonga de García, P., González de Galindo, S. y Mercau de Sancho, S. (2011 (a)). *Estrategia didáctica que favorece la metacognición en aulas masivas: Encuesta a alumnos.* Comunicación presentada en el Cuarto Simposio Internacional de Educación. Argentina: UCSE-DASS.

Villalonga de García, P.; González de Galindo, S. y Mercau de Sancho, S. (2011) (b). Coherencia entre criterios de evaluación y prácticas evaluativas de matemática de un curso masivo. *Revista Números 78, 95-112.*

Villalonga, P., González, S., Holgado L., Marcilla, M. y Mercau, S. (2009). Pautas para diseñar actividades evaluativas basadas en teorías de aprendizaje significativo: desde Ausubel hasta Moreira. En J. Sagula (Ed). *Memorias del 10º Simposio de Educación Matemática*, *pp.1812-1829*. Buenos Aires: EMAT.

.

LA ENSEÑANZA A TRAVES DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS. UNA EXPERIENCIA DE CLASE

Sonia Bibiana Benítez, Lidia María Benítez
Universidad Nacional de Tucumán Argentina
Inst.ituto Miguel Lillo
soniabenitez2001@hotmail.com, lidiabenitez@hotmail.com

Resumen. La Resolución de problemas es, probablemente, uno de los objetivos principales en el aprendizaje de la Matemática. Polya sostiene que "Resolver problemas es hacer matemática" y plantea la Resolución de Problemas como una serie de procedimientos que, en realidad, utilizamos y aplicamos en cualquier campo de la vida diaria. Se realizó una experiencia en la Facultad de Ciencias Naturales de la Universidad Nacional de Tucumán, Argentina, siguiendo los diferentes pasos de Polya, como un nuevo modelo de práctica docente.
Estos alumnos son ingresantes de la carrera de Licenciatura en Ciencias Biológicas, que no aprobaron la materia Matemática.
El objetivo es la adquisición y/o reforzamiento de conceptos y procedimientos matemáticos que faciliten el desarrollo de competencias necesarias para la acreditación del nivel, y de esta manera contribuir a una mejor inserción en el ámbito académico en el próximo año lectivo.
Palabras clave: enseñanza, aprendizaje, matemática
Abstract. Problem solving is, most likely, one of the main objectives of learning Mathematics. Polya states that Problem Solving is doing mathematics and he suggests four basic principles of Problem Solving which we actually use and apply in every field of our daily life.
We carried out a pilot experience, following Polyas' steps, as a new model of teaching practice with students from the Natural Sciences Faculty in Tucumán's National University, Argentina. These were new students to the career of biological sciences, who had failed the subject Mathematics.
Key words: education, learning, mathematics

Introducción

La educación es el acceso de las personas y de las naciones a la sociedad global del conocimiento. Esta tiene que avanzar con la rapidez de los cambios tecnológicos y científicos para promover una mejor formación científica, tecnológica y humanística de la sociedad. El proceso educativo requiere mayores esfuerzos de sus docentes, estudiantes y directivos, que se comprometan a propiciar espacios que propendan a mejorarlo.

Ante esta situación, investigadores, profesores y otros especialistas, están abocados a la búsqueda de alternativas didácticas, que tiendan a favorecer procesos educativos significativos, en pos de alcanzar el mejor nivel posible.

La necesidad de encontrar una adecuada orientación pedagógica, para lograr un aprendizaje eficiente de las Matemáticas desde los primeros años, la Resolución de Problemas se ha propuesto como una alternativa metodológica diferente a la tradicional. Por medio de la Resolución de Problemas se pretende lograr un equilibrio entre distintos niveles de complejidad de los ejercicios matemáticos, con el propósito de fortalecer y trabajar aquellos problemas que se escapan de lo rutinario.

Desde los planteamientos de Polya hasta las mas recientes investigaciones realizadas por Santos (2007) o Mancera (2000), entre otros; la resolución de problemas ha sufrido importantes modificaciones, por las que fue considerada como una importante estrategia para enfrentar la enseñanza de la Matemática. Esta metodología permite que los estudiantes empleen distintos recursos y estrategias para plantear y resolver problemas. Se les presenta la oportunidad de exponer sus ideas, escuchar y examinar las de sus compañeros, lo que les permite robustecer constantemente no solo la comprensión de los contenidos matemáticos, sino también su capacidad de razonamiento lógico y de análisis de la información

Marco teórico

La Resolución de Problemas se ha convertido en los últimos años en una importante contribución a la Educación Matemática en muchas partes del mundo. Puede considerarse como pionera la obra de George Pólya escrita en los años 40 del siglo XX, luego se realizaron más investigaciones en este campo, destacándose los trabajos de Alam H. Schoenfeld, Hort Müller, entre otros.

Lo más importante en la enseñanza de temas matemáticos a través de la resolución de problemas, es que éstos sean contextualizados y orientados. Además, debe caracterizarse para que el profesor ayude al estudiante a construir un profundo entendimiento de las ideas matemáticas y procesos. De tal manera, que ellos sean capaces de hacer matemática, esto es, crear, conjeturar, explorar, evaluar y verificar.

Sin embargo, existen concepciones erróneas sobre lo que significa resolver un problema matemático. La mayor parte de las veces los alumnos piensan que es equivalente a resolver ejercicios rutinarios discutidos en clase, reproduciendo los algoritmos y explicaciones dadas por el profesor. Resolver un problema implica otro tipo de actividad mental de mayor exigencia, que debe estar orientada hacia una mayor participación del alumno en la búsqueda de la solución.

Para Brousseau (1986), un problema es una situación que el profesor propone al alumno para hacerle adquirir un conocimiento nuevo, por lo que dicha situación se plantea al inicio de la lección y es precisamente la solución a este problema el conocimiento que el docente quiere enseñar a los estudiantes. Sin embargo, estos no saben que van a aprender un concepto nuevo.

El trabajo del docente es de suma importancia en este tipo de metodología, pues toma un rol de guía mediador durante la solución del problema. Según Brousseau (1986), debe promover en su lección algo semejante a una microsociedad científica, donde se construyan los conocimientos mediante las situaciones problemáticas planteadas para este fin.

Por esto es importante que el docente elabore problemas interesantes y adecuados a los conocimientos de los estudiantes, que le permitan desarrollar aptitudes y facultades inventivas,

que no quiten la responsabilidad que debe sentir por resolverlo y disfrutar la satisfacción que genera el encontrar, por sus propios medios, la solución. Además, el problema no debe tener una solución inmediata, sino que debe hacer pensar al estudiante. Encontrar la solución requerirá poner en juego todas sus capacidades y conocimientos. Es ir más allá de resolver un ejercicio rutinario, es responder a la pregunta para qué y por qué resolver el problema.

Todo el proceso está basado en el aprendizaje significativo, que es quien sustenta la resolución de problemas. Como dijera Ausubel (1983) "El factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe. Averígüese esto y enséñese consecuentemente".

En el libro "Metodología general integral para la enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos", el Dr. Guillermo Perez Pantaleón propone que el docente analice el vocabulario propio del alumno, tanto el de la vida diaria, como el que se va construyendo en la escuela, el del entorno donde vive, de la sociedad en el que se desarrolla, etc. Diseñe los problemas sobre la base de esta realidad y sus necesidades y pudiera estructurar un "banco de problemas" que tendrían sentido para los alumnos, es decir problemas significativos para él. Estaríamos asegurando de esta forma la comprensión de cualquier problema con el que se enfrente, satisfacer la búsqueda de las palabras claves que puedan orientarlo en la solución de los mismos y se incrementaría la motivación para la resolución de problemas.

En su metodología propone la elaboración de un universo vocabular formado por el glosario de términos nuevos que el alumno va incorporando, día a día, en las clases, al ir construyendo junto con su docente los contenidos (conocimientos + habilidades) curriculares.

Según el Dr. Pérez Pantaleón no basta solo con la motivación, sino que necesita también de un entrenamiento que lo ayudará a inhibir la angustia que produce no encontrar la solución o no comprender del todo el alcance del problema planteado.

Propone la utilización del diario del docente como un recurso metodológico que sirve de guía para la reflexión sobre la práctica, favoreciendo la toma de conciencia del profesor sobre su proceso de evolución y sobre sus modelos de referencia.

Polya marca la "edad de oro" de los métodos heurísticos y expuso un método heurístico para resolver problemas, aportando una lista de las etapas fundamentales que participan en la solución de problemas:

- Comprender el problema: es la etapa de lectura del enunciado del problema para identificar datos, incógnitas, determinar que es lo que se pide, con que elementos se cuenta, que hace falta, etc.

- Concebir un plan para llegar a la solución: es la etapa de creación de una o varias estrategias a seguir para responder lo que se pide.
- Ejecución del plan: es la etapa en que se pone en práctica el diseño elaborado.
- Evaluación del plan respecto del problema: es la etapa del monitoreo de la acción.

Contextualización y desarrollo de la experiencia

Se llevó a cabo una experiencia con alumnos de 1er año de la Facultad de Ciencias Naturales de la Universidad Nacional de Tucumán, que quedaron libres en Matemática. Se trataba de que adquieran y/o refuercen conceptos y procedimientos matemáticos que faciliten la acreditación del nivel, y contribuya a una mejor inserción en el ámbito académico en el próximo año lectivo.

Se trabajó con 15 alumnos y se programaron las actividades para que fueran desarrolladas en 5 clases de 2 hs. cada una, formándose 3 grupos de 5 alumnos en cada clase. Se repartían los objetivos específicos de la clase y una guía de trabajo que contenía actividades para trabajar en clase, el universo vocabular y actividades para trabajar en casa

Se propuso diseñar una actividad diferente a la clase tradicional, más acorde con la naturaleza misma de cómo nacen los conceptos matemáticos, centrar el aprendizaje en el estudiante e involucrarlo de una forma más activa dentro del proceso de aprendizaje.

El perfeccionamiento de los planes de estudio en las diferentes carreras exige trabajar aún más en la relación entre las asignaturas de la disciplina Matemática y otras disciplinas de la carrera, para poder enfrentar y resolver los problemas de carácter profesional.

Al finalizar el curso el alumno deberá:

- Trabajar correctamente con los diferentes conjuntos numéricos
- Interpretar las relaciones entre variables reflejadas mediante tablas y describir características generales de cada tipo de relación funcional
- Manejar fluidamente el lenguaje del álgebra
- Resolver gráfica y analíticamente situaciones mediante el empleo de ecuaciones de 1er y 2do grado sistemas de ecuaciones
- Resolver ecuaciones de 1er grado con una y dos incógnitas
- Seleccionar estrategias más adecuadas para resolver un problema
- Demostrar habilidad para utilizar recursos tecnológicos como herramienta para promover aprendizajes

Las clases se desarrollaron de la siguiente manera:

En la primera clase se hizo un diagnóstico mediante encuesta para evaluar el nivel académico de los alumnos.

La segunda clase consistió en conocer y aplicar estrategias en la Resolución de Problemas; Identificar elementos de la Estructura General de los Problemas:

Contenido: Conjunto de objetos, magnitudes, valores y relaciones del enunciado. Incluye los contenidos.

Condiciones: Parte del problema que transmite la información inicial acerca del suceso. Se formulan generalmente como afirmaciones. Definidas implícita o explícitamente

Exigencias: parte del problema que especifica el fin u objeto a alcanzar. Puede expresarse como orden o pregunta. Pueden estar definidas explícita o implícitamente.

(Perez Pantaleón 2009).

Se definió lo que es un problema, que es una situación en la que aparecen, de manera implícita o explícita una o varias exigencias que requieren ser resueltas, a partir de una serie de condiciones, a través de la utilización de conocimientos y relaciones específicas.

El problema, conjuntamente con el dilema, la incertidumbre y la duda constituyen una situación problemática.

Los heurísticos empleados en la Resolución de problemas fueron:

-Pasos de Polya

-Reglas heurísticas tales como separar los datos y las incógnitas. Recordar fórmulas

-Estrategia heurística: se comportan como recursos organizativos del proceso de resolución, que contribuyen a determinar la vía de solución del problema. Existen dos estrategias, el trabajo hacia adelante donde se parte de lo dado para realizar las reflexiones que conducirán a la solución del problema y el trabajo hacia atrás donde se examina primeramente lo que se busca y apoyándose en los conocimientos que se poseen, se analizan posibles resultados intermedios, pudiéndose deducir lo buscado.

La tercera clase se basó en identificar y aplicar nuevas metodologías para la Resolución de Problemas y lograr el entrenamiento a través de la Formulación y Reformulación de Problemas.

La cuarta clase se trabajó sobre Relación y Función y la quinta clase se dedicó a Reforzar la metodología de Resolución de Problemas.

La Metodología de Trabajo en cada una de ellas fue la misma.

Se repartieron guías de trabajo que constaban de:

-Actividades para trabajar en clase

-Universo Vocabular, con términos y/o conceptos empleados en la guía que le ayudará de consulta.

-Actividades para trabajar en la casa y ejercitar lo aprendido en clase

Las Actividades para trabajar en clase se desarrollaron siguiendo los pasos de Polya

en tres momentos

En un **primer momento** se entregó un listado de situaciones problemáticas, debiendo seleccionar una de ellas. A continuación debía responder a preguntas, Polya en cada fase propone una serie de reglas y procedimientos heurísticos en su mayoría van dirigidas a la comprensión del plan.

Entre las preguntas figuran las siguientes:¿Porqué elegiste esa situación problemática?,

¿Es similar a a algún problema que resolviste antes?,¿Es de fácil interpretación?,

¿Podría plantearlo de una manera diferente?

Una vez que se comprende el problema se debe Concebir un Plan.

Segundo momento. Una vez detectada la dificultad del problema, según Polya, es posible dibujar un problema o traducirlo a algún tipo de código, de notación, etc.

Cómo trazarías un plan de acción para solucionarlo?, Cómo lo representarías?

Para Pólya en esta etapa del plan el problema debe relacionarse con problemas

semejantes. También debe relacionarse con resultados útiles, y se debe determinar si se

pueden usar problemas similares o sus resultados (aquí se subraya la importancia de los

problemas análogos).

Seguidamente se pone en práctica el diseño elaborado en base a las preguntas realizadas lo que conformaría la ejecución del plan

Tercer momento: de la comprobación y reflexión.

En este momento surgen las siguientes preguntas:

Logré solucionar el problema?, si es así, cuáles son los indicadores que me permiten afirmar esto? Si no lo logré, qué fue lo que me impidió hacerlo?

En conclusión, al trabajar con esta nueva metodología, le pareció productivo trabajar en pequeños grupos, por qué?

Se hizo necesaria la intervención del docente? en qué momento?

Las Actividades para trabajar en casa consistieron en un listado de situaciones problemáticas y una guía de pasos a seguir como por ejemplo, elabora un plan de acción que permita resolverlos, organiza la información para que pueda ser presentada en clase, enumera los contenidos matemáticos a los que recurriste para solucionar cada problema, escribe las dificultades que se le presentaron.

Al finalizar las cinco clases se hizo **la puesta en común** que se realizó en dos momentos,

Primer momento. Trabajo individual.

-Identifica las componentes de la estructura general y vuelca en tu cuaderno.

-Resuelve el problema

-Contrasta con tus compañeros

Segundo momento: -Socialización

-Se resuelve el problema entre todos.

-La primera actividad fue identificar las componentes de la estructura general, que respondieron al unísono: Condiciones, Exigencias y Contenidos

En esta instancia se puso en práctica la enseñanza heurística, que posee categorías, procedimientos heurísticos que se componen de principios, reglas, estrategias y medios auxiliares o recursos materiales heurísticos.

Finalmente se realizó una **autoevaluación** donde se les repartió un cuestionario con preguntas, como ser:

Usé ideas propias o reformulé ideas de mis compañeros para plantear los problemas?

Plantee en forma clara los problemas a resolver?

Formulé un plan de trabajo antes de comenzar a resolver los problemas?

Fui creativo en la presentación de los trabajos?

La metodología utilizada me pareció interesante?

Me ayudó el glosario en la resolución de los problemas?

Trabajé en un clima agradable?

Esta actividad me permitió socializar con mis pares?

Tuve problema para resolver las actividades para la casa?

Podría brindar alguna sugerencia que permita mejorar la enseñanza de la matemática?

Diario del docente

La experiencia se realizó en 5 clases y en cada clase se repartieron los objetivos específicos de la clase y una guía de trabajo que contenía actividades para trabajar en clase, el universo vocabular y actividades para trabajar en casa

El ambiente de trabajo fue muy agradable a pesar de que en un comienzo hubo cierta resistencia a trabajar con problemas, argumentando que les cuesta mucho resolverlos y que abordarlos les causaba angustia.

En el primer encuentro, al comenzar a trabajar con la unidad didáctica especificada y la aplicación de la metodología de resolución de problemas, los alumnos completaron una encuesta sobre sus conocimientos acerca de cómo resolver problemas, su estructura y el método heurístico.

Se observó que no en todos los espacios curriculares donde se enseña la disciplina matemática se utiliza la Resolución de Problemas para introducir un nuevo tema.

Entre las dificultades detectadas está el uso limitado de la simbología, con presencia indiscutible de convenciones (x es una incógnita, x e y indican que estamos en el plano cartesiano, etc.), lo que llevó a conflictos en la transferencia del lenguaje coloquial al simbólico.

Del análisis de los trabajos presentados se verificó la importancia de la aplicación de las técnicas de resolución de problemas, cuyo objetivo es que el alumno participe activamente en la elaboración de su propio conocimiento y el docente sea guía en esa elaboración.

De la encuesta realizada a los estudiantes se observó que no han contestado muy a conciencia debido a que si bien sus respuestas reflejan la importancia de la matemática en la vida diaria y el conocimiento de los pasos para resolver problemas, como también de su estructura, en la práctica se observó que existían muchas falencias de cómo realizarlo, y había que recordarles a cada instante que debían especificar la estructura del problema y las reglas heurísticas.

Algunos grupos trabajaron muy bien en forma conjunta y ordenada, otros estuvieron un poco más atrasados ya que hay algunos que no se enganchan del todo en la tarea o no comprenden bien el

enunciado, intervine aclarándoles las dudas, teniendo en cuenta sus conocimientos previos y las pistas dadas en el enunciado del problema para llevarlos a la respuesta deseada.

Cuesta trabajo empezar la puesta en común ya que están un poco dispersos y no parecen muy interesados. Sólo un grupo muestra verdadero interés, así como algunos alumnos de otros grupos. Comienza el grupo interesado y de a poco los demás van participando y dando sus puntos de vista.

Observé que en general siempre participan los mismos, mientras que hay alumnos que se mantienen callados, lo que considero normal en una puesta en común en la que participa mucha gente, pero lo que sí es cierto es que el número de alumnos que participa es menor que el que no lo hace.

En la 2da y 3ra clase resuelven los ejercicios donde se encuentran más ambientados con la forma de trabajo y la metodología empleada, ya no hay que recordarles que deben identificar la estructura de cada problema. Se organizan en pequeños grupos. Les lleva un poco más de tiempo llegar a la solución e interactúan más entre ellos ya que cada uno tiene su forma de analizarlo.

La última clase se puso en práctica todo lo aprendido en clases anteriores, o sea que estaban en condiciones de identificar distintos elementos que conforman la estructura general de un problema, de formular y reformular las exigencias de algunos problemas y analizar cómo puede variar un problema teniendo en cuenta los contenidos y sus condiciones y ser capaces de explicitar toda la actividad heurística que desarrollan cuando resuelven un problema.

Se resolvió una situación problémica, primero en forma individual y luego una puesta en común donde todos participaron.

Se hizo un análisis retrospectivo, donde analizamos cada paso haciendo uso de reglas, medio y estrategias heurísticas

Para terminar con la aplicación de la metodología, se realizó una encuesta con el objeto de saber los resultados obtenidos, como consecuencia de ello puedo aclarar que fueron más sinceros en sus respuestas diciendo que no estaban acostumbrados a trabajar de esa manera, pero que les resultó interesante la metodología aplicada

Esta estrategia metodológica de enseñanza, sustentada en la teoría de Polya para la resolución de problemas y en otras técnicas propias y fundamentales de la Matemática como ser el razonamiento, la intuición y la simbología, logró que los alumnos adquieran seguridad y confianza en su aprendizaje.

Referencias bibliográficas

Santos, T. (2007). *La resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos*, México: Trillas.

Mancera, E. (2000). *Saber matemáticas es saber resolver problemas: la enseñanza de la matemática a través de la resolución de problemas.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, Florida: Academic Press

Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to think Mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D. A. Grows (Eds), *Handbook of research on mathematics teaching and learning,* (pp. 334-370), Nueva York: Macmillan .

Brousseau, G. (1986). Fondements et methods de la didactique des mathematiques. Recherches en Didactique des Mathematiques 7(2), 33-115.

Pérez Pantaleón, G. (2009). *La Enseñanza y el Aprendizaje de la Formulación y Resolución de Problemas Matemáticos*, Tucumán, Argentina: FAU-UNT..

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*, México: Trillas.

Ausubel, D., Novak, M., Hanesian, G. (1983). *Psicología Educativa: Un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas,.

COORDINACIÓN DE LOS DIFERENTES REGISTROS DE REPRESENTACIÓN EN EL ESTUDIO DE LA CIRCUNFERENCIA QUE PASA POR TRES PUNTOS: ACTIVIDADES DIDÁCTICAS

Manuel Alfredo Urrea Bernal, María Antonieta Rodríguez Ibarra, Luis Enríquez Chapa
Universidad de Sonora México
maurr@gauss.mat.uson.mx, mariaa.rodriguezt@gmail.com, luis.cetmar@gmail.com

Resumen. En este trabajo se presentan los resultados que se han obtenido al participar en el diseño e implementación de actividades didácticas para el estudio de la circunferencia que pasa por tres puntos, actividades organizadas en hojas de trabajo y con el apoyo del software GeoGebra. Se pretende que a partir de las variables visuales el estudiante tengan un acercamiento intuitivo a la idea de que los centros de las circunferencias que pasan por dos puntos fijos del plano están en la mediatriz del segmento que forman dichos puntos; para que posteriormente identifiquen el centro de una circunferencia que pasa por tres puntos no colineales. Al cuestionar a los estudiantes sobre el número de circunferencias que pasan por dos puntos fijos del plano, se obtuvieron tres tipos de respuestas incompletas/incorrectas
Palabras clave: representación, circunferencia, trabajo en equipo
Abstract. In this paper we present the results of designing and implementing learning activities on the learning of the circumference passing through three points. Such activities were organized in worksheets and supported with software GeoGebra. It is primarily intended that the student accomplishes an intuitive approach to the idea that the centers of the circles through two fixed points are in the bisector plane of the segment formed by these points; and subsequently identifies the center of a circumference passing through three non-collinear points. The student can accomplish this from visual variables that they identify. By questioning students about the number of circles through two fixed points of the plane, we obtained three types of incomplete / incorrect responses
Key words: representation, circumference, teamwork

Introducción

En la enseñanza de las matemáticas generalmente nos enfrentamos al problema de establecer el nivel de profundización con que debemos tratar algún tema en especial, esta situación se agudiza dependiendo del nivel educativo en que se trabaje, es común que no todos los temas contenidos en el programa de una asignatura sean atendidos con el mismo nivel de profundización. Esta situación puede estar provocando que haya objetos matemáticos que se estudian en una asignatura que se están atendiendo muy superficialmente o bien estudiando sólo algunas de sus características más evidentes, o sólo se promueve su estudio en uno o a lo más dos registros de representación, lo que pudiera estar produciendo significados pobres en el aprendizaje de los estudiantes, ya que la riqueza de los significados deberá estar acompañada de la coordinación de al menos dos registros de representación (verbal, gráfico, numérico y algebraico), Duval(1999).

En este trabajo se presentan los resultados que se obtuvieron al implementar una secuencia de actividades didácticas en la que se promueve identificar la relación que hay entre el centro de la circunferencia que pasa por tres puntos de un plano, y el punto de intersección de las mediatrices de los segmentos que se forman entre todas las parejas de puntos. En un primer momento se hace un acercamiento intuitivo, en el registro gráfico trabajando de manera individual, después en un

segundo momento se le solicita que trabaje en equipo comparando sus resultados y estrategias, haciendo énfasis en la argumentación de lo que hace y propone (registro verbal), finalmente se le solicita que participe en la discusión grupal con las aportaciones de su equipo, en este momento el profesor interviene para destacar los aspectos fundamentales para centrar la atención en el hecho de que los centros de las circunferencias que pasan por los extremos de un segmento están en la mediatriz del segmento, por ejemplo utilizando GeoGebra para medir segmentos y comparar valores numéricos (registro numérico).

Elementos teórico metodológicos.

Los elementos teóricos que asumimos para el diseño de las actividades lo podemos dividir en dos partes, por un lado los que utilizamos para el diseño de las actividades respecto de la forma en que deberá ser atendida por los estudiantes, y por otro con los relacionados con el análisis de los diferentes registros de representación que deberá poner en juego para la construcción de los significados.

Un elemento que está en juego es la estrategia didáctica respecto al tipo de acciones que debe realizar el estudiante al trabajar con las actividades, para organizar esta parte del trabajo retomamos algunos de los momentos que se presentan en la propuesta que se hace en Hitt (2009), de la metodología ACODESA, donde se propone una participación activa por parte del estudiante. Como ya se ha mencionado en un primer momento los estudiantes harán trabajo individual, donde se espera que el estudiante ponga en juego sus conocimientos sobre la situación planteada, así como para identificar dificultades que pudiera tener al abordar la situación. En un segundo momento intercambiarán sus estrategias y resultados en pequeños equipos, lo que les permitirá argumentar sus estrategias y resultados, escuchar a otros, argumentar, contra argumentar, entre otras acciones que le permitirán desarrollar la habilidad para comunicarse. Finalmente en un tercer momento tendrán la oportunidad de interactuar con todos los integrantes del grupo, teniendo la oportunidad de tener un tercer acercamiento con la situación planteada donde el profesor resaltará los aspectos que considere fundamentales para enriquecer los significados producidos en los dos acercamientos previos.

Otro aspecto presente en el diseño de las actividades es la intención de promover en los estudiantes la coordinación de las diferentes representaciones semióticas a las que hace referencia Duval (1993), entendidas como:

> *"producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propias compulsiones de significado y funcionamiento"*

Entre los que podemos identificar al registro verbal, gráfico, algebraico y numérico; así como a los tratamientos y conversiones que el estudiante sea capaz de coordinar, entendidos éstos como:

> **Tratamiento**: "*El tratamiento de una representación es la transformación de esta representación en el registro mismo donde ha sido formada. El tratamiento es una transformación interna a un registro.*"
>
> **Conversión**: "*La conversión de una representación es la transformación de esta representación en una representación de otro registro conservando la totalidad o una parte solamente del contenido de la representación inicial. La conversión es una transformación externa al registro de partida (el registro de la representación por convertir).*"

Propuesta

La secuencia de actividades didácticas se presenta a los estudiantes en hojas de trabajo en la que se indica la forma en la que debe trabajar y se le dan las indicaciones de lo que se espera que haga o conteste, la secuencia consta de tres actividades en las que se promueve fundamentalmente el aspecto geométrico, centrando la atención en la argumentación de los estudiantes para responder lo que se les pregunta y/o describir lo que se espera que observen. Se proponen actividades en las que los estudiantes identifiquen la relación geométrica que hay entre el centro de la circunferencia que pasa por tres puntos del plano y la intersección de las mediatrices de todos los segmentos que se pueden formar entre las parejas de puntos, para ello se espera que pongan en juego la coordinación de diferentes registros de representación de los objetos matemáticos que se estudian.

Secuencia 1

Actividad 1 Circunferencia(s) que pasa(n) por un punto

1. Individualmente realice lo siguiente:

   1.1 Grafique la o las circunferencias que pasan por un punto A del plano.

   1.2 ¿Cuántas circunferencias cumplen con la condición de pasar por el punto A?

   1.3 ¿Qué tienen en común esas circunferencias?

2. Comente con los integrantes del equipo las respuestas que propuso individualmente, y escriba una respuesta global sobre los tres aspectos que se le plantean en 1.

3. En equipo abran el archivo GeoC1, activen las pestañas que aparecen en la pantalla y haga una descripción de lo que observa ¿Lo qué se observa corresponde con lo que respondieron en el punto 1? Argumente su respuesta.
4. Participe en la discusión grupal presentando los resultados obtenidos individualmente o en el equipo.

Actividad 2 Circunferencia(s) que pasa(n) por dos puntos

1. Individualmente realice lo siguiente:
   1.1 Graficar la o las circunferencias que pasan por los puntos A y B del plano.
   1.2 ¿Cuántas circunferencias cumplen con la condición de pasar por los puntos A y B?
   1.3 Si identificó más de una ¿Qué tienen en común esas circunferencias?
   1.4 ¿Qué puedes decir de los centros de esas circunferencias?
2. Comente con los integrantes del equipo las respuestas que propuso individualmente, y escriba una respuesta global sobre los tres aspectos que se le plantean en 1.
3. En equipo abran el archivo GeoC2, activen las pestañas que aparecen en la pantalla y haga una descripción de lo que observa ¿Lo qué se observa corresponde con lo que respondieron en el punto 1? Argumente su respuesta.
4. Participe en la discusión grupal presentando los resultados obtenidos individualmente o en el equipo.

Actividad 3 Circunferencia(s) que pasa(n) por tres puntos

1. Haga lo mismo que se hizo en la **Actividad 2** de la secuencia, pero con los punto A y C, y con los puntos B y C (donde A, B y C no son colineales).
2. En equipo abrir el archivo GeoC3 ¿Qué puede decir de las mediatrices de los segmentos que se forman (AB, AC y BC)?
3. Individualmente responda las siguientes preguntas:
   3.1 ¿Observa alguna relación entre las mediatrices de los segmentos y la circunferencia que pasa por los tres puntos (A, B y C)?
   3.2 ¿Cuál es la relación que usted identifica entre las mediatrices de los segmentos y la circunferencia que pasa por los tres puntos.
4. Participe en la discusión grupal presentando sus respuestas o las de su equipo.

Descripción y análisis de la puesta en escena

Esta secuencia de actividades se aplicó a un grupo de 36 estudiantes de Ingeniería Industrial de Sistema, son estudiantes del segundo de la Universidad de Sonora en México, que trabajan en el marco del modelo curricular el cual se presenta en UNISON (2004). Algunas de las características de los participantes son las siguientes: edad entre 18 y 20 años, son estudiantes de tiempo completo, tienen muy buena disposición para el trabajo en clase y extraclase.

Figura no. 1

La sesión de trabajo inicia entregándoles a los estudiantes la Actividad 1 de la secuencia, una vez que se resuelve y discute se les entrega la Actividad 2 y finalmente la Actividad 3. Por cuestión de espacio en este trabajo describiremos a detalle lo que sucede en la Actividad 2, la información se les proporciona en el registro verbal, los estudiantes primero se abocan a trabajar de manera individual (*Figura no. 1*), en este momento el propósito es que pongan en juego sus conocimiento acerca de la situación planteada, así como los elementos que logran identificar en un primer acercamiento.

De las acciones que hacen los estudiantes pudimos observar lo siguiente:

Mostraron disposición para participar activamente respetando los momentos y las indicaciones que se señalan en la actividad (por ejemplo, se les indicó verbalmente que una vez que resolvieran un inciso no borraran, y si tenían que corregir lo hicieran a un lado de la primer respuesta), al respetar esta indicación nos permitió dar un seguimiento en la evolución de las respuestas que propusieron en los diferentes momentos de la actividad.

El tipo de respuestas que se obtuvieron en la Actividad 2 son las siguientes:

Al responder el punto 1.1 En la figura no.2 se muestran algunas de las respuestas representativas que propusieron:

1.1 **Graficar la o las circunferencias que pasan por los puntos A y B del plano.**

Estudiante A: Estudiante B: Estudiante. C

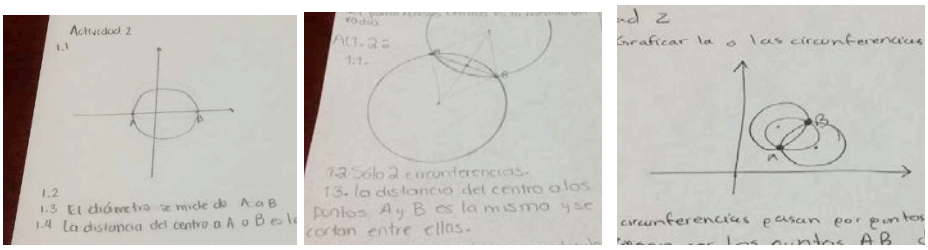


Figura no. 2

Respecto a la pregunta 1.2 se presentaron los siguientes tipos de respuestas:

1.2 ¿Cuántas circunferencias cumplen con la condición de pasar por los puntos A y B?

Estudiante A: *"Una, el diámetro se mide de A a B. La distancia del centro a A o B es la misma"*

Estudiante B: *"Sólo dos circunferencias, la distancia del centro a los puntos A y B es la misma y se cortan entre ellas"*

Estudiante C: *"Tres circunferencias, dos son iguales en diámetro, las dos más grandes están a una distancia determinada"*

En este caso, viendo lo que hacen en el registro gráfico y leyendo lo que señalan en el registro verbal podemos identificar a qué tipo de circunferencia(s) se refiere(n), por ejemplo el Estudiante A está identificando sólo la circunferencia que tiene como uno de sus diámetros el segmento AB, mientras que el Estudiante B al parecer sólo identifica a dos circunferencias que tienen el mismo radio y sus centros están en lados opuestos al segmento AB, y el Estudiante C sólo identifica a la que tiene diámetro AB y a las que son del mismo tamaño que están en lados opuestos del segmento AB.

1.3 Si identificó más de una, ¿qué tienen en común esas circunferencias?

A partir de lo que se le solicita en 1.3 los estudiantes que responden como el Estudiante A empiezan a buscar otras opciones de circunferencias, lo que les permite enriquecer las respuestas generadas en el primer momento. Los que respondieron como los Estudiantes B y C, algunos se limitan a describir lo que tiene en común los centros, mientras que otros identifican que hay más de las dos o tres que han ubicado en 1.1 y 1.2.

Algunos de los que desde un principio identificaron que había una infinidad de circunferencias tratan de describir lo que tienen en común.

1.4 ¿Qué puedes decir de los centros de esas circunferencias?

Antes de que se les plantee esta pregunta son muy pocos los que se fijan en el comportamiento del centro de las circunferencias que pasan por los dos puntos, sobre todo si la representación gráfica que hicieron no es muy precisa. La mayoría de los estudiantes se limitan a decir cosas como las siguientes:

Estudiante A: *"La distancia del centro a A y a B es la misma"*

Estudiante C: *"Son diferentes, los dos más grandes están a una distancia determinada"*

Sólo el Estudiante B da indicios de haber observado que los centros se encuentran sobre una línea recta que es perpendicular a AB, señalando lo siguiente *"Los centros están perpendiculares unidos*

sobre el segmento que se forma en AB y equidistan la misma distancia del punto medio del segmento AB a los centros"

Hasta este momento los estudiantes han trabajado individualmente en hojas de trabajo, posteriormente, en el punto 2 de la actividad, se les pide que trabajen en equipo (figura no. 3) comparando sus resultados y estrategias, y una vez que lo han hecho se les solicita que registren los ajustes que harían a las respuestas que dieron cuando trabajaron individualmente.

Figura no. 3

Después de haber trabajado en equipo los estudiantes señalan cosas como las siguientes:

Estudiante A: *"Con el trabajo en equipo me di cuenta que no sólo había una circunferencia, sino que hay una infinidad"*

El estudiante D: *"Aquí además pude observar que la distancia del punto A al centro del segmento AB es igual a la distancia del punto B al centro del segmento"*

Con este tipo de comentarios de los estudiantes podemos ver que el trabajo en equipo les brinda la oportunidad de tener un nuevo acercamiento con la situación que resolvió individualmente, y que la interacción con sus compañeros de equipo les permite observar cosas que en el primer momento no habían detectado.

En el punto 3 de la actividad se les propone que revisen un archivo diseñado en GeoGebra (figura no. 4), en él se presentan una ventana en la que aparecen los puntos A y B, así como unas pestañas y se les da la indicación que activen las pestañas, lo que aparece cuando se activa cada una de las pestañas es una circunferencia que pasa por los puntos A y B y su centro, tal como se muestra en la siguiente gráfica:

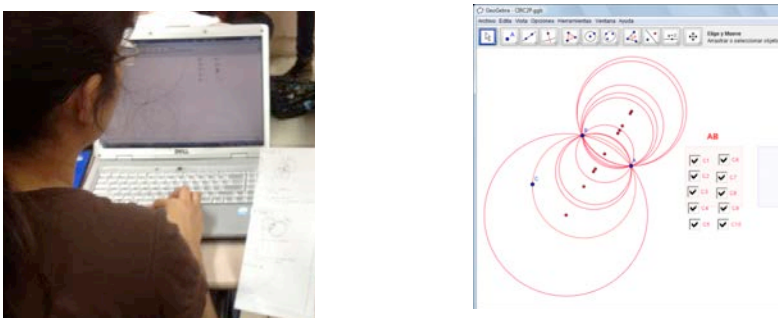


Figura no. 4

Después de trabajar con este archivo, en el que se enriquece la información proporcionada en el registro gráfico, los estudiantes registran comentarios como el siguiente:

Estudiante E: *"No, porque al principio sólo pensamos que eran 3 y al graficarlos con GeoC1 nos dimos cuenta que eran más",* (GeoC1 es el nombre del archivo en GeoGebra).

Estudiante B: *"Parece que los centros están en una línea perpendicularmente sobre el segmento que se forma en AB y equidistan la misma distancia del punto medio del segmento AB a los centros"*

Con este tipo de respuestas, podemos ver el tipo de efecto que causa en algunos estudiantes el hecho de trabajar con un software que les presenta una representación gráfica más enriquecida de la misma situación,.

Finalmente, el profesor propuso una discusión grupal de las estrategias y resultados obtenidos por los equipos, parte de la estrategia es que algún equipo presente lo que hizo (figura no. 5), y se le solicita que argumente verbalmente lo que están presentando al grupo.

Figura no. 5

En este último momento, discusión grupal, es donde el profesor aprovecha para rescatar los aspectos que quiere resaltar del objeto matemático que se está estudiando, en este caso el propósito es que los estudiantes identifiquen que los centros de las circunferencias que contienen a los puntos A y B son los puntos de la mediatriz. Si bien es cierto que los acercamientos de los estudiantes con la actividad, particularmente con el apoyo de las representaciones gráficas del software utilizado pueden propiciar que dicha idea empiece a germinar, incluso algunos hasta

pueden llegar a afirmar que efectivamente los centros están en la mediatriz, lo hacen sólo a nivel intuitivo. Por ello es fundamental el trabajo del profesor en la discusión grupal, ya que es él el que promueve la reflexión sobre los argumentos que nos pueden llevar a asegurar que efectivamente es la mediatriz, para ello se recurre a la semejanza y a la congruencia de triángulos, a que la suma de los ángulos interiores de un triángulo en el plano es 180° y al hecho de que el punto medio del segmento es uno de los centros de interés.

Conclusiones

Se observó un trabajo participativo por parte de los estudiantes, el trabajo individual permite ver cómo los estudiantes ponen en juego sus conocimientos previos, así como las dificultades que tienen para visualizar, en el registro de representación gráfico, la cantidad de circunferencias que pasan por dos puntos fijos del plano.

Se pudo observar cómo el trabajo en equipo promueve que se enriquezcan los aprendizajes de los estudiantes, ya que hay aspectos de la situación que no tuvieron en cuenta cuando trabajaron individualmente, por ejemplo el hecho de identificar sólo una, dos o a lo más tres circunferencias que pasan por dos puntos fijos del plano, en este sentido se resalta la necesidad y conveniencia del trabajo en equipo con el propósito de socializar tanto los resultados obtenidos como las estrategias utilizadas.

En esa misma dirección fue fundamental el uso de tecnología computacional, ya que permitió a un buen número de estudiantes enriquecer sus respuestas, a partir de un ambiente de geometría dinámica en el que se enriquece el registro de representación gráfico, ya que al manipular el software observaron aspectos de la situación que en la hoja de trabajo no fue posible ver.

A lo largo de la actividad se pudo observar el uso que hacen los estudiantes de los diferentes registros de representación, así como la coordinación entre ellos. En particular, el uso del software permitió potenciar el uso simultáneo de diferentes registros de representación para el mismo objeto matemático.

Finalmente, quisiéramos señalar la importancia de considerar el papel activo del estudiante en el salón de clase, como una estrategia didáctica para el trabajo del aula de todos los días.

Referencias bibliográficas

Duval, R. (1993). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Hitt, F. (Ed), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173-201). Grupo Editorial Iberoamérica, México

Duval, R. (1999), *Semiosis y pensamiento humano: registro semiótico y aprendizajes intelectuales*. Cali: GEM.

Hitt, F. y Cortés, C. (2009). Planificación de actividades en un curso sobre la adquisición de competencias en la modelización matemática y uso de calculadora con posibilidades de gráficas. *Revista digital Matemática, Educación e Internet 10(1),* 1-30.

Lineamientos generales para un modelo curricular de la Universidad de Sonora (sf). Recuperado en 15 marzo de 2013, de

http://www.uson.mx/institucional/marconormativo/reglamentosacademicos/lineamientos_modelo_curricular.htm

ARGUMENTACIÓN LÓGICA COMO HERRAMIENTA PARA LA FORMACIÓN CIUDADANA EN ESTUDIANTES DE 3RO DE SECUNDARIA: UNA PROPUESTA DIDÁCTICA

María Gabriela Ramos Alva, Wuilinton Sánchez Rubio, Enrique Huapaya Gómez
I.E. "Scipión E. Llona". Perú
ehuapaya@pucp.edu.pe, wayquiwsr@yahoo.es, gabriela_ramos8@yahoo.es

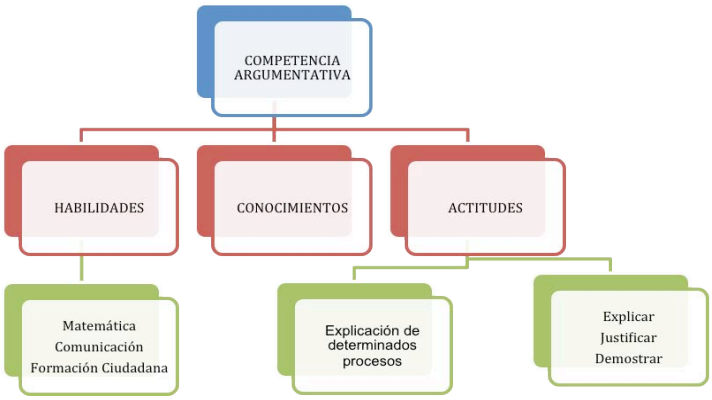
Resumen. Basados en diagnósticos realizados en nuestra Institución Educativa, se determina que algunos estudiantes no desarrollan adecuadamente la capacidad de argumentación lógica, lo cual influye en su formación integral relacionado a su condición de ciudadanía. Por ello, esta propuesta didáctica involucra tres áreas curriculares Matemática, Comunicación y Formación Ciudadana y Cívica, y tiene por objetivo desarrollar y/o favorecer la capacidad de argumentación lógica en nuestros estudiantes, contribuyendo a su formación ciudadana fortaleciendo también sus capacidades comunicativas y matemáticas. Se aplica la investigación acción como metodología de trabajo. La aplicación de este diseño didáctico permitirá que el estudiante sea propositivo.
Palabras clave: competencia argumentativa, diseño interdisciplinar, ciudadanía
Abstract. Based on diagnoses made in our educational institution, it is determined that some students do not adequately develop logical reasoning ability, which influences their comprehensive training related to their citizenship status. Therefore, this proposal involves three basic curriculum teaching Mathematics, Communication and Citizenship and Civic Education, and aims to develop and / or promote the ability of logical reasoning in our students, contributing to their civic education also strengthening their communication and mathematics skills. It applies action research as a working methodology. Application of this instructional design will allow the student to be proactive.
Key words: competence argumentative, interdisciplinary design, citizenship.

Introducción

La Educación Básica, tiene entre otros objetivos el logro de competencias por parte de los estudiantes. Con base en diagnósticos realizados en nuestra Institución Educativa, se determina que nuestros estudiantes tienen dificultades para el desarrollo y logro de competencias argumentativas así como en formación ciudadana. Por ello desarrollamos esta propuesta de carácter interdisciplinar pues integra tres áreas las cuales son: Matemática, Formación Cívica y Ciudadana así como Comunicación.

Pensamos que la formación matemática que brindamos a nuestros estudiantes debe convertirse en una herramienta que les permita estar informados, ser participativos, reflexionar acerca de sus deberes y derechos para asumir de manera responsable la consecuencia de sus decisiones y actos. Asimismo aportar soluciones a la problemática social que afrontan desde su comunidad, región o país.

En nuestra sociedad dos problemas que afrontamos son el trabajo infantil y violencia contra la mujer. Dos problemas relacionados a los derechos humanos que en los inicios del siglo XXI siguen aquejando a nuestra sociedad.



Adaptado de Diseño Curricular Nacional 2009. Ministerio de Educación de Perú

De acuerdo con Callejo y Goñi (2010, p. 9), la matemática es útil y se convierte en un instrumento en la construcción de ciudadanía, pero para la consecución de este logro es necesario desarrollar todas las potencialidades del individuo, de esta manera podrá responder proactivamente, no solo respecto al saber (tener conocimientos) y al saber hacer (capacidad de síntesis y aportar funcionalidad a lo aprendido), sino en saber ético, lo cual supone que la persona es consciente de sus actos y asume las consecuencias de sus acciones.

Es importante señalar que en nuestra práctica pedagógica podemos favorecer estas capacidades al diseñar actividades que se orienten a estimular la socialización e integración del estudiante, pero al mismo tiempo exigiendo que se muestre analítico, crítico y propositivo al juzgar la sociedad en la que se integran.

Como se indica en la figura adjunta las actividades que se enfocan a:

MATEMÁTICA	**COMUNICACIÓN Y FORMACIÓN CIUDADANA Y CIVICA**
Se explica el empleo de un determinado razonamiento en la solución de problemas de la vida cotidiana. Entre los criterios a considerar están:	Se hace uso de la comunicación oral y escrita, involucra a los individuos en la práctica de importantes habilidades cognitivas, tales como
❖ Coherencia en los argumentos. ❖ Sujeción a pruebas y hechos que los demás puedan constatar. ❖ Sencillez en el discurso y lógica.	❖ Pensamiento crítico. ❖ Razonamiento. ❖ Deliberación.

Creemos que la competencia argumentativa trasciende el plano matemático, pues se convierte en una herramienta para la representación, comprensión, reflexión y crítica, así como para la asunción de posturas frente a problemas y fenómenos de la vida cotidiana. Un ejemplo de

aplicación en matemáticas radica en explicar el empleo de un determinado razonamiento en la solución de problemas reales o contextualizados. Entre los criterios a considerar están: coherencia en los argumentos, sujeción a pruebas y hechos que los demás puedan constatar, sencillez en el discurso y lógica.

No basta con que los niños lean y comprendan lo que leen y utilicen bien las operaciones matemáticas. Se requiere que desarrollen habilidades que les permitan relacionarse consigo mismo, con el otro y con el entorno de manera asertiva, pacífica y democrática.

- Es importante formular argumentos que den sustento al procedimiento y/o solución encontrados, que conlleven a desarrollar la capacidad para evaluar y analizar los argumentos de los demás en el diálogo y, a su vez, transferir esas habilidades a los argumentos por escrito (Tobón, 2007, citado por Arreguin, Alfaro y Ramírez, 2012, p. 268). Además de lo anterior, la competencia de argumentar incluye el seguir y valorar cadenas de argumentos matemáticos de diferentes tipos; disponer de sentido para la heurística ¿Qué puede —o no— ocurrir y por qué?); y, finalmente, crear y expresar argumentos matemáticos.
- Explicación comprensible de razones (Pajares, Sanz y Rico, 2004, citados por Arreguin et al, 2012, p. 276). De acuerdo con Tobón (2007) refiere a la explicación de determinados procesos.

Diagnósticos realizados en nuestra Institución Educativa para estudiantes de 3ro de Secundaria, hemos determinado que algunos estudiantes no desarrollan adecuadamente la capacidad de argumentación lógica, lo cual influye en su formación integral relacionados a su condición de ciudadanía. Por ello este trabajo propone un diseño interdisciplinar que involucra tres áreas curriculares Matemática, Comunicación y Formación Ciudadana y Cívica, y pretende desarrollar y/o favorecer la capacidad de argumentación lógica en nuestros estudiantes, contribuyendo a su formación ciudadana fortaleciendo a la vez sus capacidades comunicativas y matemáticas.

El Diseño Curricular Nacional 2009 (Ministerio de Educación, Perú), no orienta hacia una didáctica de la argumentación, si bien es cierto tanto en Matemática como en Comunicación se especifican las capacidades argumentativas a lograr; en el área de Formación Ciudadana no se precisa la competencia argumentativa; que es importante para que el estudiante conozca y ejerza sus derechos; entonces este diseño didáctico propone que el estudiante efectúe prácticas de argumentación que ayuden a la formación de ciudadanía en el estudiante. La matemática es una herramienta muy útil, pues de acuerdo con Goñi (2008, p.58), hoy en día no es posible concebir el pleno uso de la ciudadanía sin una competencia matemática que permita actuar de manera informada y responsable en el medio social. Goñi señala que el uso pleno de la ciudadanía incluye

el uso de conocimientos matemáticos, de modo que pueda procesar, comprender e interpretar la información

Por otro lado Callejo (2000, p.2), manifiesta que la matemática es una herramienta útil en el ejercicio de la ciudadanía, pues permitirá conocer e interpretar los modelos matemáticos que están implícitos en algunas situaciones, procesos y fenómenos sociales. Se busca entonces que el estudiante sea un ciudadano propositivo, que aporte alternativas y soluciones a algunas situaciones conflictivas. Pensamos que los distintos tipos de argumentaciones exigidas desde las tres áreas curriculares permitirán que los estudiantes adquieran el dominio de formas de razonamiento que si bien pueden aplicarlas inicialmente a un dominio formal, posteriormente les permitan enriquecer su manera de razonar ante problemáticas de diverso origen, y puedan tomar decisiones de manera informada y responsable. La metodología a aplicar es la de Investigación Acción.

Propuesta didáctica

Para diseñar una propuesta didáctica que permita generar en el estudiante el sentido y valor de la justicia debemos:

Trabajar el abordaje histórico, es decir la evolución histórica del concepto, presentar el proceso histórico de la palabra en la cultura occidental a partir del presupuesto filosófico y social: ejemplo la revolución francesa o las luchas de las poblaciones originarias latinoamericanas o las luchas libertarias de los pueblos. Formar ciudadanía implica abordar desde el currículo esta problemática:

Derechos humanos.

Conciencia democrática.

Inclusión

Interculturalidad.

Se orienta a capacitar a los estudiantes para el diálogo, la reflexión, la estructuración del discurso que exprese su posición (ver figura 01). Entre los temas que consideramos:

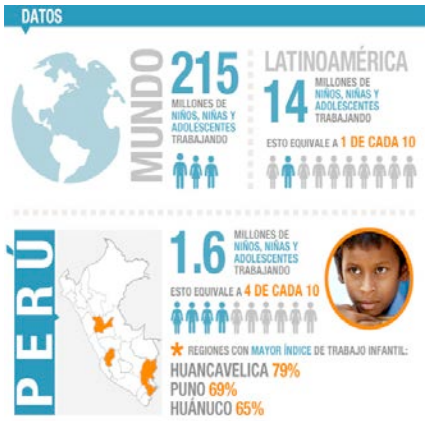
- Trabajo Infantil.
- Violencia contra la mujer.

Además se debe involucrar a los padres como aliados estratégicos en el desarrollo de este proyecto, así como a todos los agentes relacionados al quehacer educativo en nuestra sociedad.

Los medios de comunicación también tienen un rol importante.

Trabajo infantil

La República. Febrero 16, 2010



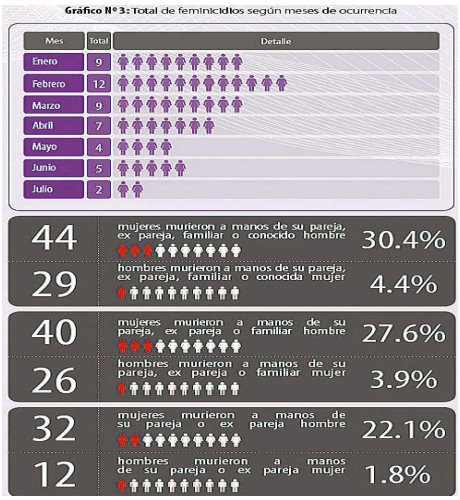
OIT/ENAHO-INEI-AFP. Junio 12, 2013

Trabajo Infantil en el Perú

Los niños del Perú y del mundo están expuestos a labores que no sólo los alejan de la escuela y la diversión, sino que muchas veces los exponen al peligro debido a las actividades que realizan.

En el Perú existen 1,6 millones de niños, niñas y adolescentes trabajando, la mayoría de ellos en las zonas rurales del país, y muchos realizando actividades peligrosas y en largas jornadas, como labores en minas, ladrilleras e inclusive siendo explotados sexualmente.

Violencia contra la mujer



Diario La Primera. Mayo 12, 2012

Fonoaudiología Unipamplona. Septiembre 9, 2010

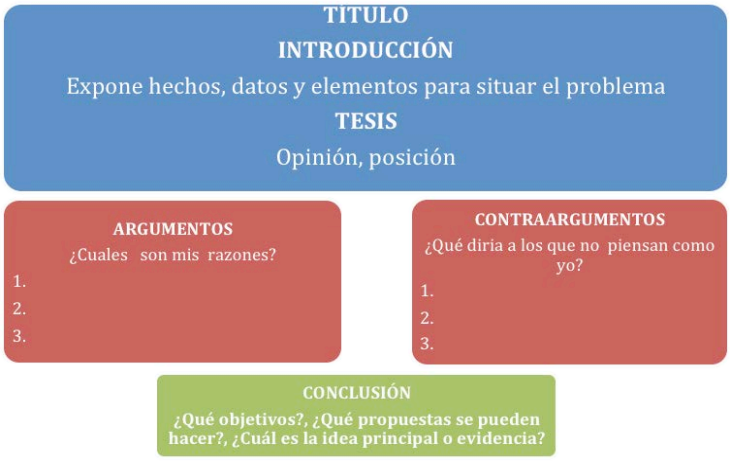
Es un tema que mantiene penosa actualidad en el Perú y otros países.

Las estadísticas son dramáticas, en el Perú, dos mujeres son víctimas de violación cada hora y en el que 10 de ellas mueren cada mes por causa de feminicidio, un delito tipificado hasta hace poco

como la violencia seguida de muerte o daños graves ejercida contra una mujer por su pareja o ex pareja.

El esquema o secuencia estructurada para la práctica argumentativa ha sido tomada de Canals (2007, p.53), ya que de acuerdo con nuestro diagnóstico permite integrar actividades de las tres áreas curriculares involucradas.

Esquema de argumentación



Tomado de Canals (2007, p.53)

Esta propuesta de argumentación se trabaja en simultáneo desde las tres áreas involucradas: Matemática, Comunicación y Formación Ciudadana. Los materiales que permiten trabajar son diarios, revistas y artículos electrónicos que abordan la problemática descrita anteriormente.

Se busca que el estudiante investigue la problemática, realizando entrevistas (en la medida que sea posible) y pueda organizar la información para sistematizarla, en esta parte la estadística será una herramienta de gran ayuda, esta información podrá ser luego enunciada mediante proposiciones, argumentos e inferencias lógicas. Desde el área de comunicación también se buscará que el estudiante redacte de manera coherente la información y finalmente desde el área de formación ciudadana y cívica, se buscará que el estudiante asuma una postura crítica de la problemática tratada y elabore juicios de valor acerca de la misma.

Reflexiones

Se plantea que la aplicación de este diseño didáctico permitirá que el estudiante aprenda a formular un punto de vista propio afirmando su condición de ciudadanía, contrastado con los puntos de vista y argumentos de los demás y plantear propuestas alternativas coherentes.

Referencias bibliográficas

Arreguin, L., Alfaro, J., Ramírez, M. (2012). Desarrollo de Competencias Matemáticas en Secundaria usando la técnica de aprendizaje orientado en proyectos. *Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación. V.10. N.04, 265-284.* Recuperado el 09 de marzo de 2013 de http://www.ruv.itesm.mx/convenio/catedra/recursos/material/re_50.pdf

Callejo, M. (2000). Educación Matemática y Ciudadanía: Propuesta desde los derechos humanos. *Cuadernos de Sociedad y Educación, 12, 5-12*. Recuperado el 03 de junio de 2014 de http://www.centropoveda.org/IMG/pdf/matematicasDDHH.pdf

Callejo, M., Goñi, J. (2010). *Educación Matemática y Ciudadanía*. Barcelona: GRAO.

Canals, R. (2007). La argumentación en el aprendizaje del conocimiento social. *Enseñanza de las Ciencias Sociales.* 6, 49-60. Recuperado el 06 de noviembre de 2013 de http://www.raco.cat/index.php/ensenanzacs/article/viewFile/126328/190677

Goñi, J. (2008). *El desarrollo de la competencia matemática; 3²-2 ideas clave*. Barcelona: GRAO.

Ministerio de Educación del Perú. (2009). *Diseño Curricular Nacional de EBR*. Recuperado el 03 de junio de 2014 de http://ebr.minedu.gob.pe/pdfs/dcn2009final.pdf

LA DECONSTRUCCIÓN DE LOS MODELOS DE CRECIMIENTO

José Trinidad Ulloa Ibarra. Jaime Arrieta Vera, Jorge Armando Rodríguez Carrillo
Universidad Autónoma de Nayarit México
Universidad Autónoma de Guerrero
jtulloa@hotmail.com, jaime.arrieta@gmail.com,carrillojro@hotmail.com

Resumen. Este reporte es una contribución al trabajo "*Las prácticas de modelación y la construcción de lo exponencial en comunidades de la pesca, un estudio socieopistemológico*" en el que tomando como base esta corriente del pensamiento matemático se analizan las prácticas sociales que ejercen los profesionales del área al desarrollar cultivos de especies acuáticas. Entender los procesos biológicos implica, en ocasiones, una tarea complicada pues aunque se hace uso de modelos matemáticos en muchas ocasiones éstos no llegan a ser reflejados e interpretados de forma correcta, en su totalidad, marcando claramente una división entre el conocimiento científico y el matemático Como productodel estudio se propone la deconstrucción de las prácticas como el enlace entre la práctica profesional y la que se realiza en el aula, aprovechando las ventajas que cada una de ellas pueda ofrecer para el diseño de propuestas de diseños de aprendizajes con la intención de llegar a una metodología común.
Palabras clave: deconstrucción, modelación, crecimiento
Abstract. This report is a contribution to the "modeling practices and the construction of the exponential in fishing communities, a socioepistemologicalstudy" which is based on mathematical thinking current analyzes social practices exercised by professionals to develop crops of aquatic species. Understanding the biological processes involved, sometimes a complicated task because although it makes use of mathematical models in many cases they fail to be reflected and interpreted correctly, in full, clearly marking a division between scientific and mathematical. As a result of the study is to deconstruct practices such as the link between professional practice and is done in the classroom, taking advantage that each can offer suggestions for the design of learning designs with the intention of reach a common methodology.
Key words: deconstruction, modeling, growth

Introducción

Actualmente la biología como todas las ciencias está en constante cambio, con una gran cantidad de ramas por explorar que requieren métodos, técnicas, enfoques particulares, a veces nuevos, a veces novedosos, a veces completamente tradicionales. En cualquier caso, la matemática ha hecho mella en la adquisición de conocimiento biológico desde hace varios siglos y, en el siglo pasado, en particular, su influencia fue relevante en varias áreas de las ciencias biológicas (Velasco, 2000). Sólo cabe esperar que la aplicación de herramientas y lenguajes matemáticos en biología se incremente tanto en profundidad como en potencia en los años venideros (Chicurel, 2000).

No obstante para profesionales no matemáticos, la parte más difícil de usar las matemáticas para estudiar una aplicación es la conversión de los fenómenos de la vida real al lenguaje matemático (Ulloa, Arrieta y Espino, 2013). Por lo general esto es complicado porque implica la conversión de hipótesis precisas en fórmulas muy precisas. Es importante recordar que los modelos matemáticos son como otros tipos de modelos. El objetivo no es producir una copia exacta del objeto "real", sino más bien representar algunas características de la cosa real.

Los trabajos que hemos desarrollado sobre este tema nos permiten concluir que la deconstrucción puede ser considerada como una metodología que contribuye a dotar al profesionista de las herramientas requeridas para llegar a un modelo matemático que represente fielmente al fenómeno en estudio, de tal forma que pueda aportar información de calidad para la toma de decisiones que ayuden a la mejora de la producción y administración de las pesquerías (Ulloa, Rodríguez, 2010).

Afirmamos que la deconstrucción es un proceso de búsqueda de nuevos significados y de sentidos innovadores; y que, como proceso no tiene final, se concibe como una estructura espiral y no lineal. Para su utilización como herramienta de modelación matemática, en especial para los modelos de crecimiento del tipo exponencial, lo proponemos como un ciclo de nueve momentos que, una vez conocido, se va repitiendo de manera constante y se conforma en la manera de pensar y actuar del sujeto reflexivo. Con ello planteamos la transformación de la práctica de modelación del crecimiento de organismos considerando todos los parámetros y actividades que se realicen y que tengan influencia en el modelo final. Esto al llevarlo al aula permitirá que los alumnos entiendan el proceso de modelación de forma que puedan explicarlo como un todo y puedan desarrollarlo sin muchos problemas en la práctica de su profesión (Ulloa y Arrieta, 2010).

El área de estudio y la matemática

El hombre realiza estudios científicos sistemáticos sobre el medio marino y sus recursos para comprender al océano como parte del mundo y para utilizarlo inteligentemente en beneficio propio. Para ello se auxilia de ciencias exactas y naturales: física, química, matemáticas, geología y biología.

En todo trabajo científico, una de las actividades fundamentales es la medición detallada. A través de ella, los investigadores pesqueros, biólogos, tecnólogos y economistas obtienen múltiples datos sobre los distintos sistemas que componen la pesca. Con la información obtenida, y después de hacer el análisis correspondiente, se establecen los modelos que permiten llegar a predicciones con el fin de aprovechar al máximo, pero de manera racional, los recursos vivos del mar. Por lo que, para decidir cuánto puede recomendar que se capture en la temporada, diseña los modelos matemáticos de predicción, basándose en los datos de la dinámica de las poblaciones con respecto a su reproducción, crecimiento y mortalidad, con el fin de conservar el recurso(Cifuentes, Torres y Frías, 1986).

Como puede observarse con base en lo que se ha descrito, la modelación es una actividad de vital importancia en el trabajo de los profesionales de la pesca y la acuicultura, por lo que requiere que

se realicen estudios específicos que permitan contar con más y mejores modelos, para que las decisiones que se tomen basadas en ellos sean óptimas.

La pesca y la acuicultura son asuntos de gran importancia y parte esencial del quehacer económico y social del país. El personal dedicado a la actividad acuícola tiene distinta formación en cuanto a los niveles de estudio, de tal suerte que encontramos desde técnicos hasta profesionistas con maestría y doctorado, así como personal de campo al que sólo se le ha capacitado para realizar alguna actividad específica dentro del proceso. En cuanto al perfil profesional encontramos entre otros: Ingenieros Pesqueros, Ingenieros en Pesquerías, Ingenieros Acuícolas, Oceanólogos, Biólogos, Biólogos Pesqueros, Biólogos Acuicultores, Biólogos Marinos, Licenciados en Acuicultura.

Este conjunto de profesionistas es el que forman las Comunidades de Profesionales de la Pesca y la Acuicultura (CPPA), (Ulloa, 2013)

La problemática

El estudio de la desvinculación entre la escuela y su entorno social y profesional, ha sido ampliamente abordado desde diversas perspectivas. En los trabajos de Galicia *et al.* (2011), Ulloa y Arrieta (2010) y Landa (2008), se da cuenta de la separación entre las prácticas sociales de modelación en comunidades de las ingenierías bioquímica y pesquera, con las comunidades escolares. Aunado a lo anterior se tiene un manejo no suficiente de la matemática que permita a estos profesionistas abordar los fenómenos que se les presentan, por ello sugerimos a la deconstrucción como una metodología que contribuya al análisis de la problemática presente, en este caso del crecimiento de poblaciones. En los programas de estudio de las carreras de ingeniería pesquera y las de los biólogos marinos, se observa que la modelación se estudia en diferentes momentos (Ulloa y Arrieta, 2009), sin embargo al igual que en la mayoría de las licenciaturas se encuentra una separación entre los conocimientos que se adquieren en el aula y los requeridos en el campo profesional. Esto conduce a pensar que la escuela ha minimizado la creación matemática a partir de la experimentación en el laboratorio y por otra parte se ha dado poca importancia a la modelación como una asignatura de relevancia en la práctica profesional. Desde nuestro punto de vista la modelación es una práctica que puede vincular la escuela con su entorno. La modelación es una práctica que articula las diferentes ciencias y la tecnología con las matemáticas. Para dar evidencias de estas afirmaciones, basta analizar el entorno laboral que tienen estas comunidades (Ulloa y Arrieta, 2011). La modelación tiene lugar en las tres etapas principales del complejo pesquero, ya que la encontramos no solamente al utilizar los Modelos de Predicción de las Capturas, sino también en el procesado de productos y al realizar estudios de consumo y demanda.

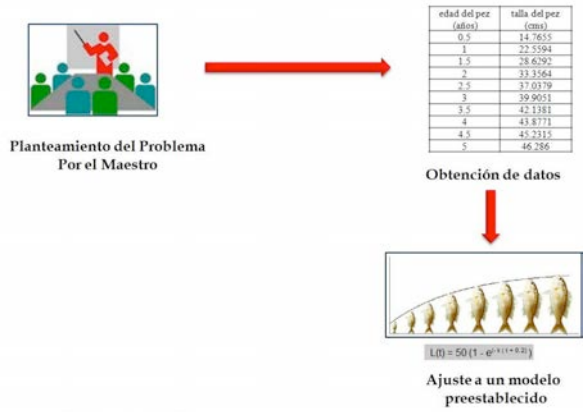


Figura 1. Clase de modelación en el aula

La socioepistemología como perspectiva teórica

La perspectiva teórica que sostenemos es la socioepistemología (Cantoral, R. y Farfán R., 2004), en tanto que es una perspectiva teórica que estudia la emergencia de los conocimientos matemáticos cuando son ejercidas las prácticas por diversas comunidades y cómo es que viven estas prácticas y conocimientos matemáticos en las comunidades escolares. Particularmente nuestra perspectiva asume a las prácticas sociales de modelación como fuente de procesos de matematización en el aula: los estudiantes construyen argumentos, herramientas, nociones y procedimientos matemáticos en la intervención con los fenómenos de la naturaleza (Arrieta, J. 2003).

Consideramos que el acto de modelar se presenta al identificar las características distintivas de la tabla y, a partir de ésta, efectuar predicciones sobre el fenómeno. El acto de modelar sucede al asociar estos dos entes, modelo tabular con lo modelado o fenómeno. Se suman a la intencionalidad asimismo asociaciones del fenómeno con modelos algebraico y geométrico. Estos serán herramientas para predecir comportamientos del fenómeno, a partir de ellos articular una red de entidades.

Consideramos que la intencionalidad de la práctica reside precisamente en la apropiación de la relación práctica/herramienta por el actor, es decir en el conocimiento de la función de la herramienta matemática en el ejercicio de la práctica. Esta es precisamente una forma de aprendizaje basada en el ejercicio de prácticas.

La Deconstrucción

Para fines de nuestra investigación y desde nuestro punto de vista, consideramos a la deconstrucción como un medio para mostrar o encontrar la intencionalidad de una práctica constituida, (Ulloa y Arrieta, 2009)

De este modo podemos dividir la deconstrucción de la siguiente manera:

- La búsqueda de las intenciones (el ¿por qué las emplean así? y el ¿por qué funcionan?)
- Los argumentos que los validan (¿Qué sustento tienen? ¿De dónde proviene?)

Tomamos a la deconstrucción como una metodología para modelar fenómenos biológicos, considerándola como un concepto de naturaleza crítica, que define el todo de un sistema en función de la tensión establecida entre sus partes, imaginando al sistema como algo abierto, extenso, desdibujado y siempre contradictorio consigo mismo (Krieger, 2004). La deconstrucción evoca al término creado por Derrida (1985), quien afirma que deconstruir no es regresar hacia un elemento simple y tampoco es destruir, insinúa que ello implica reconstruir cuando explica que deconstruir es desestructurar para entender. Por consiguiente afirmamos que la deconstrucción es un proceso individual y/o colectivo de búsqueda de nuevos significados y de sentidos innovadores; y que, como proceso no tiene final y su estructura es espiral y no lineal. Para su utilización como estrategia de modelación matemática, lo proponemos como un ciclo de nueve momentos (Ulloa y Arrieta, 2010) que, una vez conocido, se va repitiendo de manera constante y se conforma en la manera de pensar y actuar del sujeto reflexivo.

Los modelos de crecimiento en el área de estudio

El interés sobre cómo la población tiende a crecer fue simulado a finales del siglo 18 cuando Thomas Malthus ([1798] 1970) publicó un ensayo sobre el principio de cómo afectan las poblaciones el progreso de la sociedad del futuro. En su libro Malthus puso un modelo de crecimiento exponencial para la población humana y concluyó que en el futuro esa población excedería la capacidad de crecimiento del suministro adecuado de alimentos.

El crecimiento o el declive de poblaciones naturales y la lucha de las especies por predominar unas sobre otras ha sido objeto de interés en todas las épocas. Hace siglos que se observó la aplicación de conceptos matemáticos muy simples al estudio de tales cuestiones. Los pioneros del estudio matemático (aportaron modelos) son Malthus (1978), Verhulst (1838), Lotka y Volterra (1925) cuyos trabajos se publicaron en los años 20 y 30 del siglo pasado, respectivamente. Cabe señalar que Euler (1758) ya había sugerido el llamado modelo Malthusiano o de crecimiento exponencial.

Podemos afirmar con base en observaciones de campo que los modelos de crecimiento que se estudian en el área son: el modelo de Malthus (exponencial), Verhulst (logístico), Von Bertalanffy, Lotka –Volterra y algunos modelos potenciales que relaciona entre otras cosas la relación talla – peso. Nuestro trabajo llega hasta la fecha en los tres primeros y los potenciales en los que a través de la deconstrucción hemos llegada a la elaboración de diseños de aprendizaje.

La deconstrucción del modelo utilizado

Para fines de nuestra investigación y desde nuestro punto de vista, consideramos a la deconstrucción como, un medio para mostrar o encontrar la intencionalidad de una práctica constituida.

Para su utilización como metodología, la proponemos como un ciclo de nueve momentos que, una vez conocido, se va repitiendo de manera constante y se conforma en la manera de pensar y actuar del sujeto reflexivo. Con esa base y recorriendo los diferentes momentos se debe dar respuesta a las siguientes preguntas:

Reconocimiento de la realidad y definición del aspecto a deconstruir: ¿Cómo se observan y registran los datos del crecimiento de poblaciones? ¿Qué conocimientos requiero aplicar? ¿Los tengo? Esto nos lleva a utilizar la modelación como herramienta; ¿Qué aprendí sobre crecimiento de poblaciones? ¿Modelación? ¿Qué es lo que aprendí de modelación?¿Cuáles modelos de crecimiento conozco? Elaboración del mapa individual y/o colectivo; la búsqueda de interpretaciones - comprensiones-acciones alternativas; la deconstrucción; planificación de la práctica transformadora; inicio de la reconstrucción; seguimiento de las acciones; retorno a la realidad transformada (Realidad II) y finalmente el inicio de una nueva deconstrucción. (Ulloa y Arrieta, 2013)

Conclusiones

Consideramos que el estudio y exploración de las prácticas sociales en comunidades específicas, tal como la de los profesionales de la pesca y la acuacultura, puede lograr establecer aspectos determinantes en la deconstrucción de las prácticas, logrando encontrar la estructura y esencia de la práctica. Mediante la deconstrucción de las prácticas se llegará a la construcción de diseños de aprendizaje.

Creemos necesario analizar la posibilidad de la realización de diseños que vayan de situaciones escolares a situaciones extraescolares, aunque para ello sabemos es necesario particularizar en las comunidades que se atienden y visualizar las perspectivas de éstas.

Referencias bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula.* Tesis de Doctorado no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2004). La sensibilité a la contradiction: logarithmes de nombres négaties et origine de la variable complexe. *Recherche en Didactique des Mathématiques,* 24, 137-168.

Cifuentes, J., Torres, P.y Frías, M. (1986). *El océano y sus recursos I. Panorama Oceánico*. México: Fondo de Cultura Económica.

Chicurel, M. (2000), *Life is a game of numbers.* Nature 408: 900-901.Recuperado el 05 de Agosto de 2013 dehttp://www.revistaciencia.amc.edu.mx/index.php?option=com_content&task=view&id=15

Derrida, J. (1985). Carta a un amigo japonés. En J. Derrida, ¿Cómo no hablar? Y otros textos. Suplementos Antrhopos (13), 86 – 89.

Euler, L. (1758) "Recherches plus exactes sur l´effet des moulins à vent", Histoire del´AcadémieRoyale des Sciences et BellesLettres, année MDCCLVI, 165-234

Galicia A., Díaz L., Arrieta J., Gama, Á. y Landa, L. (2011). Modelación de una cinética química para el aprendizaje de las matemáticas. *En resúmenes de la XXV Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.*

Krieger, P. (2004). La deconstrucción de Jacques Derrida (1930-2004). Anales del Instituto de Investigaciones estéticas (84). 179-188.

Landa, L. (2008) *Diluciones seriadas y sus herramientas, una práctica de estudiantes de ingeniería bioquímica al investigar la contaminación del río de la Sabana*. Tesis de maestría no publicada. Universidad Autónoma de Guerrero.

Lotka, A. (1925). *Elements of physicalbiology*, Baltimore, Williams &Wilkins, Revisado en *Elements of mathematicalbiology*, New York, Dover, 1956

Malthus, T. ([1798] 1970). Primer ensayo sobre la población. Madrid: Alianza

Ulloa, J. (2013). "Las prácticas de modelación y la construcción de lo exponencial en comunidades de profesionales: un estudio socioepistemológico". Tesis de Doctorado no publicada. Centro de Investigación y Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional. México.

Ulloa, J. y Arrieta, J. (2009). Los modelos exponenciales: construcción y deconstrucción. En P. Lestón (Ed), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22, 479-488. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Ulloa, J. y Arrieta, J. (2010). La deconstrucción como estrategia de la modelación. En P. Lestón (Ed), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22, 909-917. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Ulloa, J. y Arrieta, J. (2011) La deconstrucción de la modelación del crecimiento de microalgas. . En P. Lestón (Ed), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 24, 715-722. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Ulloa, J. y Rodríguez, J. (2010). El modelo logístico: Una alternativa para el estudio del crecimiento poblacional de organismos. Revista electrónica de Veterinaria 1695-7504. 2010 Volumen 11 Número 03. España. Recuperado el 20 de Enero de 2012, de http://www.veterinaria.org/revistas/redvet/n030310.html

Ulloa, J. y Rodríguez, J. (2013). La modelación matemática como puente entre el conocimiento científico y el matemático. Revista electrónica de Veterinaria 1695-7504. 2012 Volumen 14 Número 02. España. Recuperado el 09 de Marzo de 2013, de http://www.veterinaria.org/revistas/redvet/n020213.html

Ulloa. J., Arrieta, J. y Espino, A. (2013). El modelo logístico y su deconstrucción. En R. Flores (Ed). Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26, 715-722. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Velasco, J. (2000).*"El gen, la forma, el virus y la idea: una perspectiva personal de la biología matemática"*, Miscelánea matemática. 32: 5-38.http://www.revistaciencia.amc.edu.mx/index.php?option=com_content&task=view&id=15

Verhulst, P. (1838). *Notice sur la loi que la populationpursuitdans son ccroissement.* Corresp. Math. Phys. 10.

ACTIVIDADES LÚDICAS COMO ESTRATEGIA AL IMPULSO DEL TALENTO MATEMÁTICO

Lucila Mendoza Toro, José Trinidad Ulloa Ibarra, Elsa García de Dios
Universidad Autónoma de Nayarit. México
Cet Mar No. 26
luzzy_m13@hotmail.com, jtulloa@hotmail.com, elsagd03.gmail.com

Resumen. La atención a la diversidad escolar es uno de los temas de creciente interés en México, particularmente, la falta de investigación y de reconocimiento gubernamental de los niños con algún talento especial ha propiciado la incertidumbre en el aula. Tal situación tiene como consecuencia la necesidad de estudios de contexto que permitan la identificación y el tratamiento escolar de esta población. En este trabajo de investigación en curso tomando como base la socioepistemología pretendemos hacer contribuciones a la problemática que se presenta en la escuela de educación primaria, para ello se elaboró una propuesta destinada a los niños sobresalientes con el propósito de impulsarlos a desarrollar su conocimiento de las matemáticas a través de una Taller de Matemáticas Lúdicas cuyo objetivo es el generar estrategias para la consolidación del aprendizaje de las matemáticas, esto se desarrolla en el CetMar No. 26 de San Blas, Nayarit, México

Palabras clave: lúdica, talento, estrategia, matemáticas

Abstract. The attention to the school diversity is one of the issues of growing interest in Mexico, particularly, the lack of research and government recognition of the children with some special talent has context to allow the identification and advocated the uncertainty in the classroom. This situation is as a result the need for studies of the treatment of this school population. In this research work in progress on the basis of the socioepistemological we intend to make contributions to the problem that occurs in the primary school, for this is drew up a proposal aimed at children with outstanding to propel the purpose to develop their knowledge of mathematics Through a workshop of math games whose objective is to generate strategies for the consolidation of the learning of mathematics, this develops into the CETMAR No. 26 of San Blas, Nayarit, Mexico.

Key words: ludic, talent, strategy, math

Introducción

Muchos de los sistemas educativos siguen dando respuestas homogéneas a personas con necesidades muy diversas, es decir, han permitido que aquellas personas con capacidades, tanto inferiores como superiores, sean excluidas del panorama educativo. De ahí surge la necesidad de atender tanto a alumnos con un bajo aprovechamiento, así como a quiénes sobresalen en sus estudios.

El presente reporte trata de una investigación en curso que se inició en agosto de 2012 y cuya conclusión está prevista para Febrero de 2014 y cuyo objetivo es realizar un taller de matemática lúdica como apoyo a la clase de matemáticas regular en alumnos de primaria con talento especial para las matemáticas. En las últimas décadas se ha despertado el interés por atender a los estudiantes con capacidades sobresalientes. En diferentes partes del mundo se han desarrollado teorías e investigaciones que buscan desarrollar métodos que permitan identificar a esta población de tal forma que se puedan diseñar y aplicar programas que les ayuden potenciar sus capacidades.

Y México no es la excepción. Desde 1983 los estudiantes con capacidades sobresalientes han estado bajo la mirada de las políticas educativas. La atención a esta población ha estado sometida, como muchas otras decisiones importantes, a las disposiciones políticas, los cambios de gobierno, etc. Pero uno de los factores que más ha frenado el crecimiento en este tema es la falta de desarrollo teórico e investigaciones propias de nuestro país(Canché, Simóny Farfán, 2010).

El Diario Oficial de la Federación establece en su acuerdo número 422 que un alumno o alumna con necesidades educativas especiales, "es aquel o aquella que presenta un ritmo de aprendizaje significativamente distinto en relación con sus compañeros de grupo y que requiere apoyos extras y/o diferentes en su proceso educativo" (SEP, 2007, p. 4).Como un subgrupo de personas con Necesidades Educativas Especiales están aquellos estudiantes con capacidades superiores. Para hace referencia de esta población no existe una diferenciación de términos adecuada, ya que se utilizan indistintamente unos y otros. En nuestro país (México) se usa el término aptitudes sobresalientes para "aquel o aquella persona que presenta un conjunto de características que le permiten destacar significativamente del grupo social y educativo al que pertenece en uno o más de los siguientes campos del quehacer humano: científico, tecnológico, humanístico, social y artístico y/o acción motriz"(SEP, 2007,p.3).

Antecedentes

Fernández (2008), en su tesis doctoral aplicó el ajedrez como un recurso para el aprendizaje de las matemáticas manifestando que hubo total aceptación del material por parte de los niños, que facilitó su aprendizaje y mejoró la calidad de la educación.
Los éxitos obtenidos en el ajedrez radican en una memoria visual excepcional, el poder combinatorio, la velocidad para calcular, el poder de concentración y el pensamiento lógico.

La aplicación del material didáctico utilizado favorece la enseñanza aprendizaje de las matemáticas en los aspectos de razonamiento lógico y de cálculo numérico.
Cruz y Flores (2008), en su investigación buscaron mediante la experimentación comprobar si los juegos de lanzamiento producen un efecto positivo en la construcción del concepto de número, permitiéndoles aseverar que los juegos de lanzamiento producen un efecto positivo en la construcción de nociones de ordinalidad, seriación y conservación y que ayudó a adquirir, mejorar y afianzar las nociones necesarias para la construcción del concepto de número.

Payà, (2006), en su investigación doctoral, parte del planteamiento de que cualquier actividad escolar abordada desde una actitud lúdica, se puede considerar como juego, y a su vez cualquier juego planteado como tal, si se realiza como una actividad carente de dicha actitud lúdica, se acaba convirtiendo en monótona, rígida y ausente de alegría (características muy alejadas de lo que

consideramos como verdadero juego), degenerando en un ejercicio escolar rutinario más, carente de la motivación que provoca el juego en el educando.

Burgos, (2005) en su trabajo de investigación donde planificaron juegos educativos y materiales manipulativos en niños concluyeron que éstos aumentan la disposición hacia el estudio de las matemáticas y permiten el desarrollo del pensamiento lógico y el razonamiento y facilitaron el aprendizaje de las operaciones concretas.

Descripción general de la experiencia

Se intenta propiciar estrategias lúdicas para la consolidación del aprendizaje de las matemáticas, por medio de juegos que muestren a los participantes una forma divertida de aprender. Se pretende además que los alumnos participantes sean analíticos y competitivos en cualquier situación ya sea de carácter académico o, en un futuro laboral, a través de la participación en concursos u olimpiadas de matemáticas, ya que ésta es una ciencia que está presente en todas las actividades que realizan los seres humanos y es de gran importancia para el desarrollo de sus habilidades lógicas y del pensamiento.

Las actividades se llevan a cabo en las instalaciones del Centro de Estudios Tecnológicos del Mar No. 26 en San Blas, Nayarit, México los días jueves de 15:00 a 18:00 horas, donde se trabajará un taller de resolución y generación de problemas que le permita desarrollar al alumno sus habilidades lógico - matemáticas.

Objetivos

Detectar, orientar e impulsar de manera continua, a lo largo de dos semestres, el talento matemático excepcional de estudiantes de 09 - 13 años (4°, 5° y 6° grados), sin desarraigarlos de su entorno, mediante una orientación semanal, que se efectuará cada semana por tres horas.

Desarrollar habilidades para la solución de problemas matemáticos de la vida real,

Desarrollar el juicio y la capacidad de razonar de los niños, para fomentar la capacidad de explicarles el por qué y el cómo, cuando se trata de las soluciones a los problemas,

Desarrollar la confianza en sí mismos, así como sus propias estrategias eficientes para resolver problemas. Se centra en la resolución de problemas como estrategia para el desarrollo de la comprensión de conceptos matemáticos.

Hipótesis

Hemos adoptado como hipótesis de nuestro trabajo la siguiente: El rendimiento en razonamiento lógico y cálculo numérico mejoran sustancial y significativamente después de aplicar material didáctico lúdico.

Alumnos a los que va dirigida

El talento se concibe generalmente como el potencial que puede tener una persona en el desarrollo de un conjunto de habilidades/competencias a lo largo de su vida.Sin embargo si realizamos una revisión más específica es posible observar en la literatura que existen diversos términos y aproximaciones para denominar y describir a aquellos alumnos con algún tipo capacidades por encima de la media. Los términos más utilizados son los de talento y superdotado. Es importante considerar que existen otros términos que se utilizan como sinónimos, dentro de la literatura que revisamos, como el de sobresaliente y sobredotado (Canché & Simón, 2009).

En nuestra experiencia, se trabajará con un grupo de alumnos AS (Actitudes Sobresalientes) de cuarto, quinto y sexto grados de las primarias de la localidad.

El termino niños AS es utilizado en el departamento de Educación Especial de la Dirección de Educación Básica de los Servicios de Educación Pública del Estado de Nayarit para caracterizar a los alumnos cuyo funcionamiento intelectual es significativamente superior a la media, lo cual fue comprobado mediante el examen diagnóstico aplicado al inicio de los trabajos.

Metodología

Nuestro trabajo de investigación se ubica en una didáctica en escenarios socioculturales (Cantoral y Farfán, 2003) y en consecuencia contempla cuatro dimensiones en la construcción del conocimiento matemático, a saber, la social, la epistemológica, la cognitiva y la didáctica, esto es los que se conoce como socioepistemología. El concepto alrededor del cual se desarrolla la actividad didáctica diseñada es el de la matemática lúdica. Esta propuesta de enseñanza se inscribe dentro del modelo de aprendizaje constructivo a través de la lúdica, y busca potencializarse como un proyecto experimental, que a través de grupos de muestra lleve a revelar, a largo plazo, la posibilidad como método directo de enseñanza en los diferentes grupos de la localidad.

Desde nuestro punto de vista, los que es de interés predominante es el estudio de los procesos de aprendizaje que viven los estudiantes en el aula. Es decir, los procedimientos que ellos realizan como producto de su encuentro con situaciones problema, el análisis de las ocurrencias respecto a las estrategias a seguir, la observancia del desempeño en la clase con sus complejidades y

variantes, etc. De esta manera, consideramos que la metodología idónea para este trabajo no debe ser en sentido estricto cuantitativo, ya que involucraría análisis producto de evaluaciones externas, consideramos que se requiere una metodología cuya validación sea interna. En este sentido se optó por la ingeniería didáctica.

Desarrollo de las actividades

La actividades del taller se realizan una vez a la semana durante y en ellas se alternan actividades básicas de lápiz y papel con otras en formato de juego. En ocasiones se explica un concepto, un algoritmo y se practicaba usando juegos, tratando de evitar que se repitieran las acciones y se convirtieran en algo tedioso. En otras se parte del juego para aprovechar las ideas intuitivas e ir poco a poco desglosando las ideas del tema.

De esta manera se viene trabajando con: dominó de fracciones, torres de hanoi, tangram, sudoku, kakuro, kenken, sujiko, sopa de letras, sopas de números, pirámides de números, cuadrados mágicos, origami, oca matemática entre otros. Ver anexos sobre actividades y recopilación de datos de satisfacción de los alumnos atendidos.

A manera de conclusiones

La influencia de la lúdica en la actividad escolar del estudiante puede presentar y lograr el objetivo docente adquiriendo un carácter específico por las condiciones en que se desarrolla la actividad. Generalmente se subvalora la enseñanza a través del juego, se considera una estrategia inadecuada para transmitir conocimientos, pero no sólo es una forma de comunicación y enseñanza sino un instrumento de exploración que debe ser cultivado.

La experiencia está resultando muy positiva y enriquecedora para todos. La curiosidad ante a la novedad hizo que acogieran con entusiasmo este tipo de actividades, ya que dejó de ser puramente escolar y académica y se transformó en una actividad lúdica, lo rutinario pasó a ser entretenido, lo aburrido a divertido.

El alumno se implicó más en el proceso porque consideró que estaba jugando y no estudiando, se sintió motivado con su participación en esta actividad académica con el deseo de volver a tener este tipo de experiencias en el aula ya que tienen inclinación por el juego.

Se ha logrado desarrollar secuencias de actividades, brindando a los educandos la posibilidad de comprender claramente desde sus diferentes perspectivas la concepción de los enunciados más comunes en el lenguaje aritmético y algebraico a través de una actividad lúdica realizada en un ambiente de confianza, libertad y cooperación.

Con la propuesta de la lúdica como estrategia se quiere construir un ambiente adecuado que permita la construcción de conceptos y el desarrollo del pensamiento matemático por medio de una propuesta afectiva y emotiva que sirva para desmitificar la falacia del temor a las matemáticas y en su reemplazo, proponer espacios para aprender jugando.

¿Por dónde podemos avanzar?

1 Aplicar el material en contextos más amplios y contrastar resultados.

2 Abarcar más aspectos curriculares.

3 Desarrollar investigaciones comparando resultados con material informatizado.

4 Mejorar el material didáctico.

5 Ampliar su aplicación a otros ciclos o etapas educativas.

6 Profundizar en la interrelación de contenidos lúdicos y curriculares mediante programaciones, materiales, recursos...

7 Planes de trabajo para implantar los materiales con recursos lúdicos

Referencias bibliográficas

Burgos, V. (2005). *Juegos educativos y materiales manipulativos: Un aporte a la disposición para el aprendizaje de las matemáticas*". Tesis de licenciatura no publicada, Universidad Católica de Temuco, Chile.

Canché E., Simón, G., y Farfán, R. (2010). *Estado del arte del tratamiento gubernamental y educativos de las capacidades sobresalientes en México*. En P. Lestón (Ed), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 23, 7 - 14. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Canché, E. y Simón, G. (2009). *El talento especial de los niños en matemáticas: un* estudio *cualitativo*. En P. Lestón (Ed), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22, 297 - 305. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003).*Matemática Educativa: una visión de su evolución*. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 6 (1), 27 - 40.

Cruz, P. y *Flores*, M. (2008). *Incidencia del juego de lanzamiento en el proceso de* construcción *del concepto de número en niños de grado* primero *de la institución Carlota Sánchez de la ciudad de Pereira*. Tesis de licenciatura no publicada. Universidad Tecnológica de Pereira, Colombia.

Fernández, J. (2008). *Utilización de material didáctico con recursos de ajedrez para la* enseñanza *de las matemáticas*. Tesis de doctorado no publicada. Facultad de Ciencias de la Educación, Departamento de Pedagogía Aplicada, Universidad Autónoma de Barcelona, Bellaterra, España.

Payà, A. (2006). La *actividad lúdica en la historia de la* educación *española contemporánea*. Tesis de doctorado no publicada. Universidad de Valencia, España.

SEP (2007). *Las reglas de operación del programa de fortalecimiento de la educación especial y de la* integración *educativa*. Diario oficial, acuerdo número 422. México. Recuperado en marzo de 2012 de: http://basica.sep.gob.mx/dgdgie/cva/programas/educacionespecial/materiales/RO/ROIn2008.pdf

Anexo I

Resuelve las siguientes fracciones:

$\frac{12}{3}$	=	4		$\frac{18}{2}$	=				$\frac{15}{5}$	=			$\frac{21}{3}$	=	
$\frac{10}{2}$	=			$\frac{24}{4}$	=				$\frac{32}{4}$	=			$\frac{50}{5}$	=	
							$\frac{6}{3}$	=							

Encontrar en la siguiente sopa de letras el entero equivalente para cada fracción y escribirlo dentro de los recuadros. Guiarse por el ejemplo

E	L	Ñ	T	D	A	C	F	J	Z	J
R	P	L	Y	I	Z	V	R	H	Q	M
S	O	K	U	E	X	F	T	F	A	N
I	I	J	I	T	R	E	S	R	Z	B
E	U	H	O	J	F	E	H	D	X	V
S	D	O	S	K	D	D	G	U	K	C
F	T	F	K	L	R	S	F	V	D	I
R	F	D	J	O	C	H	O	F	I	N
S	I	E	T	E	Y	H	S	T	E	C
C	V	U	N	O	U	J	C	Y	Z	O
V	M	R	M	I	E	K	V	U	J	D
B	M	T	Ñ	U	V	L	B	I	K	E
N	N	Y	P	Y	E	Ñ	N	J	L	R
M	M	I	D	C	U	A	T	R	O	T
K	Q	O	S	R	N	U	K	G	K	Y

Resuelve los siguientes sudokus

6			7	1				
	3						6	
1		2		3	5			
		8				7		
			9	5	6			
	5		1					
	7				2	6	3	
			8					
	2	5					8	1

Resuelve los siguientes

15×	5−	16+			392×		3
		2−	20×				7−
2÷	13+		5−		1−	4÷	
		588×	2÷				3−
			6×		4÷		
11+		9+		3−		20+	11+
			19+	5−			
14×				3÷			

Anexo 2

Actividades del proyecto en aula

Actividad	Objetivos	Proceso	Aprendizajes esperados	Actividades de evaluación
Oca Matemática				

Evaluación del grado de efectividad de la actividad por parte del alumno

Actividad/día	He aprendido	Me he divertido	No me hagustado	No he aprendido
Oca Matemática				

UNA FORMA DE APRENDER EXPRESIONES ALGEBRAICAS MANEJANDO CONCEPTOS DE ÁREAS

Neli Gonzales Prado
Universidad de Cuenca Ecuador
neli.gonzales@ucuenca.edu.ec

Resumen. La carrera de matemáticas y física, de la Facultad de Filosofía, Universidad de Cuenca, tiene la asignatura Algebra Elemental. Es una asignatura de nivelación y abordaje pedagógico de los conceptos y operaciones algebraicas. Se desarrollan: operaciones básicas con números enteros, operaciones con polinomios, productos notables, factorización, ecuaciones de primer grado con una incógnita, sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas y ecuaciones de segundo grado; en la que recomiendo la utilización de los bloques de dienes, para permitir que el estudiante vivencie situaciones en las que pueda identificar las fases: concreta, simbólica, gráfica y de aplicación.
Palabras clave: Bloques de Dienes, campo cero
Abstract. The career of mathematics and physics at the Faculty of Philosophy, University of Cuenca, includes the elementary algebra course. It is a leveling course and pedagogical approach of concepts and algebraic operations. Are developed: basic operations with whole numbers, operations with polynomials, remarkable products, factoring, linear equations in one unknown, systems of two linear equations with two unknowns and quadratic equations, in which recommend the use of Diene's blocks to allow the student experiencing situations that can identify phases: concrete, symbolic, graphical and application.
Key words: Diene's Blocks, zero field

Introducción

Durante la última década, en el Ecuador, el gobierno nacional, a través del Ministerio de Educación, ha intensificado la propuesta para mejorar la calidad de la educación. El concepto gira en torno a conseguir logros de aprendizaje significativos en los estudiantes. Esto se puede evidenciar en las diferentes estrategias y acciones implementadas por el gobierno a través de la creación del Sistema Integrado de Desarrollo Profesional Educativo (SIPROFE) y Consejo de Evaluación, Acreditación y Aseguramiento de la Educación Superior (CEACCES), organismos orientados a revalorizar la profesión docente de nivel básico, bachillerato y superior.

Es por ello que se exige a los docentes ecuatorianos, cumplir con los estándares de calidad, a través del desempeño de sus ejecutorias para que el estudiante, desde la propuesta de un nuevo modelo educativo, alcance: el saber, el saber hacer y el saber ser como componentes de su formación holística-integral.

El Ministerio de Educación, recomienda utilizar como material didáctico para el estudio de temas algebraicos, los Bloques de Dienes. Sin embargo, no se dispone de una guía de manejo del material mencionado (Actualización curricular de segundo a séptimo de Educación General Básica, 2011).

En general, el área de la matemática y específicamente la enseñanza – aprendizaje de las operaciones con expresiones algebraicas, ha significado un escollo para el estudiante. Ésta,

tradicionalmente atada a los manejos puramente algorítmicos y conceptuales no ha permitido incrementar la eficacia en el uso de las mencionadas operaciones. El denominado "Bloques de Dienes", que fue inicialmente elaborado para desarrollar destrezas básicas del pensamiento matemático, en los primeros años de escolaridad, puede ser aplicado para reforzar el pensamiento lógico en el último año de educación básica.

> No podemos dejar de hablar de la manipulación en las edades más avanzadas. La manipulación no es una valor restringido a las primeras edades y propio de una educación matemática "iniciática". La eficacia de la educación tiene que ver a cualquier edad, con la satisfacción del aprendiz hacia las tareas que se le proponen. (Alsina & Planas, 2008, p.54)

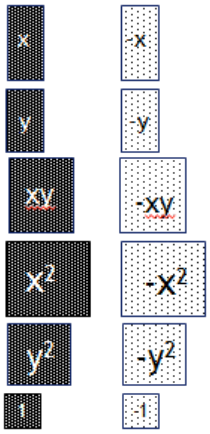
La malla curricular de la carrera de Matemáticas y Física, de la Facultad de Filosofía de la Universidad de Cuenca, contempla la asignatura Algebra Elemental, que se constituye en nivelación y a la vez en abordaje pedagógico de los conceptos y operaciones algebraicas. En ella se desarrollan operaciones básicas con números enteros, operaciones con polinomios, productos notables, factorización y ecuaciones de primero y segundo grado.

Cuando tuve la oportunidad de conocer el manejo de los Bloques de Dienes, consideré de interés didáctico, que mis estudiantes conozcan esta alternativa de enseñanza del álgebra, para aplicarla a estudiantes de Educación General Básica.

Los Bloques de Dienes fueron creados por William Hull. Zoltan Dienes usó en escuelas de Canadá y Australia. Actualmente se promueve su uso como "manipulativos".

Estos bloques consisten en cuadrados y rectángulos de dimensiones variadas, así para iniciar el trabajo con

operaciones de suma y resta con números enteros se utilizan cuadrados que representan una unidad cuadrada, deben ser de dos colores los cuales representarán, los números positivos y negativos, se recomienda manejar el azul o gris para los positivos y el blanco o rojo para los negativos.



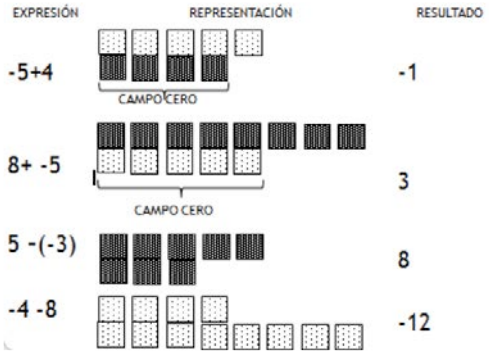
Con estas fichas se puede trabajar el concepto de número cero o campo cero, este se forma cuando se unen dos fichas que difieren únicamente en su color, y al hacer operaciones de ADICIÓN, estas fichas se eliminan.

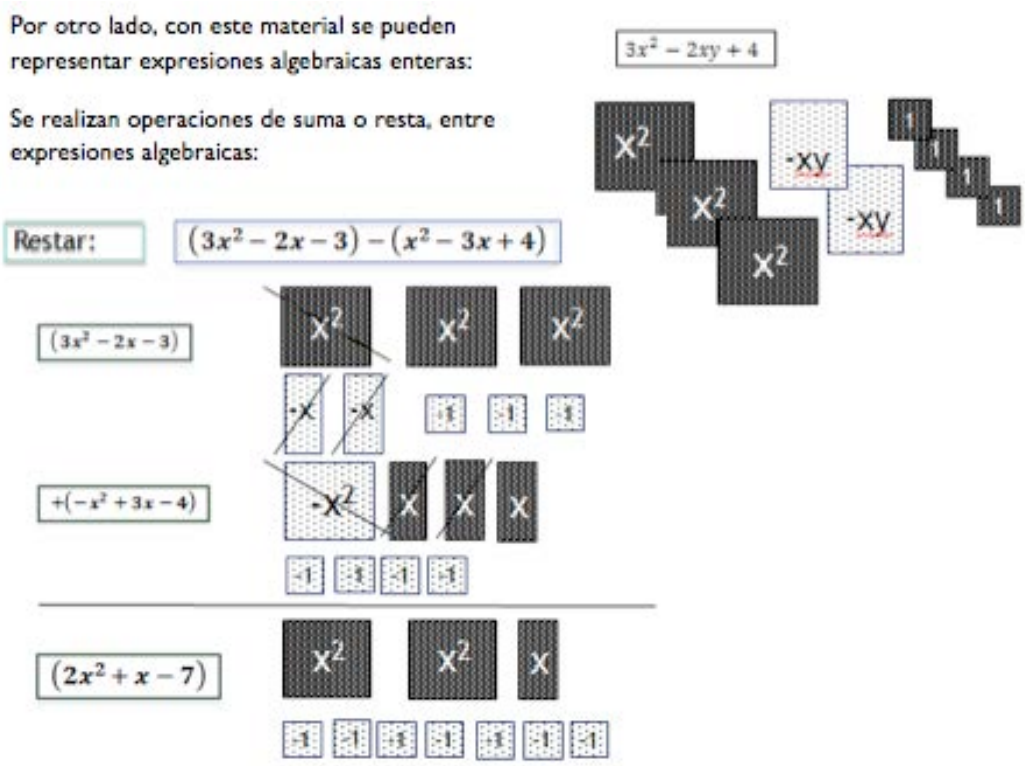
Para la construcción de estos bloques se debe tener en cuenta:

- El lado del cuadro que representa la unidad es igual a una de las dimensiones de las fichas x, y.

- La dimensión de y coincide con una de las fichas de y^2 , y la de x coincide con la dimensión de x^2
- Las dimensiones de la ficha xy coincide con una dimensión de x y otra de y.
- Con ninguna ficha se puede cubrir de manera exacta la superficie de otra ficha.

A la operación de la suma se le asocia con la idea de agregar y a la resta se le asocia con la idea de quitar, o de agregar el opuesto del positivo, así:



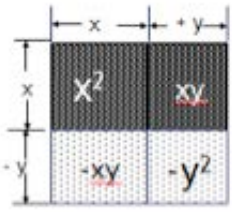


Productos notables:

Para esta operación es necesario formar rectángulos de lados de acuerdo a cada uno de los factores, cuya suma de áreas será el resultado del producto notable:

Ejemplo 1:

$(x+y)(x-y) =$

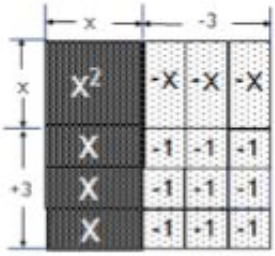


xy con -xy se anulan

$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$

Ejemplo 2:

$(x-3)(x+3) =$

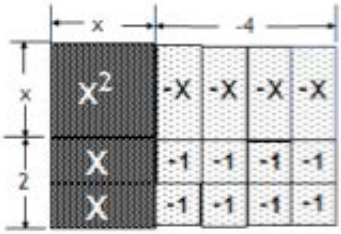


x con -x se anulan

$(x-3)(x+3) = x^2 - 9$

Ejemplo 3:

$(x-4)(x+2) =$

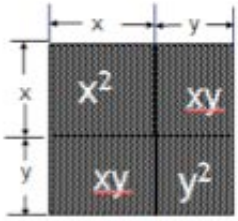


x con -x se anulan

$(x-4)(x+2) = x^2 - 2x - 8$

Ejemplo 4

$(x+y)(x+y) = (x+y)^2$



$(x+y)(x+y) = (x+y)^2 =$
$= x^2 + 2xy + y^2$

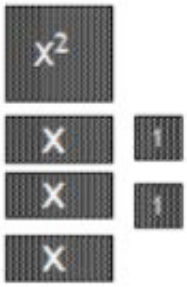
Factorización:

Para abordar la factorización, se entrega las fichas correspondientes al polinomio que se debe factorar y con ellas se debe formar un rectángulo. Si no es posible hay que tratar de rellenarlo con campos ceros.

Ejemplo 1:

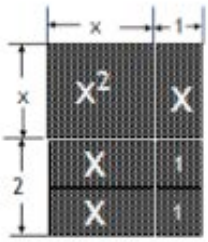
Factorar: $x^2 + 3x + 2$, para ello se entregan las siguientes fichas:

Con estas fichas se forma un arreglo rectangular, luego de algunos intentos se consigue el siguiente:



Formando el rectángulo de lados:

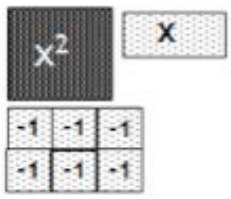
$(x+1)y\ (x+2)$ por tanto será el resultado de la factorización:



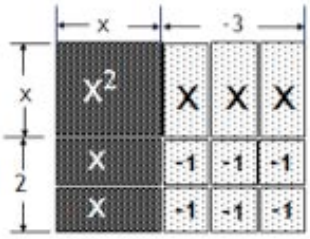
$x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$

Ejemplo 2:

Factorar: $x^2 - x - 6$, se trabaja con las fichas:



Ahora hay que tratar de formar un arreglo rectangular, si no hay manera se trabajará con fichas que formen el campo cero.



$x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$

Para el estudiante de los últimos años de EGB, que no logra afianzar del todo su pensamiento formal (hipótesis), el uso de los Bloques de Dienes puede ser una estrategia intermedia entre un pensamiento concreto y uno formal; ya que permitirá visualizar o "palpar" el álgebra desde una construcción gráfica bidimensional. Posibilitando, por un lado descubrir que esta asignatura, bastante compleja, se convierta en un medio de acercamiento para sostener todo el conjunto de conceptos que tendrá que aprender más adelante, y por otro, abordar el álgebra de manera lúdica y motivacional.

De hecho, no a todos los estudiantes les parecerá ideal esta propuesta estratégica, puesto que como señala Vigotsky, si la zona de desarrollo se ubica en un área ya cubierta, le parecerá una herramienta de poco valor; no obstante, aquellos estudiantes que tienen dificultades para conceptualizar, se convertiría en una apoyo importante, ya que aprender solamente de manera conceptual, puede significar que la zona de desarrollo no es próxima sino remota, provocando en el estudiante frustración y malestar.

Los Bloques de Dienes son una estrategia basada en el manejo de fichas de diferentes áreas, con la que el futuro docente de una carrera de Matemáticas debe contar, para permitir que los estudiantes que presentan dificultades con las expresiones algebraicas, lo aborden de manera satisfactoria.

Referencias bibliográficas

Actualización y fortalecimiento curricular de la educación general básica 2010.(df). Recuperado el 20 de junio de 2013 de http://www.educar.ec/noticias/7moanio.pdf

Alsina, A., Planas, N. (2008). *Matemática inclusiva: propuestas para una educación matemática accesible.* Madrid: Narcea.

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática.* México: iberoamérica.

Dienes, Z. (1972). *Lógica y juegos lógicos*, Barcelona: Traide.

Gómez, G. (2009). *Módulo I Didáctica de las matemáticas y evaluación I*. Recuperado el 20 de junio de 2013 de http://200.26.134.109:8091/unichoco/Ceres/ARCHIVOS/matematicas/DID%C3%81CTICA%20DE%20LAS%20MATEM%C3%81TICAS%20Y%20EVALUACI%C3%93N%20I.pdf

Informe de rendición de cuentas 2011 – 2012. (sf). Recuperado el 27 de diciembre de 2012 de http://www.ceaaces.gob.ec/sitio/wp-content/uploads/2014/02/m.-Mecanismos-de-rendicio%CC%81n-de-cuentas-2012.pdf

Mancera, M.(1998). *Matebloquemática*, México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ortiz, F. (2001). *Matemática estrategias de enseñanza y aprendizaje*. México: Editorial PAX.

SiProfe. (df). Recuperado el 20 de junio de 2013 de http://educacion.gob.ec/siprofe/

ENSEÑAR BIOESTADISTICA EN CARRERAS DE CIENCIAS DE LA SALUD

Myriam Nuñez, Christiane Ponteville, Hugo Granchetti, Mariano Reynoso, Elunei Seifert
Universidad de Buenos Aires Argentina
chponteville@gmail.com

Resumen. En las carreras de Farmacia y Bioquímica la asignatura Bioestadística resulta fundamental para el desarrollo de competencias relacionadas con el análisis de resultados y diseño de experimentos. En este trabajo presentaremos la experiencia realizada en la Escuela de Ayudantes en el área de la enseñanza de la Bioestadística durante el año 2012 en la cátedra de Matemática de la Facultad de Farmacia y Bioquímica de la Universidad de Buenos Aires. Esta escuela tuvo como ejes la revisión de los temas de la asignatura y la generación de un espacio de formación continua y reflexión sobre las prácticas de la enseñanza a los futuros docentes auxiliares de la cátedra
Palabras clave: escuela de ayudantes, bioestadística
Abstract. In Pharmacy and Biochemical careers the Biostatistics course is the cornerstone for experimental designs and analysis results development. In this paper we will show the experience in the Biostatistics teaching area developed in the School Aides of the Mathematics Chair of the Buenos Aires University Scholl of Pharmacy and Biochemistry. This School Aides had the axes reviewing the topics of the course and generating a space for reflection on lifelong learning and practice of teaching future teachers of the department auxiliary.
Key words: helper´s school, biostatistics

Presentación del marco institucional

En los diseños curriculares de las carreras que se imparten en la Facultad de Farmacia y Bioquímica de la Universidad de Buenos Aires para otorgar el título de farmacéutico y bioquímico, se presenta dos asignaturas correspondientes a la Cátedra de Matemática: Matemática y Bioestadística. La primera corresponde al primer cuatrimestre de cursada de la carrera, la segunda es una asignatura obligatoria con elección del momento de la cursada. Para cursar Bioestadística es necesario estar en condiciones de cursar alguna materia del quinto cuatrimestre de la carrera y haber aprobado los trabajos prácticos de la asignatura Matemática.

Los contenidos mínimos de Bioestadística de los diseños curriculares de ambas carreras son: "Fundamento del cálculo de probabilidades. Estadística descriptiva. Distribuciones de probabilidad más importantes. Distribuciones en el muestreo. Introducción a la inferencia estadística. Estimación puntual y por intervalos de confianza. Prueba de hipótesis. Regresión y correlación. Análisis de la varianza. Pruebas no paramétricas. Selección de pruebas estadísticas y aplicaciones al diseño experimentales las ciencias farmacéuticas o biomédicas. Herramientas informáticas."

De esta forma, la asignatura Bioestadística está destinada a alumnos que han cursado las materias básicas del plan de estudios y se considera fundamental en profesiones de las ciencias de la salud para el desarrollo de competencias y actitudes relacionadas con el análisis crítico de resultados, diseño de experimentos, y reflexión epistemológica respecto de las conclusiones obtenidas en los experimentos diseñados (Ponteville, 2010)

Como los alumnos acceden a esta asignatura en diversos momentos de la carrera, puede ocurrir que convivan en un aula un alumno a punto de recibirse y un alumno en la mitad de su carrera. Las clases están organizadas semanalmente en una clase de teórico-práctico y un taller de informática, cada encuentro con una duración de dos horas y la asignatura se imparte en un cuatrimestre. En el taller se trabaja con Excel y se les brinda herramientas de Infostat. Se utiliza la estrategia de utilizar salidas de Excel ya que no se dispone de infraestructura para evaluarlos en el laboratorio de informática.

Estos alumnos llegan con conocimientos de aplicaciones de la estadística a través de papers y publicaciones con los cuales han trabajado en otras asignaturas de la carrera. Refieren que las herramientas estadísticas han sido el método de validación y, en forma dispar, poseen manejo informático de estrategias de representaciones gráficas y análisis de datos.

En esta asignatura se busca la construcción de los conceptos estadísticos de inferencia en los cuales se pretende dar cuenta de cuál es el comportamiento de la población a partir de un conjunto limitado de casos para tomar finalmente decisiones generales. Es así como adquiere relevancia en el diseño ya que proporciona una herramienta que permite establecer conclusiones acerca de fenómenos poblacionales a partir de los datos disponibles, que habitualmente son de tipo muestrales. Para que dichos procedimientos puedan ser llevados a cabo de manera efectiva, es imprescindible conocer la lógica del proceso y los errores que pueden cometerse en la consecuente toma de las decisiones, a fin de realizar una lectura crítica de los resultados. Esto establece una complejidad para los estudiantes que deben alcanzar un elevado nivel de abstracción de algunos de los conceptos relacionados con la estimación puntual, la estimación por intervalos y las pruebas de hipótesis.

Escuela de ayudantes

A mediados del año 2012, nos propusimos crear la Escuela de Ayudantes de Bioestadística, con el objetivo de formar auxiliares que sean egresados o estudiantes en la facultad que se incorporen a la Cátedra de Matemática como parte de su plantel docente. La propuesta implicaba no sólo entrenar técnicamente a los participantes, sino también generar un espacio semanal de formación continua y reflexión sobre las prácticas de la enseñanza (Serradó, 2013). Esta iniciativa constituiría la primera propuesta institucional de ingreso de estudiantes y graduados de la Facultad de Farmacia y Bioquímica a la enseñanza de áreas de la Matemática.

Se entendió a la "Escuela de Ayudantes" como un espacio formal para la formación de nuevos docentes dentro de una cátedra universitaria pensando en la adquisición de una visión crítica sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje y el análisis de las decisiones didácticas

involucradas en las estrategias pedagógicas, y el descubrimiento de nuevas perspectivas para el abordaje de las unidades teórico-prácticas de la materia. Se considera fundamental el intercambio de ideas y opiniones entre los integrantes considerando que el aprendizaje es mutuo y continuo. De esta forma se buscó crear un espacio de integración entre matemáticos, alumnos y graduados de la facultad (Hernández, 2013).

Las actividades que se propusieron fueron:

- Asistencia a las clases de taller
- Generación de situaciones de enseñanza y aprendizaje
- Discusiones organizadas sobre el uso de recursos tecnológicos en la enseñanza y aprendizaje de la Bioestadística
- Análisis de la guía de trabajos prácticos tanto desde el punto de vista conceptual como desde un punto de vista pedagógico
- Lectura crítica de libros de texto
- Asistencia a jornadas y seminarios departamentales

Los objetivos generales de estas actividades fueron:

- Entrenar una mente crítica sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje
- Explorar los componentes del triángulo didáctico
- Intercambiar ideas y opiniones sobre las decisiones didácticas que se toman como parte de las estrategias pedagógicas
- Descubrir nuevas perspectivas para el abordaje de las unidades teórico-prácticas de la asignatura
- Analizar los diferentes temas del programa a través de validaciones acordes a la formación de los participantes
- Proveer ejemplos de resolución de problemas reales enfatizando la experimentación y la resolución de problemas.
- Problematizar sobre los obstáculos que los estudiantes encuentran para adquirir los conceptos de la bioestadística

Actividades desarrolladas

Entre las actividades que se realizaron, se asistió a clases de trabajos prácticos en el taller de informática de distintos docentes y sobre diferentes unidades temáticas, con el objetivo de

entrenar una mente crítica sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje. Se observó tanto a docentes como alumnos con la ayuda de una guía de observación, diseñada a tal fin por una de las coordinadoras de la Escuela de Ayudantes. El objetivo de tener una guía de observación era no caer en la estrategia fácil de decir si lo que el profesor decía estaba bien o mal o criticar su accionar frente a los alumnos sino el poder analizar cuales eran las ideas y concepciones respecto del contenido y la forma de enseñar con las cuales encaraba su clase. En la primera parte, llamada de observaciones generales, se espera una respuesta para cada una de los tres temas centrales: "Temas abordados" (¿Cuáles fueron los temas abordados? ¿Cuál fue el abordaje realizado? ¿Cuál la distribución temporal a lo largo de la clase?), "Estrategias" (¿Cuáles fueron las estrategias utilizadas? ¿Se plantearon nuevos interrogantes y problemas? ¿Se trabajó sobre la guía de trabajos prácticos? ¿Se orientó el trabajo? ¿El trabajo se realizó en forma individual, en pequeños grupos, en grupo total, combinación de las anteriores?) y "Herramientas"(¿Cuáles fueron las herramientas utilizadas? ¿Se utilizaron recursos tecnológicos? Convencionales? ¿Se estableció una relación entre ellos?). En la segunda parte, llamada desarrollo de la clase, se propone identificar los tres momentos de la clase: inicio, desarrollo y cierre con la misma modalidad de la parte anterior. En la última se podía incluir cualquier otra observación que se considerara relevante para la observación de la clase y no haya aparecido en los ítems anteriores. El análisis de los resultados de estas observaciones se realizó en el grupo a través del análisis de cada una de las partes antes mencionadas. Este intercambio posterior en los encuentros semanales nos permitió ir explorando los diferentes elementos que se ponen en juego en el momento de dar clase debiendo incluirse algunos elementos tantos de pedagogía como de didáctica ya que los integrantes no poseen formación docente básica.

Otra de las actividades realizadas fue, a partir del enriquecimiento obtenido a través de dichas observaciones, adentrarse en el rol docente generando hacia el interior del grupo situaciones de enseñanza y aprendizaje, en las cuales abordamos conceptos y problemas del área de la Bioestadística. Esto nos permitió intercambiar ideas y opiniones sobre las decisiones didácticas que íbamos tomando como parte de la estrategia pedagógica de cada uno de los integrantes. Se debatió sobre el uso de recursos como programas informáticos, presentaciones en diapositivas y pizarras, para resolver planteos numéricos y conceptuales del programa de la asignatura.

Asimismo, se analizó críticamente la guía de trabajos prácticos con la intención de indagar si las situaciones presentadas ayudaban a un aprendizaje significativo y potente de los contenidos esenciales de Bioestadística. Se pudo concluir que no es lo mismo mirar la guía desde la perspectiva de alumno que abordarla desde un punto de vista pedagógico.

Por otro lado, la lectura de libros de texto de diferentes autores nos permitió descubrir distintas perspectivas para el abordaje de las unidades teórico-prácticas, lo cual evidenció diversas puertas de entrada del conocimiento que podríamos aprovechar al diseñar propuestas de enseñanza para nuestros alumnos (Alonso y García Cruz, 2007). Se realizaron actividades en las cuales se analizaba la presencia del mismo contenido en diferentes maneras analizando las ventajas y las desventajas de cada propuesta.

Como parte del anclaje de nuestra formación continua en la enseñanza de Bioestadística con el uso de la disciplina en circunstancias reales, se asistió a jornadas y seminarios en los que investigadores de la facultad presentaban sus trabajos actuales. Ya que las ciencias de la salud validan hoy en día sus resultados a través de la estadística, esta experiencia constituyó una oportunidad para adquirir una visión crítica y reflexiva sobre la modelización del diseño experimental en términos de hipótesis y variables aleatorias.

Se realizaron también actividades de reflexión sobre la propia experiencia en la cursada de bioestadística teniendo en cuenta un acercamiento los cuatro planos que forman parte del proceso de enseñanza-aprendizaje: plano epistemológico (a través de preguntas vinculadas a lo que enseñamos), plano cognitivo (realizando un análisis respecto de cuales son los caminos para aprender de los alumnos), plano didáctico: (pensando en de que manera enseño ciertos temas) y el plano social (poniendo en evidencia a quien enseño, con que objetivo, dónde y utilizando que herramientas). Para ejemplificar esta idea enunciamos una de estas actividades: "Respecto de su propia cursada de bioestadística identifique un concepto, idea, planteo, ejemplo, situación, problema, etc. que le haya permitido adquirir algún concepto central de esta materia. Intente analizarlo desde el punto de vista de los cuatro planos presentados."

Todo este conjunto de actividades permitió enriquecer la formación de los integrantes de la Escuela como docentes de la Cátedra, así como generar espacios de reflexión en un grupo de intercambio heterogéneo compuesto por matemáticos, alumnos y graduados de Farmacia y Bioquímica. Una consecuencia directa de esta interacción fue la reinterpretación de la Bioestadística en términos menos formales, pero con la misma rigurosidad, para acercar paulatinamente una disciplina aparentemente lejana a futuros profesionales farmacéuticos y bioquímicos. De esta manera se conformó una Escuela de Ayudantes que no sólo entrena a sus docentes en temas vinculados a la Bioestadística sino que también fortalece la integración curricular de una asignatura formal en el contexto de carreras en ciencias de la salud.

Como perspectiva al futuro inmediato, los integrantes de esta Escuela de Ayudantes se irán incorporando escalonadamente en las actividades áulicas reales, en primera instancia acompañando

a los docentes de mayor experiencia. De esta forma la participación pasiva y reflexiva en las prácticas de la enseñanza se traducirá en una participación activa en el aula.

En las diferentes actividades realizadas se intentaron responder grandes preguntas como: ¿Qué enseñamos?, ¿Cómo se realiza la selección de los contenidos?, ¿Cómo se adecuan los contenidos mínimos del diseño curricular de las carreras de la facultad?, ¿Qué tecnología se usa para la enseñanza?, ¿Cómo aprendí estos contenidos?, ¿Cómo se produce aprendizaje?, ¿Qué estrategias utilizamos?, ¿Dónde se ubica la materia en la carrera?, ¿Por qué es útil enseñar bioestadística?, ¿Cómo se confeccionan las guías de trabajos prácticos?, ¿Cómo se estructuran las clases?, ¿Cómo fundamento mis observaciones?, ¿Los docentes se adaptan a los cambios?

Se le imprimió a esta propuesta un carácter continuo para la formación docente. Las actividades descriptas no fueron dadas por finalizadas, sino que por el contrario se siguen ampliando y reinterpretando abiertamente, incluso por la cohorte inicial. Más aún, la incorporación de una segunda cohorte de participantes en la Escuela lleva a la conformación de una comunidad de formación de formadores. Este espacio de análisis, intercambio y desarrollo de prácticas de la enseñanza en Bioestadística para ciencias de la salud se transforma así en una iniciativa que aspira a profundizarse en el corto y largo plazo.

Conclusiones

Se logró una reinterpretación de la Bioestadística en términos menos formales, no obstante igual de rigurosos, de manera de poder acercar a farmacéuticos y bioquímico paulatinamente a una disciplina que, aparentemente, está alejada de su área de competencia. Se forma una Escuela de Ayudantes que no sólo entrena a sus docentes sino que también fortalece la integración curricular de esta asignatura en el contexto de carreras en Ciencias de la Salud. Abriendo la experiencia a la incorporación de los participantes en las actividades áulicas, en el rol de docentes para conformar una comunidad de formación continua de formadores y fortalecer el trabajo interdisciplinario entre múltiples cátedras.

Las causas generales del interés por la enseñanza de las probabilidades y la estadística se ven entonces validadas por estas acciones ya que actualmente se incluye a la estadística como parte de la educación de los ciudadanos adultos y las especificidades de la mayoría de las profesiones exigen cada vez más poseer conocimientos básicos ya que la estadística interviene en el estudio de fenómenos complejos, en los cuales es fundamental reconocer las variables involucradas, obtener información de las mismas, interpretarlas y analizarlas. Este proceso deberá estar acompañado del desarrollo del razonamiento crítico fundamentado en la valoración de evidencia objetiva que permita resolver problemas de decisión y efectuar predicciones.

Se puede también enfatizar entre estos aspectos favorecer a la resolución de problemas, la formulación de conjeturas en lenguaje matemático, la validación como la demostración y razonamiento de las ideas matemáticas y la institucionalización como un acuerdo social en la construcción de conocimiento.

Referencias bibliográficas

Alvarez Savigne, G. y Vallecillos, A. (2001). Razonamiento estadístico para la resolución de problemas en el nivel universitario: aspectos teóricos y una aplicación. *Pedagogía Universitaria* 6 (3), 3-12.

García Alonso, I. y García Cruz, J. (2007). Contexto cotidiano frente a contexto matemático en inferencia estadística. En Berenguer, L. y otros (Ed.), A*ctas de las XIII Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas*. Granada.

Hernández González, S., Ruiz Hernández, B., Ponto Sosa, J. y Albert Huerta, J. (2013). Retos para la enseñanza y formación de profesores de estadística en México. *Revista de matemática: teoría y aplicaciones, 20 (2)*, número de 257-273.

Monterrey, P. y Gómez Restrepo, C. (2007). Aplicación de las pruebas de hipótesis en la investigación en salud: ¿estamos en lo correcto? Universitas Médica 48 (3), 193-206.

Ponteville, Ch., Núñez, M. (2010). La demostración y la enseñanza de la estadística. En H. Blanco (Ed). *Acta de la VIII Conferencia Argentina de Educación Matemática,* (pp. 346-350). Buenos Aires: Sociedad Argentina de Educación Matemática

CAPÍTULO 3

ASPECTOS SOCIOEPISTEMOLÓGICOS EN EL ANÁLISIS Y REDISEÑO DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

Introducción al Capítulo de Aspectos Socioepistemológicos en el Análisis y çRediseño del Discurso Matemático Escolar

Cecilia Crespo Crespo

Miembro del Comité Organizador Nacional – Relme 27. (Argentina)

crccrespo@gmail.com

La socioepistemología, marco teórico que surgió en la comunidad latinoamericana de matemática educativa, reconoce al saber matemático como una construcción social. El conocimiento matemático se construye inicialmente en escenarios no escolares y para entrar en el sistema educativo sufre modificaciones en su estructura y funcionamiento. Su presencia en el discurso matemático escolar es descontextualizado y en muchas oportunidades pierde el sentido y significado de su origen.

Las investigaciones que se realizan desde esta perspectiva teórica se orientan a analizar esos sentidos y significados, intentando recuperarlos en el aula, aunque no intactos, sino sujetos a las características sociales y culturales propias de los escenarios escolares en que se presentan. De esta manera, se proponen como una de sus metas el rediseño del discurso matemático escolar.

Comprender además que la escuela ha dejado de ser en la actualidad la única institución educativa para convertirse en una institución en una sociedad educativa (Barbero, 2008), es uno de los fenómenos que llevan a comprender las razones de la crisis de la escuela actual, que aún mantiene características de la modernidad en que fuera creada. Este fenómeno de carácter social también es importante para el enfoque socioepistemológico, ya que hace reconocer la importancia de los escenarios socioculturales como unidades de estudio fundamentales en la construcción del conocimiento.

El reconocimiento de la existencia de un programa socioepistemológico (Cantoral, 2014) sustentado y llevado adelante por una comunidad que se preocupa de la influencia de factores sociales y culturales en la construcción del conocimiento matemático, se pone de manifiesto en este capítulo del Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Se presentan aquí trabajos que reflejan diversidades culturales en escenarios de escenarios latinoamericanos. Se puede comprender de su lectura la presencia de una comunidad que reflexiona acerca de sus aulas de matemática, que se preocupa de problemáticas detectadas cuando sus alumnos se enfrentan a situaciones en las que deberían aplicar conocimientos matemáticos y no pueden hacerlo correctamente, que se cuestiona acerca de la manera en la que las nociones teóricas de la

matemática educativa deberían aceptarse o modificarse para lograr comprender los fenómenos presentes en la transposición didáctica. Estas inquietudes se reflejan en estos trabajos que muestran una comunidad viva y en crecimiento que se nutre y enriquece a partir de los resultados, experiencias e investigaciones que comparte.

Referencias bibliográficas

Barbero, J. (2008). Reconfiguraciones de la comunicación entre escuela y sociedad. En E. Tenti Fanfani (Comp.), *Nuevos temas en la agenda de política educativa* (pp.65-99). Buenos Aires: Siglo XXI.

Cantoral, R. (2014). Teoría socioespistemológica de la matemática educativa. México: Gedisa

LA ANALOGÍA, UNA FASE DE LA MODELACIÓN

Gildardo Cortés Bello, Jaime L. Arrieta Vera yEduardo Tomás Torres.
Instituto Tecnológico de Acapulco. México
Conalep, Plantel Acapulco II.
gildardo_59@yahoo.com.mx, jaime.arrieta@gmail.com, eduttt@gmail.com

Resumen. El presente trabajo tiene la intención de analizar las fases de las prácticas de modelación en la escuela y el papel de la analogía como una de ellas. Las prácticas de modelación las caracterizamos como prácticas recurrentes de diferentes comunidades que articulan dos entidades (fenómenos y sus referentes matemáticos) con la intensión de intervenir en una de ellas a partir de la otra. Esta caracterización plantea de entrada la interacción con el fenómeno, esto define a la primera fase, emergiendo la experimentación en el sentido amplio. La segunda fase, la caracterizamos como el acto de modelar, en donde se realiza la articulación por medio de alguna acción de las entidades participantes; la tercera fase es la articulación de los modelos con el fenómeno en una red. Una cuarta fase es la analogía que descentra la red de modelos del fenómeno original que le dio lugar. En esta fase se pretende la articulación de redes de modelos, dando lugar a redes de redes.
Palabras clave: analogía, el acto de modelar
Abstract. This paper intends to analyze the phases of modeling practices in the school and the role of analogy as one. Modeling practices appellants characterize as the practices of different communities that articulate two entities (phenomena and their mathematical referents) with the intention of intervening in one from the other. This characterization raises input interaction phenomenon, this defines the first phase, emerging experimentation in the broad sense; the second phase, characterized as the act of modeling, where the joint is made by some action of the actors; the third stage is the articulation of the models with the phenomenon in a network. A fourth phase is the analogy that decentralizes network models of the original phenomenon that gave place. At this stage the joint models of networks intended, leading to networks of networks.
Key words: analogy, modeling, experience

Introducción

Desde nuestra concepción teórica de las prácticas de modelación, no existe modelación sin interacción con el fenómeno o la entidad a modelar, sin experimentación en el sentido amplio. De modo que la primera fase de la modelación es la experimentación. En esta fase la interacción con el fenómeno es fundamental, ya que se obtienen datos de diferente naturaleza. Por ejemplo, numéricos o gráficos y los métodos para su obtención son variados, etc., pueden ser a partir de sensores, por medio de un electrocardiógrafo, de un osciloscopio, de mediciones directas, de observaciones cualitativas o de datos publicados por algún medio. La modalidad de la experimentación puede ser presencial que consiste en interactuar directamente con la entidad a modelar, la virtual que se refiere a una interacción con el fenómeno por medio de simulaciones utilizando diferentes medios, entre ellos los electrónicos y la discursiva que se realiza con argumentos a partir de los datos obtenidos indirectamente, esto implica una situación en la que el lenguaje natural juega una función importante para relacionar los datos con el fenómeno. La experimentación es una fase necesaria para modelar, no es posible modelar un fenómeno sino se interactúa con él, ya que ésta trae consigo características propias que dejan huella en la forma de modelar.

El acto de modelar

La experimentación no es suficiente para establecer la modelación, alguien que experimenta no necesariamente modela. La experimentación plantea la consideración de dos entidades que son el fenómeno y los datos obtenidos en la interacción, emergiendo de dicha interacción los diversos referentes matemáticos de los fenómenos. Sin embargo, para considerar que se está modelando se requiere de articular las dos entidades con la intención de intervenir en una de ellas a partir de la otra, esta característica es lo que define que una práctica sea de modelación. Dicho con otras palabras, el acto de articular las dos entidades con fines de intervención es lo que se constituye en una práctica de modelación y el carácter de dicha intervención es de diferente índole, puede ser desde la predicción, el diagnóstico o la validación de algún ente teórico.

La segunda fase de la modelación está guiada por una intención y una práctica, llámese a esta actividad articular para predecir; unir para diagnosticar o analizar; poner en armonía los datos obtenidos con sensores y un fenómeno de donde fueron obtenidos, para decidir si mi dispositivo está funcionando correctamente. En el momento en que los actores utilizan los datos obtenidos de la experimentación, para intervenir en el fenómeno se está ejerciendo la modelación y el fenómeno se convierte en lo modelado y los datos en el modelo.

Los entes que se articulan con los fenómenos pueden ser entre otros numéricos, gráficos, pictóricos, el lenguaje natural, ecuaciones algebraicas y/o diferenciales, etc. El proceso de articulación es un proceso interactivo, se propone algún modelo y se interviene con él al fenómeno, se propone otro y se vuelve a intervenir. Por eso la práctica que guía esta fase es la optimización de las herramientas y una de esas herramientas es el uso de software para simular en ambientes virtuales aquellos fenómenos, que por su complejidad y falta de equipo no es posible reproducirlos experimentalmente en un laboratorio físico. Si no tenemos los instrumentos necesarios para investigar la modelación de fenómenos como es ley de Coulomb o la ley de Gravitación Universal, entonces el trabajo en un Laboratorio Virtual de Ciencias (LVC) es lo más acertado (López, 2010).

De lo anterior dicho, usando el LVC montamos el experimento para estudiar la ley de Coulomb, la cual servirá para modelar vía la experiencia y el uso de la analogía el fenómeno de la Gravitación Universal. Los datos obtenidos con el LVC se les proporcionaron a tres grupos de estudiantes en el Conalep Acapulco II, formando equipos de cinco en cada grupo antes de ser sometidos al laboratorio virtual, obteniendo los siguientes resultados parciales:

Situación Fase I

Colocamos dos cargas a una distancia d fija. Medimos la fuerza F entre ellas y la registramos en la siguiente tabla:

Distancia entre las cargas		*Fuerza entre las cargas*
Q_1	Q_2	*F*
10	20	45
10	40	90
10	60	135
10	80	180

Discusión: ¿cuál será la fuerza si se colocan Q_1=10 y Q_2=5?

Respuesta consensada:

$$K \cdot \frac{(Q_1)(Q_2)}{R} = 9\times10^9 N \quad \frac{(10)(5)}{(6.3246)^2}$$

$$F = 11.25 \times 10^9 N \quad \frac{50}{40.006}$$

Situación Fase II

Colocamos dos cargas a diferente distancia entre ellas. Medimos la fuerza F entre ellas y la registramos en la siguiente tabla:

Distancia entre las cargas	*Fuerza entre las cargas*
d(cm)	*F*
0.1	180
0.2	45
0.3	20
0.6	5

Discusión: ¿cuál será la fuerza si se colocan las cargas a una distancia de 0.5 cm?

Respuesta consensada:

$$q_1 = \frac{k \times q_2}{r^2 \times F} \qquad q_1 = \frac{9\times10^9 \times q_2}{(0.1)^2 \times 180} = \frac{9\times10^9 \times q_2}{0.01 \times 1.80}$$

En ambos casos los resultados son parciales en el proceso de modelación, no están completos, intentan modelar el fenómeno haciendo uso de la experiencia obtenida en algún curso de física para aplicar la ley de Coulomb, los resultados de los demás grupos fueron muy semejantes, no lograron obtener otros modelos como el grafico. Por razones de espacio en este reporte solo mostramos el resultado inicial de nuestra investigación en la cual estamos teorizando, para construir un acercamiento a nuestra concepción de las prácticas de modelación vivenciadas y tomar como referentes estos resultados hacia la modelación de fuerzas gravitacionales vía la analogía, que es nuestro objetivo final en una segunda parte de nuestra investigación.

La articulación de los modelos con el fenómeno en una red

De lo anterior dicho, podemos decir que los modelos pueden ser muy variados y su articulación con el fenómeno en una red da mayor eficacia a la actividad humana durante la intervención, diversifica la forma de intervenir. Una de las acciones de esta fase (tercera fase) es articular los parámetros de los diferentes modelos con los del fenómeno y sus prácticas. La conformación de diferentes modelos con el fenómeno en una red, articulando sus parámetros, esta acción es una fase de la modelación. Es así que proponemos en la modelación a la interacción con el fenómeno, el acto de modelar y la construcción de modelos, la conformación de una red de modelos con el fenómeno y a la analogía.

La analogía

En Méndez (2008) se relata cómo es que los estudiantes construyen la red de modelos de lo lineal a partir de la modelación de la elasticidad de un resorte, al intentar modelar con la misma red otro fenómeno (cuarta fase). Es posible que los actores conformen una red de modelos con un determinado fenómeno, más ésta no será estable hasta que salga del fenómeno, la red de modelos no será estable hasta que no se establezcan analogías con otros fenómenos. Por tanto la modelación es una práctica que al ejercerse involucra otras prácticas para la construcción de herramientas matemáticas, esto significa que la modelación está conformada por una red de prácticas y herramientas matemáticas, en donde emerge como herramienta auxiliar la experiencia. La experiencia de la modelación en el fenómeno original es la base para establecer la analogía.

Hemos considerado algunas prácticas científicas de fenómenos que presentan un cierto isomorfismo, ya que comparten la misma estructura matemática. La idea matemática de isomorfismo, cuya palabra proviene del griego *isomorfos* que significa *igual forma*, es aplicable a la estructura de fenómenos que tienen un comportamiento semejante, aun cuando se trate de fenómenos totalmente distintos, y es esa característica lo que hace posible en las practicas científicas la modelación de los mismos, un ejemplo de ello es lo presentado por Paul E. Tippens (profesor de Física en Southern Polytechnic State University) en su diapositiva Tippens_fisica_7e_11ª, muestra una tabla comparativa entre los parámetros del movimiento lineal y circular, en ella puede visualizarse un isomorfismo en los modelos matemáticos, esto permite ver una cierta analogía en los modelos matemáticos de los dos tipos de movimientos y que pueden ser distintos en su estructura física de los movimientos.

Movimiento lineal	Movimiento angular
$s = \bar{v}t = \left(\frac{v_0 + v_f}{2}\right)t$	$\theta = \bar{\omega}t = \left(\frac{\omega_0 + \omega_f}{2}\right)t$
$v_f = v_0 + at$	$\omega_f = \omega_0 + \alpha t$
$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
$s = v_f t - \frac{1}{2}at^2$	$\theta = \omega_f t - \frac{1}{2}\alpha t^2$
$2as = v_f^2 t - v_0^2$	$2\alpha\theta = \omega_f^2 t - \omega_0^2$

Comparación de parámetros lineales contra angulares.

Esta característica la hemos considerado para el diseño de las prácticas de modelación de fenómenos físicos. En nuestra investigación creemos que los actores pueden llegar a establecer

ciertas analogías, si inducimos en el proceso de modelación la investigación de qué isomorfismos o características presentan en su estructura matemática los fenómenos de interés, solo por mencionar algunos ejemplos en donde puede darse tal situación, es el movimiento pendular y el angular, las fuerzas gravitacionales, fuerzas eléctricas y las fuerzas electromagnéticas.

Nuestro interés está centrado en las fuerzas gravitacionales y electromagnéticas. Por eso, este trabajo está inserto en la línea de investigación de las prácticas de modelación y la construcción de conocimiento matemático, siendo el campo de la socioepistemología el marco teórico donde descansa. Desde esta perspectiva teórica que involucra los cuatro elementos relativos a la *naturaleza epistemológica, la dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza,* que se establecen para la aproximación a la concepción de prácticas de modelación vivenciadas, nos permite construir diseños de aprendizajes mejor contextualizados, por un lado y por otro abre la posibilidad de teorizar, para determinar un proceso que pueda mostrar los distintos niveles alcanzados por los estudiantes en la construcción de modelos matemáticos durante el acto de modelar (Cantoral y Farfán, 2003).

En ese sentido lo que estamos diciendo, es que en el acto de modelar un fenómeno natural o social no siempre se alcanzará el máximo nivel de modelación esperado (modelación completa) sino que, solo se alcanzará un nivel de modelación intermedio, por tanto se construirá un modelo parcial, que refleje lo más cercano posible al fenómeno dado.

De lo anterior expuesto, la metodología base de la experimentación que hemos considerado, es la ingeniería didáctica, por ser una metodología de confrontación en donde hemos asumido el paradigma de la intervención, ya que lo que se observa en el aula se interviene, porque es una metodología de desarrollo, en la que se puede intervenir en el sistema escolar. Por ejemplo, se interviene en los libros, se interviene en los programas de estudio, etc., que son instrumentos de intervención y mediante una validación interna de los resultados obtenemos elementos de predicción.

La experiencia

¿Qué es la experiencia? responder a esta cuestión implica considerar dos vertientes, la primera se enfoca hacia lo cotidiano, en donde la empiria juega su máximo papel, es ahí cuando empieza a generarse conocimiento empírico, que para el común de las personas da sentido a su vida; las personas viven en comunidades interactuando entre sí y con el medio en que desarrollan sus actividades, esto es las prácticas cotidianas, en las que están impresos los modos actuar y de hacer las cosas.

La segunda vertiente se enfoca hacia un conocimiento que está basado en la experimentación científica, ya que éste es el resultado de la investigación y al igual que en la primera vertiente nace en la empírea y que por diversos métodos de comprobación determinan la validez y formalización de los conocimientos que emergen de lo cotidiano. En ese sentido estamos interesados en estudiar las prácticas cotidianas que hacen posible la construcción de conocimiento matemático, particularmente aquellas situaciones en las que se manifiestan las formas del uso de la matemática y de cómo relacionan una idea con otra haciendo uso de la analogía (partiendo de un conocimiento que es considerado válido para relacionar un conocimiento con otro).

La experiencia, que proviene del latín *experientia* tiene diferentes connotaciones. Por ejemplo, significa *conocimiento de la vida adquirido por las circunstancias o situaciones vividas por una persona*, también significa *práctica prolongada que proporciona conocimiento o habilidad para hacer algo*. En ese sentido podemos hablar de que la práctica prolongada de una actividad, propicia la generación de conocimiento, a través de la experiencia previa a dicho conocimiento, esto significa que el recuerdo evocado de las prácticas ejercidas es usado para reproducir y producir conocimiento en términos de una evolución.

En esta investigación en torno a la modelación de fenómenos vía la analogía, sostenemos la tesis de que la experiencia en el uso de la analogía podemos construir conocimiento matemático por un lado y por otro emerge lo que llamamos *moda y costumbres científicas*, ya que la experiencia guarda la *intencionalidad*, mientras que por otra parte, la moda y las costumbres científicas son la *expresión* de la *institucionalidad*, surgiendo así, las *tendencias científicas* en la investigación como un producto de la *evolución* del conocimiento y, por tanto una *evolución* de las prácticas a partir de la experiencia. En ese sentido coincidimos con Buendía (2004).Quién dice:

> *Lo que queremos resaltar es que la intencionalidad es una característica que imprime significado al conjunto de acciones realizado por los grupos humanos; en particular, estamos tratando con grupos humanos organizados que realizan acciones que tienen que ver con la intención de hacer, reproducir y comunicar el conocimiento matemático.*

Estamos planteando una relación entre *experiencia* y *costumbres*, que dan sentido a la *intencionalidad* e *institucionalidad del conocimiento*, mientras que la moda, se refiere al establecimiento de un conocimiento nuevo o modificado, a partir del establecimiento de ciertos principios, a través de la institucionalización del conocimiento y que no va más allá de un cierto contexto en tiempo y espacio, en tanto que las costumbres se refieren a conocimientos que trascienden, ya que estos surgen a partir de los hábitos o modos de hacer las cosas y que dan sentido y significado a las

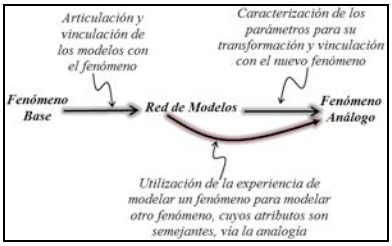
cosas, cuyos principios se rigen por tradición o por repetición adquiriendo fuerza de precepto, lo cual es coherente con la idea de práctica vivenciada.

En nuestro trabajo de investigación la experiencia permite una estructuración discursiva de las prácticas de modelación en el aula, luego si la modelación es ejercida en diferentes comunidades, argumentamos en consecuencia que es una práctica vivenciada y las herramientas construidas durante el ejercicio de la práctica dependen de las intenciones, así como del contexto en el cual son ejercidas, esto significa que la experiencia tiene un papel preponderante en el ejercicio de la modelación, particularmente en las prácticas de modelación vía la analogía.

Cuando hablamos de modelación no pensamos en un modelo matemático comotal, sino como una red de modelos construidos por los actores mediante un proceso de *deconstrucción* del conocimiento matemático, ya queen este proceso los actores recurren a la historicidad epistemológica de los conceptos y de su evolución, mostrando en su actividad procesos de tipo históricos y en cierta forma metafóricos, luego muestran algunas formas del uso de la analogía conscientes o inconscientes cuando tratan de dar solución a un problema planteado de la misma forma en que abordaron otro, que les resulta familiar en su forma. En estas situaciones el razonamiento por analogía ofrece una vía útil para intentar construir modelos durante el proceso de adquisición de nuevos conocimientos que se vayan desarrollando sobre la base de aquello que ya se ha aprendido. Coincidimos con Fernández, J., González, B., Moreno, T. (2005). Quienes citando a Clement (1993) se refieren a:

> *El uso de comparaciones tales como analogías, metáforas, símiles o ejemplos constituye una actividad espontánea de las personas a la hora de dar sentido a lo desconocido. Consecuencia de ello es el papel relevante que han desempeñado las analogías en la construcción de nuevas representaciones científicas. Los científicos las emplean frecuentemente a la hora de elaborar y presentar sus teorías a otros miembros de la comunidad científicas.*

Entendemos que una buena abstracción analógica es aquella que solo proviene de la información necesaria y adecuada, para construir conocimiento nuevopartiendo del conocimiento ya establecido. El siguiente esquema del modelo propuesto muestra el proceso para establecer relaciones de los parámetros fenómenos base para su trasformación y vinculación con los del fenómeno análogo vía la analogía.



El esquema muestra en el proceso de modelación la fase del acto de modelar, en donde se da la vinculación de los modelos matemáticos con el fenómeno (fenómeno base) y se establece la caracterización de los parámetros para su vinculación con los parámetros de otro fenómeno distinto (fenómeno Análogo).

Mostramos un cuadro comparativo de los fenómenos base y análogos de nuestro interés, en el que se puede apreciar los parámetros fundamentales sujetos de abstracción vía analogía, siguiendo la estructura descrita por Lamas (2004).

Principales analogías y diferencias entre los fenómenos gravitatorios y eléctricos.

Fenómeno análogo (Gravitatorios)	Fenómeno base (Eléctrico)
Son campos de fuerzas centrales.	Son campos de fuerzas centrales.
El módulo de la intensidad de campo es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.	El módulo de la intensidad de campo es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.
Consisten en una perturbación del espacio que actúa sobre una masa.	Consisten en una perturbación del espacio que actúa sobre una carga eléctrica.
Las masas son siempre positivas.	Las cargas eléctricas pueden ser positivas y negativas.
Las fuerzas gravitatorias son siempre atractivas	Las fuerzas eléctricas pueden ser atractivas o repulsivas.
Son universales.	Dependen del medio.
Las líneas de fuerza son abiertas y perpendiculares a las superficies equipotenciales.	Las líneas de fuerza son abiertas y perpendiculares a las superficies equipotenciales.
Son campos de fuerzas conservativos.	Son campos de fuerzas conservativos.
Pueden ser uniforme en grandes zonas o regiones.	Sólo pueden ser uniforme en pequeñas zonas o regiones.
Prácticamente no se pueden anular.	Pueden conseguirse regiones de intensidad nula.

$G = 6.67\times10^{-11}\ Nm^2C^{-2}\ ,(G<k)$	$k = 9\times10^{9}\ Nm^2kg^{-2}\ ,(k>G)$
Son muy débiles (G tiene un valor numérico muy pequeño).	Son muy intensos (K tiene un valor numérico muy grande).
Una masa, esté en reposo o en movimiento, siempre crea un campo gravitatorio.	Una carga eléctrica en movimiento, además del campo eléctrico crea también un campo magnético.

Relaciones de semejanza

Del análisis de la tabla comparativa, que muestra las relaciones de semejanza, en la cual se fundamenta la analogía, surge la aseveración de que vincular significa fundamentar las características de un fenómeno, primero en una argumentación matemática, utilizando razonamientos basados en las leyes de la lógica y de los axiomas de los números reales, que permiten probar o demostrar una afirmación para convencer a un cierto grupo de personas pertenecientes a una comunidad especifica de aquellos hechos o ideas que se afirman o se niegan y después considerando estos argumentos establecer un vínculo, a través de una relación de semejanza entre las características más significativas entre los parámetros de los fenómenos considerados con la finalidad de lograr lo que llamamos el acto de modelar tales fenómenos.

A manera de conclusión

1. La modelación matemática de fenómenos naturales o de situaciones en ambientes áulicos, se limita a reproducir en laboratorio de alguna manera el camino que siguieron los científicos, que lograron construir los modelos originales, evadiendo los obstáculos que vivieron durante su construcción. En ese sentido el trabajo docente consiste en mostrar ese camino e introducir algunos de esos obstáculos, con la finalidad de motivar al estudiante como actor principal del proceso enseñanza aprendizaje, para encontrar nuevas formas o caminos para llegar a los mismos modelos, por un lado y por otro desarrollar en los alumnos las habilidades para construir sus propias herramientas, como lo hizo Coulomb con su *balanza de torsión* para medir las fuerzas entre partículas, basándose en el modelo de la ley de Gravitación de Newton o de la analogía que utilizó Maxwell para elaborar su teoría electromagnética; en todos estos casos se encuentran implícita y explícitamente *la experiencia* y *la analogía* en la construcción de estos referentes matemáticos, así mismo en este proceso se encuentra inmerso el desarrollo de competencias referidas a aspectos *conceptuales*, *procedimentales* y *actitudinales*, desde la perspectiva socioepistemológica de las prácticas de modelación vivenciadas.

2. El estudio de las redes de modelos nos permiten comprender y caracterizar conexiones en los modelos, desde el hecho de que surjan figuras a partir de la manipulación de datos en la construcción de tablas, hasta adquirir la experiencia para el análisis de los tipos de modelos y redes de modelos, en el sentido de explicar su origen y comportamiento para la predicción. Podemos decir, que en la construcción y vinculación de modelos matemáticos asociados a fenómenos, es importante considerar las características de los fenómenos y de los datos que se recojan de la manipulación de los mismos, dado que debe haber cierta compatibilidad entre los modelos asociados a ellos, así cuando asociamos diferentes fenómenos a sus modelos y éstos tienen un cierto comportamiento matemático similar, conlleva a establecer criterios para las conexiones y vinculaciones en la construcción de una red de modelos.

3. Para entender la relación entre la modelación y la analogía, debemos saber primero que un modelo en un entorno físico, se construye primero con ideas y después puede concretarse como una fórmula matemática, una gráfica, un mapa, un plano, una maqueta o un experimento, luego la relación entre la analogía y la modelación estriba en los vínculos establecidos a partir de las similitudes encontradas entre las partes de losfenómenos distintos, de ahí su importancia en el aula para la explicación de ciertas teorías científicas; en nuestro caso, la relevancia va más allá de la explicación de estas teorías, pretendemos mostrar de algún modo desde la experiencia cómo es utilizada la analogía para construir conocimiento matemático.

4. Las prácticas de modelación vía la analogía, la experiencia previa a la propia modelación, permite evocar lo que llamamos recuerdos y estos en los distintos entornos, a su vez permiten la construcción de las herramientas, adecuándolas a nuevas situaciones y estas herramientas de que disponen los actores son modificadas, para construir los nuevos modelos y por consiguiente nuevas prácticas vivenciadas, lo cual implica un proceso que se produce por la interacción previa al modelo y su práctica correspondiente, que es la disposición heredada de la experiencia como conocimiento surgido de las prácticas ejercidas, así mismo queda implícita la evolución de la experiencia en las nuevas prácticas de modelación vivenciada

Referencias bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis de Doctorado no publicada. Cinvestav-IPN, México.

Buendía, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales (Un estudio socioepistemológico)*. Tesis de Doctorado no publicada. Cinvestav-IPN, México.

Cantoral, R y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericanas de Investigación en Matemática Educativa*. 6(1), pp. 27-40.

Fernández, J., González, B., Moreno, T. (2005). Hacia una evolución de la concepción de analogía: aplicación al análisis de libros de texto. *Enseñanza de las Ciencias*. 23 (1), pp.33-46. Recuperado de Scrib:http://es.scribd.com/doc/163012349/Analisis-de-textos-y-analogias-2005-23-1.

Lamas, G. (2004). Discusiones sobre la utilización del razonamiento analógico en la epistemología evolucionista. *Filosofia e história da ciência no Cone Sul: 3º Encontro. Campinas*, pp. 446-452.

López, C. (2010). *Las prácticas de modelación virtual, un estudio intercultural.*Tesis de Maestría no publicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero. México.

Méndez, M. (2008). *La experiencia como la evolución de las prácticas: La experiencia de modelar linealmente situaciones análogas.* Tesis de Maestría no publicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero. México.

Tippens P., (2007). *Tippens_fisica_7e_11ª*,[diapositiva de PowerPoint]. Recuperado de slider player: http://slideplayer.es/slide/28797/.

LA CARACTERÍSTICA DE UNA COMUNIDAD DE CONOCIMIENTO DE INGENIERÍA: EL USO DE LA SIMULTANEIDAD DE LA DERIVADA

Leslie Mariel Torres Burgos y Francisco Cordero Osorio
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (CINVESTAV - IPN). México
lmtorres@cinvestav.mx, fcordero@cinvestav.mx

Resumen. La Matemática Educativa ha evidenciado un conflicto entre la obra matemática y la matemática escolar, el cual ha generado tres fenómenos asociados al discurso Matemático Escolar (dME). Estos, reprimen la construcción social del conocimiento matemático; impidiendo la incorporación del conocimiento a la vida del humano y por tanto, la transformación de su realidad. Ante esto, es necesario generar un Marco de Referencia (MR) que incluya los usos de conocimiento matemático (U(CM)) del ciudadano, de manera que se adquieran elementos para el rediseño del dME (RdME). Para ello, se estudian los U(CM), Simultaneidad y Estabilidad, en el quehacer de una Comunidad de Conocimiento Matemático de la Ingeniería Química (CCM(IQ)) en un escenario de trabajo. Específicamente en el diagnóstico del estado de los transformadores eléctricos de la Comisión Federal de Electricidad, región peninsular. Tales U(CM), serán elementos para la construcción de un MR centrado en los usos que contribuya al RdME *desde y con* el ingeniero.
Palabras clave: Uso de conocimiento, Simultaneidad, Estabilidad
Abstract. The Mathematics Education has shown a conflict between the mathematical work and school mathematics, which has generated three phenomena associated with speech Mathematical School. Which repress the social construction of mathematical knowledge, preventing the incorporation of knowledge to human life and, therefore, the transformation of your reality. Given this, it is necessary to generate a frame of reference to include the use of mathematical knowledge of citizens, so as to acquire items for the redesign of the dME. To do this, we study the U(CM), Simultaneity and Stability, in the work of a Community of Mathematical Knowledge of Chemical Engineering in a work setting. Specifically in the diagnosis of the electrical transformers from Federal Electricity Commission, peninsular region. Such U(CM) will be elements for building a MR focused uses that contribute to the RdME *from* and *with* engineer.
Key words: Use of knowledge, Simultaneity, Stability

Introducción

El estatus de la matemática escolar genera un discurso, denominado dME, que rige todos los aspectos de la enseñanza y aprendizaje del conocimiento matemático. Éste no considera, ni conoce, el U(CM) de la gente, por ende, ni de los estudiantes. En este sentido, produce un fenómeno denominado *exclusión de la construcción social del conocimiento matemático* (Soto y Cantoral, 2011).

Asimismo, si se piensa en la matemática del aula, ésta difiere de la matemática que sucede en el cotidiano, lo que conlleva otro fenómeno dentro del dME denominado, *opacidad ante la vida* (Gómez, 2013). En este sentido, el dME es nocivo, lo que implica la necesidad de trastocarlo. Sin embargo, uno de los efectos de los fenómenos mencionados es *la adherencia al dME* (Cordero & Silva-Crocci, 2012), que se refiere a que el docente y en consecuencia el estudiante se adhieren a tal discurso; ninguno se atreve a trastocarlo, condición necesaria para lograr, la reciprocidad de la matemática y el cotidiano en el aula, y de ahí el RdME.

Tales fenómenos dimensionan la problemática del aprendizaje y enseñanza de la matemática. Por eso, la Matemática Educativa ha ampliado su visión para entender la construcción del conocimiento

matemático (CM) y el dME con relación a otros dominios de conocimiento. Enfatiza una visión donde se precisa la resignificación de los CM, por ende, se enfoca la atención a problematizar el uso de la matemática, lo que conlleva generar estudios no en sí del conocimiento sino de su función social (Cordero, 2013). Se trata entonces de formular un MR cuya base es la manifestación de los U(CM) en el dME, en otros dominios y en el cotidiano.

Dada esta problemática, nos preocupa tratar una investigación que exhiba una realidad del conocimiento de la matemática funcional. Por esto consideramos una CCM(IQ) en un escenario de trabajo específico. Por la naturaleza de su trabajo, el Cálculo entra en juego como conocimiento matemático. En ese sentido conviene recapitular brevemente el estatus socioepistemológico del cálculo escolar.

Por ejemplo, un estatus del Cálculo en las instituciones educativas consiste en que el Calculus, en términos generales, es concebido como "la rama de la matemática que trata con la diferenciación e integración". Sin embargo, con esta perspectiva difícilmente se logra alcanzar su objetivo principal: la analiticidad de las funciones. Tal objetivo corresponde a la epistemología del Cálculo, pero, no al currículo escolar (Cordero, 2008).

Pero ¿qué significado tiene semejante hecho para el tema que nos ocupa? Este estatus consiste en centrar la atención en los conceptos, en ese sentido la analiticidad es un concepto más, no se refleja que ésta sea la idea esencial del cálculo (Cordero, 2008). La centración en los conceptos crea necesariamente secuencias insoslayables obscureciendo los significados situacionales, donde se debate entre el funcionamiento y la forma de tales conceptos (Domínguez, 2003 citado en Cordero, 2008). En consecuencia, un sistema educativo basado en ese modelo, no crea marcos de referencia que resignifiquen el conocimiento, no hace de la matemática un conocimiento funcional, soslaya lo humano y a los sentidos de todo saber científico.

Bajo esta idea, estudiamos el U(CM) que emerge de una CCM(IQ) ubicada dentro de la CFE en una situación específica; de manera que podamos entender y evidenciar los usos del conocimiento matemático, con el objetivo de identificar sus elementos, funcionamientos y formas, que contribuyan a la conformación de un MR para el RdME, que expresará el U(CM) *desde* y *con* el ingeniero.

Marco teórico

La teoría que orienta y enmarca el estudio es la Teoría Socioepistemología, la cual tiene como propósito el RdME incorporando una matemática funcional basada en el U(CM), creando un vínculo entre la matemática escolar y la matemática cotidiana. El énfasis, por tanto, se encuentra

en identificar la matemática funcional que tiene presencia durante el actuar del ciudadano, y así obtener una caracterización de la misma (Cordero, 2013).

Proponemos entonces un cambio de visión que nos permita ver al estudiante no como un individuo aislado consumidor de conocimiento, sino como un ciudadano constructor de conocimiento matemático perteneciente a una comunidad. Donde importa quiénes son, la situación y los escenarios específicos en donde estén inmersos, dado que esto dará cuenta de las construcciones que se realicen en dicha comunidad.

Por tal motivo, interesa caracterizar a un grupo de ciudadanos donde sus intereses y características comunes, cosmovisión, entre otras, importan para poder entender lo propio de la comunidad a la que pertenecen. Sin embargo, nuestro interés va más allá, dado que no deseamos caracterizar a una comunidad por sí sola, sino a una comunidad en términos del conocimiento que ocurre y se construye en su interior. Ya que si hay conocimiento existe una comunidad que lo construye, la cual ha sido conceptualizada como "Comunidad de Conocimiento Matemático (CCM)" (Cordero, 2013). Dicha comunidad, se distingue de lo individual, de lo público y de lo universal. En este sentido, una CCM se compone de tres elementos principales: reciprocidad, intimidad y localidad; enmarcados en dos ejes, la institucionalización y la identidad de su conocimiento, lo cual permite identificar lo propio de la comunidad. Con base en ello, se construyó un modelo (figura 1), con el que se estudia el U(CM) que emerge de una CCM, en una situación específica.

Figura 1. Modelo de Comunidad de Conocimiento Matemático (Cordero, 2013).

Así, con el estudio de CCM específicas, se podrán generar propuestas educativas congruentes con las necesidades de los ciudadanos, es decir, desde ellos; mediante la construcción de un MR donde se considere la funcionalidad del CM en el cotidiano.

Método

Existen diferentes dominios de conocimiento, pero nos interesa el trabajo dentro del dominio no científico; esto es, estudiaremos el trabajo de una CC que no *a priori* se dedica a la construcción

de conocimiento, sino a responder a las necesidades de la sociedad. Por lo que la producción de conocimiento es diferente, y por tanto nos interesa mirar cómo se construye CM en dicho escenario, ya que, la identificación del U(CM) permitirá ver la funcionalidad del conocimiento y la forma en que éste vive en el cotidiano de un profesional.

La CCM(IQ) que se estudió, está conformada por dos ingenieros químicos que trabajan en la Gerencia Regional de Transmisión Peninsular de la CFE, en donde realizan análisis químicos a transformadores eléctricos.

Para la obtención de los datos se construyó una epistemología basada en el modelo de CCM, en la que se piensa de manera *a priori*, los usos y conocimientos que se presentan, como la estabilidad y la simultaneidad. Además, para dar cuenta del uso de tales conocimientos en la CCM(IQ) se realizaron tres entrevistas y se observó su trabajo; asimismo, se realizaron video grabaciones, grabaciones de audio y notas de campo.

Resultados

El trabajo que realiza la CCM(IQ) consiste en diagnosticar el estado de los transformadores eléctricos que se encuentran en la península de Yucatán, a través del análisis del comportamiento de las concentraciones de los gases disueltos en el aceite de un transformador; de manera que se anticipen posibles fallas en los equipos y con ello procurar el suministro de energía eléctrica en la región. El método de diagnóstico que emplea la comunidad para determinar las posibles fallas, se centra en la lectura e interpretación de modelos gráficos, los cuales analizan los comportamientos de cada uno de los gases; estos son: Agua, Acetileno, Etano, Etileno, Hidrógeno, Metano, Monóxido de Carbono (CO) y Bióxido de Carbono (CO_2). Cada uno con diferente nivel de concentración. Estos gases, permiten identificar los diferentes problemas que ocurren dentro de un transformador.

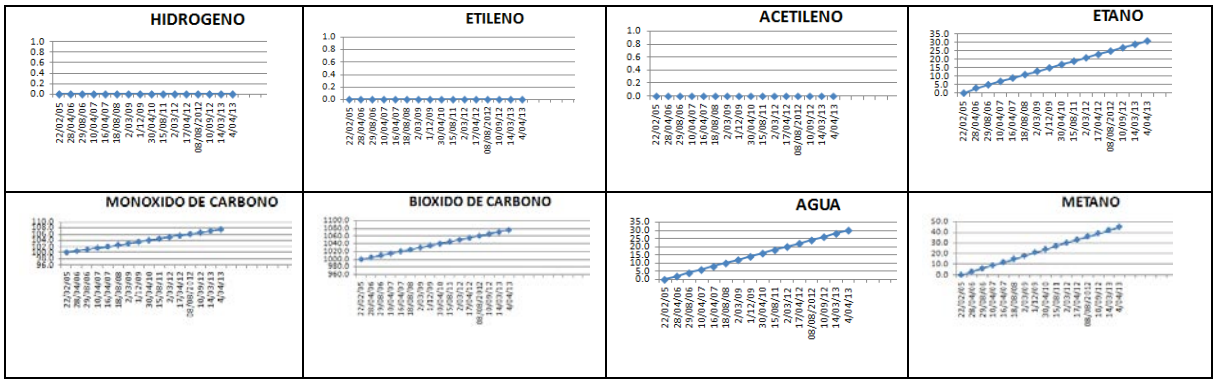
Cabe mencionar, que dentro de los gases, existen algunos denominados gases clave o de falla; los cuales, al incrementarse, indican un problema específico que puede estar presentando el transformador. Estos son: Hidrógeno, descargas parciales; Etileno, puntos calientes y Acetileno, arco.

Así, un transformador en condiciones ideales, no debe presentar niveles elevados de los gases claves; es posible que se formen, pero su concentración debe ser *estable*, es decir, que su crecimiento sea lento y similar al resto de los gases. Los otros cinco, presentan un incremento normal debido al desgaste natural del transformador, sin embargo; para considerarlo normal, dicho incremento debe ser similar en cada uno. Además, el CO y CO_2 son indicadores de una falla

específica; ya que ordinariamente debe haber una diferencia del 10% entre sus concentraciones, por lo que se debe presentar un comportamiento paralelo. Cuando la proporción se rompe, es indicador de que hay una pirolisis de papel y por tanto, hay que darle mantenimiento al equipo. Asimismo, es importante analizar simultáneamente el comportamiento de todos los gases, ya que los incrementos son considerados normales, si el incremento de uno es similar al de los otros.

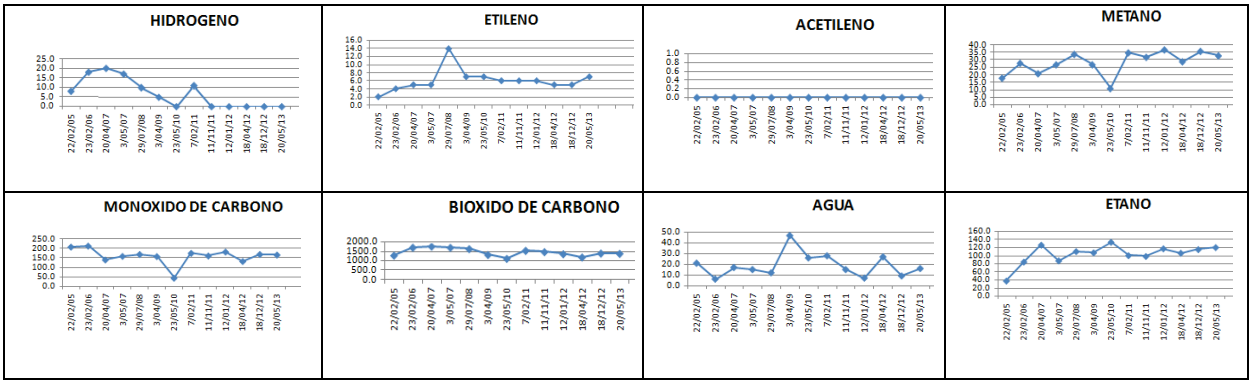
Para el diagnóstico, si el nivel de todos los gases es normal, se sigue un monitoreo ordinario, cada seis meses. En caso de encontrar alguna variación en las tendencias de las gráficas se programa un monitoreo más seguido, de manera que se identifique la velocidad de incremento con el fin de conocer cuan grave es el problema y poder determinar el momento preciso para sacar de servicio al equipo. Con base en lo anterior, se han identificado cuatro situaciones que pueden presentar los modelos gráficos: una situación ideal y 3 reales: sin falla, con falla y extraordinaria. En este escrito y debido al espacio únicamente presentamos las dos primeras (las demás situaciones están reportadas en Torres, 2013), de manera que se ejemplifique el uso de los modelos gráficos en la CCM(IQ), y se muestre el uso de la estabilidad y la simultaneidad.

Situación ideal:



En estas gráficas se observa la estabilidad de los gases de falla, y la estabilidad en el incremento de los otros gases; así como la relación del 10% entre el CO y CO_2. Cabe mencionar que dichas gráficas no son reales, son una simulación de los comportamientos según las condiciones ideales de un transformador, por lo que fechas y niveles de concentración son supuestos, lo que realmente importa es el comportamiento de las curvas y su tendencia, en donde se muestra la estabilidad del equipo.

Sin embargo en la realidad, las gráficas que se obtienen del análisis presentan variaciones debido a cuestiones ambientales, sobrecargas de los equipos, entre otros factores. Por lo que, un conjunto de gráficas reales en las que el transformador no presenta problemas pero si variaciones es:



A pesar de que a primera vista se pudiera pensar que por las variaciones el transformador está presentando algún problema, en el diagnóstico no es así. Por tal motivo, conviene analizar el comportamiento de las gráficas y recordar que éstas no se pueden ver de manera aislada sino que tenemos que considerar las 8 gráficas de manera *simultánea*; en este sentido, el enfoque del análisis está en el comportamiento y la tendencia.

Si consideramos primero las gráficas de CO y CO_2, se puede observar que tienen variaciones y que no en toda la gráfica se puede identificar la proporción del 10%. Además, respecto al comportamiento de los 3 gases clave, únicamente el acetileno presenta el comportamiento ideal, lo que indica que no hay un problema serio dentro del transformador. Sin embargo, el hidrógeno y el etileno presentan variaciones; se puede ver que el hidrógeno al inicio de la gráfica, se incrementa, pero posteriormente disminuye hasta llegar a cero que es su valor de estabilidad; sin embargo, nuevamente se incrementa pero de nuevo recupera la estabilidad, tendiendo a mantenerse estable. Sin embargo, el etileno en ningún punto tiene concentración cero, pese a ello, el ingeniero A menciona:

> *…de acuerdo a las pruebas del laboratorio, el equipo no está presentando un incremento grande en el etileno, de hecho es muy muy bajo, si observamos las pruebas: Desde el 2009 presenta 7 ppm de etileno, un año después en el 2010 sigue con 7 ppm, un año después en el 2011 tiene 6 ppm, un año después en el 2012 está entre 6 y 5 ppm y en la última prueba realizada en mayo de 2013 tiene 7 ppm. Por tanto, en casi 5 años este equipo, se ha comportado muy estable teniendo variaciones no mayores a una parte por millón entre pruebas.*

Del fragmento, podemos inferir la simultaneidad de la derivada, ya que el ingeniero considera cuánto y cómo está variando la concentración del gas; al mismo tiempo esta variación la relaciona con la estabilidad, ya que a fin de cuentas lo que se espera es que el transformador se encuentre estable, para que no ocurra alguna falla.

Además, el comportamiento de los otros gases es importante para determinar con mayor certeza que el transformador se encuentra estable. En las gráficas del metano, etano y agua se observa que las tres presentan muchas variaciones, y la tendencia del comportamiento es a incrementarse lo cual es normal, ya que en ellas se observa el desgaste natural. Al mismo tiempo, la tendencia de las 3 gráficas más o menos tiende a una estabilidad dado que los últimos valores graficados son cercanos, lo que muestra que estos gases también están estables dentro del equipo.

Con base en lo anterior, se determina que el énfasis del análisis está en la estabilidad ya que al mantenerla, los equipos se encuentran trabajando de manera normal. Sin embargo, es interesante resaltar que una vez que la estabilidad se pierde, es necesario mirar las variaciones de las gráficas, sobre todo de los gases de falla, para determinar qué, cómo y cuánto varia, es decir analizar las variaciones simultaneas de cada uno de los modelos; pero al mismo tiempo es necesario realizar la observación de todas las gráficas en simultáneo para poder determinar si los incrementos en las concentraciones se deben a factores externos o a una posible falla interna.

Desde nuestra mirada socioepistemológica, se identifica a las gráficas como modelos de comportamiento, que permiten leer, interpretar e inferir información acerca del estado de un transformador. Además, se muestra cómo la estabilidad es un elemento importante en el análisis; ya que, en todo diagnóstico, se espera determinar que el transformador se encuentra estable, es decir, que el comportamiento tendencial de las gráficas, no presenta variaciones o éstas son similares en todas las gráficas y por tanto el comportamiento es normal. En este sentido podemos considerar dos niveles de estabilidad, uno local y otro global. El primero con referencia a la estabilidad de la concentración de los gases y el segundo, a la estabilidad del transformador.

Sin embargo, a la par que interesa la estabilidad, interesa la variación ya que es importante analizar cuánto varía la concentración de los gases, para poder determinar si existe alguna posibilidad de falla. Es por ello, que entra en juego la simultaneidad; la cual, al igual que la estabilidad se observa en dos niveles: la simultaneidad de la derivada, donde interesa determinar qué, cómo y cuánto varia, esto es, cuando el ingeniero hace un análisis puntual de las gráficas, analiza los niveles de concentración (qué), la velocidad de generación de los gases (cuánto) y al mismo tiempo pone atención a la concavidad de las curvas (cómo) ya que esto permite determinar si puede ocurrir alguna falla. El segundo nivel de la simultaneidad, la simultaneidad de variaciones, es el análisis global en el que se observan todas las gráficas de manera simultánea para determinar si las variaciones en los comportamientos son debido a factores ajenos al transformador, o problemas internos.

Con base en lo anterior, la *estabilidad* y la *simultaneidad* son los principales conocimientos matemáticos que pone en juego la CCM(IQ) en su análisis de modelos gráficos (figura 2).

Estabilidad	•Puntual: Concentración de gases (Comportamiento tendencial) •Global: Estado del transformador (Resultado esperado)
Simultaneidad de variaciones	•Puntual: Simultaneidad de la derivada (Velocidad, Concavidad) •Global: Todos los comportamientos (Predicción)

Figura 2. La estabilidad y simultaneidad en la práctica de la CCM(IQ).

Así, consideramos que la CCM(IQ) se ve envuelta en una situación de transformación, cuya argumentación se centra en la graficación-modelación y en el comportamiento tendencial; dado que el énfasis de los modelos gráficos está en las tendencias y los patrones de comportamiento que evidencían la estabilidad en las concentraciones. Además, se ve enmarcada por la situación de variación, cuya argumentación es la predicción, ya que la principal actividad de su trabajo es predecir posibles fallas para poder atenderlas a tiempo y evitar daños en el equipo. Estas dos situaciones, Aproximación y Variación, no están independientes en el trabajo de nuestra comunidad, sino que la argumentación del comportamiento tendencial, genera herramientas para la argumentación de la predicción; ya que del análisis de las tendencias, se ve la necesidad de analizar las variaciones y con ello, anticipar las posibles fallas que pueden ocurrir en los equipos, ver figura 3.

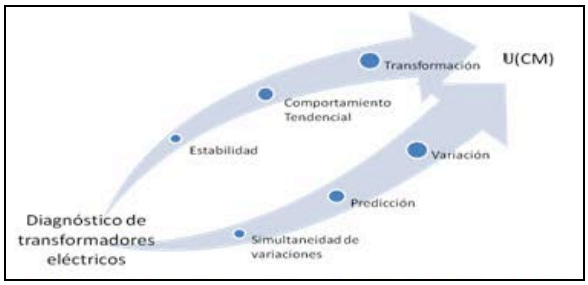


Figura 3. Actividad de nuestra comunidad a la luz de la Socioepistemología.

Conclusiones

Se evidencían dos situaciones generadoras del cálculo, transformación y variación, así como las categorías de comportamiento tendencial y predicción. Tales situaciones han sido reportadas por la teoría Socioepistemológica en Cordero, 2001 y 2008.

Además, el uso de los modelos gráficos que emplea la comunidad, permite el desarrollo de argumentos en torno a la estabilidad y a la simultaneidad de variaciones, donde el foco no son los

objetos matemáticos, sino el desarrollo de argumentaciones de comportamientos tendenciales que permiten la predicción.

Finalmente una crítica que realizamos, es que en el dME se presenta a las derivadas de diferente orden como una iteración, sin atender las variaciones simultáneas que pueden ocurrir en un fenómeno donde implícitamente podemos encontrar todas las derivadas. En nuestro estudio se evidenciaron las primeras dos derivadas.

Agradecimientos

Esta investigación está financiada por CONACYT con el Proyecto Las Resignificaciones del Uso del Conocimiento Matemático: la Escuela, el Trabajo y la Ciudad. Clave 0177368.

Referencias bibliográficas

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* 4(2), 103-128.

Cordero, F. (2008). El uso de las graficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. M. Farfán, J. Lezama & A. Romo (Ed.), Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano (pp. 285-309). México, D. F.: Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C.

Cordero, F. & Silva-Crocci, H. (2012). Matemática educativa, identidad y latinoamérica: el quehacer y la usanza del conocimiento disciplinar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* 15(3), 295-318.

Cordero, F. (2013). Matemáticas y el Cotidiano. Diplomado Desarrollo de estrategias de aprendizaje para las matemáticas del bachillerato: la transversalidad curricular de las matemáticas Módulo III. Documento interno. Cinvestav –IPN.

Gómez, K. (2013). La Socialización de la Función del Conocimiento Matemático: Pluralidad Epistemológica y Opacidad del Cotidiano. Documento Predoctoral, Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV- IPN. México, DF.

Torres, L. (2013). Usos del Conocimiento Matemático. La Simultaneidad y Estabilidad en una Comunidad de Conocimiento de la Ingeniería Química en un Escenario de Trabajo. Tesis de Maestría no publicada. CINVESTAV-IPN. México, DF.

Soto, D. & Cantoral, R. (2011). Exclusión en el discurso matemático escolar. El caso del teorema de L´Hospital. Memoria de la XIV EIME, Zacatecas, México. 82-89.

LAS FUNCIONES Y SUS GRÁFICAS EN EL ESTUDIO DE LA VARIACIÓN Y EL CAMBIO

Silvia Vrancken, Mariana Schmithalter, Adriana Englery Daniela Müller.
Facultad de Ciencias Agrarias. Universidad Nacional del Litoral Argentina
svrancke@fca.unl.edu.ar, schmithaltermariana@hotmail.com, aengler@fca.unl.edu.ar, dmuller@fca.unl.edu.ar

Resumen. En este artículo presentamos los resultados de una experiencia realizada en el marco de un proyecto de investigación cuyo objetivo general es favorecer el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en estudiantes de primer año de la universidad.
Diseñamos y pusimos en práctica una secuencia de actividades que permite, a partir de la construcción y/o interpretación de las gráficas de funciones, dar una descripción cualitativa y cuantitativa de las variaciones y cambios involucrados, favoreciendo la visualización y la utilización de distintas representaciones.
Su resolución permitió que los estudiantes generaran ideas variacionales valiosas para una construcción significativa del concepto de función.
Palabras clave: pensamiento variacional, visualización, funciones
Abstract. In this paper we present the results of an experience carried out in the framework of a research project whose overall objective is to promote the development of variational thought and language in first year college students.
We designed and implemented a sequence of activities that through the construction and / or interpretation of function graphs, it enables a qualitative and quantitative description of the variations and changes involved, favoring the visualization and the use of different representations.
Its completion allowed students to generate valuable variational ideas towards a meaningful development of the concept of function.
Key words: variational thinking, derivative, representations

Introducción

Las funciones describen situaciones diversas y se constituyen en un recurso importante para el estudio de numerosos problemas donde aparece la idea de cambio de una variable con respecto a la otra. Las magnitudes que caracterizan un fenómeno están relacionadas de manera que algunas de ellas quedan determinadas por los valores de las demás. De este modo la noción de variación constituye el origen y la base del concepto de función.

Distintos investigadores (Sosa y Aparicio, 2009; Dolores, Chi, Canul, Cantú y Pastor, 2009) expresan que la naturaleza del concepto de función exige que los alumnos desarrollen ideas y estrategias variacionales. Supone básicamente poner atención en la identificación de qué cambia, cómo y cuánto cambia lo que cambia, a través del análisis de la variación de los valores de las variables que intervienen. Esto permite describir las variaciones (directa, inversa, periódica, constante, creciente, decreciente, etc.) y, consecuentemente, caracterizar los distintos tipos de funciones.

Sin embargo, los mismos investigadores, así como nuestra experiencia docente nos muestran que el estudio de la variación, tanto en la escuela media como en la universidad, es muy limitado. Al

abordar el estudio de las funciones se privilegia por lo general una actividad matemática en la que abundan los procedimientos y algoritmos, poniendo como marco general la noción de correspondencia entre conjuntos. Los alumnos que recibimos en primer año de la universidad recurren habitualmente a la utilización de tablas y fórmulas, presentando dificultades para interpretar y vincular distintas representaciones.

En el marco de un proyecto de investigación que tiene como objetivo general favorecer el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en nuestros estudiantes de Ingeniería Agronómica, decidimos diseñar y poner en práctica secuencias de actividades que favorezcan el aprendizaje significativo de función, articuladas en torno a la idea de variación y cambio.

Como parte del pensamiento matemático, el término pensamiento variacional, se utiliza con la intención de profundizar un poco más lo que se refiere al aprendizaje y manejo de funciones. Se trata de desarrollar una forma de pensamiento que identifique, de manera natural, fenómenos de cambio y que sea capaz de modelarlos y transformarlos.

Cantoral y Farfán (2000) sostienen que para acceder al pensamiento y lenguaje variacional, se precisa entre otras cosas, del manejo de un universo de formas gráficas extenso y rico en significados por parte del que aprende. La visualización juega un papel fundamental en el desarrollo de las estructuras cognitivas del alumno y del pensamiento matemático. Se reconoce su valor no sólo como un apoyo en la enseñanza de la matemática, que favorece la intuición y formación de los conceptos, sino especialmente en el descubrimiento, descripción y justificación de resultados. Farfán y Cantoral (2011) manifiestan la necesidad de propiciar la visualización en las clases de matemática "…con la intención de favorecer diversas formas de representación tanto de ideas como de conceptos y lograr con ello explorar otro tipo de argumentaciones" (p. 11).

En este contexto se resalta la importancia del estudio de las gráficas de las funciones en la construcción de conocimiento matemático relacionado a la variación y el cambio. Suárez y Cordero (2008) destacan la necesidad de diseñar situaciones de aprendizaje que involucren la graficación. Tal diseño debe partir de un conjunto de significados de referencia, propiciando la aparición de razonamientos y argumentaciones.

Lo expuesto anteriormente nos llevó a concebir actividades para favorecer la visualización, centrando la atención en la variación y el cambio, como una manera de dar significado al concepto de función. Presentamos algunos aspectos de la experiencia relacionados con el diseño de la secuencia, su puesta en práctica y una valoración de los resultados.

La propuesta

Para el diseño tuvimos en cuenta una serie de estudios preliminares que nos permitieron indagar acerca de los errores y dificultades relacionados al concepto de función, además del estudio de investigaciones relacionadas con el aprendizaje y la enseñanza de este concepto (Vrancken, Engler y Müller, 2010).

La idea básica fue analizar el comportamiento de las funciones e identificar sus propiedades a partir de sus comportamientos gráficos. Leinhardt, Zaslavsky y Stein (1990) señalan que los procesos relacionados a las gráficas se refieren básicamente a su construcción e interpretación. La interpretación se relaciona a las habilidades necesarias para dar sentido y significado a una gráfica, teniendo en cuenta tanto sus aspectos locales como globales; mientras que la construcción se refiere a la generación de algo nuevo, como el trazado de puntos a partir de datos, una ley o una tabla de valores y el dibujo de una curva.

A partir de la construcción y/o interpretación de las gráficas, las actividades diseñadas requieren la descripción cualitativa y cuantitativa de las variaciones y cambios involucrados. Se busca que los alumnos generen ideas y estrategias variacionales. Esto significa, según Cantoral, Molina y Sánchez (2005), que hagan uso de maniobras, ideas, técnicas, o explicaciones que de alguna manera reflejen y expresen el reconocimiento cuantitativo y cualitativo del cambio en el sistema u objeto que se está estudiando.

Se favorece también la conversión y el tratamiento en otros registros (verbal, numérico, algebraico), lo cual resulta fundamental para el reconocimiento de distintos rasgos característicos del comportamiento variacional de las funciones, permitiendo el desarrollo de procesos cognitivos que van más allá de la memoria y la algoritmia.

La secuencia se llevó al aula con los alumnos cursantes de Matemática II de la carrera Ingeniería Agronómica de la Facultad de Ciencias Agrarias de la Universidad Nacional del Litoral, antes de comenzar con el estudio de la razón de cambio y la derivada. Los alumnos ya habían trabajado en el primer cuatrimestre los contenidos referentes a funciones. Buscamos que hagan uso de sus conocimientos previos, replanteándolos en cada situación propuesta, de manera que tomen nuevos sentidos y se profundice en su significado. Teniendo en cuenta la importancia de las interacciones sociales en la construcción del conocimiento, resolvieron las actividades en grupos de a dos. Al finalizar, se revisaron las distintas actividades promoviendo la discusión con la clase completa.

Presentación de las actividades y análisis de los resultados

Por razones de extensión enunciamos sólo dos de las actividades propuestas y analizamos algunos aspectos de las respuestas de los alumnos, sobre un total de 40 trabajos.

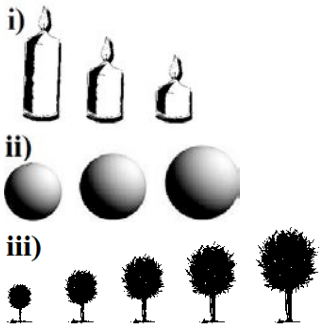
En la primera actividad se presentan representaciones pictóricas de tres situaciones de cambio. A partir de su interpretación, los alumnos deben responder a una serie de preguntas que involucran tareas diferentes. La idea se basa en las actividades presentadas por Sosa y Aparicio en el taller "Estudio de funciones mediante actividades de modelación en ciencias" dictado en el marco de la Vigésimo tercera Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME 23, 2009).

Actividad

I) Observe las situaciones que se presentan en las siguientes ilustraciones. Luego conteste para cada una lo que se solicita.

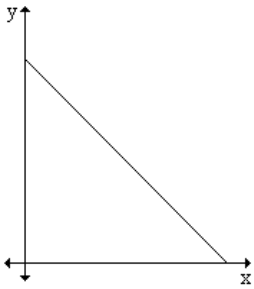
a) ¿Qué es lo que cambia en cada una de las situaciones?

b) Exprese qué cambia y con respecto a qué cambia.

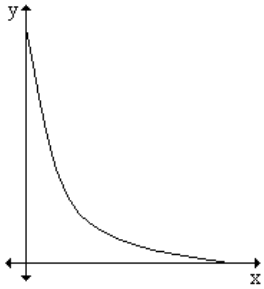


II) Se presentan tres gráficas para cada una de las situaciones. Analice si alguna o algunas pueden corresponder al modelo presentado. Indique qué representan x e y.

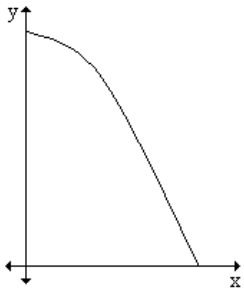
i)a)



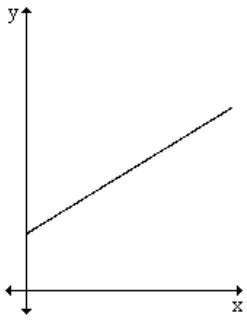
b)



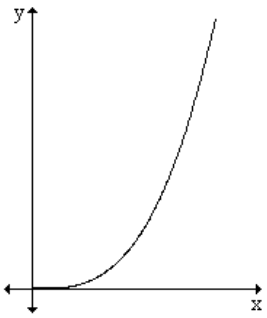
c)



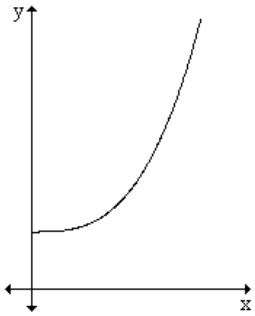
ii)a)



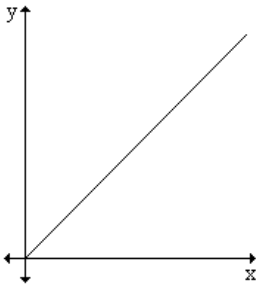
b)



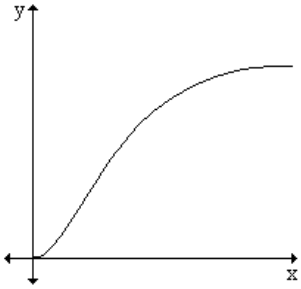
c)



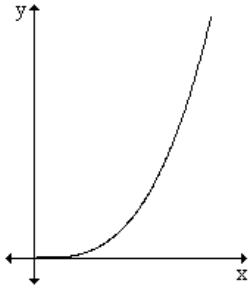
iii)a)



b)



c)



III) Explique qué hace diferente cada una de las gráficas en cada situación.

La primera de las tareas (ítem I) consiste en la identificación de las variables involucradas. Requiere la interpretación del fenómeno y lo que se puede representar en cada uno de ellos.

En el inciso a), una buena cantidad de grupos (19) respondió de manera general para las tres figuras, que lo que cambia es el tamaño. Como respuestas más específicas aparecieron, para la primera figura, cambia la altura de la vela (11 grupos), para la segunda figura, cambia el volumen (10 grupos) y cambia el diámetro de la esfera (seis grupos), mientras que para la última imagen, seis grupos escribieron que cambia la altura de los árboles.

Con respecto al inciso b), 23 grupos respondieron en los tres incisos que lo que cambia, lo hace con respecto al tiempo, mientras que otros diez grupos señalaron que cambia respecto del tiempo al menos para una de las figuras.

A partir de las respuestas de esta primera parte, los alumnos debían, en el ítem II, seleccionar una de tres representaciones gráficas. El análisis está ligado a cómo cambian las magnitudes involucradas, lo que lleva a centrar la atención en su crecimiento o decrecimiento, en la determinación si el crecimiento es o no lineal, y, en este último caso, su concavidad. Leinhardt et al. (1990) expresan que la interpretación cualitativa de una gráfica requiere mirar toda la gráfica o parte de ella, y darse cuenta del significado de la relación entre las dos variables y, en particular, su patrón de variación conjunta.

Analizando las respuestas a la situación i), encontramos que 23 grupos seleccionaron la primera gráfica. Algunas justificaciones fueron: "*La gráfica a corresponde a la situación de las velas, ya que tienen un decrecimiento progresivo constante*", "*La vela se va consumiendo proporcionalmente a medida que pasa el tiempo*".

Pero también una buena cantidad de grupos (9) señaló que la más adecuada es b). El argumento de uno de los dos grupos que justificaron, es el que se presenta en la Figura 1.

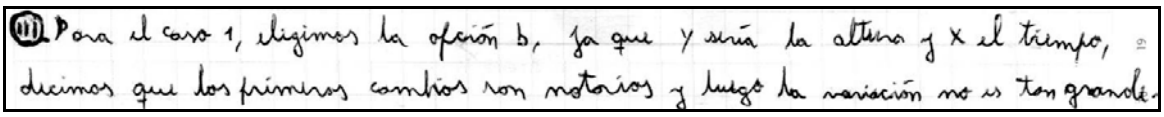

(iii) Para el caso 1, elegimos la opción b, ya que y sería la altura y x el tiempo, decimos que los primeros cambios son notorios y luego la variación no es tan grande.

Figura 1.

Otros 8 grupos eligieron la gráfica c). Una de las explicaciones fue:

Ya que la vela en un principio quema lentamente y luego más rápido.

Observamos que, en todos los casos, dan argumentos con respecto al comportamiento en relación a la situación y a la forma de la gráfica.

Con respecto al ítem III, no fue contestado por ocho grupos y la mayor cantidad hizo referencia sólo al crecimiento o decrecimiento de las gráficas. Sólo siete grupos se explayaron más, señalando un aumento o disminución de tamaño, aceleración, velocidad, crecimiento o decrecimiento lento o rápido. En la Figura 2 se presenta la respuesta de un grupo para la primera situación.

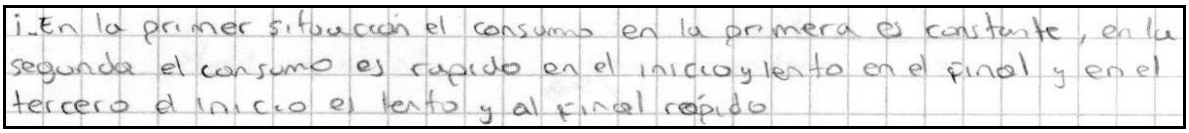

i. En la primer situación el consumo en la primera es constante, en la segunda el consumo es rapido en el inicio y lento en el final y en el tercero al inicio es lento y al final rápido

Figura 2.

Respuestas como estas nos permitieron trabajar en el debate grupal aspectos relacionados a *cómo cambia* un fenómeno cuando se presenta su representación gráfica, qué significa en cada situación que la función crece o decrece y, profundizando un poco más, cómo es el crecimiento o decrecimiento de la curva, lo que lleva al análisis de la concavidad y se relaciona al comportamiento de la velocidad de cambio.

Actividad. Realice una gráfica que le permita comunicar a sus compañeros el movimiento detallado a continuación: Una persona se ubica a un metro de un punto de referencia r y camina a paso constante durante cinco segundos alejándose de r cuatro metros. a) ¿Cuáles son las variables que intervienen en la situación? b) ¿Cómo es el comportamiento de la gráfica cuando la persona se aleja a paso constante del punto de referencia? c) Suponiendo que t representa el tiempo transcurrido y s la posición en determinado instante, el modelo algebraico para la situación presentada es $s(t)=\frac{1}{2}t+1$. ¿Corresponde a la gráfica realizada? d) Analice el comportamiento de la función del inciso c) completando la siguiente tabla y respondiendo las preguntas:

Intervalo $t_1 \le t \le t_2$	$t_2 - t_1$	$s_2 - s_1$	$\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$
$0 \le t \le 1$			
$1 \le t \le 2$			
$2 \le t \le 3$			
$3 \le t \le 4$			
$4 \le t \le 5$			

Determine las unidades en que se expresan los valores de cada columna. ¿Qué representan en términos del problema los valores $t_2 - t_1$ y $s_2 - s_1$? ¿Y los valores de la última columna? ¿Cuál es la interpretación geométrica de cada uno de esos valores? (Ayúdese marcando las distintas medidas en la representación gráfica, por lo menos para uno de los intervalos).

La idea para esta actividad fue tomada de García y Rivera (2009), aunque la consigna fue modificada y adaptada a nuestro contexto y necesidades. Se presenta una situación muy sencilla que corresponde a un movimiento con velocidad constante. Se completa la actividad con un análisis cuantitativo a partir de la expresión algebraica de la función que modela el movimiento, lo que pretende caracterizar la variación en un modelo lineal.

Todos representaron la situación con un tramo de recta, lo que muestra que relacionan la velocidad constante con el modelo lineal. En la respuesta a cómo es el comportamiento de la gráfica, 21 grupos contestaron que es creciente, y los demás trataron de explicar cómo es ese crecimiento: *"crece de manera constante"*, *"crece proporcionalmente"*, *"aumenta constantemente"* o *"representa un movimiento rectilíneo uniforme"*.

Con las distintas preguntas que acompañan la tabla del inciso d) se fomenta la relación entre la noción de pendiente y la razón de cambio. En general, 9 grupos no respondieron ninguna pregunta. En relación a qué representan en términos del problema los valores t_2-t_1, la mayoría de las respuestas se refirieron al tiempo. Diez grupos lo interpretaron como *cambio o variación del tiempo*. Otros grupos respondieron directamente que representa el tiempo transcurrido mientras que algunos se refirieron al intervalo de tiempo.
Con respecto a $s_2 - s_1$, nueve grupos interpretaron que representa *la variación o el cambio de la posición*, otros que representa la distancia o el espacio recorrido en metros.

Para los valores de la última columna las dificultades fueron mayores. Doce grupos dieron respuestas como "cambio de la posición respecto del cambio del tiempo", mientras que sólo cuatro señalaron que representa velocidad.

En relación a la interpretación geométrica, salvo un grupo que interpretó los tres valores, los demás se refirieron sólo al cociente, de los cuales nueve señalaron que representa la pendiente de la recta. En la Figura 3 presentamos las respuestas de uno de los grupos.

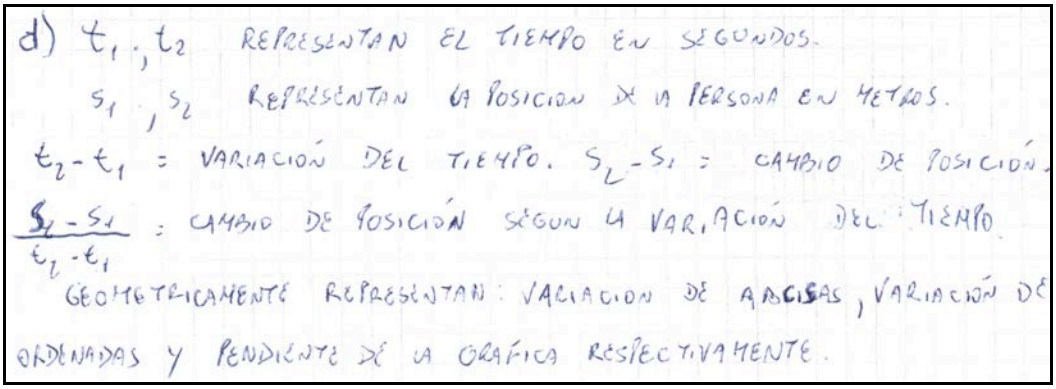

d) t_1, t_2 REPRESENTAN EL TIEMPO EN SEGUNDOS.
s_1, s_2 REPRESENTAN LA POSICION DE LA PERSONA EN METROS.
$t_2 - t_1$ = VARIACIÓN DEL TIEMPO. $S_2 - S_1$ = CAMBIO DE POSICIÓN.
$\frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1}$ = CAMBIO DE POSICIÓN SEGUN LA VARIACIÓN DEL TIEMPO
GEOMETRICAMENTE REPRESENTAN: VARIACION DE ABCISAS, VARIACIÓN DE ORDENADAS Y PENDIENTE DE LA GRÁFICA RESPECTIVAMENTE.

Figura 3.

La respuesta a estas preguntas es importante porque, a partir del procedimiento de obtener velocidades por intervalos y asociar la pendiente con la velocidad los estudiantes pueden deducir características del movimiento describiendo la variación de la velocidad en los distintos intervalos del trayecto y asociándolos a la forma de la gráfica correspondiente. El hecho de que los estudiantes logren asociar la pendiente de los distintos intervalos con la velocidad en cada uno de

ellos, permite el paso de una descripción cuantitativa de la variación a una cualitativa del movimiento.

Reflexiones

El análisis de las producciones nos permitió observar que los estudiantes utilizaron y generaron, en distintos momentos, ideas variacionales. La discusión de las situaciones permitió introducir el estudio de las razones de cambio y nociones como la de crecimiento, concavidad, extremos y puntos de inflexión.

A pesar de que surgieron dificultades, las situaciones propuestas promovieron la visualización, favoreciendo de esta manera una mejor conceptualización de la función. La interpretación de las gráficas les sirvió como punto de partida para trabajar con otras representaciones, identificando lo que cambia (las variables), realizando descripciones cualitativas de cómo cambia y calculando cuánto cambia. En todo momento se favoreció la aparición de argumentos que involucran la forma de las gráficas y su funcionamiento al representar el cambio, propiciando interpretaciones que dan significado a la matemática e influyendo positivamente en el desarrollo del pensamiento variacional de los alumnos, y también de su lenguaje variacional, en tanto fueron capaces de comunicar sus ideas.

El proceso de aprendizaje fue influenciado de manera positiva por la interacción en el aula. Fue en la discusión en los pequeños grupos donde observamos los mejores intercambios entre los alumnos. Consideramos que, con este tipo de experiencias, facilitamos que nuestros alumnos produzcan conocimiento matemático, reflexionen sobre sus producciones y generen teoría sobre dicho conocimiento. Todo esto deriva necesariamente en aprendizajes significativos.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. y Farfán, R. (2000). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. En R. Cantoral (Ed.). *El futuro del Cálculo Infinitesimal, ICME-8. Sevilla, España* (pp. 69-91). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R., Molina, J. y Sánchez, M. (2005). Socioepistemología de la Predicción. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18*, 463-468. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Dolores, C; Chi, A.; Canul, E.; Cantú, C. y Pastor, C. (2009). De las descripciones verbales a las representaciones gráficas. El caso de la rapidez de la variación en la enseñanza de la matemática. *Unión 18*, 41-57.

Farfán, R. y Cantoral, R. (2011). El aprendizaje de las matemáticas desde la investigación en matemática educativa. En R. Farfán (coord.). *El desarrollo del pensamiento matemático y la actividad docente* (pp. 1-28). Recuperado el 5 de marzo de 2012 de http://www.proyectosmatedu.cinvestav.mx/situaciones/docs/LIBRO_DPM_2011.pdf.

García, L. y Rivera, M. (2009). Un acercamiento a la variación por estudiantes de nivel medio superior y superior, basado en la modelación del movimiento. En P. Lestón (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22,* 755-764. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Leinhardt, G. Zaslavsky, O. y Stein, M. (1990). Functions, graphs and graphing: Tasks, learning and teaching. *Review of Educational Research 60*, 1– 64.

Sosa, L. y Aparicio, E. (2009). Interactuando con el concepto función en situaciones de modelación. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22,* 551-560. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Suárez, L. y Cordero, F. (2008). Elementos teóricos para estudiar el uso de las gráficas en la modelación del cambio y de la variación en un ambiente tecnológico. *Revista electrónica de Investigación en educación en ciencias, 3(1),* 51-58. Recuperado el 07 de febrero de 2013 de http://www.scielo.org.ar/scielo.php?pid=S1850-66662008000100005&script=sciarttext.

Vrancken, S.; Engler, A. y Müller, D. (2010). Exploración de las concepciones de nuestros alumnos sobre variables, funciones y cambios. En H. Blanco (comp.), *Acta de la VIII Conferencia Argentina de Educación Matemática,* 320-328. Buenos Aires: SOAREM. Sociedad Argentina de Educación Matemática.

EL USO DE TÍTERES EN MATEMÁTICAS

Marcela Ferrari Escolá
Unidad Académica de Matemáticas-Universidad Autónoma de Guerrero. México
marcela_fe@yahoo.com.mx

Resumen. En este reporte discutiremos el uso de la díada: títeres-matemáticas en ámbitos no escolares donde lo estésico y matemático se entrelaza sutilmente en el desarrollo de las obras de teatro guiñol. Analizaremos entonces, inmerso en el impacto emocional del títere, los argumentos, gritos, zapateos de pequeños de tres años disparados por la obra María y el lobo, en la cual, contar y localizar son dos prácticas presentes. Desde la socioepistemología, reflexionamos el entretejido: *arte* como práctica social donde emerge el títere, siendo su uso la comunicación y resguardo de objetos culturales, y *contar*, práctica cuyo basamento primario es el número.
Palabras clave: preescolar, conteo, títeres, difusión
Abstract. In this report we will discuss the use of the pair: puppets - mathematics in not school areas where esthesic and mathematician interlaces finely in the development of the plays of puppets. We will analyze, immersed in the emotional impact of the puppet, the arguments and shouts of three years old children shot by the work Maria and the wolf, in which, to count and to locate are two present practices. Under the socioepistemological approach, we think over the interwoven one: art like social practice where it emerges the puppet, being his use the communication and security of cultural objects, and to count, practice whose primary basement is the number.
Key words: Pre-school, count, puppets, diffusion

Introducción

Según Charlot y da Silva (2013, p.49), varias investigaciones, particularmente francesas, evidencian que en el proceso enseñanza/aprendizaje las prácticas escolares, aún vigentes, permiten visualizar que la escuela no enseña "el saber" sino objetos escolares que produce, ya sea por transposición (Chevallard, 1991) o por creación de aquellos que no existen fuera de ella (Martinand, 1998, citado en Charlot y da Silva, 2013 p. 49). Comentan, en su investigación, que la escuela pretende enseñar los contenidos y actividades de las matemáticas, pero esa no es la demanda de los estudiantes, reconociendo tres opciones de este desfase que provoca fracaso y sufrimiento de los actores (estudiantes y docentes). La primera, la "conservadora" que busca imponer la lógica de la escuela y que lleva a los estudiantes más frágiles al fracaso. La segunda, la "populista" que pretende enfocar el acto de enseñanza-aprendizaje en el propio alumno (una matemática concreta, práctica, familiar) fundamentándose en que se aprende sólo lo que tiene sentido y en el caso de las matemáticas, aquellas donde se percibe su utilidad actual y futura. La tercera, aquella que intenta definir el sentido de la matemática más allá de la vida cotidiana sin encerrar la enseñanza con situaciones artificiales seudoconcretas (p. 64).

La socioepistemología, marco teórico que sustenta este trabajo, se adhiere a la tercera postura, abonando la discusión desde su mirada sistémica, poniendo énfasis en las prácticas sociales asociadas a un conocimiento en específico y en cuyo ejercicio emerge, cuestionándose sobre

explorar y entender cómo los seres humanos construyen conocimiento matemático, en tanto se construyen, cómo desarrollan una manera matemática de pensar en tanto su uso y funcionalidad.

En 2002 se publica en México, en el Diario Oficial de la Federación, el Decreto por el cual se aprueba la obligatoriedad de la Educación preescolar, pasando así a formar parte de la Educación básica, encontrando entre sus afirmaciones que: "*La atención de niños procedentes de familias pobres, con padres que tienen escasa o nula escolaridad, y con las tradiciones y prácticas de crianza distintas a las de familias de sectores medios -que tradicionalmente habían sido las usuarias del servicio- implica un conjunto de retos pedagógicos para las prácticas educativas consolidadas durante las décadas en que se constituyó la identidad de la educación preescolar*" profundizando la idea en párrafos posteriores "*La educación preescolar cumple así una función democratizadora como espacio educativo en el que todos los niños y todas las niñas, independientemente de su origen y condiciones sociales y culturales tienen oportunidades de aprendizaje que les permiten desarrollar su potencial y fortalecer las capacidades que poseen*" [1].

En el Programa de Estudios para la Educación preescolar (2004) se expresan las competencias que se esperan que los niños desarrollen como resultado de tres años de instrucción, teniendo como finalidad principal propiciar que los alumnos integren sus aprendizajes y los utilicen en su proceder cotidiano. El programa tiene un carácter abierto, lo que significa que la educadora es responsable de establecer el orden en que se abordarán las actividades propuestas para este nivel educativo, y seleccionar o diseñar las situaciones didácticas que considere convenientes para promover las competencias y el logro de los aprendizajes esperados. Considera también que "*al ingresar a la escuela, los niños tienen conocimientos, creencias y suposiciones sobre el mundo que los rodea, las relaciones entre las personas y el comportamiento que se espera de ellos, y han desarrollado, con diferente grado de avance, competencias que serán esenciales para su desenvolvimiento en la vida escolar. A cualquier edad, los seres humanos construyen su conocimiento; es decir, hacen suyos saberes nuevos cuando los pueden relacionar con lo que ya sabían* [1].

Particularmente en el desarrollo del pensamiento matemático, encontramos que se espera que:

> "*Usen el razonamiento matemático en situaciones que demanden establecer relaciones de correspondencia, cantidad y ubicación entre objetos al contar, estimar, reconocer atributos, comparar y medir; comprendan las relaciones entre los datos de un problema y usen estrategias o procedimientos propios para resolverlos*". [1]

Interesante observar la coincidencia de este párrafo con el pensamiento de Bishop (1998), quien reconoce seis actividades diferentes e importantes que realizan todos los grupos culturales y que

sientan los cimientos del conocimiento matemático de cada una de ellas, a saber: *contar, medir, localizar, dibujar, explicar, jugar*.

La actividad que nos interesa particularmente en esta investigación es la de **contar**, es decir, de aquellas actividades relacionadas con la pregunta: "¿cuántos?, en todas sus formas y variantes. Práctica de la cual emergen los números, los métodos de cálculo, los sistemas numéricos, la forma gráfica de los números, métodos numéricos, etc. Bishop (1999), menciona que una buena recopilación de investigaciones sobre matemática desarrolladas en ciertas culturas fue realizada por Gerdes (1996) y Barton (1996), reportando por ejemplo que en Papúa Nueva Guines y Oceanía existen más de 200 sistemas distintos para contar, algunos usando las partes del cuerpo u otros varillas y base 2 o 5. También interesante la investigación de Harris (1980, citado en Bishop, 1999) con aborígenes australianos, donde se reporta que surge la actividad de contar aunque no exista la necesidad de números muy grandes, llegando sólo hasta 30, o la de Zaslavsky (1973, citado en Bishop, 1999) en África, sobre los nombres de los números, ya que existen diversas formas de hacerlo en los más de mil lenguajes en África. Se reportan también diferentes maneras de sumar, restar, multiplicar y dividir, todas operaciones que dan el resultado correcto. Coincidimos también con Bishop respecto a que:

> *contar es una actividad firmemente relacionada con las necesidades vinculadas con el entorno y está sujeta a diversas presiones sociales. Está estimulada por los procesos cognitivos de clasificar y buscar pautas y, al mismo tiempo, influye en estas actividades; además, es evidente que ofrece muchas ideas para nuestra búsqueda de "universales" culturales de las matemáticas* (Bishop, 1999, p. 48).

En nuestra investigación son dos las prácticas sociales que nos interesa entrelazar, ambas surgidas fuera de la escuela. Una, la *práctica de contar*, como aquello que norma el uso de los números, y por ende les da forma y funcionalidad; la otra, el *arte*, particularmente el teatro de títeres, preparándonos para lo estésico, es decir, a la sensibilidad o condición de abertura, permeabilidad o porosidad del sujeto al contexto en que está inmerso (Mandoki, 2008).

Hablar de contar, implica reflexionar sobre la construcción del número, su uso y funcionalidad. Varias son las investigaciones de corte cognitivo que buscan explicaciones sobre la compleja construcción del número, tal como las reportadas por el grupo de Piaget en los sesentas, donde la seriación y clasificación son el basamento para tal desafío. Mencionan Piaget e Inhelder (1969) que no puede asegurarse que el niño posee el número por el mero hecho de que haya aprendido a contar verbalmente. No se podría hablar de número operatorios antes de que se haya construido una conservación de los conjuntos numéricos, con independencia de las disposiciones espaciales.

Desde su punto de vista el número resulta, ante todo, de una abstracción de las cualidades diferenciales, que hace a cada elemento individual, equivalente a cada uno de los otros, elemento clasificable y al mismo tiempo seriable.

Por otro lado, hablar de títeres nos remite al juego, a la expresión artística, a la creatividad en un mundo donde lo titiritesco propicia el transferir a un objeto inanimado nuestra propia voz (Palomas, 2002; Tillería, 2003; Rogozinski, 2005; Szulkin y Amado, 2006), permitiéndonos escapar de nuestra propia realidad, de aquella que nos aprisiona; dando paso a la estesis como aquella manera de hablar de lo sensible, de la significancia, de los procesos que involucran a un ser en tanto sujeto abierto al mundo (Mandoki, 2008) entremezclada con la semiosis en tanto proceso de intercambio de significación y significancia. Firnkel (1980) señala, por su parte, que "los títeres posibilitan a los niños proyectarse e identificarse con ellos pues permiten situarse en un plano de intersección entre lo lúdico y lo real. El títere al cobrar vida en manos del titiritero se transforma en un objeto intermediario" (Citado en Santa y García, 2008, p 17).

En efecto, el títere en su uso escolar es un relevante recurso socializador, generador de empatías y emociones, así como un significativo vehículo para la apropiación y construcción de los distintos saberes. Las matemáticas en tanto, estructuradas desde el rigor científico, como aquello que debe ser transmitido, preservado, alejándose cada vez más de sus génesis, de sus primeros argumentos, invitándonos escolarmente a conocerla desde sus síntesis más descarnadas, en general desde las "obligaciones" de saber y de demostrar diariamente que desarrollamos nuestro lenguaje matemático, la mayoría de las veces como aquel discurso externo que se requiere reproducir sin cuestionar ni cuestionarnos, evoluciona en permanente vigilancia disminuyendo quizás nuestro gusto por ellas y aumentando la distancia entre la matemática escolar y la matemática del cotidiano (Arrieta, 2003; Carraher, Carraher y Schilemann, 1991; Chaiklin y Lave, 2001).

Nos interesa entonces, observar al títere como generador del espacio discursivo en escenarios no escolares donde la difusión de la ciencia gana espacio ante lo escolar, y donde la práctica de contar norma la actividad. La metodología es cualitativa, inherente a espacios abiertos, donde las videograbaciones y notas de campo son los elementos que se analizan en búsqueda de evidencias de los argumentos escuchados en los pequeños en el frenesí de la puesta en escena de la obra de títeres María y el lobo así como los gestos y emociones que se perciben en público.

Primeros reportes

La obra que nos interesa analizar y utilizar como disparador de la investigación es: María y el lobo; estrenada en 2004 y la que ha sido diseñada con los elementos clásicos del teatro guiñol, donde las situaciones que viven los personajes emergen de la práctica de contar, entremezclando así, lo

titiritesco con saberes matemáticos. Como todo espectáculo de títeres, al iniciar la música y abrirse las cortinas, todo cambia, nada se repite, el argumento central es el mismo pero los diálogos no, dependen de la armonía entrelazada con cierta tensión entre los titiriteros y los niños, el nexo se transforma y nos transforma, generándose diferentes reacciones.

La obra inicia con una niña llamada María que siembra florecitas en un jardín e invita a los niños a que lo cuiden mientras ayuda a su mamá en la casa. En ausencia de María, aparece el lobo Ferdinando silbando una canción. El lobo se sorprende al ver un jardín tan hermoso. Buen admirador de las flores decide llevárselas a su casa aunque los niños defienden el jardín de María.

Lobo llevándose las flores de María

Al regresar María para regar sus florecitas, percibe que le faltan algunas y pregunta a los pequeños si faltan flores o no, solicitándoles que le ayuden a contarlas. El diálogo se centra en la pregunta: ¿cuántas florecitas tengo? Provocando el conteo repetido jugando con la dupla número-flor. En los pequeños de kínder (salita de 3 años) escuchamos "*el lobo se la llevó*" (niño 1) …. "*el lobo no me hizo caso y se la llevó*"… (Foto 1)… pero ¿cuántas florecitas se llevó el lobo?... y en coro "*una*"… mientras algunos levantan la mano indicando el numeral con su dedo índice (ver Foto 2).

Foto 1.

Foto 2: Gesticulando con los dedos.

María se va llorando a contarle a su mamá que ha perdido una de sus florecitas, momento en que regresa el lobo a llevar más flores a su casa y los niños empiezan a gritar "*noooo*…."…. "*no te "la" lleves*"…. Pues es una la flor tomada por el lobo…Y ante la impotencia de que el lobo no les haga caso… uno de los niños grita agitando sus brazos diciendo: "*hay… otra vez… lobo malo*" (Foto 3).

Foto 3

Continúa la interacción con expresiones como: *Si tenía 5 florecitas y ahora tengo 3 ¿Cuántas se ha llevado el lobo?...* generándose así la necesidad de restar, o reflexionar sobre qué número completa al otro. Exige entonces, entre el alboroto que genera cada vez que aparece el lobo y se lleva alguna flor reconocer los números, así como sumar y restar pequeñas cantidades. El lobo dispara gritos de llamados a María, discusiones con él, zapateos y gestos de desesperación e impotencia… en tanto que la aparición de María genera explicaciones y argumentos, disminución de angustia en el diálogo pautado.

La obra continua y María dice: "N*iños, me avisan cuando vean al lobo… pero griten fuerte para que los escuche*" solicitándoles así a los niños ayuda para atrapar al lobo escondiéndose detrás de las cortinas. Al aparecer el lobo en escena, los nervios se perciben en los gritos, en los gestos y zapateos de algunos. "*ahí está… ahí está…*" desesperados por avisar a María.

Foto 4.

Cuando María regresa atendiendo el llamado de los niños, el lobo se esconde detrás del árbol. Los gritos "*ahí… ahí…*" no dan resultado pues María sigue sin encontrar al lobo… "*pero aquí no está*"… dice María mirando a los niños, a su derecha e izquierda… paulatinamente, ese "*ahí ahí*" se convierte en "*atrás del árbol*"…. "*allá… atrás del árbol*" … "*pero no hay nada aquí, detrás de este árbol*"… dice María al dar la vuelta por el árbol en tanto el lobo se lleva otra flor… "*aquí… aquí… delante… delante del árbol*"… El clásico correteo y desencuentros dan pie a buscar las mejores palabras para ubicar un objeto en el espacio. Nos movemos entonces de contar a ubicarnos en el espacio… y todo en un juego titiritesco… donde los niños están viviéndolo, conversando con los

personajes como si fueran reales… son conscientes de la fantasía pero juegan con ella como si fuera real… Esa es la magia del títere… los niños saben que la voz es del titiritero… pero transfieren su vida al muñeco… y en tanto se introducen en el cuento… defienden al más débil… pelean con el malo… se emocionan cuando María logra rescatar sus flores… han estado contando, sumando, restando, reconociendo números sin estar preocupados sobre "¿qué tengo que decir?"… ¿estará bien?" frases clásicas de los salones de clase.

Conclusiones

Reportando el ámbito discursivo provocado por el entretejido del *arte*, -como práctica social donde emerge el títere, siendo su uso la comunicación y resguardo de objetos culturales- con la práctica de *contar* -cuyo basamento primario es el número- evidenciamos la riqueza argumentativa y emocional establecida, donde reconocer números, contar, realizar pequeñas operaciones aritméticas, defender al débil, discutir antes las acciones incorrectas, guiar a uno para localizar al otro son actividades que consideramos inherentes a la construcción del número en los pequeños.

Esta investigación continúa en búsqueda de constructos teóricos que fortalezcan el análisis de algo tan complejo como divertir y divertirnos, de diseñar el ámbito discursivo y ser diseñados por él ante la imposibilidad de atraparlo, de construir saberes matemáticos en tanto nos construimos.

Notas

[1] Información extraída de la página oficial de la Secretaría de Educación Pública http://www.reformapreescolar.sep.gob.mx/NORMATIVIDAD/DERECHA.HTM

[2] Esta investigación está financiada por CONACYT con el Proyecto Las Resignificaciones del Uso del Conocimiento Matemático: la Escuela, el Trabajo y la Ciudad. Clave 0177368.

Referencias Bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de la modelación como proceso de matematización en el aula.* Tesis de Doctorado. Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN), México.

Bishop, A. (1998). El papel de los juegos en la educación matemática. *Uno. Revista de Didáctica de la matemática 18*, 9-19.

Bishop, A. (1999). *Enculturación matemática: la educación matemática desde una perspectiva cultural.* España: Editorial Paidós.

Carreher, T., Carreher, D. & Schilemann, A. (1991). *En la vida diez en la escuela cero: los contextos culturales de educación matemática.* (Primera edición en español). Madrid, España: Siglo XXI.

Chaiklin, S. & Lave, J. (Comps.) (2001). *Estudiar prácticas. Perspectivas sobre actividad y contexto*. Bs. As., Argentina: Amorrortu editores.

Charlot, B. & da Silva, V. A. (2013). La relación con la matemática de los alumnos de la escuela primaria. Un estudio con niños brasileños. En C. Broitman (Comp.) *Matemáticas en la escuela primaria II. Saberes y conocimientos de niños y docentes* (pp. 47-68). Buenos Aires, Argentina: Paidós, cuestiones de educación.

Chevallard, I. (1991). *Transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Argentina: Aique.

Mandoki, K. (2008). *Estética cotidiana y juegos de la cultura. Prosaica uno.* México: Conaculta-Fonca.

Palomas, S. (2002). *Estrategias metodológicas para la promoción de la salud comunitaria. Los títeres tienen la palabra.* Argentina: Espacio editorial.

Programa de Estudios para la Educación preescolar (2004). Disponible en: http://www.reformapreescolar.sep.gob.mx/NORMATIVIDAD/DERECHA.HTM, y consultado en enero de 2013.

Rogozinski, V. (2005). *Títeres en la escuela. Expresión, juego y comunicación.* Argentina: Ediciones Novedades Educativas.

Santa, E. & García, L. (2008). *Títeres y resiliencia en el nivel inicial. Un desafío para afrontar la adversidad*. Argentina: HomoSapiens Ediciones.

Szulkin, C. & Amado, B. (2006). *Entretelones. Una propuesta para el uso del teatro de títeres como herramienta socio-pedagógica en las escuelas rurales*. Argentina: comunicarte editorial.

Tillería Pérez, D. (2003). *Títeres y máscaras en la educación. Una alternativa para la construcción del conocimiento*. Argentina: Homo Sapiens Ediciones.

EL USO DE LAS FIGURAS DE ANÁLISIS A TRAVÉS DE SUS FUNCIONAMIENTOS Y FORMAS

Mónica Lorena Micelli, Cecilia Rita Crespo Crespo y Gabriela Buendía
Instituto Superior del Profesorado "*Dr. Joaquín V. González*" Argentina
CICATA – Instituto Politécnico Nacional México
monikmathis@gmail.com, crccrespo@gmail.com, buendiag@hotmail.com

Resumen. Este artículo tiene su origen en la detección de dificultades que presentan los alumnos del Profesorado de Matemática al usar figuras de análisis. Una manera de mirar dicha problemática es desde la Sociopistemología. Este marco brinda las herramientas teóricas para poder llevar a cabo, a futuro, un estudio de campo sobre los usos de las figuras de análisis. El concepto teórico de los *usos* se abordará a través de la conjunción entre *funcionamiento* y *forma*, elementos metodológicos que permitirán estudiar las figuras de análisis en la resolución de actividades de geometría.
Palabras clave: figuras de análisis, usos, funcionamiento, forma
Abstract. This article has its origin in the difficulties that are presented by the students at the Mathematics Teachers' Training College when they use figures of analysis. One perspective to this problem is the Sociopistemology perspective. This framework provides the theoretical tools that we will use in the field of study about the *uses* of the figures of analysis. This theoretical concept of the uses will be approached through the combination between *functions* and *forms*. These methodological elements will allow studying the figures of analysis in geometric exercises.
Key words: figures of analysis, uses, functions, forms

Introducción

En este trabajo se presentan los primeros avances de la investigación doctoral en CICATA, IPN. Su origen es la problemática detectada en el aula de Matemática, un fenómeno didáctico que se identificó en la clase de Geometría. Se han percibido dificultades por parte de los alumnos del Profesorado de Matemática en el empleo de las figuras de análisis tanto en construcciones como en demostraciones geométricas. Estas dificultades observadas consisten en la confección y análisis de casos particulares como si fueran generalidades, llegando a respuestas incompletas, como así también, a errores cometidos al momento de interpretar los datos del enunciado y confeccionar la figura de análisis que llevan a soluciones incorrectas. Algunas de estas dificultades fueron mencionadas en otras investigaciones (Siñeriz y Ferraris, 2008; Gal y Linchevski, 2010) que se centran en la resolución de problemas geométricos y no en las figuras como el presente trabajo.

Se entiende por figuras de análisis a aquellos dibujos que se realizan sin necesidad de regla y compás pudiendo presentar imprecisiones pero, aún así, sirven de soporte para volcar en ellos, datos e incógnitas que se desprenden del enunciado con la finalidad de poder establecer relaciones entre ellos de forma visual. Dichas figuras son un registro gráfico y simbólico que permiten trabajar de manera más sencillas. Es así como se convierten en un medio que favorece la reflexión entre los datos conocidos y las incógnitas. En algunos casos, no solo son un soporte para la abstracción sino que también se transforman en parte de la argumentación, siendo ésta de

naturaleza gráfica. Aunque se considera a las figuras de análisis, como herramienta de gran utilidad, su finalidad no es reemplazar a ningún procedimiento aritmético o algebraico, sino que son un medio para organizar los datos e interpretarlos para continuar con el procedimiento de resolución de la actividad.

En este artículo, se hace una presentación del concepto teórico del *uso* en relación a las figuras de análisis, desde la mirada socioepistemológica. La intención es analizar el papel que juegan dichas figuras en la resolución de actividades geométricas. El objetivo de la investigación es procurar reconocer a las figuras de análisis como una herramienta funcional en la clase de Geometría de forma tal que adquieran una presencia explícita en el Discurso Matemático Escolar con una intencionalidad didáctica pues se considera que su rol influye en la construcción de saberes geométricos.

Fundamentos teóricos

Esta problemática observada sobre el empleo de las figuras de análisis en la resolución de diversas actividades de Geometría por parte de los alumnos del Profesorado de Matemática, se analiza desde el marco de la Sociopistemología. Este enfoque teórico explica algunas acciones de "adquisición y de difusión del conocimiento matemático desde una perspectiva múltiple, que incorpore al estudio de la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza" (Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez, 2006, pp.85-86).

La investigación socioepistemológica, según las palabras de Castañeda, otorga "un estatus de constructor del conocimiento matemático al sistema social y a sus actores –que no necesariamente pertenecen a la elite erudita-, admitiendo sus prácticas cotidianas y el saber que de ellas se deriva" (2002, p.31). Dicha aproximación teórica es la conjunción de cuatro dimensiones que se relacionan de una manera sistémica. Esta perspectiva permite abordar con una mirada múltiple y compleja tanto la producción del conocimiento matemático como su transmisión y difusión. La dimensión epistemológica brinda las explicaciones sobre las nociones del conocimiento matemático, mientras que la dimensión cognitiva hace referencia a cómo ese concepto es aprendido. Además, existen otras dos dimensiones que se ponen en juego e interactúan con las anteriores: la dimensión didáctica que se refiere a la manera en cómo ese saber es transmitido, es decir las vías de institucionalización que se dan a través de la enseñanza y la dimensión social que va a matizar a las anteriores: a cómo ese conocimiento se construyó, así también, a cómo se lo transmite y se lo aprende. Estas acciones no se dan de una forma aislada sino que ese saber se

encuentra influenciado por el escenario en el cual surge, de manera tal que lo social y lo cultural va a afectar en su construcción.

Esta perspectiva "no mira a los conceptos y sus diferentes estructuraciones de manera aislada, sino atiende a las prácticas que producen o favorecen la necesidad de tales conceptos" (Cordero, Cen y Suárez, 2010, p.190). Este marco teórico tiene en cuenta al saber en *uso* a través de las *prácticas*. En resumen, en este enfoque "se prioriza la actividad humana contrastando con enfoques teóricos que giran alrededor de objetos matemáticos" (Crespo Crespo, 2012, p.93) reconociéndole, a este conocimiento matemático como construcción social.

En el marco de la Socioepistemología se estudian las figuras de análisis con la intención de revalorizar su presencia y darle un lugar explícito en el Discurso Matemático Escolar ya que se ha detectado que no tienen la intencionalidad de ser enseñadas, ni se incluye su uso en el currículo escolar como contenido procedimental explícito a ser enseñado pero a pesar de todo ello, estas figuras están presente en el aula de Matemática (Micelli, 2010). Solo se emplean como una herramienta sin estudiar el alcance de las mismas y la intención de la investigación es comprender cómo su *uso* influye en la construcción de nuevos conocimientos.

Se reconoce que el *uso* de las figuras de análisis no se encuentra limitado al aula de Matemática sino que las mismas son empleadas en escenarios no académicos, utilizadas por determinados grupos sociales que comparten un oficio (Micelli y Crespo Crespo, 2013). Estas figuras son una herramienta que no solo se emplean en la clase de Geometría sino que forman parte de la actividad humana y en el aula juegan un papel importante a la hora de construir nuevos conocimientos. La intención es resignificar el *uso* de las figuras de análisis para que éstas sean funcionales a los nuevos saberes construidos. Para la mirada de la Socioepistemología, el foco de estudio no se encuentra en el objeto construido a partir de la actividad humana, sino en el papel que juegan las prácticas sociales en la producción de dicho conocimiento, con el objetivo de modelar situaciones para la intervención didáctica (Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez, 2006). Este trabajo se centrará en el estudio de su *uso* en la clase de Geometría, pasando de los objetos a las prácticas que involucren dichos objetos. Se considera que el marco teórico no solo permite ver la problemática en el aula sino que brinda las herramientas teóricas para interpretarla y dar respuestas. Arrieta, Buendía, Ferrari, Martínez y Suárez hacen referencia a "la Socioepistemología como base de reconstrucción de significado" (2003, p.418). Entender a la epistemología a través de la actividad del hombre permite estudiar objetos que no se encuentran definidos en la estructura matemática, pero que sí están presentes si se estudia al hombre haciendo Matemática (Arrieta et. al, 2003).

Los *usos* desde la Socioepistemología

Para comprender qué se entiende por el concepto de *usos*, se han tomado las palabras de Cordero y Flores quienes manifiestan: "el 'uso' es la función orgánica de la situación que se manifiesta por las 'tareas' que componen la situación, y la forma del 'uso' serán la clase de esas 'tareas'" (2007, p.13). Realizar investigaciones basadas en los usos de un saber matemático permite construir marcos de referencias que transformen a la matemática que se da en el aula en una matemática funcional (Cordero et. al, 2010).

En diversas investigaciones (Cordero, 2005a, 2005b, 2006) se establece a la graficación como una práctica social y se establece que "la graficación son argumentaciones del Cálculo" (Cordero, 2006, p.11) y esta práctica se desarrolla a través del 'uso de las gráficas' en prácticas institucionales. Para la presente investigación se han tomado como antecedentes estos estudios sobre el *uso* de las gráficas para luego ser transpuesto los conceptos teóricos que sirven como unidad de análisis al caso puntual de las figuras de análisis.

Usos de las figuras de análisis

Aún teniendo un objeto de estudio diferente, se considera que los trabajos de Cordero aportan elementos teóricos como la dialéctica de *funcionamientos* y *formas* que pueden servir para el estudio de los *usos* de las figuras de análisis. Ambos estudios, sobre gráficas y figuras, comparten la característica que sus objetos de estudio son "un medio que soporta el desarrollo del razonamiento y de la argumentación" (Cordero 2006, p.19). Puede decirse que forman parte de un conjunto de registro gráfico con significados propio y diferentes entre ellas. Estos trabajos presentan una propuesta metodológica que se considera pertinente para estudiar el *uso* de las figuras de análisis en el marco de la Socioepistemología. Estos instrumentos metodológicos son los conceptos de *funcionamientos* y *formas* que se describen a continuación.

Funcionamiento y forma

Para poder acercarse al estudio de dichos *usos* se tomarán los conceptos propuestos en los trabajos de Cordero, como ya se ha mencionado, quien presenta el estudio de las gráficas a partir de la conjugación entre *funcionamientos* y *formas* de las mismas. Se entiende por funcionamiento a "(…) las ejecuciones, acciones u operaciones que desempeñan la gráfica en una situación, mientras que la forma son las clases de esas ejecuciones, acciones u operaciones" (Cordero et. al, 2010, p.199). Por otro lado, Buendía explica: "por funcionamiento, se reconoce la variedad de tareas que le corresponde realizar a una gráfica cuando se analiza qué se presenta a través de ella, de qué informa, para qué está presente" (2011, p.100). Es decir, el rol que desempeñará dicha gráfica en relación a una tarea, mientras que para las formas especifica que son "la apariencia perceptible de

la misma [gráfica] como el hacer del individuo sobre ella" (Buendía, 2011, p.100). La *forma* puede entenderse como las características visibles de la figura realizada como así también las acciones que se realizan y el *funcionamiento* como la tarea que dicho dibujo favorece.

Para esta investigación se considera que estos conceptos teóricos y propios del marco como son: los *usos*, el *funcionamiento* y la *forma* (con su origen en el estudio de las gráficas) pueden ser herramientas teóricas para estudiar el *uso* de las figuras de análisis en la resolución de actividades geométricas. Se espera que el estudio de campo permita dar respuesta, a cuáles son los funcionamientos y las formas propias de las figuras de análisis, para así poder aproximarse a comprender el uso que desempeñan dichas figuras en la resolución de problemas de Geometría.

Estudiar estos elementos permitirá entender en profundidad el *uso* que convierte a las figuras de análisis en un instrumento funcional para el estudiante frente a la construcción de conocimiento matemático presente en la clase de Geometría.

Estudio de casos

La técnica de muestreo seleccionada es trabajar con grupos de clase, con alumnos que asisten al Profesorado de Matemática de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina. Para la recolección de la información se ha pensado diseñar varios instrumentos y se han detectado varias fases en el trabajo debido a que se ha elegido un procedimiento en cadena. Es decir, a partir de un primer instrumento se recogen datos, se profundiza en los resultados obtenidos y a partir de ellos, se confecciona un nuevo instrumento en una etapa posterior para obtener nuevos datos.

En la primera fase se han hecho algunas experiencias exploratorias con la intención de diseñar, luego, un instrumento que permita analizar el *uso* de las figuras a través del funcionamiento y la forma con mayor profundidad. Para este artículo se realiza el estudio de dos casos a modo de ilustración para ser analizados bajo estos conceptos teóricos desarrollados anteriormente en el caso puntual de las figuras de análisis.

Se han seleccionado dos figuras de análisis realizas a la hora de resolver dos tareas por parte de los alumnos ingresantes al profesorado para luego realizar un análisis cualitativo.

Caso A: "Calcula el perímetro y el área de un cuadrado sabiendo que un lado mide 3x-1 cm y el otro x+3 cm."

Caso B: "Demuestra que la longitud de la mediana relativa a la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la mitad de la longitud de la hipotenusa."

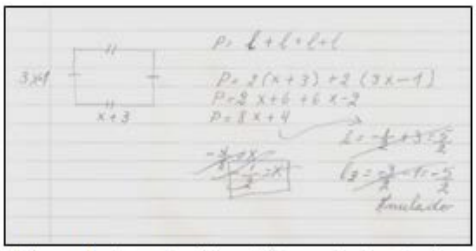


Figura 1: Resolución gráfica y algebraica (caso A)

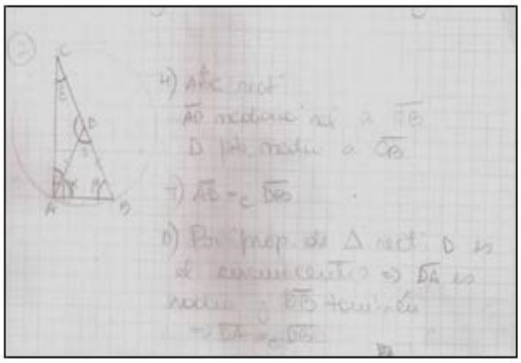


Figura 2: Resolución gráfica y deductiva (caso B)

En el siguiente cuadro se organiza el análisis cualitativo realizado sobre los dos casos presentados.

	Caso A	Caso B
Descripción	Esta es una actividad de aplicación. En la resolución algebraica puede verse que se arrastra el error cometido al construir la figura de análisis. No se toma como error haber confeccionado un rectángulo que no sea cuadrado, sino que la dificultad se presenta al momento de simbolizar los lados consecutivos del cuadrilátero como longitudes diferentes, lectura que se desprende de los códigos gráficos empelados.	Esta es una actividad de deducción. La figura de análisis facilita la demostración deductiva pues en ella se incluyen elementos y se plantean relaciones no explícitas en el enunciado del problema pero que guían la demostración deductiva
Usos	- organización de la información	- organización de la información -deducción de relaciones geométricas
Funcionamientos	-asociación entre dibujo y situación planteada - interpretación la información -síntesis de la información	- interpretación la información - análisis de la información - descripción visual e interrelaciones entre datos y deducciones
Forma	- dibujo a mano alzada - dibujo esquemático - códigos gráficos (congruencia de longitudes) - registro de los datos: cualitativos y cuantitativos	- dibujos con instrumentos geométricos -dibujo esquemático -códigos gráficos (congruencia de longitudes y ángulos) -datos cualitativos -se identifican elementos geométricos -se identifican las relaciones entre objetos o propiedades geométricas - se construye objetos auxiliares (circunferencia)

Cuadro 1: Análisis cualitativo de los dos casos presentados.

En el cuadro puede verse que aún en el ejemplo en donde la figura de análisis no se realizó en forma correcta y que no permitió llegar a solución correcta, se puede analizar la conjunción entre *funcionamiento* y *forma* en el uso de la figura confeccionada. Cabe destacar que no es intención del trabajo solo analizar aquellas construcciones donde la figura de análisis no es una herramienta útil sino que la ida es estudiar su uso de manera global. En el segundo caso, la figura brinda los datos necesarios (conceptos y propiedades geométricas) que luego se reorganizan y son tenidos en cuenta en los pasos deductivos de la demostración.

Reflexiones finales

En este artículo se abordan aquellos conceptos propios de la Socioepistemología que permiten hacer un estudio profundo del *uso* de las figuras de análisis en la resolución de diferentes tareas de Geometría. Se parte de entender a estas figuras como un soporte físico sobre el cual se trabaja para reflexionar, establecer relaciones y extraer conclusiones que permitan llegar a la respuesta de un enunciado planteado. Desde esta perspectiva se considera que es posible estudiar los *usos* de las figuras de análisis en la resolución de actividades geométricas, accediendo a esos *usos* a partir de la conjunción de dos conceptos: *funcionamientos* y *formas*.

Los pasos a seguir es diseñar instrumentos que permitan recoger información sobre el *uso* de las figuras de análisis por parte de los alumnos del Profesorado de Matemática. Se ha presentado dos casos a modo de ejemplo que demuestra que es posible crear instrumentos para abordar el estudio de los *funcionamientos* y *formas* propias de estas figuras en un contexto geométrico. Siendo los funcionamientos y formas, elementos teóricos a partir de los cuales es posible estudiar los *usos* de las figuras de análisis.

Referencias bibliográficas

Arrieta, J., Buendía, G., Ferrari, M., Martínez, G. y Suárez, L. (2003). Las prácticas sociales como generadoras del conocimiento matemático. En L. Díaz Moreno (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 17, 418-422. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Buendía, G. (2011). El uso de las gráficas para resignificar elementos de las ecuaciones diferenciales lineales. En R. Rodríguez, E. Aparicio, N. Jarero, L. Sosa, B. Ruíz, F. Rodríguez, J. Lezama y M. Solís (Eds.), *Memoria de la XIII Escuela de Invierno en Matemática Educativa,* 100-106. México: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa A.C.

Cantoral, R., Farfán, R., Lezama, J. y Martínez, G. (2006). Sociología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Número especial, 83-102.

Castañeda, A. (2002). Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión: una aproximación socioepistemológica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 5(1), 27-44.

Crespo Crespo, C. (2012). Socioepistemología. En M. Pochulu y M. Rodríguez (Eds.), *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricosm* (pp. 91-114), Los Polvorines: Universidad Nacional de General Sarmiento.

Cordero, F. (2005a). El rol de algunas categorías el conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 8(3), 265–286.

Cordero, F. (2005b). La Socioepistemología en la Graficación del Discurso Matemático Escolar. En J. Lezama (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18,* 477-482. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cordero, F. (2006). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: un reporte Iberoamericano*. Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C., 265-286.

Cordero, F., Cen, C. y Suárez, L. (2010). Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el Bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 13(2), 187-214

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* 10(1), 7-38.

Gal, H. y Linchevski, L. (2010). To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. *Educ Stud Math* 74, 163–183.

Micelli, M. (2010). *Las figuras de análisis en geometría. Su utilización en el aula de matemática.* Tesis de Maestría no publicada, Cicata - IPN, México.

Micelli, M. y Crespo Crespo, C. (2013). El uso de figuras de análisis en escenarios no escolares. Su influencia en el aula de matemática. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 26, 1313-1321. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Siñeriz, L. y Ferraris, C. (2009). Heurísticas: un componente del proceso de aprender a demostrar. *Revista de Educación Matemática* 24 (1). Recuperado el 15 de marzo de 2013 de http://www.famaf.unc.edu.ar/~revm/digital24-1/Investigacion24-1/6_Heuristicas.pdf.

PROVA EM DUPLA COMO OPORTUNIDADE PARA DIÁLOGO E SOCIALIZAÇÃO DE SABERES

Marger da Conceição Ventura Viana, Davidson Paulo Azevedo Oliveira y Nilson de Matos Silva
Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP. Brasil
Instituto Federal de Minas Gerais – IFMG/Campus Ouro Preto.
margerv@terra.com.br, davidson.oliveira@ifmg.edu.br, nilson.ufop@gmail.com

Resumen. Discutimos neste trabalho resultados relativos a mudanças metodológicas realizadas pela prova escrita para alunos de uma escola brasileira. Partimos da experiência docente aliada ao estudo de pesquisas científicas que consideram a prova um momento de aprendizado. Porém acreditamos que isso pode ser potencializado por meio de prova escrita feita com duplas formadas por livre escolha dos alunos, mas duas provas distintas para propiciar a cada dupla o diálogo. Além disso, as duplas devem ser escolhidas com antecedência, sendo a nota obtida pela média aritmética das notas de cada um dos alunos.
Palabras clave: Aprendizagem, Avaliação, Prova em Dupla
Abstract. In this paper we discuss the results of the methodological changes made during tests with Brazilian students. We started from the teaching experience combined with a study of scientific proof considering teachable moments. However, we believe this can be enhanced by testing students in pairs being formed by the free choice, and two different tests (for duality) to facilitate dialogue between the studies.Moreover, the pairs were chosen in advance by the students themselves, and the tests are different but the note is the arithmetic mean of the ratings for each student.
Key words: Learning, Assessment, Test in pairs

Introdução

Avaliar os alunos no aprendizado não é só uma preocupação dos professores em exercício mas tema de investigação de vários pesquisadores (Coelho, 2008; Moreto, 2007; Pironel, 2002; Viana, 2002). Entre os instrumentos de avaliação, o mais conhecido é a prova escrita, normalmente realizada ao final de um ciclo de estudo, como um capítulo de livro ou um bimestre letivo.

Embora a prova escrita não seja considerada o instrumento ideal, pois a avaliação deve ser realizada continuamente, como parte integrante do processo de ensino/aprendizagem, em geral é um instrumento avaliativo de uso obrigatório nas escolas. Com isso se justifica a preocupação de torná-la um instrumento de aprendizagem. É com esse objetivo que professores e pesquisadores estudam como realizar provas em duplas de modo produtivo. *Como realizar provas em dupla como oportunidade para diálogo e socialização de saberes?*

Visando ao aprendizado, mudanças metodológicas vêm ocorrendo nas avaliações realizadas por meio de prova escrita, pois se compreende que ela pode fazer os alunos aprenderem. Assim, neste artigo apresentamos e discutimos resultados relativos a estudos e pesquisas científicas na área da avaliação do ensino/aprendizagem em sala de aula, pois a avaliação integra esse processo.

Como um dos autores deste artigo leciona, há mais de uma década, para alunos da Educação Básica em uma escola da rede pública de Minas Gerais, Brasil, esta pesquisa se originou de sua experiência e da necessidade de modificar a prática da prova escrita. Com isso, teve início com observações informais e não documentadas sobre o comportamento dos alunos durante a realização de prova escrita no percurso profissional dos autores. Porém, ao longo de dois anos, tomou corpo, tornando-se formal, na tentativa de verificar o potencial de aprendizado da prova escrita realizada em dupla. Com esse objetivo, buscaram-se na literatura resultados.

O local de realização desta pesquisa foi uma escola da rede pública de ensino de Minas Gerais, Brasil, onde lecionava um dos autores. A população-alvo foram as turmas do Ensino Médio sob sua responsabilidade nessa escola. Com base em resultados encontrados pelos autores pesquisados, a prova escrita foi realizada em dupla.

Como instrumentos de coleta de dados foram utilizados registros das observações feitas pelos pesquisadores, enquanto os alunos realizavam uma avaliação escrita (prova escrita) em duplas e as próprias provas escritas. Também foram realizadas entrevistas individuais semiestruturadas com alguns dos alunos para conhecer como receberam a inovação que foi a prática de prova escrita em dupla.

A análise dos dados foi feita de forma qualitativa, sem desprezar dados quantitativos obtidos. De acordo com os resultados encontrados, foram realizadas modificações na realização da prova escrita em dupla, buscando o aperfeiçoamento.

Prova Escrita em Dupla

Segundo Vasco Moretto (2007), a prova deveria ser um momento privilegiado de estudo na medida em que apresentasse situações específicas que propiciassem também o aprendizado dos alunos, pois para muitos deles era um momento diferenciado da aula e visto como uma punição.

Márcio Pironel (2002), em pesquisa, conclui sobre a relevância da prova em dupla ressaltando haver produção de aprendizagem enquanto está sendo realizada. No entanto relata que uma aluna disse não ser a favor da prova em dupla, pois apenas um dos alunos realizava a prova. Apesar disso, ao final das análises de sua pesquisa, se posiciona a favor da prova em dupla, sugerindo cautela para não se repetir o fato relatado pela aluna.

O fato citado também foi observado pelos autores deste trabalho. Em geral, os alunos dividiam as questões entre si e cada componente da dupla resolvia apenas as que lhe eram atribuídas, sem tomar conhecimento das destinadas ao colega. Essa divisão de tarefas era realizada para otimizar o tempo. Não havia discussão entre as duplas e, quando havia, era apenas troca de questões, não

uma discussão em que houvesse intercâmbio de informações e socialização de saberes. Mas essa interação é importante para a produção de aprendizagem e de conhecimento (Viana, 2002).

A divisão de tarefas pela dupla não coincidia com nossos objetivos iniciais, pois desejávamos que, com o trabalho em dupla, sem que os alunos percebessem, houvesse um encorajamento dos dois em relação a diversas questões de enfrentamento de dificuldades, medos, ansiedades e outras formas de desafios a que estão sujeitos os seres humanos. O objetivo era trazer para os ambientes de aprendizagem e em particular para o momento de realização da avaliação (prova escrita) o encorajamento, a ajuda mútua, para amenizar tensões e enfrentamento das questões propostas e proporcionar melhores condições para aprendizagens durante o processo.

Para Vygotsky apud Oliveira (2010, p.39), "a vida social é um processo dinâmico, no qual cada sujeito é ativo e em que acontece a integração entre o mundo cultural e o mundo subjetivo de cada um." Nesse sentido é que a formação de dupla para a realização de prova pode ser um elemento que contribui para que cada aluno possa, com a tranquilidade gerada pela associação, ter mais controle sobre suas emoções (ansiedade, medo, nervosismo, etc.) e consequentemente apresentar um resultado melhor em termos de aproveitamento.

Ainda utilizando a Teoria da Aprendizagem de Vygotsky, baseada nos processos sócio-históricos, percebemos que o ensino/aprendizagem ou a aprendizagem tem uma convergência para a afetividade, passando pelo campo das emoções. Afirma Oliveira (2010):

> Em Vygotsky, justamente por sua ênfase nos processos sócio-históricos, a ideia de aprendizado inclui a interdependência dos indivíduos envolvidos no processo. O termo que ele utiliza em russo (*obuchenie*) significa algo como "processo de ensino-aprendizagem", incluindo sempre aquele que aprende, aquele que ensina e a <u>relação entre essas pessoas</u>, (grifo nosso) (Oliveira, 2010, p. 59).

A teoria de Vygotsky é dirigida para uma relação professor/aluno que estendemos (por não ser excludente) para uma relação aluno/aluno (a dupla), pois também há uma relação entre aprender e ensinar permeada pelos caminhos da afetividade, visto que a composição da dupla é de livre escolha. Mas não estamos afirmando que não haja aprendizado sem afetividade, porém esta é uma grande facilitadora do processo.

Concordamos com Basso (2008): em relação à prova, cada pessoa tem dela uma concepção, que se formou durante a vida estudantil com influência de família, professor, instituição educacional e dos próprios resultados, promovendo um significado segundo sua visão. Basso (2008) afirma:

> É de se prever que diante de uma avaliação o estudante possa ficar ansioso, nervoso e não conseguir resolvê-la do modo como se esperaria ou se desejaria, pois já construiu emoções acerca da avaliação. Essas emoções, juntamente com as representações, são muitas vezes fruto de um tipo de educação familiar que a criança experimentou e também do medo que é construído em torno de avaliações de qualquer origem. (Basso, 2008, p.71).

Por um lado as emoções podem ajudar e, por outro, atrapalhar o aluno no momento em que realiza a avaliação. No caso de dupla, boa parte dessas emoções (negativas) pode ser superada em decorrência da interação, de forma complementar, entre os componentes da dupla, proporcionando equilíbrio emocional.

Coelho (2008) realizou um estudo sobre o desenvolvimento da prova em dupla, mas em nível universitário, chegando a conclusões positivas em relação às vantagens e à contribuição no processo de ensino/aprendizagem de Matemática. No entanto a solução apresentada por ele, para que não ocorresse divisão de tarefas e até divisão de estudo entre os componentes da dupla, foi a formação das duplas com antecedência de uma semana. Mas (Coelho, 2008, p.28) era preciso que existisse um contrato didático inovador para haver sucesso e aprendizado, pois "os estudantes não aproveitavam as possíveis vantagens do trabalho colaborativo, ou seja, não discutiam antes das provas, estudavam menos para a avaliação tradicional e muitas vezes confiavam em seu parceiro para fazer a prova". Para isso, propôs novo contrato didático, no qual as duplas eram cadastradas com uma semana de antecedência, não sendo permitida a formação de duplas no dia da prova. Além disso, era proibido o contato e discussão entre as duplas e, a qualquer momento, o professor poderia questionar algum estudante sobre a resolução de alguma questão.

Ao concluir seu trabalho, Coelho (2008) afirmou que a avaliação em dupla proposta por ele permitiu melhor apropriação de conhecimentos em comparação com provas realizadas individualmente. No entanto foi observado em uma turma de Cálculo que as duplas dividiam os conteúdos a serem estudados e, com isso, não havia diálogo e aprendizado de uns com os outros. Mas entendemos diálogo com uma finalidade acadêmica, e não da forma corriqueira, proporcionando um momento de socialização, exposição e consequente aprofundamento dos conhecimentos. Diante disso, trazemos este fato para que seja discutido na literatura.

Ainda que um membro da dupla apresente maior domínio de conteúdos e desembaraço para solução de questões, o outro favorece a solução com questionamentos e, por vezes, dúvidas, que também podem ser favoráveis ao crescimento e avanço do aprendizado. Assim, a prova, de acordo com as ideias de Vygotsky, pode ser considerada como um instrumento mediador para a

socialização do conhecimento entre os componentes da dupla. Nesse sentido, acreditamos em prova escrita realizada em dupla, mas não no sentido tradicional. Em nossa perspectiva, segundo os resultados deste estudo, as duplas deveriam ser formadas por livre escolha dos estudantes, mas com duas provas distintas para cada dupla, a fim de propiciar a discussão e o diálogo entre os componentes. Com isso, com base nos resultados relatados, apresentamos nova proposta metodológica para a realização da prova escrita: as duplas são escolhidas, com antecedência, pelos próprios alunos e são apresentadas duas provas distintas.

Proposta Metodológica para Prova em Dupla

Ao longo de dois anos, temos pesquisado e analisado novos métodos para descobrir o potencial da prova em dupla no aprendizado dos estudantes. Atualmente aceitamos provas distintas e notas calculadas pela média aritmética simples das notas de cada um dos componentes. Portanto as duas provas são planejadas de modo que cada aluno resolva a que lhe é destinada, no tempo total estimado, sendo reservado um espaço de tempo para a discussão entre componentes. Acreditamos que é nesse sentido que Pironel (2002) ressalta a cautela que deve existir com a prova, especialmente a realizada em dupla. Além disso, o tempo destinado à discussão determina a interação necessária ao aprendizado, que Viana (2002) afirma ser necessária.

Nessa perspectiva, observou-se que o diálogo e a troca de informações ocorreram, visto que as provas foram elaboradas de modo a não haver tempo suficiente para um aluno resolver sozinho as questões das duas provas, mas para haver diálogo na resolução e, consequentemente, socialização de saberes. Criava-se, pois, certa motivação, que viabilizava o estudo entre os componentes da dupla (por vezes até entre duplas), surgindo uma forma de colaboração, anterior, simultânea e até posterior à realização da prova.

Em ambiente propício para a socialização, provocado pela determinação das duplas antecipadamente, percebemos maior aproximação dos alunos (componentes das duplas), tendo como consequência mais dedicação aos estudos, para que os resultados (que passaram a ser de responsabilidade compartilhada) não os comprometessem de forma negativa.

Neste contexto pode-se tratar a prova e seus efeitos como o instrumento mediador da interação social entre os estudantes, que, antes, durante e após a realização, passam a ter momentos de discussão e desenvolvimento do pensamento em favor dos resultados. A discussão indica um ponto de máxima aproximação/interação durante a prova (observada e anotada pelos pesquisadores).

Objetivando verificar se essa proposta auxiliava na interação e aprendizagem e analisar os resultados sentidos e vistos pela ótica dos alunos, realizamos entrevistas estruturadas (usando

como guia um questionário) com os que realizaram prova em dupla no estilo proposto e prova individual no estilo tradicional. Com isso os alunos puderam expressar opiniões e sugestões sobre a realização da prova em dupla, que apresentamos a seguir.

O que pensam os alunos sobre a prova realizada em dupla

Entrevistas realizadas com alguns dos estudantes nos levam a crer na efetividade e no caráter de aprendizagem que existe na prova realizada em dupla, conforme Moretto (2007) afirma: pode haver troca de conhecimento durante a avaliação. Apresentamos a opinião de dois estudantes, chamados pelos codinomes Marta e Carlos, para garantir a não identificação e a privacidade.

Marta expôs sua opinião sobre as provas em dupla: "é bom porque faz a gente pensar mais, a gente exercita mais… um pode ajudar o outro". Assim, essa fala reforçou a existência da interação, necessária à aprendizagem, que pode ocorrer na avaliação em dupla.

Os dois estudantes tinham opiniões distintas quanto à quantidade de questões e ao tempo disponibilizado para a realização da prova. Marta afirmou: "a gente tem muito pouco tempo de prova e às vezes não dava tempo de ver tudo (…) às vezes, no ano passado não dava tempo de fazer tudo de jeito nenhum". Por ou lado, Carlos respondeu que considerava o tempo suficiente ao afirmar: "era sim… pq os teste não era mto grande. Se tds os prof fizesse isso tava de boa d+" (linguagem utilizada pelo entrevistado).

Sobre haver provas distintas, Marta considerou interessante, pois havia uma preocupação com a própria prova e a do colega. Isso aponta para a importância da interação ressaltada por Vygotsky e enfatizada por Viana (2002).

Em relação à atribuição da média aritmética para a nota da dupla, Marta considerou isso injusto, pois cada um devia ter a nota que merecesse. Por outro lado, auxiliava no trabalho em dupla: "é injusto, mas força a gente a estudar (…) se eu fosse professora, como eu já passei por isso, eu faria do mesmo jeito (…) é injusto, mas eu faria a média das notas porque força a estudar".

Carlos tinha opinião contrária à de Marta: "eu acho ke assim tah bom viu, as notas ano passado dos testes fora no geral boas". E, ao ser questionado quanto à "injustiça" de atribuir como nota a média aritmética da dupla, ele afirmou que não se sentiu prejudicado: "atéke num senti nn.. pq as duplas foram agente msmke escolia, e quando agente msm escolhe agente assume o risco uai".

Considerações Finais

Ainda há muito a ser estudado e discutido em relação a novos métodos de avaliação da aprendizagem em sala de aula. Entretanto consideramos a prova realizada em dupla um dos

caminhos que o professor pode seguir para o desenvolvimento social dos alunos, enquanto aprendem Matemática, pois possibilita interação por meio das trocas que promove.

Um dos aspectos a serem repensados é a duração da prova. Houve controvérsias entre os alunos sobre o tempo disponibilizado ser ou não suficiente para a realização da avaliação em dupla. Portanto é um ponto a ser analisado com profundidade quando se elabora uma prova desse tipo.

Outro ponto delicado é a atribuição da média aritmética das notas a cada componente da dupla. Mesmo que se considere injusta essa atribuição, como disse Marta, auxilia o professor a promover e até mesmo "a forçar" a interação entre os alunos, visando à aprendizagem e ao desenvolvimento pessoal. Nesse sentido, o que Carlos também considera, como a atribuição de notas é uma situação complicada, sugerimos que se assuma o risco da "injustiça" a favor da promoção da aprendizagem de Matemática e do desenvolvimento social do aluno.

Referências bibliográficas

Basso, A. Hein, N. (2008). *Vencendo a inércia na escola*. Pato Branco: Imprepel.

Coelho, P. C. P. (2008). Interagir – uma simples ideia – Grandes resultados: Uma proposta para avaliação de Estatística no ensino universitário. *Unión – Revista Iberoamericana de Educación Matemática* 13, 23-37.

Moretto, V. (2007). *Prova: Um momento privilegiado de estudo, não um acerto de contas.* Rio de Janeiro: Lamparina.

Oliveira, M. Kohl. (2010). *Vygotksy: Aprendizado e desenvolvimento: um processo sócio-histórico*. São Paulo: Scipione.

Pironel, M. (2002). *A avaliação integrada ao processo ensino-aprendizagem de Matemática.* Tese de mestrado não publicada, Universidade do Estado de São Paulo Júlio de Mesquita Filho. Rio Claro, Brasil.

Viana, M. C. V. (2002). *Perfeccionamiento del currículo para la formación de profesores de Matemática en la UFOP*. Tese de doutorado, não publicada, Instituto Central de Ciências Pedagógicas. La Habana, Cuba.

ESTUDIO SOBRE IDEAS MATEMÁTICAS Y SU CONTEXTO SOCIOCULTURAL EN LOS INGRESANTES UNIVERSITARIOS

Silvia Noemí Sanchez, Ana Rosa Pratesi, María Cristina Cardozo, Pedro Daniel Leguiza, Alida Mónica Masachs, Analía E. Almirón y Mariela Sánchez
Universidad Nacional del Chaco Austral. Argentina
silviasanchez@uncaus.edu.ar, anapratesi@hotmail.com, pinky@uncaus.edu.ar, dany@uncaus.edu.ar, alidamonica@yahoo.com.ar,, analia@uncaus.edu.ar, ayelen_mariela@yahoo.com.ar

Resumen. Cada grupo cultural construye un sistema simbólico propio y característico mediante el cual opera el conteo, la medición, el diseño, la localización, la explicación y el juego; se trata de otra matemática, diferente de la matemática científica y académica. Este artículo presenta los avances de una investigación que se propone describir y categorizar las ideas matemáticas de los estudiantes de la Universidad Nacional del Chaco Austral según su pertenencia a diferentes grupos culturales. Se informa acerca de: el origen étnico de los estudiantes ingresantes en el año 2012; las percepciones de los docentes acerca de las condiciones necesarias del aprendizaje de la matemática académica y sobre posibles diferencias en habilidades matemáticas según el origen cultural de los estudiantes, y las características del instrumento aplicado con la técnica de grupo focal que reúne a los estudiantes según su pertenencia a los diferentes grupos culturales.
Palabras clave: ideas matemáticas, estudio sociocultural, comunidad universitaria
Abstract. Every cultural group builds its own characteristic and symbolic system for counting, measuring, designing, locating, explaining and game-playing. At stake is a mathematics that is distinct from scientific and academic maths. This paper presents the authors'ongoing research into mathematical ideas of students at the National University of the Chaco Austral with who belong to distinct cultural groups. The paper discusses the ethnicity of incoming students in 2012, as well as teachers' perceptions of possible differences in student math skills according to the cultural background. It also describes the way students are grouped in focus group according to the cultural groups to which they belong.
Key words: Mathematics ideas, sociocultural study, university community

Introducción

El Proyecto de Investigación titulado "La incidencia de las ideas matemáticas y las nociones sobre la realidad natural del contexto sociocultural en la educación universitaria" tiene por objetivo general: introducir mejoras en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las ciencias formales y fácticas de los estudiantes universitarios mediante el conocimiento y utilización de los razonamientos y de las ideas previas sobre la realidad natural y social propias de la cultura de los sujetos, y, por objetivos específicos: clasificar y caracterizar el conjunto de ideas matemáticas y de la realidad natural que los alumnos presenten, identificar los grupos culturales que comparten sistemas de creencias e identificar y explicar los sistemas de creencias e ideas que actúan como facilitadores u obstaculizadores en el proceso de aprendizaje de conceptos científicos.

Es intención del Equipo de Investigación, proponer, para la enseñanza de las ciencias, estrategias didácticas que consideren las ideas y creencias que los sujetos poseen. Los docentes vinculados con los alumnos que ingresan en la Universidad Nacional del Chaco Austral observamos dificultades en el aprendizaje del conocimiento científico, lo que trae como consecuencia problemas de desempeño en el nivel traducidos en desgranamiento, desarrollo muy lento de sus

planes de estudio debido al fracaso en las evaluaciones, desaliento, entre otros (Sanchez, Okulik, & Pratesi, 2013) (Masachs, Sanchez, Cardozo, & Alegre, 2012). Estos problemas han sido estudiados y cuantificados en nuestra Institución a través del análisis estadístico de los datos aportados por los Cursos de Nivelación y del rendimiento académico de los últimos cinco años (Leguiza, Cheein de Auat, & Almirón, 2011), (Curi et al, 2011).

En un Proyecto de Investigación anterior atendimos a los problemas de aprendizaje de las ciencias a través de la lectocomprensión de textos escritos, acotando el universo del discurso a los estudiantes, sus producciones escritas, sus dificultades y estrategias de lectocomprensión de textos académicos (Curi S. M., Cardozo, Reguera, Palavecino, Sanchez, & Leguiza, 2010). Los resultados aportados por el análisis estadístico y las conclusiones de la investigación realizada nos condujeron ahora a indagar otras causas que condicionan el aprendizaje de los alumnos centrando el interés en las nociones sobre conceptos científicos y las ideas sobre la realidad natural que las personas poseen independientemente de su formación escolar y que inciden favorable o desfavorablemente en el aprendizaje de las ciencias y el desempeño académico de los alumnos.

Las ideas matemáticas son actividades cognitivas, presentes en todas las culturas, que producen una tecnología simbólica con la cual se relacionan con su entorno contando, midiendo, localizando, diseñando, explicando y jugando. Son "otras matemáticas" diferentes de la matemática académica y científica.

La importancia del estudio de estas "teorías implícitas" radica en su potencial utilización al momento de planificar un adecuado proceso de enseñanza que considere los saberes previos de los estudiantes. La educación sistemática debe conocer estas ideas ya sea para desmontarlas en la búsqueda de comprensión de su sentido, ya sea para validarlas y enriquecerlas porque la construcción de un andamiaje significativo de desarrollo de nuevos aprendizajes debe establecerse dialécticamente con los saberes y las prácticas discursivas que los sujetos y sus comunidades han construido previamente.

Este estudio significará un aporte al desarrollo del conocimiento en el campo de las disciplinas científicas implicadas y en la construcción de propuestas didácticas para la enseñanza y el aprendizaje, en particular, para la comunidad educativa de Pcia. Roque Sáenz Peña, y, en general, para toda propuesta de enseñanza que contemple la diversidad sociocultural y los saberes previos de los sujetos.

Comprender la relación que existe entre el significado y las creencias que en la vida cotidiana los alumnos y sus grupos sociales atribuyen a los conceptos científicos, y la forma en que esos mismos conceptos luego interfieren en el aprendizaje de las disciplinas científicas - favoreciendo u

obstaculizando el tránsito de una cultura a otra-. Determinar si se produce una "hibridación léxica" como consecuencia de la convergencia de culturas, creencias y prácticas diferentes que dejan su huella en el lenguaje, evidenciando la transición de una cultura a otra o su prevalencia o extinción. Explicar de qué manera estos significados inciden en el desempeño académico de los estudiantes a través de sus marcas discursivas. En conjunto estas acciones constituyen una tarea importantísima en la comprensión de cómo operan las ideas previas, las creencias, en definitiva, la cultura de pertenencia de los sujetos en la adquisición de conocimientos científicos.

Por último, este estudio pretende no solo optimizar las prácticas docentes y el aprendizaje de las ciencias aportando una interpretación más amplia del complejo proceso de enseñanza y aprendizaje, también es una contribución a los estudios culturales y sociales de la región chaqueña ya que la valoración de los saberes alternativos es necesaria para la discusión sobre su inclusión en el currículo escolar. Entendemos que el lenguaje de las matemáticas y de las ciencias no es neutro ni meramente técnico y el reconocimiento de los modos de razonamiento de los "otros" implica elegir por una política del conocimiento que subvierta la política hegemónica (Knijnik, 2013).

Acerca de los estudiantes ingresantes 2012

En el inicio del desarrollo de la investigación se implementó una encuesta dirigida a alumnos ingresantes en 2012 en la cual se indagó acerca de su origen étnico y, en particular, los idiomas que se hablan en sus grupos familiares.

Se encuestaron a 110 alumnos que cursan 11 carreras distintas, de los cuales, preguntados si accederían a participar de la investigación en curso, respondieron positivamente 71.

Sobre la nacionalidad de los padres encontramos a una madre paraguaya y a un padre italiano, el resto son argentinos. Varios alumnos desconocen la ciudad o localidad de origen de sus padres.

En cuanto al origen de los abuelos respondieron que, para la rama materna el 14% provienen de países europeos y el 2% de Paraguay, mientras que, para la rama paterna el 20% proviene de Europa y el 2% de Paraguay.

Los diversos orígenes se reflejan en los idiomas que hablan sus abuelos, entre los que se encuentran, de mayor a menor frecuencia los siguientes: guaraní, italiano, alemán, ucraniano, checo, ruso, polaco, eslovaco, yugoslavo, búlgaro y quichua. En 6 casos, los abuelos hablan dos o más de estos idiomas.

Esta multiplicidad de idiomas dan cuenta de diferentes formas de designar e interpretar al mundo, natural y cultural, que se transmiten a las nuevas generaciones que se encuentran y comparten ámbitos de aprendizaje en la institución universitaria.

Percepciones de los docentes en Matemática de los primeros años

Simultáneamente al relevamiento de los estudiantes ingresantes 2012, se instrumentó una encuesta de preguntas abiertas a los docentes en Matemática de los primeros años con el objetivo de obtener datos acerca de las nociones, competencias o habilidades que estos consideran relevantes al momento de iniciar el proceso de enseñanza de su disciplina.

En la encuesta se especificó que la información obtenida ayudaría en la confección de guías de interacción para los grupos focales cuyo cometido sería indagar los sistemas de creencias o ideas que facilitan u obstaculizan el aprendizaje de las ciencias. Además, se presentó un resumen del proyecto de investigación a efectos de que los docentes supieran en qué consiste nuestra investigación y con ello inferir en qué aspectos su colaboración nos sería de utilidad.

A continuación se presentarán los datos que aportaron las encuestas realizadas.

Los docentes en Matemática de los primeros años dictan sus asignaturas en una diversidad de carreras tales como las ingenierías (Ingeniería en Alimentos, Ingeniería Industrial, Ingeniería en Sistemas de la Información, Ingeniería Química), los profesorados (Profesorado en Matemática, Profesorado en Ciencias Químicas y del Ambiente, Profesorado en Física), las licenciaturas (Licenciatura en Nutrición, Licenciatura en Biotecnología) y también en carreras como Contador Público, Farmacia y Técnico Óptico.

La mayoría de los docentes se desempeña en más de una carrera, este hecho obedece seguramente a que varias de las asignaturas básicas de los primeros años son comunes a diversas carreras.

Las asignaturas que enseñan estos docentes pertenecen al núcleo de disciplinas básicas de los primeros años de las carreras mencionadas: Cálculo I, Análisis Matemático I, Análisis Numérico, Probabilidad y Estadística, Matemática I, Álgebra Lineal y Geometría Analítica.

Los docentes respondieron al interrogante sobre qué tipo de conceptos, operaciones o conocimientos previos consideran necesarios para el cursado y acreditación de la materia que dictan haciendo alusión a teorías o conceptos específicos y sistematizados –cuando decimos sistematizados aludimos tanto a la pertenencia de estas teorías o conceptos al campo disciplinar específico de la Matemática como al ámbito institucional escolar en el que tales conceptos son impartidos habitualmente (la escuela, los colegios secundarios, la universidad, etc.).

No se encontró en estas respuestas indicación de operaciones, habilidades o conocimientos generales, más abarcativos o no acotados por la sistematización escolar, por ejemplo en una de las encuestas se menciona la "Resolución de situaciones problemáticas del nivel medio…",

formulado de esta forma el enunciado se refiere a los ejercicios u operaciones propias del campo disciplinar matemático, no a situaciones de la realidad contextual que excedan tales límites, inclusive se observa la inclusión de las situaciones problemáticas dentro de un ámbito específicamente escolar y progresivo en el que el estudiante en su ingreso a la educación superior debe demostrar que resuelve exitosamente las situaciones problemáticas propias del nivel inmediato anterior.

La respuesta de estos docentes nos permite inferir que se demanda de los estudiantes competencias específicas como el dominio de temas o teorías sistematizadas, reconocimiento y aplicación de símbolos y fórmulas abstractas, procedimientos o cálculos validados científicamente que pertenecen a los contenidos curriculares del nivel medio. La escolarización secuencial en niveles (primario, secundario, terciario o superior) se caracteriza por la búsqueda de una progresiva complejización y abstracción; los conceptos y procedimientos, las actividades prácticas o de ejercitación se desvinculan del contexto encerradas en una simbolización cada vez más específica e intraducible a la realidad cotidiana (Steiner, 1982).

La consulta sobre qué conocimientos los docentes estiman que los estudiantes podrán adquirir durante el cursado de su espacio disciplinar obtuvo dos tipos de respuestas: Por un lado, la gran mayoría de los docentes encuestados indicó teorías, conceptos u operaciones científicas acotadas a su campo disciplinar, en este sentido se verificó coherencia respecto de las demandas requeridas a los estudiantes como competencias básicas en la pregunta precedente.

Por otra parte, un porcentaje menor de profesores no indicó contenidos específicos, sino que aludió a habilidades, procesos de pensamiento no ligados linealmente a un contenido concreto de Matemática, en este grupo un docente distinguió que sus alumnos aprenderán "Habilidades relacionadas con el conocimiento, la comprensión y la aplicación (escasa)". En esta última respuesta, que puede considerarse una excepción respecto de las demás, se encuentra un reconocimiento explícito de que los conceptos, operaciones y habilidades desarrolladas en las clases escasamente se vinculan con la práctica (Curi S. , Cardozo, Masachs, & Sanchez, 2011) (Curi S. M., Cardozo, Masachs, & Sanchez, 2011) (Bishop, 1999) (Oliveras & Albanese, 2012).

El instrumento diseñado no permitió una profundización mayor sobre este tema, por ejemplo no se aclara si no hay una aplicación adecuada porque las propuestas docentes hacen más hincapié en teorías que en su vinculación a situaciones concretas o contextuales, o si esto se da por la falta de destrezas de los estudiantes en la interrelación teoría y práctica, o bien por otro motivo concomitante.

A continuación se indagó en los docentes si perciben alguna diferencia en cuanto a la adquisición y el procesamiento de ideas y el despliegue de destrezas con operaciones matemáticas, según los grupos étnicos o el lugar de procedencia de sus alumnos.

En las respuestas a este interrogante se obtuvieron los siguientes datos: Por un lado, un grupo importante de docentes coincidió en que los alumnos que provienen de escuelas técnicas "tienen un mayor fluidez en el manejo de conceptos y operaciones", "más facilidad en los cálculos, gráficos, concepto de polinomios", es decir, este grupo de docentes señalan que la formación de estudiantes en las escuelas técnicas es distinta respecto de las demás escuelas secundarias. Otro grupo de profesores indicó que percibe diferencias "entre alumnos de las distintas carreras, hay más predisposición por investigar y buscar información por parte de los alumnos de ingeniería", es decir, estos docentes distinguen diferencias de actitud hacia el aprendizaje de las ciencias entre comisiones de alumnos pertenecientes a distintos trayectos formativos.

Un grupo minoritario de docentes por su parte registró que nota que "existen diferencias por el lugar de origen, pero no son significativas", o sea, hay una constatación de que se perciben diferencias en función del lugar de procedencia de los estudiantes, pero que sin embargo estas no son significativas, bien cabe aquí la indagación respecto del significado que se le atribuye a la expresión "no son significativas", si el sentido es que las diferencias no repercuten significativamente en el desempeño o rendimiento académico del estudiante a juicio del docente, o bien que es el docente que no las considera relevantes (obstaculizadoras o facilitadoras) al momento de planificar las estrategias de enseñanza para sus clases, o bien que en el ingreso en la educación superior ya los estudiantes han transitado un período de escolaridad considerable que homogeneizó las diferencias o particularidades que alumnos provenientes de distintas regiones culturales podrían presentar, en fin, como se señaló previamente, el instrumento implementado no permitió la profundización o repregunta a los docentes relevados.

Por último, una de las docentes manifestó que: "En la cátedra (…) se encuentra una alumna perteneciente a una etnia aborigen, la misma no evidencia alguna dificultad. Aclaro que es la primera vez que tengo una alumna de los pueblos originarios", al releer y analizar las encuestas nos llamó particularmente la atención este enunciado, su forma lingüística, no es lo mismo decir "la misma no evidencia dificultad alguna" que decir "la misma no evidencia alguna dificultad", con esta última forma de expresión el docente está expresando su juicio de valor, como si fuese previsible que la alumna registrara dificultades por su pertenencia étnica y cultural, pero que no obstante estas no se registran, el docente se sorprende del hecho puesto que si no hubiera optado por la primera forma resaltando que la alumna no posee "dificultad alguna". La aclaración que posteriormente realiza la docente, por otra parte, podría ser leída como un indicador importante

del escaso porcentaje de alumnos de etnias autóctonas que acceden a estudios superiores en relación con su porcentaje poblacional.

Sintetizando, los docentes registran en sus grupos de alumnos al menos tres categorías: los estudiantes egresados de escuelas técnicas, los estudiantes que por la elección de determinadas carreras se muestran más activos o proclives a ciertas actividades que otros grupos, y, por último, los estudiantes también se diferencian por el lugar de origen y por la adscripción étnica.

Finalmente, la encuesta concluye con la pregunta acerca de en qué ámbitos o actividades de la vida cotidiana los estudiantes aplican ideas o nociones matemáticas. En líneas generales, las respuestas de los docentes a este punto fueron coincidentes, respondieron que "La Matemática está en todos los ámbitos y en todas las actividades", los ejemplos que se aportaron provienen de las actividades cotidianas como la distribución de los horarios, la administración del dinero, el cálculo de dimensiones de una superficie, entre otras. Un grupo menor de docentes indicó que "Las Matemáticas de los primeros años son muy aplicables en las materias más avanzadas de la carrera", en esta justificación encontramos el aplazamiento de la vinculación práctica del contenido que los estudiantes deben internalizar con la esperanza de utilizarlo para etapas avanzadas de sus carreras, este argumento seguramente es muy eficaz en el disciplinamiento del alumnado, pero de escasa vinculación de conceptos o teorías al momento del aprendizaje de los mismos (Bishop, 1999). Diferir en el tiempo la vinculación práctica de los conceptos contribuye a su rechazo y al elitismo en la educación superior puesto que sólo la minoría que persevere en sus estudios la desarrollará (Vazquez-Alonso, Acevedo-Díaz, & Manassero Mas, 2005).

Los grupos focales

Como avance en este estudio se diseñó un instrumento que permitiera visibilizar las formas en que los sujetos desarrollan las siguientes actividades: asociación de objetos con números (contar), simbolización del entorno espacial (localizar), cuantificación de cualidades (medir) y creación de una estructura particular (diseñar) (Bishop, 1999).

Con el fin de evitar que estas actividades remitan a un ejercicio escolarizado, en el cual los alumnos deberían exponer los conocimientos aprendidos en la educación formal, se planteó una serie de problemas directamente relacionados con su vida cotidiana.

La aplicación de este instrumento se realiza en grupos focales, de 5 ó 6 integrantes, para que en la elaboración colectiva sea posible captar las diferentes formas de abordar los problemas, aportar soluciones y argumentar por uno u otro razonamiento.

Este instrumento ya ha sido probado en dos grupos focales y será aplicado en otros grupos focales seleccionados de acuerdo con su pertenencia a distintos colectivos culturales.

Referencias bibliográficas

Bishop, A. (1999). *Enculturación matemática.* Barcelona: Paidós.

Curi, S. M., Cardozo, M. C., Masachs, A. M., & Sanchez, S. N. (2011). Las habilidades cognitivo-linguísticas en el abordaje autónomo de un texto de Matemática. *La lectura y la escritura en la formación académica, docente y profesional.* Buenos Aires: Editorial de la Universidad Tecnológica Nacional.

Curi, S. M., Cardozo, M. C., Reguera, M., Palavecino, M., Sanchez, S., & Leguiza, P. (2010). Lenguaje y aprendizaje de las ciencias. En E. Ghio, *El discurso en español y portugués. Estudios desde una perspectiva sistémico-funcional* (págs. 102-113). Santa Fe: Ediciones UNL.

Curi, S., Cardozo, M., Leguiza, P., Almirón, A., Masachs, A., Sanchez, S., y otros. (2011). Los cursos de nivelación: una estrategia para la resolución de problemas. *Libro de resúmenes. IV Encuentro Nacional y I Latinoamericano sobre ingreso a la Universidad Pública.* Tandil: UNICEN.

Curi, S., Cardozo, M., Masachs, A., & Sanchez, S. N. (2011). El reconocimiento y aplicación del género y el registro como habilidad cognitivo-linguística en la interpretación de un texto de Matemática. *Libro de reesúmenes. VII Congreso Internacional de la Asociación de Linguística Sistémico Funcional de América Latina ALSFAL* (págs. 131-132). Santa Fe: Ediciones UNL.

Ghio, E., & Fernández, M. D. (2005). *Manual de Linguística Sistémico Funcional. El enfoque de M. A. K. Halliday y R. Hasan. Aplicaciiones a la lengua española.* Santa Fe: Ediciones UNL.

Knijnik, G. (2013). Juegos de lenguaje matemáticos en formas de vida campesinas del Movimiento Sin Tierra de Brasil. En S. Rivera, *Alternativas epistemológicas. Axiología, lenguaje y política.* Buenos Aires: Prometeo.

Leguiza, P., Cheein de Auat, N., & Almirón, A. (2011). Acciones de apoyo que realiza la Universidad Nacional del Chaco Austral a los alumnos ingresantes. *Libro de resúmenes. IV Encuentro Nacional y I Latinoamericano sobre ingreso a la Universidad Pública.* Tandil: UNICEN.

Masachs, A. M., Sanchez, S. N., Cardozo, M. C., & Alegre, J. (2012). La universidad en los relatos de alumnos ingresantes. *Resúmenes. IPECYT 2012* (págs. 143-144). San Juan: Editorial Universidad Nacional de San Juan.

Oliveras, M. L., & Albanese, V. (2012). Etnomatemáticas en Artesanías de Trenzado: un modelo metodológico para la investigación. *Bolema* , 1315-1344. Río Claro, SP: Editorial Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociencias e Ciencias Exatas, Departamento de Matemática.

Sanchez, S. N., Okulik, N. B., & Pratesi, A. R. (2013). Factores que influyen en la lentificación del cursado de Carreras de Ingeniería desde la Perspectiva de los Estudiantes. Estudio Exploratorio en la UNCAus. En: *Revista Argentina de Ingeniería*, Año 1, Volumen 1, pp13-21.Marzo de 2013-CONFEDI. http://www.radi.org.ar/files/t1_n1.pdf.

Steiner, G. (1982). El abandono de la palabra. En G. Steiner, *Lenguaje y silencio. Ensayos sobre la literatura, el lenguaje y lo inhumano.* (págs. 29-52). Barcelona: Gedisa.

Vazquez-Alonso, A., Acevedo-Díaz, J. A., & Manassero Mas, M. A. (2005). Más allá de la enseñanza de las ciencias para científicos: hacia una educación científica humanística. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias , 4* (2). España: Editorial Universidad de Vigo, Facultad de Ciencias de la Educación

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMBINATORIOS EN EL CONTEXTO INTERCULTURAL: ESTRATEGIAS UTILIZADAS POR NIÑOS DE PRIMARIA Y ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

Javier García-García
Universidad Intercultural del Estado de Guerrero. México
libra_r75@hotmail.com

Resumen. El escrito describe las estrategias utilizadas por niños de primaria y estudiantes universitarios al resolver problemas combinatorios, en el contexto de la diversidad cultural. Se adopta un marco conceptual y al estudio de casos como método de investigación. Los niños son hablantes del *Tu'un Savi* (mixteco) y los universitarios parlantes del *Tu´un Savi, Mé'phaa* (tlapaneco) y castellano. Todos son alumnos del estado de Guerrero, México. Para la colecta de datos se recurre al uso de cuestionarios de respuestas abiertas. Los resultados indican que pese al uso de estrategias más elaboradas en los universitarios, suelen tener los mismos errores en comparación con los niños de primaria
Palabras clave: Combinatoria, intercultural, estrategias, resolución de problemas
Abstract. The paper describes the strategies used by elementary school children and university students when solving combinatorial problems, in the context of cultural diversity. It adopts a conceptual framework and case study as a research method. The children are speaking Tu'un Savi (Mixtec) and university's speaking Tu'un Savi, Mé'phaa (Tlapanec) and Spanish. All students are from Guerrero state, Mexico. For collection dates are used open response questionnaires. The results indicate that the students use more elaborate strategies, but often have the same errors those elementary school children.
Key words: Combinatory, intercultural, strategies, solving problem

Introducción

En México existe una gran diversidad cultural y lingüística; se reporta la existencia de 62 grupos étnicos (López y Tinajero, 2011), cada uno con sus propias costumbres y lenguas. Este hecho ha obligado a las autoridades, al menos en el discurso, a reconocer al país como pluricultural; es decir, se acepta dicha riqueza y se asume que ello posibilita una educación para la interculturalidad. Esto implica reconocer la práctica de los pueblos étnicos, sus conocimientos tácitos, así como sus cosmovisiones de una manera incluyente en el proceso enseñanza-aprendizaje; es decir, implica rescatarlos y revalorarlos en el contexto escolar.

La interculturalidad se da cuando existe el diálogo consecuencia del encuentro entre dos culturas. Esta interacción requiere ponerse en el lugar del otro y, construir juntos nuevos conocimientos y realidades de manera colaborativa para la resolución de problemas. En ese sentido, la interculturalidad no sólo hace referencia a grupos étnicos, sino que incluye a otros grupos mayoritarios. Indica la coexistencia de distintas culturas en un mismo ámbito geográfico, compartiendo una serie de valores de convivencia y, una relación basada en la interacción recíproca y de respeto. No obstante, la práctica estricta de la interculturalidad en la cotidianidad es difícil de darse.

En el campo educativo se ha buscado dar cabida a este paradigma vía los planes de estudio en primaria; se sugiere a los niños asumir y practicar la *interculturalidad* como riqueza y forma de

convivencia en la diversidad social, cultural y lingüística (SEP, 2011). Pero poco o nada se explica de cómo debe practicarse en la realidad escolar. Para el Nivel Superior (NS), se han creado Universidades Interculturales en los estados con presencia de grupos étnicos; cuyo objetivo es formar profesionales e intelectuales comprometidos con el desarrollo de sus pueblos y regiones. La población objetivo de estas instituciones, es principalmente jóvenes hablantes de alguna lengua étnica.

La diversidad cultural y lingüística de México, invita a reorientar las investigaciones a estos grupos en todos los ámbitos posibles. De esta manera, el presente estudio se centra en niños de primaria hablantes del *Tu'un Savi* (mixteco) y jóvenes universitarios parlantes del *Tu'un Savi, Mé'phaa* (tlapaneco) y castellano, del estado de Guerrero, México, pretextando el estudio de las estrategias que emergen cuando estos resuelven problemas combinatorios. La pregunta que rige el estudio es ¿qué estrategias utilizan los niños de primaria y estudiantes universitarios (hablantes de lenguas étnicas) en la resolución de problemas combinatorios? La necesidad de enfatizar que los participantes pertenecen a un grupo étnico es porque se parte de que la lengua materna juega cierto papel en la resolución de problemas.

La elección del tema reside en que la combinatoria es un contenido obligatorio en el curso de matemáticas de primaria (SEP, 2011), y en la universidad (al menos en la Universidad Intercultural del Estado de Guerrero [UIEG]) en la asignatura de estadística. Asimismo, realizar investigaciones que tome como objeto de estudio a la combinatoria, es de suma importancia dado que son escasos (Rivera, 2013). Aunque en el NS se reconocen algunos estudios (Bonilla y Rueda, 2011; Roa, Batanero y Godino, 2001; Salgado y Trigueros, 2009); pero ninguno se enfoca a estudiantes hablantes de una lengua étnica.

Los problemas combinatorios y la estrategia

El estudio adopta un marco conceptual. En ese sentido, se define problema, combinatoria, problemas combinatorios y estrategia. Respecto del primer término, se asume que un problema es:

> Una tarea o situación que tiene los siguientes componentes:
>
> 1. Plantea una demanda o acción a realizar, para la cual existe una persona o grupo de personas que quieren o necesitan cumplimentarla. La demanda es adecuada al nivel de formación de la(s) persona(s).

2. Existe un proceso que hay que poner en juego para cumplir la demanda; para ello se necesita realizar cierto proceso de análisis para comprender lo que se pregunta y la situación en general.
3. La situación puede tener varios, uno o ningún resultado final, lo cual deberá determinar la persona haciendo uso de alguna estrategia (García, 2012, p. 32).

Por tanto, el alumno no necesariamente debe querer resolver la situación propuesta, sino que puede darse la *necesidad,* la cual está supeditada por las reglas que dicta el contrato didáctico o bien, por instrucciones precisas del investigador o profesor.

Por combinatoria, se entiende el estudio de formas de listar, arreglar y organizar elementos de conjuntos discretos de acuerdo con reglas específicas (Cameron, 1994; citado en Rivera, 2013). De esta manera, se concibe como la enumeración de todas las formas posibles en que un número de elementos pueden ser organizados, de forma tal que satisfagan ciertas condiciones sin perder algún resultado posible (Rivera, 2013). Entonces, los *problemas combinatorios* son entendidos como aquellas situaciones que se asumen más de una solución y se resuelven enumerando todas las formas posibles ciertos elementos dados en el enunciado. En el estudio, sólo se plantean problemas resolubles mediante los principios del conteo (aditivos y multiplicativos).

Finalmente, *estrategia* se concibe como un conjunto de acciones (procedimientos) intencionales, desarrolladas por una persona para resolver cierto problema, permeadas por los conocimientos de que dispone, de su experiencia, de lo afectivo y del contexto social en el que se desenvuelve. Así, la persona puede llegar o no a la solución del problema, dependiendo del análisis que realice para ello (García, 2012; García, Navarro y Rodríguez, 2013). Las estrategias pueden ser: irreflexivas, si la persona responde a un proceder prácticamente automatizado, sin que pase por un proceso previo de análisis u orientación en el problema; o reflexiva, en caso contrario (Rizo y Campistrous, 1999).

El método de investigación

El estudio adopta como método de investigación al estudio de casos (Castillo, 2007) y es de corte descriptiva (Hernández, Fernández y Baptista, 2003). Participaron 4, 4 y 5 niños de los grados 4°, 5° y 6°, respectivamente; todos hablantes del *Tu'un Savi* (mixteco), y 7 universitarios (2 hablantes del Tu'un Savi, 3 el Mé'phaa, y 2 el castellano) de la UIEG. En el caso de los niños de primaria, estos acuden a un centro escolar multigrado, donde un solo docente atiende a los seis grados. Mientras que los universitarios, estaban por cursar el segundo semestre de la carrera de Ingeniería forestal en la UIEG, y no habían tomado un curso previo de estadística. Sin embargo, la actividad en la que participaron fue parte de un cuestionario de diagnóstico para identificar sus principales

fortalezas y debilidades en problemas aritméticos, algebraicos y por supuesto, combinatorios; pero en este escrito sólo se reporta los procedimientos que utilizan en los últimos.

Para la colecta de datos se recurre a la aplicación de un cuestionario de respuestas abiertas; se da al alumno un espacio razonable para su procedimiento y la respectiva explicación de su solución. Los problemas combinatorios aplicados (Tabla 1), se presentan enseguida:

Tabla 1. Problemas combinatorios considerados y el nivel donde se aplicaron.

Problema	Tipo	Nivel
1. En una nevería se venden los siguientes sabores: fresa, vainilla, limón y chocolate. Encuentra todas las formas diferentes de servir un helado de dos sabores.	Aditivo	Básico
2. A la fiesta de cumpleaños de Antonio asistirán 18 mujeres y 15 hombres. ¿Cuántas parejas diferentes de baile se podrán formar con los invitados?	Multiplicativo	Básico y Superior
3. Un niño tiene tres camisas: una roja, una azul y una verde; tres pantalones: uno blanco, uno negro y uno café y cuatro gorras: una roja, una azul, una beige y una negra. ¿Cuántas combinaciones diferentes puede formar con las camisas, los pantalones y las gorras?	Multiplicativo	Básico y Superior
4. Un nevero vende los siguientes sabores: fresa, vainilla, limón, coco y chocolate. Encuentra todas las formas diferentes de servir un helado de dos sabores.	Aditivo	Superior
5. En la UIEG con motivo del día del estudiante; se llevará a cabo un torneo de futbol. Se inscribieron siete equipos de distintas escuelas de la región: Chivas, Tepéc, Águilas, Malina, Avispones, Estudiantes y Universitarios. Cada equipo debe jugar con otro un partido de ida y otro de vuelta, es decir, uno en su cancha y otro en la cancha del equipo contrario. ¿Cuántos partidos se jugaran en el torneo?	Multiplicativo	Superior

En la tabla 1, se observa que algunos problemas (2 y 3) se aplicaron en ambos niveles educativos; el objetivo era observar la diferencia en cuanto a estrategias utilizadas.

Estrategias identificadas

El análisis de las evidencias escritas en cada caso de estudio se hizo uno a uno, pregunta a pregunta. Enseguida se precisa el problema y la estrategia identificada:

PROBLEMA 1 **(**Ver Tabla 1**):** Para este problema, se identifica la misma estrategia en los casos de estudio, una más completas que otras, a saber el niño *lista los casos posibles* (Fig. 1):

Fig. 1. Lista todos los casos posibles.

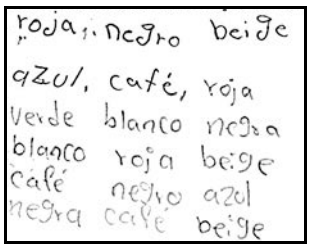


Fig. 2. Procedimiento con combinaciones incompletas.

La figura 1, ilustra la estrategia reflexiva utilizada por el niño, donde se observa que sólo le hizo falta discriminar las combinaciones iguales. Otros casos, emplean la misma estrategia pero muestran sólo algunos arreglos (Fig. 2), evidenciando con ello que la actividad le es poco significativa para su contexto o en su caso, que en la cotidianidad no han resuelto un problema similar, por lo que ofrecen las combinaciones incompletas.

PROBLEMA 2: En este problema, en los niños se identifican sólo estrategias irreflexivas. En general, se aprecian dos procedimientos (Fig. 3 y 4) mostrados enseguida:

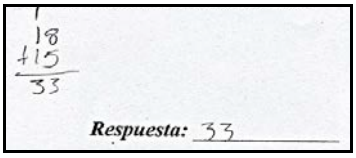


Fig. 3. Opera con los datos dados en el problema.

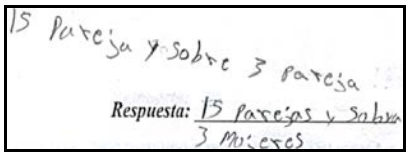


Fig. 4. Responde considerando casos únicos.

La *figura 3* ilustra que el niño *opera con los datos* que ofrece el problema sin más análisis que ubicando los datos presentados. El segundo *responde considerando casos únicos* (Fig. 4)*;* esto es, asumiendo que las parejas a formar deben ser únicas, puesto que en la cotidianidad esto es así, según la explicación verbal que ofrece el niño para justificar su respuesta. Esta misma explicación también se identifica en los estudiantes universitarios (Fig. 5), baste como ejemplo la siguiente respuesta:

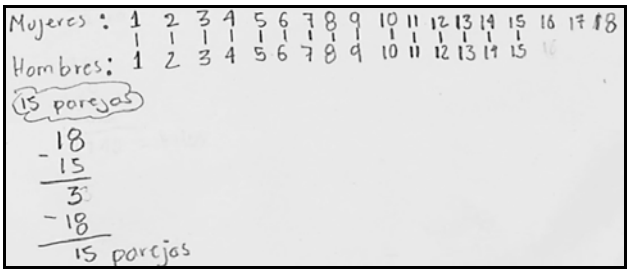


Fig. 5. Respuesta ofrecida por un estudiante universitario.

Si bien, el estudiante universitario conjuga las dos estrategias identificadas en los niños de primaria (Fig. 5), la explicación verbal que ofrece es la misma que la del niño. Es decir, que en una fiesta sólo

se forman parejas únicas, puesto que cada hombre se hace acompañar de una mujer; de esta manera, sobrarían aquellas que no llevan pareja. En otros casos, los universitarios emplean el *principio multiplicativo* (Fig. 6), estrategia que se puede caracterizar como reflexiva, puesto que además de ubicar los datos que presenta el problema, también identifican que deben efectuar un producto para hallar el número total de combinaciones posibles.

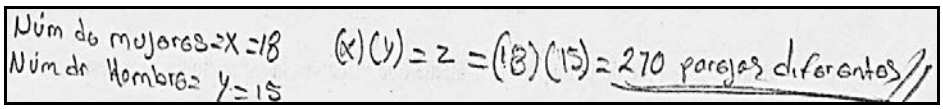


Fig. 6. Ejemplo donde se emplea el principio multiplicativo.

PROBLEMA 3. En el caso de los niños, se observan dos procedimientos distintos: (a) *listan todos los casos posibles* sin completar la lista, puesto que la solución exige 36 arreglos distintos, o (b) *apoyarse en un dibujo* (Fig. 7). Este último procedimiento es reflexivo; pero se requiere tener cuidado para establecer las combinaciones que demanda el problema. En ese sentido, los niños que hicieron uso de esta estrategia no lograron encontrar la solución, puesto que hizo falta un mayor análisis. Tal vez, el nivel a que llega el uso de la estrategia se debe al grado que cursan, puesto que eran niños de cuarto grado.

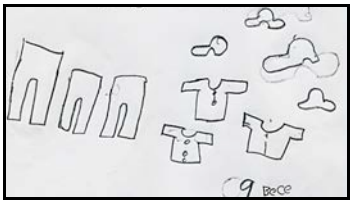


Fig. 7. Se recurre al uso de un dibujo.

En los estudiantes universitarios se identifican tres estrategias distintas: (a) emplean el *principio multiplicativo,* (b) *responden considerando casos únicos* o (c) recurren *al diagrama de árbol* (Fig. 8), que también se caracteriza como una estrategia reflexiva.

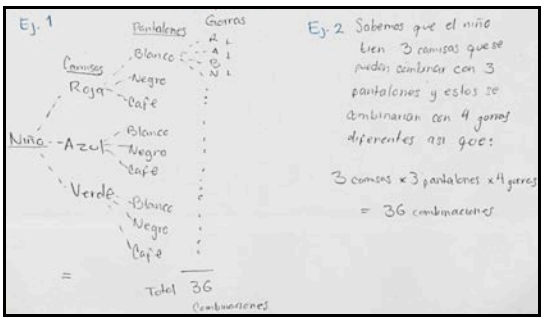


Fig. 8. Uso del diagrama de árbol para resolver el problema.

En el **problema 4** (Tabla 1), se identifica el uso de las estrategias reflexivas: *listar todos los casos posibles* y el *uso del diagrama de árbol*, ya ejemplificados en otros problemas.

PROBLEMA 5: En este problema, además del diagrama de árbol, los estudiantes recurren al uso de la estrategia irreflexiva: *operar con los datos que ofrece el problema;* sin embargo, el alumno presenta problemas al operar, ya que no prioriza el orden de las operaciones.

A manera de conclusión

En el caso de los niños, fue necesario traducir el problema a su lengua materna para que resolviesen la situación propuesta; mientras que en los universitarios no es necesario. Por otra parte, si bien los segundos recurren a procedimientos más elaborados, algunos de ellos presentan las mismas dificultades que los niños de primaria. En ambos casos se identifica el uso de estrategias reflexivas e irreflexivas (Tabla 2); los resultados se resumen enseguida:

Tabla 2. Estrategias identificadas en los casos de estudio.

Número Problema	Estrategia	Caracterización de la estrategia	Nivel en donde se identifica
1	Lista los casos posibles	Reflexiva	Básico
2	Opera con los datos del problema Responde considerando casos únicos	Irreflexivas	Básico
	Opera con los datos del problema Responde considerando casos únicos	Irreflexivas	Superior
	Recurre al principio multiplicativo	Reflexiva	
3	Lista los casos posibles Recurre al uso de un dibujo	Reflexivas	Básico
	Recurre al principio multiplicativo Uso del diagrama de árbol	Reflexiva	Superior
	Responde considerando casos únicos	Irreflexiva	
4	Lista los casos posibles Uso del diagrama de árbol	Irreflexivas	Superior
5	Uso del diagrama de árbol	Reflexiva	Superior
	Opera con los datos dados en el problema	Irreflexiva	

En algunos problemas, la explicación que ofrecen tanto los niños como los universitarios coinciden; incluso suelen tener también las mismas dificultades y errores.

Finalmente, las estrategias utilizadas por los niños a excepción del apoyo en un dibujo, coindicen con las usadas por los universitarios. Este hecho permite plantear que es necesario realizar

propuestas encaminadas a facilitar la resolución de los problemas combinatorios en ambos niveles educativos, atendiendo las particularidades de cada uno.

Referencias bibliográficas

Bonilla, D. y Rueda, M. (2011). Niveles de razonamiento combinatorio que demuestran estudiantes universitarios. *Memorias de la XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática*, *47, 1-10.*

Castillo, M. (2007). *Metodología de investigación científica USN: Método de estudio de caso*. Recuperado el 2 de octubre de 2011 de www.itescham.com/Syllabus/Doctos/r1614.DOC.

García, J. (2012). *Estrategias en la resolución de problemas aritméticos: el caso de los niños mixtecos.* Tesis de maestría no publicada, Universidad Autónoma de Guerrero. México. Disponible en http://www.etnomatematica.org/publica/trabajos_maestria/Tesis_javier.pdf.

García, J., Navarro, C. y Rodríguez, F. M. (2013). Procedimientos utilizados por niños Tee Savi de primaria al resolver problemas aritméticos. En Flores, R. (Ed.). (2013). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 26, 51-59. México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2003). *Metodología de la investigación*. México: Mc Graw Hill.

López, G. y Tinajero, G. (2011). Los maestros indígenas ante la diversidad étnica y lingüística en contextos de migración. *Cuadernos de comillas*, *1,* 5-21.

Rivera, M. I. (2013). *Elementos de la combinatoria en la educación primaria.* Tesis de maestría no publicada, Universidad Autónoma de Guerrero. México.

Rizo, C. y Campistrous, L. (1999). Estrategias de resolución de problemas en la escuela. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 2 (2-3),* 31-45.

Roa, R., Batanero, C. y Godino, J. D. (2001). Dificultad de los problemas combinatorios en estudiantes con preparación matemática avanzada. *Revista números, 47,* 33-47.

Salgado, H. y Trigueros, M. (2009). Conteo: una propuesta didáctica y su análisis. *Educación Matemática,* 21 (1), 91-117.

SEP. (2011). *Plan de estudios 2011. Educación básica*. México: Secretaría de Educación Pública.

ALGORITMOS DE PREDICCIÓN EN LA MODELACIÓN CUADRÁTICA

Marvin Mendoza Valencia, Leonora Díaz Moreno y Jaime Arrieta Vera
UNAH. Honduras
U. de Los Lagos. Chile
UAGRO. México
vinmar28@hotmail.com, leonora.diaz@ulagos.cl, jaime.arrieta@gmail.com

Resumen. Este trabajo reporta la emergencia, evolución y cosificación de algoritmos de predicción al modelar un fenómeno, en este caso el vaciado de un estanque cilíndrico, por modelos cuadráticos. La trayectoria que siguen este algoritmo se evidencia en el análisis de las producciones de profesores de matemáticas al participar en puestas en escena de un diseño de aprendizaje. Este análisis revela los procedimientos que siguen los actores, las herramientas con que actúan y los argumentos que esgrimen para validad su proceder. Se utiliza la presentación discursiva del fenómeno, además del uso de simuladores virtuales como complemento al diseño de aprendizaje
Palabras clave: Modelación Cuadrática, Trayectorias, Algoritmo, Serie de Taylor.
Abstract. This paper reports the emergency, evolution and objectification from prediction algorithms modeling a phenomenon, in this case the draining of a cylindrical tank, by quadratic models. The path this algorithm follows is demonstrated in the analysis of the production of mathematics teachers participating in stagings of a learning design. This analysis reveals the procedures followed by the actors, the tools with which they act and the arguments they use to validate their actions. Discursive presentation of the phenomenon is used, additionally the use of simulators to complement the learning design.
Key words: Quadratic Modeling, Trajectory, algorithm, Taylor Series

Introducción

La modelación en la actualidad es una línea de investigación en crecimiento en Matemática Educativa, o Educación Matemática o en Didáctica de las Matemáticas, así lo reporta Blomhøj (2009) quien levanta una categorización de diferentes perspectivas de modelación, atendiendo al foco de cada uno de los trabajos presentados para el grupo de discusión de modelación del XI ICME.

Con base en los antecedentes de una clasificación de modelación realizada por Kaiser y Sriraman en el 2006, el autor anterior propone las siguientes categorías para la modelación: a) realista, b) contextual, c) educativa, d) epistemológica, e) cognitiva, y f) sociocrítica.

Reformas Curriculares en diferentes países han incorporado a la modelación como un eje central del currículo de matemática y la importancia de considerar la enseñanza de la modelación desde los niveles iniciales (Bassanezi, 1994; Blomhøj, 2004; Biembengut y Hein, 2004).

Antecedentes

Diferentes autores han desarrollado investigaciones que giran en torno a la problemática de la enseñanza-aprendizaje de la modelación (Arrieta 2003; Bassanezi, 1994; Blomhøj, 2004; Biembengut y Hein, 2004; Mochon, 1997& Suárez y Cordero, 2005).

Arrieta (2003) afirma que la modelación es una práctica social ejercida en diferentes comunidades creando puentes entre la matemática escolar y la matemática cotidiana que vive en el ciudadano en su accionar diario. En cambio Bassanezi (1994) describe a la modelación como una actividad para desarrollar una forma particular de pensar y actuar: producir conocimiento, poner junto abstracciones y formalizaciones interconectándolo a procesos empíricos y fenómenos considerados como situaciones problemáticas.

Para Biembengut y Hein (2004) la aplicación de la modelación matemática, espera propiciar para el alumno: a) integración de las matemáticas con otras áreas del conocimiento, b)interés por las matemáticas frente a la aplicación, c) mejoría de la aprehensión de los conceptos, d)capacidad para leer, interpretar, formular y resolver situaciones-problema, e) estimular la creatividad en la formulación y resolución de problemas, f)habilidad en el uso de la tecnología (calculadora gráfica y computadores), g) capacidad para actuar en grupo, h)orientación para la realización de la investigación, h) capacidad para la redacción de esa investigación.

Blomhøj (2004) manifiesta tres argumentos para la enseñanza de la modelación: a) los modelos matemáticos constituyen un puente entre la vida real de los estudiantes, las experiencias y las matemáticas, b) los modelos son un vehículo para el desarrollo de capacidades cognitivas superiores, c) los modelos matemáticos están jugando papeles importantes en el funcionamiento y la formación de las sociedades basadas en tecnologías.

En cambio, otros autores consideran a la modelación como un proceso de representación (Mochón, 1997), o bien como una forma de actividad necesaria para la reconstrucción de significados matemáticos (Suárez y Cordero, 2005); en otros casos ésta se asocia a un proceso mediante el cual se desarrollan capacidades (Aravena, Caamaño y Giménez, 2008), también podemos encontrar posturas que la consideran una herramienta didáctica para la construcción de conceptos matemáticos (Villa y Ruiz, 2009) cada una de estas concepciones muestran que la modelación surge de situaciones específicas del contexto social en el que se desarrollan, donde se identifica cada modelo con la comunidad que lo genera, por medio de su práctica.

Otros antecedentes para este reporte que sustenta el marco teórico de la investigación, lo constituye la perspectiva de modelación como una práctica situada en diferentes comunidades, la que corresponde a la articulación de dos entes, uno llamado modelo a partir de otro llamado modelado (Arrieta, 2003) en el estudio de la modelación lineal; Cortés (2003), en la modelación cuadrática; Méndez (2006), en la modelación multilineal; Galicia (2004), en la modelación exponencial; Castro (2007), en estudios de lo inversamente proporcional y en Alcaraz (2006), en la modelación senosoidal.

Objetivos del Estudio

Esta investigación se propone caracterizar las estrategias estudiantiles que entran en escena, cuando se incorpora a los estudiantes a trabajar con situaciones fenoménicas como es el vaciado de un cilindro circular recto. En particular, describir argumentos, procedimientos y herramientas que utilizan estudiantes de postgrado para realizar predicción de magnitudes en cualquier instante, así como también analizar el proceso de generalización que recurren para construir un algoritmo.

Marco Teórico

La perspectiva que fundamenta este reporte es una de las visiones de la socioepistemología respecto a la modelación. En este sentido se considera a la modelación como una práctica que articula dos "entes", el modelo y lo modelado. La primera cobra sentido en esta perspectiva de modelación cuando el primer ente cumple la función de intervenir cobre la segunda, esto implica que una tabla de valores, un gráfico cartesiano, una fórmula algebraica son modelos, si cumplen el rol de predecir respecto a un fenómeno en particular con el objeto de intervenir sobre este (Arrieta, 2003). Intervención que considera la naturaleza de cada fenómeno en particular, por ejemplo el cardiólogo a través de un electrocardiograma puede intervenir sobre el estado de salud del corazón de un paciente; de igual modo un biólogo marino, a través de un gráfico puede intervenir sobre la cantidad de alimentos en una laguna con peces.

En esta visión se habla de acto modelar cuando se cuenta con situaciones fenomenológicas, datos e información del fenómeno, y cuando estos datos puedan colaborar para intervenir sobre el fenómeno, es decir: el fenómeno, los modelos que intervienen sobre lo modelado. También es necesaria la articulación de los modelos con el fenómeno para dar origen a la comprensión global de la situación. La modelación que se plantea en este reporte, tiene su base en el estudio de las diferencias de la naturaleza de una práctica en comunidades no escolares, con el objeto de que estas, se puedan introducir al aula. La modelación es el puente de las esferas de práctica que considera intenciones, procedimientos, herramientas, argumentos y sus procesos de emergencia y constitución.

Metodología

Los participantes de la puesta en escena del diseño son cuatro profesores de matemáticas, que cursan un programa de postgrado en Educación Matemática en una Universidad de Chile. La secuencia de aprendizaje puesta en escena fue realizada en tres etapas, una primera de trabajo individual en búsqueda de un primer encuentro con la experiencia de aprendizaje, una segunda referida a trabajo colaborativo entre estudiantes y/o profesor, y una tercera etapa de discusión compartida. Se obtienen las evidencias de las grabaciones de audio-video y de las producciones

tanto las de lápiz y papel como las digitales**.** Los actores previamente han participado en diseños de aprendizaje basados en la modelación lineal, y por tanto sus producciones serán analizadas considerando esta variable.

Descripción de los Participantes

El grupo de estudiantes es heterogéneo, con participación de profesores de matemática con formaciones y experiencias diferentes, como se describe a continuación. Nos referiremos en adelante a E1, E2, E3, E4, P, O1,O2 para indicar estudiantes, uno, dos, tres, cuatro, y para profesor, además de observadores uno y dos respectivamente. E1 es Licenciada en Educación y Pedagogía Básica, imparte clases al nivel básico (primaria) y posee 8 años de experiencia. E2 es Licenciada en Educación y Pedagogía en Enseñanza Media, imparte a nivel universitario y goza de 18 años de experiencia. E3 es Licenciada en Matemáticas en Pedagogía en Enseñanza Media, imparte clases a nivel universitario con experiencia de 19 años. E4 es Licenciado en Matemáticas se desempeña a nivel universitario y cuenta con alrededor de 14 años de experiencia.

Diseño de la enseñanza

El diseño que se utiliza es *"El vaciado de un recipiente cilíndrico"* que consistió en una experimentación presencial: se perfora, en la parte inferior, una botella de plástico cilíndrica, previamente graduada, y se toma un video de cómo se vacía; auxiliándose del video se lee el nivel del agua cada 10 segundos, con estos datos se construye una tabla en Excel. A partir de la tabla se plantean situaciones de predicción donde los estudiantes construyen algoritmos. En las figuras y tablas, uno y dos se observan los datos experimentales obtenidos del vaciado del cilindro. El uno para referirse datos con ruido (decimales) y el dos para datos sin ruido (enteros).

Ejecución de la actividad

La puesta en escena de la actividad se presenta en Episodios (Ep) con el objeto de describir los detalles del desarrollo de los procesos de la consigna, con vista a observar la relación objetivos planteados en este reporte de investigación y se presentan algunos diálogos que ilustran el desarrollo de cada proceso que involucra la actividad.

Episodio uno: presentación de la actividad

Antes de realizar una nueva situación, los estudiantes desarrollaron una secuencia que describe lo lineal. En el siguiente dialogo se expresa la presentación de una nueva actividad desconocida para ellos, la cual presentó algunas dificultades en la comprensión del fenómeno.

P: Vamos a trabajar, vamos a escribir todo lo que se pueda escribir. No se vale borrar por favor, y después ellos dos (O1 Y O2) nos van ayudar para tomar las evidencias posibles y después las

analizamos ¿de acuerdo?, y después ustedes nos cuentan la experiencia del grupo. Entonces pongan atención. Vamos a ver otro fenómeno más. Entonces tenemos un depósito de agua y lo tenemos lleno y abajo tenemos un chorro de agua. A un lado tenemos un regla y del otro lado vamos a poner una tabla de equipo contra el nivel de agua o.k, entonces en el segundo cero ¿Cuánto habrá?, La regla está hacia allá arriba inicia en cero entonces el nivel de agua es cero ¿De acuerdo?

E1: ¿Cómo profe? Perdón… pero ¿El agua parte de allá arriba?…..

P1: Si, está lleno. Acá, entonces el nivel del agua es cero, diez, quince, veinte.

E2: Pero el estanque va a vaciar el agua en el otro estanque.

P: Sí… aquí hay un hoyo, para que no se caiga al suelo.

E1: Qué raro verlo al revés, que raro ver el agua arriba.

P: ¿Cómo lo ven?

E1: ¡Qué bueno que el agua está abajo, po ¡ entonces el cero sería abajo y no arriba.

P: La regla está en cero.

E1: Claro, entonces habría cero agua en el estanque.

E2: Pero profe ¿Eso sería un ruido?

P: Por eso es necesario que antes discutamos juntos, si no se va entender ¿está claro?

E1: ¿Qué sería el ruido? ¿El cero? …

E2: Claro.

E1: Sí porque la ley de gravedad dice que debería estar abajo, jajaja.

E2: Además el estanque está lleno, si está lleno no puede ser cero allí.

Episodio dos: pensamiento centrado en lo lineal

Se inicia la actividad con la presentación del profesor con una diapositiva donde va preguntando los valores de las alturas, cuando el tiempo va avanzando, el profesor intuye que los estudiantes considerarán el nuevo fenómeno como lineal. En el dialogo a continuación se presentan las interacciones suscitadas.

P: Empieza a vaciarse, en el segundo diez ya tenemos cinco.

E1: Se ha vaciado cinco.

P: En el segundo 20 ¿Cuánto habrá vaciado?

E2: 10… no…. Sí, es 10.

P: En el segundo treinta,… ¿En treinta? Todos quince, en el segundo cuarenta veinte, en el segundo cuarenta y cinco, veinticinco.

E1. Estoy mirando profe, jejejejeje.

P: Pues no es así.

E1: Jajajaja.

P: ¿Por qué sucede esto? Porque nos estamos centrando en lo lineal. Imagínese ver el agua, al principio sale con más presión, ya después comienza a cambiar.

E3: Empieza a variar.

P: Al principio va agarrar rápido y después va agarrar más lento.

E3: Sí claro.

E4: Usted fue a generar dentro del proceso esa inducción lineal, fue inducida por usted porqué empezó diez cinco, entonces empezamos a encontrar relación lineal, si usted revisa cuando usted dijo diez cinco, ahora manda y dice: veinte y automáticamente decimos diez, y coincide lo que usted dice, entonces induce a que el fenómeno va a seguir pasando linealmente. Es decir no se hizo un análisis.

Episodio tres: trabajo individual del vaciado del cilindro para datos con y sin ruido

Concluido el debate que el fenómeno de vaciado del cilindro no era lineal, los estudiantes enfrentan el desafío individual de predecir el valor de la altura de vaciado en un cilindro para datos con ruido y sin ruido.

En el segundo t=27,72 s''' ¿Qué nivel de agua tiene el estanque (h)?

Tiempo	Nivel del agua
t	h
0	24.5
12	16.8
20	12.5
35	6.13
38	5.12
50	2
66	0

Tabla 1. Datos de t y h con ruido

Tiempo	Nivel del agua
t	h
0	0
10	55
20	100
30	135
40	160
50	175
60	180

Tabla 2. Datos de t y h sin ruido.

Para afrontar el problema en las dos facetas surgieron diferentes estrategias. Para datos con ruido, la estrategia de todos los estudiantes fue obtener las diferencias de los tiempos y de las alturas y estrategias empleadas ara la modelación lineal, como ser regla de tres y puntos medios. Ninguno de los estudiantes logró predecir el valor solicitado.

Para datos sin ruido, las estrategias fueron variadas. E1 presentó una estrategia aritmética anclada en variación por intervalos

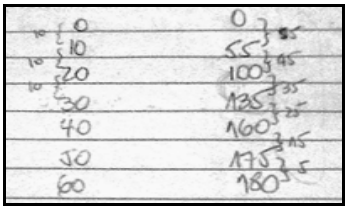


Figura 1. Diferencias de h y de t para datos sin ruido, obtenidas por E1.

Los argumentos que presentó E1: *"Vi que las diferencias entre estas es 10, es una constante de 10. Entonces supuse que no siempre hay diferencia de 10, entonces dije entre 20 y 30 hay 35 que divido en diez me da 3.5. Supuse que cada rayita tiene 3.5, entonces dije 27.72 por 3.5. No Dije 27, dije 7, porque ya tengo 20 entonces 7.72 por 3.5más los 100 da 127.02."* Además agrega: "*Tiene 27.72 con 20 ya lleva 100 y faltan 7.72, pero con 3.5 en cada segundo, por lo tanto, se multiplica 7.72 por 3.5. Al resultado que es 27.02 le suma 100 y le da 127.02".*

E2 y E3 obtuvieron primera y segundas diferencias de la variable h, que les permitió conocer la naturaleza del modelo o de la función. Ellas encontraron un modelo cuadrático a partir de tres valores de la tabla, obtuvieron los parámetros para el modelo, al que posteriormente evaluaron para predecir el valor solicitado.

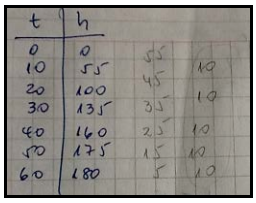


Figura 2. Diferencias de h de E2.

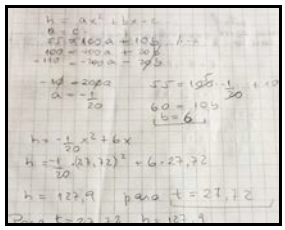
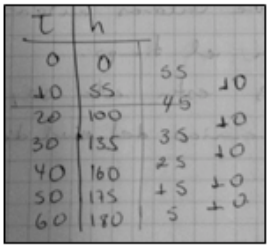


Figura 3. Modelo cuadrático de E2.

Por su parte, E4 consideró lo aritmético y lo geométrico con la intención de buscar pistas a través de las diferentes tangentes de la gráfica sin llegar a obtener la predicción solicitada. Argumenta lo siguiente: "grafico los puntos dados y observa una gráfica que da en términos de una función radical Y=raíz de x..., también lo relacionó con una función logarítmica, pero nunca lo asoció con "lo cuadrático".



t	h		
0	0	55	
10	55	45	10
20	100	35	10
30	135	25	10
40	160	15	10
50	175	5	10
60	180		

Figura5. Esbozo de la gráfica de E4.

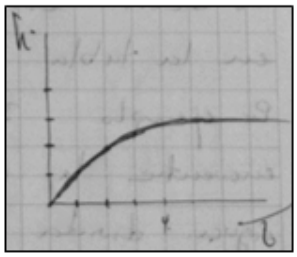


Figura 4. Diferencias de h de E4.

Episodio cuatro: consolidación del algoritmo de predicción

En base a lo realizado por E1 se presentó una discusión en torno a la búsqueda de una generalización de un método de predicción que describiera el fenómeno.

E1 en una primera instancia manifiesta que busca relaciones entre ambas columnas, en la segunda columna observa diferencia entre los datos que la conforman va disminuyendo. Posteriormente encuentra diferencias en la primera columna, las que es constante y corresponde a 10. Una vez realizada esta relación E1 vislumbra que las diferencias de la segunda columna no siempre son constantes, pero si las de la primera por lo tanto intenta relacionarlas por intervalos, recordemos que la pregunta es ¿En el segundo t=27,72 s ¿Qué nivel de agua tiene el estanque (h)? en ese contexto primero determina un intervalo, que en la primera columna se sitúa entre 20 y 30, como se pudo observar en la figura uno.

Entonces los actores predicen utilizando el siguiente procedimiento: "En el segundo 20 el agua está en el nivel 100, le resto lo que falta para 27.72, o sea 7.72 o sea 7.72 por los milímetros por segundo 3.5.

Escribe 7.72seg por 3.5cm/seg = 27.02cm, el nivel del agua es 100+ 27.02= 127.02.

Si leemos de otra manera el procedimiento sería: ***n*** (27.72)= *n*(20+7.72)=*n*(20) +*n*(7.72) = 100 + (7.72) ($\frac{35}{10}$) = 100+27.02 = 127.02 , $n(27.72) = n(20) + \frac{\Delta n}{\Delta t} 7.72$.

Ellos están empleando un método que está basado en la serie de Taylor de primer orden

$$n(t_0 + h) = n(t_0) + \frac{dn}{dt} h.$$

Uno de los métodos de predicción que utilizan los actores al modelar es la serie de Taylor de primer orden.

Conclusiones

Los profesores recurren a algoritmos de predicción que utilizan en la modelación lineal. Estos algoritmos son el de puntos medios y regla de tres entre otros.

A partir de lo expuesto en este reporte, es importante señalar que al invitar a los estudiantes a realizar la experiencia de modelación surgen, al menos, dos conclusiones. La primera se relaciona con los tipos de razonamiento que emergen a partir de la exposición al modelo. El primer razonamiento surge a partir de las producciones de E1 y en el cuál identificamos claramente que no tiene conocimientos de lo cuadrático, pero que sin embargo, logra resolver el problema planteado en la experimentación. E1 desarrolla un tipo de razonamiento, en cual busca relaciones entre los componentes de la tabla, con una clara preocupación por los datos que se entregan en ella. E1 nunca pierde de vista la situación a la que ha sido invitada a experimentar. Esta capacidad holística, le permite visualizar de mejor manera la problemática, construir una solución y encontrar un resultado satisfactorio.

Un segundo tipo de razonamiento lo podemos visibilizar en los estudiantes que si tienen conocimientos vastos de lo cuadrático, tal es el caso de E2, E3 y E4. Los estudiantes aquí mencionados no logran resolver la problemática, aun cuando manifiestan conocimientos en el tema, desde nuestra perspectiva una de las causales de esta situación puede relacionarse con el uso de algoritmos de forma mecánica, lo que no les permite visibilizar ciertos comportamientos de las tablas entregadas.

Referencias bibliográficas

Alcaraz, R. (2006). Lo periódico una construcción a partir de la numerización del movimiento. Tesis de Maestría no publicada, Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero., México.

Arrieta, J. (2003).Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula. Tesis doctoral no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Pedagógico Nacional, México.

Bassanezi, R. C. (1994). Modelling as a teaching-learning strategy. For the learning of mathematics, 14(2), 31-35.

Blomhoj, M. (2004). Modelización Matemática. Una teoría para la práctica.

BlomhØj, M. (2009). Different Perspectives in Research on Teaching and Learning Mathematical Modelling. Categorizing the TSG21 Papers. In Blomhøj, M. & S. Carreira, (eds.) (2009). Mathematical applications and modeling in the teaching and learning of mathematics.

Proceeding from topic study group 21 at the 11 International congress on Mathematical education in Monterrey, México.

Biembengut, M. y Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos de Enseñar matemática. *Educación Matemática*, 16 (002), 105-125.

Castro, G. (2007).La analogía en la construcción del conocimiento, construyendo lo inversamente proporcional. Tesis de Maestría no publicada, Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero. México.

Cortés, G. (2003).Relaciones cuadráticas entre las variables desde la Perspectiva matemática a partir de observaciones. Tesis de Maestría no publicada, Unidad Académica de Matemáticas de la U.A.G., México.

Galicia, A. (2004).La construcción de lo exponencial, a partir de las prácticas sociales de modelación. Tesis de maestría no publicada, Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerreo, México.

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. ZDM, 38(3), 302-310. Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. ZDM, 38(3), 302-310.

Méndez, M. (2006).Las prácticas sociales de modelación multilineal: Modelando un sistema de resortes. Tesis de Licenciatura no publicada, Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autonoma de Guerrero, México.

Mochón, S. (1997). Modelos Matemáticos para Todos los Niveles. En R. M. Farfán, J. Lezama, A. Arellano, E. Oaxaca (Eds.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. México: Grupo Editorial Iberoamérica. 11,42-45.

Suárez, L., & Cordero, F. (2005). Modelación en Matemática Educativa. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 18(1), 639-644.

Villa, J. A. y Ruiz, M. (2009). Modelación en Educación Matemática. Una mirada desde los lineamientos y Estándares Curriculares Colombianos. Revista Virtual Universidad Católica del Norte (27), 1-21.

¿QUÉ APRENDIZAJES EVIDENCIAN LOS ESTUDIANTES DE INGENIERÍA AL INGRESAR AL CÁLCULO INICIAL?

Marvin Mendoza V., Leonora Díaz M.
U. Nacional Autónoma de Honduras — Honduras
U. de Los Lagos — Chile
vinmar28@hotmail.com, leonora.diaz@ulagos.cl

Resumen. Este reporte da cuenta de un estudio exploratorio que proporciona evidencias, en relación a debilidades y falencias que presentan los estudiantes en algunas de las temáticas que anteceden al cálculo inicial. Esta investigación se realizó con estudiantes de primer año universitario que han aprobado álgebra y geometría analítica, requisitos para el cálculo inicial en carreras de ingeniería en la UNAH. Investigaciones sostienen que los contenidos que se desarrollan antes de iniciar cálculo son fundamentales para el abordaje del mismo, puesto que el cálculo se desarrolla a partir de los conceptos de números reales, funciones y otros subtemas vinculados a éstos.
Palabras clave: Enseñanza, Aprendizaje, Dificultades, Categorización de errores

Abstract. This report is an exploratory research that provides evidence of the weakness and shortcomings that students have in topics related to calculus. This research takes as sample college freshman that have already approve algebra and geometry. These classes are requirements to study calculus in careers such as engineering. Other investigations provide evidence that the subjects students take before calculus are fundamental to understand it. This because the calculus used previous knowledge of: Real numbers, functions and other sub-topics related to them.
Key words: Teaching, Learning, Difficulties, Categorization of errors

Introducción

Artigue (1995), sostiene que las dificultades en la enseñanza del cálculo provienen de a) la complejidad matemática de los objetos básicos del cálculo; b) la conceptualización y formalización de la noción de límite en el núcleo de su contenido y su tratamiento en la enseñanza; y, c) la ruptura álgebra / cálculo, la brecha entre el pensamiento analítico y el algebraico.

El primer aspecto que menciona Artigue, es el punto que deseamos focalizar en este estudio. Para la autora, al iniciar la enseñanza del cálculo, los conceptos preliminares juegan un rol fundamental en la conceptualización del cálculo inicial: los números reales, funciones y situaciones que requieran de la aplicación de estas, y ecuaciones e inecuaciones de diferente naturaleza, entre otros.

En sus investigaciones, Artigue (1995) afirma que existen dificultades en relación a la temática que precede al cálculo y debe ser abordada a profundidad en los diferentes niveles de escolaridad, principalmente en el nivel medio donde se desarrollan las bases para la enseñanza del cálculo.

En el medio hondureño y en el latinoamericano, la realidad no es diferente de lo Artigue menciona con respecto a las dificultades, falencias que presentan los estudiantes al ingresar al cálculo, reportes de la Universidad Nacional Autónoma de Honduras del año 2010 y 2011, así lo reflejan.

Antecedentes

Chávez (1998) encontró dificultades asociadas con el concepto de función. Entre éstas destacan, la comprensión del concepto de variable; la distinción entre variable dependiente e independiente; la comprensión del concepto de función y los subconceptos de dominio y rango; las gráficas de funciones; el tránsito entre diferentes sistemas semióticos de representación, por ejemplo, del gráfico al numérico, del numérico al algebraico, del algebraico al gráfico, del verbal al algebraico. También se evidencia que los estudiantes no establecen con claridad las relaciones existentes entre los diferentes conjuntos de números. En ese sentido los estudiantes no comprenden los conjuntos numéricos (los enteros, las fracciones, los decimales, los números que se expresan con radicales y otros como π), todas estas categorías tienden a confundirse en la asociación entre número real y número decimal, de igual manera, se encontró que la asociación de los reales con la recta numérica que se promueve en los estudiantes no corresponde con la visión del continuo numérico de la matemática.

Respecto a la función, Artigue (1995) afirma que las investigaciones en funciones se identifican a través de categorías. La primera de estas es *la determinación de dificultades con la identificación de lo es una función*. En esta línea, las investigaciones realizadas mostraron la brecha existente entre las definiciones dadas por los estudiantes, de un lado, y los criterios utilizados en las tareas de reconocimiento de objetos funcionales o de clasificación de funciones y no funciones dadas en registros diferentes, del otro lado.

La segunda categoría está relacionada con *la flexibilidad proceso-concepto*. Los hallazgos encontrados en las investigaciones en esta dirección, detectaron dificultades para desarrollar la flexibilidad entre la función vista como un "proceso" y la función vista como una "entidad conceptual", se apoyaron en la distinción entre los dos status de los objetos matemáticos: el status operacional, dinámico y el status estructural, estático.

La tercera categoría se refiere a *las articulaciones de los registros simbólicos*. En esta línea, se encontraron dificultades para articular los diferentes registros simbólicos de las ex-presiones de la noción de función. En ella se muestran las dificultades cognitivas para transformar de un contexto matemático a otro con la finalidad de construir el concepto de función. En las de esta categoría se presentan conclusiones que los estudiantes privilegian lo algebraico ante los demás contextos matemáticos.

Por su parte, Vrancken, Gregorini, Engler, Müller y Hecklein (2009), sostienen que los conocimientos no se almacenan unos encima de otros. Para estas autoras, un aprendizaje significativo implica rupturas cognitivas y acomodaciones. La construcción del conocimiento no es

un proceso continuo, surge de desequilibrios, rupturas de conocimientos anteriores y reconstrucciones.

Desde la perspectiva de las autoras se puede afirmar, que todo aprendizaje significativo supone una construcción que se realiza a través de procesos complejos que llevan a estructurar un conocimiento nuevo. Según estas investigadoras, aún prevalece la tendencia a la enseñanza algorítmica y algebraica en los cursos previos al cálculo. Además, ellas mencionan que ante la emergencia de errores en el registro algebraico, no se les explica a los estudiantes las causas de sus errores y se apelan a que se hace necesario utilizar diferentes representaciones para abordar los problemas de manera más eficiente. A modo de ejemplo, de utilizar un registro gráfico, en lugar de usarlo como apoyo para comprender un error, éste se usa de manera muy limitada y en desconexión a lo algebraico.

Justificación

Este reporte de investigación tiene sus bases en diferentes problemáticas, entre las que concurren las investigaciones revisadas, rendimiento académico estudiantil y el interés por conocer diferentes aspectos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje del cálculo inicial en carreras de ingeniería. Las investigaciones mencionadas en los antecedentes, colaboraron para comprender la importancia de la temática preliminar antes de los conceptos de cálculo inicial. En ese sentido este trabajo va dirigido a analizar los entendimientos estudiantiles de temas que anteceden al cálculo.

El segundo aspecto para la realización de este trabajo de investigación lo constituye los informes en torno al cálculo inicial del 2010 y 2011, el cual refleja que los índices de reprobación en los cursos de cálculo inicial de la UNAH, y ese sentido hay una preocupación del profesorado para conocer a profundidad la complejidad de la problemática. Un tercer aspecto que da sustento a este trabajo, fue los resultados obtenidos de la investigación de realizado por Mendoza y Díaz en el 2012 con estudiantes de primer año de ingeniería de la UNAH, en donde se abordó la construcción del concepto de límite desde un contexto de geometría sintética. La investigación abrió el espacio para analizar los conceptos previos que los estudiantes ponen en escena cuando se enfrentan al cálculo inicial.

Objetivos del Estudio

Esta investigación se propone caracterizar las estrategias estudiantiles en la resolución de problemas que involucren funciones, modelación de funciones, representación de funciones, entre otros. Particularmente analizar los desempeños que presentan los estudiantes, cuando resuelven situaciones con funciones, diferentes marcos matemáticos. También interesa conocer las dificultades y falencias que presentan los estudiantes en las temáticas antes señaladas.

Marco Teórico

En este apartado de la investigación, se considerará dos elementos: los errores y algunos elementos de la teoría semiótica de Duval. Respecto al primero, en educación matemática los errores se abordan de diferentes perspectivas, una de estas es que los errores se presentan como una fuente de información valiosa que debe considerarse para construir y reconstruir aprendizajes.

Socas (1997) menciona que el error se debe tomar como la presencia de un esquema cognitivo no adecuado y no como consecuencia del desconocimiento de un saber específico.

Para Brousseau, Davis y Werner (1986) consideran que los errores se provocan a raíz de un procedimiento sistemático imperfecto que el alumno utiliza de modo consistente y con confianza.

Por su parte Mulhern (1989, citado en Rico 1995), señala características de los errores: Tienen su origen por lo general, de manera espontánea y sorprenden al profesor, son persistentes y difíciles de superar, son sistemáticos o por azar, y d) frecuentemente los alumnos no toman conciencia del error dado que no comprenden el significado de los símbolos y conceptos con que trabajan.

Actualmente se le considera al error parte medular e inseparable del proceso de aprendizaje. Pues a partir de ellos se puede diagnosticar, tomar partida de ello en el estudiantado, discutir con ellos sus errores, y presentarles situaciones que les hagan reflexionar y asumir nuevos retos cognitivos para sobrepasar los errores, construyendo de este modo nuevos esquemas y caminos cognitivos.

Un segundo aspecto que el marco teórico ha considerado, es la Teoría de las Representaciones. Según Duval (1999), se tiene acceso al conocimiento matemático a través de distintas representaciones. Este investigador distingue entre representaciones semióticas y mentales. "Las representaciones semióticas, es decir, aquellas producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado en lenguaje natural, fórmula algebraica, gráfico, figura geométrica...) no parecen ser más que el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales; es decir, para hacerlas visibles o accesibles a los otros. Las representaciones semióticas estarían, pues, subordinadas por entero a las representaciones mentales y no cumplirían más que funciones de comunicación" (Duval, 1999, pág.14).

En esta perspectiva teórica se considera que los objetos matemáticos se refieren a signo, concepto que aparece en la actividad matemática y del que se conocen sus propiedades, operaciones, teoremas, entre otros; por ejemplo, los números enteros, las funciones, los límites, los polinomios, las matrices. Estos objetos matemáticos a su vez tienen diferentes registros de representación, tales como: Gráfico o geométrico, numérico, analítico o algebraico, pictórico, lenguaje natural, entre los cuales puede ocurrir la actividad llamada **tratamiento**. Esta actividad comprende

acciones o manipulaciones sobre un objeto que pueden ser operaciones, procedimientos de tipo aritmético, gráfico, en registro natural, entre otros, sobre ese objeto al interior del registro. Si por el contrario se realizan acciones entre un registro y otro se realiza conversión.

Metodología

Se seleccionó una muestra de 30 estudiantes de Ingeniería del segundo semestre de 2011 de la UNAH, que matricularon cálculo. Antes de desarrollar el contenido de cálculo, se elaboró una prueba con 12 preguntas con base a contenidos que anteceden al cálculo. En la etapa de elaboración y diseño de la prueba, así como también en la recolección de la información y en el análisis de reactivos se utilizó metodología cualitativa. En el análisis de la información, se utilizó un análisis mixto: metodología cuantitativa para ilustrar algunos resultados mediante tablas, y cualitativa en el levantamiento de categorías. Para valorar los desempeños de los estudiantes, se elaboraron los indicadores o criterios de Resuelto completamente (RC) para los ítems que se resolvieron cumpliendo los objetivos señalados en cada grupo de reactivo, Resuelto Incompleto (RI) para los ítems que no resolvieron completamente de acuerdo a esos objetivos, Resuelto Incorrecto (RIC) para los ítems que no cumplieron ninguno de los objetivos trazados, No Resuelto (NR) para los ítems dejados en blanco.

Diseño de la prueba

Interesa determinar la posición de los estudiantes en relación al status absoluto de los entendimientos que se miden. En el análisis que se utiliza interesa responder qué porcentaje de ejecución alcanza el criterio por parte del desempeño del estudiante evaluado. Los diseñados consideraron temáticas de álgebra, geometría y trigonometría, que preceden al cálculo inicial.

Los reactivos del uno al cinco de la prueba diagnóstica, requieren la elaboración de modelos matemáticos de triángulo, rectángulo, cubo, ventana normanda y paralelepípedo sin tapa, atendiendo a ciertas condiciones. Los reactivos seis y siete, solicitan la construcción de una gráfica en un contexto cotidiano. El octavo se refiere al cálculo de imágenes de una función y el noveno solicita que se encuentre el dominio de una función. En el décimo reactivo el estudiante debe trazar tanto la gráfica de funciones, como identificar dominio, rango, intercepto, intervalos de crecimiento, intervalo de decrecimiento entre otros. En los reactivos onceavo y doceavo deberá identificar en un registro gráfico elementos de la función. En la tabla uno, se especifican los subgrupos de ítems descritos.

Subgrupo	Temática	Propósitos
Uno al cinco	Expresiones algebraicas de una cantidad de magnitud en función otra, para las figuras de triángulo, rectángulo, cubo, ventana normanda y paralelepípedo sin tapa.	• Analizar situaciones que involucran áreas y volúmenes. • Reconocer los elementos que intervienen para expresar áreas de triángulos, rectángulos y ventanas normadas, y, volumen de un paralelepípedo sin tapa. • Expresar áreas y volumen como relaciones funcionales de acuerdo a las condiciones enunciadas.
Seis y siete	Construcción de una gráfica dada una situación en contexto cotidiano.	• Reconocer una función de acuerdo a situaciones de contexto.
Ocho	Cálculo de imágenes de una función	• Calcular las imágenes de diferentes valores de una función cuadrática.
Nueve	Dominio de una función	• Determinar el dominio de dos funciones reales, una racional y otra irracional.
Diez	Función, clasificación y elementos tales como dominio, rango, interceptos, intervalos de crecimiento, intervalo de decrecimiento entre otros. Además de gráfica de funciones.	• Determinar diferentes elementos tales como dominio, rango, intervalos de crecimiento, intervalos de decrecimiento de funciones lineales, cuadráticas, valor absoluto, y funciones definida a trozos. • Construir la gráfica de funciones lineales, cuadráticas, valor absoluto y definido a trozos.
Once y doce	Reconocimiento de diferentes elementos de una función dada su representación gráfica.	• Obtener diferentes elementos de la función dada su gráfica. • Determinar dominio, rango, imágenes, pre imágenes, intervalos de crecimiento, intervalos de decrecimiento de la función dada su representación gráfica. • Determinar los puntos de intersección dada dos gráficas de funciones.

Tabla 1. Subgrupo de actividades, temática y propósitos en la prueba diagnóstica.

Resultados

Se presentan resultados sistematizados en categoría los diferentes ítems de la prueba.

Indicador	Cantidad de estudiantes
Resuelto Completamente(RC)	8
Resuelto Incompleto (RI)	12
Resuelto Incorrecto(RIC)	10
No Resuelto (NR)	0

Tabla 2. Resultados de los ítems uno al cinco de la prueba.

Los resultados de la tabla anterior refleja que ocho de los treinta estudiantes desarrollaron los cinco problemas de manera correcta, es decir, que cumplieron los objetivos propuestos en los ítems, doce estudiantes realizaron algunos ejercicios de manera correcta pero no llegaron a terminar todos los ítems y diez estudiantes no desarrollaron ningún ejercicio correctamente. De las dificultades evidenciadas en las producciones estudiantiles, se detectó el problema de relacionar las variables para elaborar un modelo. Se presentaron errores en establecer relaciones de áreas y volúmenes de diferentes figuras.

Indicador	Cantidad de estudiantes
Resuelto Completamente(RC)	2
Resuelto Incompleto (RI)	10
Resuelto Incorrecto(RIC)	10
No Resuelto (NR)	8

Tabla 3. Resultados de ítems seis y siete de la prueba.

Los resultados de estos ítems reflejan que los estudiantes respondieron de manera incorrecta, no respondieron o respondieron incompleto el problema. Estos tres indicadores señalados, denotan que los estudiantes presentan dificultades para construir gráficas, partir de una expresión verbal, tal como señala Duval (1994), el tránsito entre registros, además de la construcción a partir de acciones cognitivas. Además se evidenció las dificultades que alude Artigue (1995) respecto a la construcción de las funciones a partir de situaciones cotidianas.

Indicador	Cantidad de estudiantes
Resuelto Completamente(RC)	4
Resuelto Incompleto (RI)	15
Resuelto Incorrecto(RIC)	6
No Resuelto (NR)	5

Tabla 4. Resultado de ítem diez de la prueba.

Los resultados anteriores revelan que gran parte de los estudiantes presentan dificultades y cometen errores para encontrar dominio de la función, graficar funciones, determinar: intersecciones con los ejes coordenados, intervalos de crecimiento e intervalo de decrecimiento. Además asociar las gráficas con sus expresiones funcionales. Los resultados mostrados en la tabla refleja que solo un pequeño porcentaje de los estudiantes que se les aplicó la prueba diagnóstica, resolvieron de manera correcta todos los elementos solicitados en la misma, mostrando falencias en la comprensión de su expresión funcional de cada gráfica.

Indicador	Cantidad de estudiantes
Resuelto Completamente(RC)	2
Resuelto Incompleto (RI)	8
Resuelto Incorrecto(RIC)	12
No Resuelto (NR)	8

Tabla 5. Resultado de ítems 11 y 12 de la prueba diagnóstica.

Los resultados reflejan que solo dos estudiantes de los treinta estudiantes, pudieron resolver correctamente los dos ejercicios. La mayoría de los estudiantes se ubicó en resolver de manera incompleta, doce estudiantes contestaron de manera incorrecta y ocho no contestaron. En los dos últimos casos, se observa que los estudiantes presentan dificultades para leer e interpretar gráficas, cálculo de pre imágenes, imágenes, estimar soluciones gráficamente, reconocer los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de una gráfica.

Conclusiones

Los resultados del instrumento aplicado a los estudiantes de Ingeniería de UNAH corrobora las dificultades que reporta las investigaciones de Artigue (1995) y Chávez (1998) y Duval(1999) donde se mencionan dificultades del concepto de función y de sus elementos, modelación matemática, relación de dos variables, lecturas, construcción y comprensión de gráfica de funciones. Se observa que los estudiantes en sus desempeños muestran que prevalece el desarrollo algebraico. Se observó errores en cuanto a la identificación del tipo de función, al trazado de gráficas, el cálculo tanto de imágenes como de pre imágenes, es decir en identificar la relación funcional. Se encontraron dificultades para elaborar modelos matemáticos de acuerdo a ciertos parámetros. Los resultados obtenidos reflejan abren posibilidades a otro tipo de intervenciones didácticas para abordar la temática en cuestión.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. En P. Gómez (Ed.). Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (pp. 33-59). Bogotá: Iberoamérica.

Chávez, H. (1998) Los problemas alrededor del concepto de límite y su enseñanza a través del uso de la computadora. Memorias IX Seminario nacional microcomputadoras en la Educación Matemática. México.

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes.

Engler, A., Vrancken, S., Hecklein, M., Müller, D., & Gregorini, M. I. (2007). Análisis de una propuesta didáctica para la enseñanza de límite finito de variable finita. Union, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 11, 113-132.

Mendoza y Díaz (2012). Significando el paso al límite en estudiantes que inician cálculo. Tesis de maestría no publicada. Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán. Tegucigalpa, Honduras.

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas.

Socas Robayna, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. In La educación matemática en la enseñanza secundaria (pp. 125-154). Horsori.

CONSTRUCCIÓN DE GRÁFICAS DE FUNCIONES RACIONALES

Beatriz Alejandra Veloz Díaz y Rosa María Farfán Márquez
Cinvestav. México
betty.vdiaz@gmail.com

Resumen. En este trabajo, el lector encontrará una manera rápida y sencilla de obtener la gráfica de una función racional con la ayuda de elementos básicos y característicos de los polinomios. El método propuesto permite bosquejar gráficas a partir de un análisis visual, utilizando herramientas analíticas, numéricas y sus relaciones; se basa en operaciones básicas entre gráficas a través de tres consideraciones fundamentales: La identificación de las raíces de la función, el análisis de regiones y la multiplicidad de las raíces
Palabras clave: Graficación, visualización, funciones racionales
Abstract. In this paper, the reader will find a quick and simple way to get the graph of a rational function with the help of basic elements and characteristic of the polynomials. The proposed method allows graphical sketch from a visual analysis using analytical tools, numerical and their relationships; it is based on basic operations between graphs through three fundamental considerations: Identifying the roots of the function, the analysis of regions and the multiplicity of the roots
Key words: Graphing, visualization, rational functions

Introducción

En este trabajo se presenta una manera rápida y sencilla de obtener la gráfica de una función racional con la ayuda de elementos básicos y característicos de los polinomios. Graficar funciones es una actividad muy útil para apreciar visualmente los cambios en un fenómeno descritos por dicha función, esta es una de las razones por las que se recurre al Método de las Operaciones propuesto por (Cantoral & Montiel, 2001) el cual permite bosquejar gráficas a partir de un análisis visual, utilizando herramientas analíticas, numéricas y sus relaciones.

Estas herramientas son necesarias para el dominio del Método, por tanto, los principales conocimientos para utilizarlo son: factorización de polinomios, conocer los distintos tipos de asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas), graficación de funciones pares e impares, identificación de raíces, entre otros.

El método se basa en operaciones básicas entre gráficas a través de tres consideraciones fundamentales:

1. La identificación de los cruces de la gráfica de la función con el eje X, es decir, la identificación de las raíces de la función.
2. La determinación de regiones clave y sus signos (el análisis de regiones).
3. La multiplicidad de las raíces.

La elaboración de las gráficas de las funciones racionales, requiere de algunas definiciones que ayudarán a desarrollar una indagación profunda y exhaustiva de la información representada en ella:

- Una *función racional* $y = f(x)$ es una función que tiene la forma:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \mathrm{L} \ + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \mathrm{L} \ + b_1 x + b_0}$$

Donde P y Q son polinomios, cumpliendo la condición de que $Q(x) \neq 0$.

- En Matemáticas, la *gráfica de una función* $y = f(x)$ es la visualización de la correspondencia entre los elementos del conjunto dominio y los del conjunto imagen mediante su representación iconográfica.

Método

1. Analizar los grados de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$.
2. Partir de una función expresada como el producto de factores irreducibles, tanto en el numerador como en el denominador.
3. Identificación de los cruces y las indeterminaciones (asíntotas) de la gráfica de la función con el eje **X**.
   - Los valores que anulan el numerador, serán conocidos como raíces de la función.
   - Los valores que anulan el denominador, son las asíntotas verticales.
4. Determinación de regiones clave y sus signos dividiendo en intervalos y utilizando valores de prueba.
5. La multiplicidad de las raíces y las asíntotas verticales.
6. Determinar la existencia de asíntotas horizontales o de asíntotas oblicuas.
7. Establecer el comportamiento de la gráfica de la función cuando $x \to \pm\infty$.

Ahora veamos con detalle las características de cada uno de los puntos que se incluyen en el método de las operaciones para funciones racionales.

- Grados de los polinomios.

Identificar los grados de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ permitirá, en primer lugar, la clasificación de la función racional en tres casos, a través de los cuales será posible guiar la construcción de la

gráfica. Dichos casos que se muestran a continuación, debieron ser vistos con anterioridad, sino divididos de esta manera, sí al menos se debe estar familiarizado con ellos para un entendimiento más fluido. En segundo lugar, se podrá comprender el comportamiento de la función para cuando *x* tiende a $\pm\infty$.

Caso 1

$$f(x) = \frac{k}{x} \qquad k \in \mathbb{R}$$

Para graficar este tipo de funciones sólo basta con tener en cuenta el valor de *k*.

a. Si *k>0* entonces las ramas de la hipérbola estarán en el *primer* y *tercer* cuadrante, como en la figura 1:

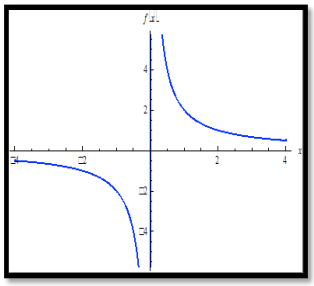


Figura 1.

b. Si k<0 entonces las ramas de la hipérbola estarán en el segundo y cuarto cuadrante, como en la figura 2:

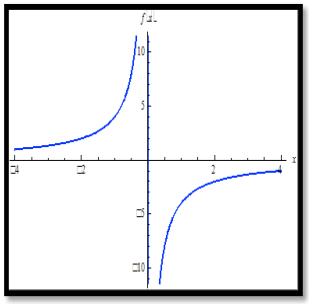


Figura 2.

Caso 2

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, \qquad a, c \neq 0$$

En este caso, se identifican una asíntota horizontal definida por las constantes *a* y *c*, de la forma $y = \frac{a}{c}$ y una asíntota vertical especificada por $y = \frac{-d}{c}$. Observa la figura 3:

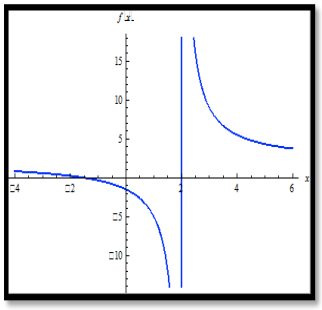


Figura 3.

Caso 3

$$f(x) = \frac{a_n(x-\gamma_1)(x-\gamma_2)\dots(x-\gamma_n)}{b_n(x-\beta_1)(x-\beta_2)\dots(x-\beta_n)} a_n \cdot b_n \neq 0$$

Este tipo de función racional, requiere que se consideren los demás pasos del método de las operaciones. Para el grado de la función racional se tomarán en cuenta el grado del numerador y el grado del denominador:

las potencias menores de x
son irrelevantes cuando $x \to \pm\infty$

$$f(x) = \frac{a_n x^n \boxed{+ a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}}{b_m x^m \boxed{+ b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}}$$

Al observar el grado de la función, se podrá determinar su *comportamiento global*.

- Si $n = m$ el grado de la función es 1, su comportamiento global será como el de una constante y tendrá asíntota horizontal en $\frac{a_n}{b_m}$; osea que la función tenderá a ese valor cuando $x \to \pm\infty$.
- Si $n < m$ el comportamiento global de la función tendrá la forma de $\frac{1}{x}$, su asíntota horizontal será en cero, al igual que tenderá a cero cuando $x \to \pm\infty$.
- Si $n > m$ el grado de la función será la resta del grado del numerador menos el grado del denominador, tenderá a infinito cuando $x \to \pm\infty$ pero si la diferencia de los grados es uno, entonces, se tiene una asíntota oblicua.

- Esto es, que si el grado de la función es par, el comportamiento global tendrá la forma de una parábola.
- Y si el grado de la función es impar, su comportamiento global tendrá la forma de una función lineal (recta, cúbica, etc.)

Determinación de regiones clave y sus signos dividiendo n intervalos y utilizando valores de prueba

El análisis de las regiones clave, se puede apoyar del uso de una tabla, en la cual se coloquen los intervalos en los que se secciona el eje X, considerando tanto los puntos donde se ubican las raíces como aquellos en los cuales se ubican las asíntotas verticales, un valor de prueba y el signo resultante de cada binomio. El objetivo es analizar el comportamiento de los signos en cada una de las regiones definidas por los intervalos y así determinar si la gráfica está por encima o por debajo del eje X, ejemplo:

Intervalo	Valor de prueba	Operaciones	Signo
(-∞ , -2)	-3	(-)(+)(-) =	+
(-2 , 0)	-1	(-)(+)(+)=	-
(0 , 3)	2	(+)(+)(+)=	+
(3 , +∞)	4	(+)(-)(+)=	-

Multiplicidad de las raíces

Sea $(x-c)^m$ un factor de *f*, donde $m \geq 1$ es natural, se dice que *x* - *c* tiene multiplicidad *m* y se caracteriza de la siguiente manera:

- Si *m* = *1*, *x* – *c* es de multiplicidad simple.
- Si *m* es par, *x* – *c* es una raíz doble/repetida.
- Si *m* es impar, *x* – *c* es una raíz de multiplicidad impar.

Y al graficarlas ocurre como en la figura 4:

Figura 4.

Para raíces y asíntotas se observa un comportamiento local.

Nótese que al hablar de raíces, la expresión "*x* – *c*" no es la raíz. La raíz es el valor *x* = *c*.

Asíntotas verticales

El comportamiento de la gráfica de *f* cuando existe una asíntota vertical, depende de si la multiplicidad del factor es par o impar, ya que:

- Si la multiplicidad de la asíntota es PAR, la gráfica es simétrica respecto a la asíntota (figura 5).
- Si la multiplicidad de la asíntota es IMPAR, la gráfica es asimétrica respecto de la asíntota (figura 6).

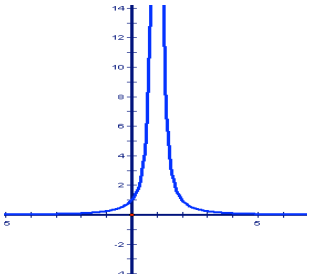


Figura 5.

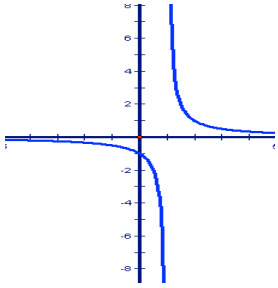


Figura 6.

Ejemplo $$y = \frac{(x-5)^2(x+1)}{x-2}$$

Se observan sus características:

El grado total de la función: 3-1=2.

Signo: positivo.

Comportamiento global: Parábola.

Sus raíces están en: -1 y 5.

Asíntota en: 2

- El comportamiento local alrededor del 5 es como el de una función cuadrática
- El comportamiento local alrededor de -1 es el de una recta.

Un primer bosquejo se observa en la figura 7:

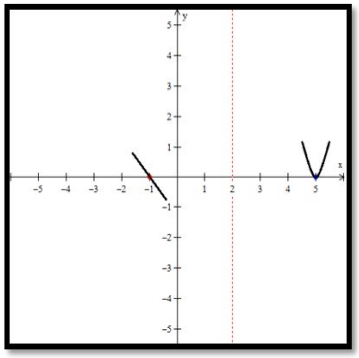


Figura 7.

Ahora, se hace un análisis en cada intervalo para encontrar el signo de la función.

Intervalo	Valor de prueba	Operaciones	Signo
(-∞ , - 1)	-2	$\frac{(+)(-)}{(-)} =$	+
(- 1 , 2)	0	$\frac{(+)(+)}{(-)} =$	-
(2 , 5)	3	$\frac{(+)(+)}{(+)} =$	+
(5 , ∞)	6	$\frac{(+)(+)}{(+)} =$	+

Nótese que alrededor del punto 2 el comportamiento local es de la forma de la gráfica de $\frac{1}{x}$.

Por lo que el bosquejo completo queda como en la figura 8; en la figura 9 se aprecia la gráfica exacta, utilizando software:

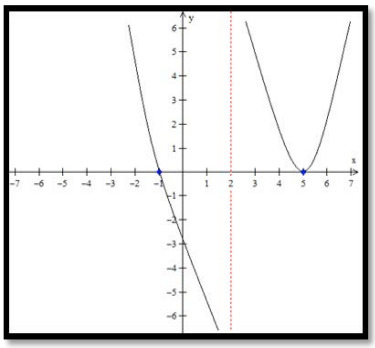


Figura 8.

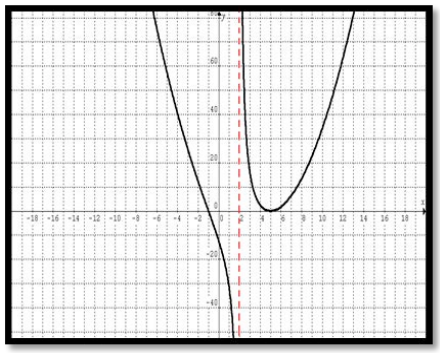


Figura 9.

Todos los elementos gráficos y conceptos matemáticos utilizados en este Método deben pertenecer al conjunto de conocimientos previos de los usuarios de éste, tanto alumnos como profesores; de esta manera el uso del Método tendrá una fluidez que se podrá agilizar con la

práctica y realización de distintos ejercicios para dominarlo por completo. Y siempre se podrá utilizar algún software para hacer la comprobación, sin embargo, esto se recomienda sólo al principio cuando se esté aprendiendo, ya que el objetivo es prescindir de de dichas herramientas computacionales.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R.; Montiel, G. (2001). *Funciones: visualización y pensamiento matemático*, México: Editorial Pearson Educación.

Farfán et al (2000)**.** Lenguaje algebraico y pensamiento funcional En Cantoral R. (coordinador) *Desarrollo del pensamiento matemático*, pp. 89-144. México: Trillas.

HERRAMIENTAS, ARGUMENTOS Y PROCESOS EN PRÁCTICAS DE SIMULACIÓN

Melvis Ramírez Barragán y Jaime Arrieta Vera
Universidad Autónoma de Guerrero - Unidad Académica de Matemáticas. México
rbmelvis1789@gmail.com, jaime.arrieta@gmail.com

Resumen. Este reporte es parte de una investigación en curso que estudia prácticas de simulación y las herramientas que se construyen para su ejercicio, esta se desarrolla en el marco de la socioepistemología. La simulación se entiende como prácticas recurrentes de diferentes comunidades con la intencionalidad de describir fenómenos a partir de sus modelos. En este trabajo solo abordamos la simulación de fenómenos considerando modelos lineales, para ello analizamos dos puesta en escena de un diseño de aprendizaje con estudiantes de nivel medio superior y de posgrado. Reportamos las herramientas, procesos y argumentos de los actores al simular
Palabras clave: Práctica de Simulación, socioepistemología, herramientas
Abstract. This report is part of an ongoing investigation that studies simulation practices and tools that are built for exercise, this takes place in the framework of the socioepistemology. The simulation is defined as recurrent practices in different communities with the intention of describing phenomena from their models. In this paper we address only the simulation of phenomena considering linear models, for this look at two staging of learning design students from high school and graduate. We report the tools, processes and arguments of the actors to simulate
Key words: Simulation practices, socioepistemology, tools

Introducción

La Simulación

La simulación se ha implementado en las actividades académicas de algunas áreas de estudio. Se recurre a la simulación como metodología de enseñanza-aprendizaje, herramienta de investigación, para la evaluación, para la toma de decisiones, entrenamiento, o *para el estudio de fenómenos a partir modelos de comportamientos.*

Una de las áreas que emplea la simulación como una metodología de enseñanza-aprendizaje es la medicina. Según Ardanza y Salas (1995), "La simulación consiste en situar a un educando en *un contexto que imite algún aspecto de la realidad y en establecer en ese ambiente situaciones, problémicas o reproductivas, similares a las que él deberá enfrentar* con individuos sanos o enfermos, de forma independiente, durante las diferentes estancias clínico-epidemiológicas o las rotaciones de su práctica pre-profesional (internado)" (sección de Fundamentos, párr. 1). El ejercicio de esta práctica de simulación permite que los estudiantes se prepararen profesionalmente sin necesidad de poner en peligro la vida de las personas, generando experiencias profesionales y desarrollo de capacidades para la toma de decisiones pertinentes.

En aviación se recurre a la simulación de forma similar que en medicina, *sitúan a los futuros pilotos en un vuelo normal o en posibles situaciones problémicas* a las que el piloto tenga que enfrentar, esto ayuda a tomar decisiones pertinentes ante las situaciones. La simulación se realiza a partir de un simulador de vuelos que se desarrolló a partir de la modelación de comportamientos del

fenómeno de vuelo, posteriormente los ingenieros en informática *toman dichos modelos para crear un programa que simule cada comportamiento del fenómeno*, y con esto se elaboran espacios virtuales que lo simulen. Es decir, la simulación es una forma de abordar el estudio de cualquier sistema *dinámico real en el que sea factible poder contar con un modelo de comportamiento* y en el que se puedan distinguir las variables y parámetros que lo caracterizan.

Por tanto la simulación permite que un contexto se generen aspectos de un fenómeno donde se puedan establecer situaciones problémicas o reproductivas para el estudio de dicho fenómeno a partir de modelos de comportamientos del mismo.

Según la RAE simular es imitar algo, pero no se trata solo de imitar, en nuestro caso no se tratar solo de imitar fenómenos, sino de construir y emplear recursos, estrategias, herramientas, procedimientos que nos ayuden a intervenir en algún fenómeno. Los recursos, procedimientos y argumentos para simular son variados en las prácticas de simulación.

Las prácticas de simulación

La aproximación teórica con que se aborda este estudio tienes dos principios en la que se fundamenta, el primero es referente a la problemática que atiende la matemática educativa que es explicar cómo se construye conocimiento matemático y el segundo es que el conocimiento matemático no surgió para vivir en la escuela. En base a estos principios deseamos realizar aportaciones hacia la problemática de la matemática educativa y trabajar con una práctica como puente entre la matemática escolar y nuestro entorno.

Para ello proponemos las *prácticas de simulación* como puente, la cual caracterizamos como *prácticas recurrentes y vivenciadas por diferentes comunidades con la intención de desplegar las posibilidades del fenómeno sin que este suceda, a partir de la manipulación de los parámetros de sus modelos*. Por ejemplo un agente de ventas de autos recurre a la simulación créditos para vender, los meteorólogos recurren a la simulación del clima para pronosticar el clima, los ingenieros civiles simulan las cargas que soportarán ciertas vigas, entre otros.

La simulación evoca la descripción de un fenómeno a partir de sus modelos, descripción en el sentido de la utilización de recursos para dar una idea aproximada del fenómeno, haciendo la distinción entre la simulación y el fenómeno.

Esta investigación intenta aportar elementos para caracterizar las prácticas de simulación, específicamente las prácticas de simular fenómenos a partir de modelos lineales. Para ello elaboramos diseños de aprendizaje, donde los actores de las puestas en escena simulen fenómenos

a partir de modelos lineales, proporcionando evidencias de las herramientas que utilizan los actores al simular, los procedimientos, y los argumentos que esgrimen.

Metodología de la investigación

Esta investigación tiene como metodología a la ingeniería didáctica. Los actores que participan en las puestas en escena de los diseños de aprendizaje son estudiantes de dos niveles: bachillerato y profesorado.

Los actores de nivel bachillerato son 18 estudiantes cuya edad es entre 15 y 18 años, quienes forman parte de un Club de Matemáticas del Centro de Estudios Tecnológicos Industriales y Servicios (Ctis) N° 116 del Puerto de Acapulco del estado de Guerrero. Los estudiantes de Profesorado en Matemáticas que participan son 14 estudiantes de la Universidad Católica Silva Henriquez de Santiago de Chile de un curso de modelación.

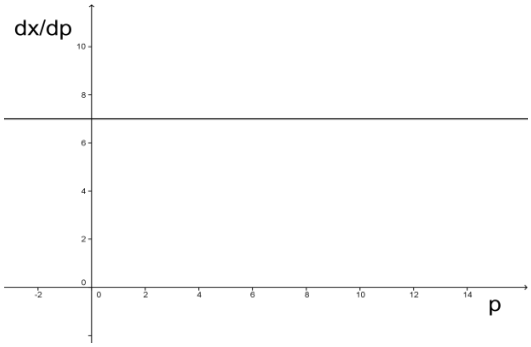


Figura 1. Modelo gráfico diferencial de la elasticidad de un resorte.

p	$\frac{dx}{dp} = 7$
0	--
20	1.3
30	1.1
45	1.4
75	1.2

Figura 2. Modelo numérico diferencial de la elasticidad de un resorte.

Para esta investigación los grupos de estudiantes se organizaron en equipos para generar trabajo colaborativo. El número de integrantes de los equipos variaron de dos a cinco personas de acuerdo a la cantidad de alumnos que conformaban el grupo.

Las puestas en escena de los diseños de aprendizaje fueron posteriores a trabajar con los diseños de modelación de la elasticidad de resortes propuestos por Arrieta (2003). Los diseños para esta investigación están soportados en la simulación de la elasticidad de resortes a partir de modelos diferenciales como las gráficas diferenciales, tablas y/o ecuaciones diferenciales. En los diseños se les solicita a los actores reproducir el fenómeno de elasticidad a partir de los modelos diferenciales dados.

Los medios utilizados para recoger información y evidencia de las exploraciones realizadas con los actores son grabaciones de audio y video, fotografías y producciones escritas por los propios estudiantes.

Diseño de aprendizaje

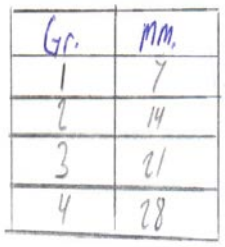
El diseño consiste en la descripción de la elasticidad de resortes a partir de modelos diferenciales. Consta de tres fases, en la primera se considera como modelo la ecuación diferencial $\frac{dx}{dp} = 7$mm/gr, de la elasticidad de un resorte y se solicita a los estudiantes reproduzcan el fenómeno; en la segunda fase se considera como modelo de partida una gráfica diferencial (figura 1), para la simulación del resorte; y en la tercera fase la simulación se inicia considerando una tabla diferencial de datos con ruido (figura 2) (García 2011).

Análisis de las producciones de la puesta en escena, simulación a partir de la ecuación diferencial

En la primera fase se solicita a los estudiantes simular la elasticidad de un resorte a partir de uno de sus modelos, la ecuación diferencial $\frac{dx}{dp} = 7$mm/gr.

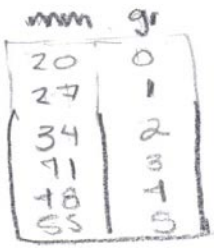
Los estudiantes reproducen el fenómeno utilizando como recurso inicial el lenguaje natural, es decir describen con sus propias palabras el comportamiento del fenómeno de acuerdo al modelo: "por cada gramo que le vayas poniendo al resorte va ir aumentando 7 milímetros", "el resorte aumenta su longitud en 7 mm por gramo".

Posteriormente utilizan un segundo recurso para simular, las tablas de datos (figura: 3 y 4). Construyen la tabla de datos calculando los valores de las posiciones del resorte a partir de la ecuación diferencial. Un punto de discusión a resaltar es respecto a la posición inicial que no es proporcionada por la situación. El incremento en el peso que se coloca en el portapesas lo consideran constante, por ejemplo, en el caso de la figura 3 y 4, el incremento es de 1 gramo.



Gr.	mm.
1	7
2	14
3	21
4	28

Figura 3.



mm	gr
20	0
27	1
34	2
41	3
48	4
55	5

Figura 4.

Simulación numérica de estudiantes de nivel medio superior.

Con los datos obtenidos en su tabla, los estudiantes optaban por utilizar como recurso para simular a las gráficas, construyen modelos gráficos lineales, como por ejemplo el que se muestra en la figura 5.

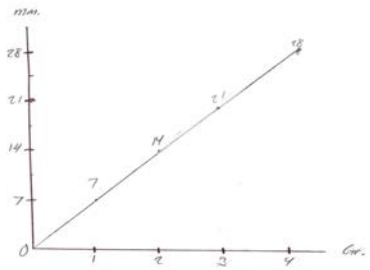


Figura 5. Simulación gráfica de estudiantes de nivel medio superior.

Análisis de las producciones de la puesta en escena, simulación a partir de la gráfica diferencial

En la segunda fase, el modelo de partida para la simulación es la gráfica diferencial $dx/dp - peso$ (Figura 1). Se observa que el peso aumenta pero la razón de cambio se mantiene, es decir es constante. Los recursos iniciales son los numéricos. Construyen tablas de datos a partir de los datos que proporciona la gráfica diferencial.

Análisis de las producciones de la puesta en escena, simulación a partir de la tabla diferencial

En esta fase se solicita a los estudiantes reproduzcan el fenómeno a partir de una tabla diferencial (figura 2). En esta fase algunos alumnos tienen dificultades para comprender los datos de la tabla por los efectos del ruido en los datos, ya que las razones de cambio varían.

p	$\frac{dx}{dp}$	x
0	--	0
20	1.3	26
30	1.1	37
45	1.4	58
75	1.2	94

Figura 6. Simulación de los estudiantes a partir del modelo numérico diferencial de la elasticidad de un resorte.

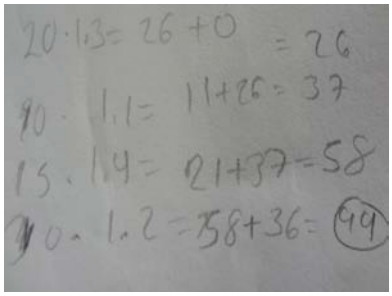


Figura 7. Proceso de los estudiantes al simular a partir del modelo numérico diferencial de la elasticidad de un resorte.

Un equipo de estudiantes propone la tabla de la figura 6. El procedimiento que utilizan para construirla es primero considerar una posición inicial, generalmente consideran el cero. Posteriormente multiplican el incremento de *p* por la razón de cambio y se la suman a la cantidad anterior de la columna *x,* como se muestra en la figura 7. Por ejemplo, para determinar la posición con 30 gramos, multiplican el incremento de *p,* o sea 10 gramos, por cuanto se estira por gramo, o sea 1.1 milímetro por gramo, y lo suman a la distancia que ya llevaban, 26, dando como resultado 37.

El recurso algebraico que formularon para obtener los datos es el que se muestra a continuación.

$$\textit{Posición inicial} \longrightarrow \Delta p \longrightarrow \Delta p \frac{\Delta x}{\Delta p} \longrightarrow \Delta p \frac{\Delta x}{\Delta p} + x_{n-1} \longrightarrow x_n = \Delta p \frac{\Delta x}{\Delta p} + x_{n-1}$$

Figura 8. Método para construir una tabla de datos que simule la elasticidad de un resorte a partir de un modelo numérico.

La discusión en la primera fase respecto de la posición inicial da la pauta para considerar que existe una constante que depende de la posición inicial. A partir de estos datos algunos equipos presentan como recurso de simulación la ecuación algebraica $x = 1.25p + c$. Para esto toman el promedio de las razones de cambio de la tabla proporcionada: *"como tenemos diferentes razones de cambio, yo tomo el promedio y lo uso para plantear una ecuación, no va ser exacta pero es aproximada. Y c porque esta es una constante que no sábenos qué valor va a tener, no nos dicen que posición tiene cuando tiene cero peso".*

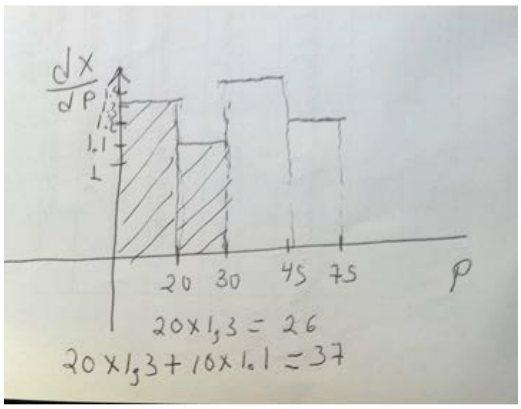


Figura 9. Simulación de la elasticidad de los resortes como suma de áreas de los rectángulos.

Es de gran relevancia la siguiente intervención de Camilo, un estudiante de profesorado: *"Yo tengo otro método, graficas la tabla* (figura 9) *y luego inicias con cero. Luego colocamos 20 gramos y la tabla nos dice que se estira 1.3 mm por cada gramo, entonces son 26 milímetros. Que es lo mismo que multiplicar la base de este rectángulo por la altura, o sea el área. Bueno, luego, colocamos 10 gramos más. ¿Cuánto se estira? Pues nos indica la tabla que se estira 1.1 milímetros por gramo, o sea, 11 milímetros y se lo sumamos a lo que ya llevábamos. Nos da 37 milímetros. Es como sumar el área de los rectángulos".*

Posteriormente en otra participación Camilo agrega:

"Al principio no le entendía al método del equipo dos (figura 8) *pero veo que es el mismo que el mío".*

Estas participaciones son muy relevantes porque articulan diferentes recursos, como los gráficos, numéricos y de lenguaje natural, con herramientas, procedimientos y argumentos para la simulación de la elasticidad de un resorte a partir de uno de su modelo numérico diferencial.

Conclusiones

Los estudiantes de bachillerato y profesorado que participan en la puesta en escena de los diseños de aprendizaje utilizan gráficos lineales, expresiones algebraicas (ecuaciones lineales), tablas de datos, pictogramas y lenguaje natural que dan muestra de la diversidad de los recursos para la simulación. Las herramientas que construyen están relacionadas con la integral de una ecuación diferencial, una gráfica diferencial y/o una tabla diferencial. Utilizan diferentes procedimientos en cada caso, es relevante el método expuesto en la figura 8 y el procedimiento de Camilo.

A pesar de que los estudiantes de profesorado ya han cursado un curso de cálculo diferencial e integral no relacionan sus procedimientos con el cálculo de integrales.

Los argumentos que emplean los estudiantes para justificar sus producciones son en cada caso diferentes y destacamos los argumentos que se refieren a darle sentido a la constante de integración como la posición inicial, o como la posición del portapesas cuando el peso es cero.

Los estudiantes construyen y utilizan herramientas, argumentos y procedimientos diversos que caracterizaremos en estudios posteriores.

Referencias bibliográficas

Ardanza, P, y Salas, R. (1995). *La simulación como método de enseñanza y aprendizaje.* Rev. Cubana Educ Med Sup**.** Vol. 9(1-2)

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de la modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis doctoral no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN. México.

García, C. (2011). *Prácticas y herramientas matemáticas en situaciones con ruido en los datos*. Tesis de maestría no publicada. Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Mendez, M. (2007). La *experiencia como la evolución de las practicas: La experiencia de modelar linealmente situaciones análogas.* Tesis de maestría no publicada. Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Ruiz, M., Pérez, M. (2002). La Simulación como Instrumento de Aprendizaje. En Actas XIII de la ASELE , Murcia.

ESTUDIO DE PRÁCTICAS DE MODELACIÓN CON ESTUDIANTES DE MÉXICO Y CHILE

Miriam Carolina Ortiz Torrescano, Jaime Arrieta Vera y Leonora Díaz Moreno
Universidad Autónoma de Guerrero. México
Universidad de Los Lagos. Chile
miriam_carolin@hotmail.com, jaime.arrieta@gmail.com, leonoradm@gmail.com

Resumen. Este trabajo es parte de una investigación que estudia Prácticas de Modelación en diversos escenarios con la intención de analizar las herramientas que surgen en este proceso. Se reportan experiencias con estudiantes, de nivel medio superior y superior de México y Chile, respectivamente, que participaron en puestas en escena de un diseño de aprendizaje basado en la Modelación Lineal. Sus producciones muestran argumentos, herramientas y procedimientos que utilizan al modelar, su análisis presenta invariantes y particularidades que exhiben el rol del estudiante en cada escenario. El trabajo se enmarca en la socioepistemología como perspectiva teórica
Palabras clave: Modelación, Socioepistemología
Abstract. This research is a part of a research that analyses Modeling Practices in several environments aiming to study the arising tools in this process. Experiences related to students from High-school and College levels from Mexico and Chile, respectively; who took part in performances about learning design based in Lineal Modeling. Their productions show arguments, tools and procedures that they use when they are modeling, their analysis present invariants and particularities that show up the student's role in every scenery. This research is oriented on socioepistemology as a theory perspective
Key words: Modeling, Socioepistemology

Introducción

La experiencia que se reporta en este trabajo, es parte de una investigación exploratoria que estudia las prácticas de modelación en dos escenarios diferentes, con dos grupos diferentes, en dos países diferentes y tuvo como antecedentes los trabajos de Arrieta (2003), Méndez (2005), entre otros.

Se estudió la puesta en escena de un diseño de aprendizaje basado en la modelación lineal, y se analizaron las producciones de los actores, encontrándose invariantes y particularidades que exhiben el rol del estudiante en cada escenario.

Las Prácticas de modelación

La modelación ha sido fuertemente defendida en las últimas décadas en el ámbito educativo como uno de los procesos sustantivos a la formación matemática escolar.

Bajo la perspectiva Socioepistemológica, consideramos que la modelación es una práctica recurrente en diversas comunidades no escolares como cardiólogos, economistas, bioquímicos, entre otros, estas Prácticas de Modelación norman a dichas comunidades a la vez que les otorgan

identidad. Las prácticas de modelación de una comunidad se muestran en las intencionalidades, las herramientas y los procesos a que recurren al modelar.

De esta manera la modelación la concebimos como una Práctica Social.

Se han inscrito diversos trabajos, los cuáles sugieren que la modelación matemática, particularmente concebida como una Práctica Social, tiende puentes entre la escuela y su entorno (Arrieta, 2003). En algunas investigaciones se han dedicado a estudiar las prácticas de diferentes comunidades cuyos productos son diseños de aprendizaje con base en Prácticas de Modelación y sustentados por la Ingeniería Didáctica como metodología. Algunas otras se han encargado de probar estos diseños con grupos experimentales como en Galicia y Arrieta (2005), Méndez y Arrieta (2007), entre otros.

La modelación que se suscribe (Arrieta y Díaz, 2013) articula dos entidades con la intención de intervenir en una, llamada lo modelado, a partir de otra, llamada el modelo:

Por ejemplo: el cardiólogo articula el corazón del paciente -lo modelado- con su electrocardiograma –el modelo. Desde el modelo interviene, de modo prescriptivo, en el corazón del paciente.

"La elasticidad de los resortes" un diseño de aprendizaje basado en la modelación lineal

El diseño que se considera en este trabajo es el de "La elasticidad de los resortes", basado en la modelación lineal (Arrieta, 2003), el cual ha sido reportado en diversa investigaciones en las que se establece una cierta dinámica en el aula.

La dinámica consiste en la conformación de equipos, una vez realizados los equipos los estudiantes discuten cada una de las actividades del diseño y a partir de consensos establecen sus propios resultados, en este punto el profesor verifica que no existan dificultades para la realización de la actividad orientando a través de preguntas auxiliares en caso de haberlas. Después, cada uno de los equipos expone sus resultados, argumentando cada una de sus respuestas, si es necesario, el profesor interviene provocando debates entre los equipos a partir de sus argumentos. Al final, el profesor concluye la actividad a partir de los consensos grupales. Esta dinámica se contrapone a la tradicional del aula de matemáticas, en que docentes y estudiantes toman los roles de emisores y receptores respectivamente.

Didácticamente distinguimos cuatro fases de la modelación, la interacción con el fenómeno -la experimentación en sentido amplio-, el acto de modelar, la articulación de redes de modelos con el fenómeno y la analogía. (Arrieta y Díaz, 2013). A continuación describiremos brevemente en qué consiste cada una de estas fases.

Las fases de la modelación

Fase I La interacción con el fenómeno, la experimentación

En la experimentación discursiva, se establece a partir del "fenómeno pensado" o de una tabla inicial de datos, utilizando como recurso el discurso.

Fase II. El acto de modelar, la predicción

Es aquí cuando los estudiantes plantean métodos de predicción que pueden variar dependiendo la escolaridad de los estudiantes. Este tipo de preguntas va enfocado a crear un modelo numérico, un modelo algebraico, y una gráfica.

Fase III La articulación de los modelos y el fenómeno en una red

Hasta este momento los estudiantes tienen un fenómeno que está asociado a una tabla, un modelo numérico, a una fórmula, un modelo algebraico y a una gráfica, un modelo gráfico. En esta fase del diseño los actores articulan los modelos entre si y estos con el fenómeno, configurando una red que llamamos la red de "lo lineal".

Fase IV

Al construir los estudiantes la red de lo lineal, cuando intentan modelar con la misma red otro fenómeno, es preciso modelar diferentes fenómenos con sus redes y articularlas, descentrando la red de modelos del fenómeno vía la analogía.

La puesta en escena

A partir de la dinámica en el aula, descrita anteriormente, se consideran para este estudio, dos grupos de estudiantes. Uno del nivel medio superior con edades entre 15 y 17 años y -uno de formación de profesores.

- El primer grupo (GMS1) lo conforman 18 estudiantes de México, ellos son miembros del "Club de Matemáticas del Cbtis N°116".

  Una de las características del primer grupo es que acuden al club por interés personal desarrollando actividades extracurriculares.

  La puesta en escena fue llevada a cabo el día seis de Octubre de 2012, se formaron cinco quipos.

  El tiempo que se asignó para llevar a cabo la actividad fue de dos horas.

La información fue recopilada con cámara de video y fotográfica, también se tomaron notas y observaciones de campo.

- El segundo grupo (GFP) está compuesto por 14 estudiantes de quinto a noveno semestre de formación de profesores de la Universidad Católica Silva Henríquez de Chile y se realiza en el marco de una asignatura optativa de la carrera.

  Una de las características del grupo es que la mayoría de ellos habían cursado por lo menos Cálculo Diferencial e Integral. La puesta en escena fue llevada a cabo el día once de Marzo de 2013, se formaron cinco equipos.

  El tiempo que se asignó para llevar a cabo la actividad fue de dos horas.

  La información fue recopilada con cámara de video y fotográfica, también se tomaron y observaciones de campo.

Elementos de análisis de las puestas en escena

En el diseño de aprendizaje de la Elasticidad de los resortes, se establecen con claridad las primeras tres fases de la modelación. Y en este trabajo se reporta sólo la primera y segunda fase en la cual se establecen las trayectorias de los algoritmos de predicción que se presentan en cada caso.

Las primeras tres preguntas del diseño se ubican en la primera fase. La riqueza de producciones de los actores de la puesta en escena es muy amplia. Por ejemplo, en las producciones respecto del diseño, los equipos del grupo GMS1en la fase de interacción con el fenómeno, experimentación discursiva, recurren a lenguaje natural y a la lectura de la tabla. Los estudiantes del GFP discuten acerca de las magnitudes y plantean modelos algebraicos y gráficos. No se limitan a leer la tabla y responder a la situación del diseño, analizan los elementos que la circundan y realizan planteamientos al respecto. Proponen una ecuación de la forma $y = ax + b$ a partir de dos puntos de la tabla, calculan *a* como pendiente $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ y *b* como la ordenada al origen. Responden a las predicciones pedidas en el diseño sustituyendo valores en la ecuación. No construyen la razón de cambio para predecir. Sin embargo uno de los cuatro equipos coincide con las trayectorias que siguen los GMS1 y GMS2.

La pregunta cuatro es la que da cabida a la predicción, es ahí en donde surge el acto de modelar, pues a partir de los datos que ya se tienen en la tabla estos son utilizados para predecir, es decir, la tabla es utilizada para responder el cuestionamiento. Las producciones de GMS1 en la fase de

predicción el método inicial más recurrente es el de puntos medios. *Si colocamos 50 gramos ¿En qué posición estará la flechita del portapesas?*

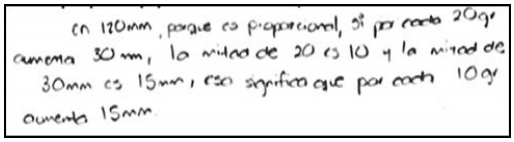
 en 120mm, porque es proporcional, si por cada 20gr aumenta 30 mm, la mitad de 20 es 10 y la mitad de 30mm es 15mm, eso significa que por cada 10gr aumenta 15mm	*"En 120mm, porque es proporcional, si por cada 20gr aumenta 30mm, la mitad de 20 es 10 y la mitad de 30mm es 15mm, eso significa que por cada 10gr aumenta 15mm"*

Tabla 1. Predicción puntos medios.

Posteriormente, al cambiar las condiciones de la predicción, recurren a la regla de tres

la flechita estará en 175mm.Ocupamos la regla de tres

Algunos de los equipos construyen un método de predicción basado en la razón de cambio

posición = n (gramos) ·1.5 + 45

Este método se configura en un algoritmo, dando lugar a la construcción del modelo algebraico

$$p = (n)(1.5) + 45$$

donde $n = número\ de\ gramos$ y $p = es\ la\ posición\ del\ portapesas$

Se pueden observar que los grupos siguieron distintas trayectorias de algoritmos:

En el grupo de nivel medio superior GMS1 se observa como trayectoria de los algoritmos de predicción	En el grupo GFP la trayectoria de algoritmos que se presentan es
• Experimentación • Puntos medios • Uso de razón cambio • Uso de la ecuación algebraica	• Experimentación • Regla de tres • Puntos medios • Plantean la ecuación y la gráfica (pegadas una a la otra).

Tabla 2. Trayectorias de algoritmos.

Conclusiones

Un aspecto del análisis de las producciones de los actores de las puestas en escena del primer diseño, que permiten levantar una primera conclusión, son las diferencias y concordancias entre las trayectorias de los algoritmos de predicción que llevan desde la tabla de datos al modelo algebraico.

En el grupo de nivel medio superior de GM1 se observa como trayectoria de los algoritmos de predicción "puntos medios"-"puntos medios medios"-"regla de tres"- "uso de razón de cambio"-"uso de la ecuación algebraica".

En el grupo GFP la discusión es más profunda desde la fase 1, la experimentación discursiva, plantean inmediatamente la ecuación y gráficas. Las predicciones que pide el diseño se realizan utilizando el modelo algebraico. Esta trayectoria e "obtienen la ecuación de la recta a partir de dos puntos mediante el procedimiento escolar tradicional"-"predicción utilizando la ecuación". Un factor para establecer las diferentes trayectorias podría ser el contraste en el nivel de escolaridad.

Referencias bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Disertación doctoral no publicada, Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.

Arrieta, J. y Díaz, M. (2013). *Una mirada Socioepistemológica de la modelación.* Artículo enviado a revista de corriente principal (130501).

Galicia, A. y Arrieta, J. (2005). Modelación de la evolución de la levadura: un estudio de las prácticas sociales de ingeniero Bioquímico. En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18. Pp. 503-509.

Marquina (2012). *Incorporando Nuevas Prácticas de Modelación al sistema escolar. Un estudio de su constitución.* Tesis de Maestría no publicada, Unidad Académica de Matemáticas, Uagro, México.

Méndez, M. (2007). *La experiencia como la evolución de las practicas: La experiencia de modelar linealmente situaciones análogas.* Tesis de Maestria no publicada, Unidad Académica de Matemáticas, Uagro, México.

Covián, O. (2005). El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: El caso de la Cultura Maya. Tesis de maestría no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

PROCESO SOCIAL DE INSTITUCIONALIZACIÓN DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO ESCOLAR: UN MODELO DE PRÁCTICAS

Verónica Molfino y Gabriela Buendía
Instituto de Profesores 'Artigas' Uruguay
Departamento de Matemática del Consejo de Formación en Educación
Programa de Matemática Educativa, CICATA – IPN México
buendiag@hotmail.com, veromolfino@gmail.com

Resumen. Describimos un marco teórico-metodológico que permite analizar el *proceso social de institucionalización* de un conocimiento matemático, proceso a través del cual un conocimiento, concebido y desarrollado en ámbitos científicos, se convierte en un saber escolar. Lo describimos a partir de las prácticas de los actores involucrados. El mismo se desarrolla bajo la perspectiva socioepistemológica y se apoya en la teoría del análisis del discurso como acción social para estudiar el discurso matemático escolar. Presentamos cómo fue diseñado e implementado en el caso particular del concepto de límite y exploramos, a su vez, su posible aplicación a otros saberes matemáticos

Palabras clave: Proceso social de institucionalización, modelo de prácticas

Abstract. We describe a theoretical and methodological framework designed to analize the social process of institutionalization of mathematical knowledge, the process through which knowledge, conceived and developed in scientific fields, becomes a school knowledge. We describe it from the practices of the actors involved. It is developed under socioepistemological perspective and relies on the theory of discourse analysis as a social action to study school mathematical discourse. We present how it was designed and implemented in the particular case of the concept of limits and explore, in turn, its applicability to other mathematical knowledge

Key words: Social institutionalization process, practice model

Introducción

A partir del reconocimiento del hombre haciendo matemáticas en un escenario cultural e históricamente situado, buscamos analizar por qué enseñamos hoy a un determinado conocimiento de la manera como lo hacemos. Esa es la pregunta central que ha motivado la creación del modelo teórico-metodológico que se presenta en este reporte de investigación. En la búsqueda de su respuesta reconocemos que su construcción no depende exclusivamente de uno o varios individuos, sino que se da a través de las instituciones en las que se desarrolla.

En particular, proponemos una explicación de por qué se enseña el concepto de límite de la forma en que se hace en el contexto educativo uruguayo a través del estudio de un proceso que denominamos *proceso social de institucionalización*, que permite que se reconozca que lo que el docente enseña en el aula alrededor de ese saber matemático es producto de tal proceso. Estudiamos qué actores intervienen y de qué manera, qué es lo que los hace actuar de la manera en que lo hacen y conduce a determinadas consecuencias en las decisiones sobre qué y cómo se enseña actualmente. El modelo que presentamos propone un corte transversal del sistema en su conjunto, que no se caracterice necesariamente por etapas cronológicas sino que permita una

explicación transversal a través de las prácticas de los actores de cada ámbito.

Institucionalización y proceso social de institucionalización

Según Berger y Luckmann (2001), las instituciones son entidades que posibilitan la conservación de saberes en las sociedades a través del tiempo, como formas organizadas que establecen roles a los participantes, en los cuales existen prescripciones (restricciones) y licencias. Norman la conducta de los individuos de una sociedad y se vuelven externas al individuo (despersonalizadas). Desde esta visión, "la *institucionalización* aparece cada vez que se da una tipificación recíproca de acciones habitualizadas por tipos de actores" (p. 76).

La investigación en la que se circunscribió la construcción del modelo que presentamos (Molfino, 2010) trata con la institución Escuela y la institucionalización de un conocimiento matemático –el límite- en ese ámbito escolar. Retoma el modelo epistemológico de prácticas propuesto por Montiel (2011) el cual articula prácticas sociales, prácticas de referencia y actividades para explicar la construcción del conocimiento matemático.

Desde esta perspectiva fue que se planteó el proceso social de institucionalización del concepto de límite en Molfino (2010) lo que implicó, por un lado, desentrañar cómo un saber matemático –el límite- se constituye como un saber validado, parte de un cuerpo ordenado de conocimientos social y culturalmente aceptados; para ello se analizaron las prácticas sociales inherentes a la evolución del concepto al seno de la comunidad científica matemática (*ámbito científico*). Por otro lado, se estudió y describió cómo esas prácticas que norman el actuar de los actores del ámbito científico son traspuestas según lo que viven los actores del sistema educativo (*ámbito escolar)*, y cómo a su vez norman sus prácticas de referencia, específicas del paradigma en el que actúan.

En el ámbito científico se emple parte del esquema metodológico para la investigación socioepistemológica propuesto por Montiel y Buendía (2012). Esto es, la conformación de una epistemología de prácticas para el saber analizado. El análisis del ámbito escolar requiere, en el modelo que proponemos, considerar el discurso matemático escolar (dme) presente en él. Veremos a continuación desde qué perspectiva se lo entiende y analiza.

Análisis crítico del Discurso (ACD)

Según explican Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez (2006), el dme está conformado por los discursos relacionados con la difusión de un saber matemático. La estructura de dichos discursos no se reduce a la organización de los contenidos temáticos o programas, ni a su función declarativa en el aula a través del discurso del profesor, sino que implica el establecimiento de bases de comunicación para la formación de consensos y la construcción de significados

compartidos.

Es desde esta perspectiva y entendiendo al discurso como modelador de las acciones, que proponemos analizar, a partir del dme, las prácticas que se generan en el tránsito entre los ámbitos científico y escolar y posteriormente, al seno del escolar mismo. Esto permite explicitar el papel de las prácticas escolares, entendidas como las prácticas de referencia en el ámbito escolar.

Para ello, interesa identificar el rol que el dme cumple en la construcción de conocimiento, de tal manera que se reconozca que lo que el docente enseña en el aula alrededor de un determinado saber matemático es producto de ese proceso social de institucionalización. Se propone entender al dme como una acción social y analizarlo como un fenómeno social y cultural, con el fin de comprender las relaciones entre él y la sociedad. Optamos entonces por el ACD, herramienta metodológica utilizada en estudios donde el marco teórico implica entender al discurso como acción social (Van Dijk, 2001).

El ACD es un tipo particular de investigación analítica sobre el discurso que estudia el modo en que el abuso del poder social, el dominio y las desigualdades son practicados, reproducidos y combatidos por los textos y el habla en el contexto social y político. Busca establecer nexos entre las propiedades de un texto y las estructuras y procesos sociales y culturales (Fairclough y Wodak, 2001). Sus ocho principios básicos[1] fueron descritos en Molfino y Buendía (2011a), en donde se ejemplifican para el caso particular del análisis del proceso social de institucionalización del concepto de límite.

Aplicación del modelo al análisis del proceso social de institucionalización del concepto de límite

Una primera instancia de la aplicación del modelo consistió en la elaboración de una epistemología de prácticas en las que se detectaron las prácticas sociales que normaron el quehacer de los miembros de la comunidad matemática en lo que respecta al desarrollo del concepto de límite (formalización, generalización y difusión), así como sus correspondientes prácticas de referencia y actividades. La presentación y fundamentación de por qué son consideradas prácticas sociales pueden verse en Molfino y Buendía (2010).

En una segunda instancia, reinterpretamos esas prácticas sociales, identificando de qué manera norman también las prácticas de referencia de los actores del sistema educativo y la sociedad en su conjunto.

[1] 1. El ACD se ocupa de los problemas sociales. 2. Las relaciones de poder son consideradas como elementos discursivos. 3. El discurso constituye a la sociedad y a la cultura. 4. El discurso realiza una labor ideológica. 5. El discurso es histórico. 6. El vínculo entre el texto y la sociedad es mediado. 7. El análisis del discurso es interpretativo y explicativo. 8. El discurso es una forma de acción social.

Para analizar la inclusión del concepto de límite en el ámbito escolar en el contexto educativo uruguayo, estudiamos varios actos discursivos, entendidos como acciones sociales desde la perspectiva de Van Dijk (2001). En Molfino y Buendía (2011a) se desarrolla con detalle qué es lo que cada uno de esos actos aportó al análisis. Se analizaron los *programas* del curso de Matemática de último año de Educación Secundaria en Uruguay, de las opciones "Medicina" e "Ingeniería", así como los programas vigentes y los anteriores de Formación de Profesores de Matemática. Este análisis también permitió observar qué libros de texto son recomendados por las autoridades educativas en matemática, que son quienes confeccionan los programas.

Eso condujo a analizar también los *libros de texto*, tanto actuales como "de antaño", utilizados como referencia en los cursos de Secundaria y Formación Docente desde la segunda mitad del siglo XX. Se analizaron también los apuntes que un profesor del Instituto de Profesores de Montevideo confeccionara para sus estudiantes.

Además, se implementaron *cuestionarios y entrevistas a docentes*. El cuestionario a docentes del curso de Matemática del último año de Educación Secundaria, se aplicó con el fin de que explicitaran su tratamiento didáctico del límite y las dificultades que ese abordaje le acarrea a sus estudiantes.

Por otra parte, se realizó una entrevista a un profesor con cincuenta años de experiencia en Secundaria, Formación Docente y Universidad (Docente 1), en la cual el docente se detuvo en experiencias acerca de cómo influían los libros de texto y los apuntes de clase sobre las prácticas de aula.

Por último, el análisis de los programas y su evolución condujo a cuestionarnos acerca de la manera en que los profesores aceptan –o no- las modificaciones, y lo traducen en nuevos abordajes para el tratamiento del concepto de límite en el aula. Para ello se llevaron a cabo dos entrevistas a docentes (Docentes 2 y 3) con vasta experiencia en el dictado del curso de Análisis para sexto año de Educación Secundaria, que oficiaron de testimonios de algunas de las concepciones de enseñanza del tema, presentes en el sistema educativo uruguayo.

Se deseaba indagar acerca de cómo influyen las exigencias de los programas en las decisiones docentes y cuál es el papel que los libros de texto desempeñan en el tratamiento escolar del concepto de límite. Explicitar estos elementos daría cuenta de las prácticas de los docentes como agentes de la noósfera acerca de la manera en que es abordado hoy el concepto en clase y de las posibles alternativas para hacerlo.

Resultados del análisis

Concluimos de tal análisis que en el ámbito escolar, el modelo epistemológico de prácticas permite distinguir diferentes momentos en el proceso social de institucionalización. Esos momentos se describen en función de las prácticas de los actores que participan con más protagonismo en cada uno y de los roles que dichos actores desempeñan. Transcurren simultáneamente y no uno a continuación del otro. Cualquiera de ellos es dinámico en el tiempo e influye continuamente sobre los demás:

a) el tránsito del concepto "límite funcional" desde la comunidad científica hacia la escuela;

b) las interacciones entre docentes y entre docentes y autoridades educativas; y

c) el desarrollo del concepto de límite en el aula.

Momento a: tránsito del concepto "límite funcional" desde la comunidad científica hacia la escuela

En este momento encontramos dos grandes grupos de poder que influyen sobre el quehacer docente: las autoridades de educación matemática y la comunidad de matemáticos. Con respecto al primero, nos centramos en la *Inspección de Matemática*, organismo encargado entre otras cosas de la confección de los programas y recomendación de libros de texto, es decir, la agenda de lo que los profesores deberían hacer y decir en el aula.

Respecto de los programas, observamos que en el confeccionado para la opción Ingeniería de 1976 (anterior al vigente) es una lista de contenidos, no se explicitan objetivos, cargas horarias ni sugerencias metodológicas. Esto denota un abordaje tradicional del Cálculo, en el que el límite se erige como contenido estructurador del resto de los conceptos. Este abordaje, según constatamos con la entrevista al docente 1, resulta una continuación de las prácticas que ya se llevaban a cabo desde mediados de siglo XX en el Uruguay: énfasis en los aspectos formales del curso, influenciados fuertemente por la etapa de aritmetización del análisis en la evolución del concepto de límite. El programa vigente para la misma orientación desde 2008 pretende problematizar tal posición, proponiendo algunos cambios en la modalidad de trabajo como una mayor integración de los aspectos prácticos y teóricos a través del planteo de situaciones problemáticas, exigiendo una menor formalización en la justificación de afirmaciones y una mejor articulación entre aspectos gráficos y numéricos alrededor de los conceptos tratados en el curso. Sin embargo, no apreciamos una problematización de los contenidos a abordar propiamente dichos: se mantiene al concepto de límite como estructurador de los demás conceptos: continuidad, derivadas e integrales.

Estas relaciones de poder también se explicitan en la confección de libros de texto como acto

discursivo: en Molfino y Buendía (2011b) fue constatado que los actuales libros de texto de Análisis o Cálculo están basados en los que nosotros denominamos 'de antaño' en cuanto a su estructura formal, y éstos a su vez son libros extranjeros, que imponen determinadas prácticas escolares que no fueron pensadas para la situación específica de Uruguay ni para la actualidad. Los autores de libros de texto –mayormente matemáticos y profesores de matemática- se constituyen pues en otro grupo de poder que influye sobre el tránsito del concepto de límite de la comunidad científica a la escolar. Sugieren a través de esos elementos discursivos una determinada ideología (influenciada a su vez fuertemente por la comunidad científica-matemática) acerca de cómo se debe enseñar la matemática, cuáles son los contenidos a tratar y cuál es la estructuración que se le debe dar a los mismos.

Por último, la primera de las entrevistas descriptas brindó evidencias sobre la manera en que el concepto de límite llegó a nuestras aulas de la forma en que es tratado hoy en día, desde la visión del profesor entrevistado. Pudo constatarse que si bien algunos libros de texto fueron influyentes para la conformación de los primeros cursos (muy apegados a la formalidad requerida por la comunidad matemática), uno de los aspectos que más influyó fue la difusión de apuntes de clase de prestigiosos docentes. Esos apuntes constituyeron una fuente validada para la preparación de clases durante muchos años, contribuyendo de esa manera a que el saber desarrollado en el ámbito académico se difundiera en el escolar.

Otro aspecto de influencia de la comunidad matemática sobre la escolar se evidencia a través de las prácticas ejercidas en la Universidad (en particular en la Facultad de Ingeniería). En la entrevista realizada a docentes para analizar la influencia de cambios de programas, uno de ellos expresa dicha influencia, en relación al concepto de límite:

> Me parece que es un tema de capital importancia y además en la Universidad nos piden, entonces en la medida en que nosotros no hagamos una conjunción con la Universidad, que siempre nos hemos llevado a las patadas, la verdad… de pronto pueden decir "no den tanto de límite, den sólo el concepto, la definición, y nosotros nos encargamos de…" Pero a mi me parece que el tema en sí, es un tema muy rico, y que habilita justamente a muchas definiciones posteriores. (Docente 2)

Este análisis ha permitido constatar que en la transición del ámbito científico al escolar se ve fuertemente normada por las prácticas sociales de formalizar y generalizar, conformando una determinada manera de estructurar el cálculo y un determinado rol del límite como eje central de dicha estructuración.

Momento b: interacciones entre docentes y entre docentes y autoridades educativas

En este momento estudiamos la relación de poder que las autoridades educativas entablan, a través de su discurso y de sus prácticas, con los docentes. Los inspectores de Matemática son quienes se encargan de difundir los programas y su implementación a través de reuniones con docentes. En estas reuniones se sugieren determinados lineamientos en cuanto al orden y jerarquía de los temas y sugerencias metodológicas. A su vez, estos mismos inspectores evalúan a los docentes durante el año lectivo a través de visitas puntuales (se observa una hora de clase y se analiza la 'libreta del profesor', libreta en la cual el docente debe llevar anotado el desarrollo del curso y las evaluaciones de sus alumnos). El proceso de institucionalización del límite, fundamentándose en la versión oficial del mismo, toma vigencia en tanto poder de los inspectores, debido a que de ellos puede depender la continuidad laboral de un profesor.

También son importantes a los efectos de entender este momento, las reuniones de coordinación que se dan a la interna de cada instituto de enseñanza media. Allí participan profesores de Matemática del mismo instituto, pero con diferentes grados de experiencia en el dictado de cursos, lo que los posiciona en diferentes roles en cuanto a la toma de decisiones sobre cómo dar determinados temas (en particular el de límite).

Momento c: desarrollo del concepto de límite en el aula

Es en este momento en el que el colectivo docente se erige como un grupo de poder protagonista en la institucionalización del concepto de límite. Así como los docentes son evaluados por los inspectores, también los estudiantes son evaluados por los docentes, lo que sugiere un interés por parte del estudiante de aprender y reproducir el discurso que el docente le ofrece.

El discurso de los docentes constituye a la sociedad y a la cultura, a la vez que es constituido por ellas dado que el docente es miembro de un grupo social, y que como tal sus concepciones son influidas por las del grupo y las exigencias externas que tiene ese grupo. Ello se traduce en un conflicto que pudo entreverse en las respuestas de algunos docentes al cuestionario. Por un lado, sostienen que es importante la introducción del concepto de límite porque es central en la estructuración del cálculo para el desarrollo de otros conceptos como el de derivada, transmitiendo una concepción del límite normada por las prácticas de formalización y generalización. En este sentido los docentes se ven influenciados por lo que las autoridades plantean en los programas, por la presentación del tema en los libros de texto y, muy probablemente, por su formación inicial: no sólo por cómo estaba estructurado el tema en los currículos escolares de su época sino además por las prácticas docentes de sus propios profesores. Pero por otro lado, los docentes que responden al cuestionario reconocen que este

es un tema difícil para los estudiantes por el grado de abstracción que requiere, y que por eso sería posible pensar en no realizar un tratamiento formal del mismo en cursos de opciones que no requieran una carga horaria extensa de matemática, como la opción Derecho, por ejemplo. Eso podría estar dando cuenta de la influencia de las exigencias de un mayor índice de aprobación por parte de la sociedad.

Puede apreciarse también la labor ideológica del discurso en las entrevistas realizadas a raíz del cambio en los programas. Ellas permitieron constatar cierta resistencia a esa nueva propuesta, con respuestas como: "…todo lo que tiene que ver con la parte de Análisis de las funciones, la continuidad, las sucesiones, yo le doy la misma formalidad que antes. Así que yo trabajo igual." (Docente 3). La resistencia que los docentes manifiestan sobre algunos aspectos del programa sugiere una determinada ideología persistente en su discurso, caracterizada por la necesidad de formalizar los conceptos con los que se trabaja en el curso, y que contribuye a que los docentes mantengan prácticas educativas características de la metodología de trabajo de los programas anteriores, según ellos mismos manifiestan.

Consideraciones finales

En suma, a través del análisis del proceso social de institucionalización en diferentes momentos hemos detallado el papel de las prácticas de los actores de la noósfera involucrados en cada uno de ellos y de las relaciones de poder que los vinculan. Esto nos ha permitido abordar la pregunta acerca de por qué se enseña el concepto de límite, en el ámbito educativo uruguayo, de la manera en que se hace. Hemos detectado cómo las prácticas de formalizar, difundir y generalizar norman el quehacer de autoridades, escritores de programas y libros de texto y docentes a través de diversos actos discursivos como los textos, programas, apuntes, reuniones entre diferentes grupos de actores, observación y dictado de clases, entre otros.

Consideramos que el modelo teórico-metodológico propuesto tiene varios aspectos que pueden ser útiles para analizar el proceso social de institucionalización de otros conceptos matemáticos, en diferentes escenarios socioculturales. Es probable que en otros escenarios, fuera del ámbito del sistema educativo uruguayo de Enseñanza Media, sean otros los momentos relevantes a identificar, y otros los actores a considerar, pero su descripción podría hacerse a través del ACD como herramienta metodológica: entendiendo a cada acto discursivo, escrito u oral, como una acción social, emitida por personas que a su vez pertenecen a determinados grupos, y que pueden estar actuando como representantes de sus intereses y supuestos aceptados como válidos a la interna de ese grupo.

Referencias bibliográficas

Berger, P. y Luckmann, T. (2001). *La construcción social de la realidad*. Buenos Aires: Amorrortu Editores.

Cantoral, R., Farfán, R., Lezama, J y Martínez Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, Número especial,* p. 83-102.

Fairclough, N. y Wodak, R. (2001). Capítulo 10. Análisis crítico del discurso. En T. Van Dijk (Comp.) *El discurso como interacción social. Estudios sobre el discurso II. Una integración multidisciplinaria.* Barcelona/Buenos Aires: Gedisa.

Molfino, V. (2010). *Procesos de institucionalización del concepto de límite: un análisis socioepistemológico*. Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Instituto Politécnico Nacional, México.

Molfino, V. y Buendía, G. (2010). El límite de funciones en la escuela: un análisis de su institucionalización. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias, 5(1)*, pp. 27-41.

Molfino, V. y Buendía, G. (2011a). Análisis del Discurso como Acción Social: su rol en la construcción y difusión de conocimiento matemático. En G. Buendía (coord.) *Reflexión e Investigación en Matemática Educativa*. México DF: Lectorum.

Molfino, V. y Buendía, G. (2011b). Análisis del discurso como acción social con relación al concepto de límite: un estudio de libros de texto. *Premisa, 13, 51*, pp. 3-15.

Montiel, G. (2011). C*onstrucción de conocimiento trigonométrico. Un estudio socioepistemológico*. México: Ediciones Díaz de Santos.

Montiel y Buendía (2012). Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica: ejemplos e ilustraciones. En A. Rosas y A. Romo. *Metodología en Matemática Educativa: visiones y reflexiones*. México: Lectorum.

Van Dijk, T. (Comp.) (2001). *El discurso como interacción social. Una introducción multidisciplinaria*. Barcelona/Buenos Aires: Gedisa.

CONTRIBUIÇÕES DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NA PERSPECTIVA DA ETNOMATEMÁTICA PARA A EDUCAÇÃO FINANCEIRA EM UMA CLASSE DO OITAVO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Gelindo Martineli Alves, Marger da Conceição Ventura Viana, Milton Rosa
Universidade Federal de Ouro Preto. Brasil
gelindomartinelli@hotmail.com, margerv@terra.com.br, milton@cead.ufop.br

Resumen. Neste artigo apresentamos uma pesquisa em desenvolvimento com uma turma de alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental de uma escola pública da rede municipal de uma cidade do interior de Minas Gerais, Brasil. O objetivo dessa pesquisa é a verificação das possíveis contribuições da História da Matemática e do Programa Etnomatemática para o processo de ensino e aprendizagem de tópicos da Matemática Financeira. Por recorrer à História da Matemática na perspectiva da Etnomatemática, espera-se que essa pesquisa possa apontar um caminho para a contribuição de um currículo capaz de proporcionar a formação de cidadãos criativos, críticos e capazes de tomar decisões para a melhoria da nossa sociedade. Na verdade, buscamos nesta fundamentação teórica um meio de colocar a Matemática a serviço da educação
Palabras clave: História da Matemática, Etnomatemática, Educação Financiera
Abstract. This article presents a research in progress with a class of eighth graders in a municipal public elementary school in a town in Minas Gerais, Brazil. The objective of this research is to verify the possible contributions of the History of Mathematics and Ethnomathematics Program for teaching and learning topics of Financial Mathematics. By resorting to the history of mathematics from the perspective of Ethnomathematics, it is expected that this research can contribute to a curriculum capable of providing training citizens creative, critical and capable of making decisions for the betterment of our society. This theoretical work seeks a means of mathematics for the service of education
Key words: History of Mathematics, Ethnomathematics, Financial Education

Introdução

Este artigo está relacionado com uma pesquisa em andamento do Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP. A pesquisa está sendo realizada em uma escola pública da rede municipal de uma cidade do interior do Estado de Minas Gerais, Brasil. A escola está situada em uma região dessa cidade na qual habitam as pessoas menos favorecidas economicamente. De acordo com dados observacionais, a maioria dos alunos parece não se interessar pelos estudos, no entanto, gostam de ir à escola. Ao observarmos que os alunos se interessam por compras, essa pesquisa tem como foco a utilização dos pressupostos da Educação Financeira durante o processo de ensino e aprendizagem de conteúdos de Matemática Financeira para uma turma do oitavo ano do Ensino Fundamental.

A Educação Financeira se tornou uma das prioridades de políticas públicas no Brasil a partir de 2006 ao perceber-se que "as mudanças econômicas, sociais e tecnológicas dos últimos anos têm apontado para a urgência na implementação de ações com o objetivo de educar financeiramente a população" (Brasil, 2012, p. 1). Após argumentar sobre o lado positivo da sociedade de consumo na atualidade que propicia para a população um acesso rápido aos serviços e produtos como nunca antes houve em qualquer época, Kistemann Júnior (2011) nos alerta ao afirmar que os

estratagemas de marketing estão tornando crianças em consumidores e consumidores em adultos infantilizados.

Pelas razões expostas, "espera-se que a educação possibilite, ao educando, a aquisição e utilização dos instrumentos comunicativos, analíticos e materiais que serão essenciais para seu exercício de todos os direitos e deveres intrínsecos à cidadania" (D'Ambrosio, 2009, p. 65). Dessa maneira, encontramos no Programa Etnomatemática, que é uma tendência atual na Educação Matemática, e que tem como uma de suas principais ações pedagógicas o fortalecimento das raízes culturais dos alunos para que resistam aos assédios de marketing desta sociedade capitalista consumidora (D'Ambrosio, 2009).

Nesse contexto, buscamos responder a seguinte questão de investigação:

Quais são as possíveis contribuições que a História da Matemática na perspectiva da Etnomatemática pode oferecer para o ensino e aprendizagem de conteúdos da Educação Financeira para uma turma do 8º ano do Ensino Fundamental em uma escola pública de uma cidade do interior de Minas Gerais?

Para responder esse questionamento de investigação, estamos buscando uma fundamentação teórica na História da Matemática como um potencial pedagógico que pode revelar a matemática como uma criação humana de diversas culturas e, que foi desenvolvida para solucionar problemas sociais e econômicos encontrados no cotidiano. Também buscamos essa fundamentação na ação pedagógica do Programa Etnomatemática na tentativa de valorizar a cultura e o conhecimento que os alunos trazem para as salas de aula (D'Ambrosio, 2009).

A História da Matemática como um Recurso Pedagógico na Sala de Aula

Os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCNs (Brasil, 1998) de Matemática indicam a História da Matemática como uma "importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem de matemática, pois ao revelar a Matemática como uma criação humana, (...) o professor cria condições para o aluno desenvolver atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento" (Brasil, 1998, p. 42). De acordo com Miguel e Miorim (2008), é possível buscar na História da Matemática um apoio didático para conduzir os alunos aos objetivos pedagógicos que os levem a perceber a Matemática como uma criação humana, pois as necessidades práticas, sociais, econômicas e físicas servem como estímulos para o seu desenvolvimento.

Contudo, para que os alunos consigam atingir esses objetivos, existe a necessidade de que a História da Matemática seja utilizada em sala de aula como um recurso didático. Dessa maneira, a utilização didática da História da Matemática pode ser considerada como a implantação e a implementação de intervenções pedagógicas relacionadas com os conhecimentos históricos, que

são desencadeadas em sala de aula, para desenvolver nos alunos, procedimentos que tenham relacionamento histórico com o conteúdo matemático a ser estudado (GROENWALD, SAUER, & FRANKE, 2005). Nesse contexto, Ozámiz e Pérez (1993) argumentam que a utilização da História da Matemática como um recurso didático tem como objetivo mostrar que o descobrimento matemático é um processo vivo, que está em constante desenvolvimento.

Por outro lado, e importante identificar "a natureza dos argumentos reforçadores das potencialidades pedagógicas" (Miguel & Miorim, 2008, p. 61) da História da Matemática em duas categorias diferenciadas, mas não necessariamente excludentes, que estão são de natureza epistemológica e de natureza ética. O adjetivo *epistemológico* é utilizado no sentido de que os argumentos reforçadores estão focalizados centralmente no conhecimento matemático propriamente dito, pois não estão fundamentado em outros domínios da Filosofia como o axiomático, o estético e o metodológico. Por outro lado, o adjetivo *ético* é utilizado no sentido de conceber "a natureza das atitudes e dos valores, isto é, da natureza da aprendizagem ética, via aprendizagem matemática, que se deseja promover entre os estudantes" (Miguel & Miorim, 2008, p. 61).

Nessa abordagem, entende-se que o primeiro trecho dessa asserção pode ser entendido como o ato de ensinar e aprender a Matemática enquanto que o segundo trecho possui o sentido de promover a análise crítica e reflexiva dos conteúdos matemáticos com o objetivo de humanizar a Matemática visando favorecer o desenvolvimento da cidadania dos alunos.

O Programa Etnomatemática

Os sistemas institucionalizados de educação no exterior e no Brasil fornecem uma sensação de dicotomia com relação à inclusão escolar e a exclusão educacional. Assim, apesar da inclusão escolar, a exclusão educacional ocorre por meio da disciplina que é considerada central nos currículos educacionais, a Matemática, pela maneira tradicional que as suas atividades curriculares são apresentadas aos alunos. Por exemplo, a matemática é colocada "como um elemento fundamental para a seleção dos melhores [alunos]" (Miorim, 1998, p. 19). Então, a Matemática tem sido considerada como a principal fonte de exclusão social bem como um meio ideal para defender e proteger os interesses da classe dominante.

Nesse contexto, a maioria dos alunos ao perceberem uma matemática desvinculada da realidade perde o entusiasmo pelo seu estudo e, consequentemente, acaba sendo reprovada, acarretando a exclusão educacional e afetando diretamente a formação desses alunos como cidadãos críticos e reflexivos Por outro lado, os alunos que se identificam com a Matemática apresentada nos currículos escolares, se tornam alienados pela utilização de um tipo de pensamento lógico

limitado, tornando-os incapazes de serem criativos, críticos, se enquadrando em um grupo de cidadãos que não conseguem tomar decisões que visam melhorar e transformar a sociedade (Rosa & Orey, 2010).

Diante dessa perspectiva, existe a necessidade da retomada de consciência e do resgate do conhecimento matemático desenvolvido pelos membros pertencentes aos diversos grupos socioculturais. Nesse contexto, o Programa Etnomatemática foi desenvolvido, pois está relacionado com a "pesquisa em história e filosofia da matemática com óbvias implicações pedagógicas" (D'Ambrosio, 2009, p. 27), sendo definido como a arte ou a técnica (tica) de explicar, entender e se desempenhar na realidade (matema) inserida em um contexto cultural próprio (etno). Então, o Programa Etnomatemática é o estudo das artes e técnicas, que durante a evolução dos diversos grupos culturais, permitiu-lhes explicar, entender e lidar com os ambientes naturais, social, político, econômico e imaginário (D'Ambrosio, 1990).

De acordo com esse contexto, a Etnomatemática pode ser considerada como a matemática praticada por comunidades distintas e por grupos culturais que se identificam pelas tradições. Então, e importante ressaltar que o estudo da construção histórica do conhecimento matemático possibilita uma maior compreensão da evolução dos conceitos matemáticos ao enfatizar as dificuldades epistemológicas inerentes aos conteúdos que estão sendo trabalhados (D'Ambrosio, 2009) em sala de aula.

Sendo assim, uma das ações pedagógicas do Programa Etnomatemática é valorizar o conhecimento cultural dos alunos sobre o *saber/fazer* matemático, para utilizá-lo como fundamento para o desenvolvimento de novos conhecimentos, que os auxiliarão a se tornarem cidadãos críticos e capazes de tomar decisões, colaborando para tornar a sociedade e as suas comunidades mais justas.

Relacionando a História da Matemática com a Etnomatemática

Em todas as civilizações, as ideias matemáticas estão presentes nas maneiras do *fazer* e *saber*, refletindo, dessa maneira, as ações humanas (D'Ambrosio, 1990). Assim, é de fundamental importância utilizar o recurso didático da História da Matemática por meio de um processo reflexivo sobre o desenvolvimento intelectual e social da humanidade, pois esse conhecimento pode ser percebido como a espinha dorsal do conhecimento científico, tecnológico e sociológico.

De acordo com esse enfoque, surge um conceito pedagógico inovador para reforçar a importância da História da Matemática no ensino e aprendizagem em matemática, denominado de Etnomatemática, considerada como uma subárea da História da Matemática e da Educação Matemática (D'Ambrosio, 1990). Então, a História da Matemática mostra que a Matemática foi

criada e desenvolvida como uma maneira de resolver as situações-problema enfrentadas pela humanidade no cotidiano.

Corroborando com esse ponto de vista, é importante defender a associação da História da Matemática com a ação pedagógica do Programa Etnomatemática, pois "o conhecimento da História da Matemática dos diversos povos entrelaça-se inevitavelmente com os trabalhos de Etnomatemática" (Viana, 2000, p. 17), possibilitando uma visão crítica do desenvolvimento do conhecimento matemático através da história ao refletir sobre como ocorreu a construção desse conhecimento. Esse contexto evidencia que um dos argumentos reforçadores da potencialidade pedagógica da História da Matemática, identificado como argumento de natureza ética, também se enquadra na conceituação do Programa Etnomatemática, que possibilita "reflexões necessariamente interculturais sobre a história e a filosofia da matemática, mas, igualmente necessário, sobre como a matemática se situa hoje na experiência, individual e coletiva, de cada indivíduo" (D'Ambrosio, 2009, p. 30).

Por isso, uma das ações pedagógicas que se enquadra na conceituação desse programa é o relacionamento dos argumentos de natureza ética da História da Matemática para a potencialidade pedagógica do processo de ensino e aprendizagem da Matemática escolar. Outra ação pedagógica do Programa Etnomatemática é a valorização do conhecimento prévio dos alunos (D'Ambrosio, 2009), que ocorre quando os alunos desenvolvem os conteúdos da matemática acadêmica com a utilização dos conhecimentos adquiridos em suas comunidades, que na maioria das vezes são praticados no cotidiano.

Portanto, a conceituação do Programa Etnomatemática se entrelaça com os argumentos de natureza ética das potencialidades pedagógicas da História da Matemática, pois valorizam o conhecimento prévio dos alunos, criando um elo entre as tradições e a modernidade (D'Ambrosio, 2009). Essa abordagem favorece a elaboração de um currículo matemático voltado para a criatividade dos alunos no decorrer do processo de ensino e aprendizagem de Matemática. Nesse artigo, a relação entre essas duas teorias é denominada de *A História da Matemática na perspectiva da Etnomatemática.*

A Pesquisa de Campo

Direcionados pela questão de investigação, foram elaboradas uma sequência de atividades propostas para os alunos de uma turma do 8° ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de uma cidade do interior de Minas Gerais. Essas atividades foram desenvolvidas nos dias e horários das aulas regulares de matemática pelo professor da turma que também é o pesquisador. O objetivo da aplicação dessas atividades foi propiciar um ambiente natural para o ensino e

aprendizagem de conteúdos de Matemática Financeira com foco na Educação Financeira. Metodologicamente, antes de utilizar a História da Matemática de maneira explícita, o professor-pesquisador a utilizou implicitamente para o desenvolvimento dessas atividades.

A atividade iniciou-se com uma apresentação pelos alunos sobre os diferentes tipos de propagandas que encontraram em folhetos, jornais e revistas. O professor-pesquisador também apresentou no PowerPoint imagens de fotografias e anúncios retirados de sites com propagandas para complementar o material dos alunos. A maioria do material levado pelos alunos transformou-se em uma fonte de debate sobre as propagandas e também sobre os assuntos de grande importância para o desenvolvimento da cidadania dos alunos.

Figura 1: Propaganda em jornal

Fonte: Material levado por um aluno

Figura 2: Propaganda em faixa

Fonte: Fotografia do professor-pesquisador

Figura 3: Propaganda em Outdoor

Fonte: Fotografia do professor-pesquisador

Figura 4: Impostômetro

Fonte: http://oglobo.globo.com

Durante a apresentação de um dos alunos (Figura 1), perguntei aos alunos o que significava 100%. Muitos responderam que significava *tudo, total, inteiro*. Depois, apresentei a fotografia de uma propaganda em uma faixa na frente de uma loja de roupas (Figura 2) e perguntei o que significava 50%. Alguns alunos responderam que significava *a metade*. Auxiliei-os a se lembrarem de que a metade de um determinado valor pode ser expressa por 1/2. A partir desse conhecimento, na

próxima aula, os alunos compreenderam que 25% significa a metade da metade, ou seja, 1/4. Fizemos algumas atividades simples para o cálculo de 1/2 e 1/4 de alguns valores inteiros até que os alunos concluíram que calcular a metade é o mesmo que dividir um determinado valor por dois e, calcular um quarto significa dividir esse valor por quatro. Assim, chegamos a outras porcentagens, enfatizando principalmente que 10% e 1% significa a divisão por 10 e 100, respectivamente. Por exemplo, para realizar o cálculo com uma porcentagem de 16%, os alunos decompunham 16% = 10% + 5% + 1%. A maioria dos alunos realizou esses cálculos mentalmente e alguns utilizaram uma calculadora eletrônica simples.

Nas discussões de cunho social, os principais debates surgiram na apresentação da propaganda de jornal (Figura 1) sobre o significado de FGTS. Uma das alunas, com minha permissão, pesquisou utilizando a internet de seu celular o que significa FGTS e, explicou para os alunos da turma que essa sigla significa Fundo de Garantia por Tempo de Serviço. Essa discussão teve seu ponto máximo quando tratamos da importância dos empregos formais, que no Brasil é comumente conhecido como emprego de carteira assinada.

Outra discussão de grande importância para a formação da cidadania surgiu com a apresentação da imagem sobre propagandas em Outdoor (Figura 3), pois os alunos quiseram saber o que significava IPI. Um dos alunos explicou para a turma que o IPI é um tipo de imposto. Completei que IPI significa *Imposto sobre Produtos Industrializados*. Essa discussão teve grande relevância porque o governo brasileiro tinha isentado alguns produtos desse imposto e as propagandas em mídias estavam em alta. Outro ponto importante nesse debate foi que muitos alunos ficaram sabendo, parece que primeira vez, que a escola e toda a sua infra-estrutura são financiados pelos impostos que pagamos.

Aproveitando a empolgação do debate sobre os impostos, em uma das aulas seguintes, foi desenvolvida a atividade denominada Impostômetro (Figura 4) acompanhada de trechos de uma reportagem cujo tema foi *Brasileiro trabalha quase 5 meses só para pagar impostos*. Nessa atividade, introduzi a história do surgimento da porcentagem a partir da cobrança de impostos, ressaltando que foi o imperador romano Augusto, que esteve no poder do ano 27 a.C. ao ano 14 d.C., que criou pela primeira vez um imposto de 1/100 sobre as vendas de todas as mercadorias vendidas pelos comerciantes de Roma. Nota-se que os denominadores de todas as outras frações cobradas em outros impostos eram facilmente redutíveis a centésimos. No entanto, somente no séc. XV, impulsionado por atividades econômicas e comerciais, o número 100, ou seja, o centésimo tornou-se a base para os cálculos que hoje chamamos de percentual ou porcentagem, inclusive com o surgimento do símbolo % (Contador, 2008).

Através da história da porcentagem e dos conceitos desenvolvidos anteriormente nas aulas sobre as propagandas, os alunos compreenderam o significado de % como uma fração de denominador 100, conseguiram realizar cálculos de porcentagem para determinar os desconto e os acréscimos, bem como adquiriram uma noção elementar de juros. No entanto, em razão da História da Porcentagem estar relacionada com a cobrança de impostos, além de retomar importantes assuntos que contribuíram para a formação de cidadania, a Matemática também foi revelada como uma criação humana, que auxilia a resolução de problemas práticos do cotidiano da sociedade.

Sintetizando...

Neste estágio da pesquisa, antes da análise dos dados, percebe-se que há uma indicação de que a História da Matemática na perspectiva da Etnomatemática pode ser um recurso didático-pedagógico importante para o ensino e aprendizagem em matemática para a formação dos alunos como cidadãos críticos e capazes para tomar decisões. Nesse sentido, a Matemática foi utilizada a serviço da Educação Financeira cujos conteúdos são essenciais para a formação da cidadania.

O início da análise dos dados mostra que a valorização do conhecimento cultural dos alunos por meio da realização de um elo entre as suas tradições é essencial para o desenvolvimento da cidadania. Nesse contexto, a utilização de situações comerciais e financeiras do cotidiano dos alunos pode aumentar o interesse dos alunos pelos estudos, desenvolvendo a sua autoestima.

Referências bibliográficas

Brasil (1998). *Parâmetros curriculares nacionais:* matemática. Brasília, DF: MEC/SEF.

Brasil (2012). *Vida e dinheiro*: Educação financeira. O que é ENEF? 2012. Disponível em http://www.vidaedinheiro.gov.br/Enef/default.aspx. Acessado em 28/11/12.

Contador, P. R. M. (2008). *Uma breve história matemática.* São Paulo, SP: Editora Livraria da Física.

D'Ambrosio, U. (1990). *Etnomatemática:* arte ou técnica de explicar e conhecer**.** São Paulo, SP: Editora Ática.

D'Ambrosio, U. (2009). *Etnomatemática*: elo entre as tradições e a modernidade. Belo Horizonte, MG: Autêntica.

Groenwald, C. L. O.; Sauer, L. O.; & Franke, R. F. (2005). A história da matemática como recurso didático para o ensino da teoria dos números e a aprendizagem da matemática no ensino básico. *Paradigma,* v. 26, n. 2, sem numeração.

Jornal O Globo. *Economia*. Disponível em http://oglobo.globo.com/economia/brasileiro-trabalha-quase-5-meses-so-para-pagar-imposto-diz-ibpt-4955270. Acessado em 8/4/2013.

Kistemann, Júnior, M. A. (2011). *Sobre a produção de significados e a tomada de decisão de indivíduos-consumidores.* Tese de Doutorado. Universidade Estadual Paulista: Instituto de Geociências de Ciências Exatas. Rio Claro: São Paulo, SP: UNESP.

Miguel, A. & Miorim, M. A. (2008). *História na educação matemática:* propostas e desafios. Belo Horizonte, MG: Autêntica.

Miorim, M. A. (1998). *Introdução à história da educação matemática.* São Paulo, SP: Atual.

Ozámiz, M. G. & Pérez, D. (1993). *Enseñanza de las ciencias y la matemática*: tendencias e innovaciones. Madrid España: IBERcima.

Rosa, M. & Orey, D. C. (2010). Ethnomodeling: a pedagogical action for uncovering ethnomathematical practices. *Journal of Mathematical Modelling and Application,* 1(3), 58-67.

VIANNA, C. R. (2000). História da matemática na educação matemática. IN: *Anais do IV Encontro Paranaense de Educação Matemática* (pp. 15-19). Londrina, PR:UEL.

LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS NO RUTINARIOS Y ACTITUDES HACIA EL ESTUDIO DE LAS MATEMÁTICAS EN EL NIVEL MEDIO SUPERIOR DE LA UAGRO

René Santos Lozano y Santiago Ramiro Velázquez Bustamante
Universidad Autónoma de Guerrero. México
Secretaría de Educación Guerrero
santos_oasis@hotmail.com, sramiro@prodigy.net.mx

Resumen. En este escrito presentamos un proyecto de investigación sobre problemas auténticos y actitudes hacia el estudio de las matemáticas en el nivel medio superior. Se parte del supuesto de que proponer y resolver problemas auténticos genera actitudes positivas. Los problemas auténticos son los que abordan situaciones reales y de relevancia social. A pesar del reconocimiento de la relevancia de estos problemas su utilización en la escuela es escasa. El objetivo de la investigación es constatar el desarrollo de actitudes positivas hacia el estudio de las matemáticas cuando los alumnos resuelven problemas auténticos. Para su logro proponemos un estudio documental en este ámbito, un análisis, búsqueda y selección de problemas auténticos y una actividad con profesores y alumnos de este nivel educativo
Palabras clave: problemas auténticos, actitudes hacia las matemáticas
Abstract. In this paper we present a research project on authentic problems and attitudes towards the study of mathematics at the high school level. It is assumed that proposes and solves authentic problems generated positive attitudes. The real problems are those that address real situations and social relevance. Despite recognition of the importance of these problems in school use is scarce. The objective of the research is to ascertain the development of positive attitudes towards the study of mathematics when students solve real problems. To accomplish this we propose a document in this field study, analysis, and selection of authentic problems and an activity with teachers and students at this level
Key words: authentic problems, attitudes towards mathematics

Introducción

En este reporte se describe y se presentan algunos avances de un proyecto de investigación sobre la solución de problemas auténticos y las actitudes hacia el estudio de las matemáticas en el nivel medio superior de la Universidad Autónoma de Guerrero – UAGro.-. Se parte del supuesto de que proponer y resolver problemas auténticos por parte de profesores y alumnos, genera actitudes positivas hacia el estudio de las matemáticas. Los problemas auténticos son los que abordan situaciones reales y de relevancia social. Estas situaciones pueden ser sobre aplicación de las matemáticas como personas saludables, como consumidores y como ciudadanos. De igual modo en el estudio de los alimentos, drogas y condiciones del organismo humano (Alsina, 2010). De manera que un problema auténtico se caracteriza por abordar una situación real e interesante y se enmarca en una situación apropiada para reconocer diversos usos y significados del contenido matemático que aborda.

Por su parte los aspectos que componen una actitud son el cognitivo, el afectivo y el conductual. El primero se refiere a las preconcepciones e ideas que tiene el alumno acerca de las matemáticas, el afectivo consiste en los sentimientos que esta asignatura produce y el conductual está formado

por las disposiciones y acciones de los estudiantes hacia las matemáticas.

Problema de investigación

En el campo de la solución de problemas existen algunos autores que están abordando una cuestión que está relacionada con las consecuencias que ocasionan el rechazo hacia las matemáticas, cuando se plantean problemas que están fuera de contexto, son artificiales o rutinarios. Los investigadores Velázquez, Slisko y Nolasco (2012) presentan algunas evidencias relacionadas con el desarrollo de actitudes cuando los alumnos resuelven problemas planteados en libros de texto oficiales. Qué revelan los problemas enmarcados en contextos auténticos como generadores de actitudes positivas, en tanto que los de contexto artificial dan lugar a actitudes negativas.

Por otro lado Santos (2009) sostiene que en el aula impera un discurso matemático escolar cerrado, es decir desvinculado de las prácticas sociales cuando se investiga la solución de problemas de probabilidad. En esa investigación se destaca una actitud positiva cuando los alumnos reflexionan sobre el problema planteado cuando es auténtico, porque se enmarca en la práctica social denominada "El juego de canicas en la feria".

Centrados en el nivel medio superior podemos destacar el énfasis de los programas de estudio de matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero UAGro.(2010), en los problemas auténticos. Cuando proponen preparar a los alumnos para la vida es decir que sean capases de solucionar problemas relevantes para la sociedad. De aquí la importancia de plantear problemas inmersos en las prácticas sociales que favorezcan al desarrollo de actitudes positivas hacia el estudio de las matemáticas.

De manera que el problema de investigación es que hacen falta explicaciones sobre problemas auténticos que generen actitudes positivas hacia el estudio de las matemáticas.

Objetivo de la investigación

Constatar el desarrollo de actitudes positivas hacia el estudio de las matemáticas cuando los alumnos resuelven problemas auténticos.

Marco teórico

Consideramos a la teoría de la actividad (TA) como marco teórico para esta investigación, porque nos permite realizar un análisis integral de la actividad humana, que se concibe como un sistema de acciones y operaciones que realiza el estudiante (sujeto) sobre aquella parte de la realidad que será transformada por el (objeto), en interrelación con otros sujetos, el desarrollo de las actividades se pueden estructurar en tres etapas la orientación, ejecución y control (Leontiev,

1981). De manera que resolver problemas se puede considerar como una actividad humana, en la que las acciones no se efectúan de manera inmediata, sino que se van formando por etapas y por lo tanto este proceso debe ser dirigido y planificado por el docente. Si relacionamos esta tesis con en el modelo educativo que presenta la Universidad Autónoma de Guerrero, en donde se establece que la enseñanza debe estar centrada en el aprendizaje, es decir en el estudiante y el docente debe ser un facilitador u orientador, y por tanto consideramos que este marco teórico es pertinente. En este sentido podemos fortalecer esta idea cuando Vygotsky (1982) señala en unas de sus tesis, la zona de desarrollo próximo, que el alumno alcanza su potencialidad cuando es orientado por otro en la solución de problemas, estos problemas deben ser auténticos, porque pueden desarrollar una actitud positiva hacia las matemáticas.

Metodología de la investigación

Para el logro del objetivo proponemos realizar las siguientes tareas:

1. Un estudio documental de investigaciones centradas en el ámbito del desarrollo de actitudes y solución de problemas auténticos.
2. Un análisis, búsqueda y selección de problemas auténticos en libros de texto y en distintas fuentes.
3. Una actividad con profesores y alumnos de este nivel educativo para constatar procesos y resultados. En esta última actividad se tiene planeado proponer a 10 profesores de matemáticas del nivel medo superior de la UAGro., el análisis de problemas planteados en los textos que se utilizan en este nivel educativo y en otras fuentes. Para este análisis consideramos como criterio principal el contexto o situación que abordan los problemas asociados al desarrollo de actitudes hacia el estudio de las matemáticas.
4. Preparar un grupo de 15 alumnos para que resuelvan problemas analizados por los profesores y explorar el tipo de actitudes que generan. Esta exploración se hará a través de observaciones participativas que incluyan las opiniones de los alumnos sobre los aportes de esta actividad, al desarrollo de una concepción positiva de sí mismos en el ámbito de matemáticas.

Estudio documental sobre el desarrollo de actitudes hacia el estudio de las matemáticas y la solución de problemas auténticos

De acuerdo al Diccionario Ilustrado Trillas, una actitud es postura, situación y disposición de los diferentes estados anímicos de una persona.

Velázquez, Slisko, Nolasco (2012) sostienen que una actitud positiva significa el interés de los alumnos por construir, aplicar y difundir saberes matemáticos, la búsqueda permanente del conocimiento y asumir la responsabilidad de sus acciones en el ámbito de las matemáticas. Y una actitud negativa es la indiferencia, la escolarización el rechazo y la imposición de criterios.

Alsina, Fortuny y Pérez (1997) consideran que las actitudes se refieren a la apreciación de las matemáticas y a la organización y hábitos de trabajo en esta asignatura.

Gairin (1990) considera que la actitud es causa y efecto del aprendizaje. Es una de las variables intervinientes en el aprendizaje de tal forma que las actitudes negativas dificultan los aprendizajes. Y a la vez señala que una enseñanza mal administrada puede generar actitudes negativas en el alumno.

Gallego (2000) argumenta que una actitud tiene 4 componentes o dimensiones; la cognitivo, la afectivo, la conativo o intencional y la conductual.

Martínez (2008) señala que las actitudes son predisposiciones o juicios valorativos o evaluativos, favorables o desfavorables, que determinan las intenciones personales de los sujetos y son capaces de influir en sus comportamientos o acciones frente al objeto, sujeto o situación.En esta misma dirección Martínez presenta que existen actitudes hacia las matemáticas y actitudes matemáticas, las actitudes hacia las matemáticas tienen que ver con la valoración, el aprecio, la satisfacción, la curiosidad, y el intereses tanto por la disciplina como por su aprendizaje, acentuando más el componente afectivo que el cognitivo. En tanto las actitudes matemáticas se caracterizan por considerar las capacidades de los sujetos y su modo de utilizarlas.

Como es de interés en esta investigación el desarrollo de actitudes hacia las matemáticas consideramos algunos aspectos de Martínez Padrón (2003) cuando sostiene que tanto los alumnos como los docentes pueden construir o desarrollar actitudes positivas, neutras o negativas. Las primeras pueden a que ellos se enamoren de las matemáticas y esto permito la construcción de ámbitos de cariños, estimación y reconocimiento. Las segundas conducen a la ausencia de interés, atención y preocupación por las matemáticas y las terceras conducen hacia el rechazo de las matemáticas. En este sentido señala algo que resulta real e interesante que no es posible que un sujeto pueda construir y reconstruir competencias matemáticas, si a la par y de manera imbricada, no construye y reconstruye su inteligencia y sus actitudes positivas y apropiadas hacia las matemáticas.

Estas concepciones de las actitudes y la idea de Martínez con respecto las actitudes hacia las matemáticas que es el tema de interés del presente trabajo de investigación dan sustento de lo que presentaremos. Consideramos que el desarrollo de las actitudes hacia las matemáticas puede ser

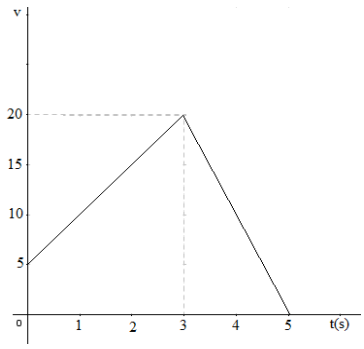
favorable o desfavorable, es decir pueden desarrollarse actitudes positivas o negativas dependiendo de distintas variables, en este caso suponemos que en el campo de las matemáticas a nivel medio superior la variable es el tipo de problemas que a los alumnos se les planten y solucionen, estos planteamientos se pueden encontrar en los libros o pueden ser propuestas de los facilitadores o docentes. Los docentes deben de reconocer que tipos de problemas plantean. En este sentido reconocemos dos tipos de problemas los auténticos y los artificiales.

Los problema autentico son aquellos que surgen de contextos reales. El contexto es una situación del mundo real en la que se construyen conexiones con situaciones relevantes y problemas prácticos ya sean personales o sociales, que tienden ocurrir fuera del aula de ciencias, laboratorio o investigación científica (Nohara y Goldstein, 2001, p. 19). En tanto que los problemas artificiales son aquellos que podríamos considerar como descontextualizados es decir que no tienen ninguna relación con la realidad o en algunos casos pueden ser absurdos. En tal sentido es importante reconocer cuáles son estos tipos de problema, para esto realizaremos una búsqueda y análisis en libros y en otras fuentes de estos problemas con el propósito de proponérselos a algunos docentes del nivel medio superior y que los alumnos resuelven para constatar procesos y resultados .

Un análisis, búsqueda y selección de problemas auténticos en libros de texto y en distintas fuentes.

Enseguida presentamos dos ejemplos que se pueden considerarse como problemas auténticos tomando como criterio principal el contexto o situación que abordan los problemas asociados al desarrollo de actitudes hacia el estudio de las matemáticas.

Ejemplo1. La gráfica siguiente representa el movimiento uniforme de una partícula, en dos momentos diferentes en un lapso de 5 segundos. Úsense los datos de la figura y calcúlese la velocidad promedio de cada intervalo para determinar la longitud de su desplazamiento.



1. ¿Cuál es la velocidad promedio en el intervalo 1,3 y la distancia recorrida en el 3,5?

2. Elabora un texto breve en donde describas lo siguiente.

a) Qué modela la gráfica.

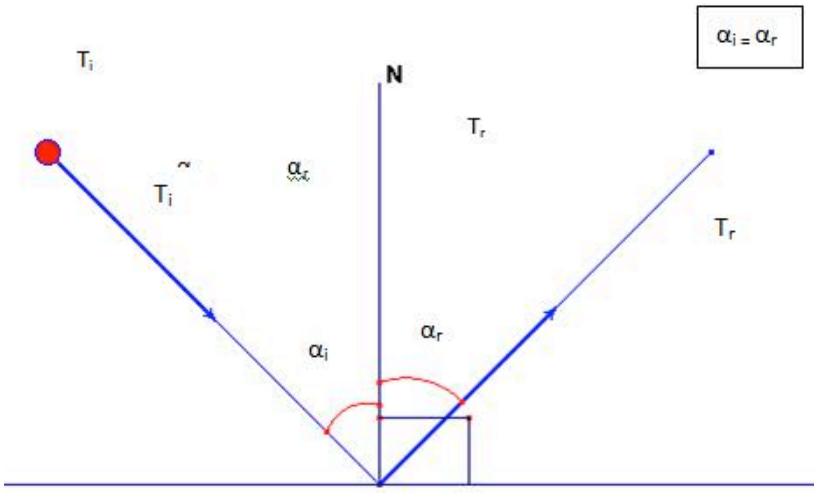
b) Qué significados y usos tiene la velocidad en el intervalo $[3,5]$.

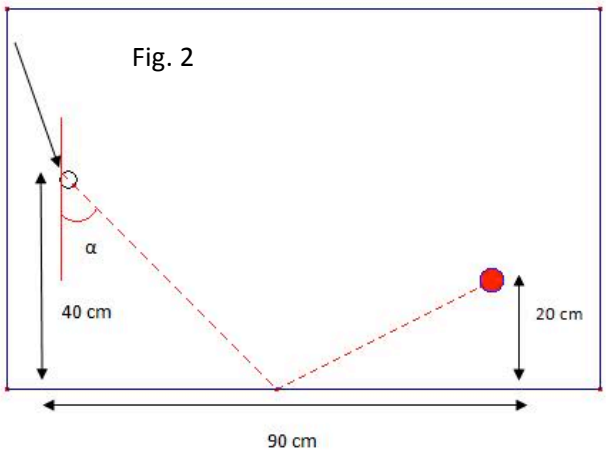
Sostenemos que es un problema autentico porque representa una situación del contexto real además de que puede ser interesante para el alumno y docente, el problema está enmarcado en

una situación apropiada para el reconocimiento del significado de movimiento uniforme y puede ser útil para precisar los usos y significados de dicho movimiento y la asociación pendiente-velocidad.

Ejemplo 2.

Fig. 1





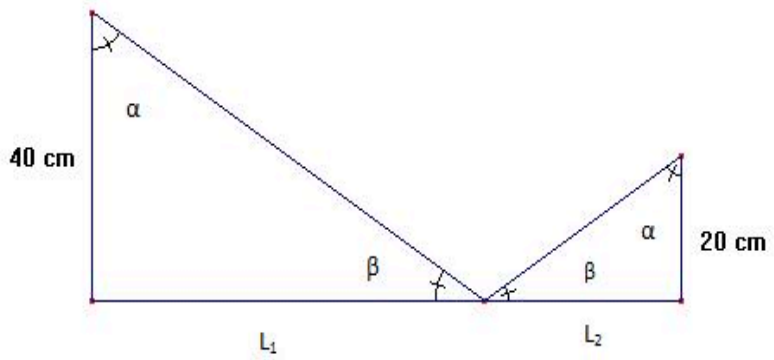
En equipos vamos a describir la situación que se presenta en las figuras 1 y 2,

¿Qué observo en la figura1?:

¿Qué observo en la figura 2?:

Miguel quiere pegarle a la bola roja con la bola blanca, después de que esta última rebote de la banda como se muestra en las figuras. ¿Cómo deben ser los ángulos αr y αi para que Miguel tenga éxito en lo que se propone?:

¿Cómo deben ser los triángulos que se forman con la trayectoria de la bola y la banda donde golpea?



¿Cuánto mide el ángulo α en la figura 2?:

Este problema se destaca porque favorece a la reflexión y la construcción del conocimiento referente a los conceptos de ángulos y triángulos, además que se encuentra en un contexto real, el juego de billar. Estos ejemplos que consideramos como problemas auténticos son propuestas que los docentes del nivel medio superior pueden plantear a sus alumnos para favorecer al desarrollo de actitudes hacia las matemáticas.

Referencias bibliográficas

Alsina, C. (2010). Matemáticas para la ciudadanía. En M. Callejo y J. Goñi (Coords.). *Educación matemática y ciudadanía* (pp. 89-102). Barcelona, España: Graó.

Alsina, C. Fortuny, J. Y Pérez, R. (1997). *¿Por qué geometría? Propuestas didácticas para la ESO*. Madrid, España: Síntesis.

Gairin, J. (1990). *Las actitudes en educación*. Barcelona, España: Boixareu Universitaria.

Gallego, R. (2000). *Los problemas de las competencias cognoscitivas. Una discusión necesaria*. Santafé de Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Leontiev, A. N. (1981). A*ctividad, conciencia, personalidad.* La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.

Martínez, O.(2008). Actitudes hacia las matemáticas. *Revista Universitaria de Investigación, 9 (1), 237-256.*

Martínez Padrón, O. (2003). *El dominio afectivo en la Educación Matemática: Aspectos teórico-referenciales a la luz de los Encuentros Edumáticos*. Trabajo de Ascenso no publicado. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico Rural El Mácaro, Turmero.

Nohara, D. y Goldstein, A. A. (2001). *A Comparison of the National Assessment of Educational Progress (NAEP), the Third International Mathematics and Science Study Repeat (TIMSS-R), and the Programme for International Student Assessment (PISA).*Washington, DC: U.S. Department of Education, National Center for Education Statistics.

Santos, R. (2009). *El discurso matemático escolar. El caso de la probabilidad elemental.*

Tesis de licenciatura no publicada. Facultad de Matemáticas, Acapulco, Gro. México.

UAGro. (2010). *Programas de estudio de matemáticas del nivel medio superior*. Chilpancingo, México: Autor.

Velázquez, S., Slisko, J. y Nolasco, H. (2012). Concepciones de los profesores acerca de las actitudes que producen los problemas planteados en los libros de textos de matemáticas de educación secundaria. En R. Flores (Ed.) .*Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 25, 1221-1229. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Vigotsky, L. (1982). *Pensamiento y Lenguaje*. La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.

LA COSMOVISIÓN INDÍGENA Y SUS PERSPECTIVAS DIDÁCTICAS: VISIÓN ETNOMÁTEMÁTICA DE DOS GRUPOS ÉTNICOS

María Elena Gavarrete Villaverde, Luis Marcelo Casis Raposo
Institución: Universidad Nacional. Costa Rica
Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación y Universidad Finisterrae Chile
marielgavarrete@gmail.com, marcelocasps@gmail.com

Resumen. En este trabajo se describe la perspectiva etnomatemático de algunos elementos de la cultura material de los dos grupos étnicos: los Talamanca de Costa Rica y los mapuches de Chile y Argentina. Proponemos una descripción geométrica del Nopatkuö de Talamanca y la Kultrun de Mapuches. Ambos muestran características comunes de la visión del mundo que se refleja en los objetos culturales. Este artículo resume una propuesta de colaboración en la investigación. Se propone una visión de la educación matemática para guiar a los futuros profesores y la formación permanente de los profesores, la promoción de la enseñanza creativa, la contextualización activa y la evaluación y el fortalecimiento de la identidad cultural
Palabras clave: Etnomatemáticas, Cosmovisión, Geometría, Formación de Profesores
Abstract. This paper describes the ethnomathematical perspective of some elements of material culture of two ethnic groups: the Talamancas of Costa Rica and the Mapuche of Chile and Argentina. We propose a geometric description of the Nopatkuö from Talamanca and the Kultrún from Mapuches. Both showing common features of the worldview that is reflected in these cultural objects. This paper summarizes a proposal of collaborative-research. It proposes a mathematical educational vision to guide the preservice teachers and permanent training of teachers, promoting creative teaching, active contextualization and evaluation and strengthening of cultural identity
Key words: Ethnomathematics, cultural practices, ways of knowing

Introducción

Este documento muestra una reflexión sobre la visión de los autores respecto a la cosmovisión indígena y sus perspectivas de acción didáctica dentro del Programa de Etnomatemática, tomando como fundamento dos grupos étnicos distintos: Talamanqueños de Costa Rica y Mapuches de Chile.

Esta propuesta corresponde a un trabajo colaborativo de investigación que está en ciernes y en el cual participan dos países y tres universidades: Universidad Nacional (Costa Rica), Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación (Chile) y Universidad Finisterrae (Chile).

Las primeras ideas de esta propuesta de estudio surgen a raíz de las inquietudes de los autores por el estudio de los modelos cosmogónicos de las culturas talamanqueña y mapuche, así como por las coincidencias geométricas identificadas en ambos modelos.

El trabajo de investigación colaborativa surge a inicios del año 2013 y se encuentra en la etapa de indagación bibliográfica y etnográfica. Pero se propone como una comunicación breve en el Relme27 con el fin de obtener realimentación de los investigadores participantes.

En el planteamiento se propone utilizar la etnomatemática desde dos ámbitos: como campo de investigación y también como campo de acción didáctica.

La etnomatemática como campo de investigación se utiliza para describir elementos de la cultura material de estos dos grupos étnicos, mientras que la etnomatemática como campo de acción didáctica se utiliza para proponer herramientas pedagógicas que permitan fortalecer la identidad de los pueblos, favorecer la contextualización activa y enriquecer la formación docente.

Consideramos que los estudios socioculturales y las investigaciones en etnomatemáticas impactan en la capacidad de cuestionar y relativizar aspectos filosóficos de las matemáticas y esto a su vez impacta en los procesos de sensibilización ante los procesos pedagógicos de su enseñanza, pues al promover una contextualización activa, a través de rasgos identitarios de grupos étnicos se fortalecen las identidades y se brindan herramientas didácticas para mejorar la enseñanza.

Cultura, cosmovisión y etnomatemáticas implicadas

Para esta propuesta se asume el modelo atómico propuesto por Julián Huxley (1955) para describir la cultura a través de tres componentes esenciales: Artefactos, Mentifactos y Sociofactos. En la tesis doctoral de Gavarrete (2012) se plantea el modelo de Huxley (1955) como una herramienta para describir 'Conocimiento Matemático Cultural'.

Los Mentifactos se entienden como los elementos centrales y más duraderos de una cultura, que incluyen la lengua, lo mítico, las tradiciones artísticas y el folklore; corresponde a elementos abstractos y mentales que son comunes y que constituyen un conjunto de significados compartidos (Borba, 1990; Oliveras, 1996) y un conjunto de conocimientos compartidos y de comportamientos compatibilizados (D'Ambrosio, 2008), que son subordinados a unos parámetros que se establecen como "valores culturales", a través de los cuales se conduce o se guía la cultura de grupo (White, 1988). Según Gavarrete (2012) estos mentifactos se relacionan con la capacidad humana de pensar y formular ideas, y conforman los ideales y las imágenes por los que se miden otros aspectos culturales.

Los Sociofactos, según Huxley (1955) son aquellos aspectos de una cultura que se relacionan con vínculos entre individuos y grupos; así, en el nivel individual incluyen estructuras familiares, comportamientos reproductivos y sexuales y de crianza de los niños; mientras que a nivel de grupo, incluyen sistemas políticos, y educativos. Desde esta perspectiva, Gavarrete (2012) establece que existe conocimiento matemático cultural implícito en actividades colectivas rituales o lúdicas que conllevan el establecimiento de normas con significados o justificaciones culturales.

Según Huxley (1955) los Artefactos son las manifestaciones materiales de la cultura, se denominan también como "mercancías culturales" e incluso aquellos aspectos de la tecnología material de un grupo que permiten satisfacer sus necesidades básicas de alimento, cobijo, transportes y similares;

además, los sistemas de uso de suelo y la producción agrícola son artefactos culturales, como lo son las herramientas y el diseño particular del vestido.

El poner de manifiesto las herramientas teóricas para describir las etnomatemáticas asociadas a la cosmovisión nos parecen relevantes para este trabajo. Sobre todo porque tanto el Nopatkuö como el Kultrún corresponden a elementos de la cultura de dos grupos étnicos en los cuales confluyen artefactos, mentifactos y sociofactos.

Por otra parte se asumen las reflexiones propuestas por Gavarrete (2012) respecto a la Cosmovisión, pues el comportamiento cultural humano se caracteriza por ser un comportamiento pautado que muestra la herencia tradicional o herencia social históricamente acumulada; es decir, significa lo no genético, lo aprendido y adquirido en la sociedad, que prevalece a partir de las interacciones y el compartir.

Así, la cosmovisión según Gavarrete (2012) la constituye el sistema de significados compartidos que constituyen a su vez un sistema de 'mitos' compartidos, a través de los cuales se percibe e interpreta la realidad y con los que se interactúa para la pervivencia de los valores y la supervivencia de colectivos que desarrollan una cultura.

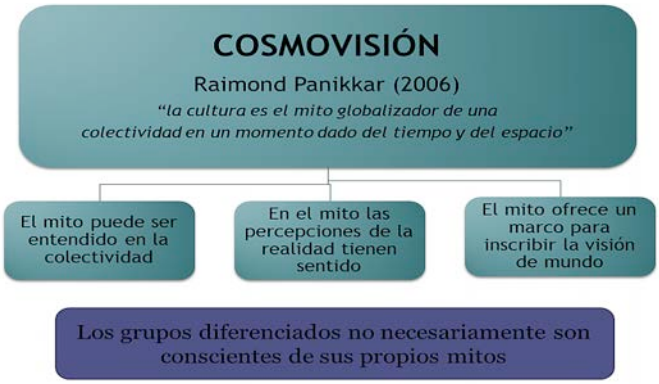


Figura 1. Ideas de Panikkar (2006) relevantes para esta investigación

En la figura 1 se muestra un esquema vinculado al planteamiento filosófico asumido para el constructo de cosmovisión, en el cual se asume que "la cultura es el mito globalizador de una colectividad en un momento dado del tiempo y del espacio" (Panikkar, 2006, p.129). Desde esta perspectiva, el 'mito' es el panorama que puede ser entendido en esa colectividad y donde las percepciones de la realidad tienen sentido, por lo cual el mito nos ofrece el marco donde se inscribe nuestra visión del mundo, que es lo que permite y condiciona cualquier interpretación de la realidad.

Los grupos diferenciados no son plenamente conscientes de sus propios mitos y dado que la cultura no es objetivable, entonces el acercamiento al conocimiento matemático cultural se facilita

participando de algún modo en su mito, puesto que cada cultura define unos preceptos de percepción del mundo y de una autocomprensión de lo que es significativo para la colectividad como por ejemplo los criterios de verdad, bondad y belleza, los límites del mundo y la manera de posicionarse.

Desde la perspectiva de D'Ambrosio (2004, 2005a, 2005b, 2007, 2008) sobre las etnomatemáticas como 'las distintas formas de conocer'; así como el desarrollo propuesto por Gavarrete (2012) respecto al Conocimiento Matemático Cultural, en esta incipiente investigación se propone una descripción comparativa de dos elementos cosmogónicos distintos: el Nopatkuö de la cultura Talamanqueña de Costa Rica y el Kultrún de la cultura Mapuche de Chile, ambos se presentan en la figura continuación.

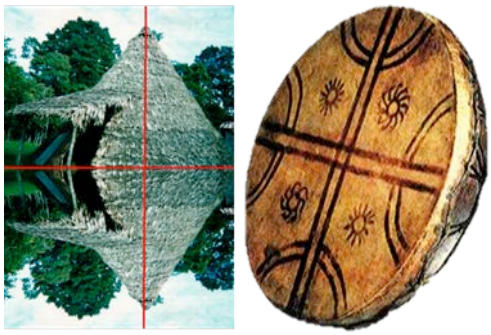


Figura 2. Nopatkuö (Talamanqueño) y Kultrún (Mapuche)

Ambos objetos corresponden a rasgos esenciales del patrimonio cultural de los pueblos talamanqueños y de los mapuches, en los cuales se alberga representa y resume mucha información ancestral, con potencial de aprovechamiento para estudiar desde las etnomatemáticas.

El Nopatkuö, según Gavarrete (2012) de los pueblos talamanqueños de Costa Rica permite comprender mejor la composición mítica de los espacios que describe su cosmovisión y corresponde a un modelo que permite comprender mejor la composición mítica de los espacios que describe su cosmovisión y a su vez guarda relación con otras visiones culturales sobre los niveles del cosmos y la realidad expuestas por Vitebsky (1995) y Gutiérrez (1988).

Por otra parte, Grebe, Pacheco y Segura (1972) afirman que el estudio del Kultrún permite comprender la estructura simbólica, dual y simétrica de la cosmovisión Mapuche.

En la figura que se muestra a continuación se describe a propuesta inicial de descripción del Nopatkuö, considerando que como sostienen Gavarrete (2012) y Gavarrete y Vásquez (1995), el número cuatro es el número mágico ritual que permite resumir y albergar información ancestral.

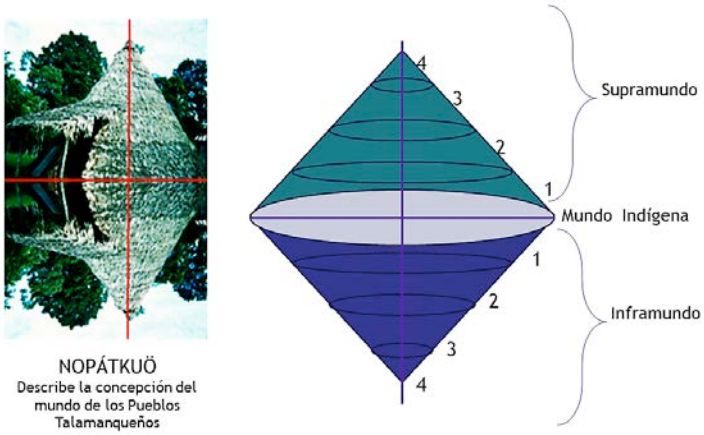


Figura 3. Modelo inicial de descripción del Nopatkuö

En la siguiente figura se muestra la propuesta inicial de descripción del Kultrún y dejamos en evidencia gráfica las analogías que pueden identificarse en la composición de ambos modelos de elementos culturales.

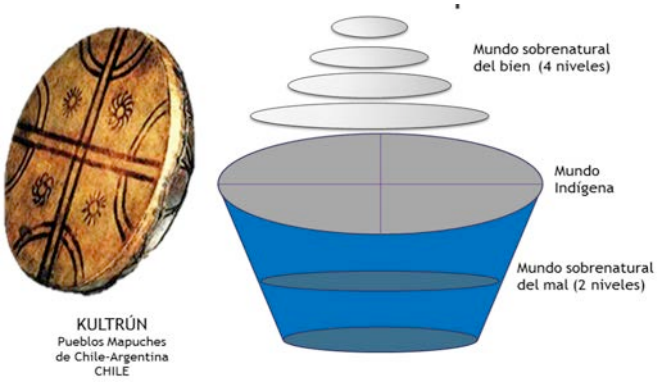


Figura 4. Modelo inicial de descripción del Kultrún

Se plantea un estudio descriptivo de los aspectos geométricos relevantes en los elementos tangibles e intangibles de estos dos elementos cosmogónicos. Dicho estudio se propone a partir de tres de las seis actividades matemáticas universales, propuestas por Bishop (1988a, 1988b, 1995, 1999): localizar, diseñar y explicar, adaptadas al contexto medio-ambiental.

En vista de que este documento corresponde a un trabajo de investigación en ciernes, simplemente se manifiestan unas ideas preliminares de lo que se está desarrollando en esta etapa indagatoria inicial.

Sin embargo, dentro de los aspectos didácticos consensuados por los investigadores, se han identificado tres áreas:

- Nociones geométricas, evidenciadas en la aplicación de simetrías para mostrar la división de los planos cosmogónicos a través de un centro axial y la utilización del círculo para

marcar ciclos o divisiones de significado mítico o ritual.

- Elementos geométricos patentes en el cono, círculo, rombo, triángulo, rectas, segmentos, líneas paralelas, líneas perpendiculares, líneas oblicuas, simetrías, coordenadas polares, eje de coordenadas, entre otros.
- Geometría Interfigural sobre la Geometría Intrafigural, tomando en cuenta las ideas de Chamorro (2003).

Otros aspectos consensuados corresponden a los elementos teóricos previsibles para el abordaje y construcción de marco teórico referencial. En este caso, ésta propuesta se compone de dos bloques: el primero de ellos se asume desde el componente de investigación y tiene como autores de orientación a Ubiratán D'Ambrosio, Alan Bishop, Paulus Gerdes y Rick Pinxten; mientras de desde el componente de acción didáctica se contemplan los trabajos de Alan Bishop, Daniel Orey, Milton Rosa, Ubiratán D'Ambrosio y Ma. Luisa Oliveras.

Reflexiones Finales

El trabajo que se presenta constituye una primera propuesta de un trabajo que pretende ampliarse e involucrar a otros investigadores e instituciones, por lo que se lanza la invitación para ampliar el trabajo compartido de manera colaborativa. En la visión prospectiva de lo que se ha mostrado, se pretende realizar un proyecto de indagación con maestros chilenos en formación inicial sobre las etnomatemáticas del Kultrún. Además se pretende profundizar en los elementos etnomatemáticos asociados al Nopatkuö durante el desarrollo de un proyecto de investigación de la Universidad Nacional de Costa Rica. En general, la visión prospectiva pretende ampliar el estudio comparativo de signos culturales en otros pueblos originarios, con el fin de contribuir en el fortalecimiento de las identidades culturales y potenciar el proceso de enculturación docente en Costa Rica, Chile y los demás países que se quieran integrar a esta propuesta de trabajo investigativo del tipo colaborativo.

Referencias bibliográficas

Bishop, A. (1988a). Aspectos sociales y culturales de la Educación Matemática. *Enseñanza de las Ciencias, 6* (2), 121-125.

Bishop, A. (1988b). Mathematics Education in its Cultural Context. *Educational Studies in Mathematics, 19*, 179-191.

Bishop, A. (1995). Educando a los culturizadores matemáticos. *Revista UNO, 6*(2), 7-12.

Bishop, A. J. (1999). *Enculturación matemática, la educación matemática desde una perspectiva cultural.* Barcelona: Paidós.

Borba, M. (1990). Ethnomathematics and Education. *For the Learning of Mathematics, 10* (1), 29-43.

Chamorro, M. (2003). *Didáctica de las Matemáticas para primaria.* Madrid: Pearson .

D'Ambrosio, U. (2004). Educació matemática, etnomatemática i pau. *Perspectiva Escolar*, *284*, 15-22.

D'Ambrosio, U. (2005a). O Programa Etnomatemática como uma proposta de reconhecimento de outras formas culturais. *Yupana, 2*(5), 63-71.

D'Ambrosio, U. (2005b). Sociedade, cultura, matemática e seu ensino. *Educação* e *Pesquisa, 31*(1), 99-120.

D'Ambrosio, U. (2007). La matemática como ciencia de la sociedad. En J.Giménez, J.Diez-Palomar y M. Civil (Eds.), *Educación Matemática y Exclusión* (pp.83-102). España: Graó.

D'Ambrosio, U. (2008). *Etnomatemática. Eslabón entre las tradiciones y la modernidad.* México: Limusa.

Gavarrete, M.E. (2012). *Modelo de aplicación de Etnomatemáticas en la Formación de Profesores para Contextos Indígenas de Costa Rica*. Tesis Doctoral no publicada, Universidad de Granada, España.

Gavarrete, M.E. y Vásquez, A.P. (2005). *Etnomatemáticas en el Territorio Talamanca Bribri*. Tesis de Licenciatura no Publicada, Universidad Nacional, Costa Rica.

Grebe, M., Pacheco, S. y Segura, J. (1972). Cosmovisión Mapuche. *Cuadernos de la realidad nacional,* 46-73. Disponible en http://meli.mapuches.org

Gutiérrez, M. (Ed.). (1988). *Mito y Ritual en América*. España: Editorial Alhambra.

Huxley, J. S. (1955). Evolution, Cultural and Biological. *Yearbook of Anthropology* (pp. 2-25). Chicago: University of Chicago.

Oliveras, M.L. (1996). *Etnomatemáticas. Formación de profesores* e *innovación curricular*. Granada: Comares.

Panikkar, R. (2006). Decálogo: Cultura e Interculturalidad. *Cuadernos Interculturales*, *4*(6), 129-130.

Vitebsky, P. (1995). *The Shaman.* Londres: Duncan Baird Publishers.

White, L. (1988). El locus de la realidad matemática. En L. White (Ed.), *La ciencia de la cultura: un estudio sobre el hombre y la civilización.* Barcelona, España: Círculo Universidad.

FIGURACIÓN Y GESTUALIDAD UNA FORMA DE ABORDAR LA VARIACIÓN

Wilson Gordillo Thiriat y Eduardo Carrasco Henríquez
U. Distrital Francisco José de Caldas. Colombia
U. de Los Lagos. Chile
wgordillot@udistrital.edu.co, eduardo.carrasco@ulagos.cl

Resumen. Este trabajo presenta un estudio de caso con estudiantes que ingresan a la universidad, a fin de determinar figuraciones, gestualidades y justificaciones que emergen cuando analizan una curva para interpretar fenómenos de variación. Se diseña y aplica un cuestionario que se desarrolla en forma grupal, con el propósito de identificar entendimientos germinales que fomenten y potencien ideas matemáticas, se analizan las producciones, a través de tres categorías propuestas con las cuales se evidencia la comunicación de fenómenos variacionales entre pares y algunas nociones y relaciones gestuales a las que recurren los estudiantes en sus argumentaciones
Palabras clave: Figuración, gestualidad, variación
Abstract. This paper presents a case study of students entering college to determine configurations, gesture and justifications that emerge when analyzing a curve to interpret phenomena of variation. It designs and implements a questionnaire that takes place in a group, with the aim of identifying germ understandings that promote and enhance mathematical ideas, productions are analyzed through three categories proposals which evidence variational phenomena communicating peer and some notions and relations gesture to which students turn in their arguments
Key words: Figuration, gestures, variation

Antecedentes

El trabajo con la gráfica de la noción de derivada, asociada a la recta tangente implica una re-significación de la noción euclidiana de tangente, que refiere a intersectar a la curva en un solo punto, para entenderla desde una noción local y dinámica. Dolores (2000) muestra que la concepción griega de tangente puede constituirse en un obstáculo para la construcción, de parte de los estudiantes, de la concepción local. Aspecto que se sigue presentando, toda vez que el trabajo de Canul, Dolores y Martínez-Sierra (2011) señala nuevamente como la recta tangente, en su sentido euclideano, dificulta el trazo de rectas tangentes a una curva.

Por su parte, Radford (2009) afirma que el pensamiento no se produce únicamente en la mente, sino también a través de una coordinación sofisticada del lenguaje, el cuerpo, los gestos, los símbolos y las herramientas. Es más, la mayoría de las entidades abstractas en matemática son creadas por medio de mecanismos cognitivos que extienden la estructura de las experiencias corporales (Núñez, 2004, en Yoon, Thomas y Dreyfus, 2011). De este modo la gestualidad, cobra un rol más complejo que dar un énfasis a la comunicación y se constituye en parte de los procesos de aprendizaje, asociando la gestualidad con mejorar en el aprendizaje de la matemática, destacándose como una importate recurso pedagógico para la enseñanza en el aula (Yoon, Thomas y Dreyfus, 2011).

Carrasco, Buendía y Díaz (2013) al abordar el estudio de prácticas de figuración, entendidas como prácticas de construcción e interpretación de una figura plana de entidades que se distinguen en un fenómeno de variación. Prácticas a las cuales concurren aspectos socioculturales, cognitivos y epistémicos, es decir, son construcciones sociales que se estudian en el marco de la socioepistemología y la línea del pensamiento variacional (Cantoral y Farfan, 1998). Interesa, por tanto, en este reporte abordar prácticas de interpretación de una gráfica cartesiana, poniendo atención a aquello que concurre a la actividad de los estudiantes que interpreta. En particular el rol que la gestualidad tiene en la actividad estudiantil de interpretación y como la gestualidad concurre a significar elementos propios de la figuración de la derivada de una función.

A partir de estos antecedentes las preguntas orientadoras a este escrito son: ¿Cómo la gestualidad concurre a la interpretación de graficas? ¿Cómo puede aportar la gestualidad en procesos de figuración a la comprensión de los conceptos de pendiente, recta tangente y derivada y su interrelación en una práctica socio-escolar?

Elementos teóricos

La palabra gesto en la rae, se significa como el movimiento del rostro, de las manos o de otras partes del cuerpo con que se expresan diversos afectos del ánimo y a la gestualidad como el conjunto esos movimientos. McNeill (1992), por su parte, desde una aproximación lingüística, entiende al gesto como un signo, que define como la acción voluntaria del rostro, las manos o brazos que expresan algo, ya no solo una afectos del ánimo, sino ideas, la acción sería, en palabras de Mcneill, el significante que permite acceder a lo significado en el discurso de quien realiza el gesto. De este modo los gestos y principalmente la gestualidad asociada a una idea conforman un espacio gestual (Yoon, Thomas y Dreyfus, 2011). En particular, para esta investigación podemos hablar de un espacio gestual matemático, conformado por el conjunto de gestos asociados con una noción en la actividad matemática y a la vez tiene un lugar en el espacio entre los hablantes.

Por su parte, Carrasco, Buendía y Díaz (2013) conforman la noción de espacio epistémico de figuración, que se constituye en el acto de construir e interpretar figuras de fenómenos de variación, al ponerse en interrelación compleja a los estudiante con el ambiente, con una figura y con un fenómeno. Un espacio perceptivo, operacional y experiencial, en el cual ocurre la interacción entre quienes interpretan una gráfica y en el espacio gestual matemático, concurre al acto de conocer que se da en la interpretación de la gráfica.

Metodología

En el marco de un estudio de caso, se aborda un proceso exploratorio del rol de la gestualidad en prácticas de interpretación de gráficas cartesianas. Para ello se aplica un cuestionario a cuatro

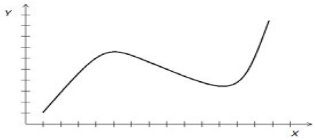
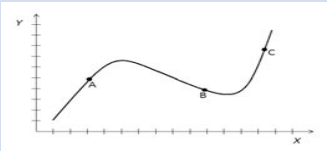
estudiantes egresados de enseñanza media (18 años) y que se aprontan a iniciar los estudios de ingeniería, en la ciudad de Santiago-Chile.

En equipos de dos estudiantes, responden el cuestionario. Se registra la actividad mediante filmación. A partir del video se construye un guion de lo filmado, seleccionando los momentos clave para su análisis.

En el análisis se recurre al contraste de las respuestas entregadas por los estudiantes con aquellas conjeturas realizadas en la etapa de diseño del test. A partir de lo cual se levantan elementos significativos de las prácticas estudiantiles focalizando la mirada en: a) La figuración: Intervención gráfica sobre la curva, b) La justificación: Como argumentan sus afirmaciones a la pregunta, y c) La gestualidad: movimiento de manos y brazos significativos a la actividad propuesta, acompañado de discurso.

El cuestionario

Cada una de las preguntas se diseña para indagar en los estudiantes prácticas de figuración y gestualidad, al momento de interactuar argumentativamente entre pares.

Tabla 1. Pregunta del cuestionario y su propósito.	
Pregunta N° 1. Observe la siguiente grafica y responda a la pregunta dada ¿Donde se inclina más la curva? Justifique su respuesta.	Esta pregunta pretende explorar elementos de figuración, se espera el trazo de ejes cartesianos para orientación, ubicación de puntos o rectas de forma que represente la inclinación de la curva, al igual que se espera que en el dialogo con su par, se interactué en discurso y se presente movimiento involuntario de brazos o manos para explicar algún concepto a su compañero.
Pregunta N° 2. Observe la siguiente grafica y responda a la pregunta dada  ¿Donde se inclina más la curva? Justifique su respuesta.	Esta pregunta pretende explorar elementos de figuración, se espera la ubicación de puntos o rectas de forma que represente la inclinación de la curva, al igual que se espera que en el dialogo con su par, se interactué en discurso y se presente movimiento involuntario de brazos o manos para explicar algún concepto a su compañero.
Pregunta N° 3. Observe la siguiente grafica y responda a la pregunta dada.  ¿En cuál de los tres puntos la curva está más inclinada? Justifique su respuesta	Esta pregunta pretende explorar elementos de gestualidad, rectas tangentes en los puntos dados de forma que represente la inclinación de la curva, al igual que se espera que en el dialogo con su par, se interactué en discurso y se presente movimiento involuntario de brazos o manos para explicar algún concepto a su compañero.

Análisis de resultados

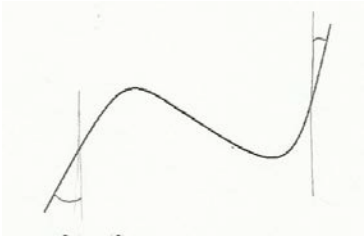
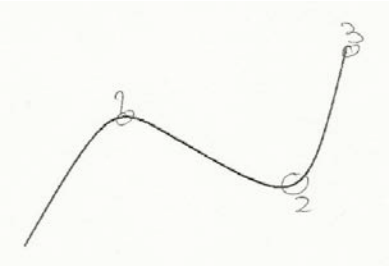
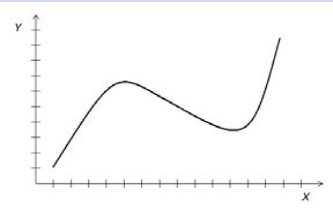
Para analizar y contrastar las respuestas entregadas por los grupos, se elaboran dos etapas de descripción de las producciones estudiantiles. En la primera se describen:

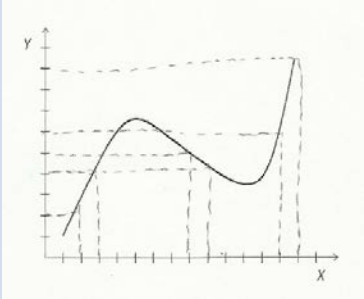
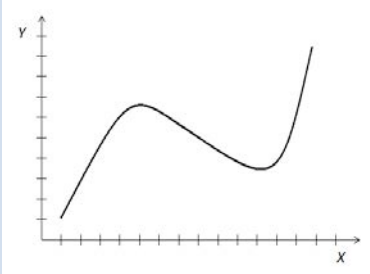
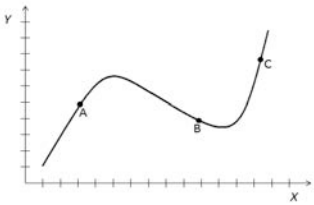
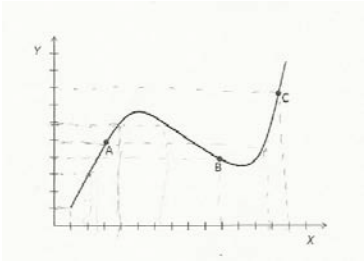
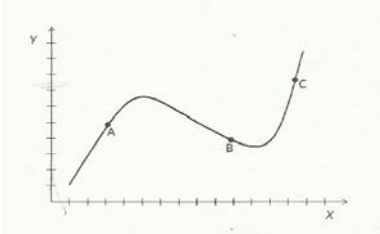
- Intervención a la gráfica: Trazos adicionales sobre la curva presentada (trazos, rectas, tangentes, signos, símbolos)
- Su argumentación, entendida en aspectos que concurren a justificar la respuesta (forma para describir fenómeno de variación)

En la segunda fase se ponen atención a la gestualidad acompañada del discurso argumentativo a la pregunta de los estudiantes (análisis del video para intercambio de conocimiento o argumento con el compañero).

Las respuestas de los estudiantes al cuestionario fueron las siguientes:

Tabla 2: Respuestas Estudiantiles

Pregunta	Grupo 1 Transcripción de la justificación	Grupo 2 Transcripción de la justificación
Pregunta N° 1. Observe la siguiente grafica y responda a la pregunta dada ¿Donde se inclina más la curva? Justifique su respuesta.	"A juzgar por las apariencias de la curva el tramo final es el de mayor inclinación. Además el ángulo formado por la curva en comparación con una recta vertical es claramente más pequeño en la sección final" 	" Uno de los dos piensa que inclinación es noción de pendiente y el otro piensa que es donde se obtiene mayor pendiente para el primer caso los puntos 1 y 2 y para el segundo caso tenemos al punto 3" 
Pregunta N° 2. Observe la siguiente grafica y responda a la pregunta dada 	" Mediante una medición no muy regular de las coordenadas y tomando como referencia el avance de el espacio en el eje OY respecto de un espacio de el eje OX podemos verificar que en la sección final de la curva es la mayor pendiente"	" Vemos que donde se inclina más, depende del punto de referencia que tomemos, por que si tomamos como referencia el eje X estará más inclinado donde la pendiente es mayor y si tomamos como referencia el eje Y, será cuando la pendiente sea mayor"

¿Donde se inclina más la curva? Justifique su respuesta.		
Pregunta N° 3. Observe la siguiente grafica y responda a la pregunta dada.  ¿En cuál de los tres puntos la curva está más inclinada? Justifique su respuesta	" Guiados por la apariencia de la curva analizamos las coordenadas de cada sección de la curva, constatando finalmente que la pendiente en el punto C es mayor que la pendiente de los puntos A y B" 	" A es imposible que sea más inclinado ya que la pendiente que posee se encuentra entre las de B y C, ahora si tomamos como referencia el eje X, C será el más inclinado, y si tomamos como referencia el eje Y, B será el más inclinado" 

Pregunta 1.

Ambos equipos intervienen la gráfica para focalizar el análisis en puntos específicos de ella. El G1, incorpora dos perpendiculares para medir ángulos. Por su parte G2 encierra, separando perceptivamente, puntos específicos de la curva.

Respecto de las argumentaciones, G1 significa la inclinación desde su cercanía con una línea vertical. Así la medición es un ángulo con una línea vertical. A menor ángulo, mayor inclinación. Por su parte G2, solo refiere a percepciones cualitativas respecto de la inclinación referida como pendiente.

Pregunta 2.

El G1, interviene la gráfica incorporando líneas punteadas hacia los ejes, marcando diversos puntos/pares ordenados en la gráfica. A diferencia de la pregunta anterior, la curva es significada como ruta y no hay presencia de ángulos a una línea vertical. Por su parte el G2 no intervine la gráfica.

La argumentación se construye desde una gráfica que se significa como camino recorrido. Así la inclinación se visualiza desde la razón entre el reflejo del avance en el eje y de un avance en el eje x. son argumento dinámicos diferentes a aquellos estáticos y geométrico usados en la pregunta anterior. Por su parte la argumentación del G2 es solo descriptiva y usa la palabra pendiente como un sinónimo de inclinación, pendiente que se percibe en referencia al eje elegido.

Pregunta 3.

El G1 interviene la gráfica con la misma estrategia de la pregunta anterior. Cabe destacar que se destacan líneas punteadas en la vecindad del punto A. G2, por su parte no interviene la figura.

La argumentación solo refiere a que se ha analizado las coordenadas de cada punto, sin descripción del análisis realizado. El hecho que en la vecindad del punto A, existan líneas punteadas que podríamos interpretar como puntos cercanos a A, permiten suponer que el análisis usado es el mismo usado en la pregunta anterior. G2 por su parte, no da argumentaciones, sino afirmaciones perceptivas. Sin embargo evidencia como el punto con mayor pendiente depende del eje que sea referido.

Gestualidad

Durante el dialogo que entablan los equipos para construir la respuesta consensuada al cuestionario se aprecian diversos gestos, que no concurren, no solo a dar énfasis a la argumentación de quien hablaba, sino que aportan en la interpretación de los gráficos. Hemos destacado en este reporte aquellos gestos asociados con la pendiente. Como se aprecia en las imágenes, la inclinación es gestualizada mediante la extensión del antebrazo y la mano conformando un segmento recto, el cual es puesto en diversas posiciones según el punto que se esté analizando.

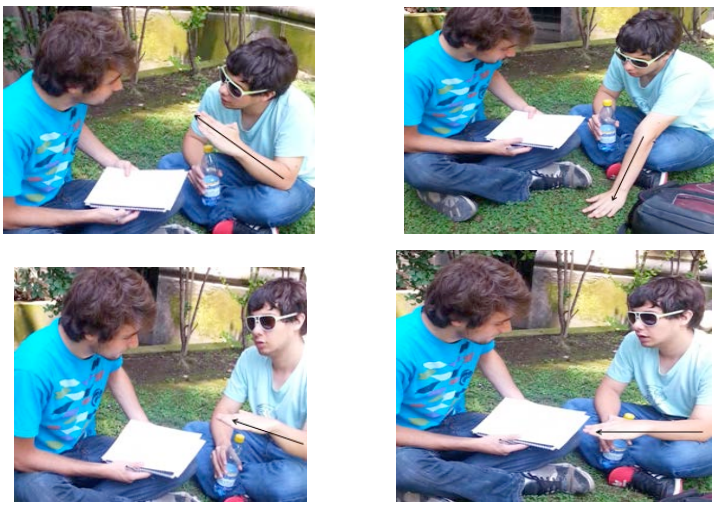


Fig. 1. Gestualidad de la Pendiente.

Este conjunto de gestos conforman la gestualidad de la pendiente y concurre a conformar una metáfora corporal de pendiente, al corporizar esta noción desde la inclinación respecto del suelo del antebrazo. El G1, entonces, significa la línea vertical como lo más inclinado, es un antebrazo perpendicular al suelo, mientras que el G2, pone de manifiesto la necesidad de una referencia ("suelo") para percibir mayor o menor inclinación.

A modo de conclusión

De acuerdo a los análisis planteados, se puede establecer que en la interpretación de la gráfica, asociada a la categoría de figuración, los estudiantes intervienen las gráficas, extendiendo la curva o agregando ejes o haciendo marcas, al igual que lo evidenciado en Carrasco y Díaz (2012). Dichas intervenciones buscan visualizar y/o focalizar la mirada interpretativa de la gráfica. Las argumentaciones por tanto, recurren a una percepción visual, "a simple vista" de la figura. Ello pareciera dificultar la construcción de argumentaciones escritas matemáticas, a diferencia de la diversidad de argumentos orales y gestuales durante su actividad. Cabe destacar que las respuestas de los estudiantes refieren a pendiente y no inclinación.

Se identifica en la actividad estudiantil el recurso a la gestualidad de la pendiente, entendida como las diferentes inclinaciones, respecto del suelo, del antebrazo y mano extendidos. Esta gestualidad permite suponer la significación metafórica de pendiente de la curva como la inclinación de un segmento respecto de un eje o suelo. Así lo más inclinado será lo más cercano a la perpendicular al eje (G1) y siempre referirá, como señala el G2, a un "suelo" que será el eje de referencia.

De este modo, gestualidad, figuración y argumentación se interrelacionan en la construcción de las respuestas a la actividad. El uso de la intervención de las figuras articuladas en la oralidad y gestualidad de la explicación a su compañero, muestra como emergen argumentaciones e ideas germinales para abordar el pensamiento variacional, las cuales no pueden ser traducidas en formalización matemática escrita, pero pueden constituir eslabones para la enseñanza de conceptos en el cálculo, como es la pendiente como segmento recto. Por parte de los investigadores, hay un punto de partida a fin generar y construir propuestas didácticas que aborden la interrelación mostrada entre la figuración, la gestualidad y el formalismo de la matemática para la apropiación de conceptos.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje Variacional en la introducción al análisis. *Épsilon*. 42, 352-369.

Canul, E., Dolores, C. y Martínez-Sierra, G. (2011). De la concepción global a la concepción local. El caso de la recta tangente en el marco de la convención matemática. *Revista Latioamericana de Educación Matemática*. 14 (2), pp. 173-202.

Carrasco, E. y Díaz, L (2012). Dos casos de figuración para lo que varía. *Acta Resumen de EIME XV*, 19° escuela de invierno de matemática educativa, México. D.F.

Dolores, C. (2000). Una Propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada. *El futuro del cálculo infinitesimal*. Capitulo V. GE I. México D.F. pp 155-181.

Radford, L. (2009). Why do gestures matter? Sensuous cognition and the palpability of mathematical meanings. *Educational Studies in Mathematics*, 70(2), pp.111–126.

Yoon, C.,Thomas, M. y Dreyfus T. (2011). Grounded blends and mathematical gesture spaces: developing mathematical understandings via gestures. *Educational Studies in Mathematics*, 78, pp.371-303.

INTERDISCIPLINARIEDAD EN LA INVESTIGACIÓN EDUCATIVA. TRANSFERENCIA DE LA MATEMÁTICA EDUCATIVA A OTRAS DIDÁCTICAS ESPECÍFICAS

Liliana Suárez Téllez
Coordinación General de Formación e Innovación Educativa, IPN México
lsuarez@ipn.mx

Resumen. El propósito general de este Proyecto Multidisciplinario es recuperar la experiencia de diseño de estrategias y materiales educativos de las áreas de matemáticas, bioquímica, y cultura financiera para dar cuenta de la innovación didáctica que puede instrumentarse en el ámbito del currículo potencialmente logrado. En este proyecto se integran también módulos transversales que observen el impacto de los marcos y los resultados de la investigación con una perspectiva multidisciplinar y con poblaciones específicas como los profesores del Instituto Politécnico Nacional
Palabras clave: materiales didácticos, estrategias didácticas, innovación educativa, currículo
Abstract. The general purpose of this project is to retrieve the experience Multidisciplinary design strategies and educational materials in the areas of mathematics, biochemistry, and financial culture to report on educational innovation that it can be implemented in the area of curriculum potentially achieved. In this project modules are also integrated transversal they observe the impact frameworks and research results with a multidisciplinary perspective and with specific populations as those National Polytechnic Institute teachers
Key words: didactic materials, didactic strategies, educational innovation, curriculum

Introducción

El currículo es un plan operativo que detalla lo que los alumnos deben saber, qué deben hacer los profesores para conseguir que sus alumnos desarrollen sus competencias y cuál debe ser el contexto en el que tenga lugar el proceso de enseñanza-aprendizaje, especificando, los criterios que se aplicarán para evaluar qué ha aprendido el alumno. El Instituto Politécnico Nacional ha vivido un proceso de cambio curricular que, de acuerdo con el marco de los currículos (Suárez, Torres y Ortega, 2012), se ha concentrado en influir en el currículo aplicado para determinar con mayor eficacia en el currículo logrado.

En 1997, Schmidt y otros investigadores, proponen el currículo potencialmente aplicado que comprende materiales (paquetes didácticos), planes (de seguimiento, capacitación y evaluación) y dispositivos organizacionales (redes y comunidades, con un marco de operación explícito) que concretan el currículo planeado desde una perspectiva de sistema y profesional. Este currículo potencialmente aplicado destaca la importancia de que el docente cuente con materiales acordes al currículo planeado así como la necesidad de organizar talleres de familiarización con los materiales y las estrategias, y comunidades de seguimiento y evaluación para los profesores. En el Instituto Politécnico Nacional existen diversos grupos de profesores que durante años han estado interesados en diseñar materiales en las áreas de matemáticas, bioquímica, cultura financiera, comunicación y física. Se aprovechará la experiencia en estas áreas para desarrollar un proyecto

multidisciplinario que dé cuenta de la innovación didáctica que puede instrumentarse en el ámbito del currículo potencialmente logrado. Además se integrarán módulos transversales que observen el impacto de los marcos y los resultados de la investigación con una perspectiva multidisciplinar y con poblaciones específicas como los profesores certificados de la RIEMS.

El plan general de esta investigación tiene cuatro etapas I) Intercambio de experiencias y conformación de un marco común de diseño de materiales, II) Diseño de estrategias y materiales educativos, III) Pilotaje de los materiales con profesores, IV) Pilotaje de materiales con estudiantes y V) Reporte de resultados.

En la constitución del Proyecto Multidisciplinario se cuenta un módulo central (Módulo 1) para el uso de los resultados de la investigación en el diseño curricular, tres módulos específicos para las áreas de matemáticas (Módulo 2), Bioquímica (Módulo 3) y Cultura Financiera (Módulo 4) y un módulo transversal que se ocupa de las estrategias y métodos didácticos (Módulo 5).

La hipótesis de trabajo radica en el hecho de que la disminución de las distancias que existen entre los diferentes currículos planeado e aplicado, a través del currículo potencialmente aplicado, usando los resultados de la investigación educativa establecerá elementos sólidos de diseño curricular institucional en el IPN que se verán reflejados en la pertinencia del diseño de estrategias y materiales didácticos en el trabajo con profesores y estudiantes.

Antecedentes

En un análisis exploratorio sobre la investigación educativa del periodo 2003-2011 en el nivel medio superior del Instituto Politécnico Nacional (Huerta, 2012) se observó que el 35% de los proyectos con registro en la Secretaría de Investigación y Posgrado está orientado a la planeación y organización didáctica, las estrategias de aprendizaje y enseñanza o a la incorporación de las TIC en el salón de clases. Es decir, durante ocho años, se ha producido conocimiento sobre lo que ocurre en las aulas con profesores y estudiantes politécnicos. Por otro lado, sin embargo, existe un sentir de docentes e investigadores que pueden resumirse en la siguiente frase de Trigueros "Los resultados encontrados y que continúan encontrándose [en la investigación educativa en las didácticas específicas] pueden incidir positivamente en el diseño de estrategias para lograr que los alumnos aprendan mejor. Para ello hay que conocerlos, probarlos en nuevas situaciones y utilizarlos de manera inteligente pues no hay recetas que permitan una solución global del problema" (Trigueros, 2009, pp. 32). Podemos decir entonces que es necesario emprender un proyecto que aporte información sobre el uso de los resultados de investigación para aportar estrategias concretas que incidan directamente en la mejora de los aprendizajes de nuestros estudiantes.

El trabajo reportado por Torres (2011) es un antecedente de identificación de uso de los resultados de investigación en la docencia para las áreas de matemáticas, comunicación, bioquímica y cultura financiera que ofrece a la comunidad de profesores e investigadores un espacio de interacción que los ayuda a reflexionar sobre su práctica docente o investigativa. Actualmente existen módulos para Matemáticas, Bioquímica ((Luna, Suárez y Ortega, 2011), Cultura Financiera (Navarro y Cruz, 2011), comunicación y, próximamente, Física (Suárez y Ramírez, 2011).

Particularmente para matemáticas, existen estrategias y materiales didácticos que han sido diseñados a partir de la investigación generada en la didáctica de las matemáticas. Quiero entender el Cálculo: Un enfoque diferente basado en conceptos y aplicaciones (Mochón, 1994) y Nubes de puntos y modelación algebraica (Cedillo, 1999) son un ejemplo de estos esfuerzos. En el Instituto Politécnico Nacional, en un esfuerzo coordinado por la Dirección de Educación Media Superior y el, entonces, Centro de Tecnología Educativa, editó los libros para el profesor y estudiante para los cursos de Álgebra (IPN, 2001), Geometría y Trigonometría (IPN, 2004) y Geometría Analítica (IPN, 2006). Estos libros fuero parte del proyecto de Paquetes Didácticos de Matemáticas (PDM) con propósito dotar al profesor y al estudiante de materiales de calidad, elaborados usando el conocimiento generado por las investigaciones y aplicado de manera sistemática, que les permitan trabajar conjuntamente para lograr los objetivos institucionales del área de matemáticas. Así como existen esfuerzos para matemáticas, se identifican esfuerzos realizados en las áreas de física, bioquímica, cultura financiera y comunicación que se utilizarán en este proyecto. En la primera etapa del proyecto se prevé el intercambio de experiencias que encaucen la construcción de un marco común de diseño de estrategias y materiales educativos.

Objetivos generales y particulares

El propósito general de este Proyecto Multidisciplinario es recuperar la experiencia de diseño de estrategias y materiales educativos de las áreas de matemáticas, física, bioquímica, cultura financiera y comunicación para dar cuenta de la innovación didáctica que puede instrumentarse en el ámbito del currículo potencialmente logrado. En este proyecto se integran también módulos transversales que observen el impacto de los marcos y los resultados de la investigación con una perspectiva multidisciplinar y con poblaciones específicas como los profesores certificados de la RIEMS. A continuación describiremos cada uno de los cinco módulos que integran este proyecto para contextualizar a continuación sus objetivos particulares.

Módulo 1. Uso de los resultados de la investigación educativa para el diseño curricular. En este proyecto se trabajarán los elementos de una propuesta de diseño curricular basado en la producción de materiales didácticos que permitan cristalizar la mejora en los aprendizajes para las

áreas de matemáticas, bioquímica, cultura financiera, comunicación y física Instituto Politécnico Nacional. El IPN cuenta con tres modelos que orientan y dan sentido a sus actividades para concretar su Reforma Académica, en particular, para responder a las necesidades de formación de sus alumnos. Estos marcos de referencia son el Modelo Educativo Institucional, el Modelo de Integración Social y el Modelo de Innovación Educativa.

El IPN de hoy, en sus propios documentos de referencia (IPN, 2003), reconoce que no responde plenamente a las necesidades de sus alumnos y de la sociedad a la que se debe. De aquí la importancia de definir políticas y estrategias para transformarlo según los lineamientos del Modelo Educativo Institucional. La incorporación de una categoría más, el currículo potencialmente aplicado, resulta particularmente útil cuando se diseñan planes de mejoramiento, porque permite llegar a un grado de concreción más próximo a las prácticas del salón de clases, mediante herramientas conceptuales, organizacionales y tecnológicas; es un currículo muy adecuado para un docente con formación profesional, que participa, por supuesto, de manera articulada con los demás agentes del sistema, en el diseño de este currículo.

Objetivos particulares: Establecer las bases para trabajar un diseño curricular basado en los resultados de la investigación educativa para las áreas de matemáticas, bioquímica, cultura financiera, comunicación y física Instituto Politécnico Nacional.

Módulo 2. El currículo potencialmente aplicado en el área de matemáticas. Este proyecto tiene como propósito documentar el diseño e implementación de actividades de aprendizaje de matemáticas basadas en resultados de investigación, particularmente los tratados en el Seminario Repensar las Matemáticas.

El Seminario Repensar las Matemáticas tiene como propósito la vinculación de la investigación educativa con la docencia en el área de matemáticas, para que el docente dialogue sobre resultados de investigación y los aproveche en el salón de clases. En este proyecto se parte del diseño de un marco para la elaboración de actividades de aprendizaje (con un énfasis en redes de actividades y en el uso de herramientas tecnológicas) para elaborar actividades de aprendizaje, se sigue con un taller para docentes sobre el diseño y uso de estos materiales y se concluye con el monitoreo del uso de las mismas por parte de estudiantes. Dado que en cuestiones educativas es importante tomar en cuenta el contexto, para el diseño e implementación de actividades de aprendizaje no basta buscar actividades que fueron reportadas como exitosas en alguna investigación para que así resulte su implementación. Por ello es pertinente contar con un marco para el diseño de actividades de aprendizaje, que este marco y sus productos sean conocidos y comprendidos por profesores y las actividades sean monitoreadas con estudiantes.

Objetivos particulares: Este trabajo tiene como objetivo, a partir de analizar los resultados de investigación del Seminario Repensar las Matemáticas, de diseñar e implementar actividades de aprendizaje de matemáticas, así como un taller para profesores sobre para la elaboración de estos materiales.

Módulo 3. El diseño del currículo potencialmente aplicado en el nivel superior fundamentado en paquetes didácticos y evaluación de la bioquímica. Entre estas alternativas se adopta el diálogo entre docentes e investigadores que fomenten la reflexión de la práctica docente, que propongan un intercambio de experiencias en el diseño de materiales didácticos constituyendo un marco teórico común para cada área disciplinar, elaborándolos de manera interdisciplinar para posteriormente, crear acciones de pruebas pilotaje, un intercambio de materiales didácticos así como acciones formativas para los profesores involucrados en este proceso de formación de cinco áreas disciplinares, tomando en cuenta los resultados de la evaluación del pilotaje para un rediseño de materiales. El trabajo con estudiantes será una prueba final que nos permita analizar la información resultante para una correcta interpretación de los resultados.

El proyecto propone el diseño de los materiales didácticos contextualizados en los avances de la ciencia y tecnología considerando el amplio espectro de la bioquímica que incida en el diseño curricular considerado como un plan operativo desde tres perspectivas para el sistema escolar (currículo planeado) que contiene los lineamientos establecidos por la institución, lo que se enseña realmente en el aula (currículo aplicado) donde la experiencia del profesor es determinante para el logro de los objetivos institucionales y por último, lo que los alumnos son capaces de demostrar que han aprendido (currículo aplicado), siendo un reflejo del grado de concreción más próximo a las prácticas en el salón de clases y los laboratorios.

Objetivos particulares: Proponer innovadores materiales didácticos como objetos de aprendizaje, que fortalezcan la didáctica de la disciplina enmarcada en los Modelos Educativo Institucional y el de Innovación Educativa constituyéndose en una alternativa para la generación del conocimiento en Bioquímica en modalidades distintas a la presencial como una oportunidad para crear redes académicas de colaboración entre distintas unidades académicas en el marco el Modelo Educativo Institucional.

Módulo 4. El currículo potencialmente aplicado en el área de cultura financiera. La cultura financiera es hoy un tema relevante en los estudios de la OCDE (2009), que a partir del 2012 evalúa esta competencia para la vida en su prueba PISA. En México, actualmente, se requiere de un énfasis mayor en la promoción de una nueva cultura financiera hacia el interior de las instituciones de educación media superior, de manera que sea significativa la disminución del analfabetismo en

este tema. Una cuestión trascendente de la cultura financiera de un individuo en proceso de formación para la vida, es la del ahorro para el retiro, ya que hasta hace algunos años un trabajador no tenía que preocuparse por la pensión que le sería asignada una vez que terminara su vida laboral, ya que contaba con una suma asegurada que le permitía sobrevivir hasta su muerte, sin embargo debido a las reformas en los sistemas de pensiones en México, hoy el trabajador es un ente activo en el nuevo esquema de pensiones, es él quien ahora toma decisiones de inversión sobre su ahorro actual, el mismo que tendrá consecuencias futuras, buenas o malas, según la óptica de cada individuo y un impacto socioeconómico para el país.

Objetivos particulares: Intercambio de experiencias en el diseño de materiales, así como el diseño de un marco común, la elaboración de materiales y el pilotaje de los mismos en el tema de cultura financiera, con énfasis en el ahorro para el retiro y lograr así la disminución del analfabetismo financiero de la comunidad estudiantil del NMS del IPN.

Módulo 5. Estrategias de aprendizaje y diseño de materiales educativos en el Nivel Medio Superior.

Por varios años el Nivel Medio Superior ha enfrentado una serie de problemas que han repercutido en la calidad y pertinencia de la oferta educativa generando con esto una serie de planes y programas distintos, acordes a la infinidad de subsistemas que lo conforman.

Ante este escenario y con la finalidad de atender los retos de calidad, pertinencia y cobertura se construye el Marco Curricular Común (MCC) como uno de los ejes rectores de la Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS, 2008).

Desarrollar competencias en los estudiantes y lograr los cambios propuestos para este nivel, requiere de docentes competentes. Es así como el Diplomado Competencias Docentes en el Nivel Medio Superior (DCDNMS) se plantea como una estrategia fundamental para dotar al docente, a partir de ciertos marcos de referencia, de herramientas didáctico-pedagógicas que permitan a éste desarrollar sus competencias docentes, esto implica atender la profesionalización de los docentes, y desarrollar las aptitudes necesarias para hacer frete a los retos que la sociedad del conocimiento requiere y por ende un mejor desempeño de los estudiantes.

Después de cuatro años de la implementación de este diplomado resulta relevante mirar los cambios, si es que los hay, al interior de nuestras aulas, así pues, este proyecto considera como objeto de estudio identificar en el Nivel Medio Superior del IPN la existencia en alguna de las unidades de aprendizaje que conforman los Planes y Programas de estudio la incorporación de los aportes teóricos y de investigación que se utilizaron como marco de formación docente, en las estrategias didácticas y/o la elaboración de materiales didácticos de apoyo propuestos en los

proyectos para la Certificación Docente y que propicie en los alumnos el fortalecimiento de sus competencias.

Objetivos particulares: Reconocer el impacto de los resultados de las investigaciones y los marcos de referencia analizados en el Diplomado en competencias docentes en la construcción de propuestas de estrategias didácticas y materiales educativos para la Certificación Docente.

Metodología científica

La Ingeniería Didáctica ha representado, para el área de la didáctica de la matemática un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Artigue, et al, 1995). Es una metodología que permite la intervención en el sistema completo del salón de clases pero establece lineamientos para tomar en cuenta los resultados de la investigación en las dimensiones que corresponden a la cognición, la epistemología, la didáctica y, algunos autores adicionan, la dimensión social. Así, en las investigaciones planteadas en cada uno de los módulos se usará la ingeniería didáctica para establecer las bases del diseño de un marco común de diseño de estrategias y materiales didácticos que integren, en la medida en que sea esto posible las áreas de matemáticas, física, bioquímica, cultura financiera y comunicación.

Hipótesis de investigación

La hipótesis apunta a señalar que la disminución de las distancias que existen entre los diferentes currículos planeado e aplicado, a través del currículo potencialmente aplicado, usando los resultados de la investigación educativa establecerá elementos sólidos de diseño curricular institucional en el IPN.

Preguntas de investigación

Sobre las actividades de aprendizaje y su diseño ¿qué aspectos metodológicos son relevantes para el diseño de actividades de aprendizaje?, ¿cuáles son las dificultades que tienen los profesores para el diseño e implementación de actividades de aprendizaje? y ¿qué aprendizajes logran los estudiantes con este tipo de actividades?

Resultados entregables

Documentar los resultados de la investigación en la didáctica de las matemáticas, la bioquímica, la cultura financiera y la comunicación y su uso en el diseño de los paquetes didácticos. Un informe que reporte el análisis de los aprendizajes matemáticos logrados al realizar materiales aprovechando el uso de los resultados de la investigación.

Un paquete de actividades de aprendizaje de matemáticas.

Documentar los resultados de la investigación en la didáctica de la Bioquímica y su uso en el diseño de los paquetes didácticos. Documentar le elaboración de los paquetes didácticos en el amplio espectro de la Bioquímica. Documentar la formación de redes de colaboración académica como una interacción efectiva entre investigadores, docentes y alumnos.

Informe que dé cuenta de la realidad que vive el Nivel Medio Superior respecto al tema de cultura financiera y en especial del conocimiento de los estudiantes sobre el sistema de ahorro para el retiro. Elaboración de materiales para unidades de aprendizaje que confluyen en la formación de una nueva cultura financiera.

Estructurar y elaborar un cuaderno-manual con las diversas estrategias de aprendizaje y materiales educativos que cumplan con la coherencia de las investigaciones y los marcos utilizados, para que las academias de profesores enriquezcan su acerbo y nutra la toma de decisiones fundamentadas.

Referencias bibliográficas

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática. Bogotá, Grupo Editorial Iberoamericana.

Cedillo, T. (1999). Nubes de puntos y modelación matemática. Grupo Editorial Iberoamérica.

Flores, C. (2007). Variaciones simultáneas de primer y segundo órdenes en una situación de graficación y modelación del movimiento. Tesis de Maestría no Publicada del CICATA-IPN.

Huerta, M.L. (2012). Tendencias de la Investigación Educativa en el NMS del IPN. Memorias del VII Foro de Investigación Educativa.

IPN (2003). Materiales para la reforma. Publicaciones 01 a 19. [en línea]. Disponible en: http://www.mreforma. ipn.mx/ [consulta 9 de octubre de 2006].

IPN (2001). Álgebra. Guía del estudiante. Instituto Politécnico Nacional. 2nda edición, México.

IPN (2004). Geometría y Trigonometría. Guía del Profesor. Instituto Politécnico Nacional.

IPN (2006). Geometría Analítica. Libro del Profesor. IPN.

Luna, V.H., Suárez, L. y Ortega, P. (2011). Seminario Repensar la Bioquímica: Transferencia de una innovación educativa. Memorias de Virtual Educa 2011. México, D.F. 1-17.

Navarro, M. y Cruz, M. (2011) Transferencia de una innovación educativa: Seminario Repensar la Cultura Financiera.

Mochón, S. (2000). Modelos matemáticos para todos los niveles. Cuadernos Didácticos Vol. 9. Grupo Editorial Iberoamérica.

OCDE (2009). El Programa de la OCDE, Qué es y Para Qué sirve. OCDE-Santillana.

Ortega, P., Ramírez, M., Torres, J., López, A., Servín, C., Suárez, L. y Ruiz, B. (2007). Modelo de innovación educativa. Un marco para la Formación y el desarrollo de una cultura de la Innovación. Revista Iberoamericana de Educación a Distancia 10, 1, 145-173.

Schmidt, W.H., McKnight, C. C., Valverde, G. A., Houang, R. T., & Wiley, D. E. (1997). Many Visions, Many Aims, Volume 1: A Cross-National Investigation of Curricular Intentions in School Mathematics. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Suárez, L.; Cordero, F.; Daowz, P.; Ortega, P.; Ramírez, A.; Torres, J.L. (2005). De los Paquetes Didácticos hacia un Repositorio de Objetos de Aprendizaje: Un reto educativo en matemáticas. Uso de las gráficas, un ejemplo. ISSN 1138-2783 RIED-Revista Iberoamericana de Educación a Distancia, Volumen 8.

Suárez, L.; Torres, J.L.; Ortega, P. (2012). Las matemáticas del bachillerato en el instituto politécnico nacional. En C. Dolores. (Ed.) ¿Hacia dónde reorientar el currículum de matemáticas del Bachillerato? Plaza y Valdés : México.

Suárez, L. y Ramírez, M. (2010). Seminario Repensar la Física: Transferencia de una Innovación Educativa. Memorias del V Congreso Internacional de Innovación Educativa. Págs. 293-297.

Torres, J.L. (2011). Protocolo del Proyecto Multidisciplinario. Uso de los resultados de la investigación en la docencia: Matemáticas, Comunicación, Bioquímica y Cultura Financiera. Registro Secretaria de Investigación y Posgrado No. 1335. Documento de trabajo IPN.

Trigueros, M. (2009). ¿Qué hemos aprendido de la enseñanza de las matemáticas a través de la investigación? En A. Alba y R. Glazman (2009) ¿Qué dice la investigación educativa?, México: COMIE. (pp. 27-72).

MATEMÁTICA EDUCATIVA: LATINOAMÉRICA, ADHERENCIA E IDENTIDAD

Héctor Silva-Crocci y Francisco Cordero Osorio
Departamento de Matemática Educativa–Cinvestav IPN. Chile
México
hsilva@cinvestav.mx, fcordero@cinvestav.mx

Resumen. En este reporte, a la luz del *quehacer disciplinar* de la comunidad de socioepistemólogos, se pretende profundizar la noción de *identidad disciplinar* que hemos desarrollado en Silva-Crocci (2010) y Cordero y Silva-Crocci (2012). Vinculamos a esta noción con el proceso de construcción y de protección de la *fuente de sentido* que norma el *quehacer disciplinar,* y en efecto la constitución de la *variedad teórica*, de una comunidad latinoamericana de matemáticos educativos cuya esencia fundamental se basa en cómo éstos conciben la génesis de la problemática que atañe a la construcción de la *matemática escolar*

Palabras clave: Matemática Educativa, Latinoamérica, fenómeno de adherencia, identidad disciplinar

Abstract. In this report, across disciplinary work of the socioepistemólogos community, we wanted to examine the notion of identity that we have developed in Silva-Crocci (2010) and Cordero & Silva-Crocci (2012). Relates this notion with the construction and protection process of the *source of purport* which standard the *disciplinary task* of a Latin American community of educational mathematicians whose fundamental essence is based on how they conceive the genesis of the problematic that belongs to the construction of *school mathematics*

Key words: Matemática Educativa, Latin American, phenomenon of adherence, identity disciplinary

Introducción

Los matemáticos educativos latinoamericanos, en formación, podrían ser afectados por un fenómeno que provoca de manera natural, en los diferentes planos que componen el *quehacer disciplinar* de éstos ya sean docentes o investigadores, aferrarse cándidamente a los conceptos, metodologías o teorías del campo de la Matemática Educativa –en especial a los que provienen de regiones con tradición científica– sin cuestionar ni preguntar, por ejemplo, ¿cómo se construyó? o ¿para qué se construyó?

Claro, porque uno en los comienzos de la formación como matemático educativo podría pensar que ese conocimiento siempre estuvo ahí, es decir tiene un carácter de prexistente. O que ya había escuelas legitimadas provenientes de regiones con tradición científica que se preocupaban de esto y tenían finiquitado todo el asunto.

Consideramos estos aspectos de la mayor importancia, pues en algún sentido la construcción y la protección de una comunidad científica depende estrechamente de los recursos humanos que en el futuro ejecutarán las distintas funciones que constituyen el *quehacer disciplinar* de dicha comunidad. En este contexto, los efectos del fenómeno no sólo afectarían a los matemáticos

educativos en formación, sino que además se podría afectar el desarrollo y el desempeño disciplinar de la Matemática Educativa en alguna región de Latinoamérica, según sea el caso.

Por tal motivo, este documento versa sobre aspectos que connotan la construcción de conocimiento de una comunidad latinoamericana de matemáticos educativos. Presumimos que tales aspectos brindan a la discusión un panorama que incita a problematizar un fenómeno que afecta al pensamiento disciplinar de la Matemática Educativa, de Latinoamérica, al que le hemos llamado *fenómeno de adherencia*.

El fenómeno de adherencia

Los aspectos que entrañan a este fenómeno emergen a partir de que entre el conocimiento, que pertenece al área de las ciencias sociales y de humanidades, existen conceptos, teorías, metodologías y pensamientos dominantes que en su mayoría son construidos, por circunstancias que le llamaremos *socio/históricas,* en el seno de las culturas con tradición científica y no en Latinoamérica. Como señala Maerk (2000), se ha generado una tradición en los países latinoamericanos de importar constructos y pensamientos de los países llamados centrales sin considerar su pertinencia para interpretar y transformar las problemáticas de la región.

En el caso particular del campo de la Matemática Educativa, esta misma dependencia se podría generar entre las diferentes comunidades latinoamericanas de investigación. Como argumentos de por qué la obligación de afrontar este hecho podemos considerar que, por una parte, los constructos de nuestro campo emergen en función de leer, y de interpretar, necesidades inscritas en un *marco de referencia* específico con la intención de mejorar, y transformar, la cultura matemática de los ciudadanos de ese marco en particular (Cordero y Silva-Crocci, 2012).

Por otra parte, al afrontar dicho fenómeno se estaría rompiendo con esa tradición *socio/histórica* que connota el pensamiento latinoamericano respecto a adoptar y homogeneizar las grandes teorías, metodologías o constructos que son de naturaleza dominante por el hecho de provenir de regiones con tradición científica (Silva-Crocci, 2010; Cordero y Silva-Crocci, 2012).

De lo contrario, si en las comunidades latinoamericanas de matemáticos educativos universalizamos los constructos o modelos que fueron construidos *en* y pensados *para* necesidades *de* las culturas de tradición científica dominantes, podemos generar un efecto ficticio en la función de esos conocimientos al destacar asuntos irrelevantes de la realidad que queremos estudiar y trastocar, pues tales constructos o modelos no fueron pensados para mejorar, ni transformar, la cultura y el pensamiento matemático de los ciudadanos latinoamericanos. Y además estaríamos manteniendo esa tradición *socio/histórica* de legitimar la supremacía, de unas regiones sobre otras, respecto a la construcción de conocimiento.

A este hecho de universalizar el conocimiento que fue construido *en* y *para* necesidades de otras regiones, y que como consecuencia se puede afectar su funcionalidad al ser usado en un *marco de referencia* con especificidades ajenas al que fue construido, le estamos llamando *fenómeno de adherencia* (Silva-Crocci, 2010; Cordero y Silva-Crocci, 2012). En efecto, este fenómeno mantendría a las comunidades latinoamericanas sin *identidades disciplinares* endógenas, ante la problemática que atañe la construcción de la *matemática escolar,* por depender y legitimar el conocimiento proveniente de regiones con tradición científica.

Con dicho fenómeno no estamos invitando al matemático educativo a que no estudie ni use el conocimiento que ha sido configurado *para* y *desde* otras culturas, sino más bien estamos llamando la atención en que ese conocimiento ya se desvinculó del quehacer de la comunidad que lo produjo y de las problemáticas endógenas que lo hizo emerger.

Aspectos metodológicos

Como un aspecto teórico/metodológico para llevar a cabo los propósitos de profundizar la noción de *identidad disciplinar* hemos convenido que por medio de un estudio sistémico, que capitalice las experiencias de una comunidad latinoamericana de matemáticos educativos que no se adhieren al conocimiento construido por las culturas de tradición científica, se trata de identificar y de formular elementos conceptuales que interpreten aspectos que permiten la construcción de conocimiento en dicha comunidad.

Por tal motivo tomamos como objeto de estudio a la comunidad de socioepistemólogos, de la cual asumimos como premisa que la constitución de su *programa de investigación,* latinoamericano, les permitió insertarse en el campo disciplinar con una *identidad disciplinar* que estaría reflejada en la construcción y protección de su propio conocimiento teórico que obligadamente debate con las teorías que han sido construidas por las culturas con tradición científica (Silva-Crocci, 2010; Cordero y Silva-Crocci, 2012; Silva-Crocci, 2013).

Matemática Educativa

Ahora bien, de acuerdo con la escuela de pensamiento que nos cobija, concebimos a la Matemática Educativa –dada la naturaleza de la construcción de su *obra* y por la *intencionalidad* que tiene ésta– como una disciplina científica que pertenece a las áreas de las ciencias sociales y de humanidades (Silva-Crocci, 2010; Cantoral y López, 2010; Cordero y Silva-Crocci, 2012).

En este marco, con la obra construida en el seno del campo disciplinar –ésta aparece en publicaciones como memorias, libros y artículos de revistas especializadas o en trabajos académicos de tesis de maestría y de doctorado– se estudia y proponen maneras de concebir la

construcción de la *matemática escolar* para mejorar y transformar la problemática de la enseñanza y del aprendizaje de la matemática que aqueja a los ciudadanos insertos en algún *marco de referencia* especifico (Silva-Crocci, 2010; Cordero y Silva-Crocci, 2012).

La juventud disciplinar de la Matemática Educativa permite tener una nítida caracterización de la evolución de sus problemáticas de estudio en torno a la construcción de la *matemática escolar*. En este sentido, Cantoral y Farfán (2003) nos brindan un panorama significativo de tal evolución. Señalan visiones prematuras, y algunas veces ingenuas, que soslayan elementos que hoy en día son reconocidos como fundamentales para la interpretación de las problemáticas que estudia la disciplina.

En un comienzo, las problemáticas se centraron en el diseño de presentaciones del contenido matemático escolar. Este acto tenía la intención de facilitar el contenido matemático tanto a profesores como a estudiantes. Tales diseños se sustentaban sólo en la experiencia del profesional de la matemática.

Investigaciones posteriores, de naturaleza cognitiva, ampliaron las problemáticas de estudio al incorporar el aprendizaje del alumno como un factor fundamental del diseño curricular. Este tipo de investigaciones se consideró útil, y eficaz, para estudiar el comportamiento cognitivo ante un tipo específico de tareas matemáticas. Sin embargo, las relaciones que mantienen los estudiantes con los objetos matemáticos también están condicionadas por la institución escolar, pues matiza los procesos del pensamiento.

De este modo, emergen investigaciones que abordan la problemática focalizando sus estudios, de manera sistémica, en los fenómenos que emergen en situaciones de enseñanza. Para tal fin, se consideran las relaciones mantenidas entre distintos polos: el saber, quien aprende, y quien enseña. Este tipo de enfoque centra su estudio en la comunicación del conocimiento y en los fenómenos que se presentan alrededor de ésta actividad. Para ello se asume que la construcción de la *matemática escolar* se logra por medio de interacciones entre el estudiante y situaciones problemas.

Investigaciones posteriores señalaron que era necesario incorporar aspectos sociales en el estudio de las problemáticas. De este modo, el nuevo desafío fue desarrollar estudios de la construcción social del conocimiento matemático.

Matemática Educativa: Diferentes perspectivas teóricas

Conforme a esta evolución emergen diferentes perspectivas teóricas en las cuales subyace, explícita o implícitamente, una problemática fundamental que depende de la posición

epistemológica que se haya asumido para ofrecer posibles formas de construir la obra que compone la *matemática escolar* (Cordero, Gómez y Viramontes, 2009; Silva-Crocci, 2010, Cordero y Silva-Crocci, 2012).

Por ejemplo, para encaminar la idea anterior podemos apoyarnos en las reflexiones de D´amore (2005), el cual hace alusión a dos posturas filosóficas sobre las cuales se pueden basar las teorías de la construcción del conocimiento, esto es: por una parte, las *teorías realistas* que comparten una visión platónica del conocimiento matemático, es decir el conocimiento *pre-existe* a las experiencias del humano; por otra parte, las *teorías pragmáticas* que comparten una visión donde las experiencias del humano juegan un rol fundamental en la constitución del conocimiento matemático.

Con base en estas posturas podríamos señalar, como ejemplo, que unos *programas de investigación* atienden la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática con interpretaciones de la construcción de la *matemática escolar* que son alusivas a la construcción de objetos matemáticos, cuyos argumentos no dependen de la experiencia del humano sino más bien dependen de la estructura matemática hecha por éste. Mientras que otros *programas de investigación* atienden dicha problemática con estudios de la construcción de la *matemática escolar* que son alusivos a los procesos de constitución social de cierto objeto matemático, cuyos argumentos están estrechamente ligados a la experiencia del humano a través de su construcción social.

Identidad Disciplinar

Ahora bien, vinculamos a la noción de *identidad disciplinar* con el proceso de construcción de la *fuente de sentido* que norma el *quehacer disciplinar*, y en efecto la constitución de la *variedad teórica*, de una comunidad de matemáticos educativos latinoamericanos cuya esencia fundamental se basa en cómo éstos conciben la génesis de la problemática que atañe la construcción de la *matemática escolar*.

Situados en estas ideas, podemos señalar que la *fuente de sentido* implica entre los miembros de una comunidad compartir y articular de manera sistémica una posición epistemológica, tanto en la manera de concebir la génesis de la problemática de la enseñanza y del aprendizaje de la matemática, como en la configuración de los constructos y métodos para ofrecer una posible forma de construir la obra de la *matemática escolar* en pos de trastocar la problemática que han identificado. En consecuencia, con este consenso epistemológico se amplia y protege de manera colectiva la obra teórica constituida en el seno de la comunidad.

La Identidad Disciplinar de un programa de investigación latinoamericano

Diversas investigaciones desarrolladas en el seno de la comunidad de socioepistemólogos han reconocido y caracterizado al *discurso Matemático Escolar* como un constructo que permite modelar la génesis de la problemática que su *programa de investigación, latinoamericano,* busca atender. En términos generales, se señala que este *discurso Matemático Escolar* norma y legitima la construcción de la *matemática escolar* única y exclusivamente a través de los conceptos matemáticos. Esto en desmedro de la funcionalidad que juega la *matemática escolar* en la vida cotidiana de los ciudadanos.

En otras palabras, se plantea que las causas que originan las dificultades que se presentan en los procesos de aprendizaje de la *matemática escolar* no son exclusivas de cómo la transmitimos, sino que también están originadas por la manera en que se ha articulado el cuerpo epistemológico que sustenta a la *matemática escolar* que se enseña (Cantoral, 1995).

En términos genéricos, la *fuente de sentido* de la comunidad de socioepistemólogos se podría interpretar como la búsqueda de evidenciar y de promover epistemológicamente la necesidad de generar un *Rediseño del discurso Matemático Escolar*, con base en la *construcción social del conocimiento matemático* (Soto, 2012).

Es decir, dicha comunidad busca trastocar la *matemática escolar* ya que su construcción se fundamenta exclusivamente en epistemologías de conceptos, con la intención de generar otra *matemática escolar* que incorpore a su construcción fundamentos epistemológicos con base en las prácticas sociales que han hecho emerger los conceptos.

Prospectivas

Dado nuestra premisa, esto es la constitución de un *programa de investigación* que permite a la comunidad de socioepistemólogos insertarse en el campo disciplinar con una *identidad*, consideraremos a este concepto como el hilo conductor que nos permita desentrañar y capitalizar un posible aspecto que connota la construcción de conocimiento de la comunidad en estudio.

En alguna otra edición que suceda este documento reflexionaremos en torno a la importancia que puede jugar en esta materia la *fuente de sentido* de un *programa de investigación* en los *proyectos de investigación* de los matemáticos educativos en formación, ya que tal aspecto permitiría articular de manera sistémica el cuerpo de conocimiento construidos por éstos con la obra teórica que constituye la comunidad que los cobija.

Presumimos que de esta manera no sólo se estaría construyendo un conocimiento endógeno al ser constructores directos de la obra teórica que legitima, resiste y protege la comunidad bajo su *programa de investigación*, sino que además se estaría rompiendo con la tradición *socio/histórica* de

legitimar y fomentar una supremacía del conocimiento proveniente de regiones de tradición científica respecto al conocimiento que ha sido construido en nuestras fronteras. En efecto, estos matemáticos educativos latinoamericanos en formación estarían trastocando el ya señalado *fenómeno de adherencia* (Silva-Crocci, 2013).

Pretendemos reportar nuestra hipótesis en torno a estas ideas y consideraremos los avances metodológicos, análisis y reflexiones documentales de la investigación respecto a cómo la verificaremos empíricamente. Para tal cometido, seguiremos el camino de capitalizar la experiencia disciplinar de la comunidad de socioepistemólogos.

Agradecimientos: Esta investigación está financiada por CONACYT con el Proyecto Las Resignificaciones del Uso del Conocimiento Matemático: la Escuela, el Trabajo y la Ciudad. Clave 0177368

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. (1995). Acerca de las contribuciones actuales de una didáctica de antaño: el caso de la serie de Taylor. *Mathesis* 11(1), 55-101.

Cantoral, R y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 6(1), 27-42, México.

Cantoral, R. y López, J. (2010). La Socioepistemología: un estudio de su racionalidad. *Paradigma 31(1)*, pp. 103-122.

Cordero, F., Gómez, K. y Viramontes, I. (2009). Elementos de algunas teorías en Matemática Educativa. Una experiencia de análisis: ¿adherencia o nuevas visiones? *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22* (pp. 375 – 381). México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Cordero, F. y Silva-Crocci, H. (2012). Matemática Educativa, Identidad y Latinoamérica: el quehacer y la usanza del conocimiento disciplinar. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 15(3), pp. 295-318.

D´amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática*. México, D.F.: Reverte Ediciones.

Maerk, J. y Cabrolié, M. (2000). Prólogo. En J. Maerk y M. Cabrolié (Coordinadores), *¿Existe una epistemología latinoamericana? Construcción del Conocimiento en América Latina y el Caribe* (pp. 7–10). México, D.F.: Plaza y Valdés.

Silva-Crocci, H. (2010). *Matemática Educativa, Identidad y Latinoamérica: el quehacer y la usanza del conocimiento disciplinar*. Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav-IPN, México.

Silva-Crocci, H. (2013). *Matemática Educativa en Latinoamérica: Adherencia e Identidad Disciplinar*. Memoria Pre-Doctoral no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

Soto, D. (2012). *Los excluidos por el discurso Matemático Escolar. El caso del profesor en matemáticas en formación.* Memoria Pre-Doctoral no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

EXCLUSIÓN, OPACIDAD Y ADHERENCIA. TRES FENOMENOS DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

Karla Gómez Osalde, Héctor Silva-Crocci, Francisco Cordero Osorio y Daniela Soto Soto
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN. Chile
México
kmgomez@cinvestav.mx, hsilva@cinvestav.mx, fcordero@cinvestav.mx, dsoto@cinvestav.mx

Resumen. La visión socioepistemológica ha logrado identificar que el *discurso Matemático Escolar (dME)* es el elemento que define la problemática fundamental de la enseñanza de las matemáticas. Por tal razón propone su rediseño a partir de la *Construcción Social del Conocimiento Matemático (CSCM)*. En este documento desarrollamos los aspectos teóricos-metodológicos para analizar el *dME* a partir de tres fenómenos: la adherencia al *dME,* la exclusión de la construcción de conocimiento y la opacidad de los argumentos del cotidiano. También se formularan los ejes del "programa permanente" para solventar dichos fenómenos
Palabras clave: Exclusión, Opacidad, Adherencia
Abstract. The Socioepistemological vision has identified that the *School Mathematical discourse* (*dME*) is the element that defines the fundamental problematic of mathematics teaching. For this reason proposed its redesign from the *Social Construction of Mathematical Knowledge* (*CSCM*). In this paper we develop the theoretical-methodological aspects to analyze the *dME* from three phenomena: the adherence to the *dME*, the exclusion of the construction of knowledge and the opacity of everyday arguments. Also is will formulate the axes of "permanent program" to solve these phenomena.
Key words: Exclusion, Opacity, Adherence

Introducción

Se plantea que el *discurso Matemático Escolar (dME)* define la problemática fundamental de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Con la Teoría Socioepistemológica se propone un rediseño basado en la *Construcción Social del Conocimiento Matemático (CSCM)*. Para tal fin desarrollaremos el análisis del *dME* a partir de tres fenómenos: adherencia, exclusión y opacidad, con el cual se traza un eje que los solventa y trastoca a la *matemática escolar*.

Los tres fenómenos no son secuenciales, están entrelazados en forma sistémica. Sin embargo, con fines de lograr una mejor explicación, nos referiremos a cada uno de éstos, primero en forma separada y después en forma articulada.

El fenómeno de adherencia no permite, tanto al estudiante como al docente, cuestionar ni trastocar la *matemática escolar*, se produce una especie de fidelidad absoluta la cual resulta nociva para reconocer otras epistemologías que permitan generar prácticas y usos del conocimiento matemático. Los fenómenos de Exclusión y Opacidad inhiben esas prácticas y usos de tal suerte que a los ciudadanos no les deja otra opción que adherirse a la epistemología dominante del *dME*.

Por lo tanto habrá que construir un programa académico permanente que permita, tanto a estudiantes como a docentes, generar una variedad epistemológica del *dME* para afrontar los fenómenos mencionados y así puedan, en el mejor de los casos, trastocar el *dME*.

Matemática Educativa en Latinoamérica: Adherencia e Identidad Disciplinar

Este apartado tiene como eje central de discusión interpretar aspectos que connotan la construcción de conocimiento de una comunidad latinoamericana de matemáticos educativos. En el marco de esta discusión, presumimos que el proceso de construcción de conocimiento teórico, en la disciplina Matemática Educativa, no está aislado de los acontecimientos que suceden alrededor de las comunidades que las construyen, sino más bien está permeado de las situaciones que suceden en el *marco de referencia* en el cual fueron pensados y configurados (Silva-Crocci, 2010; Cordero & Silva-Crocci, 2012; Silva-Crocci, 2013).

Tal presunción nos ha brindado un panorama significativo respecto a la importancia de trastocar un fenómeno que afecta al pensamiento disciplinar, latinoamericano, al que le hemos llamado *de adherencia*. En términos genéricos, relacionamos a este fenómeno con el hecho de universalizar el conocimiento que fue construido *en* y *para* necesidades de regiones dominantes, y que como consecuencia se puede afectar la función de éste al ser usado en un *marco de referencia* con especificidades ajenas al que fue construido y sin olvidar el hecho de que mantendría a las comunidades latinoamericanas sin *identidades disciplinares* endógenas ante la problemática que atañe la construcción de la *matemática escolar* por depender y legitimar lo que dice el conocimiento proveniente de regiones con tradición científica.

En oposición a este fenómeno hablamos de *identidad* a la luz del *quehacer disciplinar* de la comunidad de socioepistemólogos. Hemos asumido como premisa que la constitución de su *programa académico* latinoamericano les permitió insertarse en el campo disciplinar con una *identidad* que estaría reflejada en la construcción de su propio conocimiento teórico el cual obligadamente debate con las teóricas construidas por las culturas de tradición científica. En concordancia con este escenario, vinculamos a la noción de *identidad* con el proceso de construcción de la *fuente de sentido* que norma el *quehacer disciplinar* de una comunidad latinoamericana de matemáticos educativos cuya esencia fundamental se basa en cómo éstos conciben la génesis de la problemática que atañe a la construcción de la *matemática escolar*.

En el marco de estas ideas, diversas investigaciones desarrolladas en el seno de la comunidad de socioepistemólogos han reconocido y caracterizado al *discurso Matemático Escolar* (*dME*) como un constructo que permite modelar la génesis de la problemática que su *programa académico latinoamericano* busca atender. En términos generales, se señala que este *dME* norma y legitima la construcción de la *matemática escolar* única y exclusivamente a través de los conceptos matemáticos. Esto en desmedro de la *funcionalidad* que juega la *matemática escolar* en la vida cotidiana de los ciudadanos.

Tal problemática emerge puesto que el *dME*, interpretado desde su construcción social, es la expresión de una epistemología dominante anclada exclusivamente a la construcción de estructuras conceptuales, situación que conlleva fenómenos como la *exclusión*, la *opacidad* y la *adherencia*: Es, por un lado, la imposibilidad de participar en la construcción del conocimiento matemático; por otro lado, es la negación de la pluralidad epistemológica del conocimiento matemático; y por otro, no permite cuestionar ni trastocar el conocimiento (Soto, Gómez, Silva-Crocci & Cordero, 2012).

Es así que esta comunidad académica ha entendido que justo lo que hay que estudiar y trastocar es el *dME*, pues es ahí donde se encuentra la génesis de la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática que aqueja a los ciudadanos. Es por ello que la comunidad de socioepistemólogos busca ofrecer un *Rediseño* de ese *dME* trastocando la epistemología dominante que genera y justifica a la *matemática escolar* y así, en consecuencia, se pueda construir otro discurso que ofrezca *marcos de referencia* donde se resignifique la construcción de la *matemática escolar*. Todo ello con base en la *construcción social del conocimiento matemático* (CSCM) (Soto, Gómez, Silva-Crocci & Cordero, 2012).

Dada nuestra premisa, consideraremos la *identidad disciplinar* de la comunidad como el hilo conductor que nos permite desentrañar y capitalizar un posible aspecto que connota la construcción de su propio conocimiento. En este sentido, destacamos la importancia que puede jugar en esta materia la *fuente de sentido* de un *programa académico* en los *proyectos de investigación* de los matemáticos educativos que lo conforman, ya que tal aspecto permitiría articular de manera sistémica el cuerpo de conocimiento construidos por éstos con la obra teórica de la comunidad que los cobija.

En otras palabras, por una parte, al ser miembros de una comunidad específica les permite compartir una *fuente de sentido* con los mismos miembros de la comunidad; tanto en la manera de concebir la problemática fundamental que han identificado y buscan atender respecto a la construcción de la *matemática escolar*, como en la configuración de los constructos, métodos y líneas de investigación endógenos que legitiman para atender de manera sistémica dicha problemática. Por otra, estarían rompiendo con la tradición *socio/histórica* de dar un estatus de supremacía al conocimiento que ha sido construido en las regiones de tradición científica. En efecto, estos matemáticos educativos estarían trastocando el ya mencionado *fenómeno de adherencia.*

Discurso Matemático Escolar: exclusión e inclusión

La *matemática escolar* se ha fundamentado bajo un *sistema de razón* (*sr*) que norma las prácticas y las representaciones sociales de los actores del sistema didáctico. Este *sr* se caracteriza por ser hegemónico, utilitario, sin marcos de referencia que permitan resignificar la matemática, la centración en los objetos matemáticos y su presentación lineal y acabada. A este *sr* lo hemos denominado *discurso Matemático Escolar* (Soto y Cantoral, en prensa).

Cada una de estas características nos muestra un aspecto esencial de la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. El carácter hegemónico del *dME* se expresa en la supremacía de algunas argumentaciones del conocimiento por sobre otras. El estudio de esta característica nos ha mostrado la importancia de reconocer una pluralidad epistemológica y que ésta sea integrada al *dME* al momento de ser rediseñado.

El carácter utilitario se materializa en la aplicabilidad de los conceptos que son enseñados y que deben ser aprendidos. En contraparte proponemos dar un vuelco a esta concepción utilitaria del conocimiento para poner el foco en el carácter funcional. Esto quiere decir, concebir al conocimiento como aquel que permite al humano transformase y transformar su realidad (Cordero, 2008), no sólo aplicar el conocimiento que le es entregado.

La centración en los objetos matemático (conceptos y procedimientos matemáticos) se ha expresado en una educación matemática que pone en el centro la enseñanza y el aprendizaje de conceptos, teoremas, demostraciones, entre otras. Donde el uso del conocimiento ha sido soslayado. Esto nos ha hecho entender la importancia de cambiar el foco hacia las prácticas sociales que generan el conocimiento matemático (Cantoral, 2003).

La falta de marcos de referencia no han permitido que los actores del sistema didáctico resignifique el conocimiento matemático. Debemos recordar que la matemática responde a diferentes disciplinas y ámbitos del conocimiento, es en el estudio de las diferentes situaciones y escenarios que encontraremos esos marcos de referencia que permitirán el rediseño del *dME*. Un elemento importante que se ha estudiado dentro de la Sociepistemología es la transversalidad del conocimiento para compensar esta carencia del *dME*.

Por último, el conocimiento acabado y lineal se expresa en una concepción del conocimiento preexistente al humano.

Estas características en su conjunto hacen que el *dME* nos excluya de la construcción social del conocimiento matemático a través de una violencia simbólica. Esta violencia se expresa en la imposición de significados, argumentaciones y procedimientos matemáticos.

A través de nuestra investigación hemos intentado construir categorías que nos acerquen al *dME* a una inclusión de la construcción social del conocimiento matemático estos se muestran en la siguiente *tabla 1*:

dME	CSCM
Hegemónico	Pluralidad epistemológica
Utilitario	Funcional
Centrado en objetos	Centrado en prácticas sociales
Sin marcos de referencia	Transversalidad
Continuo y lineal	Desarrollo de usos

Tabla 1. Ejes de exclusión en el dME e inclusión de la CSCM.

Opacidad, vida cotidiana y socialización

Resignificar la matemática bajo la *CSCM*, debe significar que la *matemática escolar* se fundamente en la pluralidad del conocimiento matemático y, por ende, forme parte de los Marcos de Referencia (*MR*) para su enseñanza y aprendizaje. Sin embargo, la matemática escolar se esfuerza por estar permeada únicamente por una matemática estructural, en el mejor de los casos por la obra matemática, dejando de lado a las matemáticas del cotidiano (Cordero, 2013), a pesar de que éstas son la expresión de la función social del conocimiento. Es decir, en la vida cotidiana las matemáticas están presentes porque funcionan socialmente.

Bajo este marco, postulamos que en la vida cotidiana estamos condicionados a *socializar* la función del conocimiento a través de tres ejes, a saber: Resignificación, obra y funcionalidad (Gómez, 2013). Precisamente, en la literatura se reconoce a la *matemática escolar* como aquel agente socializador que desarrollará ciudadanos plenos tanto individual como socialmente. De ahí que se piense en la siguiente relación: La *matemática escolar* se encargaría de socializar ciudadanos plenos para vivir adecuadamente en su cotidiano, al mismo tiempo que el ciudadano debería encontrar reciprocidad y sustento del conocimiento de su vida cotidiana con la *matemática escolar*. Pero la experiencia nos muestra que existen dificultades serias para lograr esta relación.

Dos cuestiones que influyen en la dificultad de la relación entre el cotidiano y la *matemática escolar* son los siguientes.

La primera cuestión está relacionada con la pregunta ¿socializar qué? Una revisión de la literatura alrededor del tema nos muestra que a pesar de estudiar desde finales del siglo XIX el proceso de

socialización a partir de diversas perspectivas teóricas, hasta ahora no se ha caracterizado la socialización de la función del conocimiento, lo cual es una condición de la vida cotidiana. De esta manera, reconocemos que es fundamental caracterizar *el proceso de socialización de la función del conocimiento matemático*.

La segunda cuestión está relacionada con la existencia del *dME*. Como se ha mencionado en el documento, es un sistema de razón que norma lo que se hace en la *matemática escolar* y afecta la relación entre todo actor didáctico con el saber. Este sistema de razón o *dME*, dada sus características, produce un *fenómeno de opacidad de la vida cotidiana*. Esto quiere decir que el *dME*, actual, es una barrera que impide la relación entre el cotidiano y la *matemática escolar*. La *matemática escolar* opaca la vida cotidiana y por consiguiente, el conocimiento del cotidiano se encuentra opaco en los *MR* de la *matemática escolar*.

Así, la problemática fundamental que reconocemos es el fenómeno de *opacidad* del conocimiento de la vida cotidiana. El cual no es otra cosa que una falta de consideración de estas matemáticas del cotidiano en los *MR* para la *matemática escolar,* es decir, estos *argumentos del cotidiano están opacados por el actual dME* a pesar de ser éstos más cercanos al conocimiento matemático funcional, (Gómez, 2013; Gómez y Cordero, 2013).

Planteada la problemática, nos proponemos lograr una caracterización de la socialización de la función del conocimiento como una condición de la vida cotidiana para atender el fenómeno de *opacidad*.

Hasta ahora hemos logrado caracterizar esta socialización a través de tres Procesos Sociales (ProSoc) que nos permiten desarrollar la función del conocimiento del cotidiano. *El Proceso Funcional, Proceso Institucional y Proceso Historial desarrollan la funcionalidad, la obra y la resignificación del conocimiento*, respectivamente.

1. El proceso institucional debe permitir desarrollar ideas del conocimiento con una mirada más transversal, por ejemplo en lugar de centrarnos en el objeto matemático apostamos hacia la institucionalización de la variación, predicción, aproximación y la modelación como categorías para construir conocimiento matemático.

2. El proceso funcional provee un marco para dirigir la mirada hacia las maneras en que se usa el conocimiento matemático y no quedarnos únicamente en términos de contextos de aplicación. Por ejemplo, la categoría del comportamiento tendencial de las funciones ζ(ctf) es intrínseca a la gráfica y permite ser una herramienta para resolver una situación sin necesariamente hacer explícita la función analítica, (Cordero, 2001).

3. El proceso historial es el que permitirá desarrollar la resignificación del conocimiento matemático dirigido hacia los ciudadanos en comunidad. Para ejemplificar, podemos hablar de la categoría del comportamiento tendencial ζ(ct) como aquella que engloba argumentos que refieren a ideas de tendencia desde el cotidiano de los ciudadanos, (Gómez, 2009).

Así podemos decir que el proceso de socialización de la función conocimiento matemático atiende la opacidad de los argumentos del cotidiano a través de la sistematización de los ProSoc: proceso institucional, funcional e historial.

El programa académico permanente

Con el análisis de los tres fenómenos en cuestión se propone otro *MR* enfocado a lo que pudiera ser el conocimiento institucional cuya base es la manifestación de sus usos en el *discurso Matemático Escolar*, en otros dominios y en el cotidiano, donde se resignifican al paso de la vivencia escolar, del trabajo y de la ciudad. En ese sentido lo institucional será aquello que hace que la categoría de conocimiento matemático C(CM) se desarrolle y permanezca, se acepte como producto material social que tenemos que enseñar y aprender. Así programas académicos permanentes donde la identidad, la inclusión y la socialización sean el objeto de estudio, inevitablemente, dimensionarán la problemática: en definitiva el episodio de aprendizaje del estudiante en el aula tendrá que ampliarse al cotidiano del ciudadano en la institución y en la sociedad como un referente educativo.

Agradecimientos: Esta investigación está financiada por CONACYT con el Proyecto Las Resignificaciones del Uso del Conocimiento Matemático: la Escuela, el Trabajo y la Ciudad. Clave 0177368.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. (2003). La aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa: una mirada emergente. [CD-ROM] *XI Conferencia Interamericana de Educação Matemática*. Tema: Educación Matemática & Desafíos y Perspectivas. Blumenau.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 4(2), 103-128.

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. M. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: un reporte Iberoamericano* (pp. 265-286). México: Díaz de Santos–Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C.

Cordero, F. (2013). *Matemáticas y el Cotidiano*. Diplomado Desarrollo de estrategias de aprendizaje para las matemáticas del bachillerato: la transversalidad curricular de las matemáticas Módulo III. Documento interno. Cinvestav –IPN.

Cordero, F. y Silva-Crocci, H. (2012). Matemática Educativa, Identidad y Latinoamérica: el quehacer y la usanza del conocimiento disciplinar. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 15(3), 295-318.

Gómez, K. (2009). *Los procesos de difusión del conocimiento matemático en el cotidiano. Un estudio socioepistemológico*. Tesis de Maestría no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. D.F, México.

Gómez, K. y Cordero, F. (2013). La institucionalidad, funcionalidad e historicidad. Elementos para el rediseño del discurso matemático escolar. En Flores, R. (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 26, 1323-1330, México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Gómez, K. (2013). *La Socialización de la Función del Conocimiento Matemático: Pluralidad Epistemológica y Opacidad del Cotidiano*. Memoria Pre-Doctoral no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. D.F., México.

Silva-Crocci, H. (2010). *Matemática Educativa, Identidad y Latinoamérica: el quehacer y la usanza del conocimiento disciplinar*. Tesis de Maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

Silva-Crocci, H. (2013). *Matemática Educativa en Latinoamérica: Adherencia e Identidad Disciplinar*. Memoria Pre-Doctoral no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

Soto, D., Gómez, K., Silva-Crocci, H. y Cordero, F. (2012). Exclusión, Cotidiano e Identidad. Una problemática fundamental del aprendizaje de la matemática. En Flores, R. (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 25, 1041-1048, México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Soto, D. y Cantoral, R. (en prensa). Discurso matemático escolar y exclusión. Una visión desde la socioepistemología. *Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro.

LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS A TRAVÉS DE LA INVESTIGACIÓN: LA RED DE ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

Claudia Flores Estrada, José Luis Torres Guerrero y Liliana Suárez Téllez
CECyT 5. México
CECyT 7.
CGFIE – IPN.
claudia.mo@gmail.com, jeluistg@yahoo.com.mx, lsuarez@ipn.mx

Resumen. Con el propósito de fortalecer la enseñanza de las matemáticas haciendo uso de los resultados de investigación en matemática educativa este proyecto estudia los aspectos relevantes del diseño de actividades didácticas en el aprendizaje de estudiantes de bachillerato. Nuestro marco de referencia, el currículo potencialmente aplicado, concibe el potencial del uso en la diversidad de dispositivos que no incluyen sólo los materiales didácticos sino redes de actividades, talleres de manejo, planes de seguimiento y dispositivos organizacionales como redes y comunidades. En este reporte presentamos las consideraciones del diseño de redes de actividades para Cálculo y Probabilidad y Estadística a partir de las investigaciones trabajadas en el Seminario Repensar las Matemáticas y los aspectos metodológicos para el estudio de su aplicación por parte de docentes.

Palabras clave: resultados de investigación, red de actividades

Abstract. In order to strengthen teaching of mathematics using the results of research in mathematics education this project studies the significant aspects of design of didactic activities on the learning of high school students. Our framework, the potentially applied curriculum conceived the potential of use in the device diversity that includes not only educational materials but rather networking activities, workshops on use of materials, plans for follow and organizational devices such as networks and communities. In this report we present the design considerations for network activities Calculus and Probability and Statistics starting from research worked Rethinking Seminar the Mathematics and the methodological issues for the study of their application by teachers

Key words: research results, networks of activities

Introducción

El currículo concebido como un plan operativo detalla lo que los alumnos deben saber y qué deben hacer los profesores para conseguir que sus alumnos desarrollen sus competencias, el contexto en el que tenga lugar el proceso de enseñanza-aprendizaje y los criterios que se aplicarán para evaluar lo aprendido por el alumno (Suárez, 2013).

El Seminario Repensar las Matemáticas es un proyecto de innovación educativa que tiene como propósito la vinculación de la investigación educativa con la docencia en el área de matemáticas, a partir del diálogo entre docentes e investigadores, sobre resultados de investigación y su aprovechamiento en el salón de clases. En este proyecto tomamos como punto de partida la base de datos de investigaciones de los ciclos quinto, sexto, séptimo y octavo del Seminario Repensar las Matemáticas que son analizadas a través del diálogo entre los autores y docentes participantes del seminario. Cada sesión tiene como producto un módulo (Torres, Suárez y Ramírez, 2012) compuesto por el video de un diálogo entre un especialista y uno o dos docentes sobre los resultados de investigación obtenidos por el especialista, uno o dos documentos publicado con las

investigaciones que sirven de referencia al diálogo y las interacciones en foros de discusión de los participantes.

El currículo potencialmente aplicado que ofrecemos para el área de matemáticas se organiza a través de redes de actividades. Este concepto, reportado por Ruiz y otros (2007) proponen la organización con diferentes vínculos con el propósito de construir ideas en el conocimiento matemático. El buen funcionamiento de un currículo se explica, en términos del marco de los currículos (Suárez, Torres y Ortega, 2012), en la medida en que se acorten las distancias entre los diferentes currículos planeado y aplicado, es decir entre las metas educativas que persigue una institución (currículo planeado) y la forma en que los docentes interpretan e instrumentan ese currículo en sus clases (currículo aplicado).

Planteamiento del problema

Una estrategia y herramienta que permite crear nuevas perspectivas en la enseñanza del cálculo es la implementación de la red de actividades, la cual está constituida por actividades de aprendizaje y lecturas que permiten un mejor entendimiento en el estudiante. Esta red de actividades busca la vinculación desde perspectivas diferentes y se articulan de varias maneras para cumplir diversos objetivos didácticos (Flores, 2007).

En el diseño de la actividad de aprendizaje se busca que se observen los conocimientos previos que el estudiante pone en juego y cómo estos se constituyen en los antecedentes del concepto matemático. Los resultados de investigación del seminario repensar las matemáticas se conciben en este proyecto como una fuente de ideas en el diseño de las actividades de aprendizaje para conformar la red de actividades.

Las actividades de aprendizaje en las cuestiones educativas están en función de los objetivos y competencias de los programas académicos, por lo tanto para el diseño e implementación de actividades es importante tomar en cuenta el contexto de aplicación de cada actividad.

Todos los puntos relacionados con esta red de actividades de aprendizaje se deben considerar desde la planeación de la misma. Entre otros se encuentran, la forma en que se relacionan y van retomando los aprendizajes, el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación y de los resultados de la investigación; una evaluación que considere todo y que cumpla la función de mejorar el proceso conforma una red exitosa. En las actividades, la caracterización de las actividades está dada en términos de los siguientes elementos:

- Actividad de aprendizaje (ejercicio, problema y problema con guía)
- Modalidad de trabajo (individual y equipo)

- Lugar de realización (salón de clases)
- Herramientas tecnológicas (software, calculadoras)
- Tiempo (1 hora)
- Producto (reporte por escrito de la actividad, exposición, participación en un foro)
- Referencias curriculares
- Representaciones (Algebraica, gráfica)
- Estrategias
- Evaluación

Para acotar el universo de resultados de investigación potenciales de incorporarse en el diseño de redes de aprendizaje nos concentramos en aquellos relacionados con Cálculo y Probabilidad y Estadística. El proyecto de investigación consta de tres etapas, la primera etapa es la elaboración de las redes de actividades, la segunda etapa es la aplicación de las redes a los profesores y la tercera etapa es la aplicación a los estudiantes.

En este escrito se reporta la primera etapa, que incluye redes de actividades de Cálculo y de Probabilidad y Estadística. Para dar respuesta a la pregunta de investigación: ¿Qué aspectos metodológicos son relevantes para el diseño de actividades de aprendizaje?

Pulido (2008) señala que un acercamiento al estudio del cálculo representa un carácter instrumental del sector curricular pues su función es brindar las herramientas matemáticas que serán requeridas en el análisis de situaciones enmarcadas en diversos contextos entre los cuales se desarrollan las especialidades de los alumnos del nivel superior. El desarrollo de habilidades, actitudes, aptitudes, conocimiento y valores permitirá al estudiante un mejor razonamiento de las ideas fundamentales del cálculo tales como: una aplicación práctica del entendimiento teórico; la capacidad para resolver problemas considerando la interacción entre el cálculo y las diferentes áreas de estudio y la construcción de estrategias propias del cálculo para enfrentar retos de su entorno.

En probabilidad y estadística se consideran la variable aleatoria como una de las ideas base para el desarrollo y entendimiento de la distribución de probabilidad y la distribución binomial, las cuales forman parte del contenido de los temas del currículo de matemáticas del bachillerato.

Marco teórico

Nuestro marco de referencia lo ubicamos en la literatura sobre la importancia del estudio del currículo para la mejora del sistema educativo. Desde el marco de los currículos, el currículo formal es la planeación del proceso de enseñanza-aprendizaje basado en el programa académico; los programas de un plan de estudio consideran los objetivos generales y particulares de aprendizaje; competencia general y competencias particulares; organización y secuencias de contenidos, estrategias de enseñanza y modalidades de evaluación.

Una estrategia para disminuir las distancias que existen entre los currículos: planeado y aplicado es visualizando un nuevo currículo: el currículo potencialmente aplicado (CPA). Schmidt, McKnight, Valverde, Houang y Wiley, (1997), proponen el currículo potencialmente aplicado que ofrece al docente una manera operativa para lograr las metas educativas institucionales. Suárez y otros (2012) mencionan que este CPA puede comprender materiales (paquetes didácticos), planes (de seguimiento, capacitación y evaluación) y dispositivos organizacionales (redes y comunidades, con un marco de operación explícito) que concretan el currículo planeado desde una perspectiva de sistema y profesional.

Este CPA destaca la importancia de que el docente cuente con materiales acordes al currículo planeado así como la necesidad de organizar talleres de familiarización con los materiales y las estrategias, y comunidades de seguimiento y evaluación para los profesores. La mejora en la calidad educativa requiere de la innovación educativa en la que se implique que el profesor realice cambios en su curricula. Los académicos que llevan a la práctica la Innovación Educativa identifican a los resultados de la investigación como una fuente sólida de ideas y mecanismos para concretar las transformaciones que se desean. En particular en el estudio de las matemáticas es importante conocer cómo es posible aprender los conceptos matemáticos y hasta donde utilizar la información para diseñar estrategias didácticas y lograr un aprendizaje significativo por parte de los alumnos (Trigueros, 2009).

Método

La Ingeniería Didáctica ha representado, para el área de la didáctica de la matemática una doble función: como metodología de investigación y como producciones de situaciones de enseñanza y aprendizaje, conforme mencionó Artigue (1995). Es una metodología que permite la intervención en el sistema completo del salón de clases pero establece lineamientos para tomar en cuenta los resultados de la investigación en las dimensiones que corresponden a la cognición, la epistemología y la didáctica.

A partir de un análisis a "priori" y diseño de actividades didácticas, se determinan que variables didácticas son pertinentes y sobre cuáles se actuará, se establece la hipótesis de trabajo, y una vez que se establecen se diseña la situación didáctica, donde es un " proceso" en el cual el profesor implementa el producto y realiza los ajustes y adaptaciones necesarias según la dinámica de la clase lo exija y finalmente el análisis a posteriori y validación que consiste en la revisión de resultados, en las observaciones que se tuvo en la resolución de los profesores. Estas se confrontan en el análisis a priori.

De acuerdo a lo anterior, se revisará las investigaciones de cada ciclo, posteriormente se realizará de acuerdo a su contexto el diseño de estrategias, materiales o secuencias didácticas que integren redes que se involucren en diferentes áreas o ciencias afines. Posteriormente este material se implementará a profesores de nivel medio superior, para que posteriormente sean aplicados a los estudiantes.

El uso de la tecnología dentro de las actividades de aprendizaje

La incorporación de recursos tecnológicos tales como un software dinámico, calculadoras graficadoras o sensores de movimiento pueden favorecer la resolución de las redes de actividades, así como verificar, comparar y analizar lo realizado con lápiz y papel.

El uso de los objetos para el aprendizaje en la representación gráfica es la posibilidad de querer tanto estudiantes como profesores, adaptar los recursos didácticos de acuerdo a sus propias necesidades, inquietudes, estilos de aprendizaje y enseñanza variada, que va desde problemas, problemas guiados, ejercicios, lecturas, proyectos o autoevaluaciones. Los vínculos que se establecen entre las actividades, están en función de sus caracterizaciones según las ideas, nociones, procedimientos y heurísticas que se ponen en juego durante la realización de las actividades (Suárez, Ortega, Servín, Téllez y Torres, 2005).

Estándares para el área de matemáticas

En el diseño de las actividades de aprendizaje también se caracterizan a partir de las competencias genéricas, los estándares nacionales e internacionales para conformar la red de actividad de aprendizaje.

El Modelo Educativo del IPN propone una formación que garantice un proceso formativo centrado en el aprendizaje entre ellos que el estudiante combine equilibradamente el desarrollo de conocimientos, actitudes, habilidades y valores. La Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS) considera las competencias disciplinares del área de matemáticas. Las competencias disciplinares básicas de matemáticas buscan propiciar el desarrollo de la creatividad

y el pensamiento lógico y crítico entre los estudiantes. Un estudiante que cuente con las competencias disciplinares de matemáticas puede argumentar y estructurar mejor sus ideas y razonamientos (RIEMS).

El currículo, según los Estándares del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM, por sus siglas en inglés) de Estados Unidos, es un plan operativo el cual detalla la necesidad que deben conocer tanto profesores como alumnos para desarrollar los conocimientos matemáticos en la solución de problemas matemáticos, estas competencias desarrolladas involucran el uso de un razonamiento analítico y acorde a lo que los problemas plantean, esto se observa en como recopilan los datos para resolver el problema utilizando las herramientas necesarias.

Entre las evaluaciones internacionales que se aplican en México se encuentra el proyecto PISA (Programme for International Student Achievement) organizada por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE, por sus siglas en inglés) en el que evalúa el grado de conocimiento que tienen los estudiantes de un país en determinadas áreas de conocimiento, entre ellas matemáticas. Busca que los alumnos tengan la capacidad para analizar, razonar y comunicar de forma eficaz; a la vez de plantear, resolver, e interpretar problemas matemáticos en una variedad de situaciones que incluyen conceptos matemáticos cuantitativos, espaciales, de probabilidad o de otro tipo.

Resultados

Las sesiones trabajadas en los ciclos quinto, sexto y séptimo para el diseño de las redes de aprendizaje se toman en cuenta las relacionadas con Cálculo, por un lado, y probabilidad y estadística, por otro lado como podemos ver en la tabla siguiente.

Cálculo	S33 Desarrollo de competencias genéricas en matemáticas	S35 "Matemáticas y Biología: La dinámica de la sorpresa"	S36 Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del Cálculo en una institución educativa	S40 Reaprendiendo el Cálculo (lo que no nos enseñaron en la escuela)	
Probabilidad y Estadística	S38 Una compleja simplicidad: la variable aleatoria en los cursos de probabilidad y estadística	S39 Razonamiento con la Distribución Binomial	S47 Dificultades de comprensión de los intervalos de confianza y la validez de su instrumento de medición	S51 La simulación como herramienta pedagógica en probabilidad.	S62 Alfabetización estadística en profesores de matemáticas

Tabla1. Sesiones del SRM que consideran al cálculo y la probabilidad y estadística.

En la revisión de las sesiones se retoman las actividades planteadas por los investigadores para el diseño de las actividades de aprendizaje y poder conformar la red de actividades para cada área. La red de actividades de aprendizaje la conforman ejercicios, problemas, problemas con guía y lecturas.

Cada Actividad de Aprendizaje se considera la Caracterización de la actividad como se puede ver en la tabla 2.

Titulo	El razonamiento de la variable
1. Experiencia de aprendizaje	1.1 Resolución de problemas
2. Modalidad de trabajo	2.1 Individual; 2.2 Equipo
3. Lugar de realización	3.1 Salón de clases
4. Herramientas tecnológicas	4.3 Calculadora científica 4.4 Calculadora con poder de graficación
5. Tiempo	60 minutos (Este tiempo puede modificarse de acuerdo a las necesidades del docente)
6. Producto	6.1 Producto RP
7. Referencias curriculares	1.1 Contenidos 1.1.1 Conceptuales 1.1.2 Procedimentales 1.1.3 Actitudinales 1.2 Competencias del Sistema Nacional de Bachillerato de la RIEMS 1.2.1 Competencias genéricas de Matemáticas 1.3 Estándares (e1.2, e1.3, e2.1, e2.1.2, e2.1.3, e2.1.6, e2.2.3, e6, e8, e9, e10.1)
8. Representación	8.1 Textual; 8.2 Tabular; 8.3 Algebraica; 8.4 Grafica
9. Estrategias	• Identifica los intervalos • Identifica las variables • Realiza una tabla
10. Evaluación	➢ Evaluación del reporte ➢ Evaluación de la representación
Observaciones	Se recomienda trabajar en dos fases: 1. Trabajo lápiz y papel, esto con el método tradicional sin involucrar las TIC, acompañar con una sesión de exposiciones donde se logre un debate entre los alumnos. 2. Trabajo con el uso de TIC, en este se utiliza la calculadora con poder de graficación (no limitado a algún otro instrumento), igualmente acompañar con una sesión de exposiciones donde se haga un debate entre los alumnos y sus diferentes puntos de vista.

Tabla 2. Caracterización de una actividad de aprendizaje.

En la tabla 3 muestra un ejemplo en la que la actividad de aprendizaje se vincula con la lectura correspondiente a la sesión 40 del Seminario Repensar las Matemáticas.

Horas	Problemas	Problemas con guía	Actividades en Internet	Ejercicios	Lecturas	Proyecto
0-1	El ritmo de tu corazón		Derivadas sucesivas.	Resolver ejercicios con el uso de las TIC	Ficha COMIE Cálculo de una variable. Reconstrucción para el aprendizaje y la enseñanza. Sesión 40 del Seminario Repensar las Matemáticas.	

Tabla 3. Ejemplo de una red de Actividades de Aprendizaje.

Conclusiones

El uso de los resultados de investigación en matemática educativa por parte de docentes interesados en innovar en su quehacer docente no es una tarea fácil. El desarrollo de la investigación a lo largo de cuarenta años ha pasado de ofrecer conceptos teóricos y estrategias a

construcciones más complejas en diversos marcos y perspectivas. De tal manera, como los resultados de investigaciones están íntimamente relacionados en el contexto en el que se producen, su eso en los salones de clase requiere de construir nuevos marcos que sean de significación para los docentes. Es por eso que los marcos curriculares: contenidos, competencias, modalidades, tipos de evaluación, parecen ser los adecuados para esta significación. El diseño de las redes de aprendizaje, producto de la primera etapa de este proyecto, será la base para trabajar en forma piloto con estudiantes y profesores para reportar los aprendizajes logrados a partir de estos materiales.

Agradecimientos El desarrollo es posible gracias al apoyo recibido por la Secretaría de Investigación y Posgrado del Instituto Politécnico Nacional asignado al proyecto 20140485 El currículo potencialmente aplicado en el área de matemáticas.

Referencias bibliográficas

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericana.

Flores, C (2007). *Variaciones simultáneas de primer y segundo ordenes en una situación de graficación y modelación de movimiento*. Tesis de maestría no publicada. CICATA-IPN, México.

Schmidt, W., McKnight, C., Valverde, G., Houang, R., & Wiley, D. (1997). Many Visions, Many Aims, Volume 1: A Cross-National Investigation of Curricular Intentions in School Mathematics. Dordrecht: The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Pulido, R., (2008). De la regla de 3 a la ecuación de continuidad (o la innovación en la enseñanza del cálculo). Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte iberoamericano. (pp. 121 - 142). México: CLAME, Ediciones Díaz de Santos S.A.

Suárez, L. (2013). Protocolo del Proyecto Multidisciplinario. La innovación didáctica en el currículo potencialmente, centrada en la interdisciplinariedad, aplicado para las áreas de matemáticas, física, bioquímica, cultura financiera y comunicación. Registro Secretaria de Investigación y Posgrado No. 1571. Documento de trabajo IPN.

Suárez, L.; Cordero, F.; Daowz, P.; Ortega, P.; Ramírez, A.; Torres, J.L. (2005). De los Paquetes Didácticos hacia un Repositorio de Objetos de Aprendizaje: Un reto educativo en matemáticas. Uso de las gráficas, un ejemplo. *RIED-Revista Iberoamericana de Educación a Distancia*, Volumen 8, 307-333.

Ruiz, B., Suárez, L., Ortega, P., Servín, C., Flores, C. y Torres, J. L. (2007). Actividades de aprendizaje de probabilidad y Estadística con uso de tecnologías de la información y la

comunicación. Actas de la XIII Jornadas sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. Granada, España.

Suárez, L.; Torres, J.L.; Ortega, P. (2012). Las matemáticas del bachillerato en el instituto politécnico nacional. En C. Dolores. (Ed.) ¿Hacia dónde reorientar el currículum de matemáticas del Bachillerato? México: Plaza y Valdés.

Torres, J.L., Suárez, L. y Ramírez, M.E. (2012). Vinculación entre la investigación y docencia. El uso de los resultados de la investigación en la docencia en un proyecto multidisciplinario. 1er Encuentro Nacional de Investigación Educativa, política educativa, resultados y tendencias. 1-15.

Trigueros, M. (2009). *¿Qué hemos aprendido de la enseñanza de las matemáticas a través de la investigación?* (pp. 27). México.: COMIE.

FLEXIBILIZACIÓN DE CURRÍCULOS DE MATEMÁTICAS EN SITUACIONES DE INTERCULTURALIDAD

Pilar A. Peña Rincón
CICATA-Instituto Politécnico Nacional México
pilaralejandrapena@yahoo.es

Resumen. Este artículo presenta el diseño de una tesis doctoral cuyos fundamentos teóricos están en la Etnomatemática (D'Ambrosio, 2008) y en la Educación Matemática Crítica (Valero y Skovsmose, 2012). El propósito del estudio es construir y validar un modelo de generación de propuestas curriculares intercultural, dialógico y crítico. Realizaremos un estudio de caso diseñando, implementando y evaluando una experiencia didáctica inclusiva en base a la metodología de investigación-acción, con una comunidad educativa con alta presencia de estudiantes indígenas. Buscamos que a partir del estudio de la etnomatemática local y de la etnomatemática presente en el currículo, y de los usos sociales de ambas, los estudiantes puedan comprender que las matemáticas son una construcción social y que pueden jugar un rol en la transformación de la sociedad
Palabras clave: etnomatemáticas, exclusión, interculturalidad, indígenas, currículo
Abstract. This article shows a draft proposal for a PhD thesis, which is based upon the theoretical grounds revealed by Ethnomathematics (D'Ambrosio, 2008) and Critical Mathematics Education (Valero & Skovsmose, 2012). The purpose of this research is to build and validate a model which will generate curricular proposals with a critical, dialogical and intercultural approach. Through design, implementation and assessment of an inclusive didactic experience a case study will be conducted based on the research-action methodology within an education community with high presence of indigenous students. From the study of the local ethnomathematics, the ethnomathematics in the curriculum, and the social application of both, this research seeks to make the students aware that mathematics are a social construction and that they are able to play a role in the transformation of society
Key words: ethnomathematics, exclusion, interculturalism, indigenous, curriculum

Introducción

Esta investigación aborda el tema de la exclusión de las culturas locales en el aula de matemáticas. Surge cuando la investigadora observa clases de matemáticas en una escuela ubicada en una comunidad aymara, y aprecia que la misma cultura local que tiene una fuerte presencia en la zona *no existe* o *desaparece* en el aula de matemáticas. Pese a que todos los estudiantes de la escuela son de origen aymara, se observa que nada en la clase de matemática alude a la identidad matemático-cultural de los estudiantes, a diferencia de otras asignaturas que establecen vínculos con el contexto sociocultural en el que se desarrolla la actividad educativa.

Antecedentes: la exclusión de los conocimientos matemáticos culturales del currículo

Como consecuencia de la globalización y de los flujos de migración masiva, las culturas se están tornando cada vez más heterogéneas (Goñi, 2006) y ha aumentado la convivencia entre personas de culturas distintas en el aula (Skovsmose, Alrø y Valero, 2008). Por otra parte, en forma paralela a los cambios demográficos, producto de los logros de movimientos sociales e indígenas, se ha venido produciendo en todo el mundo una visibilización progresiva de las culturas indígenas. En Latinoamérica, poco a poco nos hemos venido haciendo más conscientes de la coexistencia, desde

hace más de 500 años, de los pueblos originarios con las llamadas sociedades criollas. Y al cuestionar la ausencia de las culturas originarias -y de sus conocimientos- en la escuela como institución, hemos podido observar que la escuela ha sido utilizada como un vehículo de desarrollo de las identidades nacionales que ha negado y ocultado las diferencias étnicas y culturales (Lizarzaburu y Zapata, 2001).

Ambos procesos, el aumento de los flujos migratorios mundiales y la creciente visibilización de las culturas originarias, han contribuido a reforzar la identidad pluricultural de la población latinoamericana y a cuestionar la pertinencia de una escuela monocultural en una sociedad pluricultural.

En el aula de matemáticas, el enfoque cultural de la educación matemática también está siendo cuestionado. Uno de los principios didácticos básicos en educación matemática es que el aprendizaje es un proceso que tiene por protagonistas a los estudiantes, que son quienes aprenden. De manera que resulta indispensable que ellos participen activamente en la construcción de las ideas matemáticas de la clase comunicando lo que viven, saben y piensan. En un contexto pluricultural, considerar los conocimientos y experiencias previas de los estudiantes implicaría necesariamente incorporar las formas de razonar, de conocer y de hacer de las culturas (Lizarzaburu y Zapata, 2001). Sin embargo, el enfoque dominante de la educación matemática no favorece ese proceso porque tiende a ser monocultural.

Ello se debe a que los currículos de educación matemática de los países latinoamericanos han sido construidos a partir de las matemáticas que trajeron los europeos a través de la invasión y la conquista, y en base al supuesto que señala que las matemáticas serían un conocimiento único y universal, independiente del desarrollo de las culturas que la utilizan (D`Ambrosio, 2008). Hoy sabemos que no es así, que cada cultura tiene sus propios modos de conocer, de razonar y de hacer matemáticas en función de lo que demandan sus prácticas sociales en ambientes específicos: las etnomatemáticas (D'Ambrosio, 2008).

Esta nueva conciencia de lo que implica saber/hacer matemáticas nos ha llevado a reflexionar acerca del rol sociopolítico de la educación matemática y la matemática escolar (D'Ambrosio, 2008; Lizarzaburu y Zapata, 2001; Valero y Skovmose, 2012) y a valorar la importancia de las culturas de referencia en el aula de matemáticas (Gavarrete, 2013).

Por una parte, hemos podido constatar que la educación matemática no ha jugado un rol neutral en la conformación de las sociedades, puesto que al ignorar sistemáticamente los conocimientos matemáticos locales, también ha contribuido a acrecentar la pérdida de identidad cultural de los pueblos originarios de Latinoamérica. Por otra, apreciamos que los enfoques monoculturales han

tenido implicancias pedagógicas puesto que al no establecer conexiones con las prácticas matemáticas presentes en el entorno cultural, han limitado las posibilidades de desarrollo del pensamiento matemático de niños y niñas de aulas culturalmente homogéneas o diversas. Este es el problema que abordaremos en esta investigación.

Pensamos que, dadas las características de las sociedades actuales, resulta indispensable impulsar el desarrollo de una educación matemática con una perspectiva intercultural. Y que una manera de contribuir a aquello en el contexto chileno, es a través del desarrollo de una intervención curricular que incluya los conocimientos matemáticos locales de una comunidad con los conocimientos matemáticos del currículo nacional. Puesto que el currículo, al determinar qué es lo que se aborda en la escuela, puede tener impacto técnico, político y social, e influir sobre los estudiantes, los docentes y la comunidad.

Marco conceptual: hacia un enfoque intercultural dialógico-crítico

Deseamos elaborar una propuesta de flexibilización curricular mediante un modelo que permita incluir algunos conocimientos matemáticos locales con los conocimientos matemáticos presentes en el currículo nacional tomando en cuenta las perspectivas de las diversas culturas en interacción, sin sobreponer una a la otra. La pregunta de investigación que guiará este proceso es *¿cómo generar un modelo de trabajo para incluir los conocimientos matemáticos propios de una cultura local con los conocimientos matemáticos presentes en el currículo nacional?*

Buscamos que a partir del estudio de la etnomatemáticas en interacción (la etnomatemática local y la etnomatemática presente en el currículo) y de los usos sociales de ambas, los estudiantes puedan comprender que las matemáticas son una construcción social y que pueden jugar un rol en la transformación de la sociedad. Por lo tanto, proponemos considerar cómo se originan ambas etnomatemáticas, cuál es su uso social, y cómo pueden influir en el desarrollo y la transformación de la vida de la cultura en estudio.

El producto de la investigación será proponer un modelo de trabajo que permita incluir conocimientos locales y globales en el currículo de educación matemática para brindar equidad en las posibilidades de participación y de aprendizaje matemático a los estudiantes de las diversas culturas presentes en la clase.

Desarrollaremos esta investigación a través de un enfoque intercultural dialógico-crítico cuyos fundamentos principales exponemos a continuación.

A través de la Etnomatemática hemos podido comprender que las ideas matemáticas a lo largo de la historia han estado ligadas a modelos económicos y a propósitos políticos específicos. Y que

aunque l*a matemática* -espina dorsal de la civilización moderna, traída hasta nosotros a partir del siglo XV mediante la conquista y la colonización- nos ha sido presentada como un saber único y universal, existían, existen y existirán otras formas de saber/hacer matemáticas al seno de otras cosmovisiones: las etnomatemáticas. El concepto de *etnomatemáticas* acuñado por D`Ambrosio (2008, 2012) es una forma amplia de entender las matemáticas de los grupos culturales. Se refiere a los modos, estilos artes y técnicas (*ticas*) de explicar, aprender, conocer y lidiar con (*matema*) el ambiente natural, social, cultural e imaginario (*etno*) del ser humano. Y conlleva una *crítica* a la epistemología dominante por cuanto ésta última "se enfoca al conocimiento ya establecido de acuerdo a paradigmas aceptados en el tiempo y en el momento" (D`Ambrosio, 2008, p.47).

Este saber/hacer matemáticas de las culturas forma parte del *ciclo vital del conocimiento* (D`Ambrosio, 2008). Dicho ciclo vital consiste en que las personas a través de sus sentidos reciben información de la realidad natural o sociocultural, la procesan, generan estrategias de acción, y luego, incorporan a la realidad los resultados de la acción. A través de la comunicación, las personas comparten conocimientos y compatibilizan comportamientos acorde a ciertos parámetros acordados por la comunidad (los valores). De este modo, la realidad percibida por una persona está constituida por la realidad natural más los *artefactos* (manifestaciones materiales de la cultura) y *mentefactos* (elementos que responden a lo abstracto) acumulados por él o ella y por la especie.

El asunto epistemológico tiene profundas implicancias en la concepción de la interculturalidad y del carácter civilizatorio de la educación. Es necesario que nos preguntemos desde qué cosmovisión incluiremos los conocimientos matemáticos de las culturas en interacción, puesto que si lo hacemos desde la misma epistemología dominante, afirmar lo negado resulta insuficiente (Samanamud, 2010). El carácter dinámico del ciclo del conocimiento posibilita que las culturas en contacto compartan conocimientos y compatibilicen comportamientos conforme a parámetros o valores acordados por el grupo. Por consiguiente, entendemos la *interculturalidad* que asumimos en este estudio, no sólo como una relación entre culturas, sino como un movimiento que nos *reconstituye* constantemente. De este modo es posible generar nuevas formas de relación que Samanamud (2010) denomina *movimiento civilizatorio* (Samanamud, 2010) que forjen la base para una *civilización planetaria* (D`Ambrosio, 2008). En ese horizonte, atenderemos los tres movimientos simultáneos propuestos por Samanamud (2010): "al mismo tiempo que me afirmo y me reconstituyo tengo que salir de las relaciones de dominación del capitalismo global" (p. 74).

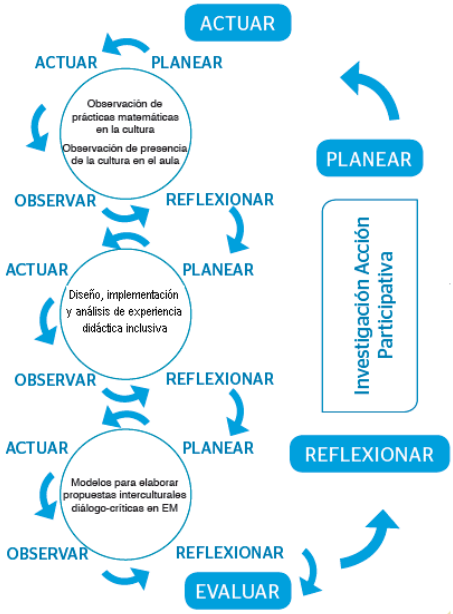
Dicha concepción de interculturalidad supone hablar de *diálogo* como "un modo de relación donde uno 'es' constituyéndose con el otro, pero también dejándose constituir" (Panikkar, 1990), sin

pretensiones de dominación (Samanamud, 2010). De allí el interés en que este enfoque, además de intercultural y crítico, sea dialógico.

Marco metodológico

Trabajaremos mediante un estudio de caso con una comunidad educativa con alta presencia de estudiantes indígenas. Pensamos que para llevar a cabo una investigación intercultural dialógico-crítica, es indispensable considerar la participación equitativa de quienes están involucrados en el proceso de investigación. Por consiguiente, es necesario que la investigación no sólo cuente con la contribución de personas pertenecientes a las culturas en interacción, sino que sea conducida por todas ellas, de tal modo que puedan participar en las decisiones acerca del curso de la investigación. El equipo de investigación, integrado por docentes que trabajan en la escuela del lugar, miembros de la comunidad aymara, y la investigadora doctorante, validará el diseño de investigación, definirá el o los conocimientos matemáticos locales que se integrarán en la experiencia didáctica, y validará el análisis de la información recopilada.

El estudio utilizará la Investigación Acción Participativa como metodología porque establece relaciones colaborativas sobre la base de múltiples formas de conocimiento y de co-generación de conocimiento, permite responder a las prácticas de la comunidad, y vincula el conocimiento generado a la acción social (Reason y Bradbury, 2006).



En primer lugar, mediante el uso de metodologías etnográficas buscaremos conocer y dialogar con la cultura aymara observando las *prácticas matemáticas de la cultura* en su vida cotidiana y cómo está asociada la *práctica matemática escolar* con la cultura que la rodea. En segundo lugar, se

diseñará, implementará y evaluará una innovación curricular considerando ambas prácticas matemáticas, con tal de extraer los factores que permitan integrar dichas prácticas. Posteriormente, y para la determinación de los factores anteriores, se analizará el nivel de integración efectivo de las prácticas matemáticas y las precauciones que deben ser consideradas en los procesos de integración curricular. De esta manera, esperamos lograr validar un modelo de trabajo que permita elaborar propuestas curriculares interculturales dialógicas en matemática educativa.

A modo de conclusión

Este artículo -que presenta el avance de una investigación doctoral en curso- se ocupa de la exclusión de los conocimientos matemáticos locales del currículo de educación matemática en Chile. Planteamos que existe una disociación entre los conocimientos y prácticas matemáticas presentes en las culturas y los conocimientos y prácticas matemáticas estudiados en la escuela. Y sostenemos que a la vez que dicha disociación no contribuye al desarrollo de las habilidades matemáticas de los estudiantes, refuerza la reproducción de un orden social excluyente.

Sin duda se trata de un problema complejo inserto en una sociedad con profundas contradicciones. Pensamos que hoy en día es necesario que los educadores matemáticos y los investigadores en educación matemática tomemos posición en ese escenario, y que consideremos que cada vez cobra menos sentido una educación matemática monocultural en un mundo pluricultural. En ese contexto, el mayor desafío para la investigadora doctorante es contribuir al desarrollo de relaciones equitativas en el campo de la investigación científica, especialmente en el ámbito intercultural, de modo que la voz de los investigados no esté mediada por la visión de los investigadores.

Referencias bibliográficas

D'Ambrosio, U. (2008). *Etnomatemática, eslabón perdido entre las tradiciones y la modernidad*. México, D.F.: Limusa.

D'Ambrosio, U. (2012). The program ethnomathematics: theoretical basis and the dynamics of cultural encounters. *Cosmopolis. A Journal of Cosmopolitics*, *3*(4), 13-41

Gavarrete, M. E. (2013). La Etnomatemática como campo de investigación y acción didáctica: su evolución y recursos para la formación de profesores desde la equidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *6*(1), 127-149.

Goñi, J. (Ed.).(2006). *Matemáticas e Interculturalidad*. Barcelona: Graò.

Lizarzaburu, A., y Zapata, G. (Eds). (2001). *Pluriculturalidad y Aprendizaje de la matemática en América Latina. Experiencias y desafíos.* Madrid: Morata.

Panikkar, R. (1990). *Sobre el diálogo intercultural*. Salamanca: San Esteban.

Reason, P., y Bradbury, H. (2006). *Handbook of action research*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Samanamud, J. (2010). Interculturalidad, educación y descolonización. *Integra Educativa, Revista de investigación educativa*, *3*(1), 67-81.

Skovsmose, O., Alrø, H., y Valero, P. (2008). Antes de dividir se tiene que sumar. Entre-vistar. Porvenires de estudiantes indígenas. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 1*(2), 111-136.

Valero, P., y Skovsmose, O. (2012). *Educación matemática crítica. Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas*. Bogotá: Ediciones Uniandes.

CONCURRENCIA DE PREDICCIÓN Y ALGORITMIA EN LA MODELACIÓN

Carol Sepúlveda Herrera, Leonora Díaz Moreno y Jaime Arrieta Vera
Universidad de los Lagos. Chile
Universidad Autónoma de Guerrero. México
krol.cesh@gmail.com, leonora.diaz@ulagos.cl, jaime.arrieta@gmail.com

Resumen. Arrieta (2003) y Méndez (2007) reportan cómo construyen estudiantes una red de modelos lineales que llaman "lo lineal". Análisis más finos de esa construcción dilucidan prácticas que concurren en este proceso. Emerge, por ejemplo, como eslabón entre la tabla de datos y el modelo analítico-algebraico, algoritmos de predicción. En este trabajo interesa describir cómo es que concurren la predicción y la algoritmia al configurar el modelo lineal algebraico desde el tabular. Del mismo modo, interesa responder ¿Cómo es que los actores construyen estos algoritmos? ¿Cómo es que su evolución da lugar al modelo algebraico? Entendemos a la *algoritmia* como *prácticas que estructuran acciones que se configuran para realizar tareas*, y llamamos a éstas configuraciones *algoritmos*. La algoritmia es una práctica recurrente de diferentes comunidades. La perspectiva teórica donde se enmarca el trabajo es la socioepistemología, perspectiva sistémica multidimensional donde concurren lo cognitivo, lo didáctico, lo epistemológico y lo social
Palabras clave: Modelación, algoritmia, predicción, concurrencia
Abstract. Arrieta (2003) and Mendez (2007) report how students build a lineal model network called by themselves as "the lineal". More elaborated analysis about this construction elucidates practices that are present in this process where for example the algorithms prediction emerges as a link between the data chart and the analytical-algebraic model. In this paper we are interested to describe how the prediction and algorithms are present to build a algebraic lineal model form the tabular. In addition we are interested in answering: ¿How do the agents build these algorithms? ¿How does the evolution of them become to an algebraic model?. We understand the algorithms as practices that make actions which make configurations which do some tasks, these configurations are the algorithms. The algorithm is a common practice of different communities. The socioepistemology is the theoretical perspective that this paper is framed on, which is a multidimensional systemic perspective where the cognitive, the educational, the epistemology and the social come
Key words: Modeling, algorithmic, prediction, concurrence

Introducción

La modelación como práctica con-vivencia

En nuestra disciplina, matemática educativa, existen diferentes perspectivas de la modelación. Las perspectivas representacionistas de la modelación ocupan un amplio espacio en este espectro. Para algunos la modelación es la representación de situaciones, fenómenos o problemas reales (Biembengut & Hein, 2004; Mochon, 1994). Mientras que para otros la modelación es una actividad involucrada con la representación de objetos matemáticos (Planchart 2005).

Desde la mirada socioepistemológica en la cual se encuentra inserto nuestro trabajo, se entiende a la modelación como una práctica que vive en diversas comunidades. En este sentido la modelación es una práctica vivenciada por diversas comunidades que articula dos entidades con la intención de intervenir en una de ellas a partir de la otra, lo modelado y el modelo respectivamente. La modelación desde esta configuración se constituye como una práctica que establece puentes entre la escuela y su entorno. (Arrieta y Díaz, 2013). Suscribimos a esta perspectiva de modelación en nuestro trabajo y a la red de modelos de lo lineal como la plantea Arrieta (2013).

Predicción y lo lineal

La predicción la entendemos como una práctica orientada a anticipar eventos con cierta racionalidad. Se distingue de la noción de adivinación ya que, la adivinación es un pronóstico generado por señales o sucesos sin un fundamento científicamente aceptado.

Sin embargo, con base en la actividad racional de predicción se determinan estados futuros de un sistema, de un objeto o de un fenómeno, con base en el estudio sistemático de las causas que lo generan y los efectos que produce. Se predice un estado futuro analizando y cuantificando cambios, por lo que se trata de una estrategia propia al estudio de la variación. (Cantoral, Molina, & Sánchez, 2005).

Con respecto a lo lineal, la entenderemos como una red que articula los modelos y el fenómeno, no sólo a la expresión algebraica que va asociada al fenómeno. De esta forma, lo lineal no está referida al objeto matemático función lineal o afín, sino a lo referente a lo lineal. Lo lineal es una red de herramientas para intervenir en el fenómeno. En la figura 1 se muestra una red de lo lineal.

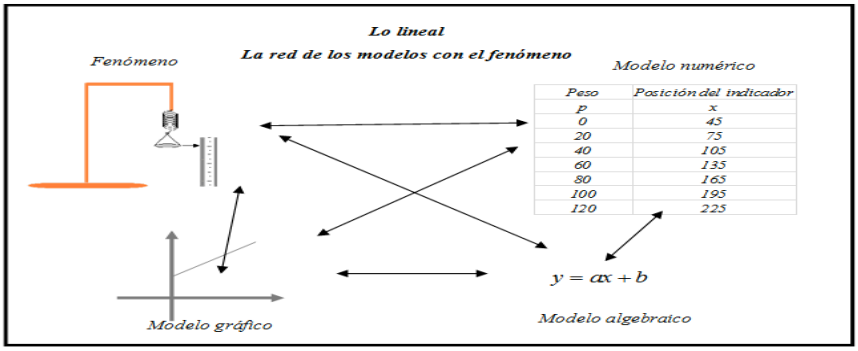


Figura 1. Lo lineal. (Arrieta, 2003).

En Arrieta (2003) se propone un diseño de aprendizaje basado en la modelación lineal de la elasticidad de los resortes. En ella, los actores, en la interacción con el fenómeno toman datos y construyen una tabla de datos. Se plantean diferentes situaciones de predicción que dan lugar a diferentes formas de predecir. Uno de estos métodos es el "método de predecir de puntos medios". Al plantearse una situación de predicción que difícilmente podrán resolver con este método, los estudiantes construyen una herramienta para ello, *cuántos milímetros por gramo se estira*. Con ella predicen: *multiplicas 38.3 por los milímetros que se estira por un gramo y después le agregas los milímetros cuando no tiene peso.* Posteriormente construyen el modelo algebraico: $x = 1.5p + 45$. Este proceso no informa de cómo se construyó *cuántos milímetros por gramo se estira* ni la forma de predecir, *multiplicas 38.3 por los milímetros que se estira por un gramo y después le agregas los milímetros cuando no tiene peso.* Tampoco informa de la transición de la forma de predecir por puntos medios al modelo $x = 1.5p + 45$.

En este trabajo reportamos cómo es que concurren la predicción y la algoritmia al configurar el modelo lineal algebraico desde el tabular.

La algoritmia

Los algoritmos los encontramos tanto en actividades básicas como en actividades complejas. Son algoritmos una receta de cocina, el algoritmo de la división, el método de Montecarlo o la transformada rápida de Fourier.

Nosotros entendemos un algoritmo como una estructura de acciones que se configuran para realizar una tarea. No es lo mismo seguir algoritmos que construirlos, para esto último se tiene que entender cómo se realizan la tarea a profundidad para desmenuzarlas en acciones y volver a integrarlas, estructurándolas.

Llamamos algoritmia a la actividad de construir algoritmos, siendo esta una práctica vivenciada en diferentes comunidades. Una comunidad familiarizada con la algoritmia es la de Ingenieros en Sistemas Computacionales, pues es para ellos indispensable "ordenar" con rapidez y claridad lo que debe hacer un componente electrónico.

Los actores que participan en la puesta en escena del diseño

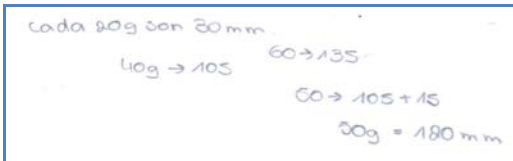
Esta investigación se desarrolla en un colegio particular de la región metropolitana de Chile, de la comuna de Vitacura. Este colegio aborda la educación de estudiantes de situación económica media alta de nuestro país, desde los 3 años hasta los 18 años de edad, cubriendo tanto la educación básica y media, que son obligatorias, y la educación prebásica, que es optativa.

En el estudio participan 16 estudiantes, que cursan segundo año medio, entre los 15 y 16 años de edad. La puesta en escena se desarrolló en cuatro sesiones de 45 minutos cada una, en el aula de matemática y en horario escolar.

El grupo se organiza en 7 equipos de dos o tres estudiantes, en este artículo elegimos para su análisis las producciones de 3 equipos por ser los más representativos.

Análisis de las producciones de los actores en la puesta en escena del diseño

Una trayectoria de algoritmos que vincula la tabla de datos numéricos con modelos algebraicos, es la que desarrolla el equipo uno, según como se muestra en la figura 2.

	Cada 20 g son 30 mm 40 g --- 105 60 -- 135 50 -- 105+15 50g = 120 mm	Si colocamos 50 gramos. ¿En qué posición estará la flechita del portapesas?

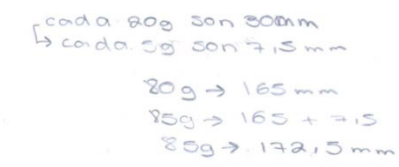
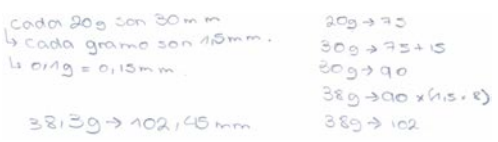
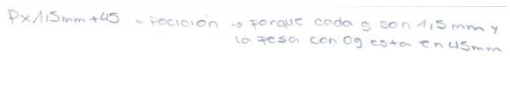
	Cada 20g son 30 mm Cada 5g son 7,5 mm 80 g -- 165mm 85 g -- 165+7,5 85 g -- 172,5 mm	Si colocamos 85 grs. ¿En qué posición estará la flechita del portapesas? ¿Por qué?
	Cada 20 g son 30 mm Cada gramo son 1,5 mm 0,1 g = 0,15 mm 20g -- 75 30 g --75+15 30 g -- 90 38 g -- 90x(1,5x8) 38 g -- 102 38,3 -- 102,45	¿Cuál será la posición del portapesas si se colocan 38,3 grs?
	Px1,5 mm +45 = posición Porque cada gson 1,5 mm y la pesa con 0 g está en 45 mm.	¿Cuál será la posición del portapesas si se colocan *p* gramos?

Figura 2. Trayectorias de algoritmos de predicción al modelar, Equipo 1.

En esta figura, se observa cómo los estudiantes para predecir utilizan la tabla de datos. Inicialmente utilizan un algoritmo llamado puntos medios 1. Los estudiantes tienen el valor de la posición de la flecha para 40 gramos, 105 milímetros. Para calcular cuánto se estirará de más con 10 gramos, toman dos datos de la tabla, 0 y 20 gramos en este caso, y sus correspondientes valores para la posición del portapesas, 45 y 75 milímetros. Luego con esos datos se calculan los incrementos del peso y de la posición, en este caso 20 y 30 respectivamente. Después dividen los intervalos por dos, con el fin de encontrar el incremento medio tanto del peso como de la posición de la flecha. Este algoritmo ya no será suficiente para resolver otras situaciones de predicción. Lo que conlleva que los estudiantes transitan a otro algoritmo, el algoritmo de puntos cuartos: dividen el incremento de pesos y el de posiciones entre cuatro, "cada 20 gr son 30 mm cada 5 son 7,5 mm" y luego se lo suman a la posición inicial, en este caso "165 + 7,5".

En el tercer momento utilizan el algoritmo de "puntos décimos": para calcular la posición en 38 gramos utilizan, "cada 20 gr son 30 mm cada gramo son 1,5 mm". Luego, se lo suman a la posición conocida: "38 gr → 90 + (1,5 x 8)". Para calcular el incremento de 0,1 gramos vuelven a dividir por 10, "0,1 gr = 0,15 mm". Así le suman a la posición con 38 gramos, 102 milímetros, el estiramiento con 0,3 gramos, "38,3 → 102,45".

En el cuarto momento se observa cómo construye el equipo la "Razón de cambio", "porque cada gramo es 1,5 milímetros" y como presenta una modelo cuasi algebraico, "p x 1,5 + 45 = posición".

En un quinto momento se cosifica el algoritmo en una expresión algebraica.

Del mismo modo, en la figura 3, se muestra la trayectoria de algoritmos que realizan los estudiantes del equipo dos.

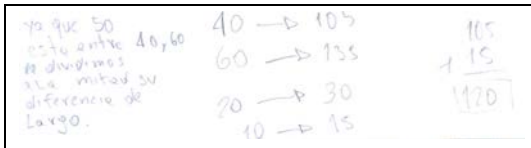
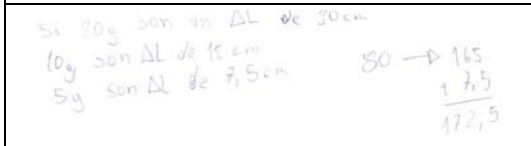
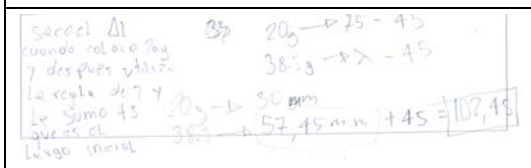
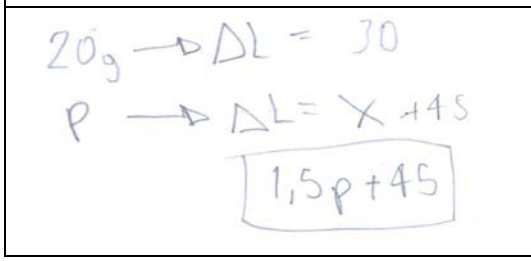
	Ya que 50 está entre 40, 60 lo dividimos a la mitad su diferencia de largo. 40 --- 105 105 60 --- 135 + 15 20 --- 30 120 10 --- 15	Si colocamos 50 gramos. ¿En qué posición estará la flechita del portapesas?
	Si 20 g son un ΔL de 30 cm. 10 g son ΔL de 15 cm 5 g son ΔL de 7,5cm 80 --- 165 + 7,5 172,5	Si colocamos 85 grs. ¿En qué posición estará la flechita del portapesas? ¿Por qué?
	Saco el ΔL cuando coloco 20 g y después utilizo la regla de 3 y le sumo 45 que es el largo inicial 20g --- 75-45 38,3 --- x-45 20 g --- 30 38,3 --- 57,45 +45=102,45	¿Cuál será la posición del portapesas si se colocan 38,3 grs?
	20 g --- ΔL = 30 P --- ΔL= x+45 1,5p+45	¿Cuál será la posición del portapesas si se colocan *p* gramos?

Figura 3. Trayectorias de algoritmos de predicción al modelar, Equipo 2.

El equipo dos predice inicialmente utilizando un algoritmo llamado puntos medios 2. Para predecir la posición del punto medio de los pesos, 40 y 60 en este caso, se considera el punto medio de los valores de las posiciones correspondientes, 105 y 135. En palabras de los actores: "ya que 50 está entre 40, 60 dividimos la mitad su diferencia de largo" (figura 3).

Cuando se solicita que predigan la posición del portapesas cuando se colocan 85 gramos, este algoritmo ya no será suficiente. Lo que conlleva a que los estudiantes transiten a otro algoritmo, utilizan el algoritmo de "puntos cuartos" que utiliza el equipo 1. Calculan el estiramiento con 5 grs. y luego se lo suman a la posición conocida.

En el tercer momento los estudiantes del equipo dos obtienen el estiramiento del resorte utilizando la "Regla de tres" y le suman 45, lo que corresponde a su largo inicial: "Saco ΔL cuando coloco 20 gr. y después utilizo la regla de tres y le sumo 45 que es el largo inicial".

En un cuarto momento se cosifica el algoritmo en una expresión algebraica utilizando la regla de tres.

La trayectoria de algoritmos que vinculan la tabla de datos numéricos con el modelo algebraico, que desarrolla el equipo tres, se muestra en la figura 4.

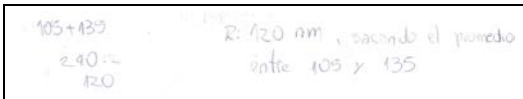
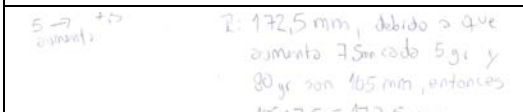
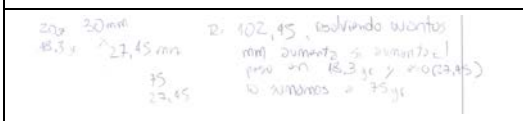
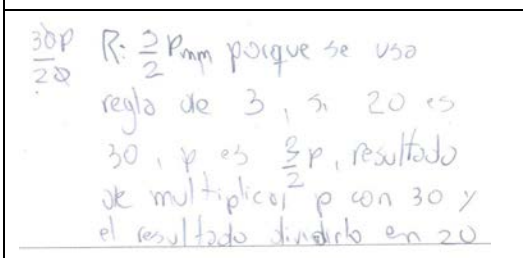
	105+135 240:2 120 R:120 mm, sacando el promedio entre 105 y 135	Si colocamos 50 gramos. ¿En qué posición estará la flechita del portapesas?
	5 --- 7,5 Aumenta R: 172, 5 mm, debido a que aumenta 7,5 cada 5 gr y 30 gr son 165 mm, entonces 105+7,5=172,5 mm	Si colocamos 85 grs. ¿En qué posición estará la flechita del portapesas? ¿Por qué?
	20 gr 30 mm 18,3 27,45 R: 102,45, resolviendo cuántos mm aumenta si el peso en18,3 gr y eso (27,45) lo sumamos a 75 gr	¿Cuál será la posición del portapesas si se colocan 38,3 grs?
	<u>30p</u> 20 R: 3/2 mm porque se usa regla de 3, si 20 es 30, p es 3/2 p, resultado de multiplicar p con 30 y el resultado dividirlo en 20	¿Cuál será la posición del portapesas si se colocan *p* gramos?

Figura 4. Trayectorias de algoritmos de predicción al modelar, Equipo 3.

En el caso del equipo tres, los estudiantes utilizan el algoritmo de puntos medios 3 para obtener la posición del portapesas cuando tiene 50 grs. Este se diferencia del algoritmo de puntos medios 1 y 2 porque utilizan promedios: "R: 120mm, sacando el promedio entre 105 y 135". Luego, cuando este algoritmo ya no es suficiente para predecir el estudiante utiliza puntos cuartos: "R: 172,5, debido a que aumenta 7,5 cada 5 gr y 80 gr son 105 mm, entonces 105+7,5=172,5 mm".

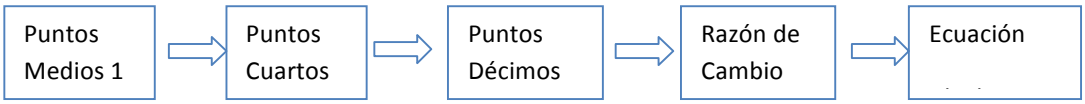
En un tercer momento utilizan la regla de tres para predecir cuánto se estira el resorte con 18,3 gramos y luego se los suman a la posición cuando se colocan 20 gramos: "R: 102,45, resolviendo cuantos mm aumenta si aumenta el peso en 18,3 gramos y eso (27,45) lo sumamos a 75 gr".

En un cuarto momento, plantean un expresión algebraica sin que consideren la posición del portapesas cuando no hay peso: "R: 3/2 p mm porque se usa regla de 3, si 20 es 30, es 3/2p, resultado de multiplicar p con 30 y el resultado dividido en 20".

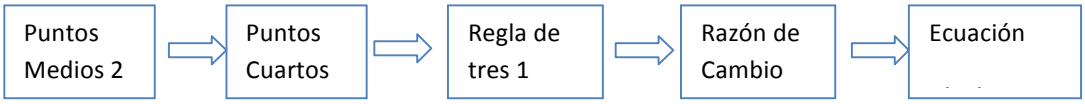
En las producciones que se analizaron, se reconoce cierta regularidad en la construcción y utilización de los algoritmos de predicción para resolver la situación planteada.

Podríamos sintetizar las trayectorias de los equipos en el siguiente esquema:

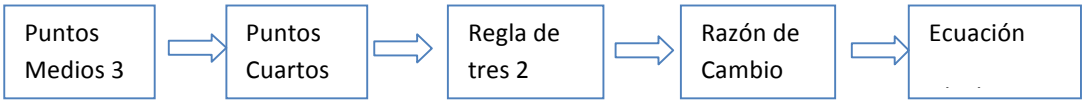
- Trayectoria de Bárbara (Equipo 1)



- Trayectoria de Diego (Equipo 2)

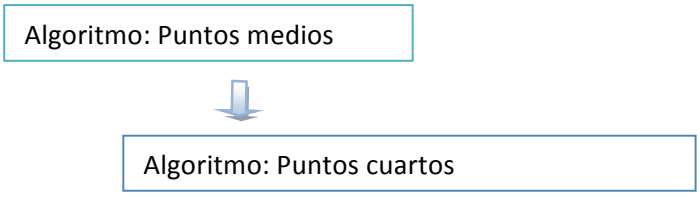


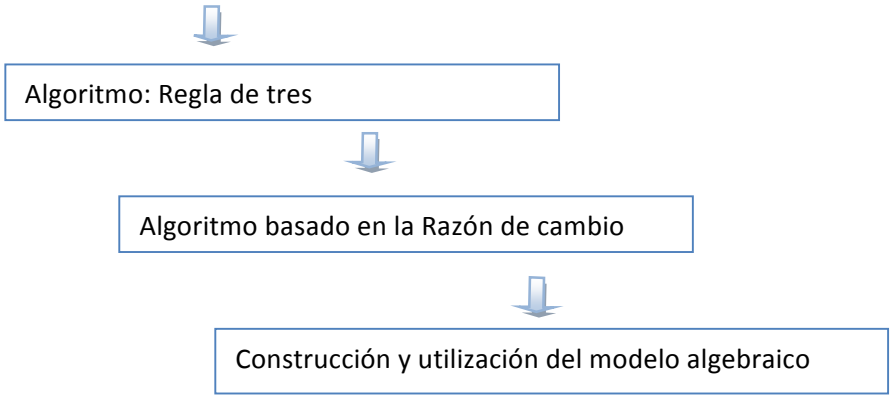
- Trayectoria de Vicente (Equipo 3)



Conclusiones

Podemos identificar una trayectoria de algoritmos que transita del modelo numérico lineal a un modelo algebraico-analítico lineal. A saber, la trayectoria es:





El análisis de la evolución de los algoritmos nos permite entender cómo es que se articulan los diferentes vértices de la red de lo lineal. Es decir, nos permiten ver la naturaleza del "pegamento" que articula los diferentes modelos con el fenómeno.

Referencias bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis doctoral no publicada. México: Cinvestav.

Arrieta, J. y Díaz, L. (2013) Una socioepistemología de la modelación. Artículo enviado a revista de corriente principal.

Biembengut, M. S., & Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática*, *16*(2), 105–125.

Cantoral, R., Molina, J., & Sánchez, M. (2005). Socioepistemología de la predicción. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *18*(1), 463–468.

Méndez, M. (2007). La *experiencia como la evolución de las prácticas: La experiencia de modelar linealmente situaciones análogas.* Tesis de maestría no publicada. Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Mochon, S. (1994). *Quiero entender el CÁLCULO. Un enfoque diferente basado en conceptos y aplicaciones*.

Planchart, O. (2005). La modelación matemática: Alternativa didáctica en la enseñanza de precálculo. *Revista 360° hhtp://cremc.ponce.inter.edu/360/index.htm* V.1

ANÁLISIS SOCIOCULTURAL CONSTRUCTIVISTA DE LAS DIFICULTADES ASOCIADAS AL ESTUDIO DE TEMAS GEOMÉTRICOS EN EL NIVEL ESCOLAR: UNA ALTERNATIVA METODOLÓGICA USANDO RECURSOS EDUCATIVOS ABIERTOS

Myrian Luz Ricaldi Echevarria
Colegio de la Inmaculada, Jesuitas-Lima. Perú
myrianluz@hotmail.com

Resumen. La presente investigaciónse basa en el uso de la tecnología con bases teóricas socio-constructivistas y el enfoque teórico de Van Hiele para el análisis de tópicos de geometría. La pregunta de investigación planteada fue: ¿Cómo la aplicación de recursos educativos abiertos impacta en la comprensión de la geometría en estudiantes del nivel de educación secundaria? El diseño es cualitativo y se aplicó en un salón de clase de una institución privada de la ciudad de Lima. El estudio pretende contribuir con un modelo alternativo que identifica las dificultades asociadas al estudio de la geometría en el nivel secundaria; selecciona y justifica la elección de los recursos educativos abiertos (REA) para el aprendizaje comprensivo de temas vinculados al estudio del triángulo y evalúa la pertinencia metodológica usando REA al campo de la geometría escolar
Palabras clave: investigación cualitativa, triángulo, podcast
Abstract. This research is based on the use of technology along with the basis of socio- constructivist theories and Van Hiele's theoretical focus to analyze geometry topics. The proposed research question was: How can the application of open educational resources impact student´s comprehension of geometry at the secondary level? The design is qualitative and was applied in a classroom of a private institution in the city of Lima. The study aims to contribute to an alternative model that identifies the difficulties associated with the study of geometry at the secondary level; It selects and justifies the choice of open educational resources (OER) for comprehensive learning of topics linked to the study of the triangle and evaluates the methodological relevance using OER in the field of geometry at a school level
Key words: qualitative research, triangle, podcast

Introducción

El presente estudio se focaliza en explicar y mejorar la comprensión conceptual de temas geométricos vinculados al estudio del triángulo, mediante la implementación de estrategias didácticas alternativas.Surge la necesidad de investigar la temática propuesta debido a los resultados de dominio mostrados en diferentes pruebas nacionales (evaluación censal) o resultados internacionales, como las pruebas PISA.

Los estudiantes en edad escolar, por lo general, son conducidos a situaciones donde sólo aprenden procedimientos en forma algorítmica, sin comprender el significado de los conceptos. Frente a este problema, es importante, como factor de apoyo al aprendizaje de la matemática y específicamente de la geometría, el que los alumnos reconozcan cuándo y cómo aplicar los procedimientos aprendidos. Wertheimer (1991), señala que aunque hay alumnos que "dominan" los hechos y procedimientos relevantes para resolver determinados problemas, no comprenden de manera significativa y críticamente importante las ideas subyacentes en los procedimientos.

Objetivos de la investigación

Objetivo general: Analizar los procesos involucrados en la aplicación de recursos educativos abiertos (REA) diseñados para mejorar la comprensión de la geometría en estudiantes del nivel de educación secundaria.

Objetivos específicos:

- Identificar las dificultades asociadas al estudio de la geometría en estudiantes del nivel de educación secundaria.
- Seleccionar y justificar la elección de los REA para el aprendizaje comprensivo de temas vinculados al estudio del triángulo.
- Evaluar la pertinencia de la aplicación de los REA para el aprendizaje de temas vinculados al estudio del triángulo desde la perspectiva del estudiante.
- Evaluar la pertinencia de la aplicación de los REA para el aprendizaje de temas vinculados al estudio del triángulo desde la perspectiva del profesor.
- Promover la aplicación de los REA para el aprendizaje de la geometría en estudiantes del nivel de educación secundaria.

Marco Teórico

Recursos educativos abiertos en contextos escolares.

La práctica docente en los últimos años ha experimentado una rápida evolución en el uso de los recursos de apoyo, especialmente en la inclusión de herramientas sustentadas en tecnología. En este sentido, el NCTM (2000) establece que la tecnología es esencial en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, además influye en las matemáticas que se enseñan en la escuela. Es decir, es un recurso que puede aumentar las posibilidades de aprendizaje de los estudiantes.También, otros autores sugiere que en lugar de dedicar tanto tiempo a los algoritmos debería invertirse más tiempo y esfuerzo para que los estudiantes comprendan los problemas geométricos de variación mediante el uso de software dinámicos. (Santos y Barrera, 2011). Una gran cantidad de recursos educativos abiertos (REA) están ahora al alcance de profesores y alumnos. Además, son parte del movimiento global de acceso abiertoa la información existente en el Internet, llamado: Open Access. Los REA son recursos y materiales educativos gratuitos y disponibles libremente en Internet y la World Wide Web(tales como texto, audio, video, herramientas de software, y multimedia, entre otros), que tienen licencias libres para la producción, distribución y uso de la comunidad educativa mundial. Estos recursos son de tres

tipos:

- Contenidos educativos: programas educativos, materiales para cursos, objetos de aprendizaje, libros de texto, materiales multimedia, exámenes, compilaciones, publicaciones periódicas, etc.
- Herramientas: software para apoyar la creación, entrega, uso y mejoramiento de contenidos educativos abiertos. Incluye además herramientas y sistemas para crear contenido, registrar y organizar contenido; gestionar el aprendizaje y desarrollar comunidades de aprendizaje en línea.
- Recursos de implementación: licencias de propiedad intelectual de acceso libre, principios de diseño, adaptación y localización de contenido; y materiales o técnicas para apoyar el acceso al conocimiento. (López, 2007).

Estos recursos forman parte de lo que se ha llamado sociedad de la información y sociedad del conocimiento, en la que se utilizan nuevas formas de procesamiento, distribución, uso de la información y del conocimiento a través de nuevas tecnologías de la información y de las comunicaciones (TIC). En relación a lo anterior existen autores como Jasso (2009), quienes afirman que la incorporación de innovación es importante para reducir la brecha digital y brindar diversas herramientas para afrontar un futuro que exige habilidades informáticas.

Teoría de Van Hiele.

La investigación considera como marco teórico de referencia, desde la perspectiva matemática, la teoría de niveles de pensamiento geométrico de Van Hiele (1984) quien describe la influencia de la teoría de los niveles de la geometría en el pensamiento. De acuerdo a esta teoría, el aprendizaje de la geometría se hace pasando por unos determinados niveles de pensamiento y conocimiento, que no se asocian a la edad y que sólo permiten el tránsito de un nivel a otro superior cuando se ha logrado el dominio de habilidades secuenciales. La teoría está basada en los siguientes supuestos:

- El primero, es que el aprendizaje de la geometría es un proceso discontinuo caracterizado por diferencias cualitativas de los niveles de pensamiento: descripción, análisis, abstracción y comprobación.
- Segundo, estos niveles son secuenciales, invariantes y jerarquizados.
- El tercer concepto es que el paso de un nivel implica la comprensión del anterior.
- Cuarto, cada nivel tiene su propio lenguaje y que es necesario conocer cómo el estudiante

aprende (Van Hiele, 1984).

El modelo de Van Hiele está formado por dos componentes: el primero es la descripción de los distintos tipos de razonamiento geométrico, que va desde el razonamiento intuitivo hasta el formal y abstracto; el segundo es una descripción de cómo un profesor puede organizar la actividad en sus clases para que los estudiantes puedan alcanzar el nivel superior de aprendizaje. Según Van Hiele en la base del aprendizaje de la geometría hay dos elementos importantes: el lenguaje utilizado y la significatividad de los contenidos. El primero implica que los niveles, y su adquisición, van muy unidos al dominio del lenguaje adecuado y, lo segundo, que sólo van a asimilar aquello que les es presentado a nivel de su razonamiento. Si no es así se debe esperar a que lo alcancen para enseñarles un contenido matemático nuevo (Guillen, 2004).Los niveles que la teoría de Van Hiele plantea son los siguientes:Visualización y reconocimiento (nivel 1), análisis (nivel 2), ordenación o clasificación (nivel 3), deducción formal (nivel 4) y rigor (nivel 5).

A continuación se describenlas características de cada uno de los niveles.

Para el nivel 1 (Reconocimiento):

- Percepción de los objetos en su totalidad y como unidades.
- Descripción de los objetos por su aspecto físico, se diferencian o clasifican considerando semejanzas o diferencias físicas entre ellos.
- No se suelen reconocer explícitamente los elementos característicos ni las propiedades de los objetos.

Para el nivel 2 (Análisis):

- Percepción de los objetos como formados por partes y dotados de propiedades, aunque no se identifican las relaciones entre ellas.
- Descripción de los objetos con listas de propiedades, que puede que no sean suficientes para caracterizar el objeto o que se incluyan más de las necesarias.
- Deducción de nuevas propiedades a partir de la experimentación y posible generalización a todos los objetos de la misma familia.
- La demostración de una propiedad se realiza mediante la comprobación en uno o en pocos casos.

Nivel 3 (Ordenación o clasificación):

- Se pueden realizar clasificaciones lógicas de los objetos considerando propiedades o

relaciones ya conocidas.

- Comprensión de lo que es una definición matemática y sus requisitos.
- Utilización de razonamientos deductivos informales para demostrar una propiedad. Se detecta la necesidad de justificar de manera general la veracidad de una propiedad.
- Comprensión de los pasos individuales de un razonamiento lógico de forma aislada, pero no del encadenamiento de estos pasos ni de la estructura de una demostración.
- Incapacidad para realizar una demostración completa en la que haya que encadenar varias implicaciones, y tampoco se siente su necesidad. Esto explicaría porque no se comprende la estructura axiomática de las matemáticas.

Nivel 4 (Deducción formal):

- Se realiza, según su necesidad, deducciones y demostraciones lógicas y formales para justificar las proposiciones planteadas.
- Comprenden y manejan las relaciones entre propiedades y se formalizan en sistemas axiomáticos.
- Se comprende cómo se puede llegar a los mismos resultados partiendo de proposiciones o premisas distintas lo que permite entender que se puedan realizar distintas formas de demostraciones para obtener un mismo resultado.

Nivel 5 (Rigor):

- Se conoce la existencia de varios sistemas axiomáticos, se pueden analizar y comparar permitiendo comparar diferentes geometrías.

Diseño de investigación y metodología

El presente estudio se enmarca dentro del enfoque de investigación cualitativa, ya que trata de identificar la naturaleza profunda de la realidad del aprendizaje de la geometría en un aula de clase del segundo grado de secundaria, la estructura de la misma y las relaciones que se establecen cuando se usan recursos educativos abiertos. De acuerdo con Taylor y Bogdan (1990) el términometodología cualitativa se refiere en su sentidomás amplio a la investigación que producedatos descriptivos.

Algunas ventajas de la metodología cualitativa aplicada a la investigación del presente estudio es que el investigadorpuede expandir su comprensión a travésde la comunicación verbal y no verbal, procesarla información (datos) inmediatamente,clarificar y resumir el material, checar con los

participantes para lograr veracidad en la interpretacióny explorar respuestas no usualeso no anticipadas. El diseño de investigación propuso una triangulación entre los datos de los profesores, los estudiantes y las investigaciones relacionadas. En el caso de los estudiantes se procuró un marco de indagación cualitativo, donde el interés radicó en comprender el entendimiento de los estudiantes a partir de la propia reflexión.

Para el caso de la presente investigación se utilizaron 4 instrumentos para la recolección de datos e información: la prueba diagnóstica, la entrevista semi-estructurada, la propuesta didáctica de los podcast y la entrevista a profundidad, los cuáles se detallan a continuación.

Tabla 1. Instrumentos de recolección de datos.

Instrumentos	Descripción
Prueba diagnóstica	Instrumento escrito, diseñado considerando los aspectos teóricos de Van Hiele. Aplicada a 5 estudiantes del 2do grado de educación secundaria. Permitió obtener información objetiva sobre el dominio y comprensión de temas geométricos vinculados al estudio del triángulo.
Entrevista semi-estructurada	Instrumento escrito, diseñado considerando la experiencia de uso de REA.Aplicada a 5 docentes. Permitió obtener información sobre los modos de uso e impacto de los REA en contextos escolares.
Propuesta didáctica: podcast en la clase de geometría.	Aplicación de una secuencia didáctica sobre la aplicación de podcast tomando en cuenta elementos de la teoría APOE. Aplicada a dos secciones de 26 estudiantes cada una. Permitió aplicar podcast en el aprendizaje de la geometría.
Entrevista a profundidad.	Instrumento oral que consistió de 2 preguntas abiertas. Aplicada a 2 estudiantes luego de la aplicación de la propuesta didáctica. Permitió recabar información sobre las impresiones y valoraciones sobre el impacto de los podcast para el aprendizaje de la geometría.

Resultados

Sobre la prueba diagnóstica**.** Para recoger información que identifique las dificultades asociadas a la comprensión de la geometría se aplicó una prueba diagnóstica.Esta prueba muestra fue elegida al azar y contenía 14 ítems de tipo textual y gráfico, algunas de ellas del nivel de identificación y otras más complejas donde los estudiantes debían analizar y sintetizar los datos.

Tabla 2. Descripción de las categorías utilizadas para identificar dificultades geométricas.

Categorías	Descripción	Respuestas esperadas
Estrategias utilizadas	Procesos o actividades, técnicas y recursos que realiza el estudiante para solucionar un problema. Al mismo tiempo, se identificarán los errores frecuentemente presentados.	Los estudiantes reconocen datos y nombres, discriminan la información dada de la cuestión por hallar. Hacen uso de diversos procedimientos aritméticos y/o geométricos. Sin embargo, es posible que presenten dificultades para relacionar la información presentada.
Lenguaje matemático	Uso adecuado de los signos y símbolos matemáticos. Reconocimiento y asociación de representaciones gráficas con sus correspondientes nominaciones geométricas. Además, se analizará el empleo de justificaciones de los procedimientos y soluciones encontradas.	Los estudiantes resuelven adecuadamente las operaciones aritméticas y geométricas. Se ubican en el espacio con naturalidad en situaciones simples. Sin embargo, no encuentran justificaciones pertinentes a los procedimientos aplicados, porque en su práctica esta no ha sido priorizada.
Operaciones realizadas	Aplicación de algoritmos para las operaciones aritméticas y algebraicas básicas. O de cálculo mental cuando el estudiante presenta las respuestas inmediatamente.	Operan sin mayor dificultad dentro del campo de la aritmética y la solución de ecuaciones. Pueden cometer algunos errores cuando no evidencian por escrito las operaciones y recurren al cálculo mental.

Sobre la entrevista aplicada a los docentes. El enfoque se orienta hacia la comprensión de las motivaciones, intereses, percepciones e inhibiciones que están presentes en las prácticas educativas en contextos escolares de los docentes de matemática. En esta misma línea, Kvale (1996) señala que el propósito de la entrevista de investigación cualitativa es obtener descripciones del mundo vivido por las personas entrevistadas, con el fin de lograr interpretaciones fidedignas del significado que tienen los fenómenos estudiados.

El proceso de presentación de los resultados se inicia con la formulación de categorías, las cuales están fundamentadas en las respuestas dadas por los docentes entrevistados. Se trata de un método comparativo que va contrastando los datos emergentes, tratando en el proceso de formular interpretaciones que incluyan conceptos teóricos con el propósito de describir la realidad. Haciendo referencia al procedimiento de análisis cualitativo Gallart (1993), señala que durante el proceso de ida y vuelta sobre los datos, el investigador debe buscar la saturación de los

discursos con respecto a los temas de interés, a fin de elaborar descripciones a partir de las interpretaciones sobre las respuestas planteadas

Tabla 3. Unidades de análisis, categorías y temas derivados de las entrevistas a docentes.

Unidades de análisis	Categorías	Temas	Teoría
Estrategias metodológicas para la enseñanza de temas geométricos.	Metodología y evaluación en la geometría a nivel escolar.	Estatus de la geometría a nivel escolar.	La enseñanza y el aprendizaje de la geometría escolar se presentan como excesivamente algorítmicas con ausencia de innovaciones tecnológicas.
Evaluación.			
Principales dificultades en el aprendizaje de la geometría.	Logros y dificultades en el aprendizaje de la geometría.		
Logros de aprendizaje.			
Aplicación de recursos educativos abiertos.	Impacto de la aplicación de recursos educativos abiertos.	Recursos educativos abiertos en ambientes escolares.	La aplicación de REA en contextos escolares genera ambientes de aprendizaje innovadores que favorecen el aprendizaje de la geometría.
Impacto de la aplicación de recursos educativos abiertos.			
Recomendaciones de uso.	Innovaciones en los ambientes de aprendizaje.	Innovación educativa con REA	
Cambios o innovaciones sugeridas			

Sobre la aplicación de la propuesta didáctica. La selección de los recursos educativos abiertos se hizo considerando los objetivos de aprendizaje de cada una de las sesiones programadas. A continuación se detallan los recursos seleccionados y los repositorios o fuentes para encontrarlos, considerando la clasificación de REA de Sánchez (2000):

- Como herramientas de apoyo al aprender, con las cuales se pueden realizar actividades que fomenten el desarrollo de destrezas cognitivas superiores en los alumnos. Podcast http://www.ivoox.com/dialogos-ciencia-06-triangulo-rectangulo-audios-mp3_rf_1585010_1.html?autoplay=1

- Como herramientas que potencia las metodologías activas como proyectos, trabajo colaborativo, mapas conceptuales e inteligencias múltiples, donde estudiantes y docentes interactúen. Proyecto: plantación de árboles ¿Cuál es la manera más efectiva de construir un triángulo rectángulo?http://gaussianos.com/cual-es-la-manera-mas-efectiva-de-construir-un-triangulo-equilatero-en-la-practica/

- Como extensoras y amplificadoras de la mente, a fin de que expandan las potencialidades del procesamiento cognitivo y la memoria, lo cual facilita la construcción de aprendizajes significativos. Podcasthttp://www.ivoox.com/dialogos-ciencia-05-el-triangulo-audios-mp3_rf_1568048_1.html?autoplay=1 (2:18_)
- Como medios transparentes o invisibles al usuario, que hagan visible el aprender e invisible la tecnología. Proyecto Gauss (Líneas notables):http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/geometria/poligonos/triangulo01_baricentro/actividad.html

Proyecto Gauss (Teorema de Pitágoras) http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/geometria/tales_y_pitagoras/pitagoras/actividad.html

Conclusiones

El principal aporte de la aplicación de los REA fue a nivel de motivación e involucramiento de los estudiantes en las actividades propuestas. La implementación de recursos educativos abiertos facilita la comprensión de temas vinculados al triángulo en estudiantes del segundo grado de secundaria. En el caso del estudio desarrollado, los podcast fueron utilizados como recursos de cierre, ya que la mayoría de ellos involucraban el conocimiento previo de nociones geométricas. Por otro lado, los ODA (objetos digitales de aprendizaje) del proyecto Gauss se emplearon según el caso como motivadores al inicio de las clases o como desarrolladores de proyectos. Además, los REA estimulan la interactividad y la construcción del conocimiento por parte de los estudiantes. El ambiente de aprendizaje del aula de clase se ve enriquecido con el uso de recursos que le dan significado a los contenidos geométricos y a sus aplicaciones.

Referencias bibliográficas

Gallart, M., Forni, F., Vasilachis de Gialdino, I. (1993). *Métodos cualitativos II: La práctica de la investigación*. Buenos Aires, Argentina: Centro Editor de América Latina.

Guillen, G. (2004). El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos: describir, clasificar, definir y demostrar como componentes de la actividad matemática. *Educación matemática. Santillana, 16*(3). 103-125.

Jasso, F. J. (2009). *Manual de los tres pasos* [tutorial]. Disponible en la Escuela deGraduados en Educación de la Universidad Virtual del Tecnológico de Monterrey. Recuperado de http://www.ruv.itesm.mx/portal/promocion/qs/biblioteca/manual/homedoc.htm

Kvale, S. (1996). *Interviews: An introduction to qualitative research interviewing*. USA: ThousandOaks.

CA, Sage.

López, J. (2007). Recursos Educativos abiertos (REA). *Eduteka*. Recuperado de http://www.eduteka.org/OER.php.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards in School Mathematics*. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

Sánchez, J. (2000). *Nuevas tecnologías de la información y comunicación para la construcción del aprender*. Santiago de Chile, Chile: LMA Servicios Gráficos.

Santos, M. y Barrera, F. (2011). High School Teachers' Problem Solving Activities to Review and Extend Their Mathematical and Didactical Knowledge. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies (PRIMUS),* 21 (8), 699-718.

Taylor, S. y Bogdan, R. (1990). *Introducción a losmétodos cualitativos de investigación*. BuenosAires, Argentina: Paidós.

Van Hiele, P.(1984). A child's thought and geometry. In D. Fuys, D. Geddes, & R. Tischler (Eds.), *English translation of selected writingsof Dina Van Hiele-Geldof andP.M. Van Hiele*(pp. 242-252). Brooklyn: Brooklyn College.

Wertheimer, M. (1991). *El pensamiento Productivo*. Barcelona: Paidós.

ETNOMATEMÁTICA: EJE CENTRAL DE LA RECUPERACIÓN DE SABERES MATEMÁTICOS. EXPERIENCIA DE AMÉRICA LATINA Y RETOS PARA COSTA RICA

Ana Patricia Vásquez Hernández
Universidad Nacional Costa Rica
patrimate76@gmail.com

Resumen. El presente artículo recopila la experiencia de expertos en la etnomatemática, de un grupo de discusión en RELME 27. Sus cuestionamientos se fundamentan, en la etnomatemática y el impacto de esta en el currículo escolar. Se toma en cuenta las características sociales del sistema educativo latinoamericano, los objetivos de desarrollo del milenio y el impacto de ambos, sobre la educación matemática de los pueblos originarios. Se plantean retos futuros y una visión sobre la recuperación de los saberes matemáticos. Metodológicamente se sustenta como una investigación de enfoque cualitativo, con diseño de teoría fundamental, donde sus datos se analizan por codificación abierta axial
Palabras clave: Etnomatemática-Cultura-Saberes Matemáticos-Pueblos Indígenas
Abstract. This article gathers the experience of experts in ethnomathematics, a discussion group RELME 27. His questions were based on ethnomathematics and the impact of this in the school curriculum. It takes into account the social aspects of Latin American educational system, the Millennium Development Goals and the impact of both on the mathematical education of native peoples. Future challenges and a vision for the recovery of knowledge arise. Methodologically is advocated as a qualitative research approach, design of fundamental theory, where the data were analyzed by axial open coding
Key words: Ethnomathematics- Culture- Mathematical knowledge -Indigenous

Introducción

Información general

Como asistentes al grupo de discusión se registraron veintisiete participantes de nueve países diferentes, los cuales se mencionan a continuación.

#	NOMBRE Y APELLIDO	PAIS	CONDI-CION	INSTITUCION DE PROCEDENCIA	CORREO ELECTRONICO
1	Albanese Verónica	España	Doctoranda	Universidad de Granada	very_alba@hotmail.com
2	Asteasuain Claudia	Argentina	Profesor	IFDN°5 Plotties Neupen	casteasuain@gmai.com
3	Berrios José	Venezuela	Docente	Universidad Pedagógico Experimental Libertador	joseferminp@gmail.com
4	Bonfanti Melina	Argentina	Estudiante	Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V González"	melinabonfanti@gmail.com liz4_mb@hotmail.com

5	Cardoza Ricardo Raúl	Argentina	Profesor	Colegio Secundario H30 Casira	ricardo.cardozo22@gmail.com
6	Castro Tapia Elena Raquel	México	Profesor-Directora Escolar	Centro Escolar Frida Kahlo	miss_xolotl@yahoo.es
7	García Lubrano Angelina	Argentina	Profesor	Escuela N°P002 Normal TGC	garcialubranoangelina@hotmail.com
8	Gavarrete Villaverde María Elena	España/ Costa Rica	Académica/ Investigadora	Universidad de Granada-Universidad Nacional	marielgvarrete@gmail.com
9	Gómez Sandra Elisa	Argentina	Lic., Ed. Básicos	Equipo Técnico Prov. Santa Cruz	sandra_gomez.691@hotmail.com
10	Grandal Natalia	Argentina	Estudiante	ISP.Dr J.V González	nataliagrandal@gmail.com
11	Huapaya Gómez Enrique	Perú	Profesor	SCIPON LLONA	ehuapaya@pucp.edu.pe
12	Jafelle Lucia	Argentina	Maestra-Estudiante	INSPT (UTN)	lujaf@hotmail.com
13	Marcellan Laura	Argentina	Estudiante	INSPT (UTN)	lauramarcellan@gmail.com
14	Martínez Angélica María	Venezuela	Profesor	Pedagógico de Maracay	angelicmar5@gmail.com
15	Martínez Padrá Osvaldo Jesús	Venezuela	Profesor	Universidad Pedagógico Experimental Libertador	ommadail@gmail.com
16	Mora Peralta Blanca	Colombia	Profesora-Coordinadora	Secretaria de Educación de Bogotá	bmpguacheta@gmail.com
17	Moreno Darwin	Guatemala	Estudiante-Maestro	APDE Centro Escolar el Roble	darwinmoreno56@gmail.com
18	Muñoz Vargas Carlos Arturo	Colombia	Profesor	Institución Universitario Antonio José Camacho	mecaito7@hotmail.com
19	Parras Fuente Teresa	México	Estudiante	CINVESTAV	parra.tere@gamil.com
20	Peña Ricón Pilar	Chile/ México	Doctoranda	CICATA-IPN	pilaralejandrapena@yahoo.es
2	Pérez López Rosario	México	Estudiante	CINVESTAV	rperezl@cinvestav.co

1					m
22	Piñeiro Noelia Marina	Argentina	Estudiante	ISP.Dr J.V Gonzalez	noelia_marina_p@hotmail.com
23	Ramos Alba Flora Sord	Perú	Periodista	SCIPON LLONA	fharamos@hotmail.com
24	Ramos Alva María Gabriela	Perú	Docente	Institución Educativa " SCIPON LLONA"	gabriela_ramos8@hotmail.com
25	Rodríguez Claudia	Argentina	Profesor	IFDN°5 Plotties Neupen	clauro10@yahoo.es
26	Stern Agustina	Argentina	Estudiante	ISP.Dr J.V González	agustinastern@gmail.com
27	Vásquez Hernández Ana Patricia	Costa Rica	Académica/ Investigadora	Universidad Nacional	patrimate76@gmail.com

Objetivos

El objetivo general del presente grupo de discusión corresponde a:

Crear un espacio de reflexión acerca de la etnomatemática, su vinculación con la educación matemática de los pueblos indígenas, el currículo escolar y la recuperación de saberes matemáticos, a través de la experiencia de colegas latinoamericanos para la identificación de nuevos retos que promuevan el reconocimiento de la diversidad cultural y la construcción de una educación matemática pertinente para estos territorios.

Los objetivos específicos corresponden a:

- Identificar los procesos socio-educativos instaurados en América Latina a partir de los Estados Nación y su implicación en la educación indígena escolarizada.
- Mostrar el estado de situación de la educación de los pueblos indígenas en América Latina, según MIDEPLAN, Banco Mundial, UNICEF, UNESCO y PRELAC.
- Reconocer la importancia y los retos de la etnomatemática como medio para la restauración de la dignidad cultural en América Latina.

Metodología

Metodológicamente el presente reporte se sustenta como una investigación con enfoque cualitativo, ya que se caracteriza por explorar fenómeno en profundidad, cuyos significados se extraen de los datos proporcionados. (Hernández, Fernández y Baptista, 2013, p. 7). Esta metodología analiza múltiples realidades subjetivas y brinda la posibilidad, de profundizar desde

diferentes ópticas, la temática de la etnomatemática para mostrar sobre ella, una riqueza interpretativa de contextualización del fenómeno.

Su diseño metodológico básico se denomina *teoría fundamentada o sustantiva*, tal como lo propone Creswell (2009), ya que proporciona ideas generales con los datos obtenidos, para aclarar el fenómeno en estudio. Provee un sentido de comprensión más amplio que permite aclarar nuevas formas de entender procesos sociales. (Hernández et al., 2010, p. 493).

El diseño sistemático para el análisis de los datos está basado en el procedimiento expuesto por Corbin y Strauss (2007) por *codificación abierta axial*, donde la coordinadora del grupo de discusión realizó una revisión de la recopilación de los datos y materiales, para analizar y generar por *comparación constante* la selección de categorías de mayor trascendencia para la temática de análisis. (Hernández et al., 2010, p. 494).

El trabajo se sustentó en un grupo de discusión, donde se dispuso de tres horas reloj, distribuidas en dos sesiones de una hora y media cada una, en las cuales la expositora disertó a cerca de la tema a debatir. Los y las asistentes expusieron sus puntos de vista mediante la técnica de los seis sombreros de colores que plantea el psicólogo Maltés Edward De Bono de la Universidad de Oxford para grupos de discusión, que representa las seis direcciones del pensamiento humano (azul: visión global, blanco: perspectiva objetiva, rojo: intuición, negro: voz del juicio, amarillo: lógica propositiva, verde: creatividad). (Castro, 2013, párr. 5).

Antecedentes para la discusión

Los antecedentes que se exponen a continuación, son parte de una revisión bibliográfica y cibernética sobre cada temática, los cuales fueron expuestos como fundamento para la discusión grupal.

Sobre las características sociales del sistema educativo

Roitman (2002) considera que históricamente los estados nación latinoamericanos, establecieron una hegemonía cultural racista y clasista que contiene en su interior el etnocentrismo y la superioridad racial del "blanco", donde se impuso una cultura homogénea (mono-lingüísta, mono-cultural y unirreligiosa) con políticas educativas aculturadoras, discriminantes y excluyentes. (p.7).

Por su parte Montecinos (2009) alude que la educación en el contexto social, está al servicio de la clase dominante, y que evalúa al ser humano por el número y rango de los títulos. Los títulos superiores, convierten a las personas en sabios, aunque sean en realidad unos "ignorantes". Niega, descalifica e invisibiliza la cultura local, ya que da lenguaje, pensamiento, y apreciación de una determinada visión de la realidad. (p. 9).

Sobre los pueblos indígenas latinoamericano

Según el Banco Mundial (2004), los pueblos indígenas latinoamericanos, cuentan con los peores indicadores económicos y sociales, hay poca reducción de la pobreza, continúan con menos años de educación y muchos problemas en la calidad de la misma. (Banco Mundial, 2004, párr. 18).

También afirma UNICEF América Latina (sf), que existen más de un treinta por ciento de la población conformada por los pueblos indígenas que está excluida del sistema educativo. (UNICEF, (sf), párr. 3).

Sobre la etnomatemática

La etnomatemática es la matemática practicada por grupos culturales, entre ellos las sociedades indígenas. Implica un carácter antropológico impregnado de ética y centrado en la recuperación de la dignidad cultural del ser humano. (D`Ambrosio, 2013, p. 13).

El proceso de conquista y colonización (siglo XV), llevo a América a ser el resultado de conocimientos de la cuenca del mediterráneo. Excluyó los pueblos conquistados, su historia y sus maneras de conocimiento. Es así como la dimensión educativa que propone D`Ambrosio, plantea que se mejore la educación incorporando los valores de la humanidad en general por ética, respeto, solidaridad y cooperación. (D´Ambrosio, 2013, p. 54).

Sobre los Objetivos de Desarrollo del Milenio

Según el Ministerio de Planificación Nacional y Política Económica (MIDEPLAN), uno de los ocho Objetivo de Desarrollo del Milenio es lograr la enseñanza primaria universal. (MIDEPLAN, 2010, p. 45). Para este fin América Latina consolidó el Proyecto Regional de Educación América Latina y el Caribe (PRELAC), que fue aprobado por todos los Ministros de Educación de América Latina en el año 2002. Su objetivo fue realizar cambios sustantivos en las políticas y prácticas educativas, para asegurar aprendizajes de calidad donde nadie quede excluido, en atención a los derechos y la equidad. (PRELAC, 2013, párr. 2).

Resultados del grupo de discusión

Los resultados que se exponen a continuación, corresponden al análisis de la información brindada por los y las asistentes al grupo de discusión. Para este efecto se realizaron categorías en base a la mayor recurrencia de ideas.

La etnomatemática como una herramienta en la educación matemática

La etnomatemática dentro de la educación matemática escolarizada, debe aportar a la comprensión de la necesidad y complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje, dando énfasis principalmente a las metodologías de enseñanza ancestrales de los pueblos originarios hispanos. Debe brindar la posibilidad, que los educandos conozcan su historia.

Es fundamental que la etnomatemática coadyuve en la articulación con varias asignaturas, a partir del uso de herramientas para la enseñanza de algunos conceptos matemáticos, como la Yupana de Perú y el Nepohualtzitzin de México.

Es primordial el papel del educador de matemática, como agente transformador hacia la inclusión de conocimientos y metodologías locales. Para esto, debe inminentemente interrelacione con la comunidad donde labora, para conocer a fondo la cultura y vislumbrar el funcionamiento que ejerce la matemática como eje transversal en ella.

El currículo escolar de matemática

Para que la etnomatemática pueda desarrollarse dentro de ámbito escolar, es necesaria la existencia de espacios flexibles que posibilite a los educandos, el compartir su visión de matemática y sus metodologías autóctonas de abordaje. Debe permitirse la integración y uso de materiales y recursos didácticos autóctonos, para enriquecer la labor de aula y dar valor a lo propio.

Este currículo debe permitir la reflexión sobre la vida cotidiana, sobre la historia de las personas que están en el ámbito escolar, para que haya una construcción (concreta) de identidad, que tome elementos históricos, culturales y "científicos" que deben ser pensados, conversados y discutidos en el contexto inmediato.

La tendencia del grupo de discusión ha identificado la necesidad que los conocimientos matemáticos locales sean integrados al currículo nacional como lo ha hecho Guatemala, para que muchos de estos pueblos originarios salgan del anonimato.

Recuperación de saberes matemáticos ancestrales

Hay claridad en base a la experiencia del grupo, que en la mayoría de comunidades indígenas, se preservan hoy día conocimientos matemáticos ancestrales y una mayoría de estos pueblos, lo han realizado por medio de la tradición oral.

Si los pueblos originarios aún preservan los conocimientos matemáticos ancestrales, entonces una discusión muy enfática del grupo, surgió en torno a la interrogante: *¿recuperar saberes matemáticos para quién*?

Dos respuestas a la anterior interrogante se plantearon. La primera indica, que los foráneos de la cultura evidentemente están fuera del contexto, y por ende el conocimiento matemático autóctono puede pasar desapercibido e incluso considerarse desaparecido. Y segundo, los cambios eminentes de la globalización, han impactado directamente las nuevas generaciones, las cuales han amenazado fuertemente los pueblos originarios, con una rápida pérdida de la lengua materna y por ende de algunos conocimientos específicos.

Pero quizás a su vez, esta sea una muestra del cambio en el pensamiento de algunos investigadores, por preservar con sumo cuidado los conocimientos matemáticos con identidad local.

Otra cuestionante del grupo fue: *¿quién es el responsable de recuperar los conocimientos matemáticos ancestrales*?. La recuperación de saberes está en manos de la comunidad en general, no solamente es responsabilidad de un actor, es de todos y todas preservar y rescatar; sin embargo en la creatividad y capacidad de innovación del docente indígena, se vislumbra una mayor responsabilidad, ya que este es conocedor de la lengua materna y trasciende las limitantes de la identidad local con que deben lidiar el docente foráneos. Es así, como el docente indígena puede mediar el conocimiento local con el currículo escolar y adecuarlo a su praxis en el aula, ajustándolo al nivel educativo necesario.

Retos de la etnomatemática

Aunque pareciera que la etnomatemática está tomando presencia en los países latinoamericanos, todavía se hace necesaria su divulgación ya que existe un número considerable de docentes que desconocen la existencia de esta nueva tendencia.

El aumento del acervo bibliográfico sobre esta temática es otro reto identificado. Se sugiere la necesidad de material bibliográfico sobre metodología, enfoques, implementación en el aula, el trabajo multidisciplinario, entre otros. Esto se considera una necesidad que debe ser cubierta en el mediano plazo.

Un reto trascendental, es la creación de una red de trabajo con los pueblos indígenas, una relación frecuente y estratégica que permita el trabajo colaborativo que implique una relación mancomunada que se denomine "ganar-ganar", es decir, que se brinde la posibilidad de la investigación pero que a su vez, el pueblo reciba mejoras en su educación matemática.

Un reto cuantioso, se considera el hecho de poder mostrar ante el resto del mundo, una comunidad de educadores de matemática latinoamericanos con una postura fortalecida de la etnomatemática, donde se establezca un eje común de trabajo, un paradigma y una visión que

impulse el crecer en comunidad. El trabajo que ha venido desarrollando la Red Latinoamericana de Etnomatemática, ha sido fundamental en estos últimos diez años para reconocer el compromiso país y construir redes de trabajo conjuntas.

Conclusiones y reflexiones

Para concluir, la recuperación responsable de saberes matemáticos ancestrales, implica la participación de los miembro de la cultura, fundamentalmente está en mano de los docentes de matemática miembros de la cultura, por los cuidados que merece el conocimientos de la lengua materna y la integralidad del conocimiento en general.

Por lo anterior, es claro que el conocimiento matemático puede estar intrínseco en la elaboración y diseño de vestuarios y objetos, en los distintos rituales, en el cultivo y la cosecha e incluso hasta en la preparación de alimentos, por ejemplo.

Todo trabajo etnomatemático en pueblos indígenas, debe ser consultado y validado por la misma comunidad. En un actuar de responsabilidad ético-moral, se debe también beneficiar la educación matemática en estos territorios con los resultados del trabajo, de manera que se establezca una relación de intercambio.

La experiencia de la etnomatemática en América Latina, demuestra la necesidad de desarrollar un trabajo artículado, como lo ha generado la Red Latinoamericana de Etnomatemática, con mayor impacto social. Debe permear todos los sectores vinculantes, de manera que la etnomatemática sea un conocimiento general que pueda impactar en el centro educativo y en la comunidad.

Para Costa Rica un reto cuantioso, es la creación de una red de trabajo con los pueblos indígenas, un engranaje colaborativo que impulse la creación de proyectos y programas, no solo de rescate de saberes matemáticos, sino que a través de ellos se concluya en mejoras para su educación matemática.

Otro reto fundamental para este país centroamericano, es determinar el método para generar un aumento en el número de estudios etnomatemáticos, ya que en la actualidad se reporta un escaso número de ellos; y por ende se hace necesario un empoderamiento nacional de esta línea de investigación.

Es fundamental el papel del educador en todo el proceso educativo, debe ser gestor de espacios donde los seres humanos tengan la oportunidad de identificarse, construirse y reconstruirse a partir una interacción grupal. Debe impulsarse el respeto por los conocimientos matemáticos que cada uno brinde para la construcción de esta identidad.

Finalmente, no queda más que cuestionarse algunas interrogantes para los investigadores: *¿cuál es el interés de que el conocimiento matemático de los pueblos originarios siga existiendo?*, y *¿por qué esos conocimientos matemáticos siguen presentes hoy día, a pesar de las luchas sociales históricas por su erradicación?*

Referencias bibliográficas

Banco Mundial. (2004). *Pueblos indígenas, pobreza y desarrollo humano en América Latina.* Recuperado de: http:web.worldbank.org/WBSITE/EXTERNAL/BANCOMUNDIAL/EXTSPPAISES/LACINSPANISHEXTO/0.contentMDK:20505832-menuPK:508626-pagePK:146736-piPK:226340-theSitePK:489669,00.html.

Castro, J. (2013). *Edward de Bono 6 sombreros para pensar*. Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=wIGeQou2Ghk.

Corbin, J. Strauss, A. (2007). *Basics of Qualitative Research:Techniques and Procedures for Developing Grounded Theory*. Londres: SAGE Publications.

Creswell, J. (2009). Research Design: qualitative, quantitative, and mixed methods approaches. (3.ª ed.). Londres: Sage.

D´Ambrosio, U. (2013). Etnomatemáticas. Entre las tradiciones y la modernidad. México:Autentica Belo Horizonte, Universidad Autónoma de Guerrero y Ediciones Díaz de Santos.

Hernández, R. Fernández, C. Baptista, M. (2010). *Metodología de la Investigación.* Perú: Mc Graw Hill.

MIDEPLAN. (2010). Objetivos de Desarrollo del Milenio. Costa Rica: MIDEPLAN, SNU.

Montecinos, H. (2009). *La sociología de la cultura y la educación de Carlos Marx: su aplicación al sistema escolar*. Recuperado de: http:/hernanmontecinos.com/2009/04/29/la-sociologia-de-la-cultura-y-la-educacion-de-carlos-marx-su-aplicación-al-sistema-escolar/)

PRELAC (2013). Recuperado de: http://portal.unesco.org/geography/es/ev.php-URL_ID=7705&URL_DO=DO_TOPIC&URL_SECTION=201.html.

Roitman, M. (2002). *Formas de estado y democracia multiétnica en América Latina*. Buenos Aires: CLACSO.

UNICEF. (sf). Recuperado de: http://www.unicef.org/lac/media_18149.htm.

UN ESTUDIO DE LA CONSTRUCCIÓN SOCIAL DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO EN EL COTIDIANO

David Zaldívar Rojas y Francisco Cordero Osorio
Cinvestav-IPN. México
jzaldivar@cinvestav.mx, fcordero@cinvestav.mx

Resumen. Diversas investigaciones se interesan por la inserción de los "conocimientos previos" de los estudiantes en el proceso de aprendizaje de las matemáticas, considerándolos como bases iniciales de significados que deben ser sustituidos por medio de la instrucción "formal". A diferencia de lo anterior, el propósito de la investigación es legitimar los saberes que se encuentran en el cotidiano. Para ello, se conforma, desde la socioepistemología, la categoría del Cotidiano del Ciudadano que resalta una función social particular del conocimiento matemático. Para la conformación de la evidencia empírica, se da cuenta de los usos de las gráficas en talleres de divulgación científica, evidenciando cómo el cotidiano brinda elementos funcionales que podrían conformar parte de un rediseño del discurso Matemático Escolar
Palabras clave: Usos de las gráficas, cotidiano, estabilidad, mantenimiento de rutina
Abstract. Various research are concerned with the inclusion of the students' "background" into the learning process of mathematics. This background is considered as an initial basis, which allows reaching generalized concepts. In contrast, our research proposes to legitimize the everyday knowledge from a Socioepistemology standpoint. In order to do so, we intent to conform a "Quotidian of the Citizen" category which highlights the scenario's role and the function of knowledge in the former. The Quotidian category is embodied in structures and arguments framed in a Routine Maintenance. We explain some uses of the graphs related to vulgarization's workshops as part of our evidence, and to make evident some functional elements which may be part of a redesign of the scholar mathematics discourse
Key words: Use of graphs, everyday knowledge, stability, maintenance of routines

Introducción y planteamiento de la problemática

Son diversas las investigaciones en Matemática Educativa que se han interesado por la inserción de los "conocimientos previos" de los estudiantes en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. Principalmente, son investigaciones que intentan dar cuenta de otros referentes que generalmente son "menospreciados" durante la instrucción escolar y que pudieran englobarse como estudios sobre el *sentido común*, sobre los *conocimientos previos*, sobre las *matemáticas cotidianas, prácticas cotidianas* o sobre las *Teorías Implícitas* de los estudiantes (Ver por ejemplo: Civil, 2002; Rodrigo, 1997).

Sin embargo, el énfasis principal se encuentra en el desarrollo de contenidos y en la instrucción; donde lo *previo,* lo *cotidiano,* lo *implícito* o lo *común* se presenta muchas veces como una fuente de significados que se recogieron supuestamente de la experiencia de los estudiantes, pero "erróneos" o "alejados" de lo que se acepta como conocimiento dentro de lo escolar, por lo que tienen una función subsidiaria y deben ser reemplazados por un conocimiento "formal".

Por otro lado, en diversas investigaciones se reconoce la manera en la cual el Conocimiento Matemático (CM) adquiere ciertas texturas en el entramado social de diversas prácticas en diferentes escenarios sociales, lo cual reviste una función íntimamente relacionada al escenario y al

funcionamiento del conocimiento en el mismo (Ver por ejemplo: Lave, 1988; Carraher, Carraher, & Schliemann, 1991; Tuyub & Cantoral, 2012). Este tipo de investigaciones se insertan en escenarios no académicos, es decir, en escenarios que no se enfocan en el aprendizaje de la matemática o su enseñanza. Reafirman el importante rol del contexto en la generación de significados de los conceptos matemáticos, y cómo los escenarios moldean a dichos significados. En efecto, estas investigaciones conforman una crítica a la tradición dentro de la disciplina de considerar al aula de matemáticas como el "único" referente de construcción de conocimiento. Dejan ver escenarios donde se aprecia la funcionalidad del conocimiento en los usos que se hacen del mismo ante situaciones específicas amalgamadas en problemáticas propias del escenario.

Es importante hacer notar que nuestros planteamientos versan más en la dirección de cuestionar la propia naturaleza de los saberes que se ponen en juego en escenarios no considerados como matemáticos y la manera en la cual se resignifica en las argumentaciones elaboradas por los ciudadanos ante una situación específica.

A partir de lo anterior es que afirmamos que el CM tiene diferentes *funciones sociales*. Reconocer *la función social* del CM significa entender cómo se constituye (o qué constituye) dicho conocimiento en un escenario específico, lo cual implica entender lo propio del conocimiento en un escenario, lo situado y lo vivencial; es decir, el *cotidiano del ciudadano* referido al conocimiento matemático.

La categoría del cotidiano a la cual nos referimos expresa conocimiento. Implica aquel conocimiento que transcurre en un *Mantenimiento de Rutina* (MdR) (Berger & Luckmann, 2006), es decir, cuando se mantienen estructuras de conocimiento concretas, funcionales; amalgama una *realidad* sobre el conocimiento, significaciones, un lenguaje de herramientas y procedimientos. Pero también implica una forma de relacionarnos con el mundo para transformarlo y transformarnos. Dichas estructuras fueron conformadas histórica y socialmente por procesos institucionales.

Nuestra revisión y en conjunción con la reflexión anterior nos permite llamar la atención a un fenómeno producido por el discurso Matemático Escolar (dME) que hemos denominado *Fenómeno de Opacidad* (Cordero, 2013). Dicho fenómeno resalta el nulo reconocimiento por parte del dME de otras *expresiones del saber y epistemologías* que quizás se conformaron en otros escenarios sociales diferentes al escolar, donde proponemos a la categoría del Cotidiano del Ciudadano como una epistemología particular. De esta forma, los saberes matemáticos del cotidiano se encuentran subordinados a un discurso que impone ciertas argumentaciones de los objetos matemáticos y ancla el pensamiento matemático al aprendizaje de una serie de axiomas, demostraciones, conceptos y algoritmos generalizables; es decir, se restringe a desarrollar un conocimiento

matemático *petrificado*, aislado de sus implicaciones y funciones sociales, donde todo parece *terminado* y se niega un relativismo epistemológico.

De esta manera es que consideramos como problemática de investigación la *nula consideración de la función social del cotidiano del ciudadano dentro de la conformación del actual discurso Matemático Escolar* y *la opacidad que este provoca ante otras expresiones del saber conformados en escenarios diferentes al escolar*. Nuestro objetivo principal entonces es caracterizar *la función del cotidiano del ciudadano en la conformación del dME*. Lo anterior implica en efecto, *legitimar* los saberes que conforman las argumentaciones que el cotidiano del ciudadano elabora ante situaciones específicas, lo cual podría ser la base de un posible rediseño del dME.

Para ello, nuestra metodología experimental se basa en la puesta en escena de *talleres temáticos* en escenarios de Divulgación de las Ciencias. En dichos talleres el ciudadano es puesto en una situación de modelación-graficación del movimiento (Suárez & Cordero, 2010) y se analizan los usos de las gráficas que se emplean al momento de discurrir sobre la noción de *estabilidad* de una ecuación diferencial a partir del movimiento de una pesa unida a un resorte.

En los siguientes apartados esbozaremos las herramientas metodológicas para la construcción de la evidencia empírica y una arquitectura de análisis a partir de la delimitación de un modelo teórico de resignificación, que da cuenta del mantenimiento de rutina que caracterízará al cotidiano. Posteriormente, describiremos un ejemplo concreto de análisis.

El cotidiano desde una visión de prácticas

El reconocimiento y caracterización del cotidiano se hace bajo la mirada Socioepistemológica. Esta modela una construcción social del conocimiento matemático en escenarios socioculturales, donde la Práctica Social se considera normativa de la actividad y generadora de conocimiento matemático (Cantoral & Farfán, 2003; Cordero, 2008; Cordero, Cen & Suárez, 2010). Sin embargo, precisamos de conjuntar teóricamente aspectos socioepistemológicos con constructos que, desde nuestra problemática, caracterizan al cotidiano.

En Berger & Luckmann (2006) se puede hallar una reflexión profunda sobre la construcción social de la realidad. Estos autores describen que las personas poseen dos maneras de conservar su realidad de la vida cotidiana. Es decir, los seres humanos contamos con *formas culturales de relacionarnos* e *integrarnos a mundos institucionales,* y lo hacemos por procesos de Mantenimiento de Rutina (MdR) y Mantenimiento de Crisis (MdC). El primer proceso implica que las personas mantienen su realidad internalizada de rutina, inclusive lo que conoce. Sin embargo, también estamos a la merced de situaciones ajenas a nuestra realidad, ahí es cuando aparece el mantenimiento en situaciones de crisis o rupturas de la realidad internalizada. Un ejemplo sería el

ingreso a "otros mundos institucionales" que intentan romper con la continuidad de la realidad. Justamente en estas relaciones epistemológicas es en la cual anclamos nuestra noción de cotidiano.

Nuestra hipótesis es que el cotidiano del ciudadano se expresa en el MdR, es decir en ciertas estructuras que organizan al conocimiento ante una situación específica. Desde nuestra perspectiva, implica la aparición de ciertos *sistemas de usos y de un lenguaje de herramientas* para mantener y salvaguardar cierta simetría entre el mundo institucional y la subjetividad de las personas (Berger & Luckmann, 2006).

En el MdR prevalecerán los usos del conocimiento, el sentido común, ciertos utensilios o herramientas, un lenguaje específico, el motivo pragmático, lo concreto, lo "económico", lo vivencial y lo situacional. Tendrá una dimensión y carácter histórico y cultural propio puesto que se determinan categorías que se conservan y se despliegan por un tiempo y que son proclives a desarrollarse. El sujeto acá no está aislado, este mantenimiento de rutina expresa su subjetividad, es un ser en tanto los demás, un sujeto histórico.

En nuestro caso particular, los usos serán considerados como formas en las cuales el saber es puesto en funcionamiento en una situación y escenario específicos y que se manifestarán en relación con ciertas clases de tareas. Específicamente, en nuestra investigación, nos referiremos al *uso de las gráficas*. Dicho uso de las gráficas será analizado a partir de los elementos de *funcionamiento* y *forma* (Cordero, et al., 2010). Los elementos de *funcionamiento* se refieren a las circunstancias que hacen posible la modelación de fenómenos de

variación a través de las gráficas, mientras que los elementos de *forma* son las clases de dichas circunstancias (Suárez & Cordero, 2010; Cordero, 2008).

El modelo de resignificación propuesto exhibe un desarrollo del uso de las gráficas a partir de la determinación de nuevos funcionamientos y formas en una situación específica.

Con los elementos del cotidiano, el modelo que proponemos integra estos elementos a una estructura de construcción social (Ver Figura 1).

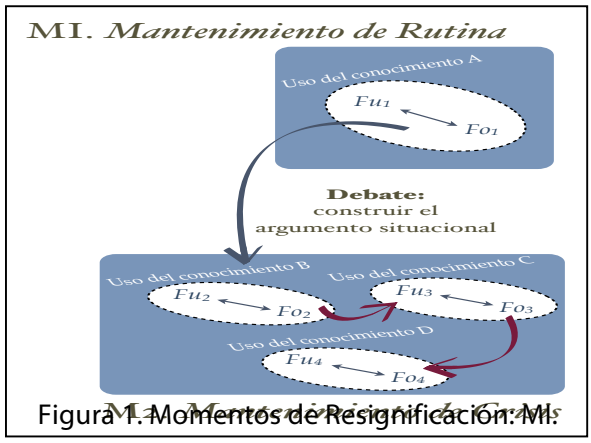


Figura 1. Momentos de Resignificación. M1. Momento de MdR, M2. Momento de MdC.

Conformación de la evidencia empírica

Nos interesamos por desarrollar una forma específica de Divulgación Científica: *Talleres Temáticos*. Por lo tanto desarrollamos una investigación cualitativa basada en un estudio intensivo de casos. Este tipo de escenario pretende poner en uso ciertas nociones matemáticas de una manera no tradicional, además de propiciar la participación y colaboración entre el divulgador y el ciudadano. Siendo una de las funciones *éticas* del taller poner al servicio del cotidiano el conocimiento científico (Zaldívar & Cordero, 2012).

El taller pone en escena una *situación de divulgación,* en la cual se pone en funcionamiento una Situación Específica de Transformación (Cordero, 2008). Esta situación plantea que la *función* es una instrucción que organiza comportamientos y a partir de la variación de los parámetros de la misma es posible anticipar los efectos en los comportamientos de las gráficas generadas. De esta manera se plantea el análisis y desarrollo de un argumento que se ha denominado el Comportamiento Tendencial de las Funciones (CTF).

Dado nuestro escenario era imposible el trabajo con la variación de los parámetros de una función particular. Sin embargo, la categoría de Modelación-Graficación (Suárez & Cordero, 2010) justifica el hecho de proponer un diseño basado únicamente en gráficas a partir de la modelación de movimiento basada en un fenómeno físico tangible. Así, se proponen actividades donde se discuten ideas de variación, cambio y comportamientos con tendencia a partir de un uso de gráficas y ciertos componentes tecnológicos como calculadoras graficadoras y sensores de movimiento. Lo anterior por medio de la modelación de un fenómeno físico como el del movimiento de un cuerpo unido a un resorte. De esta forma, *el argumento de la categoría que se pone en juego es intrínseco a la curva o trayectoria normada por el movimiento*.

Justo el diseño de la Situación de Divulgación se utiliza como el instrumento metodológico que nos permitirá dar cuenta de las argumentaciones que sobre la estabilidad se presenten; pero además, describirá los momentos epistemológicos marcados en el modelo de la figura 1 en una situación específica. De esta manera, el cotidiano conforma nuestra unidad de análisis en un estudio instrumental de casos.

Hipotéticamente, dar cuenta del MdR implica analizar y provocar momentos de "crisis", es decir, poner en *debate al funcionamiento y a la forma* del uso de las gráficas en la modelación de la estabilidad. La hipótesis epistemológica consiste en que es a través de proponer una discusión sobre el argumento situacional de la categoría del conocimiento matemático que se propone en la situación específica, es que evidenciaremos una resignificación.

Una resignificación de la estabilidad

Los extractos y el análisis que a continuación se describen se refieren a una experiencia específica dentro del programa del Primer Festival de Divulgación de las Matemáticas realizada en la ciudad de Zacatecas, México en diciembre del 2011. Eran alrededor de 9 participantes; hombres y mujeres de entre 16 y 18 años de edad. El taller involucró el trabajo con dos actividades, una relacionada con el movimiento de una persona que camina de un punto a otro y regresa, y la situación del resorte.

El objetivo de esta sección es evidenciar que el modelo teórico compone una herramienta de análisis del cotidiano y de la resignificación del uso de las gráficas. Además, el interés radica en hacer explícito cómo el conocimiento en el uso y en escenarios no-académicos bajo ciertas situaciones específicas de construcción, se hace presente en formas culturales concretas, basadas en estructuras que estructuran (u organizan) de alguna manera el "actuar", el "hacer" y las formas de "responder", pero también los roles.

La primera pregunta que se lanza es de la siguiente manera por parte del divulgador (D):

> D: *ahora la pregunta es…* […] *tenemos el resorte acá… y le voy a poner una pesa de 50 gramos, ¿cómo sería el movimiento del resorte ahora?...*
>
> Participante: *de abajo hacia arriba* [realiza el gesto con las manos]
>
> Participante: [varios participantes varones hablan al mismo tiempo]… *no, no, no…*

Importante en el análisis sobre el uso de la gráfica es sobre lo "no-dicho". Para ello, presentamos la "respuesta" de una de las participantes, que aunque no menciona palabras, los gestos que realiza es una forma cultural y una estructura procedimental de saber concreto que pone en discusión y que le permite generar una respuesta ante una situación de transformación que se resume en "Dibuja el movimiento" (Ver Figura 2).

Figura 2. Orientar el movimiento

Hasta este momento, la estabilidad, entendida como la propiedad que relaciona la estructura de una ecuación diferencial (por ejemplo $y' + y = F(x)$) con su solución en términos de que dicha solución tenderá a la función *F(x)* para valores grandes de *x* ($y \to F(x)$ cuando $x \to \infty$), aparece en el gesto de la joven, pero implícitamente y anclada a un uso de la gráfica. En este sentido es que nos referiremos a *lo estable.*

En este primer momento, el *funcionamiento* de la gráfica es para *indicar dirección y sentido del movimiento del resorte*; mientras que la *forma* fue *construir un patrón de comportamiento del fenómeno,* basado principalmente en la aparición de un gesto y cierto lenguaje específico. De esta manera, la

gráfica se usa para *orientar el movimiento,* y la estabilidad aparece en forma de justificaciones funcionales. En este caso, el uso aún no hace referencias a una gráfica cartesiana, sino más bien a una *trayectoria*, pero además aparecen gestos y palabras como "sube", "baja", "regresa", "rebota".

Posterior a esta pregunta inicial, se realiza el siguiente cuestionamiento:

> D: *a ver, a ver… ustedes que ya vieron gráficas con el sensor de movimiento… ¿cómo sería la gráfica del movimiento cuando yo ponga la pesa en el resorte?...*
>
> P6: *va a subir y a bajar… va subir rápido…*

Casi de inmediato, la misma participante que en el extracto anterior realiza el gesto de la mano "vertical", ejecuta un gesto un tanto más complejo que el anterior. Ahora y bajo este cuestionamiento que involucra el hecho de "reproducir" o mantener una estructura, la joven hace ahora un movimiento con la mano pero de derecha a izquierda de manera que el movimiento de "sube y baja" se complementa con un "dirigirlo de izquierda a derecha" (ver figura 3).

Figura 3. Análisis de la tendencia.

Esta argumentación gestual nos hace considerar que se presenta otro uso de la gráfica, generado por la estructura previa. Este uso ya no involucra sólo orientar y que la gráfica funcione como un modelo para indicar dirección y sentido, esto ya no es suficiente, sino que se confronta con el hecho de que *lo estable* quizás juegue un rol explícito; justo para localizar y anticipar la tendencia del comportamiento de la curva que dibuja en el aire.

En ese corto instante de tiempo, surgen desde nuestro análisis varios elementos. Por un lado, la aparición inicial de una estructura basada en *orientar el movimiento,* pero justo después, el hecho de confrontarlo con una estructura cartesiana y de modelación-graficación en la situación del movimiento que se trabajó en la primera parte del taller, complejiza ese modelo "factual" hacia otra estructura donde el funcionamiento del uso de la gráfica se dirigirá hacia *anticipar el comportamiento del sistema y expresar ese comportamiento tendencial en forma global.* Pero esto implica otra *forma* en dicha argumentación, una más relacionada a *variar aspectos y parámetros en el modelo gestual/gráfico*. En este sentido diremos entonces que se desarrolla un uso de la gráfica hacía analizar y localizar la tendencia en el comportamiento del fenómeno, donde la estabilidad aparece resignificada como un comportamiento con tendencia.

Comentarios finales

A partir de nuestros análisis y reflexión reconocemos que la inclusión de la categoría del cotidiano implica una reivindicación del sujeto y de sus saberes, pero también de que éste se encuentra en mundos institucionales y forma parte de escenarios diversos a lo largo de su vida, donde la escuela, es uno más. Lo que observamos entonces es que el uso es en tanto la cultura y la comunidad, en su devenir histórico. El cotidiano expresa conocimiento en uso, las experiencias, lo vivencial, lo situacional y lo concreto de una cultura: el uso es cultura en tanto uso.

Parte fundamental de nuestra investigación es la delimitación del modelo MdR-MdC propuesto para el análisis de la función social del cotidiano, y se refiere a todas aquellas estructuras y formas culturales de saber que se ponen en discusión y que permiten generar patrones de respuestas concretas ante la situación específica de transformación que se materializa en "dibujar el movimiento". Y justo se puede apreciar el importante rol del cuerpo y del escenario donde el uso de la gráfica genera un modelo para *orientar el movimiento* y *analizar tendencias* cuando se discute lo estable.

Más aún, el modelo teórico de resignificación permite dejar ver que el cotidiano amalgama las relaciones con el conocimiento. Pero que también existirán estructuras de mantenimiento de rutina sumamente fijadas en los participantes, por ejemplo, la orientación. Lo que posteriormente se hace en todas las actividades siguientes en el taller es mantener un sistema de usos, basados en la tendencia, es decir, la estabilidad como comportamiento con tendencia. Se resignifica así dicha noción. Sin embargo, las estructuras no se "pierden", están ahí, y seguramente surgirán nuevamente ante una situación problemática diferente a la que fueron expuestos los participantes en este mundo institucional que se recrea en el taller.

Referencias biblográficas

Berger, P., & Luckmann, T. (2006). *La construcción social de la realidad.* Buenos Aires: Amorrortu.

Cantoral, R., & Farfán, R. (2003). Mathematics Education: A vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics, 53*(3), 255-270

Carraher, T., Carraher, D., & Schliemann, A. (1991). *En la vida diez, en la escuela cero.* México: Siglo Veintinuo editores.

Civil, M. (2002). Everyday Mathematics, Mathematicians' mathematics, and school mathematics: Can we bring them together? En Brenner, M.E. & Moschkovich, J. N. (Eds.), *Everyday and Academic Mathematics in the Classroom.* 40-62. Reston, Virginia: The National Council of Teachers of Mathematics [NCTM].

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En Cantoral, R., Covián, O., Farfán, R., Lezama, J. & Romo, A. (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (págs. 265–286). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.–Díaz de Santos.

Cordero, F., Cen, C., & Suárez, L. (2010). Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(2), 187-214.

Cordero, F. (2013). *Matemáticas y el Cotidiano*. Diplomado Desarrollo de estrategias de aprendizaje para las matemáticas del bachillerato: la transversalidad curricular de las matemáticas Módulo III. Documento interno. Cinvestav –IPN.

Lave, J. (1988). *La cognición en la práctica.* España: Paidós.

Rodrigo, M. J. (1997). Del escenario sociocultural al constructivismo episódico: un viaje al conocimiento escolar de la mano de las teorías implícitas. En Rodrigo, J.M. & Arnay, J. (Eds.), *La construcción del conocimiento escolar* (págs. 177-191). España: Paidós.

Suárez, L. & Cordero, F. (2010). Modelación-graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13(4-II),* 319-333

Tuyub, I. & Cantoral, R. (2012). Construcción Social del Conocimiento Matemático durante la obtención de genes en una práctica Toxicológica. *Boletim de Educaçao Matemática, 26,* 311-328.

Zaldívar, D. & Cordero, F. (2012). Un estudio socioepistemológico de lo estable: consideraciones en un marco de la divulgación del conocimiento matemático. En O. Covian, Y. Chávez, J. López, M. Méndez, A. Oktaç. *Memorias del Primero Coloquio de Doctorado*, ISBN: 978-607-9023-08-9, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Cinvestav. 203 – 212.

EL COMPROMISO COMO PARTE DE UN EMPODERAMIENTO COMPARTIDO PARA SUPERAR LA EXCLUSIÓN QUE GENERA EL dME

Beatriz Introcaso, Dirce Braccialarghe
Departamento de Matemática, Escuela de Formación Básica, Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario Argentina
beatriz@fceia.unr.edu.ar, dirce@fceia.unr.edu.ar

Resumen. Para superar la exclusión que genera el dME, apuntamos a un proceso de fortalecimiento basado en el compromiso que permita tender a lograr un conocimiento funcional de la Matemática. Conjuntamente con un empoderamiento del docente, consideramos que es necesario un empoderamiento de los estudiantes, enfatizando el ***para qué*** se trabajan los contenidos matemáticos. Así se podría "incluir el contexto" para potenciar la construcción social del conocimiento. Buscamos un proceso dialéctico en el cual el empoderamiento del docente induce empoderamiento de los estudiantes, y este a su vez permite fortalecer el primero. En este proceso se resignifica el dME, produciéndose cambios en la relación entre los actores involucrados
Palabras clave: discurso matemático escolar, exclusión, empoderamiento
Abstract. In order to overcome the exclusion that the school mathematical discourse (dME) generates, we aimed at a process of fortification based on the commitment that allows obtaining a functional Mathematical knowledge. Together with the teacher's empowerment, we consider the students' empowerment, emphasizing the reasons of the mathematical contents present in the curriculum. Thus the context could be included to upgrade the knowledge's social construction. We look for a dialectic process in which the teacher's empowerment induces students' empowerment, and this as well allows to fortify the first. In this process the dME resignifies, and changes in the relation between the involved actors take place.
Key words: school mathematical discourse, exclusion, empowerment

Introducción

Con la intención de conocer los objetivos de las asignaturas de Matemática del ciclo básico de las carreras de Ingeniería de la Universidad Nacional de Rosario en las que trabajamos, observamos lo que cada uno de los actores del sistema explicita. Por un lado los docentes decimos buscar que los estudiantes tengan un manejo fluido de los conocimientos matemáticos puestos en juego en estas asignaturas, y los incorporen como herramientas para modelar y resolver problemas. Por otro, los estudiantes están empeñados en "sortear" estas asignaturas que obstaculizan su posibilidad de ingreso al ciclo profesional. Y finalmente, desde la Institución se imponen contenidos, textos a utilizar, tiempos de dictado y formas de evaluación, con el objeto de lograr que egrese gran cantidad de profesionales altamente capacitados. Sin embargo, ninguna de estas cosas ocurre masivamente: en el camino quedan muchos estudiantes que no pueden aprobar estas asignaturas, los docentes nos encontramos con mucha frecuencia frustrados porque no vemos que se logre el manejo de los temas buscado, y a la Institución no le satisface la cantidad de profesionales que egresan anualmente, ni la cantidad de estudiantes que aprueban estas asignaturas.

Nos preguntamos por qué ocurre esto: si acaso los objetivos que nos planteamos son demasiado ambiciosos, si acaso no somos lo suficientemente buenos como para lograr que se consigan. Si

enmarcamos nuestra mirada en la Teoría Socioepistemológica (TSE) encontramos que el concepto de discurso matemático escolar (dME) puede ayudarnos a echar luz sobre estos aspectos. El dME es una práctica que norma la actividad en el sistema educativo, y se refiere a la forma en que se interpreta, usa y comparte la matemática definida como 'escolar', afectando por lo tanto las relaciones entre estudiantes, docentes e institución. Al decir de Cantoral, Farfán, Lezama & Martínez Sierra (2006), establece las bases de comunicación para la formación de consensos y la construcción de significados compartidos.

Soto (2010) postula que el dME es un sistema de razón que permite confeccionar un mapa que establece una frontera entre lo "normal" y lo "anormal" y de esta forma genera una exclusión a través de la violencia simbólica que se produce con la imposición de argumentaciones. El planteo de exclusión es una visión alternativa a la de "fracaso" de los estudiantes, como así también a la de "criminalización" del docente, quien también puede considerarse una víctima ya que el dME lo atraviesa y además la Matemática le fue enseñada de la misma manera. Nos preguntamos entonces si sería posible pensar alguna forma de "inclusión", tanto de los estudiantes como de los docentes, que permitiera lograr un conocimiento funcional de la matemática para la vida. Existe en nosotros un sentimiento contradictorio entre esta necesidad de "incluir" actores en el sistema educativo, ya que es justamente un sistema que genera violencia simbólica y los actores incluidos en él estarían obligados a reproducirlo, y la tarea de intentar que se desarrolle un pensamiento crítico hacia el mismo. Máxime teniendo en cuenta que las causas de la exclusión – como veremos – no están necesariamente (o no solamente) en factores externos a la Institución, sino que también es el propio sistema educativo el que excluye. La TSE tiene también una respuesta para esto que es el concepto de rediseño del dME. En nuestra propuesta el rediseño apuntaría, más que a la selección de contenidos o la forma de desarrollarlos (el *qué* y el *cómo*), al planteo de los objetivos alrededor de los cuales se centra (al *para qué*). Consideramos que esta puede ser una buena forma de "incluir el contexto" como dimensión que potencie la construcción social del conocimiento, tal cual lo plantea la TSE.

El dME como una práctica social: un sistema de razón que excluye

Considerando que la práctica social no es aquello que hacemos sino lo que nos hace hacer lo que hacemos (es decir, es normativa), ya ha sido postulado que el dME puede verse como una práctica social (Reyes, 2011). La práctica social no es algo observable sino que se estudia a partir de ciertas prácticas de referencia, las cuales a su vez se infieren a partir de prácticas o actividades que determinado grupo desarrolla.

En el contexto de las asignaturas de Matemática de las carreras de Ingeniería en las que trabajamos, hay diversas *prácticas* puestas en juego que se pueden observar. En principio hay una clara actitud de todos los participantes en estas actividades (docentes, tanto profesores como ayudantes, estudiantes, coordinadores de cátedra, elaboradores de planes de estudio, etc.) de separar las clases de "teoría" de las clases de "práctica" (destinadas a resolver ejercicios de aplicación de los temas vistos en "teoría"); así mismo, la forma en que se encara el desarrollo de los temas casi invariablemente remite a una secuencia en la que se comienza por definir conceptos, enunciar teoremas, en algunos casos demostrarlos y finalmente aplicar mecánicamente los resultados a la resolución de ejercicios; las actividades puestas en juego se desentienden de la construcción del conocimiento, estableciendo un ámbito donde los estudiantes escuchan pasivamente a un docente que habla en el frente, la mayoría de las veces sobre una tarima.

Entre las *prácticas de referencia* que regulan estas actividades podemos mencionar la reglamentación del estatuto universitario, que establece diferentes jerarquías docentes dentro de la universidad y estipula diferentes tareas a desarrollar por los docentes de cada categoría en el aula. Así mismo, la aplicación de los programas analíticos de las asignaturas de la Facultad regula los temas a desarrollar y el tiempo que debe dedicarse a cada uno de esos temas; y la utilización de los sistemas de evaluación regula la cantidad y la modalidad de las evaluaciones que se llevan a cabo en el curso. Todas estas prácticas están normadas por el dME, que se constituye así en una *práctica social*.

Por su parte Soto (2010) postula que el dME genera exclusión a través de la violencia simbólica que se produce con la imposición de argumentaciones, y para fundamentarlo analiza algunos elementos que lo caracterizan, los cuales se evidencian claramente en el contexto de las asignaturas en las que trabajamos: el método simultáneo de enseñanza, que introdujeron los jesuitas y que aún prevalece (Cuesta, 2009), se basa en: un mismo libro, un mismo docente, una misma clase, una misma evaluación para todos, convirtiendo así el aula en un taller de producción de conductas uniformes y en serie de acuerdo con una graduación de niveles de logro, inhibiendo de esta forma la consideración de aspectos contextuales o culturales que pudieran intervenir en la construcción del conocimiento; el análisis del tipo de ejercicios que aparecen en las evaluaciones de estas asignaturas (Braccialarghe, Emmanuele, González & Introcaso, 2008) da cuenta de que el énfasis está puesto en la mecanización de procesos; el carácter utilitario puede verse en las fundamentaciones de algunos de los programas de estudio de estas asignaturas en los que se expresa que el objetivo de la asignatura es que el estudiante maneje los conceptos "que serán de utilidad en posteriores estudios"; el análisis de los libros de texto utilizados en el desarrollo de estas asignaturas (Emmanuele, González, Introcaso & Braccialarghe, 2010), que muestra una clara

relación entre la elección de los mismos en distintos períodos históricos y la ideología imperante en el contexto sociopolítico de ese momento, pone de manifiesto que existe un consenso sobre cuáles son las argumentaciones válidas; y la falta de marcos de referencia se manifiesta actualmente en el hecho de que el libro de texto utilizado en las asignaturas de Cálculo del Ciclo Básico de las carreras de Ingeniería esté basado en las ideas de la Reforma del Cálculo surgida en Estados Unidos a partir de 1986, en el que en los ejemplos y ejercicios se consideran situaciones ajenas a nuestro medio, y se utilizan unidades de medida del sistema anglosajón.

Empoderamiento compartido. Hacia un rediseño del dME

Para avanzar hacia una resignificación del saber que permita modificar el dME, Reyes (2011) propone el "empoderamiento" del docente. La autora describe el empoderamiento como un proceso inherente al docente que busca privilegiar la validación de una diversidad de argumentaciones y tener en cuenta racionalidades contextualizadas para dar al conocimiento un carácter funcional. Considera que al problematizar el saber el docente adquiere confianza y autonomía, y esto le permite generar cuestionamientos, debates y reflexiones con los estudiantes.

Además del empoderamiento del docente que tiene que ver con lo disciplinar, con problematizar el conocimiento matemático, pensamos que el docente debería poder problematizar su lugar como docente en el sistema educativo. Por ejemplo: si no se pregunta para qué debe trabajar estos conceptos con estos estudiantes y no contextualiza su propia racionalidad, difícilmente pueda tener en cuenta racionalidades contextualizadas.

Por otro lado, para romper el "status quo" que el dME impone, pensamos que es necesario que también los estudiantes movilicen sus estructuras, aquellas que doce años de sistema educativo han hecho pesar sobre ellos, aquellas que han internalizado hasta hacer suyas, como hemos mencionado en trabajos anteriores (ver, por ejemplo, González, Introcaso, Braccialarghe & Emmanuele, 2011). Es claro que los estudiantes están permeados por el dME, como parte integrante de la comunidad educativa. Consideramos que es necesario hacerlos conscientes de esta situación (de alguna manera, podríamos verlo como un "empoderamiento" de los estudiantes). Naturalmente, en la mayoría de los casos ellos no tienen las herramientas para decidir qué temas serán más adecuados para su formación como Ingenieros, pero sí pueden manifestar sus objetivos: para qué estudian Ingeniería y cuál imaginan que sería su participación como ingenieros en la comunidad. En función de sus respuestas, un docente "empoderado" podría organizar actividades que pongan de manifiesto la funcionalidad de los conocimientos en el sentido pretendido. No se trata necesariamente de modificar el "qué" enseñar (si bien se podrían hacer

adaptaciones del plan de estudio de acuerdo a la dinámica del proceso), sino más bien de enfatizar el *para qué* se trabajarán los contenidos matemáticos.

Por lo tanto el rediseño del dME debería incluirlos. Para que el nuevo discurso pueda considerar que la matemática responde a otras prácticas de referencia más allá de aquellas a las que atiende el discurso hegemónico y se explicitan – por ejemplo – en los libros de texto, los estudiantes deberían tener un lugar para poner de manifiesto los diferentes contextos en los que se desenvuelven, y aquellas situaciones donde se podría encontrar la base de los significados naturales. Si los estudiantes tuvieran la oportunidad de problematizar el *para qué* estudian matemática en las carreras de Ingeniería, en el marco de la razón más amplia de *para qué* estudian esta carrera en la sociedad de la que son parte, sería posible buscar su carácter funcional en contraposición al carácter utilitario. O también si los estudiantes pudieran exponer, por ejemplo, que son capaces de utilizar recursos tecnológicos para ensayar e interpretar respuestas, se podría tender a que la matemática escolar dejara de reducirse a la mecanización de procesos o la memorización de conceptos. Pensamos entonces que más que rediseñar el dME para incluir a los estudiantes, los estudiantes deberían ser partícipes del rediseño del dME.

Pensado comunitariamente más que individualmente, podríamos llamarlo *empoderamiento compartido*. El empoderamiento del docente induce empoderamiento de los estudiantes, y este a su vez permite fortalecer el primero en un proceso dialéctico. Al mismo tiempo, en este proceso se resignifica el dME, ya que necesariamente se producen cambios que afectan las relaciones entre estudiantes, docentes e institución.

Los elementos fundamentales que permiten describir un proceso de empoderamiento, según Montero (2006), incluyen la *participación*, referida a la acción desarrollada por los miembros de la comunidad en función de objetivos definidos colectivamente; la *conciencia*, que implica desarrollo de la crítica; la *autogestión*, expresada en la autonomía de las acciones y en la toma de decisiones concernientes a la comunidad, y el *compromiso*, que concierne al sentimiento ético de apego y obligación para con la comunidad, que lleva a involucrarse en acciones colectivas que pueden producir beneficios para todos. Se desarrolla entonces una identidad social, en este caso comunitaria.

Un primer paso: crear espacios para reflexionar

Consideramos – como decíamos – que los estudiantes deberían ser partícipes de la construcción del conocimiento y tener la posibilidad de proponer actividades que convoquen su interés. Una propuesta podría ser entonces que los estudiantes hagan consciente y explícita la razón de ser de su pertenencia al sistema educativo.

Las siguientes dos experiencias fueron realizadas con los estudiantes en dos circunstancias bien diferenciadas: una con estudiantes que asisten al curso introductorio a la Facultad de Ingeniería, que es un curso de nivelación que se da a quienes se encuentran en el último año del sistema de Educación Secundaria, y otra en el marco de una clase de Análisis Matemático III correspondiente al segundo año de las carreras de Ingeniería. Pedimos a los estudiantes que contestaran por escrito dos preguntas:

¿Para qué estudiás Ingeniería?

¿Qué es lo que suponés que la Matemática puede aportar a tu formación como Ingeniero?

Respecto de la primera pregunta, en el caso de los estudiantes ingresantes a la Facultad, la totalidad de las respuestas apunta al reconocimiento social y económico: "para conseguir un buen trabajo, con buena remuneración", "por el respeto social", "para tener un buen futuro", "para ser alguien en la vida", "para aumentar mi capacidad de conseguir un buen trabajo".

La mayoría de los estudiantes de Análisis Matemático III, por su parte, dividen las respuestas en dos partes: una relativa a lo que ellos suponen que es el quehacer de un ingeniero: "para resolver problemas", "para entender cómo funcionan las cosas" y la otra – como en el caso de los ingresantes – relacionada a su sustento: "para tener una salida laboral", "para lograr un buen pasar económico", "para poder trabajar en lo que me gusta", "para tener un mejor futuro". Esta última visión se enmarca en una perspectiva según la cual la escuela es un lugar donde se adiestra al sujeto para el trabajo.

Algunas otras respuestas tienen que ver con asociar un universitario a "una persona más sabia": "para mejorar intelectualmente", "para tener una visión más amplia de lo que me rodea". Y finalmente hay algunas relacionadas a sentirse parte de una comunidad: "para hacer un aporte a la sociedad dentro de mis posibilidades", "para encontrar la solución que mejor se adapte a los problemas de la comunidad y ayudar a tener una mejor calidad de vida", "para aportar mi grano de arena a la evolución de la sociedad", "para tratar de mejorar ciertos procesos que son contaminantes".

Pensamos que del último tipo de respuestas es de donde puede emerger la idea de que el saber surge de una práctica social. Los estudiantes están planteando que quieren aportar soluciones a problemas de la comunidad. Consideramos que de esta explicitación, de esta forma de hacer consciente lo que pretenden, puede emanar un compromiso que redunde en beneficio del aprendizaje.

A su vez, en este contexto, es necesario que el docente – también comprometido – sea capaz de escuchar estas necesidades y se haga cargo de ellas. Por eso decimos que es necesario un docente "empoderado".

Respecto de lo que la matemática puede aportar en su formación como ingenieros, la mayoría de las respuestas de los alumnos del curso introductorio parecen considerar que la matemática es una herramienta para sus estudios (y no para su desempeño laboral): "es la base de la Ingeniería", "será fundamental a lo largo de mis estudios, pero no creo que tenga tanto uso en un ambiente laboral", "es muy aplicada a la carrera", "es necesario tener conocimientos de matemática para poder aplicarla y desarrollar los temas más avanzados de la carrera", "en el caso de las ingenierías, para poder calcular todo tipo de problemas existentes", "es la base de todos los cálculos", "conozco a varios ingenieros que ejercen la profesión y no utilizan matemática para nada". Algunas respuestas aluden al desarrollo del pensamiento: "me ayuda a pensar como un ingeniero, es muy útil para ampliar el campo de la lógica", "aporta la capacidad de razonamiento y de no distraerme para el día que tenga que ejercer la profesión que elegí", "cambio de forma de pensar; agiliza la mente", "aporta la construcción de un pensamiento estructurado". Sorprende percibir que – a pesar de haber sido la matemática una asignatura sostenida durante todo su trayecto escolar – las ideas de los estudiantes acerca de ella son pobres y confusas.

Este panorama cambia en las respuestas de los estudiantes de Análisis Matemático III. En la mayoría de las respuestas se amplifica la idea que mencionábamos acerca de considerar a la matemática substancial para el desarrollo del pensamiento: "mejora la forma de pensar", "agiliza el pensamiento", "es formadora de mentes", "desarrolla el pensamiento lateral", "estimula y desarrolla el cerebro". Existe otra categoría de respuestas en las que la matemática es vista explícitamente como una herramienta de modelado: permite "comprender y predecir ciertos fenómenos que ocurren en la naturaleza", "crear modelos que simplifican la solución de problemas y la obtención de conclusiones". Más aún, algunos estudiantes consideran que es una actividad que subyace todo su desempeño: "es esencial en la vida", "la aplicamos en prácticamente todo lo que hacemos", "está todo el tiempo en nuestra cabeza". Esta última categoría de respuestas pone de manifiesto que en el imaginario de los estudiantes que ya han cursado dos años de la carrera, la matemática está ligada al contexto; que existe una vinculación entre su quehacer cotidiano y el hacer matemática.

Reflexiones

La idea que planteamos es enfatizar el hecho de sentirse parte de una comunidad. Sabemos que los estudiantes que ingresan a la Universidad están acostumbrados a trabajar en las clases de

Matemática en forma individual. Es necesario entonces en un principio un docente empoderado que pueda comprometerse en la creación de espacios de aprendizaje colaborativo.

Entre las prácticas actuales de la comunidad de estudiantes que asisten a la Facultad de Ingeniería, normadas por el uso social de la tecnología, emplear las redes sociales y chatear estarían entre las más habituales. Sibila (2012), plantea que en el chateo no hay comunicación ni diálogo sino contacto o interacción (lo que se suele denominar conexión). En consonancia con esta idea, Corea y Lewkowicz (2004) postulan que en la sociedad informacional, la lógica del espacio no es una lógica de lugares sino de flujos: el flujo continuo de información anula la dimensión espacio-temporal de la comunicación. Sin una distinción espacio-tiempo, sobre la cual se arma cualquier referencia comunicativa, no hay interlocución; tampoco hay tiempo para que se estabilicen los referentes o se establezcan acuerdos sobre el sentido. Nuestra idea, siguiendo las propuestas de Corea y Lewkowicz (2004), apuntaría a realizar operaciones tendientes a detener los flujos para que algún sentido pueda coagular. Más que "incluir" actores en el sistema educativo tal cual está, planteamos que un empoderamiento compartido conduzca a crear espacios donde podamos comunicarnos, espacios donde la conciencia permita resignificar los saberes, espacios donde podamos participar, renunciando a una posición de simple espectador y colocando el pensamiento o el arte al servicio de una causa.

Estos espacios pueden crearse en el marco de la participación, en este proceso dialéctico que llamamos empoderamiento compartido. Creemos que esta puede ser una forma de comenzar a superar la exclusión que genera el dME.

Referencias bibliográficas

Braccialarghe, D., Emmanuele, D., González, M.I. & Introcaso, B. (2008). La evaluación en asignaturas de análisis matemático en carreras de ingeniería. Entre lo pedagógico, lo institucional y el aula. *Revista de Educación Matemática, 24*. Recuperado el 9 de Sptiembre de 2013 de: http://www2.famaf.unc.edu.ar/rev_edu/documents/vol_23/ prop_5_Evaluacion.pdf.

Cantoral, R., Farfán, R. M., Lezama, J. & Martínez Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Número especial*, 83-92.

Corea, C. & Lewkowicz, I. (2004). *Pedagogía del aburrido. Escuelas destituidas, familias perplejas*, Buenos Aires: Paidós.

Cuesta, R. (2009). *Felices y escolarizados. Crítica de la escuela en la era del capitalismo*. Barcelona: Octaedro.

Emmanuele, D., González, M.I., Introcaso, B. & Braccialarghe, D. (2010). Análisis de libros de cálculo en carreras de ingeniería. Su relación con los cambios sociopolíticos en Argentina. *Educación Matemática, 22*, 35-63.

González, M.I., Introcaso, B., Braccialarghe, D. & Emmanuele, D. (2011). Disciplinamiento en la Educación Matemática Universitaria. *Actas XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil*: Recuperado el 9 de Sptiembre de 2013 de: http://www.gente.eti.br/lematec/ CDS/XIIICIAEM/artigos/454.pdf.

Montero, M. (2006). *Teoría y práctica de la psicología comunitaria. La tensión entre comunidad y sociedad (3era ed.)*. Argentina, Buenos Aires: Paidós.

Reyes, D. (2011). Empoderamiento docente desde una visión Socioepistemológica: Estudio de los factores de cambio en las prácticas del profesor de matemáticas. *Tesis de Maestría,* Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México. Recuperado el 12 de Septiembre de 2013 de: www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/maestria/reyes_2011.pdf.

Sibila, P. (2012). *¿Redes o paredes? La escuela en tiempos de dispersión*. Buenos Aires: Tinta Fresca.

Soto, D. (2010). El Discurso Matemático Escolar y la Exclusión. Una Visión Socioepistemológica. *Tesis de Maestría no publicada*, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

MULTIDISCIPLINA Y MODELACIÓN. UN DIÁLOGO ENTRE LA INGENIERÍA Y LA MATEMÁTICA EDUCATIVA

Francisco Cordero, Johanna Mendoza, Leslie Torres, Tamara Del Valle y Miguel Solís y Jaime Mena
Cinvestav. México
UNACH.
PUCV. Chile
fcordero@cinvestav.mx, ejmendoza@cinvestav.mx, lmtorres@cinvestav.mx, tamaradc.mat@gmail.com, solise@unach.mx, mena.jaimemena@gmail.com

Resumen. En la matemática educativa es necesario construir un marco de referencia (MR), el cual nos permita atender la justificación funcional demandada por otras disciplinas. Para crear el diálogo entre la matemática educativa y el cotidiano de la ingeniería, se vuelve condición *sine qua non* construir dicho MR. Dado lo anterior, es obligado adentrarnos a la construcción social del conocimiento matemático (CSCM). El programa del Grupo Modelación y Tecnología (MyT) tiene, dentro de su secuencia de proyectos, el objetivo de formular una estructura de diálogo: Según el rol de lo multidisciplinar, la pluralidad epistemológica y la categoría modelación. Formular el diálogo, tiene por consecuencia valorar conceptos en relación al conocimiento como su *institucionalización, sus usos e instrumentos, sus prácticas sociales que norman sus construcciones, el cotidiano, la labor, el trabajo y las acciones humanas, como la identidad*, entre otros.
Palabras clave: Modelación, multidisciplinariedad, diálogo e ingeniería
Abstract. In mathematics education is necessary to construct a frame of reference (MR), which allows us to meet the functional justification demanded by other disciplines. To create dialogue between mathematics education and engineering everyday, it becomes prerequisite build that MR. Given this, is that it becomes necessary to delve into the social construction of mathematical knowledge (CSCM). The program Modeling and Technology Group (MyT) has within its sequence project, the objective of formulating this dialogue structure: According to the role of the multidisciplinary epistemological pluralism and category modeling. Formulate this dialogue has consequently evaluate concepts in relation to knowledge and its institutionalization, its uses and tools, their social practices that govern their constructions, daily life, work, work and human actions, such as identity, among others
Key words: Modeling, multidisciplinary, dialogue and engineering

Introducción

En general los modelos educativos no han logrado relacionar la matemática y el cotidiano, ya que lo que sucede en uno no sucede en el otro. En particular, si se piensa en la matemática del aula, ésta es diferente a la matemática que sucede en el cotidiano, de la ingeniería.

La matemática escolar no tiene un marco de referencia (MR) para poder atender la justificación funcional que demandan otros dominios de conocimiento. Su construcción es condición *sine qua non* para poder crear el diálogo entre la matemática y el cotidiano de la ingeniería. Por esto, es necesario adentrarnos a la construcción social del conocimiento matemático (CSCM).

Para conformar un estatus epistemológico que rinda cuentas del conocimiento matemático con relación a la matemática escolar y al cotidiano de la ingeniería, se requiere ubicar una dimensión social que problematice la relación de los dominios multidisciplinares. La pluralidad epistemológica tendrá que ser favorecida. Por esto, se deberá entender al conocimiento matemático como una

construcción social, lo que conlleva cuestionar no en sí a la matemática, sino su *función social*. En consecuencia se valorarán conceptos entorno al conocimiento como su *institucionalización, sus usos* e *instrumentos, sus prácticas sociales que norman sus construcciones, el cotidiano, la labor, el trabajo y las acciones humanas, como la identidad*, entre otros.

Estudios con este marco darán cuenta de la funcionalidad del conocimiento matemático, es decir, de los usos del conocimiento, de sus funcionamientos y formas desde la condición, en nuestro caso, del ingeniero. Los cuáles serán el marco de referencia para favorecer el diálogo, el cual expresará el uso del conocimiento matemático desde y con el ingeniero. Esto sólo se logrará si se rompe la atención en los objetos matemáticos como tales y permitimos que el humano y su actividad sean los elementos primarios (Cordero, 2013).

Diálogo entre la Ingeniería y la Matemática Educativa

Es necesario poner atención en la consideración del ser con otro: lo que emana elementos como organización de grupos y función de las sociedades. En ese sentido el constructo que se formule de ingeniero debe estar cercano a comunidad con relación al conocimiento. Es decir, si hay conocimiento existe una comunidad que lo construye.

El cotidiano está compuesto por una interacción de comunidades de conocimiento, donde se desarrollan mantenimientos de rutinas para que permanezcan, esto último es lo que hace el día a día (Zaldívar y Cordero, 2010).

Todo ingeniero pertenece al menos a una comunidad de conocimiento, según sea su especialidad u oficio, su ámbito laboral o institucional. Un ingeniero será considerado como aquel que dada sus actividades cotidianas (de la ingeniería), se encuentra en interacción con otras comunidades de conocimiento. De esta manera, es que se encuentra presente en diversas situaciones, considerando a una situación como toda acción del ingeniero que forma parte de su vida diaria, en el seno de la ingeniería. Sin embargo, no todas las situaciones nos van a interesar. La atención se centrará en aquellas en donde se hace un uso de conocimiento matemático.

Entonces, a partir de una situación (*Si*), en el cotidiano de la ingeniería, sucede una comunidad de conocimiento del ingeniero (*CC(Ii)*). Es en estas situaciones en donde interactúan las comunidades de conocimiento, ya que estamos mirando al ingeniero como miembro de una comunidad de conocimiento. Todo lo anterior en su conjunto conforma el cotidiano del ingeniero.

La naturaleza de la situación *Si* que definirá la comunidad de conocimiento del ingeniero *CC(Ii)* corresponderá a una categoría de modelación (Cordero, 2011). Misma que aportará elementos para caracterizar la matemática funcional de la ingeniería.

La modelación es el uso del conocimiento matemático en una situación específica, en donde se debate entre la función y la forma, de ese conocimiento, de acorde con lo que organizan los participantes. A este último se le llama resignificación, donde la modelación puede llevar a cabo múltiples realizaciones y hacer ajustes en su estructura para producir un patrón deseable. Lo que significa que es, por un lado, un medio que soporta el desarrollo del razonamiento y de la argumentación. Y por el otro lado es una práctica que trasciende y se resignifica, que transforma al objeto en cuestión.

Con base en lo que hasta ahora se ha discutido, en el presente escrito se tiene como objetivo ejemplificar a la luz de algunos trabajos de investigación, cómo es el diálogo entre matemáticos educativos e ingenieros teniendo como eje centrar la categoría de modelación-graficación. Dichas investigaciones se desarrollan en distintos escenarios como el DME y el trabajo.

La noción de optimización en el discurso matemático escolar

La enseñanza de la Programación Lineal, suele verse doctrinada por pasos a seguir de los distintos métodos (método gráfico, método simplex u otro), convirtiendo el uso de los métodos en un proceso mecánico y sin sentido para el estudiante (Campero, 2010).

Realizando un análisis en algunos textos escolares, se puede observar cómo el uso de métodos de programación lineal aparecen pauteados: en el caso del método gráfico se señala cómo identificar la función objetivo, se pide graficar las restricciones en un sistema de inecuaciones, se solicita que a partir de las restricciones se identifique el polígono que se forma al interior de los conjuntos soluciones y, finalmente, se solicita valorizar los vértices del polígono para dar respuesta a la optimización solicitada. De esta manera, se pierde toda la riqueza que poseen los problemas que involucran optimizar.

Frente a lo anterior nos preguntamos ¿Cuáles son los significados que emergen y dan fuerza a la programación lineal? ¿Cuáles son los usos de la optimización en estudiantes de ingeniería? Para responder a estas interrogantes, nace la necesidad de reconstruir socialmente el surgimiento de la programación Lineal, identificando los significados que emergen de las actividades prácticas que contemplan a la Programación Lineal.

Para abordar esta propuesta, se torna necesario estudiar el rol actual de la programación lineal y los procesos históricos de su surgimiento, con el fin de lograr identificar aquellos factores que le dan fuerza a su desarrollo y construcción. Además, es necesario distinguir el rol actual de la modelación en la Programación lineal y cómo ésta se encauza desde una mirada Socioepistemológica para identificar aquellos factores que surgen del proceso de modelación.

En esta búsqueda, se ven fuertemente ligados al trabajo del matemático francés Joseph Fourier (1768-1830), quien fue el primero en intuir (de forma imprecisa) los métodos de lo que actualmente llamamos Programación Lineal y el trabajo de George Dantzig (1914-2005), quien se interesó por el desarrollo riguroso de esta disciplina que hoy llamamos Investigación de Operaciones (Campero, 2010). En dichos trabajos se puede observar los requerimientos sociales que influyeron en la necesidad de optimizar y, por consiguiente, han permitiendo identificar tres factores que emergen de la construcción de los primeros métodos diseñados en la Programación Lineal: la noción de optimización, de solución óptima y las de restricciones o acciones.

En carreras de ingeniería es común encontrarse con asignaturas relacionada con el área de Investigación de Operaciones, la cual consiste en el uso de modelos matemáticos para realizar procesos de toma de decisiones, es decir, métodos de optimización. Así también, cuando los estudiantes de ingeniería requieren construir modelos de optimización, hacen un trabajo funcional, en el cual se puede observar las necesidades sociales que conllevan al sujeto a determinar su óptimo, descentralizando la noción de Programación Lineal en sí misma y fortaleciendo la idea de optimizar. Lamentablemente, en el discurso matemático escolar los modelos son empleados sin conocer de su procedencia, sin siquiera tener conciencia de cuáles son los procesos que permiten optimizar una situación lineal cualquiera, e inclusive, sin ningún remordimiento al no comprender el modelo lineal que está detrás.

La simultaneidad y la estabilidad en una comunidad de ingenieros químicos

Se estudian los usos de los conocimientos matemáticos, Simultaneidad y Estabilidad, en el quehacer de una Comunidad de Conocimiento Matemático de la Ingeniería Química (CCM(IQ)) en un escenario de trabajo. Específicamente, en el diagnóstico del estado de los transformadores eléctricos de la Comisión Federal de Electricidad, región peninsular.

En dicho análisis se identifica un desarrollo de usos de la gráfica, dado que en un principio la CCM emplea gráficas como medio de control estadístico, sin embargo, al tener varios años de elaborarlas, se identificó que éstas tienen una relación con las fallas que ocurren en el transformador. De esta forma la comunidad inicia el estudio de las relaciones gráfica-falla y se percata que a través de su análisis, se puede diagnosticar el estado de un transformador eléctrico.

Así, las gráficas se resignifican de un medio de control estadístico a modelos gráficos que permiten inferir información, interpretar y leer comportamientos, así como generar argumentos respecto al estado de un transformador, y por tanto se vuelve el método de diagnóstico de la CCM(IQ).

Figura 1. Resignificación de la gráfica. (Torres, 2013).

Por tal motivo, se distingue a la categoría de Modelación-Graficación como una categoría medular en el trabajo de la CCM(IQ), ya que por medio de modelos gráficos se realiza el diagnóstico, para anticipar posibles fallas a través del análisis de comportamientos tendenciales.

En la investigación se identifican cuatro situaciones distintas de modelos gráficos en el quehacer de la comunidad, una situación ideal y tres reales: sin falla, con falla y una situación extraordinaria. Para ejemplificar la forma en la que la CCM(IQ) emplea los modelos gráficos se presenta el diagnóstico de una situación real sin falla.

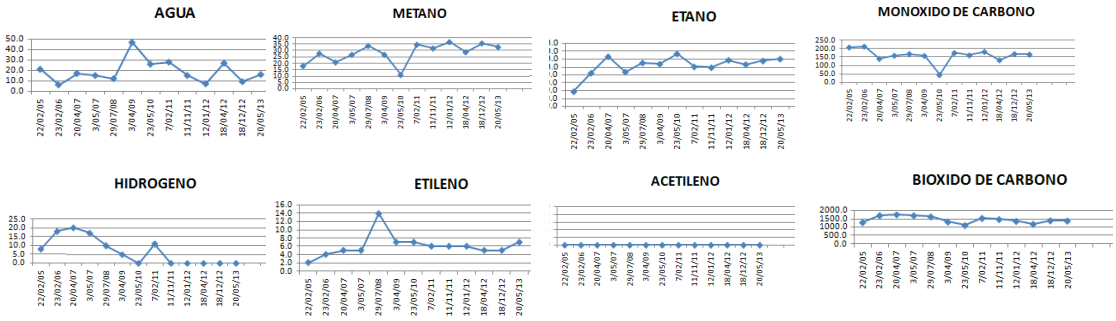


Figura 2. Gases en un transformador. Situación real sin falla. (Torres, 2013).

Este conjunto de gráficas permite a la comunidad diagnosticar el estado del transformador a través del análisis de comportamientos tendenciales. Conviene mencionar que las gráficas no se pueden ver de manera aislada sino que se deben considerar las 8 de manera *simultánea*.

Si consideramos primero las gráficas de monóxido y bióxido de carbono, se puede observar que tienen variaciones y que no en toda la gráfica se puede identificar la proporción esperada del 10%. Además, respecto al comportamiento de los gases clave, hidrógeno, etileno y acetileno, únicamente el acetileno presenta el comportamiento ideal (comportamiento tendencial a cero), lo que indica que no hay un problema serio dentro del transformador. Pese a ello, el hidrógeno y el etileno presentan variaciones; se puede ver que el hidrógeno al inicio de la gráfica, se incrementa, pero posteriormente disminuye hasta llegar a cero que es su valor de estabilidad, sin embargo, nuevamente se incrementa pero de nuevo recupera la estabilidad, tendiendo a mantenerse estable. Sin embargo, el etileno en ningún punto tiene concentración cero, a pesar de esto, la CCM (IQ)

menciona que el transformador se encuentra estable, debido a que los incrementos en la concentración no son grandes. Además, en el comportamiento de los otros gases, metano, etano y agua, se observan muchas variaciones, y la tendencia del comportamiento es a incrementarse; sin embargo, el comportamiento de las gráficas más o menos tiende a una estabilidad, dado que los últimos valores graficados son cercanos, lo que muestra que estos gases también están estables dentro del equipo.

Así, a través del análisis de los modelos gráficos de las concentraciones de los gases disueltos en el aceite del transformador la CCM (IQ) diagnostica los equipos y determina sus acciones al respecto.

Una Situación de acumulación en la formación de ingenieros civiles

Identificar los usos del conocimiento matemático en una comunidad de conocimiento de ingenieros en formación conllevo a seleccionar una situación específica, la cual hemos llamado: acumulación de un fluido. Ésta presume estar en el ámbito de la ingeniería: por un lado, aparece en la ingeniería en formación y, por el otro lado, aparece en la jerga disciplinar de la ingeniería (Cordero, 2013; Mendoza & Cordero, 2011).

La situación específica genera una argumentación de estabilidad, en la cual la graficación fue el modelo de las resignificaciones de comportamientos tendenciales, con procedimientos como variar parámetros e instrucciones que organizan comportamientos. Los usos de las gráficas fueron las modelaciones que se resignificaron confrontando sus funcionamientos y formas a través de múltiples realizaciones, realizaciones de ajustes, construcción de patrones y desarrollo del razonamiento. (Suárez, 2008).

De manera más específica, la puesta en escena del diseño, brindó algunas formas de cómo el ingeniero en formación aborda la situación de acumulación, al pronunciar nuevos retos dentro de la misma y al construir, con base en los usos de la gráfica, modelos de comportamientos tendenciales desde lo gráfico y lo analítico.

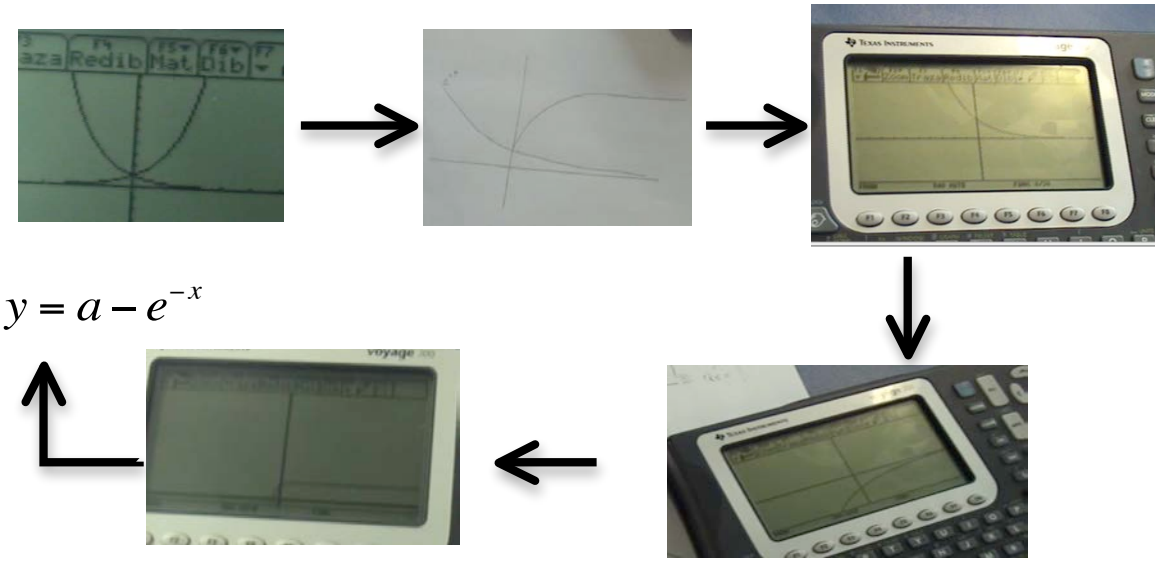


Figura 3. Construcción de modelos gráficos con base en el comportamiento tendencial de las funciones. (Mendoza, 2013).

Así, nuestra investigación presume de aportar un modelo de análisis, en cuanto reconoce el carácter de sujeto situado, caracterizó lo propio de la comunidad de conocimiento matemático a la cual pertenece. En ese sentido, reconocemos una intimidad en la construcción de conocimiento, de esta comunidad, en tanto que reconoce el argumento de estabilidad en el análisis de los patrones de tendencia con la variación, en la situación específica.

Agradecimientos Esta investigación está financiada por CONACYT con el Proyecto las Resignificaciones del Uso del Conocimiento Matemática: la Escuela, el Trabajo y la Ciudad. Clave 0177368.

Referencias bibliográficas

Campero, J. (2010). *Propuesta Didáctica en Optimización Dinámica: El Caso del Cálculo de Variaciones y la Teoría de Control.* Tesis para optar al grado de Doctor, no publicada. CICATA-IPN. Distrito Federal, México.

Cordero, F. (2011). La modelación y la graficación en la matemática escolar. En Rodríguez-Salazar, L., Quintero-Zazueta, R., & Hernández, A. (Coords.). *Razonamiento Matemático. Epistemología de la Imaginación. (Re)pensando el papel de la Epistemología en la Matemática Educativa*. Editorial Gedisa, Barcelona y Cinvestav, México. pp. 377 – 399.

Cordero, F. (2013). *Matemáticas y el Cotidiano*. Diplomado Desarrollo de estrategias de aprendizaje para las matemáticas del bachillerato: la transversalidad curricular de las matemáticas Módulo III. Documento interno. Cinvestav –IPN.

Mendoza, E. (2013). *Matemática funcional en una comunidad de conocimiento: El caso de las ecuaciones diferenciales lineales en la ingeniería*. Tesis de maestría no publicada, CINVESTAV-IPN, México.

Mendoza, E. & Cordero, F. (2011). El Uso de las Ecuaciones Diferenciales y la Ingeniería como comunidad de conocimiento. En Flores, R (Ed). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (25), 1023-1030. México.

Rodríguez, R., Quiroz, S. e Illanes, L. (2013). Competencias de modelación y uso de tecnología en Ecuaciones Diferenciales. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (26), 2121 – 2128. México.

Suárez L. (2008). *Modelación – Graficación, Una categoría para la Matemática Escolar. Resultados de un estudio Socioepistemológico*. Tesis de Doctorado no publicada. Departamento Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Torres, L. (2013). *Usos del conocimiento matemático. La simultaneidad y la estabilidad en una comunidad de conocimiento de la ingeniería química en un escenario del trabajo*. Tesis de maestría no publicada, CINVESTAV-IPN, México.

Zaldívar, J. y Cordero, F. (2010) Los usos de las gráficas en la resignificación de lo estable en un escenario de difusión de la ciencia. En Lestón, P. (Ed). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (*23), 929-938. México.

VISUALIZACIÓN DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Claudio Enrique Opazo Arellano, Jesús Grajeda Rosas y Rosa María Farfán Márquez
Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN. México
opazoferrari_claudio@hotmail.com, grajedar@cinvestav.mx, rfarfan@cinvestav.mx

Resumen. El artículo reportado es fruto de las reflexiones que se dieron durante nuestro primer semestre de Maestría en el Cinvestav – IPN. En este contexto, nuestro trabajo presenta una propuesta de una situación de aprendizaje en un entorno tecnológico. Para ello, se utilizaron como referencias las reflexiones con base a algunos elementos tales como el uso de las computadoras en el aula o bien, trabajos realizados en torno a la aplicación de programas educativos de orden tecnológico, como es el caso particular de Geogebra. La propuesta de nuestro trabajo, pone como objeto matemático a la función cuadrática de tal forma de presentar a la visualización del comportamiento gráfico de ésta, a partir de la variación de sus parámetros, utilizando el programa antes mencionado
Palabras clave: Socioepistemología, Visualización, Función cuadrática, GeoGebra
Abstract. The paper reported is the result of the thoughts that occurred during our first semester of Masters in the CINVESTAV-IPN. In this context, our work presents a proposal for a learning situation in a technological environment. For this, we used as references, reflections based on elements such as the use of computers in the classroom or, work done on the application of a technological education programs, as is the case of Geogebra. The proposal of our work puts as a mathematical object to the quadratic function, in such a way to present a graphic the visualization of this behavior, from the variation of its parameters, using the above program
Key words: Socioepistemology, Visualization, Quadratic function, GeoGebra

Introducción

Nuestro trabajo presenta la propuesta de una situación de aprendizaje elaborada por estudiantes de Maestría del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, con objeto de ser aplicado a estudiantes del nivel Medio Superior de los cursos normales en México. Ahora bien, con la implementación de esta situación de aprendizaje se espera observar si el alumno puede reconocer, cómo afecta la variación de los parámetros de la expresión algebraica de la función cuadrática en su representación gráfica, mediante el uso de la tecnología como herramienta en la construcción del conocimiento matemático y del desarrollo de habilidades en éste, al momento de construir la gráfica de una función cuadrática.

Lo anterior se espera abordar bajo la implementación de GeoGebra, programa matemático interactivo en el mundo educativo, el cual propone el desarrollo de Hojas Dinámicas como medio de interacción entre sus usuarios. Con base en lo anterior, se han desarrollado algunas Hojas Dinámicas, unas para la función cuadrática de la forma $Y = ax^2 + bx + c$ y otras para la función cuadrática factorizada de forma$Y = a(x + b)^2 + c$. Ahora bien, a la par se han elaborado hojas de actividades en las cuales se indican los pasos a seguir en lo que respecta a cada una de las Hojas Dinámicas, ello con el fin de que el estudiante logre visualizar y adquirir en su construcción del conocimiento matemático, cómo afecta la variación de los parámetros al comportamiento de la

gráfica, esto a la espera de que el estudiante adquiera habilidades que le permitan posteriormente realizar el bosquejo de alguna función cuadrática o bien, una de tipo polinomial, sin necesidad de utilizar un software determinado.

En este contexto, es importante indicar que nuestra hipótesis inicial, considera el uso de las nuevas tecnologías en la enseñanza como un factor que ayudará a que se dé de mejor manera el proceso de enseñanza y aprendizaje, ya que posee elementos técnicos que entre otras cosas, permite visualizar funciones de cualquier tipo de manera dinámica y rápida, junto con facilitar procesos de cálculo. Esto implica un cambio en el esquema tradicional de enseñanza y una evolución por parte del profesor y el alumno en relación al uso de las tecnologías en la actualidad.

Ahora bien, destacamos que nuestro trabajo toma como eje principal a la visualización, la cual se entiende como proceso mental, en donde lo visible de este proceso es la obtención de tal, a partir de ser evocada mediante algún tipo de grafismo (gráfica matemática, bosquejo gráfico, dibujo, escrito o fórmula), así como también por el lenguaje o los gestos de cierto sujeto (Bosch, 1994). Por otra parte Cantoral y Montiel (2001) dicen que: "Se entiende por visualización a la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual" (p. 14). En este contexto se ha elaborado entonces, la situación de aprendizaje de tal manera que el estudiante logre al concluir las actividades, visualizar cualquier función cuadrática y con ello crear habilidades para que con posterioridad, éste pueda visualizar una función polinomial de grado superior a dos.

En relación a lo anterior declaramos que el foco de atención de nuestro trabajo, está puesto en la *visualización*, ya que entendemos la relevancia de este campo de estudio que hoy la Matemática Educativa ha abordado y reportado, con objeto de hacer ver otras áreas a desarrollar en el proceso de enseñanza y aprendizaje, tal que en los estudios realizados, se ha observado el privilegio del contexto algebraico en el discurso de la matemática escolar del nivel Medio Superior y Superior tal como lo reporta Campos (2003). Dicha situación, preocupa a la comunidad por el hecho de observar un alejamiento a los aspectos visuales. Por ello, la situación de aprendizaje propuesta pretende justamente atender lo que el discurso escolar ha olvidado. Finalmente, nos interesa indicar que el diseño que hemos propuesto, es sustentado por la visión Socioepistemológica, la cual tiene como función, buscar las bases para que la reorganización matemática sea coherente y pertinente con los fenómenos didácticos a través de relaciones complejas que abarcan dimensiones epistemológicas, cognitivas, didácticas y sociales.

Metodología

El diseño metodológico del presente trabajo de investigación presenta sus bases en la Ingeniería Didáctica, esto a partir de la búsqueda de una plataforma que cumpliera con la necesidad de contar con un bosquejo claro y estructurado a la hora de poner a prueba nuestras actividades.

Es importante reconocer que el término Ingeniería Didáctica, surge en el seno de la escuela francesa a comienzo de los años ochenta, en analogía al quehacer en ingeniería, ya que ella basa su trabajo en el conocimiento científico, a partir de la toma de decisiones y el control sobre las inherentes componentes del proceso. De esta manera, tal como lo expone García (2007) la Ingeniería Didáctica, se constituye como una metodología de investigación aplicable a los productos de la enseñanza o derivados de ella, como es la metodología de producción para guiar la experimentación en clase.

Teniendo en cuenta lo anterior dejamos como antecedente, el hecho de que la Ingeniería Didáctica, se basa a su vez en la teoría de la Transposición Didáctica y en la teoría de Situaciones Didácticas. A lo anterior, sumamos la relación que genera la Ingeniería Didáctica con el ambiente escolar, al establecer ciertas analogías con el trabajo de un ingeniero, el cual considera como referencia en su desarrollo profesional, centrar su esfuerzo y dedicación en torno a un trabajo determinado, con base en un conjunto de secuencias de clases concebidas, organizadas y articulas de forma coherente, al igual que en el caso de un profesor.

Ahora bien, creemos relevante destacar la existencia de dos tipos de Ingenierías Didácticas, la de investigación y la de producción. La primera, se considera una metodología de investigación y busca caracterizar a-priori una situación y confrontarla con un análisis a-posteriori de la realidad observada. La segunda es más estandarizada, pues cumple con todos los requisitos de una ingeniería, es decir, es eficaz, posee solidez y se adapta a diversos contextos.

Es importante indicar que la Ingeniería Didáctica cuanta con cuatro fases fundamentales para la elaboración de ella, las cuales son descritas por López (2009) de la siguiente manera:

1) Análisis preliminar.
2) Análisis a priori y diseño de la situación didáctica.
3) Experimentación.
4) Análisis a posteriori y validación.

En relación a lo anterior, indicamos que al considerar las distintas fases de la Ingeniería Didáctica y a razón de la aplicación del diseño de situación de aprendizaje, se ha considerado desarrollar solo

dos las cuatro fases de la ingeniería, siendo estas, el análisis preliminar y el análisis a priori. En el caso de la primera, desarrollaremos un análisis del concepto de visualización a partir de la revisión de los textos escolares de matemática delNivel Suprior en México, de tal forma de observar en ellos, cómo es abordado el tema de nuestro interés. Para la segunda fase, levantaremos las hipótesis en torno a las posibles respuestas que pudiésemos obtener de parte de los estudiantes que realicen la situación de aprendizaje. La decisión de solo considerar estas dos fases, es en virtud de que al ser nuestra primera experiencia, las reflexiones que surjan de ella, nos ayudaran a lograr en el futuro, un instrumento más objetivo y próspero en torno a nuevas investigaciones.

Nos parece relevante indicar en este contexto, que tanto para el caso de la experimentación y análisis a posteriori, nos planteamos la tarea de dar cabida de estas dos fases restantes, en un próximo trabajo. Ahora bien, debemos destacar además, que la Ingeniería Didáctica la entenderemos en esta oportunidad, como una metodología de investigación, en consideración a una de las formas de las cuales se puede percibir a ella.

Los instrumentos de investigación

Nuestra situación de aprendizaje, cuenta con el desarrollo de algunas Hojas Dinámicas en GeoGebra y sus correspondientes hojas de trabajo dirigidas al estudiante, de tal manera de que éste, pueda trabajar de manera autónoma, sin necesidad de que el profesor intervenga en la dicha actividad. Ahora bien, a continuación, ofrecemos algunos ejemplos de las Hojas Dinámicas que se han confeccionado para los fines antes descritos. En la figura 1se muestra la carátula dela primera Hoja Dinámica, la cual aborda la función cuadrática de la forma $Y = ax^2 + bx + c$.

Figura 1. Carátula de la Hoja dinámica de la actividad uno.

En la figura 1 se muestra una parte de la Hoja Dinámica, donde se intenta dar un primer acercamiento a la función cuadrática. En esta Hoja Dinámica, mientras más se recorre el deslizador en dirección a la derecha, más se cierra el segmento de parábola, es decir, Alexis se pone más feliz. En las hojas de trabajo vienen preguntas como: Para la expresión $Y = ax^2$ ¿Qué valores de a crees que harán que nuestro amigo se ponga más feliz? ¿Cómo tendría que ser a para que se ponga triste (que la boca se voltee para abajo)? y una serie de preguntas cuya finalidad es,

encaminar al alumno a construir su propio conocimiento en relación a los comportamientos tendenciales de las funciones.

Indicamos que para la función cuadrática de la forma $Y = ax^2 + bx + c$ se han desarrollado tres Hojas Dinámicas en total, mientras que la expresión de la forma $Y = a(x+b)^2 + c$ se ha desarrollado solo una Hoja Dinámica, cuya carátula se muestra en la figura 2.

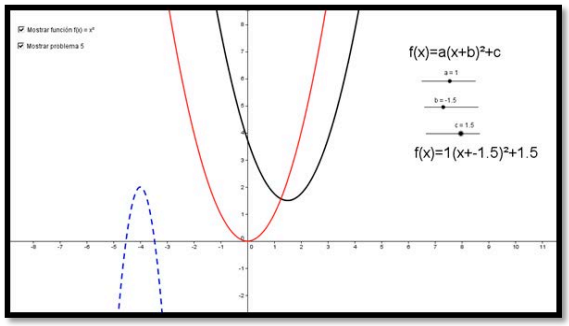


Figura 2. Carátula dela Hoja Dinámica para la manipulación de la función $Y = a(x+b)^2 + c$.

Indicamos que en la hoja de trabajo correspondiente a la figura 2,se dan una serie de indicaciones en donde se le pide al alumno que mueva libremente los deslizadores marcados con las letras *a, b* y *c* con la finalidad de que puedan ir reconociendo cómo afectan a la gráfica, los cambios de valores. Posteriormente se asigna un conjunto de preguntas que permitan guiar al alumno en la construcción de aquellos valores que debe tener *a, b* o *c* para que la gráfica se contraiga o dilate en primera instancia, luego para que se desplace horizontalmente a la izquierda o derecha, o bien, lo haga verticalmente para arriba o para abajo respectivamente, en función de la variación de los parámetros que representan a la expresión algebraica de la función cuadrática. Finalmente se le pide al alumno que prediga qué valores deben tener los parámetros a, b y c para que la gráfica negra de acuerdo a la figura 2 quede arriba de la gráfica azul puntuada. Todo ello, con la finalidad de que el estudiante pueda tener un control de su propio aprendizaje y por cierto, sobre la construcción del conocimiento que ha desarrollado hasta ese apartado.

Resultados Preliminares

Destacamos en este apartado, el que nuestro trabajo no ha sido aplicado aún, sin embargo, nos parece importante mencionar los resultados a priori. Ello porque es parte de nuestra estructura metodológica y porque con base en los estudios que hemos realizado sobre el tema, estamos en condiciones de hacer algunas indicaciones.

A partir de la aplicación del instrumento, se espera que el estudiante pueda:

- Tener acceso fácil a las instrucciones que se brinden en éste.

- Manifestar complicaciones con los parámetros de las funciones presentadas. Tal que las investigaciones dan cuenta de que los estudiante, son parte de una formación escolarizada, con base a estructuras clásica de la enseñanza, manifestadas en procesos algorítmicos.
- De los parámetros que son parte de la expresión algebraica de la función cuadrática $Y = ax^2 + bx + c$; creemos que los estudiantes tendrán mayor complicación en el parámetro *b*. Esto porque la formación que han recibido ellos, solo da espacio al análisis de *a* y *c*, lo cual manifiesta una perspectiva algorítmica, centrada en los aspectos esenciales tales como: Poner atención al signo que acompaña al primer parámetro, de tal manera de observar su concavidad. Así también, es el caso del último parámetro, donde la enseñanza es puesta en escena, como el punto de intersección de la parábola con el eje de las ordenas.
- De nuestra última actividad, esperamos que los estudiantes puedan presentar complicaciones cuando se les solicite expresar el bosquejo que representa el comportamiento de la expresión algebraica de la función cuadrática de la forma: $Y = a(x + b)^2 + c$.

Reflexiones Actuales

Dar espacio a la reflexión en torno a un proceso siempre es sano y de necesidad en torno a éste. Es por ello entonces, el surgimiento de nuestras prospectivas en torno al trabajo realizado hasta el momento

Uno de los puntos que debemos destacar en primera instancia, es el hecho de que nuestro trabajo ha presentado ajustes en torno a su aplicación y por cierto a su estructura, en virtud de obtener un producto de calidad en ambos casos. Ahora bien, el trabajo se ha desarrollado de forma íntegra como parte de nuestra formación académica y profesional.

Es importante destacar, que nuestros intereses académicos e investigativos, están puestos en dar espacio a la reflexión en torno al concepto de *Visualización de la funciones polinomiales*. Principalmente, con objeto de abrir el abanico en torno a las acciones de enseñanza que hoy viven en la escuela y por cierto, en la formación profesores. En ese contexto, es que se ha estructurado la situación de aprendizaje que ha sido una de las ganadoras del concurso de carteles del coloquio de doctorado del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav – IPN.

Ahora bien, indicamos que los puntos de relevancia para el grupo, son el hecho de tener la posibilidad de levantar una propuesta que esté en la línea del campo de estudio de la *visualización*, ello porque es de nuestro interés poder profundizar en un ámbito donde creemos que aún se

puede aportar en torno a los elementos existentes a la fecha. Por ello es que nuestro trabajo es sin duda una colaboración a lo ya sea realizado, esto en la medida en que se valora la utilización de las nuevas tecnologías en el ámbito de estudio de la *visualización*, situación para la cual solo se ha utilizado como estudio y reflexión, el uso de las calculadoras gráficas, a diferencia nuestra, donde abordamos el problema desde el uso de las computadoras a partir del programa educativo de alto uso en este momento, hacemos referencia a Geogebra, programa que desde sus inicios fue considerado como un elemento e instrumento que daría apoyo educativo en las aula de matemáticas. A lo anterior, sumamos el hecho de que nuestro trabajo aún está en fase de desarrollo, por tanto, nos hemos puesto como desafío dar cabida a la etapa restante, la cual es aplicar el instrumento que se ha construido, desde donde se espera que surjan conclusiones y levantamientos de juicios, sobre el uso de las computadoras mediante el programa antes mencionado y por cierto en torno al concepto de *visualización*. Lo cual nos es de gran relevancia, ya que desde nuestra perspectiva, es un elementos a considerar en las nuevas propuestas de enseñanza, sobre todo, cuando en algunos lugares ya se han hecho acercamientos con objeto de probar y dar espacio a la reflexión de los resultados obtenidos.

Por último, nos parece importante plantear algunas visiones que el grupo posee en torno a los elementos que están en juego en este escrito. Lo primero es señalar que nos es relevante el poder exponer nuestro trabajo como estudiante de Maestría en una instancia académica como lo es Relme, ya que ello nos hace ser cuestionados y dar cabida a partir de esto a nuevas líneas de trabajo. A lo anterior, sumamos el hecho de estar convencidos de que nuestra línea de trabajo posee un espacio de reflexión aún abierta, por lo mismo nos ha interesado el dedicar nuestro trabajo a la confección de una situación de aprendizaje que vaya en la línea del uso de las nuevas tecnologías como herramienta de apoyo al proceso de enseñanza y aprendizaje. Esto es algo importante para el grupo, ya que establecemos nuestra posición en el uso de las tecnologías, no como algo absoluto dentro del discurso matemático escolar, sino por el contrario, como la posibilidad de acercar el conocimiento matemático a estudiantes que viven en una realidad alejada del papel y el lápiz en nuestra actualidad.

Referencias bibliográficas

Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la Proporcionalidad.* Tesis Doctoral no publicada. Universidad Autónoma de Barcelona, España.

Campos, C. (2003). *La argumentación gráfica en la transformación de funciones cuadráticas. Una aproximación socioepistemológica.* Tesis de Maestría no publicada. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México, D.F.

Cantoral, R. & Montiel, G. (2001). *Funciones: Visualización y pensamiento matemático.* México: Pearson Educación.

García, M. (2007). *Resignificando el concepto de función lineal en una experiencia educativa a distancia. Un estado del arte*. Tesis de Maestría no publicada.CICATA-IPN. México.

López, A. (2009). *Un estudio sobre la noción de función Constante.*Tesis de Licenciaturano publicada. Universidad Autónoma de Yucatán. México.

MUJERES Y MATEMÁTICAS ESCOLARES: UN ESTUDIO LONGITUDINAL, SOCIOCULTURAL CON ESTUDIANTES MEXICANAS

Claudia Rodríguez Muñoz, Sonia Ursini Legovich
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México
claurom65@yahoo.com, soniaul2002@yahoo.com.mx

Resumen. Desde la Teoría feminista y la Teoría de las Representaciones Sociales se analiza la relación que existe entre los procesos identitarios de género, la construcción representacional de la Matemática y el desempeño exitoso de estudiantes mujeres en esta asignatura. Empleando una metodología cualitativa- interpretativa, donde se combinan técnicas de la antropología y la psicología social se da seguimiento a 20 estudiantes de primaria durante tres ciclos escolares. La triangulación permite describir las identidades de género que favorecen la construcción de representaciones sociales de la Matemática escolar que caracterizan a las estudiantes con un desempeño exitoso
Palabras clave: Identidad de género, Representaciones, éxito
Abstract. From Feminist Theory and the Theory of Social Representations we analyze the relationship between gender identity processes, representational construction of mathematics and the successful performance of female students in this course. Using a qualitative-interpretative methodology, which combines techniques of anthropology and social psychology, are tracked 20 primary school students for three academic years. Triangulation allows describing gender identities that favor the construction of social representations of school mathematics that characterize successful students performing
Key words: Gender identity, social representations, success in mathematics

Introducción

En Educación Matemática los estudios de género durante casi cuatro décadas han dado cuenta de las diferencias en el desempeño matemático entre estudiantes de distintos niveles educativos, enfatizando la presencia de una gran variedad de factores a los que se atribuyen dichas diferencias de género (Fennema, 1974; Burton 1995; Ursini y Sánchez 2008; Martinot, Bagés y Désert, 2012). La revisión de la literatura nos permite afirmar que hasta el momento son escasos los estudios que visibilizan qué está detrás de la diversidad de desempeños en Matemáticas por parte de las estudiantes de educación básica, en los que se analicen los factores socioculturales, identitarios y representacionales.

Investigaciones previas (Inmujeres, 2009 y 2010) en las que se han explorado las actitudes, creencias, motivaciones, afectividad y logro académico de las y los estudiantes en la asignatura de Matemáticas, nos han permitido mirar las distintas formas en que las mujeres construyen y negocian su *"ser estudiantes de Matemáticas"***,** formas diversas de construir su "***ser mujeres***" y diversas maneras de relacionarse con la comunidad escolar. Esta información nos ha llevado a preguntarnos si la condición de género, es decir, ser mujer, determina el desempeño de las estudiantes en Matemáticas; si las mujeres tienen un modo específico de enfrentar las tareas Matemáticas; y qué caracteriza a las estudiantes que son exitosas en Matemáticas.

Observar en esas investigaciones previas las distintas configuraciones genéricas, representacionales, cognitivas y afectivas, dieron pauta a modificar el lugar desde donde se puede abordar la problemática de género e intentar comprender mejor la relación que guarda la identidad de las mujeres frente a esta disciplina. En este artículo se presentan algunos resultados de una investigación cuyo propósito era explorar y analizar la identidad social y cultural, prestando especial atención al papel de las emociones, creencias, actitudes, valores y autoconcepto de las estudiantes en relación a la Matemática, para ello se consideran los ámbitos donde se dan las interrelaciones entre estudiantes, docentes y el conocimiento matemático, con el fin de situar la visión real o simbólica (representación social) que construyen las estudiantes sobre la Matemática escolar en relación con su identidad sociocultural (identidad de género).

Marco teórico

La investigación está referida a dos áreas de estudio interrelacionadas:

1. La identidad sociocultural (de género), entendida como el resultado de procesos cognitivos, evaluativos y emocionales. Su surgimiento, estabilidad y cambio están implicados en diversos procesos psicosociales, de naturaleza grupal, individual y colectiva. La identidad sociocultural (de género) contribuye a organizar la experiencia de las personas en su mundo social, ya que influye en la regulación de la autoimagen y en la conducta de los seres humanos dentro de los grupos de pertenencia.

Se considera que cada estudiante está, al mismo tiempo, como persona y como integrante de un aula y de un grupo sociocultural más amplio. Es decir, retomamos el concepto de constitución de *sujetos de género* (Lagarde, 1997) que permite la sintetización de las diferentes condiciones sociales (históricas, culturales, contextuales) en las que viven cotidianamente las estudiantes y de los colectivos (el aula de Matemáticas, la familia) a los que pertenecen.

2. Nos apoyamos en la Teoría de las Representaciones Sociales (Moscovici, 1961) que nos ofrece una teoría y una categoría de análisis que nos ayuda a evaluar, categorizar y entender la realidad social; como guía constitutiva y reguladora de las interacciones sociales, como una expresión del pensamiento cotidiano, compartido y elaborado por un grupo social. Como afirma Jodelet (1986) se trata de una teoría que permite conocer la manera en que los sujetos sociales aprehenden los acontecimientos de la vida diaria, las características de su medio ambiente, las informaciones que en él circulan.

Consideraciones metodológicas

Los datos que aquí se describen son parte de los recabados en un estudio longitudinal realizado con 20 estudiantes mujeres de condición socioeconómica media baja, a las que se dio seguimiento durante tres ciclos escolares (de 4° a 6°) de primaria, pertenecientes a una escuela pública, ubicada al sur de la Ciudad de México. Los resultados de pruebas nacionales estandarizadas ubican a esta escuela en un nivel por encima de la media estatal y nacional en la asignatura de Matemáticas. De estas alumnas se ha realizado un seguimiento micro etnográfico y psicosocial en aula de medios electrónicos del plantel escolar, en 24 ocasiones, por lapsos de 2:30 horas cada ocasión y en aula regular durante 9 veces en distintos momentos.

Las técnicas e instrumentos para la toma de datos fueron: cuestionario de Matemáticas asociaciones libres, escala AMMEC (versión abreviada) (Ursini, Sánchez y Orendai, 2004), grupos focales, entrevistas en profundidad y cuestionarios de contexto para familias.

El enfoque metodológico empleado en esta investigación es cualitativo interpretativo, fundamentado en el análisis de la subjetividad de las participantes, donde se combinan técnicas propias de la antropología y de la psicológica social para dar cuenta de los procesos de interrelación en el contexto del aula de Matemáticas, las construcciones identitarias de género, las construcciones representacionales y el desempeño matemático.

Resultados

Las estudiantes de primaria

En este apartado tratamos de dar un panorama del ambiente en el cual viven y se desarrollan las 20 estudiantes mujeres de primaria que participan en nuestro estudio. Viven en la zona sur de la Ciudad de México y en su mayoría, pertenecen a una clase económica media baja, exceptuando tres estudiantes cuya condición es de mayor desventaja. Dos de las estudiantes nacieron en una zona rural, una de ellas se reconoce como perteneciente a un pueblo originario del estado de Oaxaca, las demás nacieron en la capital del país. Las edades de las estudiantes al inicio de la investigación era de 9 ó 10 años y al término de la misma sus edades estaban entre los 11 y los 12 años.

Destacamos los escenarios de promoción y consumo cultural de diez de las estudiantes, dónde las familias tienen prácticas lectoras de libros y periódicos, acuden a eventos como danza, teatro, cine, conciertos, favorecen las visitas a museos, exposiciones, también facilitan el acceso a recursos electrónicos como computadoras e internet. El promedio de instrucción escolar de las madres, padres o tutores de estas estudiantes es de bachillerato.

La otra mitad de las estudiantes viven en ambientes de menor promoción cultural y en un par de casos esta es nula.

El ambiente familiar de ocho participantes motiva la equidad de género en diferentes rubros de su cotidianidad, como son la asignación de tareas de orden doméstico, derechos y obligaciones de quienes integran el grupo familiar.

En particular nos interesa resaltar los resultados del ambiente familiar de cuatro estudiantes que por sus trayectorias académicas exitosas en Matemáticas (promedios de 9.8, 9.6, 9.5 y 9.4) y por la participación en todas las sesiones de recogida de datos resultaron interesantes para la investigación. Además, los análisis de la investigación más amplia revelaron la significatividad y representatividad para conocer lo que hay detrás de enfrentamientos exitosos en las tareas Matemáticas en la escuela primaria.

Las historias de vida de tres de las estudiantes seleccionadas nos permiten afirmar que los modelos de liderazgo, acompañamiento, fortaleza, afectividad, son compartidos por las y los adultos que comparten la crianza de estas estudiantes. La otra estudiante que tiene un desempeño exitoso en Matemáticas nos comparte en su historia de vida situaciones que nos permiten observar la capacidad para sobreponerse exitosamente a circunstancias de riesgo en su ambiente de crianza, ella mantiene un alto interés por destacar en las actividades académicas.

Las estudiantes como aprendices de Matemática

En este apartado presentamos el ambiente del aula, las interacciones en clase de matemáticas y la condición de las estudiantes como aprendices de esta asignatura.

Para comprender mejor como se conforman las representaciones sociales sobre la Matemática escolar, planteamos diferenciar los procesos afectivos-cognitivos, que tienen un carácter individual (aun cuando los entendemos como productos sociales) de los procesos de interacción y contextualización que son de carácter abiertamente social.

La cultura del aula de Matemáticas se devela en los grupos focales, espacio en el que las estudiantes expresan sus experiencias y emociones respecto a las distintas formas de enseñanza de las docentes que fueron titulares de los grupos de cuarto a sexto grado de primaria.

Las 20 estudiantes pertenecieron a dos grupos distintos en cada ciclo escolar y siempre fueron guiadas por docentes mujeres. Para lograr los propósitos de este reporte describiremos las características más relevantes de las profesoras de grupo por ser importantes para los fines de este estudio.

En tercero y sexto de primaria 10 de las estudiantes tuvieron dos profesoras que diseñaban actividades atractivas para el estudiantado, problematizaban situaciones frente al grupo, trabajaban en equipo, discutían y argumentaban los resultados. Todas y todos participaban de la validación del conocimiento, siendo esta experiencia muy satisfactoria para las estudiantes y produciéndose una mayor comprensión de los contenidos matemáticos.

Los discursos de las estudiantes durante los grupos focales nos permitieron saber que los contenidos abordados por las profesoras integraban una visión de la Matemática como un constructo socio cultural, que favorecía la autoconfianza de las estudiantes. A través de las observaciones pudimos constatar que las profesoras desarrollaban actividades que creaban la idea de una Matemática dinámica, donde se problematizaba y se posibilitaba que las alumnas construyeran caminos para resolver problemas matemáticos.

Las otras profesoras que atendieron a las estudiantes tenían una metodología distinta, en general proponían actividades y tareas Matemáticas siguiendo un patrón tradicional, basado en la transmisión de conocimientos, en ejemplificar en el pizarrón y solicitando la solución de una serie de ejercicios o problemas. Las y los estudiantes al presentar resueltas las tareas matemáticas no eran interpelados por sus errores, no existía argumentación sobre las soluciones propuestas, se evaluaban por aciertos y errores exclusivamente.

Las actividades realizadas en clase por las profesoras de corte tradicional carecían de significado para las estudiantes. Los esfuerzos de las docentes eran estériles por falta de receptores de sus discursos, sus ejemplos, sus explicaciones; salvo estudiantes que por su resaltada motivación individual se mantenían atentas al trabajo matemático.

En la figura 1 se presentan los elementos que conforman la representación social sobre las matemáticas escolares de las estudiantes de primaria, estos elementos los obtenemos al revisar los términos evocados en las asociaciones libres.

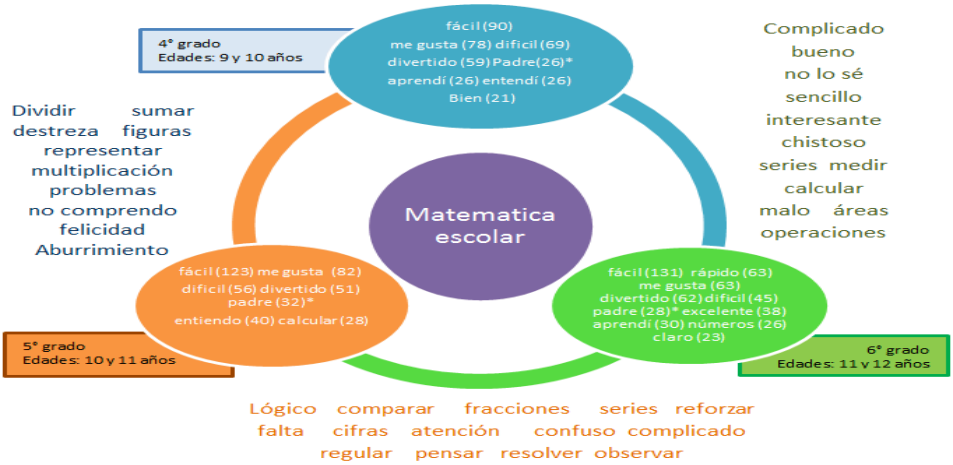


Figura 1. Estructura de la representación social de la matemática escolar en las estudiantes de primaria a lo largo de tres años.

Al aplicar la técnica de asociaciones libres las estudiantes expresaron, de manera espontánea, un número importante y variado de información acerca de la matemática escolar, llena de nociones de orden de *sentido común y de afectividad.*

Las nociones socio-cognitivas que aparecen en las palabras evocadas a partir de los ítems empleados como inductores, constituyen la estructura de la representación social de la matemática escolar de las estudiantes de primaria.

La matemática escolar es aprehendida por las estudiantes con una gran diversidad de significados que ponen de manifiesto un conocimiento heterogéneo acerca del fenómeno. El núcleo organizador de la representación de la matemática *escolar* establece cuatro cogniciones elementales que modelan en diferentes momentos de la investigación el sentido que para estas estudiantes de primaria tienen la matemática escolar*: fácil, difícil, gusto y diversión* lo que da a la representación su significado y coherencia (Abric, 2001).

El *nivel informativo* revela un conocimiento del *sentido común* del impacto que tienen la matemática escolar en la vida cotidiana y la vida escolar. Aun cuando el núcleo central está compuesto por términos diversos, esta información se puede traducir como una cognición compartida donde coinciden la gran mayoría de las estudiantes: "la matemática escolar es atractiva".

En el nivel periférico, se pueden observar diversos aspectos relacionados con valoraciones afectivas y socio-cognitivas en torno al aprendizaje de la matemática. Por ejemplo, aparecen con frecuencia asociaciones que reflejan seguridad, felicidad, interés, comprensión de los temas planteados, esto se hace más frecuente en la toma de sexto grado. Encontramos que otras estudiantes expresan dificultad, confusión, aburrimiento, sin embargo los términos que denotan un

aprecio menor por la matemática escolar fueron evocados con menos frecuencia a lo largo de la investigación. Consideramos que la toma de consciencia de las niñas sobre su rol como estudiantes de matemáticas fue un factor que abonó a la mejora de sus representaciones de la matemática escolar.

En la Tabla 1 se presentan los datos obtenidos en las tres tomas de la escala de actitudes hacia la matemática y la autoconfianza para trabajar con matemáticas.

Tabla 1. Frecuencias de la Escala AMMEC tomadas durante los ciclos escolares 2009-2010, 2010-2011 y 2011-2012.

Puntos de la escala	Actitudes hacia la matemática 2009-2010	Actitudes hacia la matemática 2010-2011	Actitudes hacia la matemática 2011-2012	Auto-confianza para trabajar en matemáticas 2009-2010	Auto-confianza para trabajar en matemáticas 2010-2011	Auto-confianza para trabajar en matemáticas 2011-2012
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
2	9	8	6	8	3	3
3	11	12	14	9	15	12
4	0	0	0	3	2	5

Tabla 1 La correspondencia es: 0= totalmente en desacuerdo, 1= en desacuerdo; 2= indeciso; 3= de acuerdo; 4= totalmente de acuerdo.

La afirmación que obtuvo respuestas más positivas de las estudiantes fue: "Es importante aprender matemáticas" con 3.8 en promedio, lo que significa que la mayoría de estas chicas han internalizado una idea recurrente en nuestra sociedad cultural y escolar. Otras afirmaciones que tienen actitudes altamente positivas son "Me gustaría usar la matemática cuando vaya a trabajar" 3.6, "Me gusta la clase de matemáticas" 3.54, "Me gustan la matemática" 3.45 y "Puedo resolver los problemas planteados en los ejercicios de clase o las tareas" 3.45.

En cuanto la autoconfianza las estudiantes son muy positivas al contestar las afirmaciones "Si un problema no sale a la primera, le busco hasta resolverlo" 3.54 y "En el equipo defiendo mis ideas" 3.2, lo que podría estarnos indicando la perseverancia y la capacidad de argumentación que ha desarrollado este grupo de estudiantes. Pensamos que la mejora en actitudes y autoconfianza en el tiempo está vinculada entre otras cosas al estado de consciencia de las estudiantes sobre su valía como aprendices de matemáticas.

Las estudiantes en el tiempo, su identidad genérica, sus desempeños en la Matemática escolar

En nuestro estudio hay diferentes momentos a señalar, momentos en los que se ponen en juego las identidades de género y se crean los conflictos cognitivos en relación a problemas matemáticos; momentos o situaciones de aula en que se dan largas discusiones y debates para dejar definida la posición con que asumen los cuestionamientos.

A lo largo del tiempo pudimos observar cambios favorables de algunas estudiantes que al tener consciencia de ser mujeres y ser aprendices de matemáticas, consiguieron un mejor afrontamiento de las tareas matemáticas. En contraste, con lo reportado en la primera sección de resultados, podemos afirmar que las estudiantes cuyas familias legitiman y reproducen los estereotipos de género no lograron mejorar su desempeño matemático, sus actitudes y autoconfianza se mantuvieron neutrales, mientras que su discurso era de alejamiento afectivo hacia esta asignatura.

Es a través de las entrevistas en profundidad que logramos percibir los elementos que franquean la construcción de sus identidades genéricas. Las estudiantes más exitosas en matemáticas son aquellas que crecen en ambientes donde se promueve con mayor frecuencia la equidad de género, en familias donde se fomenta el desarrollo de habilidades, conocimientos, capacidades, valores, afectividad de la misma forma en mujeres que en hombres.

A modo de conclusión

Se observó que las formas de reaccionar tienden a ser más favorables para todas las estudiantes cuando sus docentes proponen estrategias didácticas que las legitiman como comunicadoras matemáticas, esto modifica la participación, la autopercepción y la autoconfianza como aprendices de Matemáticas.

Confirmamos que la construcción del conocimiento en el aula de Matemáticas no está limitada a la interacción del profesor y sus estudiantes, sino que abarca una serie de redes de interacción social (familia) que toca al entorno sociocultural de la clase. Esperamos que este estudio sobre la identidad genérica de las estudiantes y la representación social sobre la matemática escolar pueda orientar a docentes en la construcción de acciones afirmativas que permitan que las estudiantes accedan a un mejor enfrentamiento con las tareas matemáticas en el aula.

Referencias bibliográficas

Abric J.C. (2001). *L'organisation interne des représentation sociales*, en Guimeli, R (edit) Structures et transformations des représentations. Lausanne : Delachaux et Nestlè.

Burton, L. (1995). Moving Towards a Feminist Epistemology of Mathematics, *Educational Studies in Mathematics* 28(3), 275–291.

Fennema, E. (1974). Mathematics Learning and the Sexes: ARe-view. *Journal for Research in Mathematics Education 5(1974), 126-29.*

INMUJERES (2009). *Aspectos educativos y género. Modelos de intervención para el mejoramiento de las capacidades de aprendizaje en matemáticas.* Recuperado 17-06-2013 http://www.inmujeres.gob.mx/index.php/biblioteca-digital/cuadernosgenero.

INMUJERES (2010). *Actitudes y creencias acerca de las matemáticas. Intervención con perspectiva de género en escuelas secundarias.* Recuperado 17-06-2013 http://www.inmujeres.gob.mx/index.php/biblioteca-digital/cuadernosgenero.

Lagarde, M. (1997). *Identidad de género y feminismo.* Costa Rica: Instituto de Estudios de la Mujer, Universidad Nacional.

Jodelet, D. (1986). La representación social: fenómenos, concepto y teoría. En S. Moscovici (coord.) Psicología Social II (470-494) México: Paidós.

Martinot, D., Bagès, C., y Désert, M. (2012). French children's awareness of gender stereotypes about mathematics and reading: When girls improve their reputation in math. *Sex roles 66*(3-4), 210-219.

Ursini, S. y Sánchez, J. G. (2008). Gender, technology and attitudes towards mathematics: a comparative longitudinal study with Mexican students. *ZDM Mathematics Education* 40(4), 559 – 577.

Ursini, S., Sánchez, G., y Orendain, M. (2004). Validación y confiabilidad de una escala de actitudes hacia las matemáticas y hacia las matemáticas enseñadas con computadora. Educación Matemática, 16(3) 59-78.

MATEMÁTICA FUNCIONAL EN UNA COMUNIDAD DE CONOCIMIENTO. UNA SITUACIÓN DE ACUMULACIÓN EN LA FORMACIÓN DE INGENIEROS CIVILES

Johanna Mendoza y Francisco Cordero
CINVESTAV. México
ejmendoza@cinvestav.mx, fcordero@cinvestav.mx

Resumen. Este estudio problematiza dos aspectos centrales: el no reconocimiento de los usos del conocimiento matemático (CM) propios de la ingeniería y un discurso matemático escolar que no formula marcos de referencia para resignificar el CM en el dominio de la ingeniería. Para abordar la problemática se selecciona una situación de acumulación propia de la ingeniería civil, la cual genera una argumentación de estabilidad, donde la graficación fue el modelo de las resignificaciones de comportamientos tendenciales. Así, finalmente se reconoce el argumento de estabilidad, con ingenieros en formación, en el análisis de los patrones de tendencia con la variación, en la situación específica
Palabras clave: graficación, modelación, ingeniería, comunidad de conocimiento
Abstract. This study problematizes two central aspects: non-recognition of the uses of mathematical knowledge (CM) of engineering and school mathematical discourse makes no frameworks for meaning to the CM in the domain of engineering. To address the problem of selecting an accumulation situation own civil engineering, which generates a stability argument where graphing was the model of trend behaviors resignifications. So, finally recognized the argument of stability, with engineers in training, analysis trend patterns with variation in the specific situation
Key words: graphing, modeling, engineering, knowledge community

Introducción

En esta investigación se caracteriza a la graficación como un modelo de las resignificaciones de los comportamientos tendenciales, generadas por una argumentación de estabilidad en una situación específica de acumulación. Todo esto en la usanza de una comunidad de conocimiento matemático de ingenieros en formación. Se destacan los comportamientos tendenciales modelados gráfica y analíticamente. El objeto en cuestión consiste de las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, que modelan una tendencia asintótica. Se evidencian la alternancia entre los funcionamientos y las formas de lo analítico y lo gráfico propios de una comunidad de conocimiento que se sitúa en su cotidiano escolar, al someterse a una situación específica.

La enseñanza de la matemática para la ingeniería es la problemática que se aborda en esta investigación, donde prevalece el dominio de la matemática por encima del conocimiento de la ingeniería. Este hecho obliga desconocer la existencia de una dualidad de la matemática escolar y el carácter de herramienta con el que la matemática es asumida dentro de la ingeniería. Por ello, en la enseñanza de la matemática se formulan marcos de referencia que ignoran el uso del conocimiento matemático en el dominio de la ingeniería y más bien asumen un carácter autoritario sobre el conocimiento que debe ser enseñado.

Así, la problemática consiste en que no hay marcos de referencia explícitos que ayuden a resignificar el conocimiento matemático en otros dominios disciplinares, como la ingeniería: se

desconoce su funcionalidad y sus usos, en las diferentes comunidades de conocimiento que la conforman.

Para abordar tal problemática, con ánimos de contribuir a pesar de su dimensión, en este estudio, se caracteriza el uso de la graficación al enfrentarse a una situación de acumulación de un fluido. Los participantes se someten a una Actividad diseñada donde se evidenciaron los usos de la graficación en la modelación de comportamientos tendenciales.

La graficación pasa a ser el enlace entre los diferente procedimientos analíticos. Al graficar lo que pudiera ser la solución de una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes, los ingenieros en formación, construyeron argumentos de estabilidad para caracterizar modelos gráficos y analíticos que hablan de la solución de la ecuación diferencial y a la vez de la situación de acumulación.

La teoría socioepistemológica

Desde sus inicios, la Teoría Socioepistemológica (TSE) ha planteado que la matemática escolar es de naturaleza dual. Este hecho amplió la problemática al incorporar la *justificación funcional* a los cuestionamientos del quehacer disciplinar de la Matemática Educativa. Ha sido muy importante ampliar esta problemática hacia otros dominios o prácticas de referencia donde la matemática adquiere sentido y significación (Cantoral y Farfán, 2003). Esto conllevó a ampliar la visión para entender la construcción del conocimiento matemático y el discurso matemático escolar (dME) con relación en otros dominios. Habrá entonces que favorecer una visión donde se permita resignificar los conocimientos matemáticos, que beneficie el uso de la matemática, que propicie el estudio no en sí del conocimiento sino de su función social (Mendoza, 2013).

La naturaleza dual de la matemática escolar consiste en entender que en algún momento la matemática es el objeto de estudio y en otro momento no lo es. Por ejemplo, hay individuos que estudian matemáticas para ser matemáticos. En ese sentido la matemática escolar trata a la matemática como un objeto de estudio. Pero también tenemos que entender que la matemática es un instrumento para otros dominios (Cordero, 2008).

Existe el profesional usuario del conocimiento matemático, no es matemático y usa la matemática, pero no como objeto de estudio. En este escenario impera la justificación funcional (Cordero, 2013; Cordero, Mena & Montalto, 2010). Es decir, el uso del conocimiento matemático está normado por las prácticas del trabajo de un profesional no matemático (Tuyub, Cordero y Cantoral, 2009).

Efectivamente interesa entender cómo un sujeto construye conocimiento, en su condición de

sujeto situado, que pertenece a una cultura, a una comunidad. Nos referimos a un sujeto social cuyas vivencias le han proporcionado conocimiento (Mendoza, 2013). El énfasis está en identificar la matemática funcional que emerge durante su actuar y así caracterizarla.

Cabe mencionar, que la TSE trata con tres escenarios diferentes de la matemática: el conocimiento matemático, el conocimiento escolar y el conocimiento del cotidiano, cada uno con diferentes funciones. Son varias las relaciones entre los escenarios. Sin embargo, interesa la que relaciona el conocimiento escolar con el conocimiento cotidiano, debido a que podría ofrecer elementos para trastocar el dME. El sistema educativo formula que la matemática es enseñada para afectar el cotidiano del ciudadano, y tal vez por ello, el conocimiento escolar se establece *para* el conocimiento del ciudadano, pero no así en el otro sentido. (Cordero, 2013, Mendoza 2013). Conviene preguntarse ¿cómo conoce y usa el conocimiento un ciudadano? Es decir, ¿cómo es el uso del conocimiento desde el ciudadano?

En nuestro caso el ciudadano es el ingeniero, de ahí nos hemos preguntado el uso del conocimiento matemático *desde* la ingeniería. El ingeniero se encuentra en interacción con otros ciudadanos y de esta manera está presente en diversas situaciones, en algunas de ellas hace uso de conocimiento matemático.

El uso del conocimiento matemático desde el ámbito de la ingeniería y la situación específica

Seleccionamos una situación específica, la cual le hemos llamado: acumulación de un fluido. Esta presume estar en el ámbito de la ingeniería: por un lado, aparece en la ingeniería en formación y, por el otro lado, aparece en la jerga disciplinar de la ingeniería (Solís, 2012 y Mendoza & Cordero, 2011).

La situación específica genera una argumentación de estabilidad, en la cual la graficación es el modelo de las resignificaciones de comportamientos tendenciales, con procedimientos de variar parámetros e instrucciones que organizan comportamientos. Los usos de las gráficas son las modelaciones que se resignifican confrontando sus funcionamientos y formas a través de múltiples realizaciones, realizaciones de ajustes, construcción de patrones y desarrollo del razonamiento.

El que interviene en la situación específica es la comunidad de conocimiento matemático del ingeniero C C(Ing). La triada (reciprocidad, intimidad, localidad) expresará lo propio de esos ingenieros que intervinieron en la situación. La especialidad, ingeniería civil, de alguna manera estará reflejada en los ejes: institucional e identidad. Así la permanencia de los usos de las gráficas dependerá del proyecto de la comunidad.

A continuación se presenta la epistemología de uso de las gráficas y los aspectos que son

necesarios a considerar en la situación específica. Éste nos permite apreciar los significados, procedimientos y argumentaciones, elementos claves en la construcción de conocimiento desde las prácticas (Cuadro 1).

	Transformación	Acumulación de un fluido
Significaciones	- Tendencia y comportamiento	- Acumulación - Nivel del líquido - Gasto de salida y entrada - Equilibrio
Procedimientos	- Comparar las variables - Buscar patrones de comportamiento - Buscar la tendencia de las variables cuando t crece - Graficar y realizar ajustes para encontrar un patrón deseado - Variar parámetros de los coeficientes	- Restar: lo que entra menos lo que sale - Comparar el comportamiento del gasto de entrada y el de salida. - Buscar la tendencia en el comportamiento cuando t crece
Lo funcional	- Modelo de un comportamiento con tendencia	
Argumentación	Estabilidad	

Cuadro 1. Epistemología de uso de gráficas en una situación de acumulación de fluidos.

Aspectos metodológicos

La epistemología es la base de la actividad, que se pone en juego con ingenieros en formación de sexto semestre de ingeniería civil de la Universidad Autónoma de Chiapas. Las componentes de la epistemología están en relación con la situación de acumulación de un fluido y los argumentos tendenciales que emergen de procedimientos como la variación de parámetros, las múltiples realizaciones y la búsqueda de patrones.

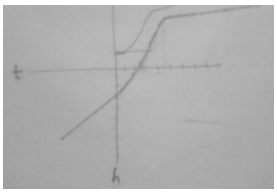
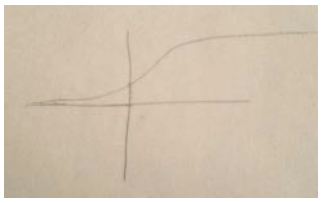
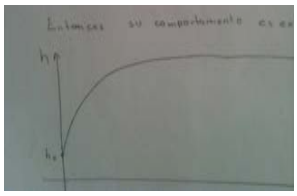
El objetivo de la actividad es someter a los ingenieros en formación a una situación donde la formulación de conjeturas y la toma de decisiones, a la vez que interactúan con sus pares, nos den evidencias del uso del conocimiento matemático aquí abordado en la comunidad de conocimiento que ahí se conforma.

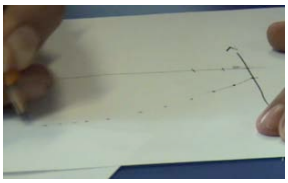
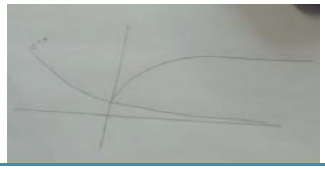
La Actividad fue diseñada en tres momentos**:** 1. Significaciones de acumulación, nivel del líquido, fluido y equilibrio. 2. Construcción de modelos analíticos y gráficos. Una alternancia entre los dos dominios 3. El uso de la gráfica en la argumentación.

Lo que se encontró

Nuestro interés está en caracterizar el uso de la gráfica en la resignificación de comportamientos tendenciales, donde la alternancia entre el funcionamiento y la forma de lo analítico y lo gráfico

norma este uso. En la actividad planteada, variables como el volumen acumulado en el tanque, el nivel del líquido y el gasto de salida son determinantes en tanto que sus comportamientos expresan cierta tendencia asintótica. Es por ello, que centramos este análisis a la forma como los ingenieros en formación discuten alrededor de estas variables y como sus significados conceden procedimientos que en conjunto develan el argumento de estabilidad (Cuadro 2).

MOMENTOS	Evidencias
Significaciones de acumulación, nivel del líquido, fluido y equilibrio.	*"El volumen varía con respecto al tiempo y depende del gasto de entrada y del gasto de salida"* *"Si la entrada es la misma que .. el que sale, entonces ese nivel no cambiaría, el nivel que tenga dentro del tanque"* *"El gasto de salida puede depender de muchas cosas. De la presión del agua, de la columna de agua, y esto va a variar, por lo que mientras más vaya desocupándose el tanque la columna de agua va disminuyendo, va a haber menos presión, y va a salir con menos velocidad. A que si estuviera mas o menos llenos saldría con mayor velocidad y tendría mayor presión*
Construcción de modelos analíticos y gráficos. Una alternancia entre los dos dominios	*"gasto de entrada menos gasto de salida, ahí sería el volumen que está quedando dentro del tanque"* *"Está entrando cierta cantidad, está saliendo otra, pues la diferencia … de esas dos, de entrada y salida, quedaría, una cierta cantidad en el tanque"* *"el volumen del agua va variando con respecto al tiempo, si se va vaciando el nivel va bajando o va aumentando, la variación de la altura va a dar a la variación del volumen"* y escriben *dV=Adh* *"Va llegar en un momento que este va a quedar así , que ya ni va a subir, ni va a bajar, solo con el gasto constante, se puede mantener Se va a suponer que …suponte que va a ir subiendo, subiendo va a llegar algún momento en que va a quedar en equilibrio, sin modificar aquí y acá* (Señala en un dibujo del tanque). Gráficas elaboradas para la variación del nivel del líquido   

El uso de la gráfica en la argumentación.		*E: o sea en el tiempo cero, ya tenemos un volumen, no? Es lo que estaban diciendo* *D: En el uno sería para arriba* *E: Si estamos en el primer caso* *G: y, hay uno, donde llega hasta estabilizarse*
		→ $y = a+e^{-x}$ → $h=e^{-t/R}+RQ_e$

Cuadro 2. Momentos y evidencias.

Conclusiones

La puesta en escena de la actividad, brindó algunas formas de cómo el ingeniero en formación aborda la situación, al pronunciar nuevos retos dentro de la misma y al construir, con base en los usos de la gráfica, modelos de comportamientos tendenciales desde lo gráfico y lo analítico.

Los procedimientos y herramientas que dieron forma a estos modelos gráficos y analíticos fueron:

- Variación de parámetros.
- Simulaciones en la calculadora hasta obtener un patrón deseado.
- Realizaciones de ajustes tanto analíticos como gráficos.
- Comparaciones entre los comportamientos de las variables y sus variaciones.

En cuanto a los funcionamientos y formas del uso de las gráficas se evidenciaron los siguientes:

- La distribución discreta de puntos como herramienta para dibujar una curva con tendencia, al analizar las condiciones de la situación y mantener el argumento de estabilidad.
- El análisis de la curva en tanto a su concavidad para decidir la curva que modelaba el comportamiento tendencial. Este análisis se hizo desde la misma situación al sostener el momento de equilibrio que se debía alcanzar.

Se caracterizó lo propio de la comunidad de conocimiento matemático a la cual pertenecen los ingenieros en formación. En ese sentido, reconocemos una intimidad en la construcción de conocimiento, de ésta comunidad, en tanto que *reconoce el argumento de estabilidad en el análisis de los patrones de tendencia con la variación, en la situación específica.*

Agradecimientos Esta investigación está financiada por CONACYT con el Proyecto las Resignificaciones del Uso del Conocimiento Matemática: la Escuela, el Trabajo y la Ciudad. Clave 0177368.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa.* 6 (1), 27-40.

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.). *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte iberoamericano* (pp. 265-286). México, D.F.: Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

Cordero, F. (2013). *Matemáticas y el Cotidiano*. Diplomado Desarrollo de estrategias de aprendizaje para las matemáticas del bachillerato: la transversalidad curricular de las matemáticas Módulo III. Documento interno. Cinvestav –IPN.

Cordero, F., Mena, J. y Montalto M.E. (2010) Il ruolo della giustificazione funzionale in una situazione di risignificazione dell`asintoto. *I ́insegnamento della Matematica*, Vol.33B N. 4. 457-488. ISSN 1123-7570.

Mendoza, E. (2013). *Matemática funcional en una comunidad de conocimiento: el caso de las ecuaciones diferenciales lineales en la ingeniería*. Tesis de maestría no publicada. Departamento Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Mendoza, E. & Cordero, F. (2011). El Uso De Las Ecuaciones Diferenciales Y La Ingeniería Como Comunidad. En Flores, R (Ed). Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (25), 1023-1030. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Solís, M. (2012). Las gráficas de las funciones como una argumentación del Cálculo. Caso de la predicción y la simulación en las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Tesis doctoral no publicada. Departametneo de Matemática Educativa. CINVESTAV – IPN, D.F. México

Tuyub, I., Cordero, F. & Cantoral, R. (2009). Un estudio socioepistemológico en la práctica toxicológica. En Lestón, P (Ed.) Acta latinoamericana de Matemática Educativa (22) pp 1247-1256.

EL USO DE LA CANTIDAD EN UNA COMUNIDAD DE ARTESANOS-COMERCIANTES OTOMÍES

Teresa Parra Fuentes y Francisco Cordero Osorio
Cinvestav-IPN México
tparra@cinvestav.mx, fcordero@cinvestav.mx

Resumen. La centración en conceptos matemáticos no permite distinguir el carácter social de la matemática, esto es, que es una construcción humana. En esta investigación nos proponemos dar cuenta de ello a través de la epistemología de los usos del conocimiento matemático. Específicamente nos centramos en el comercio de artesanos otomíes que laboran en el Centro de Coyoacán en la Ciudad de México. Para robustecer la epistemología de usos hacemos referencia al constructo Comunidad de Conocimiento Matemático, cuyos elementos nos permiten dar cuenta de las particularidades de los usos de dicha comunidad
Palabras clave: Usos, Comercio, Comunidad de Conocimiento Matemático
Abstract. The concentration in mathematical concepts does not allow to distinguish the social character of the mathematics, this is, that is a human construction. In this investigation propose us give account of this through the epistemology of the uses of the mathematical knowledge. Specifically we centre in the trade of Otomi artisans that working in the Centre of Coyoacan in Mexico City. To strengthen the epistemology of uses we create reference to the Mathematical Knowledge Community, whose elements allow us give account of the peculiarities of the uses of that community.
Key words: Uses, Trade, Mathematical Knowledge Community

Introducción

Esta investigación doctoral en proceso parte del reconocimiento de que la educación indígena ha sido planteada por personas externas a las que va dirigida, en función de lo que se cree que los indígenas necesitan con la intención de ser incorporados al grueso de la población, en este caso de la población mexicana. Ramírez (2006) refiere que el concepto de "La educación indígena" nace a partir del encuentro entre indios y españoles, cuando aparece el deseo de transformar a los habitantes originarios del país en algo diferente y se les define desde categorías ajenas a sus culturas.

Podemos ver que aún en la actualidad hay un tipo de conocimiento que se sobrepone y niega los conocimientos locales:

> En la historia de la producción de conocimiento por mucho tiempo no ha habido reconocimiento de la pluralidad de formas de conocimiento, ya que una de las principales estrategias de las teorías que ha pretendido ser dominantes o la verdad universal, ha sido justamente negar el carácter de conocimiento a otros discursos o formas de pensar (Olivé, De Sousa, Salazar, Antezana, Navia, Valencia, Puchet, Aguiluz, Gil, Suarez y Tapia, 2009, pp. 14).

En esta dirección, sobre el predominio de un conocimiento sobre los otros, la matemática escolar es un ejemplo nítido de ello, responde a una epistemología dominante basada principalmente en los conceptos matemáticos. Knijnik (2003) refiere lo siguiente:

> Las matemáticas que son transmitidas en los procesos educativos son las matemáticas de los conocimientos oficiales, de los conocimientos dominantes. Enseñamos el modo dominante de razonar, como si ese fuera el único modo de pensar el mundo, en particular, de lidiar matemáticamente con el mundo (pp. 10).

Estudios como los de Soto (2010) hacen referencia al papel excluyente de la matemática, a su carácter hegemónico, y que sin embargo prevalece culpar a los estudiantes, a los profesores del fracaso escolar, y no se cuestiona al propio conocimiento matemático que es enseñado. Esto es, se cuestiona el *cómo* enseñar lo cual hace énfasis a estrategias pedagógicas o a la psicología, sin embargo no se cuestiona el *qué* enseñar, problematizando el contenido matemático que se enseña. Este carácter de la matemática como conocimiento acabado, centrado en conceptos y algoritmos no permite ver su carácter social, que es una construcción humana y sus diferentes significados en la vida cotidiana.

Consideramos que la educación indígena, no debe ser planteada de forma ajena pensada "para" el indígena, sino que debe ser planteado "desde" el indígena, en donde se consideren sus conocimientos, sus necesidades, los marcos de referencia en donde construyen conocimiento.

La socioepistemología

La perspectiva socioepistemológica plantea el análisis de la construcción social del conocimiento matemático; social, histórica y culturalmente situado. Por lo que amplía la problemática de la enseñanza-aprendizaje de la matemática centrado en el aula de clases. Cordero, Cen y Suárez (2010) se refieren a que la importancia de realizar estudios sobre el uso del conocimiento matemático consiste en que nos ofrecen indicadores para formular marcos de referencia que hagan una matemática funcional en la escuela, consideramos que este planteamiento es más apegado a las formas de construir conocimiento del humano.

Los Usos dan cuenta del Conocimiento Matemático en una Situación Específica (SE), se explican a través de sus funcionamientos y formas. El funcionamiento se refiere a que si hay un uso del conocimiento matemático es porque hay un objetivo, un *para qué*, que será realizado a través de una forma, o procedimiento para llegar a dicho objetivo, o un *cómo*. Ambas, el funcionamiento y forma, adquieren sentido a través de la situación específica, son intencionales. La resignificación es el resultado de la dialéctica entre el funcionamiento y la forma del uso, que es la misma construcción del conocimiento matemático. En palabras de Cordero (2008):

> La resignificación será la construcción del conocimiento mismo en la organización del grupo humano, normado por lo institucional, o sea, será el uso del conocimiento en la situación donde se debate entre su *funcionamiento* y *forma* de acorde con lo que organizan los participantes (pp. 295).

La investigación se realiza con un grupo de comerciantes otomíes que laboran en el centro de Coyoacán en la Ciudad de México. Ellos se dedican a la elaboración y comercialización de sus artesanías, hechas principalmente con chaquiras. Específicamente nos preguntamos, ¿cómo se usa la cantidad en la venta de artesanías otomí?

La cantidad

Hablaremos del uso de la cantidad y no del número, porque no es de nuestro interés el símbolo numérico, sino las relaciones de *cambio* que pueden encontrarse en la práctica de la venta.

El uso de la cantidad, entendiéndola como una relación de cambio en función de factores sociales, económicos, culturales. En oposición a la cantidad entendida como objeto para hacer operaciones matemáticas con ella. Tenemos como referencia el modelo $a + b = c$, lo consideramos como la transformación de una cantidad, que puede llegar a hacerse más complejo como $f(x) + f'(x)dx = f(x + dx)$. Si bien, el modelo puede ser estudiado desde un punto de vista aritmético, en cuanto, cómo el estudiante resuelve la suma o resta, o puramente cognitivo, nosotros consideramos que en este trabajo el modelo responde a una situación de variación (Cordero, 2008), en donde el argumento es la predicción, ya que dado dos elementos se puede predecir el tercero. En la venta de artesanías identificamos que la cantidad es usada al cobrar, al recibir el pago y al dar el cambio, las tres están relacionadas y podemos expresarlas de la forma $a + b = c$. En donde *a* es un estado inicial por lo que $a = e_i$, *b* representa una transformación en este caso de *a*, entonces $b = trans$ y *c* es el resultado de la transformación esto es, el estado final $c = e_f$. $a + b = c$ visto como un modelo de transformación $e_i + trans = e_f$.

En donde de acuerdo a como va apareciendo en el proceso de la venta establecemos lo siguiente: e_i :es la cantidad que cobrará por sus artesanías, *trans:* será la cantidad pagada por el cliente y e_f : es la cantidad del cambio a dar.

Las Situaciones Específicas de cobro, pago y dar cambio, están relacionadas, sin embargo consideramos que se dan argumentos diferentes en cada uno. Los *funcionamientos* están dados en que a partir de dos cantidades encontrar la tercera, la *forma* más común que hemos identificado es completar a partir de la cantidad más pequeña a la mayor.

Hemos identificado las siguientes categorías de usos:

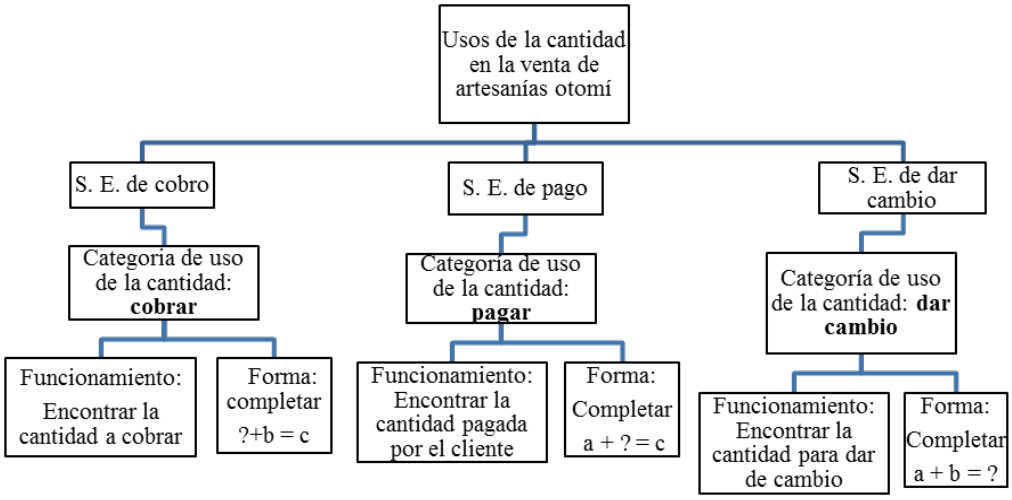


Figura 1. Categorías de usos identificados en la venta de artesanías otomí.

Comunidad de Conocimiento Matemático

Por el predominio de un conocimiento universal, en donde los conocimientos locales no son reconocidos ni valorados y nuestra postura socioepistemológica surgió la necesidad de hablar de comunidad. No sólo como un grupo de personas que comparten características, conocimientos, cultura, etc., sino que construyen conocimiento propio, funcional y que responde a sus necesidades, por lo cual planteamos el constructo Comunidad de Conocimiento Matemático (CCM).

Se propone una triada que trata de diferenciarse de lo que caracteriza a lo universal, estos son la localidad en oposición a lo cosmopolita, la intimidad a lo público, y la reciprocidad a la individualidad. Además de la triada se proponen los ejes Institucionalización e Identidad, para caracterizar a una comunidad de conocimiento. Como se muestra en la figura II:

Figura 2. Constructo Comunidad de Conocimiento Matemático.

Localidad: Este elemento de la comunidad de conocimiento matemático es un llamado a la importancia de lo particular, propio y situacional. Esto es, no nos referimos a toda persona sino específicamente adultos artesanos y comerciantes, otomíes de San Pablito, Puebla que no han tenido una formación escolar.

Intimidad: Con la intimidad nos referiremos a aquellas situaciones que intervienen en el uso de la cantidad y que no se ven a simple vista. Hemos identificado los siguientes:

- Al poner precios interviene el lugar en donde venden, el trabajo realizado, el precio original de la artesanía, si han vendido o no, regateo.
- Al realizar sus operaciones matemáticas completan de 5 en 5 o usan los excedentes.
- Los significados asociados a sus operaciones, como *tomo lo mío*, *te devuelvo*.
- Oralidad numérica, el conocimiento matemático es oral no usan la escritura para realizar sus operaciones matemáticas.
- Los rangos de cantidades que usan son diferentes de los demás artesanos, por ejemplo de los huicholes quienes una artesanía puede llegar a $1000 o los otomíes de Querétaro que sus artesanías de mayor precio es de $75.

Reciprocidad: Es una relación horizontal entre los miembros de la comunidad, todos participan de dicho conocimiento y lo ponen en uso.

La identidad e institucionalización son consideradas como ejes porque intervienen en la localidad, la intimidad y la reciprocidad.

Identidad: Entendemos la identidad principalmente como dinámica, al respecto Castells (2001) explica la identidad a través de las tres formas y orígenes de la construcción de la identidad, estas son:

Identidad legitimadora, identidad de resistencia e identidad de proyecto.

- *Identidad legitimadora: introducida por las instituciones dominantes de la sociedad para extender y racionalizar su dominación frente a los actores sociales.*
- *Identidad de resistencia: generada por aquellos actores que se encuentran en posiciones/condiciones devaluadas o estigmatizadas por la lógica de la dominación, por lo que construyen trincheras de resistencia y supervivencia basándose en principios diferentes u opuestos a los que impregnan las instituciones de la sociedad.*

- *Identidad proyecto: cuando los actores sociales, basándose en los materiales culturales de que disponen, construyen una nueva identidad que redefine su posición en la sociedad y, al hacerlo, buscan la transformación de toda la estructura social.* (Castells, 2001, p. 30).

La localidad, intimidad y reciprocidad, conforman una identidad diferente de esta comunidad, que difiere de los que se encuentran en el Pueblo de San Pablito en Puebla. En términos de Castells (2001) se va conformando una fuente de sentido diferente a partir de las tres características antes mencionadas.

Institucionalización: Al referirnos a la construcción social del conocimiento, admitimos que dentro de los grupos sociales, o en nuestro caso las comunidades de conocimiento, existen instituciones que rigen de manera externa al individuo. Suponemos que dentro de nuestra comunidad de conocimiento otomí existen instituciones y por lo tanto un conocimiento institucionalizado que rige las producciones. Admitimos que hay conocimientos que son aceptados y usados por la comunidad, como resultado de su organización.

Nos encontramos en la fase de identificar los usos, con base en nuestro marco teórico, así como de robustecer los elementos de la Comunidad de Conocimiento Matemático.

Reflexiones finales

- Los usos del conocimiento matemático, nos permite reconocer al humano como constructor de conocimiento matemático.
- El conocimiento matemático es situacional, depende de la situación los argumentos, significados, procedimientos.
- El Constructo Comunidad de Conocimiento nos permite dar cuenta de diferentes realidades, en donde, la identidad, la cultura, las instituciones juegan un papel fundamental en que el conocimiento sea como es.

Esta investigación está financiada por CONACYT con el Proyecto Las Resignificaciones del Uso del Conocimiento Matemático: la Escuela, el Trabajo y la Ciudad. Clave 0177368

Referencias Bibliográficas

Castells, M. (2001). *La era de la información. Economía sociedad y cultura. El poder de la identidad.* Volumen II. Distrito Federal: Siglo veintiuno editores.

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En Cantoral. R.; Covián, O.; Farfán, R.; Lezama, J. y Romo, A. (Eds.) *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Un reporte iberoamericano* (pp.

265-286). México: Ediciones Díaz de Santos, S.A. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa-CLAME A.C.

Cordero, F., Cen, C. y Suárez, L. (2010) Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 13(2):187-214

Knijnik, G. (2003). Educación de personas adultas y etnomatemáticas. *Decisio, 1* (3), 8-11.

Olivé, L., De Sousa, B., Salazar, C., Antezana, L., Navia, W., Valencia, G., Puchet, M.,

Aguiluz, M., Gil, M., Suarez, H. y Tapia, L. (2009). *Pluralismo Epistemológico*. La Paz, Bolivia: CLACSO.

Ramírez, E. (2006). *La educación indígena en México*. México: Programa Nación Pluricultural, UNAM.

Soto, D. (2010). *El Discurso Matemático Escolar y la exclusión. Una visión socioepistemológica*. Tesis de Maestría no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN. D.F., México.

SOCIOEPISTEMOLOGÍA Y MATEMÁTICAS: DEL AULA EXTENDIDA A LA SOCIEDAD DEL CONOCIMIENTO. "TODO LO QUE SIEMPRE QUISISTE SABER Y NUNCA TE ANIMASTE A PREGUNTAR"

Ricardo Cantora y Daniela Reyes-Gasperini
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados. México
rcantor@cinvestav.mx, dreyes@cinvestav.mx

Resumen. Presentamos los avances de una investigación centrada en una noción de transversalidad de las Matemáticas, que sirvió de base para el planteamiento del Taller desarrollado en Buenos Aires en el marco de la *Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa – Relme* 27. Quisimos enfatizar el papel que juegan las Matemáticas en la vida cotidiana y cómo podría (puede) ser esto la base de una modificación curricular profunda que se anteceda por cambios en las prácticas didácticas. El término *Socioepistemología*, que usamos en nuestra propuesta proviene de una elaboración teórica en la *escuela latinoamericana de Matemática Educativa*. Ella ha sostenido que el saber matemático aun aquel que consideramos avanzado, proviene del ejercicio de prácticas intencionales con orientación social

Palabras clave: Socioepistemología, problematización del saber matemático

Abstract. We present the progress of an investigation centered on a notion of transversality of Mathematics, which was the basis for the workshop approach developed in Buenos Aires as part of the *Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa - Relme 27*. We wanted to emphasize the role of mathematics in everyday life and how it could (can) be it the basis of a profound curricular changes that precede changes in teaching practices. The term *Socioepistemology*, we use in our proposal comes from a theoretical elaboration in the *Latin American School of Mathematics Education*. She has argued that mathematical knowledge even that they believe progress comes from the exercise of socially oriented intentional practices

Key words: Socioepistemology

Introducción

La Socioepistemología

La *Socioepistemología,* como sistema teórico para la investigación en *Matemática Educativa* se ocupa específicamente del problema que plantean las dinámicas propias de la constitución del *saber matemático*. Se asume en este enfoque, la legitimidad de toda forma de saber, sea este popular, técnico o culto, pues en su conjunto constituyen a la *sabiduría humana*. Algunos enfoques teóricos contemporáneos, en cambio, se limitan sólo a alguna de esas formas de *saber* (Cantoral, 2013).

Dado que el *saber* (en sentido estricto al referirnos al *saber matemático*, hablaremos de *pluralidades* de saber, *diversidades* de saber, o más sintéticamente, de *saberes*; nuestro enfoque no restringe el estudio del denominado *savoir savant)* se ha constituido socialmente en ámbitos no escolares, su introducción al sistema educativo le obliga a una serie de modificaciones que afectan directamente su estructura y su funcionamiento; de manera que afectan también, a las relaciones que se establecen entre estudiantes y profesor. Al momento de introducir el *saber* al aula se producen *discursos* intencionales que facilitan la comunicación de ideas matemáticas y en consecuencia favorecen la formación de consensos. Estos discursos reciben, el nombre genérico de *discurso*

Matemático Escolar. Empero, desafortunadamente, el consenso logrado es a causa de una forma de exclusión social.

La Teoría Socioepistemológica nace en la escuela mexicana de Matemática Educativa hacia fines de los años ochenta y se extiende hacia otras latitudes durante los 90's del siglo XX para atender colectivamente a un cuestionamiento mayor. Nos preguntábamos entonces, ¿cómo es que "… vive una situación de enseñanza [si] sus producciones matemáticas en ese contexto son condicionadas por las características de la costumbre didáctica"? (Cantoral y Farfán, 2003, p. 33). Quisimos decir con esto, que la manera dominante de enseñar estaba *estructurada* a causa de la institución en la cual se llevaba a cabo la enseñanza (el aula, la familia, la sesión comunitaria, la escuela o la vida cotidiana), pero esto a su vez, *estructuraba* a las formas de socialización del conocimiento y, en consecuencia, a los procesos del pensamiento involucrados. Proclamamos entonces lo que a la postre se tornaría una consigna: no más una didáctica sin alumnos, pero menos aun sin escenarios socioculturales.

Es por ello que si bien se comienza con el estudio de fenómenos didácticos de manera sistémica, considerando los tres polos del conocido triángulo didáctico: contenido de la enseñanza (saber), quien aprende (alumno) y quien enseña (profesor) regulados en un medio limitado, pronto se advirtió la necesidad de sucesivas ampliaciones y reorganizaciones al nivel teórico. Fue así que se reconoció que, con la noción de *situaciones de aprendizaje* les incorporaríamos a las actividades típicamente escolares las dimensiones sociales que signifiquen lo que originó al conocimiento matemático y que sigue vivo en el entorno de quien aprende.

El grupo de trabajo que investiga bajo este programa se propuso el *rediseño* del *discurso Matemático Escolar* de forma que atienda y no soslaye los problemas sociales que acompañan a la actividad didáctica en el campo de las Matemáticas. Por ejemplo, interesa atender al fenómeno de masificación de los sistemas de enseñanza, sin considerar que ello constituya, *a priori*, una característica negativa de la educación contemporánea; sino una oportunidad para impulsar la *sociedad del conocimiento*. Adicionalmente hemos incursionado en el análisis del impacto que produce la traducción de obras educativas de una cultura o una lengua a otra, en los fenómenos de subordinación colonia – metrópoli. Más recientemente hemos incursionado en investigaciones que consideran prácticas de exclusión por género, etnia o condición laboral, pues todos ellos constituyen asuntos de índole sociocultural que serán llevados a cabo por investigaciones del *programa socioepistemológico*. Sin embargo, hemos de precisar desde un inicio que en este programa de investigación, las conceptos y procesos matemáticos que se ponen en *funcionamiento* en un acto didáctico pueden no ser propiamente *objetos matemáticos* en el sentido clásico, el *saber culto*, típicamente aceptados por la comunidad matemática o en el ámbito de la noosfera educativa (el

cual es expresado en las currícula oficiales, ya sea en su forma explícita o táctica), sino son más bien *nociones*, *preconceptos* y *prácticas* que "viven" en otros ambientes de la actividad humana: la construcción de artefactos, las ingenierías, las ciencias, las técnicas, las artesanías, las actividades comerciales entre otras, actividades que en su conjunto son extraídas de *prácticas socialmente compartidas* de índole cultural, esto es posible pues en el *programa socioepistemológico* las Matemáticas se consideran parte fundamental de la cultura, un elemento "vivo" que se crea fuera, pero se recrea dentro del aula de matemáticas.

Con frecuencia señalamos que las Matemáticas no se inventaron para ser enseñadas, y sin embargo se enseñan. Se le usa en distintos escenarios, digamos que "vive" en diversas actividades humanas, como: la construcción de vivienda, en actividades de siembra y tejido, en la elaboración de protocolos para el empleo de fármacos o tóxicos, en la elaboración de recetas de cocina, en el diseño de depósitos de vino, en el cálculo de las dosis para una receta médica, en la confección de una conjetura matemática, en la coordinación de movimientos que realiza un piloto al aterrizar en una pista complicada, en la matematización de fenómenos biológicos, en la toma de decisiones para las inversiones financieras, en interpretaciones de opinión pública, en la simulación de flujos continuos, en las operaciones de trueque en los mercados tradicionales, en el estudio de la consolidación de suelos, en los mecanismos auto regulatorios de temperatura en la industria química, en la elaboración de un sinfín de actividades de naturaleza diversa. Está presente también en las aulas de clase de ciencias, física, química, biología, tecnología, talleres, lectura y comprensión, matemáticas y lo hace igualmente – he aquí su riqueza – escondida tras los pliegues ocultos de las *prácticas cotidianas* de todos los seres humanos cuando *clasifican*, *predicen*, *narran*, *comparan*, *transforman*, *estiman*, *ajustan*, *distribuyen, representan, construyen, interpretan, localizan, diseñan*, *juegan*, *explican*, *cuentan* o *miden*.

Las primeras aportaciones de la teoría socioepistemológica pueden consultarse en (Cantoral, 1990, Farfán, 1993; Cordero, 1994), son relativas, respectivamente, a las prácticas de predicción, estabilidad, y acumulación. Más recientemente dichas caracterizaciones se han ampliado progresivamente, ahora tratan de la proporcionalidad, la promediación, la argumentación, los recursos argumentativos ante la lectura de textos o la resolución de situaciones experimentales.

Evidentemente, bajo esta perspectiva las nociones teóricas habituales en Matemática Educativa se modifican. Tomemos como ejemplo a los constructos de *contrato didáctico* y *milieu*, estos habrían de ampliarse a un ámbito no escolar en el que pueda no corresponderles un saber matemático institucionalizado. Tendremos que ubicarles un poco más allá del aula clásica, pues el *contrato* concierne a las relaciones explícitas e implícitas que se suceden entre profesor y alumno cuando un saber escolar está en curso de construcción; para la socioepistemología se incluye además del

milieu brousseauniano, consideraciones socioculturales que incluyen las circunstancias históricas, culturales e institucionales que soportan la construcción y difusión de significados.

> "… en las últimas décadas hemos visto importantes cambios, y en particular la influencia creciente de los enfoques socioculturales. Este cambio teórico ha tomado diversas formas, y cada uno de acuerdo con sus experiencias y con sus intereses de investigador, es sensible a este cambio de manera diferente. El campo controversial de la Etnomatemática cuyo padre fundador Ubiratan D'Ambrosio ha sido honrado por ICMI de la prestigiosa medalla Félix Klein (D'Ambrosio, 2008), el campo de la educación matemática crítica que pone la dimensión moral y política de la educación matemática, los cuestionamientos de justicia social y de equidad, al centro de sus preocupaciones (Skovsmose y Valero, 2008), o los diversos trabajos relevantes del marco teórico de la socioepistemología (Cantoral y Farfán, 2003) publicados de manera notable en la revista *Relime*, son sin duda emblemáticos de este cambio para muchos participantes en esta conferencia. Dentro de mi comunidad didáctica, es con la teoría antropológica de lo didáctico…" (Artigue, 2011).

Los estudios sobre *entendimiento* en matemáticas, fueron la base para establecer los mecanismos de tránsito del *conocimiento* al *saber*, fueron la pieza clave que diera origen al *programa socioepistemológico*. Con ello, en la tesitura *freiriana* (de Paulo Freire, educador y filósofo brasileño que desarrolló toda una visión no ortodoxa de la educación. Entre sus máximas se encuentra: "Es necesario desarrollar una pedagogía de la pregunta. Siempre estamos escuchando una pedagogía de la respuesta. Los profesores contestan a preguntas que los alumnos no han hecho") siempre se ha buscado que la acción educativa transforme benéficamente a la realidad estudiada, constituyendo así una educación para la libertad en el campo de las matemáticas escolares: diríamos entonces que "vivir es entender".

Un elemento adicional en esta narrativa, la Socioepistemología nace como una *epistemología del sur*, con la pretensión de dar identidad a las investigaciones desde y para Latinoamérica, una visión que reivindicara lo propio. Sin embargo, progresivamente su influencia ha ido en ascenso al nivel internacional. Se procuró desde un origen, que las publicaciones de Socioepistemología si bien circularan en nuestra región, fueran progresivamente llegando a diferentes esferas de la ciencia mundial, se han publicado sus resultados en las principales revistas internacionales, sin duda se trata de una teoría emergente en fase de consolidación.

Del aula extendida a la sociedad del conocimiento

Actualmente, la Socioepistemología, en tanto teoría, postula que para atender a la complejidad de la naturaleza del saber y su funcionamiento al nivel cognitivo, didáctico, epistemológico y social en la vida de los seres humanos, habrá de *problematizarse el saber* en más amplio sentido, situándole en el entorno de la vida del aprendiz (individual o colectivo) donde habrá de rediseñarse el *discurso matemático escolar* (Cantoral, 2011, 2013; Reyes-Gasperini, 2011). Esto llevó a adoptar un posicionamiento sobre las matemáticas y las ciencias, así como su educación, para asumir que ellas están ligadas a *prácticas sociales* altamente valoradas. Sin embargo, las matemáticas en particular, como es bien sabido, se han desarrollado en la educación contemporánea y en la cultura popular bajo la premisa de que ellas tratan con objetos abstractos, anteriores por tanto a la *praxis social* y en consecuencia externas al individuo. Esta visión del conocimiento, a la que denominaremos genéricamente *platonista*, impregna por igual al quehacer científico como al educativo; un profesor, bajo este enfoque, comunica "verdades preexistentes" a sus alumnos mediante un discurso; la forma entonces, asume esta visión, hará develar más temprano que tarde el significado de los objetos abstractos entre los estudiantes. La especie humana desarrolló la capacidad de construir explicaciones sobre el mundo en el que vive mediante complejos procesos de construcción de significados compartidos. El punto de partida para la construcción de saberes es la *actividad humana* normada por emergentes de naturaleza social que denominaremos *prácticas sociales*. Estas prácticas sociales son la que regulan el comportamiento cuando se realizan *prácticas compartidas socialmente* mediante las cuales los sujetos (individuales y colectivos) nos relacionamos *intra* e *ínter* psicológicamente y con el entorno. En este sentido, los saberes son las diferentes formas de comprender y explicar las realidades y están vinculados con las prácticas sociales.

El supuesto táctico de este enunciado se encuentra en la afirmación de que la realidad misma se compone de diversos niveles de *emergentes* resultado de su evolución. Lo emergente tiene que ver con la formación de niveles de realidad superiores que poseen sus propias leyes y no pueden ser explicados a partir de las leyes del nivel precedente. Ejemplifiquemos esto al nivel de la química: decimos que hay emergencia de propiedades nuevas en un compuesto, si al combinar dos elementos simples se obtiene o se crea algo nuevo. Una molécula de agua, por ejemplo [H_2O], es un compuesto químico inorgánico formado por dos átomos de hidrógeno [H] y uno de oxígeno [O] que posee propiedades nuevas (emergentes) que no poseían sus elementos. Este resultado es fabuloso, el agua resulta esencial para la vida de los seres vivos, pero aislados, el oxígeno es flamable y el hidrógeno explosivo. Al nivel de la sociedad ocurren fenómenos similares, un grupo de amigos o las personas en una porra deportiva se constituyen en sujeto colectivo ante determinadas circunstancias del medio que les rodea. En tal sentido, esos sujetos colectivos no son

la unión de sujetos individuales. A un nivel superior, podríamos decir, los lenguajes, las leyes, la moral, la religiosidad son emergentes sociales que no podrían ser creados por sujetos individuales, sino por colectivos normados en el curso de su evolución. Surge la pregunta clave, *¿qué produce la norma?* La respuesta aceptada en la actualidad es que la norma es en sí misma un *emergente social*, por tanto regula el desarrollo colectivo. Esta idea es la que empleamos al afirmar que la *práctica social* es un *emergente social* con nuevas propiedades o funciones: normativa, identitaria, pragmática y discursiva.

En el taller sostuvimos una hipótesis alternativa a la que postula el enfoque *platonista* del conocimiento, pues asumiremos una epistemología de la matemática que considera fundamental el papel que desempeñan las *prácticas sociales* en la construcción del *conocimiento matemático*. Más específicamente sus funciones en el pasaje del *conocimiento* al *saber*; en este sentido hablaremos más de una *Socioepistemología* que de una *Epistemología* en sí. En la siguiente caracterización categorial, se asocia el término "uso" al vocablo "conocimiento" para dar lugar al "saber", su adecuada articulación permite emerger a la noción de aprendizaje situacional.

> "CONOCIMIENTO es la información sin uso; el saber es la acción deliberada para hacer del conocimiento un objeto útil frente a una situación problemática. De donde se deduce que el aprendizaje es una manifestación de la evolución del conocimiento en saber. Por lo que el aprendizaje consiste en dar la respuesta correcta antes de la situación concreta. Con esta imagen, tan profunda, se expresaba hace algunos años Ricardo Cantoral a propósito del debate, de un tiempo para acá muy acalorado en todo el mundo, sobre lo que significa en verdad *saber*." (D'Amore, 2006).

Dicha hipótesis alternativa sostiene que el conocimiento matemático, aun aquel que consideramos avanzado, tiene un origen y una función social asociados a un conjunto de actividades humanas socialmente valoradas y normadas. Esto no habrá de entenderse en el sentido de que todo conocimiento obedece a una necesidad de naturaleza práctica, puesto que los historiadores de la ciencia han documentado suficientemente que algunas nociones matemáticas no provienen de sucesivas abstracciones y generalizaciones de la empiria. Más bien, nuestra hipótesis tiene una orientación socioepistemológica, puesto que establece una filiación entre la naturaleza del conocimiento que los humanos producen con las actividades mediante las cuales y en razón de las cuales dichos conocimientos son producidos. Las matemáticas bajo este enfoque están en la base de la *cultura humana* de la misma manera que lo están el juego o el lenguaje. Las investigaciones llevadas a cabo en el marco del *programa socioepistemológico* mostraron, durante los últimos años, la pertinencia y consolidación de dicha postura, tanto al nivel de los resultados concretos

obtenidos, como en el ámbito de una estructuración teórica más elaborada. En los estudios se ha seguido una aproximación sistémica a la investigación que trata, en forma articulada, con cuatro dimensiones del saber (*construcción social del conocimiento*): su *naturaleza epistemológica*, su *tesitura sociocultural*, los *planos de lo cognitivo* y los *modos de transmisión vía la enseñanza*.

Ahora en el marco socioepistemológico habrá que entenderlo de una manera más amplia, extendida a la organización social o *comunidad en contexto*, aun fuera del aula o mejor dicho, en sentido figurado a un *aula extendida* en una *sociedad del conocimiento*. Este cambio exigió a la Socioepistemología de la producción de tres grandes cambios en su concepción teórica dado que busca incidir en las prácticas humanas del aprendizaje en escenarios diferenciados. Se tuvo que cambiar entonces la noción de *aula*, la de *sociedad* y la de *saber*. Un docente, tiene como objeto de enseñanza a la matemática escolar, no propiamente a las matemáticas, ello abre una posibilidad de intervención formidable. La *matemática escolar es rediseñable con fines de aprendizaje*. El matemático educativo entonces no sólo discute cómo enseñar, sino qué enseñar, a quién enseñar y cuándo enseñar. Un profesor que tome como saber teórico de referencia a la Matemática Educativa, no en el sentido de contenidos curriculares (pues ello hablaría de un rediseño curricular más que de un rediseño del discurso Matemático Escolar), sino que ante ciertos contenidos curriculares tome decisiones sobre argumentaciones y procedimientos que pondrían en juego sus estudiantes. Atendiendo sus racionalidades contextualizadas y el relativismo epistemológico correspondiente. De este modo, podrá intervenir sobre el qué enseñar, aceptará por tanto que es posible *rediseñar el discurso Matemático Escolar*. Lo hace, no sólo analizando lo que acontece en un aula sino en lo que pasa en el aula extendida, el aula de la vida cotidiana.

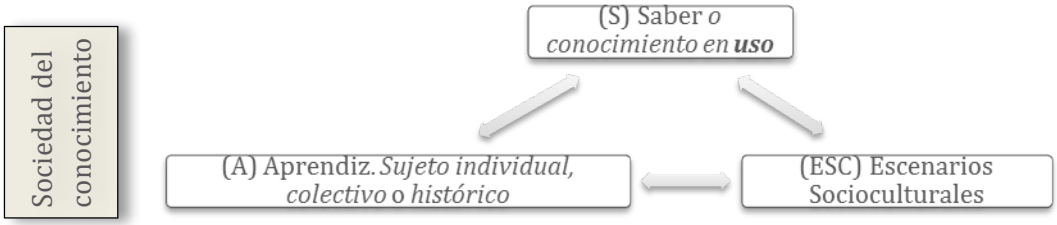


Figura 1. El triángulo didáctico en la Socioepistemología. (Cantoral, 2013).

En este modelo una idea de aprendizaje, como práctica intencional normada, coloca en interacción al aprendiz con el entorno reglado, se suple la idea de aprendizaje como adquisición, para dar lugar a otra más cercana a la noción de práctica que modifica al individuo en colectividad ante tareas concretas de sus vivencias: el aula extendida es fundamental para entender esta idea de aprendizaje. Digamos que el artesano ante la pregunta qué eres tú, dice, soy artesano. Su misma identidad es determinada por su práctica. De este modo tomamos al triángulo como base del desarrollo teórico.

Elementos para un ejemplo

Esta sección trata sobre el saber matemático de la proporcionalidad, el cual juega un rol formativo y transversal en la construcción del pensamiento matemático de los estudiantes y de los ciudadanos en un sentido amplio. Este hecho amerita diferenciar entre *Fracción, razón, proporción* y *proporcionalidad*, pues si bien son todas ellas afines, su significación y esencia tiene diferencias significativas entre sí, y su distinción permitirá reconocer los usos y la razón de ser de la proporcionalidad. Desde su desarrollo matemático más temprano, los estudiantes trabajan con fracciones para expresar una cantidad (numerador) dividida entre otra cantidad (denominador). Ambos, numerador y denominador, deben ser inevitablemente números enteros y el denominador nunca habrá de ser cero. Si bien las fracciones son cocientes de números enteros, la "idea germen" proviene de las relaciones parte-parte y parte-todo. Es decir, al trabajar con fracciones se está trabajando con *magnitudes conmensurables*, pues pueden interpretarse como partes de una magnitud. Ahora bien, nos preguntamos ¿cómo es que surgió la necesidad de tratar con *magnitudes no conmensurables*? Con esto se introduce la noción de razón, pues es la *relación entre dos magnitudes*: su *comparación*. De esta manera podemos afirmar que la razón entre la longitud del lado de un cuadrado y la longitud de su diagonal es $\sqrt{2}$, pues no hablamos de una división como con las fracciones, sino de una relación entre magnitudes implicadas.

Dado que la razón refiere a la *relación* entre dos magnitudes, así es como puede existir el caso, por ejemplo, de que en un conjunto de personas la cantidad de mujeres respecto a la de hombres sea de 9 a 1, 9 : 1 (por cada nueve mujeres hay un hombre), o bien, puede ser 9 : 9, lo que afirma que en ese grupo de personas hay nueve mujeres y nueve hombres, o bien podría ser 9 : 0, lo cual afirmaría que sólo había mujeres en ese grupo. Este último caso no sería válido de tratarse como una fracción, pues el denominador es cero, sin embargo, dado que es una razón que expresa la relación entre dos magnitudes, sí es posible. Podemos localizar tres diferencias importantes entre las nociones de *fracción* y de *razón*. Las dos primeras concernientes a restricciones numéricas y de notación: en primer lugar, las razones al ser una relación entre dos magnitudes no tienen la restricción de ser la división entre dos números enteros (ver el caso del numerador de la razón áurea en donde uno el numerador es un número irracional) que da como resultado un número racional (como el caso de la circunferencia en donde la relación entre longitud y diámetro es un número irracional). En segundo lugar, al no tratarse de una división entre dos números, no es necesaria la restricción realizada sobre el denominador, pues la razón no es una fracción (ver el caso de la relación entre hombres y mujeres de un conjunto de personas). La tercera y para nosotros la más relevante, es la esencia por la cual se han desarrollado ambos conceptos matemáticos: la fracción es la expresión de una cantidad (numerador) dividida entre otra cantidad

(denominador) que representa la relación parte – parte o parte – todo de un conjunto, mientras que la razón surge ante la imposibilidad de medir todas las magnitudes, la inconmensurabilidad. Se desarrolla entonces la idea de *relación* entre magnitudes, por tanto, la notación introducida en la matemática escolar para referirse a la razón como una fracción sin las argumentaciones contextualizadas correspondientes a su construcción, produce entre los estudiantes una pérdida de significación y en consecuencia, una falta de comprensión del concepto matemático y sus procesos asociados. Esto produce una banalización del aprendizaje al llevarlo al nivel del desarrollo de habilidades básicas, como el manejo de algoritmos no significativos para el estudiante. Esto es lo que hemos afirmado teóricamente, la función hegemónica del *discurso Matemático Escolar* impide el aprendizaje de los estudiantes y lo limita a la algoritmia y la memoria. Ahora bien, la noción de *proporción*, como hemos ejemplificado anteriormente, aparece cuando se trabaja con dos pares de relaciones numéricas que se corresponden, de donde devienen las propiedades de las proporciones, por ejemplo, la igualdad del producto cruzado de los numeradores y denominadores (expresados como fracciones), o bien, cualquier "reacomodación" posible de la igualdad planteada $a/b=c/d$.

Por último, se llaman proporcionales a las magnitudes que guardan la misma razón, es decir, no se habla de la igualdad entre dos razones (idea aritmética), sino que se está hablando de la relación que se mantiene constante entre dos magnitudes (idea variacional). Sobre la *proporcionalidad*, como se dijo al comienzo de este escrito, existe un gran bagaje de investigaciones. Las investigaciones fundamentales de Piaget e Inhelder (1984), enunciaron que la noción de proporcionalidad se inicia siempre, inevitablemente, de una forma cualitativa y lógica, antes de estructurarse cuantitativamente. En este paso de lo coloquial a lo simbólico es donde los estudiantes empiezan a cuantificar y a enfrentarse con la construcción de "lo matemático", pudiendo considerarse un medio para construir un significado de "lo proporcional". (Cantoral, Reyes-Gasperini, 2012). Ahora bien, estudios antecedentes han mostrado que la noción de la proporcionalidad no se reduce a la mera regla de tres y mucho menos, a su aplicación sin significación (Cantoral y Reyes-Gasperini, 2012; Reyes-Gasperini y Cantoral, en prensa), sin embargo, pareciera que los libros de texto reconocen este hecho como lo sustancial para presentar en el aula de matemáticas esta noción (da Ponte, 2007; Oller, 2012) y son asimismo, éstas las estrategias usadas por los estudiantes (Oliveira, 2009) o profesores (Berk, Taber, Gorowara y Poetzl; 2009) ante situaciones de proporcionalidad. Sin embargo, la problematización del saber matemático a través de la construcción de la unidad de análisis socioepistémica referida a la proporcionalidad es una propuesta de la Teoría Socioepistemológica que está permitiendo a través de su robustecimiento plantearnos alternativas para el tratamiento didáctico en un aula extendida que le dará la libertad al

docente de privilegiar la actividad situada del que aprende, su contexto de significación; le permitirá también reconocer las distintas formas de argumentación que favorecen las diversas racionalidades contextualizadas, y en ese sentido, propiciar la naturaleza funcional del saber; en síntesis, esto favorece un proceso de resignificación progresiva del que aprende inmerso en marcos referenciales diversos (Reyes-Gasperini, 2011, 2013; Reyes-Gasperini, Cantoral, en prensa).

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (2011). La educación matemática como un campo de investigación y como un campo de práctica: Resultados, Desafíos. *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática*, 26–30 junio, Recife, Brasil: CIAEM.

Berk, D.; Taber, S.; Carrino, C. y Poetzl, C. (2013). Developing Prospective Elementary Teachers' Flexibility in the Domain of Proportional Reasoning. *Mathematical thinking and learning*, 11(3), 113-135.

Cantoral, R. (1990). *Categorías Relativas a la apropiación de una base de significaciones para conceptos y procesos matemáticos de la Teoría elemental de las Funciones Analíticas. Simbiosis y Predación entre las nociones de "el Prædiciere" y "lo Analítico"*. Tesis doctoral no publicada, Cinvestav, México.

Cantoral, R. (2011). *Fundamentos y Métodos de la Socioepistemología*. Simposio en Matemática Educativa, 22–26 agosto, Ciudad de México, México: CICATA-IPN.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. D.F., México: Gedisa.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003b). Matemática Educativa: una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 6(1), 27–40.

Cantoral, R. y Reyes-Gasperini, D. (2012). Matemáticas y Práctica social: Construcción social del conocimiento matemático. *Novedades educativas*, 261, 60-65.

Cordero, F. (1994). *Cognición de la integral y la construcción de sus significados: un estudio del Discurso Matemático Escolar*. Tesis doctoral no publicada, Cinvestav, México.

D'Amore, B. (2006). *Elementos de didáctica de la Matemática* (versión traducida del italiano en Elementi di didattica della matematica, Pitagora, Bologna). Bogotá, Colombia: Magisterio.

Da Ponte, J. (2007). *Proportion in school mathematics textbooks: a comparative study*. Documento interno del Grupo de Investigación DIFMAT – Didáctica e Formação de Professores de

Matemática, Centro de Investigação em Educação e Departamento de Educação, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Farfán, R. M. (1993). *Construcción de la noción de convergencia en ámbitos fenomenológicos vinculados a la ingeniería. Estudio de caso.* Tesis doctoral no publicada, Cinvestav, México.

Oller, A. (2012). *Proporcionalidad aritmética: una propuesta didáctica para alumnos de secundaria*. Tesis de Doctorado no publicada, Universidad de Valladolid, Vallado-lid, España.

Oliveira, I. (2009). Proporcionalidade: estratégias utilizadas na Resolução de Problemas por alunos do Ensino Fundamental no Quebec. *Boletim de Educação Matemática 22*(34), 57-80.

Piaget, J.; Inhelder, B. (1984). El preadolescente y las operaciones proposicionales. En J. Piaget y B. Inhelder (Ed.), *Psicología del niño* (12a ed.) (pp. 131-150). España, Madrid: Ediciones Morata.

Reyes-Gasperini, D. (2011). *Empoderamiento docente desde una visión Socioepistemológica: Estudio de los factores de cambio en las prácticas del profesor de matemáticas.* Tesis de maestría no publicada, Cinvestav, México.

Reyes-Gasperini, D. (2013). *Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: una alternativa de intervención para el cambio y la mejora educativa*. Memoria pre-doctoral no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, D.F., México

Reyes-Gasperini, D. y Cantoral, R. (en prensa). Socioepistemología y empoderamiento docente: acciones para un cambio educativo. *Boletim de Educação Matemática*.

EL REDISEÑO DE SITUACIONES DE APRENDIZAJE Y LA REFLEXIÓN DOCENTE

Mayra Anaharely Sarai Báez Melendres y Rosa María Farfán Márquez
Cinvestav. México
mbaez@cinvestav.mx, rfarfan@cinvestav.mx

Resumen. El presente escrito alude a los inicios de una investigación que pretende profundizar sobre la reflexión de la práctica docente. Planteamos que la actividad de rediseñar una situación de aprendizaje es una práctica que permite movilizar un cúmulo de conocimientos, matemáticos y didácticos, que encaminan a la construcción de otros para la enseñanza de la matemática. Analizar las reflexiones que hacen los profesores cuando realizan dicho rediseño de una situación de aprendizaje, se convierte en el objetivo de esta investigación en tanto que permitirá caracterizar las reflexiones para entender cómo los profesores realizan esta actividad y encontrar elementos que guíen la actividad de la reflexión
Palabras clave: Rediseño, Situaciones de aprendizaje, Reflexión
Abstract. This paper refers to the beginnings of a research that aims to deepen on the reflection of the teaching practice. We propose that the activity of redesigning a learning situation is a practice that mobilizes a wealth of mathematical and didactic knowledge which lead to build others for math teaching. Analyze teachers reflections when they are redesigning a learning situation becomes the target of this research because it will allow to characterize these reflections to understand how teachers do this activity and find elements to guide the activity of reflection itself
Key words: Redesign, Learning Situations, Reflection

Problemática

La reflexión sobre la práctica docente ha sido estudiada desde los años treinta por John Dewey, y ha permanecido vigente hasta nuestros días, sobre todo porque ahora está tomando mayor importancia al considerarse una de las tendencias en la investigación en Formación de Profesores de Matemáticas (Sánchez, 2011). Aunque la literatura en este tema es vasta, planteamos que aún existen aspectos de la práctica sobre los que hace falta indagar, uno de ellos es la actividad de rediseño de situaciones de aprendizaje.

En el proyecto nacional con profesores de matemáticas de secundaria *Especialización para la profesionalización docente en las matemáticas de secundaria. Un estudio de reproducibilidad de situaciones didácticas*, (proyecto Cinvestav-SEP), que se llevó a cabo en tres iteraciones de julio del 2010 a mayo del 2011, una de las actividades académicas considerada fundamental durante las tres fases que conformaban el proyecto fue el rediseño de situaciones de aprendizaje, donde se solicitaba a los profesores que reflexionaran sobre una propuesta para implementarla posteriormente en sus clases. El resideño consistía, *grosso modo*, en una reflexión y adaptación del mismo al considerar la condición de los estudiantes, el aula, los recursos, etc. La principal observación de este proceso de rediseño fue que la reflexión del profesor para esta tarea consideraba elementos como la planeación de la clase, las estrategias de enseñanza, las herramientas didácticas, el orden de las actividades de la situación, la organización de los estudiantes para abordar la actividad, entre otros, pero se carecía de un tipo de cuestionamientos

sobre el conocimiento matemático. En otras palabras, el proceso de reflexión sobre esta actividad de rediseño estaba delimitado por aspectos de tipo pedagógico y didáctico más que por cuestionamientos hacia lo matemático.

A lo anterior, surgieron preguntas relacionadas con respecto a las reflexiones del profesor ante la actividad de rediseño y su concepción de la matemática: *¿cómo reflexiona el profesor de matemáticas sobre la situación de aprendizaje para rediseñarla?, ¿qué elementos guían su reflexión?, ¿qué aspectos podrían provocar reflexiones sobre la matemática?*

Tales cuestiones, resaltan a nuestro parecer un punto importante, que la reflexión de los profesores sobre esta actividad se realiza bajo sus propias concepciones de la práctica docente, del conocimiento matemático, la enseñanza de la matemática, sus experiencias y su propia definición de reflexión, los cuales han normado la forma de desarrollar sus actividades tal que ha permanecido a través de la vida laboral y se ha consolidado en ese tiempo. Es decir, parece no existir una guía que ayude al profesor a realizar el proceso de reflexión, y por tanto la forma en que realiza este proceso no considera el cuestionamiento de lo matemático.

Lo anterior resalta la necesidad de un proceso sistemático de reflexión que dé, por un lado, orientación al rediseño, y por otro, que permita reflexionar sobre los tipos de conocimientos involucrados en esta tarea y no solo algunos de ellos.

Desde nuestra perspectiva, estos hechos se presentan por el enfoque que predomina en la enseñanza de la matemática, el que considera al saber como objetos preexistentes, y que los profesores adquieren desde sus primeras experiencias de aula, lo consolidan en su formación inicial del profesorado y luego lo comunican a sus estudiantes, generándose así un círculo en la transmisión de significados sobre unos conocimientos que limitan tanto la construcción de otros como también el desarrollo de un pensamiento matemático. Éstos enfoques teóricos buscan explicar el proceso mediante el cual se llega a la construcción del objeto y minimizan el papel que desempeña la triada: herramientas, contexto y prácticas (Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez, 2006), elementos inherentes a un objeto matemático. De esta manera es que identificamos que el profesor de matemáticas requiere de una resignificación constante de sus conocimientos, al transitar por procesos que le permitan considerar el carácter de herramienta, el contexto y la práctica asociados a un conocimiento matemático. Uno de esos procesos es la reflexión enfocado a cuestionar tal conocimiento y a establecer nuevos conocimientos y relaciones entre los existentes.

En Reyes (2011) se menciona que la formación habitual que han tenido los docentes excluye de un tipo particular de reflexiones sobre la matemática a causa directa del papel que juega el discurso

matemático escolar (dME) como enfoque legítimo y hegemónico en los sistemas educativos, ya que impone argumentaciones, significados y procedimientos sobre los saberes matemáticos y ante la implementación de las propuestas didácticas que desde la investigación se ofrecen. Esto permite plantearse cuestiones respecto a qué tipo de actividades procura el profesor sobre sus estudiantes para el desarrollo de su pensamiento matemático, bajo qué enfoque didáctico diseña sus herramientas, qué fomenta su enseñanza sobre las matemáticas.

Por lo anterior, lo que buscamos es propiciar la construcción de un significado más robusto, pero más nítido, sobre los conocimientos del docente hacia su práctica y un desarrollo de su pensamiento matemático desde otra perspectiva a través de la reflexión. Si bien existen trabajos (Zeichner, 1993; Parada, 2009; Tzur, 2001; Kwon y Orrill, 2008, Binti, 2010) que buscan una transformación en la enseñanza de la matemática que incida en la construcción de significados y desarrollo del pensamiento del estudiante, entonces se hace necesario que el profesor también transite por una transformación en beneficio de su propia práctica.

En la literatura en Matemática Educativa, principalmente la de corte socioepistemológico, se ha puesto un especial énfasis en el estudio epistemológico del saber matemático y el desarrollo del pensamiento matemático del estudiante (Cantoral, Farfán, Lezama, Martínez-Sierra, 2006; Domínguez, 2003; Zaldívar, 2012;). Éstos han tenido por objetivo proveer de elementos epistemológicos sobre el saber para la elaboración de herramientas que permitan la construcción de significados sobre un concepto matemático que sean diferentes al escolar ya que éstos no propician un desarrollo del pensamiento matemático, pero que contribuyan al entendimiento y aprehensión de dicho concepto. Esta mirada, aunque pertinentemente dirigida a los estudiantes, no ha alcanzado a los profesores. Los mismos proyectos han permitido identificar la necesidad de atender este aspecto desde la práctica del profesor y que éste no solo tenga el reto o la tarea de implementar las nuevas estrategias o resultados de investigaciones. Es decir, al igual que el estudiante, el profesor requiere de una constante construcción de nuevos significados sobre sus conocimientos.

El realce que se le da a esta construcción de significados tanto del saber matemático como del saber pedagógico y didáctico, está relacionado con lo que menciona Vergara (2005):

> "… el profesor que se desempeña como tal en cualquier nivel educativo basa sus acciones en el significado de las cosas de su mundo, y se considera que es ahí donde "construye" el significado a partir de las interacciones sociales que tiene, pero también influye ese espacio para que sea capaz de reflexionar y modificar el significado a partir del proceso interpretativo que puede realizar como sujeto."

De manera específica, la construcción de significados sobre la práctica docente está ligada a las creencias, concepciones, saberes y valores que tienen los profesores sobre la educación en general y sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en particular, ya que la práctica es específica de cada sujeto y por tanto su análisis involucra éstos aspectos desde su formación y visión (Perales, 2006). En este sentido, los significados sobre la práctica que sobresalen y orientan las acciones son aquellos que se han construido a partir de las vivencias, es decir, los profesores adoptan un modelo de enseñanza que contiene elementos de su propia experiencia, lo cual genera un pensamiento y acciones específicas para con la práctica, que afectan de manera directa sobre el desempeño del profesor y el de sus estudiantes (Vergara, 2005; Linares y Krainer, 2006). Así, el rediseño de una situación de aprendizaje, a través de un proceso reflexivo, lo consideramos como un elemento que da cuenta de la construcción de nuevos significados sobre el conocimiento ya establecido.

El pensamiento del profesor está fuertemente influenciado por los significados construidos respecto a su práctica. Es decir, influye de manera directa en torno de los procesos de reflexión que pueda realizar. Para Sañudo (2006), la construcción de significados permite comprender y explicar de mejor manera un contexto. Esta construcción no es un mecanismo aislado, sino que involucra aspectos como la historia de vida del sujeto frente a sus experiencias con los conceptos a significar; los procesos de socialización donde se intercambian dichos significados en diferentes contextos y temporalidades y los procesos de pensamiento donde se incluyen los procesos de pensamiento reflexivo. Es decir, este proceso se presenta como fundamental para la transformación de la práctica docente (Sañudo, 2006).

Justificación

Los motivos que reconocemos para llevar a cabo esta investigación son tres: la falta de una problematización del conocimiento matemático, la reflexión sobre una práctica específica que hace el profesor, y la profesionalización del profesor.

Los tres aspectos anteriores se relacionan con la pregunta: ¿pensamiento reflexivo sobre qué y para qué? De la revisión hecha sobre este tema, se encontró que las investigaciones se han centrado en describir y caracterizar las reflexiones de los profesores de matemáticas sobre sus acciones, es decir, sobre aquellas que realizan antes, durante y después de una intervención de aula (Parada, 2009); sobre lo que significa ser un profesional reflexivo (Zeichner, 1982); sobre el desarrollo profesional de uno mismo y en el proceso de formación de otros profesores (Tzur, 2001); la influencia del proceso reflexivo sobre la práctica (Kwon y Orrill, 2008, Binti, 2010), entre otros. Sin embargo, sólo algunos de estos trabajos hacen referencia a los instrumentos didácticos

para el aula. A saber, lo que se menciona sobre éstos refiere a la preocupación por llevar al aula un material didáctico adecuado al tema de estudio, y aunque se resalta la atención sobre los conocimientos previos de los estudiantes, las posibles respuestas, la importancia del conocimiento matemático, éstos se direccionaron hacia la planeación de la clase principalmente, es decir, en el cómo implementar la situación, pero no específicamente hacia un rediseño de la situación en cuestión.

Por otro lado, la reflexión sobre la práctica docente ha ido tomando fuerza en la formación de profesores al grado de considerarse como un elemento importante para hacer investigación sobre la práctica (Climent, Romero-Cortés, Carrillo, Muñoz-Catalán, Contreras, 2013; Kwon y Orrill, 2008; Rico, 2004) y para fortalecer el desarrollo del profesor en los cursos profesionalizantes o de capacitación, que los prepara para afrontar los nuevos retos y demandas sociales, institucionales y sobre todo de reforma. En México en particular, la formación docente está referida a construir o aumentar el bagaje de conocimientos del profesor, pero conocimientos más de tipo pedagógico y didácticos, y no tanto matemáticos. Al respecto, Rico (2004) menciona que la formación inicial y permanente de docentes en matemáticas carece de elementos y experiencias integradoras de conocimientos matemáticos y pedagógicos que permitan a los futuros profesionales construir, revisar y modificar sus sistemas conceptuales, aptitudes y habilidades como parte de su proceso de aprendizaje. Es por ello, que la reflexión es un elemento fundamental que debe ser inherente de la práctica profesional del profesor, ya que este proceso cuestiona las creencias y significados más íntimos que se tienen de un conocimiento. En otras palabras, moviliza y genera conocimiento sobre la práctica (Zeichner, 1993).

Objetivo

Es así que ante la problemática planteada anteriormente, nuestro objetivo es el estudio de las reflexiones de los profesores cuando realizan el rediseño de una situación de aprendizaje, con el fin de identificar los elementos que permiten guiar esta práctica cuando se trata de cuestionar un conocimiento matemático, y de establecer relaciones entre éste y lo didáctico que confluyan en la mejora de la práctica de reflexión sobre la enseñanza de la matemática.

Elementos teóricos

En Dewey (1989), se señala que todos los seres humanos podemos hacer una reflexión sobre algo ya que todos tenemos la capacidad de pensar. Sin embargo, la reflexión no implica tan sólo una secuencia de ideas, sino una *con-secuencia*, esto es, una ordenación consecuencial en la que cada resultado, a su vez, apunta y remite a las que le precedieron. De esta manera, se distinguen dos tipos de reflexiones, una ocasional, circunstancial, que se da incluso de manera espontánea sin

necesidad de un aprendizaje explícito o formal. Y otra, que requiere un análisis metódico, crítico, regular, instrumentado, sereno y efectivo, es decir una práctica reflexiva. Se puede decir que *reflexión general* y *práctica reflexiva* se diferencian porque la primera ordinariamente es una actividad mental natural y ocasional, mientras que la segunda es una actitud intelectual metódica ante la práctica, que requiere una metodología y una intencionalidad de parte de quien la ejercita.

Dewey define al pensamiento reflexivo como el examen activo, persistente y cuidadoso de toda creencia o supuesta forma de conocimiento a la luz de los fundamentos que la sostienen y las conclusiones a las que tiende. De esta manera, el desarrollo del pensamiento reflexivo requiere de un reconocimiento previo de las creencias y significados que se poseen sobre alguna acción o saber, ya que la falta de este reconocimiento, puede generar situaciones desorientadas y confusas del proceso reflexivo. Al respecto de esto último, Dewey menciona que la función del pensamiento reflexivo es la de transformar una situación en la que se experimenta oscuridad, duda, conflicto o algún tipo de perturbación, en una situación clara, estable y armoniosa. En este sentido, este proceso de reflexión involucra también un proceso de identificación y reconocimiento de significados y comienza cuando alguien se pregunta por la veracidad de una conjetura de la que no existe certeza, cuando se trata de probar su autenticidad y de ver qué garantías hay de que los datos existentes señalen realmente la idea sugerida, de modo tal que justifique la aceptación de esa idea.

Una de las observaciones que se reconocen en los trabajos de reflexión revisados es la necesidad de motivar al profesor a reflexionar sobre su práctica, ya que muchos no la realizan por diversos motivos, en ellos, la falta de elementos para hacerlo (Zeichner, 1993; Vergara, 2005).

Referencias bibliográficas

Binti, S. (2010). An exploration of mathematics teachers' reflection on their teaching practices. *Asian Social Science*, *6(5)*, 147-152.

Cantoral, R., Farfán, R., M., Lezama, J. y Martínez-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: Algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, número especial*, 83-102.

Climent, N., Romero-Cortés, J., Carrillo, J., Muñoz-Catalán y M., Contreras, L. (2013). ¿Qué conocimientos y concepciones movilizan futuros maestros analizando un video de aula? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *16(1),* 13-36.

Dewey, J. (1989). *Cómo pensamos. Nueva exposición de la relación entre pensamiento reflexivo y proceso educativo*. Barcelona: Paidós.

Domínguez, I. (2003). *La resignificación de lo asintótico en una aproximación socioepistemológica.* Tesis inédita de Maestría. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Departamento de Matemática Educativa, México.

García, M., Sánchez, V. y Escudero, I. (2006). Learning through reflection in mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics*, *64*, 1-17.

Kwon, N.Y. y Orrill, Ch. H. (2008). A comparison study of a teacher's reflection. En O. Figueras, J.L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and XXXth Annual Meeting of the North American Chapter of PME*, *1*, p. 352. México.

Llinares, S. y Krainer, K. (2006). Mathematics (students) teachers and teacher educators as learners. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*, 429-459. Rotherdam/Taipei: Sense Publichers.

Perales, R. (2006). *La significación de la práctica educativa*. México: Paidós.

Parada, S. (2009). *Reflexión sobre la práctica profesional: actividad matemática promovida por el profesor en su salón de clases*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Departamento de Matemática Educativa, D.F. México.

Reyes, D. (2011). *Empoderamiento docente desde una visión Socioepistemológica: Estudio de los factores de cambio en las prácticas del profesor de matemáticas.* Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Departamento de Matemática Educativa, D.F. México

Reyes, M. y Fortoul, M. (2009). Los procesos de significación de la práctica docente: una mirada desde los alumnos normalistas. *X Congreso Nacional de Investigación Educativa*, Veracruz, Veracruz, México. Memoria electrónica, recuperado de: http://www.comie.org.mx/congreso/memoriaelectronica/v10/contenido/contenido0115T.htm

Rico, L. (2004). Reflexiones sobre la formación inicial del profesor de matemáticas de secundaria. *Profesorado. Revista de curriculum y formación de profesorado*, *8(1)*, 1-15.

Sánchez, M. (2011). A review of research trends in mathematics Teacher Education. *PNA, 5* (4), p. 129-145.

Sañudo, L. E. (2006). El proceso de significación de la práctica como sistema complejo. En R. C. Perales (coord.), *La significación de la práctica educativa*, 19-53. México: Paidós.

Tzur, R. (2001). Becoming a mathematics teacher-educator: Conceptualizing the terrain through self-reflective analysis. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *4*, 259-283.

Vergara, M. (2005). Significados de la práctica docente que tienen los profesores de educación primaria. *Revista Electrónica Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, *3(1)*, 685-697.

Zaldívar, D. (2012). *Un estudio de la construcción social del conocimiento matemático en un escenario del cotidiano*. Memoria predoctoral. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Departamento de Matemática Educativa, México.

Zeichner, K. (1993). El maestro como profesional reflexivo. *Revista de Pedagogía*, *220*, 44-49.

LA REGLA DE LOS CUATRO PASOS. ANÁLISIS SOCIOEPISTEMOLÓGICO

Adriana Engler
Facultad de Ciencias Agrarias. Universidad Nacional del Litoral. Argentina
Centro de Investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. CICATA–IPN México
aengler@fca.unl.edu.ar

Resumen. En este trabajo se define la Regla de los Cuatro Pasos (RCP) y se registra su estudio desde la socioepistemología. A modo de inicio se presentan cinco prácticas ampliamente desarrolladas a lo largo de varios siglos. Estas últimas son observación, geometrización, modelación, analiticidad y predicción. Dichas prácticas juegan un rol importante en la matematización de la realidad inmediata pues, en su conjunto, sirven para aprehender la propia realidad desde una perspectiva racional. Se busca mostrar cómo tales prácticas llevan al establecimiento de la RCP, dado que están inmersas en los propios pasos

Palabras clave: regla de los cuatro pasos, socioepistemología

Abstract. In this paper we define the Four Steps Rule (RCP) and its study from socioepistemology. We present the practices extensively developed over several centuries are presented. They are observation, geometrization, modeling, analyticity and prediction. Such practices play an important role in the mathematization of immediate reality as a whole, serve to grasp reality itself from a rational perspective. It seeks to show how such practices lead to establishing the rule as they are immersed in the steps themselves

Key words: Four steps rule, socioepistemology

Introducción

La regla de los cuatro pasos

La RCP constituye la estructura matemática usada actualmente como una *técnica* en el aula para la determinación de la derivada $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ de una función $f(x)$. Fue desarrollada durante los siglos XVIII y XIX en diversas ramas de la ingeniería, apareciendo en los textos de cálculo desde finales del siglo XIX y principios del siglo XX. En algunos de los libros de cálculo para ingeniería se describe de la siguiente manera:

1. *Se sustituye en la función x por* $x + \Delta x$, *y se calcula el nuevo valor de la función* $y + \Delta y$.

2. *Se resta el valor dado de la función del nuevo valor y se obtiene* Δy (*incremento de la función*).

3. *Se divide* Δy (*incremento de la función) por* Δx (*incremento de la variable independiente*).

4. *Se calcula el límite de este cociente cuando* Δx *tiende a cero. El límite así hallado es la derivada buscada* (Granville, 1980, p. 30).

Estudio socioepistemólogico de la Regla de los Cuatro Pasos

Toda aprehensión del mundo se produce en el seno de una cultura. Comienza cuando el individuo asume el mundo en el que viven otros, dado que existe una continua identificación mutua entre sujetos. La idea es que cada individuo comprende el mundo en el que otro vive y ese mundo se vuelve suyo. No se aprehende directamente, sino a partir de las representaciones que de ese mundo se construye en las mentes de los individuos. Las teorías científicas serán representadas internamente por quien las comprende de una forma que no necesariamente es reproducción, ni de las expresiones lingüísticas de sus principios, leyes y definiciones, ni de las formulaciones matemáticas con las cuales esas teorías se representan externamente. Un objeto o hecho es y tiene su lugar como tal según el marco conceptual y el sistema de prácticas establecidas dentro de las comunidades científicas. Lo que las prácticas son en un momento dado no se puede separar de la historia de su producción y, por otro lado, esta propia historicidad de la realidad le da un carácter procesual que hace que no se pueda separar el proceso del producto. Es posible pensar en un modelo de aprendizaje como emergente de la participación en dichas prácticas. En este sentido, es posible comprender que las diferentes formas del mundo cotidiano en el que vivimos y nos movemos son matematizables. Entonces, una manera de aprehender el mundo es a través de prácticas dado que con ellas se está matematizando la realidad.

Analizamos las prácticas de observación, geometrización, modelación, predicción y analiticidad reconociendo en ellas su rol en la acción de matematizar los fenómenos que nos rodean. Veremos además cómo, estas prácticas están inmersas en los pasos de la regla.

La observación

Al decir de Fourez (2000), *observar* es ofrecerse una representación del mundo en un contexto y ligada a proyectos, un modelo teórico de lo que vemos. "Cuando observo *algo* siempre tengo que describir*lo*. Para lo cual utilizo una serie de nociones que ya tenía antes: éstas se refieren siempre a una representación teórica, generalmente implícita" (p. 27). La *observación* es una actividad realizada para detectar y asimilar información. El término también hace referencia al registro de observaciones mediante la utilización de instrumentos. Es una construcción social que se refiere a una cultura y a sus aspiraciones, de hecho es una manifestación estructurante de esta última que la determina como una sociedad de conocimiento[2]. En si misma, y por su naturaleza, la observación lleva a los humanos a establecer una *construcción social de la realidad.*

> Cada sociedad, de acuerdo a sus propias coordenadas sociohistóricas, construye su modo de controlar e interpretar su realidad, como modo de pensar y representar el

[2] Los términos: *cultura, sociedad* y *comunidad*, se aceptan semejantes en el presente trabajo.

> mundo. La universalidad de los saberes científicos es puesta en cuestión, las ciencias y las disciplinas científicas, las tecnologías materiales o intelectuales (subjetivas, parciales e interesadas) son resultado de conflictos de intereses, negociaciones varias, imposiciones y condicionamientos de cuya resulta surgen las ciencias y disciplinas científicas que tratan de ser «universales» (como el inglés, apunta irónicamente Fourez) al tratar de ser «reveladas» mediante intentos de dominación. (Moral, 2008, p. 288).

La observación es, en primer lugar, una construcción del sujeto y no el descubrimiento de algo que existe independientemente del sujeto que observa. Está unida al lenguaje y a supuestos culturales. De hecho, el conocimiento proviene de la observación; no obstante, para mostrar y describir cómo la RCP surge de la observación empírica, habrá que reconocer otras actividades que de ésta última se desprenden como son la *geometrización*, *modelación, analiticidad* y *predicción*.

La geometrización

Desde la perspectiva galileana se puede ver cómo el comportamiento matemático emerge en el proceso de formalización del movimiento. También es cierto que la formalización del movimiento es mediatizada por la construcción de las estructuras matemáticas. Galileo formuló aportes a la observación desde la geometrización en cuestiones de movimiento. A lo largo de la historia se observa que la geometrización del espacio fue una práctica desarrollada por geómetras y analistas como Newton, Leibniz y Euler, entre otros. Las prácticas observacionales llevadas a cabo a través de la idealización permiten la representación geométrica, la cuantificación y transformación de lo abstracto, en tanto que se produce un cambio y expresión lingüística de la geometría. Así, es posible afirmar que el término *geometrizar* se refiere a la acción de teorizar las formas del espacio real, entendiéndose por espacio real a porciones limitadas de la superficie de la tierra, así como a porciones del espacio estelar. Se puede pensar que la geometrización del espacio brinda por resultado una configuración ordenada del mismo.

La modelación

En el contexto de la socioepistemología las prácticas vinculan la actividad de enseñanza de la matemática en el nivel de ingeniería con las prácticas de modelación. Consideramos a la modelación, junto con otras prácticas, como fuente de reorganización de la obra matemática y el rediseño de la matemática escolar. Se asume como partícipe de los procesos de matematización en el aula. Favorece el desarrollo de una matemática funcional que permite al estudiante comprender los conceptos matemáticos desde esa funcionalidad en los diferentes escenarios donde se desenvuelve. La modelación se asume como una práctica que participa en la construcción

de conocimiento de un individuo cuando enfrenta una tarea matemática en la que pone en juego su saber. Córdoba (2011) manifiesta:

> (…) con relación a la modelación en el ámbito escolar, la perspectiva socioepistemológica no tiene como preocupación centrar que la modelación sea considerada como un contenido a enseñar o como un medio o herramienta para enseñar conceptos matemáticos. El centro de interés en la perspectiva sociepistemológica radica en considerar la modelación en matemática educativa como una práctica que se comparte y se ejerce en comunidades específicas y en contextos particulares y que al ser ejercida por estudiantes y profesores (actores del sistema didáctico) permite la resignificación de conocimiento matemático escolar, lo cual a su vez modifica eses prácticas bien sea incorporando nuevos elementos, enriqueciendo los ya existentes o aportando nuevos significados, y modifica también a los individuos involucrados. (p. 65)

La modelación se convierte en una práctica que refleja una cierta intención humana que le da el carácter social. Permite la interacción con otros y con fenómenos y acontecimientos del mundo real. Como toda práctica permitirá generar conocimiento y/o resignificar conocimientos ya existentes. Buendía (2004) establece que, al asumir a la modelación como una práctica, ésta se constituye en algo más que plantear un fenómeno extra-matemático en símbolo. Es un proceso de descubrimiento de debilidades de aprendizaje y de manera de relacionarse tanto con el conocimiento como con los otros y con el entorno.

La analiticidad

A finales del siglo XVIII se planteó el siguiente interrogante ¿es posible representar cualquier función real de variable real a través de una serie de potencias? Si bien Cauchy argumentó que no, Lagrange demostró que sí era posible. Camacho y Sánchez (2010) manifiestan que las funciones analíticas contienen un gérmen de conocimientos que, desafortunadamente, con el cálculo actual es difícil de reconocer. De hecho, el dominio de las funciones analíticas debe mirarse en un contexto variacional distinto, puesto que cuentan con un dominio extendido cuyos elementos asumen caracterizaciones diferentes a las que se toman en las funciones comunes a través de solamente la relación entre variables:

> Desde el punto de vista de la analiticidad, parte del dominio de existencia de las funciones analíticas son las argumentaciones asociadas a la variación, como son la *inferencia, error, predicción, variabilidad, devenir y generalización,* entre otras que, como

> consta en diferentes investigaciones, no aparecen en los discursos escolares del cálculo diferencial contemporáneo. (Camacho y Sánchez, 2010, p. 32)

Los trabajos de Newton y Lagrange enfatizaron la conexión entre la analiticidad y la predicción. No se puede hablar de analiticidad sin la práctica de predicción. A continuación se hace referencia a esta última.

La predicción

La predicción ha sido una idea motriz en el desarrollo de conceptos matemáticos, en especial en el cálculo. Está íntimamente relacionada con la noción de variación y se desprende, en principio, de los argumentos que surgen de la geometrización o teorización inicial de la realidad y de la propia analiticidad. La variación resulta una herramienta de análisis necesaria para el ejercicio de la predicción. Cantoral, Molina y Sánchez (2005, p. 467) definieron la predicción como una "actividad racional que permite determinar el estado futuro de un sistema, de un objeto o de un fenómeno con base en el estudio sistemático de las causas que lo generan y los efectos que produce".

Cantoral (2001) ha afirmado:

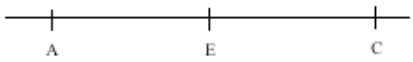
> La idea de predicción es, sin lugar a dudas, la idea de mayor importancia en el estudio de los fenómenos de cambio en la naturaleza. Se trata siempre de adelantarse a los acontecimientos, de revelar lo que habrá de suceder. Sin embargo el problema queda resuelto hasta que se precisa cómo es que se logra la predicción y de qué manera estaremos ciertos de nuestro conjetura. En el caso de los fenómenos de flujo continuo en la naturaleza, la predicción se obtiene a través del estudio de la ley que gobierna el comportamiento del sistema, ley que se encuentra mediante el estudio de la variación, más pequeña, más básica, más elemental que podamos estudiar: el elemento diferencial. Sin embargo, la predicción para ser legítima debe construirse exclusivamente con datos que se posean desde el inicio. En este sentido, un resultado de este estudio permitió conferirle a la Serie de Taylor el papel de instrumento predictor por excelencia (ya que en él quedan impresas todas las formas discutidas de la predicción).

El origen de la regla de los cuatro pasos

La génesis de la regla se encuentra inmersa en diferentes prácticas que le dieron origen, como son aquellas de la *observación*, *geometrización*, *analiticidad* y *predicción,* desarrolladas sobre todo por Newton y cultivadas ampliamente por los geómetras de los siglos XVIII al XX, las cuales a su vez se ubican en actividades de la ingeniería y de la física, teniendo que ver con la astronomía, topografía, óptica, geodesia, entre otras.

No obstante, la definición de la regla de los cuatro pasos aparece en la *Méthode pour la recherche du maxima et minima* escrita por Fermat en 1629, obra en la que usa un *método*[3] para la determinación de los valores máximos y mínimos de algunas curvas. Surgió el que se conoce como *teorema de Fermat* (para los máximos y mínimos) el cual consiste —de acuerdo a la notación actual— en hacer $e=0$ en la expresión $\frac{f(a+e)-f(a)}{e}$. El teorema se concibió como un *methodus* algorítmico para la determinación de máximos y mínimos, en problemas particulares. Originalmente fue presentado por Fermat en un lenguaje coloquial más que analítico a partir de un ejemplo, a saber:

«*Partir* AC, *en* E, *de modo que* $AE \times EC$ *sea máximo*»



«Tomemos $AC=b$; sea a uno de los segmentos, el otro será $b-a$, y el producto al que debemos encontrar el máximo: $ba-a^2$. Sea por tanto $a+e$ el primer segmento de b, el segundo será $b-a-e$, y el producto de los segmentos $ba-a^2+be-2ae-e^2$.

Este debe ser *adigual*[4] *al precedente:* $ba-a^2$

Suprimiendo los términos comunes: $be \backsim 2ae+e^2$

Dividiendo todos los términos: $b \backsim 2a+e$

Suprimiendo e: $b=2a$

Para resolver el problema, falta luego tomar la mitad de b.

Es imposible dar un método más general.»

Si en el ejemplo anterior retomamos los *pasos* seguidos por Fermat, usando la notación actual para las funciones y haciendo analogía de estos con los pasos que se siguen para derivar actualmente por incrementos, quedaría la semejanza presentada en la tabla.

Pasos seguidos por Fermat para resolver el problema	Aplicación de la regla de los cuatro pasos al problema resuelto por Fermat
1. Incrementar a en e como $a+e$ de modo que $f(a+e)$ y «adigualar» $f(a)$ y $f(a+e)$, lo cual se aprecia en el ejemplo	1. Incrementar $f(a)=ba-a^2$ como $a+e$ e igualar $f(a+e)$ y $f(a)$, es

[3] De hecho el método esconde los cuatro pasos de la regla.
[4] La palabra adigual —*adæqual*— debe tomarse literalmente como *aproximada.*

con la ayuda del signo $\backsim$.

2. Suprimir los términos semejantes que figuran en los dos miembros de la adigualdad.
3. Dividir los dos miembros de la adigualdad por e.
4. Suprimir todos los términos que contienen e transformando así la adigualdad en igualdad.

decir: $f(a+e) = \underbrace{ba - a^2}_{f(a)} - ae + be - ae - e^2$

2. Hacer la diferencia:

$$f(a+e) - f(a) = (b-2a)e - e^2.$$

3. Dividir los dos miembros de la igualdad por e:

$$\frac{f(a+e) - f(a)}{e} = -2a + b - e$$

4. Aplicar en ambos miembros $\lim\limits_{e \to 0}$

$$\lim_{e \to 0} \frac{f(a+e) - f(a)}{e} = -2a + b - \lim_{e \to 0}(e)$$

De modo que resta: $f'(a) = -2a + b$

Esta semejanza intenta mostrar la equivalencia entre ambos acercamientos y busca esclarecer el origen de la regla, puesto que los objetos matemáticos que se usan en ambos no guardan relación. En la época de Fermat no existía la noción de variable, las funciones en esa época son tratadas como cantidades, e no es un incremento como se le concibe en el cálculo actual, etc. El *methodus* de Fermat reposa sobre la noción de adigualdad $\backsim$ la cual muestra los resultados como un esquema de aproximación que anticipa también las coyunturas del cálculo infinitesimal. Las prácticas estudiadas están inmersas en ese orden en lo aplicado por Fermat en el problema.

La RCP en las actividades de ingeniería

Son numerosos los problemas de ingeniería en los que se pueden observar las prácticas y que se pueden resolver haciendo uso de la regla de los cuatro pasos. En el aula universitaria es posible el encuentro con las prácticas en las actividades de ingeniería. A modo de ejemplo se presenta un problema que habitualmente se trabaja en el aula.

Un ingeniero diseña una curva circular para una carretera según se aprecia en la Figura 5.3. Los datos contenidos en la imagen son los siguientes:

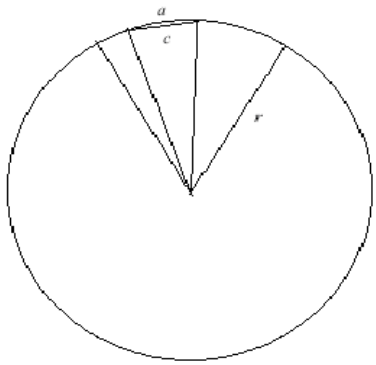
a : longitud de arco de la curva

θ : ángulo que subtiende a la curva

r : radio de la curva

c : valores de las cuerdas con las cuales se traza la curva en el terreno.

α : valor angular que subtiende a la cuerda, también llamado *grado de curvatura.*



a) El ingeniero se cuestiona cómo cambia el valor del radio r (en metros) cuando cambia el valor del grado de curvatura α (en grados), es decir, se pregunta cómo son los diferentes valores de $\frac{dr}{d\alpha}$, puesto que el diseño de este tipo de curvas parte del conocimiento previo de que el valor del radio que se tome será máximo en tanto el valor del grado de curvatura α será mínimo.

b) ¿A qué razón está cambiando el radio cuando el grado $\alpha = 1^{\circ}$ de arco y la cuerda es de 20 metros?

a) Para encontrar la solución se comienza analizando las prácticas que intervienen y permiten organizar el problema.

1. Observación: en el problema esta práctica es implícita al proceso de medición inicial y a la toma de datos en el campo, previo al diseño de la curva.
2. Geometrización/3. Modelación: Obedece al proceso de *geometrizar* el problema, teorizarlo, así como al establecimiento de la función analítica correspondiente según las relaciones que se determinan en la figura misma. En este caso, de los valores que se encuentran en la figura se pueden establecer las siguientes relaciones:

   $a = r\theta$ (θ en radianes) (1) $\qquad \frac{c}{\alpha} = \frac{a}{\theta}$ (2)

   De (2): $a = \frac{c\theta}{\alpha}$ (3). Igualando (1) con (3), se tiene la relación: $r = \frac{c}{\alpha}$.

   La cual representa una función analítica que hace corresponder r con α, para c igual a un valor constante, es decir: $r(\alpha) = c\alpha^{-1}$.

4. Analiticidad

   La analiticidad se refiere a descubrir el germen contenido en la función analítica (su variabilidad, predicción, derivada, etc., según se pretenda en el problema).

   Primer paso: $$r(\alpha + \Delta\alpha) = c(\alpha + \Delta\alpha)^{-1} = c(\alpha^{-1} - \alpha^{-2}\Delta\alpha + \alpha^{-3}(\Delta\alpha)^2 + \ldots)$$

5. Predicción

   Segundo paso: $r(\alpha + \Delta\alpha) - r(\alpha) = -c\alpha^{-2}\Delta\alpha + c\alpha^{-3}(\Delta\alpha)^2 + \ldots$

   Tercer paso: $$\frac{r(\alpha + \Delta\alpha) - r(\alpha)}{\Delta\alpha} = -c\alpha^{-2} + c\alpha^{-3}\Delta\alpha + \ldots$$

Cuarto paso: $$\frac{dr}{d\alpha} = \lim_{\Delta\alpha \to 0} \frac{r(\alpha + \Delta\alpha) - r(\alpha)}{\Delta\alpha} = -c\alpha^{-2} + c\alpha^{-3} \lim_{\Delta\alpha \to 0} \Delta\alpha + \ldots$$

De donde $\frac{dr}{d\alpha}$ guarda la proporción: $\frac{dr}{d\alpha} = \frac{-c}{\alpha^2}$.

b) $\frac{dr}{d\alpha}$ está cambiando a razón de: $\frac{dr}{d\alpha} = \frac{-20}{1} = -20\frac{metros}{grado}$ para $\alpha = 1^{\circ}$ y una cuerda de 20 metros.

Es importante reconocer que las prácticas en juego aparecen como una interpretación que organiza al propio problema. Resulta importante el rol de cada una de ellas para poder dar respuesta a los diferentes interrogantes planteados. En la interpretación para la resolución cobran relevancia cada uno de los pasos de la RCP descriptos anteriormente.

Conclusiones

A lo largo de todo este artículo quedaron descriptas de manera muy resumida las cinco prácticas: observación, geometrización, analiticidad y predicción y cómo están inmersas en la regla. Se mostraron además algunos problemas en los que el análisis de las prácticas que intervienen permiten organizar la resolución del mismo a través de la interpretación de los cuatro pasos de la regla. Estas prácticas están presentes en los propios problemas de orden variacional que se atienden en los cursos de cálculo diferencial.

Referencias Bibliográficas

Buendía, G. (2004) *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales. (Un estudio socioepistemológico)*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Camacho, A y Sánchez, B. (2010). Análisis sociocultural de la noción de variabilidad. México: *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* Número especial, *13*(4), 29-52.

Cantoral, R., Molina, G., Sánchez, M. (2005). Socioepistemología de la predicción. En J. Lezama (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Vol. 18, Núm. 1, 463 – 468. México.

Córdoba, F. (2011). *La modelación en Matemática Educativa: una práctica para el trabajo de aula en ingeniería.* Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

Fourez, G. (2000). *La construcción del conocimiento científico. Sociología y ética de la ciencia.* Segunda Edición Actualizada. Madrid: Narcea.

Granville, W. (1980). *Cálculo Diferencial e Integral*. Primera reimpresión. México: Grupo Noriega Editores. LIMUSA.

Moral, M. (2008). Gérard Fourez. *Cómo se elabora el conocimiento. La epistemología desde un enfoque socioconstructivista.* Narcea. Madrid. En Recensiones de Libros y Revistas. OEI Revista Iberoamericana de Educación. N° 48. pp. 285-292.

LA MODELACIÓN. UN EJE PARA LA RED DE DESARROLLO DE USOS

María Esther Magali Méndez Guevara yFrancisco Cordero Osorio
UAM de la UAGro.; DME de Cinvestav -IPN México
mguevara83@gmail.com; fcordero@cinvestav.mx

Resumen. El escrito muestra un panorama general de una investigación que constituyó una categoría de modelación para la matemática escolar. Dicha categoría provoca el desarrollo de red de uso de conocimiento matemático, develado en las herramientas de variación local, global y su articulación para caracterizar comportamientos o tendencias. Se exhibe una breve descripción teórica del eje de la categoría, mismo que sustenta diseños de situación desenvueltos en tres momentos: transformación, variación y aproximación, caracterizados por el tipo de usos de lo gráfico, lo numérico o lo analítico que emergen como justificación funcional de los estudiantes ante los diseños de modelación escolar.
Palabras clave: modelación, matemática escolar, desarrollo de usos
Abstract. The report gives an overview of research that constituted a category of modeling for school mathematics. This category triggered the development of network the knowledge mathematical, like tools the variation local, global and its articulation to characterize behaviors or tendencies mathematical. We exhibit a brief theoretical description of the category axis. This one is bedrock from situation designs, divided into three moments: transformation, variation and approximation, characterized by the type of use of the graphic, the numerical or analytical that can emerge as functional justification of the students before the designs.
Key words: modeling, school mathematics, development the knowledge

Introducción

Nuestra sociedad vive una problemática en el campo de la educación matemática, pues a pesar de que se reconoce la importancia de las matemáticas en la sociedad y su importancia en el avance tecnológico, y por tanto, se justificación su presencia en el escenario escolar, no se ha logrado producir o hacer sentir a los actores del sistema educativo que los conocimientos matemáticos, o científicos en general, son integrales a su vida (Chevallard, Bosch & Gascón, 1998). Esto puede atenderse desde diversas posturas e incluso disciplinas, por ejemplo, desde las actitudes del individuo con respecto a las matemáticas hasta cuestiones del perfil emocional matemático del individuo (Hidalgo, Maroto & Palacios, 2004) o bien puede llevarse al planteamiento de una problemática en donde el discurso matemático escolar excluye a los actores de la construcción social del conocimiento matemático (Soto, 2010).

Desde esta última postura, la socioepistemológica, apuesta a la búsqueda de elementos para rediseñar el discurso matemático escolar (dME), para incluir a los actores en la construcción social de su conocimiento matemático, y aminorar la tensión entre la matemática escolar y la matemática funcional, en tanto sea útil a quien la construye y posibilite su desarrollo en otros escenarios.

La Socioepistemología ha identificado una forma de atender esta problemática, a través de marcos de referencia, basados en epistemologías de prácticas o usos, que provoquen el desarrollo de conocimiento matemático en situaciones especifica (Farfán & Ferrari, 2009; Cordero, Cen, & Suárez, 2010). Además, por experiencias previas (Méndez & Arrieta, 2005; Méndez & Arrieta,

2009) con el estudio del funcionamiento de la modelación, como práctica social, y su inclusión en diseños desarrollados con estudiantes de enseñanza media superior, identificamos que ésta podría ser un eje para el desarrollo de usos de conocimiento matemático (Méndez & Cordero, 2012) en el escenario escolar. Así una pregunta que nos hicimos fue ¿cómo generar dicho eje?.

Asimismo, las investigaciones desarrolladas en nuestra disciplina nos llevan a reconocer un estatus de la modelación. La visión generalizada es concebirla como un proceso establecido que conviene enseñar o implementar, por ejemplo; para aplicar conocimientos matemáticos (Blum & Borromeo, 2009); o como un método que permite enseñar matemáticas (Gómez-Chacón & Maestre, 2008) mediante la resolución de problemas. Aunque otros colegas se ha preguntado cómo desarrollar este proceso a través de técnicas y tareas especificas (Bosch, García, Gascón & Ruíz, 2006) no deja de ser un proceso aislado a quienes lo usan, de manera que la modelación para los actores principales del dME no es parte de su quehacer, o bien algo que ellos puedan construir. Es decir, no es un proceso de construcción en sí mismo de conocimiento matemático, empero se reconoce como la estrategia por excelencia del ser humano para generar conocimiento (D´Ambrosio, 2009).

El recorrido que se realizó dejó ver esta postura predominante de modelación, como un proceso que excluye a los actores de su construcción, en tanto su función en el dME. Esto nos llevo a proponer una categoría de conocimiento matemático alternativa para la modelación escolar desde la socioepistemológica, y aquellas preguntas que dejamos abierta en investigaciones previas.

Así, concebimos a la modelación un proceso de construcción y desarrollo de usos de conocimiento matemático. La categoría que formulamos caracterizó a la modelación (Méndez & Cordero, 2011), y evidenció su funcionamiento en diseños de situación, que provocan en estudiantes de enseñanza media superior una matemática funcional. Esto se refleja en los desarrollos y articulación de usos a saber de; gráficas, tablas numéricas y expresiones analíticas al caracterizar tipos de variación ante la experimentación de fenómenos físicos.

Los diseños de investigación que implementamos, fueron los instrumentos para validar nuestra categoría, esta funcionó como eje detonador de usos en tanto argumentos para caracterizar comportamientos lineales, cuadráticos y exponenciales.

Modelación una categoría para la matemática escolar

Nuestra categoría de modelación nace al seno de la teoría Socioepistemológica y tiene sus orígenes en investigaciones previas (Méndez & Arrieta, 2009; Méndez & Arrieta, 2005) que permitieron explicitar esta categoría para la modelación escolar. Es decir, determinar qué elementos se deberían poner en juego para desarrollar una matemática orgánica al estudiante, y cómo pondrían dichos elementos hacerse explícitos en diseños de situación.

La categoría de la que hablamos permite el desarrollo de redes de usos de conocimientos matemáticos (Drucm) (Méndez, 2013), en la caracterización de comportamientos de variación. El núcleo o corazón de la categoría (figura 1) provoca que emerjan los usos de gráficas, tablas y expresiones analíticas como herramientas que permiten estudiar y explicar la variación local o global, a través de conjeturar sobre la tendencia o mediante caracterizar el comportamiento de intervalos de variación.

Figura 1. El núcleo de la categoría de modelación

Es decir, la modelación de la que hablamos no es la predominante en el discurso matemático escolar (OCDE, 2004) o en la disciplina en general, pues no queremos llevar la modelación matemática tal cual a una comunidad educativa (Meyer, Caldeira & Malheiro, 2011). Sino más bien generar un marco *ad hoc* a la matemática escolar, basado en la esencia de la modelación como construcción continua de conocimiento.

Así nuestro marco de referencia se expresa en diseños de situaciones, que podemos llamar diseños de modelación escolar, que toman por eje los elementos de la categoría develando usos de conocimiento matemático que son argumentos funcionales para dar cuenta de la variación, la transformación y la predicción de comportamientos según el tipo de experimentos tratados.

En los diseños los usos emergen como argumentos que los actores emplean para organizar los comportamientos de fenómenos, mediante la comparación de dos estados de tiempo y su relación de variación, transformación o tendencia en dicho tiempo. Esto se relaciona con los cambios de condiciones en un experimento y sus implicaciones en las variaciones de su gráfica o datos numéricos hasta llegar al estudio de operaciones de corte lógico-formal en expresiones analíticas. Además, dichas construcciones son enlazadas y desarrolladas por prácticas como interpretar, analizar, especular, calcular, organizar, postular, adaptar y consensuar, entre otras.

La forma en como se ponen en juego todos los elementos se sintetiza en los momentos que se viven en los diseños de situación, los cuales pueden suceden de forma transversal, pero se pueden distinguir por medio de usos que se develan, la tabla 1 que a continuación se presenta, explica el tipo de usos que se pueden develar, al considerar tres tipos de comportamientos; lo lineal, lo cuadrático y lo exponencial.

DS *Drucm*	Elasticidad de los Resortes	Plano inclinado	Enfriamiento del silicón
Momento I Transformaciòn	Elementos que describen el experimento y su implicación en las transformaciones gráficas y los valores numéricos. El espacio gráfico.	Elementos que influyen en el experimento. Relación entre las condiciones físicas y los cambios en las gráficas y valores numéricos.	Las condiciones que afectan al experimento. Argumentos sobre la rapidez del enfriamiento si el ambiente es más frio o calido.
Momento II Variaciòn	Caracterizar los incrementos por intervalos en forma numérica o gráfica.	Identificar en los intervalos gráficos y numéricos, los momentos del experimentos. Determinar variaciones locales.	Reconocer el valor de la temperatura ambiente como el límite de descenso. Argumentar sobre los intervalos de enfriamiento.
Momento III Aproximaciòn	En la extrapolación en los puntos de las gráficas. La identificación de una constante de variación y formulación de una regla de variación.	En la extrapolación en los puntos de las gráficas. La identificación de valores que relacionan una expresión cuadrática con sus condiciones experimentales.	Describir que el enfriamiento está relacionado con la temperatura ambiente.
M o d e l a c i ó n			

Tabla 1. Momentos de Drucm en los diseños de situación

Los diseños parten de la experimentación de fenómenos físicos y la implementación de instrumentos tecnológicos como calculadoras graficadoras y sensores de movimiento y temperatura. O bien del empleo de programas que substituyan a las calculadoras, por ejemplo, un software que simula los experimentos, tal es el caso para el estiramiento de los resortes (figura 2).

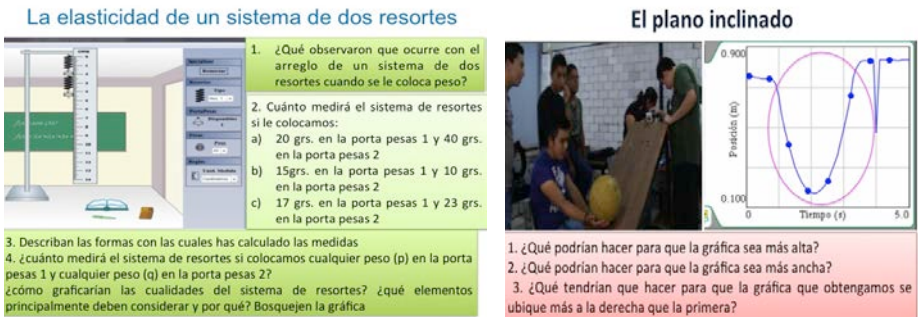


Figura 2. Ejemplos de los diseños de situación

Ejemplo de Drucm

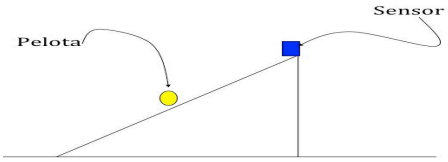
Entre los diseños que elaboramos esta el plano inclinado, el cual alude a un Drucm que caracteriza lo cuadrático (Tabla 2), tomaremos este para mostrar un ejemplo de cómo se explicitan los momentos en los diseños, así como el tipo de resultados que se obtuvieron con estudiantes de bachillerato.

Los estudiantes develan un Drucm similar al que se muestra en la figura 3, donde se puede observar la transversalidad de los momentos de transformación y variación, mediante las relaciones que emergen para justificar los cambios en las tablas y gráficas según las condiciones del experimento.

DS — **El plano inclinado**

Momento I

Formen un arreglo experimental similar al que muestra la figura, haciendo uso del sensor de movimiento y la calculadora.



En la calculadora se muestra una gráfica, describan las características de la gráfica y su relación con el experimento.

¿Qué podrían hacer para que la gráfica sea más alta?

¿Qué podrían hacer para que la gráfica sea más ancha?

¿Qué tendrían que hacer para que la gráfica que obtenida se ubique más a la derecha que la primera?

Momento II

La siguiente tabla de datos deviene de un experimento como los que han realizado. Dados los datos podrían determinar:

Tiempo (s)	Posición (m)
0	6.625
0.5	5.5
1	4.625
1.5	4
2	3.625
2.5	3.5
3	3.625
3.5	4
4	4.625
4.5	5.5

a) ¿Cuál fue la posición inicial de la pelota?

b) ¿En qué tiempo estuvo más cerca del sensor?

c) ¿Cuál fue la posición de la pelota en el tiempo 0. 3 segundos?

d) ¿Cuál fue la posición de la pelota en el tiempo 2.3 segundos?

Momento III	Describan qué métodos usaron para responder a las preguntas del inciso c) y d) Cómo sería el método que les permita predecir la posición de la pelota en cualquier segundo. ¿Qué elementos serían determinantes?

Tabla 2. La situación del plano inclinado

Las fechas rojas en la figura 3, indican los elementos que los jóvenes relacionaron con el vértice de la parábola según el experimento, es decir, el punto más cercano de la pelota al sensor al subir por el plano. Mientras que las fechas verdes indican que ellos relacionaron las amplitud de la parábola con la altura del plano. Estos elementos están implícitos en los momento I y II del diseño.

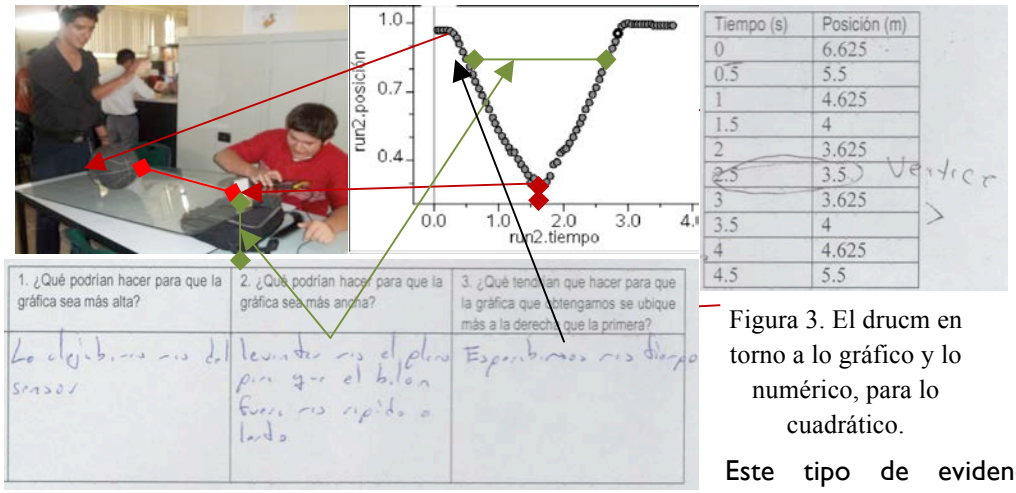


Figura 3. El drucm en torno a lo gráfico y lo numérico, para lo cuadrático.

Este tipo de evidencias se obtuvieron en la investigación, con ello se muestra como nuestra categoría para la modelación escolar pude provocar el usos y desarrollo articulado de conocimientos matemáticos por los estudiantes de una manera amena y desde ahí promover significados para los contenidos que la matemática escolar privilegia.

Conclusiones y prospectivas

Con la categoría de modelación escolar que proponemos podremos formular diseños que se adapten a la matemática escolar, provocando en ella una matemática funcional para los estudiantes que permitan el desarrollo continuo de conocimiento.

Además dicha categoría trastoca la matemática escolar y la forma de abordar las otras ciencias, mostramos aquí una transversalidad entre la física y la matemática por medio del escenario de experimentación que se considera.

Una de las prospectivas de esta investigación es lograr generar redes entre profesores e investigadores que promuevan la inclusión de los diseños de situación que se formulan en el

ambiente de investigación, pues reconocemos que para lograr implementar y hacer permanente nuestra categoría en el sistema escolar debemos involucrar a los actores principales del mismo, los docentes.

Agradecimientos Esta investigación está financiada por CONACYT con el Proyecto Las Resignificaciones del Uso del Conocimiento Matemático: la Escuela, el Trabajo y la Ciudad. Clave 0177368

Referencias bibliográficas

Blum, W. & Borromeo, R. (2009). Mathematical Modeling: Can it be taught and learnt?. *Journal of mathematical modeling and application, 1*(1), 45-58. Disponible en: http://proxy.furb.br/ojs/index.pho/modelling

Bosch, M., García, F., Gascón, J. & Ruíz, L. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropologíca de lo didáctico. *Educación Matemática, 8*(2), 37-74

Cordero, F., Cen, C. & Suárez, L. (2010). Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(2)187-214

Chevallard, Y., Bosch, M. & Gascón, J. (1998). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. México: SEP.

D´Ambrosio. (2009). Mathematical Modeling: Cognitive, Pedagogical, historical and political dimensions. *Journal of mathematical modeling and application, 1*(1), 89-98. Disponible en: http://proxy.furb.br/ojs/index.pho/modelling

Farfán, R. & Ferrari, M. (2009). Un estudio Socioepistemológico de lo logarítmico: La construcción de una red de modelos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 11*(3), 309–354.

Gómez-Chacón, I. & Maestre, N. (2008). Matemáticas y Modelización. Ejemplificación para la enseñanza obligatoria. *Enseñanza de la Matemática, 17*(1), 107–121.

Hidalgo, S, Maroto, A. & Palacios, A. (2004). ¿Por qué se rechazan las matemáticas? análisis evolutivo y multivariante de actitudes relevantes hacia las matemáticas. *Revista de Educación*, (334), pp. 75-95.

Méndez, M. y Arrieta, J. (2005). Las prácticas sociales de modelación multilineal de fenómenos en el aula. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta latinoamericana de Matemática Educativa*

18 (pp. 575-582). México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Méndez, M. & Arrieta, J. (2009). La experiencia como la evolución de las prácticas sociales. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22* (pp. 1353- 1360). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Méndez, M & Cordero, F. (2012). La función de la modelación en la resignificación del conocimiento matemático. En O. Covian, Y. Chávez, J. López, M. Méndez, A. Oktaç. *Memorias del Primero Coloquio de Doctorado*, (pp. 257 – 267). ISBN: 978-607-9023-08-9, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Cinvestav.

Méndez, M. (2013). *Desarrollo de red de usos del conocimiento matemático: la modelación para la matemática escolar*. (Tesis inédita de doctorado). Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Meyer, J., Caldeira, A. & Malheiro, A. (2011). *Modelagem em educação matemática*. Brasil: Autêntica editora LTDA-coleção tendências em educação matemática.

Soto, D. (2010). *El discurso matemático y la exclusión. Una visión socioepistemológica*. (Tesis no publicada de maestría). Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados del IPN. México.

OCDE. (2004). Marco teórico de PISA 2003: Conocimientos y destrezas en matemáticas, lectura, ciencias y solución de problemas. *Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del sistema educativo*. Paris.

INTRODUCCIÓN AL LENGUAJE ALGEBRAICO CON USO DE HIPERTEXTOS

Leonardo Maier y Nora Ferreyra
Universidad Nacional de La Pampa. Argentina
leo-maier@hotmail.com, noraf@exactas.unlpam.edu.ar

Resumen. La escuela actual, marco de las prácticas profesionales docentes, se halla inmersa en un mundo cambiante. Junto al volumen creciente de información, se incorporan accesos a la web de manera más dinámica y autónoma denominada modalidad hipertextual que posibilita la interconexión de todo tipo de información multimedia: textos, imágenes, sonidos, videos, con lo cual se potencia su utilización ya que permite seleccionar el medio o canal más adecuado para transmitir el concepto o ejemplo.
Se presenta una experiencia desarrollada con estudiantes de segundo año de una escuela secundaria de Santa Rosa, Provincia de La Pampa, Argentina, a partir del diseño de una actividad con hipertexto.
Palabras clave: hipertexto, lenguaje algebraico, ecuaciones
Abstract. The actual school, in a teacher's professional practices context, is inmersed in a changing world. Along with the increasing volume of information, accesses to web called hypertextual modality, are incorporated in a more dynamic and autonomous way that allows the interconnection with all kind of multimedia information: texts, images, sound, videos, that strengthens its use as it enables the user to select the medium or channel to convey the concept or example.
This is an experience carried out with second year students from a secondary school in Santa Rosa, La Pampa
Key words: hypertext, algebraic language, equations.

Introducción

Numerosas investigaciones hacen referencia a las dificultades advertidas en los estudiantes al abordar el estudio del álgebra (Sessa, 2005; Ruiz, Bosch y Gascón, 2010). Observaciones no sistematizadas nos permiten afirmar que tales dificultades se presentan también en el contexto de la escuela secundaria en la provincia de La Pampa. Por este motivo nos resulta de especial interés estudiar las posibilidades de hallar una solución o paliar de alguna manera los inconvenientes que se presentan al abordar de manera tradicional la introducción al lenguaje algebraico.

Para ello hemos utilizado la tecnología e implementado el hipertexto con un doble propósito, por un lado, captar el interés del estudiante con una herramienta poderosa y atractiva que habilita el progreso en la temática y por el otro permitir que dicho estudiante no dependa estrictamente de la presencia del docente para poder avanzar.

La escuela actual, marco de las prácticas profesionales docentes, se halla inmersa en un mundo cambiante, en un contexto en el que aumentan y se complejizan los conocimientos y las tecnologías se vuelven rápidamente obsoletas.

Son conocidos los informes que señalan el enorme crecimiento de los usuarios de internet y sus diferentes posibilidades (más de 2.270 millones de personas con acceso a la web, más de 200 millones de consultas diarias a Google, en marzo de 2011).

Junto al volumen creciente de información, se incorporan accesos a la web de manera más dinámica y autónoma denominada modalidad hipertextual. Los hipertextos se refieren a una organización no lineal y secuencial de la información, en la cual es el usuario el que decide y organiza el camino a seguir y las relaciones a establecer entre los diferentes bloques informativos que se le ofrecen.

El uso de la mencionada herramienta en las prácticas educativas se considera importante como una forma de romper con la linealidad tradicional de los textos que se ofrecen a diario y generar atracción en los estudiantes, acostumbrados a una frecuente exposición de imágenes vertidas desde diferentes medios. Además, el hipertexto posibilita la interconexión de todo tipo de información multimedia como textos, imágenes, sonidos, videos, con lo cual se potencia su utilización ya que permite seleccionar el medio o canal más adecuado para transmitir el concepto o ejemplo.

En el contexto de la Argentina, el plan nacional CONECTAR IGUALDAD que se viene implementando paulatinamente, brinda, a través del uso de las netbooks, una herramienta sumamente valiosa para la práctica docente. Desde este punto de vista, el aporte de hipertextos incrementa la potencia de este recurso tecnológico y complementa al profesor en las tareas de los alumnos.

Los problemas de conteo que se abordan para comenzar con el lenguaje algebraico, brindan al estudiante la posibilidad de crear, pensar, elaborar métodos y formulas, permitiéndole calcular, en términos generales, cualquier cantidad.

La creación de un hipertexto apropiado puede aportar una gran variedad de problemas adicionales, con explicaciones adecuadas, ayudando al lector a descubrir numerosas alternativas de resolución para éstos, y además, sumar enfoques teóricos diferentes.

Con la intención de desarrollar clases de matemática aprovechando la natural disposición de los estudiantes al uso de la computadora y estudiar los resultados de tal metodología, se diseñó una guía de trabajo para el aprendizaje autónomo y colaborativo, utilizando las posibilidades que ofrece el medio informático. Esta primera parte del trabajo implicó una reflexión sobre los procesos de enseñanza y de aprendizaje y cómo realizar la integración del hipertexto a la práctica pedagógica.

Desarrollo

Hoy el conjunto de la población cuenta con televisión abierta, video cable, películas en video o dvd, y también con nuevas formas de transmisión electrónica -internet, teléfonos celulares- donde la información llega bajo la llamada modalidad hipertextual. La principal característica de esta

información es la diversidad de formatos con que "arriba", esto es, la suma de texto, imágenes, videos, audio, que surgen del acceso a la web.

En términos de material didáctico, la creación de un hipertexto implica integrar distintos lenguajes para satisfacer las exigencias y necesidades de un usuario, lo cual implica crear y recuperar datos hallados en internet y diversas formas de información cada vez más rápidas y autónomas.

Por otro lado, la didáctica de la matemática nos brinda el marco teórico de la Teoría de Situaciones didácticas para orientar la producción de actividades a desarrollar en la clase. En este contexto, llamamos secuencia didáctica, al conjunto de actividades debidamente articuladas y ensambladas, pensadas para desarrollarse generalmente en varias clases, cuyo propósito fundamental es abordar el estudio de una determinada unidad didáctica, tanto desde el punto de vista de los contenidos como de la construcción de técnicas involucradas en la resolución.

Acorde a las ideas de Grau (2012), las actividades desplegadas a partir del uso del hipertexto, generan la incorporación de vocabulario y parámetros específicos de esta alternativa de comunicación tales como: la Hipertextualidad (generación de más de un itinerario de lectura); la Intertextualidad (incorporación de fórmulas, notas, alusiones provenientes de otros textos, imágenes y símbolos); la Interacción (generación de la relación contenido-computadora-persona), además de incorporar, modificar, actualizar permanentemente los textos, imágenes, sonidos, símbolos, animaciones o videos, entre otros.

Experiencia

La secuencia didáctica preparada se trabajó con estudiantes de primer año de una escuela secundaria (12 años aproximadamente) para abordar problemas vinculados a las ecuaciones lineales.

El diseño se pensó a partir de la experiencia recabada en el uso de material teórico escrito, guías de trabajos prácticos, análisis de textos diversos, reelaborando la presentación de ejemplos con los comentarios pertinentes, completados por la propuesta de un número suficiente de nuevos problemas.

Se consideró también la posibilidad de habilitar una primera evaluación del aprendizaje logrado que puede quedar a cargo del propio estudiante a través del mismo medio.

El hipertexto presentado fue pensado desde la introducción de problemas de conteo hasta la resolución de ecuaciones lineales con una incógnita. En ese sentido, dos de los problemas iniciales tratados son adaptaciones de los presentados en Sessa (2005):

Problema 1:

En un restaurante se arman las mesas colocando 8 platos en cada una, distribuidos como se indica en la Figura 1, ¿cuántos platos se colocarán si se unen 3 mesas?

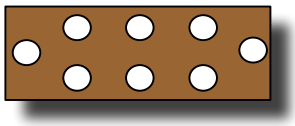


Figura 1

◯ representa un plato

Problema 2:

Calcular la cantidad de baldosas necesarias para un determinado decorado del piso de una habitación (Figura 2).

Los problemas se resolvieron y también se discutieron diversas respuestas. Como la secuencia ofrece la posibilidad de ver la solución en un gráfico, la sanción de la situación es inmediata y posteriormente se puede considerar la solución algebraica (la definición de sanción se utiliza en el sentido dado en Panizza, 2003).

La propuesta continúa indagando qué sucede al ampliar el tamaño del dispositivo planteado (sean mesas o platos). Finalmente se pide una expresión que sirva para calcular la cantidad de platos (o baldosas) necesarios para cualquier tamaño a considerar

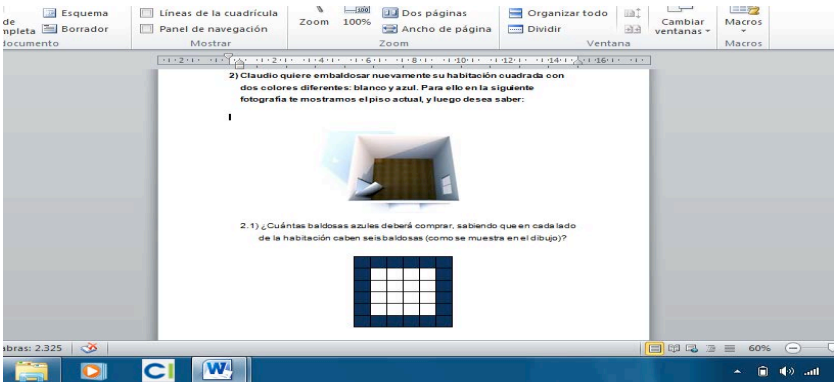


Figura 2

A partir de esta presentación, la opción que brinda el hipertexto es poder intercambiar ejemplos, sugerencias, videos, entre otros, para guiar al estudiante hacia una posible solución de las actividades propuestas. La creación de estos archivos dinámicos permite ofrecer una gama de alternativas para que el lector pueda apropiarse del contenido. No debe perderse de vista que cualquiera sea el recorrido elegido, estos deben conducir hacia el mismo fin.

La secuencia presenta una serie de preguntas referidas a casos particulares que conducen a interpretar y lograr encontrar expresiones generales para la solución de casos cualesquiera.

Como se puede observar (Figura 3), el documento propone la alternativa de ver las soluciones si se lo desea, ante el caso de no poder arribar a la respuesta buscada o sencillamente para que el estudiante pueda evaluar su desempeño.

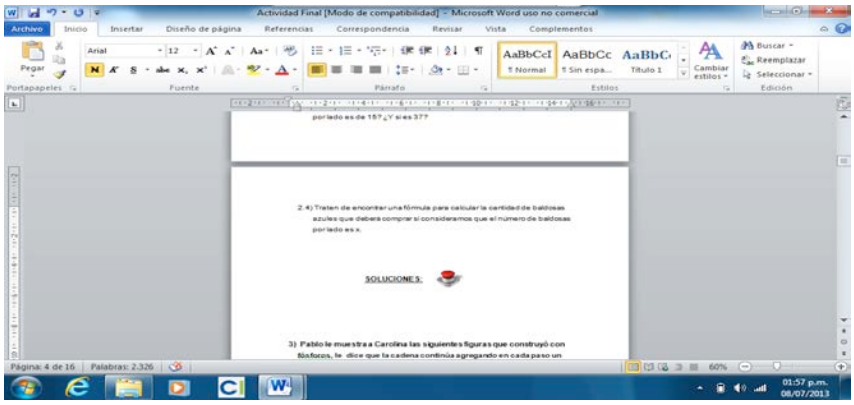


Figura 3

Para la construcción del hipertexto se consideró en primer término a quién estaba dirigido el contenido. Creemos que es primordial evaluar la edad de los estudiantes, para utilizar palabras y términos adecuados en relación a estos. Es por ello que también se tuvieron en cuenta aspectos como el tipo de letra, tamaño, espacios, colores y otras cuestiones que hacen al entendimiento y claridad del mismo. De igual forma, se consideró cuidadosamente la selección de imágenes y audios a incluir.

En ese sentido, como la actividad fue pensada para niños de 12 años, se presenta un video de un dibujo animado llamado "Troncho y Poncho", basado en el diálogo de dos niños hablando acerca del lenguaje algebraico (Figura 4). Dicho video genera una gran atracción en los alumnos y, especialmente, risas, no muy frecuentes en el desarrollo de las clases tradicionales. El mismo puede visitarse en http://www.youtube.com/watch?v=7Yc0bcbyieM.

Al incluir este tipo de animaciones, especialmente en el ámbito de la matemática, es esencial tener en cuenta las imágenes que se presentan. Grau (2012) señala la importancia de distinguir entre el significado de lo que es una imagen y lo que es un símbolo. Definirlos implica un número de parámetros a analizar y estudiar. Se puede afirmar que una imagen es algo más que una representación mental o una construcción de nuestra fantasía, es un objeto concreto, un conjunto de elementos visuales fijados en una superficie material disponible para la exploración e interpretación. En cambio un símbolo puede asemejar, copiar, o no, a un referente. Entonces, estos pueden diferenciarse entre representativos a un objeto o responder a una idea y ser definido por convención o acuerdo, como sucede con muchos de las representaciones en nuestra disciplina.

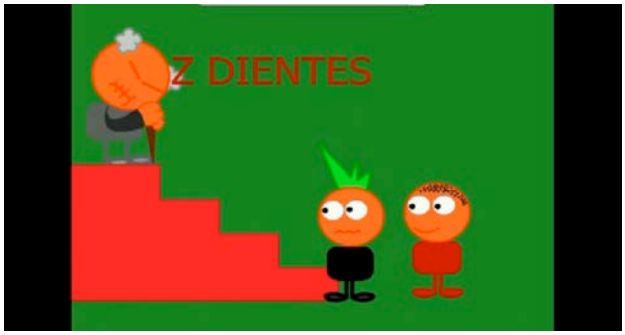
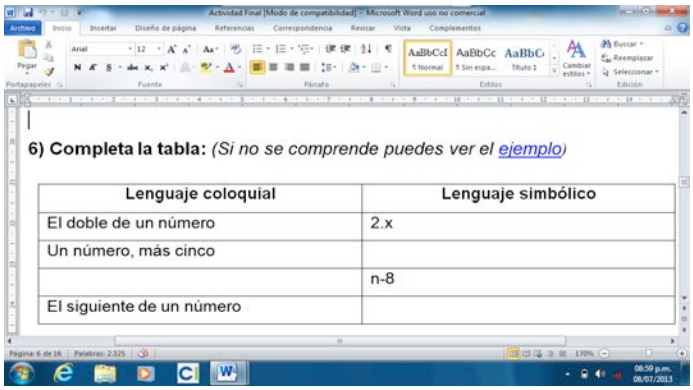


Figura 4

Siguiendo con el recorrido del hipertexto, luego del inicio de las situaciones problemáticas, se decidió iniciar el tratamiento de lo que comúnmente recibe el nombre de 'traducción del lenguaje coloquial al simbólico'.

A un ejercicio clásico del nivel, como es el armado de una tabla (Figura 5), se le sumó la opción de ver ejemplos (Figura 6).



6) Completa la tabla: *(Si no se comprende puedes ver el ejemplo)*

Lenguaje coloquial	Lenguaje simbólico
El doble de un número	2.x
Un número, más cinco	
	n-8
El siguiente de un número	

Figura 5

El dispositivo brinda la posibilidad de volver y retomar la tabla, o bien, saltear esta etapa y seguir avanzando. En este punto, se podría incluir la elaboración de tablas por parte de los propios estudiantes como una manera de compartir el proceso de producción del hipertexto.

Casi al final de la propuesta, se propone la resolución de una ecuación, ahora si como un ejercicio. En este momento se presentan dos ecuaciones con la posibilidad de acceder a las respectivas resoluciones y comprobaciones.

Como en los apartados anteriores, en el material se encuentran archivos de audio explicativos con recomendaciones diversas.

Finalmente los alumnos encuentran la posibilidad de autoevaluarse y allí detectar los posibles errores y comprobar la calidad del aprendizaje logrado. Esta opción puede diseñarse de varias maneras, incluso creando la alternativa de auto corrección con la ayuda de algún otro software, sin

embargo no se utilizó en este caso, puesto que los alumnos no estaban familiarizados aún con el uso de la computadora en la clase.

En esta experiencia se consideró fundamental el aporte de videos y gráficos que, en el recorrido de la lectura, no en forma lineal, suman nuevos enfoques en cuanto a la resolución de los problemas y planteo de ecuaciones.

Al abordar esta temática, en un primer tratamiento, suelen aparecer dificultades de resolución por ser algo totalmente nuevo, nunca antes trabajado. La propuesta de un hipertexto, como aporte en la mejora de la comprensión de las ecuaciones, ayuda notablemente al lector y por lo tanto acompaña su estudio de manera importante.

Consideraciones finales

Cuando se presentó el trabajo a los estudiantes en un colegio del centro de la Ciudad de Santa Rosa, no se contaba con las computadoras para cada alumno. Se inició compartiendo computadoras y, con un proyector, el docente acompañó a los estudiantes en la utilización del hipertexto. Durante la lectura conjunta, se probaron todas las alternativas que se ofrecían, se exploraron los ejercicios resueltos y audios, además del video antes mencionado.

Entre las conclusiones provisionales de esta metodología de trabajo podemos mencionar el impacto positivo que generó la actividad, traducido en la resolución de todas las actividades, aún las sugeridas como optativas, en horario extra clase. Un mejor aprovechamiento del tiempo, ya que se pudieron desarrollar más problemas y discutir diferentes alternativas acorde a las necesidades e intereses de cada uno.

Los comentarios recabados al final del trabajo fueron muy positivos y se pudo retomar la actividad avanzando con el trabajo sobre lenguaje algebraico.

Como continuación del trabajo, se está elaborando un nuevo material destinado al estudio de la trigonometría con aplicaciones en GeoGebra. Creemos que hay mucho para abordar en esta temática y el trabajo es mucho más extenso debido a la complejización de innumerables contenidos y definiciones.

Referencias bibliográficas

Grau, J. E. (2012). *Teoría y Enfoques de la Educación a Distancia*. Recuperado el 13 de abril de 2013 de http://campus.fundec.org.ar/admin/archivos/modulo%204.pdf

Panizza, M. (2003) "Conceptos básicos de la teoría de situaciones didácticas", en M. Panizza (comp), *Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB, análisis y propuestas* (pp. 59-71), Buenos Aires: Paidós.

Ruiz, N., Bosch, M., Gascón, J. (2010). La algebrización de los programas de cálculo aritmético y la introducción del álgebra en secundaria. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 545-556). Lleida: SEIEM.

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del Álgebra*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

CONSTRUCCIÓN DE LO BILINEAL EN PRÁCTICAS DE MODELACIÓN

Silvana Gómez Ojeda, Leonora Díaz Moreno y Jaime Arrieta Vera
Universidad de los Lagos Chile
silvana.gomez@usach.cl

Resumen. En este artículo se reporta el análisis de las producciones de la puesta en escena del diseño de aprendizaje basado en la práctica de modelación de un sistema de resortes con estudiantes de profesorado. Interesa averiguar qué argumentos y herramientas matemáticas desarrollan al modelar. La modelación/simulación, la concebimos como una práctica que vive en diferentes comunidades, es la acción de articular dos entidades con la intención de intervenir en una de ellas a partir de la otra.
Palabras clave: modelación, bilineal, práctica situada
Abstract. In this article there is brought the analysis of the productions of the putting in scene of the design of learning based on the practice of modeling of a system of springs by students of professorship. It is interested in verifying what arguments and mathematical tools they develop on having shaped. The modeling, we conceive as Modeling / simulation a practice with experience that articulates two entities with the intention of intervening in one of them from other one.
Key words: modeling, bilineal, situated practice

Introducción

En contextos no escolares la toma de decisiones se debe llevar a cabo con datos insuficientes o que no se tiene certeza sobre ellos, donde la respuesta no es única ni exacta y es común recurrir a la aproximación. Esto no se ve en las aulas, donde el conocimiento se "aprende" para que después pueda ser aplicado los problemas "reales" que plantean los libros de texto tradicionales y que son problemas donde se tiene una solución única. El conocimiento que se aprende se desliga así de las prácticas de donde emergió y en donde vive. Usualmente los estudiantes no se enfrentan a problemas que no tienen solución o que admiten más de una solución; tampoco abordan problemas con datos insuficientes o en donde algunos de los datos que se proporcionan son irrelevantes; esto es, no trabajan problemas con datos que tienen ruido (Arrieta y García, 2009).

Lo expuesto deja en evidencia una problemática considerada en este artículo que es la separación que existe entre la escuela y el entorno que autores como Lave (1988) y Walkerdine (1988) reportaron hace tres décadas. Esta separación lleva a que existan estudiantes como César reportado en Arrieta y Díaz (2014) quien vende chicles en Acapulco. César el vuelto realizando rápidos cálculos mentales y no puede hacer lo mismo con lápiz y papel.

La matemática que se enseña en la escuela dista del conocimiento que se considera científico y se distancia del conocimiento del hombre común, del tipo de saber que es aplicado en la vida cotidiana, lo que conlleva a que los estudiantes escasamente relacionen el saber escolar y el saber de la vida cotidiana, saberes que responden a diferentes epistemologías. La comprensión y

procedimientos que se esperan de los estudiantes en la escuela son diferentes a los de la vida cotidiana (op. cit., 2014).

En nuestro país, los estudiantes de profesorado no están ajenos a esta problemática. Su formación está cargada de estructuralismo y aunque se han realizado cambios curriculares, sigue predominando un enfoque algorítmico. Los formadores de formadores consideran a la matemática como un discurso acabado, enseñan con un discurso que responde a sus referentes matemáticos, mismo que excluye a sus estudiantes de participar de la construcción del conocimiento y de la actividad humana. Su formación deja de lado los contextos sociales y culturales en los cuales emerge el conocimiento. Uno de los resultados de esta formación es que estudiantes de profesorado conciben a la matemática como una herramienta para resolver problemas.

Estudios internacionales como los del Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes (PISA) realizados por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), que busca evaluar en qué medida los estudiantes que se acercan al final de la enseñanza escolar obligatoria han adquirido competencias esenciales para una completa participación en la sociedad, establecen la importancia de desarrollar en los estudiantes habilidades para modelar. Por su parte Blomhoj (2004) indica que el desarrollo de competencias para establecer, analizar y criticar modelos matemáticos, es relevante en cualquier nivel, al ser vista la modelación como una práctica de enseñanza que coloca la relación entre el mundo real y la matemática en el centro de la enseñanza y el aprendizaje. Asimismo argumenta que las actividades de modelación ayudan a establecer raíces cognitivas sobre las cuáles se construyen importantes conceptos matemáticos.

El estudio que se reporta atiende, por una parte, a la reciente incorporación de la modelación en el currículum matemático de nuestro país. Y por otra a las evidencias que aporta Méndez (2006) ilustrando dificultades al transitar desde la correlación de dos variables a la correlación de más de dos variables. Concibiendo a la modelación como una práctica situada que se vivencia en diferentes comunidades y que permite tender puentes entre lo que se hace en la escuela y lo que se hace en comunidades no escolares (Arrieta y Díaz, 2014) esta investigación se plantea validar secuencias de enseñanza para estudiantes de profesorado que propicien el desplazamiento de correlaciones de dos variables a tres. Se recurre a la modelación y simulación de la elongación de un resorte y de un sistema de resortes.

Interesa aplicar la secuencia de modelación de un sistema de resortes para que los estudiantes construyan lo bilineal. Más allá del objeto matemático función de dos variables, se comprende por lo bilineal a todo lo relacionado a la correlación de dos o más variables: métodos de predicción, gráficas, ecuaciones, entre otros. Para estudiar ésta práctica situada nos centramos en determinar

los argumentos, las herramientas matemáticas, los consensos que establecen los estudiantes al modelar discursivamente, colocando el énfasis en los métodos y herramientas con las que predicen y construyen modelos, en las formas de proceder y de argumentar al modelar un sistema de resortes.

Antecede a esta investigación lo realizado por Méndez (2006). La autora trabajó lo multilineal con estudiantes de Bachillerato en México. Reporta que lo multilineal se construye cuando se articulan dos o más modelos lineales. Esta investigación recurre de inicio a la secuencia utilizada por ella. Con base en prácticas de modelación de un sistema de resortes, a partir de una tabla los estudiantes predicen, levantan un modelo algebraico y un modelo gráfico.

Marco teórico

La perspectiva teórica con que se aborda la investigación es la socioepistemología. Se suscribe la concepción de aprendizaje situado de Lave y Wenger (1991) quienes consideran al aprendizaje como un proceso de aumento de experiencias, un acopio de crecimientos, de identidad, de pertenencias y de experiencias prácticas; una dimensión integral e inseparable de la práctica social, proceso que se da siempre y cuando un grupo de personas acuerdan un objetivo común, para realizar una actividad que todos experimentan y reconocen como significativa; que permite a los actores experimentar la propia práctica con un significado pleno, debido a que la propia aportación al trabajo del grupo produce en los aprendices un proceso de construcción de la identidad y se abre en ellos el acceso a un fondo común de prácticas, de solución de problemas y de saberes basados en la experiencia.

Desde esa concepción de aprendizaje se desprende que el estudio de las interacciones que se dan entre los estudiantes en el proceso de aprendizaje o al momento de ejercer la modelación, en las que los conocimientos son utilizados con intenciones situadas en un contexto, permitirá caracterizar prácticas de construcción de conocimiento matemático, en este caso de "lo bilineal", cuando se trata con los fenómenos (Arrieta, 2003).

Al decir de Arrieta y Díaz (2014) la separación de la escuela respecto de su entorno se debe a que ambas difieren en las intenciones, las herramientas, los argumentos y los procedimientos, lo que lleva a considerar que para estudiar la modelación como una práctica situada es necesario centrarse en cinco elementos: las intenciones ¿por qué se hace lo que hace?, los procedimientos ¿cómo lo hace?, las herramientas ¿con qué lo hace?, los argumentos ¿cómo se justifica? y sus procesos de emergencia y de constitución ¿cómo emerge y cómo se constituye?

La concurrencia de los cinco elementos lleva a los autores antedichos a considerar a la modelación como una práctica situada no estática, una práctica situada deviniendo en el tiempo, a la que llaman

práctica-con-vivencia, reiterando que se concibe a ésta como la articulación de dos entes iniciales, para actuar sobre uno de ellos a partir del otro. El ente (tabla, gráfico, fórmula algebraica) toma el estatus de herramienta cuando el actor lo convierte en modelo para intervenir en el otro ente. Se transforma entonces en un nuevo ente, el modelo, que se denomina mo. Resulta adherido a lo modelado, que se denomina ma. La articulación constituye una nueva entidad para la vivencia de quien modela. En el caso del cardiólogo, este "toca" el corazón de su paciente, lo interviene a partir de su electro. Esta nueva entidad se denota por la díada (ma, mo) = (corazón, electro) y se la llama dipolo modélico, DM (op. cit., 2014). En suma, este estudio suscribe a la modelación como una práctica que articula dos entidades con intención de intervenir en una de ellas (lo modelado) a partir de la otra (modelo). No trata con representaciones sino que con la construcción de nuevas entidades a partir de la articulación de dos entes. Con ello crea nuevas realidades.

En la socioepistemología los modelos son usados como herramientas para argumentar (Arrieta, 2003). Desde esta mirada el gráfico no es una representación. Es un dibujo que se convierte en modelo cuando se usa para intervenir en lo modelado, cuando pasa a formar parte del acto de modelar. Caracterizar las prácticas de modelación por el acto de modelar permite, a la práctica que sustenta un diseño de aprendizaje, la posibilidad de sustentar una continuidad entre esferas de prácticas (Arrieta y Díaz, 2014). Estas esferas de prácticas se corresponden con las prácticas de la actividad matemática escolar, las prácticas de la matemática científica y las prácticas de uso no escolar de las matemáticas.

Puntualizan los autores que el potencial de ésta concepción de modelación radica en la fuerza que conlleva la articulación y la intencionalidad de intervenir, la necesidad de interactuar con la entidad que se desea intervenir, es decir la necesidad de experimentación. El acto de modelar permite caracterizar las prácticas de modelación. El acto de modelar devela las fases que componen las prácticas, distinguiendo las necesarias y las suficientes así como las intencionalidades de las mismas. Los entes matemáticos al ser usados en el acto de modelar son herramientas que se presentan como modelos: ecuaciones o sistemas de ecuaciones algebraicas y/o diferenciales, gráficas cartesianas, trayectorias, formas geométricas, datos organizados en tablas, descripciones verbales, datos en hojas de cálculo, entre otros.

Metodología

El diseño que se aplicó a estudiantes de profesorado "La elasticidad de un sistema de resortes" tiene por intención que los estudiantes modelen bilinealmente la elasticidad de un sistema de resortes. Parten de una tabla de datos numéricos dada y, mediante actividades, predicen, construyen el modelo algebraico y el modelo gráfico, mismos que articulan con el fenómeno. El

diseño está estructurado en dos fases, la interacción con el fenómeno o experimentación y el acto de modelar. La dinámica del diseño considera el trabajo en equipo.

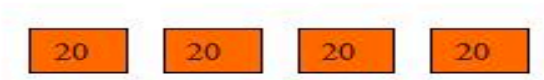
Fase 1: La interacción con el fenómeno o experimentación

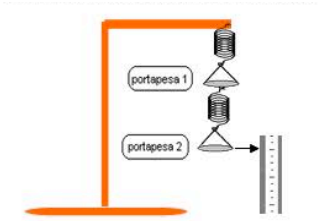
La modalidad de la experimentación puede ser presencial, virtual o discursiva. En este caso se consideró la discursiva. Esta se da cuando la experimentación se establece desde una tabla inicial de datos, proponiendo actividades para desarrollar: describir el fenómeno con sus propias palabras, predecir la posición del portapesas cuando se colocan en él determinados pesos.

Fase 2: El acto de modelar vía la predicción

Se articula la tabla de datos con la elasticidad del resorte: se predice la posición del indicador de elongación del resorte con distintos pesos, a partir de la tabla de datos y con datos que no aparecen en la tabla.

Se le presentan la siguientes situaciones: **Si colocamos 30 grs. en la pesa 1, p1 y 30 grs. en la pesa 2, p2 ¿en qué posición estará el indicador?; ¿50 grs. en p1 y 10 grs. en p2?; ¿17 grs. en p1 y 24 grs. en p2?**





Peso (g) en la porta pesa 1	Peso (g) en la porta pesa 2	Posición del indicador (mm)
0	0	45
20	0	75
0	20	95
40	0	105
0	40	145

Figura 1: Interacción con el fenómeno a partir de datos dados

Al enfrentarse a estas situaciones los estudiantes deben buscar algún conocimiento que les permita predecir. Estos pueden ser la regla de tres o el promedio, entre otros. Dado que no cuentan con pesas de 10 grs. entonces utilizan la tabla para responder. Pudiera suceder que ocupen razón de cambio. Bajo esta concepción de modelación, al construir herramientas de modelación, están modelando.

Para la construcción del modelo algebraico se les presenta la siguiente situación: Si colocamos p1 gramos en el portapesas 1 y p2 gramos en el portapesas 2 ¿en qué posición estará el indicador? La

intención en esta situación es que los estudiantes construyan un modelo algebraico del fenómeno. Construyen la fórmula calculando las razones de cambio, es decir lo que se estira el sistema al colocar un gramo en la pesa p1, $\frac{\Delta x}{\Delta p1}$ y lo que se estira el sistema al colocar un gramo en el porta pesas 2, $\frac{\Delta x}{\Delta p2}$. Para encontrar la posición del indicador deben multiplicar los gramos colocados en el porta pesas 1 por $\frac{\Delta x}{\Delta p1}$, luego sumar el producto de los gramos en el portapesas 2 por $\frac{\Delta x}{\Delta p2}$ para luego sumar la posición inicial. Esto les llevará a escribir el modelo algebraico $\frac{\Delta x}{\Delta p1} p1 + \frac{\Delta x}{\Delta p2} p2$ + la posición inicial = *x(p1,p2)*. En esta situación los estudiantes habrán encontrado una relación entre las variables, misma que se transforma en modelo algebraico. Este hecho lo logran partiendo de la tabla a la que transforman en modelo numérico.

Luego se les solicita que haga una gráfica.

En la puesta en escena participaron estudiantes de profesorado de matemáticas de una universidad en Santiago de Chile, participantes de un curso de modelación. Se trató de 15 estudiantes organizados en cinco equipos de tres miembros. Se trabajó en dos sesiones que cubrieron siete horas. Interesó en particular el análisis de las interacciones que surgen en la puesta en escena. Para ello se grabaron cintas de video y audio que fueron transcritas para el análisis a posteriori.

Análisis de los resultados

En el acto de modelar-predecir, en el que se solicita determinar la elongación del resorte al colocar 30 grs. en el portapesas se aprecian dos métodos.

Al primero lo llamamos el "método de Camilo".

> *"El peso total que se colocará en los resortes es 60 grs, si colocamos todo el peso en el portapesas1 el estiramiento será mínimo, pues sólo afecta al resorte 1, la posición será 75.Si colocamos todo el peso en el portapesas 2 será máximo. La posición será 16, entonces si colocamos 30 grs en el portapesas1 y 30 en el portapesas2 estará en la mitad. O sea en 120".*

Realizó el siguiente cálculo: 165 + 75 = 240 : 2 = 120.

Llamamos al segundo "el método de Camila".

> *"3° grs se encuentran entre 20 y 40, dejando constante el peso 2 se calcula la diferencia de elongación que es 105 -75 y da 30, como 30 se obtiene al sumar 20 y 40 y dividirlo por 2, al dividir 30 por 2 da 15, a la posición de 20 que es 75 se le suma 15 con lo que se obtiene*

la elongación del peso 1 que es 90, al dejar constante el peso 1, utilizando el mismo método se obtiene la elongación del peso 2, luego se suman ambas elongaciones".

A analizar el trabajo realizado por los equipos se aprecian similitudes en dos grupos que utilizan la ecuación de la recta para predecir. Para ello separan la tabla en dos tablas, calculan las diferencias de elongación por separado y como la diferencia es constante, identifican la relación como lineal, encuentran las ecuación de ambas rectas las que utilizan para calcular las elongaciones y luego las suman. Se diferencian en que el segundo equipo agrega una sola vez la posición inicial, según se aprecia en la evidencia (fig. 2)

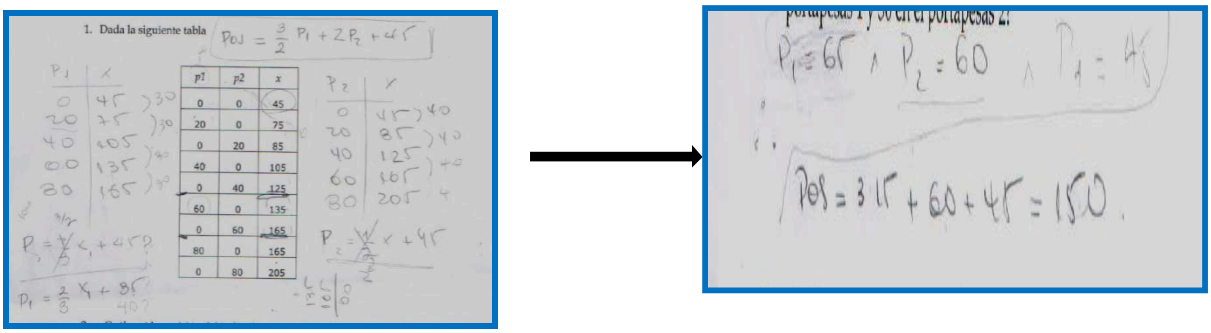


Figura 2: Utilización de la ecuación de la recta para predecir

El primer grupo concibe lo bilineal como dos procesos lineales disjuntos. El segundo equipo, al predecir el sistema, ve lo bilineal como un solo sistema pues solo suman una vez la posición inicial de 45. Un tercer equipo utiliza la razón de cambio para predecir y su forma de predecir lo lleva al modelo algebraico $x(P1,P2) = \frac{\Delta X}{\Delta P1} * P1 + \frac{\Delta X}{\Delta P2} * P2$. El cuarto equipo concibe lo bilineal como dos procesos lineales disjuntos. Predice a través del modelo numérico en las tres primeras preguntas utilizando punto medio y regla de tres. En una de las preguntas cambia la forma de predecir: utiliza las razones de cambio lo que le lleva al modelo algebraico. La centración en lo lineal le obstaculiza la construcción del modelo gráfico para predecir. En el quinto equipo se aprecia la emergencia de lo bilineal: aunque conciben lo bilineal como dos modelos lineales disjuntos como se aprecia en la gráfica que construyen, al momento de predecir "qué sucede si se colocan 30 grs en ambas. Para argüir los grupos recurren a argumentos gráficos, figurativos y tabulares como se aprecia en los esquemas siguientes.

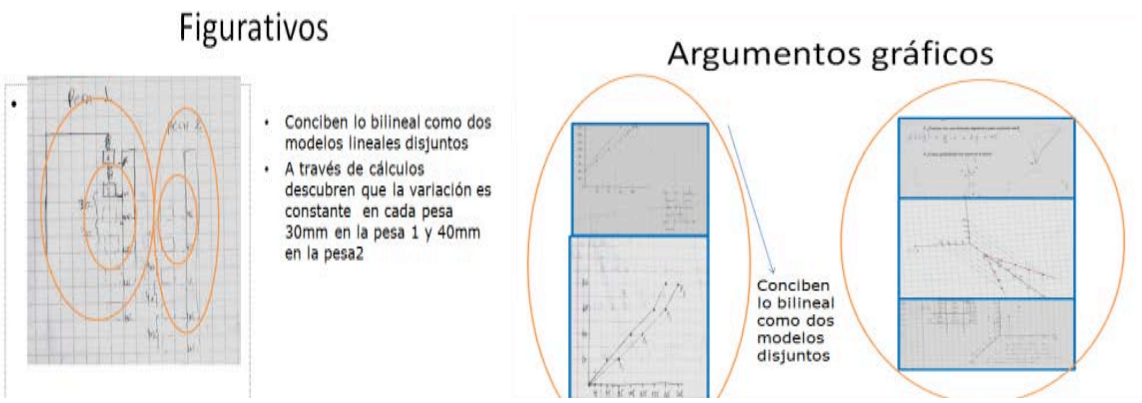


Figura 3: Argumentos utilizados para predecir

Conclusión

En la puesta en escena del diseño, las formas o métodos que los actores utilizan para predecir son los métodos de "punto medio o promedio", "regla de tres" y "razones de cambio parciales". Este último método consiste en calcular cuánto se estira el sistema de resortes cuando se coloca un gramo en el portapesas 1 y cuanto se estira cuando se coloca un gramo en el portapesas 2; multiplicar estas cantidades por los gramos que se colocan en cada portapesas; y sumar la posición inicial. Uno de los grupos argumenta verbalmente que la idea es buscar una fórmula. Privilegian los modelos algebraicos. Los tipos de argumentos usados son figurativos, verbales, algebraicos y numéricos. El plano no se constituye como modelo gráfico. En los argumentos gráficos se aprecia la imposibilidad de obtener el plano como modelo gráfico. Concebir lo bilineal como dos procesos lineales disjuntos lleva a los actores a construir los modelos algebraicos y gráficos como la suma de modelos lineales. Lo bilineal emerge al considerar a los dos resortes como un sistema.

Referencias bibliográficas

Arrieta J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula.* Tesis de doctorado no publicada. Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav – IPN, México.

Arrieta, J. y García, C. (2009). Un estudio del tratamiento de datos con ruido en los sistemas escolares. *Acta Latinoamericana en Matemática Educativa.* V24, pp. 453-463.

Arrieta, J. y Díaz, L. (2014). Una perspectiva de la modelación desde la socioepistemología. Aceptada en *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*.

Blomhøj, M. (2004). Modelización Matemática - Una Teoría para la Práctica. Traducción de M. Mina. Tomado el 18.09.13 de http://www2.famaf.unc.edu.ar/rev_edu/documents/vol_23/23_2_Modelizacion1.pdf.

Gómez, S. Arrieta, J. y Díaz, L. (2012). Exploración de lo bilineal desde la práctica social de modelación de un sistema de resortes. *Acta Latinoamericana en Matemática Educativa.*

V 26, 1320- 1326.

Lave, J. y Wenger, E. (1991). *Situated learning. Legitimate peripheral participation*. Cambridge, England: Cambridge University Press.

Lave, J. (1988). *Cognition in practice: Mind, mathematics, and culture in everyday life*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Méndez, M. (2006). *Las prácticas sociales de modelación multilineal; modelando un sistema de resortes.* Tesis de licenciatura no publicada. Universidad Autónoma de Guerrero, Unidad Académica de Matemáticas, México.

Walkerdine, V. (1988). *The mastery of reason: Cognitive development and the production of rationality*. London: Routledge.

HERRAMIENTAS GRÁFICAS DE LA SIMULACIÓN

Juan Felipe Flores Robles y Jaime Arrieta Vera
Universidad Autónoma de Guerrero México
Juan.F10res@hotmail.com jaime.arrieta@gmail.com

Resumen. Este trabajo reporta el análisis de las producciones de los actores al participar en tres tareas de simulación. En la primera se pide que expliquen el movimiento a partir de la gráfica diferencial velocidad-tiempo. En las dos últimas tareas, se les propone que se muevan ante un sensor de movimiento, de tal forma que la gráfica velocidad-tiempo o la gráfica velocidad-posición que despliegue la calculadora sea una recta con pendiente negativa. Los recursos de simulación que utilizan los actores son variados. La actividad inicia simulando el fenómeno desde el modelo gráfico, para luego ejecutar su simulación respondiendo la tarea propuesta.
Palabras clave: modelación, simulación, herramientas gráficas
Abstract. This paper reports the analysis of the productions of the actors to participate in three simulation tasks. The first is asked to explain the movement from the differential velocity-time graph. In the last two tasks, they proposed to move to a motion sensor, so that the velocity-time graph or chart that displays speed-position calculator is a straight line with negative slope. Simulation resources actors use are varied. The activity starts simulating the phenomenon from the graphical model, and then run your simulation answering the proposed task.
Key words: modeling, simulation, graphical tools

Introducción

La modelación es un tema recurrente en Matemática Educativa. PISA en sus últimas evaluaciones, la ha incorporado como una de sus competencias básicas. Planes y programas de estudio de Colombia y Chile hacen una referencia explícita a ella. En investigaciones el término de modelación se emplea con diferente sentido, como una competencia, como un recurso para facilitar el aprendizaje o como una estrategia, por ejemplo.

En la tesis de licenciatura de Magali Méndez en el 2006, se exponen diferentes secuencias didácticas en las que se propone a la modelación, como una práctica que al ejercerla los estudiantes construyen herramientas matemáticas en estrecha vinculación con el estudio de fenómenos de diferente naturaleza. La modelación se propone como una práctica que puede ser un puente entre lo que se hace en la escuela y lo que se hace en su entorno.

Es así que la modelación se entiende como un proceso donde los estudiantes construyen sus herramientas matemáticas, argumentos, con los que justifican sus construcciones y procedimientos. Este proceso invita al estudiante a seguir investigando, experimentando y modelando.

Una de las herramientas más importantes que emerge durante la modelación, es la razón de cambio. Es por esto que la modelación puede ser utilizada para introducir al cálculo diferencial.

Así pues al hablar de modelación, también se puede abordar el cálculo diferencial, pero, ¿qué hay del cálculo integral?

La simulación

Durante el estudio de la relación entre el cálculo diferencial y la modelación, surge la idea de invertir el proceso.

En el caso de la modelación existe un proceso en el que se parte de un fenómeno (lo modelado), en el cual se interviene (experimentación), para obtener un modelo (o red de modelos). Entonces se propone partir desde un modelo, intervenir en él y obtener como resultado un fenómeno.

El hecho es que para reproducir un fenómeno tal cual, son necesarios muchos modelos y ciertas situaciones que nos ayuden para recrearlo, es por esto que al resultado de intervenir en el fenómeno lo llamaremos "fenómeno simulado"

La simulación de un fenómeno

Para la simulación de un fenómeno, es necesario además de un modelo, el uso de diferentes herramientas, recursos e insumos, aunque hay que remarcar que en ocasiones estas tres entidades (herramientas, recursos e insumos) pueden cambiar de rol o tener funciones de distinto tipo mientras se simula.

El aporte que nos ofrece la simulación es, que al simular un fenómeno podemos manipular parámetros para poder analizar como inciden las distintas partes que lo conforman, sin la necesidad de recrearlo en su totalidad y así tomar decisiones sobre un evento que pueda pasar de determinada manera.

Tanto en la simulación como la modelación se utilizan una variedad de herramientas, insumos y recursos.

Las herramientas las podríamos distinguir por ser aquellos algoritmos, estrategias que sirven para unir los recursos y los insumos, pero que al final cuando se muestra el fenómeno modelado no se aprecian a simple vista. Este estudio hace énfasis en la emergencia de la integral como una herramienta para simular fenómenos que están previamente modelados a través de una red de modelos diferenciales.

Como recursos e insumos reconocemos aquellas gráficas, ecuaciones algebraicas, tablas, gestualidades, pictogramas (principalmente), que son utilizadas para simular al fenómeno, partiendo desde un modelo (en el caso de esta investigación se utilizan secuencias con modelos diferenciales), y en base a herramientas existentes, más la colaboración de los compañeros y la

orientación del facilitador se pueden construir nuevas herramientas (aprendizajes) todo esto dentro del ambiente de una práctica-convivencia.

Metodología

Este reporte forma parte de una investigación que tiene como objetivo principal la formulación de una tesis de maestría, pero durante las exploraciones relacionadas con el desarrollo de la investigación, se descubrió la importancia que tienen las gráficas como herramientas durante las prácticas-convivencia en las que emerge como herramienta la integral.

Es por esto que la secuencia está compuesta por actividades en las que se propone que el estudiante simule partiendo de distintos modelos gráficos diferenciales.

Las tareas de simulación propuestas

Se realizan dos estudios exploratorios en diferentes escenarios sobre como desarrollan tareas de simulación los actores. Las tareas son propuestas a estudiantes de formación del profesorado en matemáticas de la Universidad Católica Silva Henríquez y a participantes del taller "Competencias de modelación en las clases de ciencias. Laboratorio virtual de ciencias" de la décimo quinta Escuela de Invierno de Matemática Educativa, XV EIME en Ciudad de México.

En la primera exploración el grupo está compuesto por investigadores y estudiantes de postgrados orientados hacia la Matemática Educativa, por el tipo de congreso, el tiempo en el que se aplicó la secuencia no fue abundante, aunque se compensó con la experiencia de los participantes, ya que la mayoría de ellos estaban relacionados con el cálculo y la graficación de funciones de distintos grados cabe mencionar que dentro de este grupo, uno de los participantes era experto en física, lo que facilitó la interpretación de las tareas.

Se dispuso que en éste grupo, los actores deberían trabajar en parejas, formadas por el facilitador; en éste grupo encontramos la circunstancia de que al formar parte de un congreso, los participantes podían (o no) conocerse, lo que dificultaba la comunicación entre aquellos que resultaron ser desconocidos entre sí.

Durante la segunda implementación de la secuencia en la Universidad Católica Silva Henríquez, participó un grupo conformado por estudiantes de la licenciatura de pedagogía en matemáticas e informática, la mayoría de ellos cursando el quinto o séptimo semestre, aunque este ramo al formar parte del currículo en el rango de las optativas, había alumnos de tercer o noveno semestre la mayoría con una edad por debajo a los veinticinco años.

En este caso los participantes en su mayoría ya habían cursado los ramos de cálculo diferencial e integral y en algunos casos también habían llevado el ramo de ecuaciones diferenciales, con este

grupo se trabajó durante el semestre comprendido de Marzo a Julio del presente año, durante este período se les instruyó a los estudiantes con distintos tópicos de modelación y simulación ya que ellos (los estudiantes) desconocían la mayoría de la terminología y no concebían la modelación como una habilidad matemática.

El diseño de aprendizaje

Una parte fundamental de nuestra investigación es la secuencia didáctica orientada a partir de una ingeniería didáctica, misma que se estructuró al estudiar las evidencias recabadas en una exploración anterior, en la que a los estudiantes se les indicaba simular utilizando como base distintos tipos de modelos (gráficos, numéricos y algebraicos).

En esa ocasión las evidencias rescatadas demostraron que sin importar el tipo de modelo, los alumnos se mueven en la red de modelos, utilizando distintas herramientas hasta llegar a un modelo gráfico, el cual será utilizado para aplicar otras herramientas y así después de un proceso simular de intervención con el modelo, se llega a un fenómeno simulado.

Tarea 1. La figura 1 es un modelo de la velocidad de un móvil en un determinado periodo de tiempo. Se pide a los actores que explique cómo se mueve el móvil. En primera instancia los actores relacionan el modelo con la trayectoria, basados en la gráfica velocidad-tiempo y/o la gráfica distancia-tiempo.

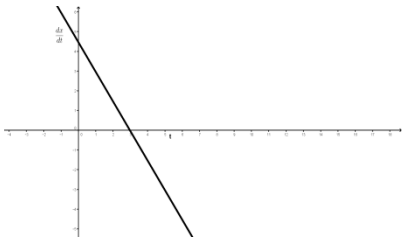


Figura 1. Modelo diferencial del movimiento de un móvil: grafica velocidad-tiempo

Tarea 2. Utilizando un sensor de movimiento la tarea es moverse ante él de tal forma que la gráfica velocidad-tiempo que muestre la calculadora sea como la de la figura 1. Antes de moverse delante del sensor tendrán que discutir la forma de cómo lo harían. Tendrían que simular el movimiento con lenguaje natural. Un punto a discusión es el de la posición inicial del móvil. Los actores no relacionan la integral como una herramienta para resolver la actividad propuesta. La situación propone la simulación del movimiento a partir de una gráfica diferencial velocidad-tiempo. Podríamos decir que se "integra la gráfica con el movimiento"

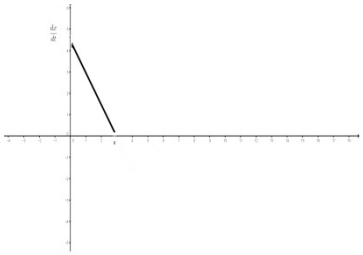


Figura 2. Modelo diferencial del movimiento de un móvil: gráfica velocidad-posición

Tarea 3. Considerando la gráfica de la figura 2, simulen el movimiento, es decir reproduzcan el movimiento para que la calculadora despliegue la gráfica velocidad-distancia.

Mientras que la simulación del movimiento a partir de la gráfica de la figura 1 la posición inicial es una variable no determinada, en la simulación de la tarea 3, es el tiempo en la posición 1 el que no

está determinado. Es decir en la situación anterior la constante de integración es *x* evaluado en cero mientras que en esta es *t,* evaluado en uno.

Resultados

Como resultados de la tarea 1 encontramos que los estudiantes reconocen al modelo gráfico de velocidad-tiempo, como una trayectoria, en algunos de los casos los estudiantes simulan, la relación distancia tiempo basados en esta creencia.

Después, para dar respuesta a la tarea número dos, los estudiantes inician interactuando con el modelo que les fue sugerido, a partir del modelo gráfico empiezan a deducir datos para con esto llegar a un modelo numérico (tabla), y con la misma llegar por método de diferencias a un modelo algebraico, con el cual, después de integrar obtienen la coordenada del inicio y la razón de cambio con la que tienen que caminar para simular el fenómeno que se modelo con la gráfica de la tarea 2.

Los actores proponen como simulaciones gráficas como la de la figura 3, situaciones de caída libre o como la que propone Gastón: "*Si, yo con respecto al origen, lanzo un carrito, por un momento la velocidad es negativa, pero la posición no es negativa*". Se proponen diversas simulaciones con lenguaje natural, un ejemplo es: "*A medida que disminuya la velocidad, sigue aumentando la posición*". Podemos encontrar, distintas evidencias de como los estudiantes son influenciados por los modelos gráficos, en mayor manera a comparación de los modelos numéricos y los modelos algebraicos.

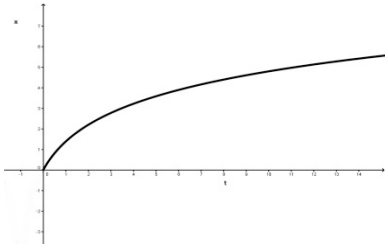


Figura3. Modelo diferencial del movimiento de un móvil: gráfica desplazamiento-tiempo

Conclusiones

Las producciones de los actores dan evidencias de que los recursos iniciales para simular el movimiento son los del lenguaje natural. Esto es acorde con lo que realizamos en nuestra vida diaria, simulamos con los recursos del lenguaje natural cuando damos indicaciones para llegar a una dirección; además se pudo reconocer el uso de recursos corporales para mediante los cuales los participantes simulaban la trayectoria, pero no solo con la caminata sugerida, sino que los actores utilizaban sus manos, sus dedos para indicar velocidades y dirección del movimiento sugerido, la inclinación de su cuerpo como una variante de las simulaciones; por mencionar algunos.

Los actores que participaron en las tareas de simulación han cursado cálculo diferencial e integral y en varias variables, sin embargo esto no se ve reflejado en la resolución de las tareas planteadas, ya

que la mayoría de ellos recurren a métodos más simples, basados en sumas y restas para tratan de simular.

En algunos casos, también se descubrió que los estudiantes utilizan otras herramientas más elaboradas, basándose en que los métodos de los compañeros son simples y que por el tipo del electivo, la solución no puede ser de esa manera, así es como se llegaron a encontrar casos en los que los estudiantes utilizaban algoritmos propios de la estadística por mencionar un caso.

La conclusión más importante que llega éste estudio es que las gráficas en sí, pueden ser solo ilustraciones, pero a la hora de simular toman un papel trascendental, ya que mediante éstas los estudiantes tienen una visión más representativa de lo que está sucediendo con el fenómeno, que con cualquier otro tipo de modelo. Esto significa que el alumno puede entender, apreciar y comunicar con una amplia variedad de recursos, pero para la mayoría de fenómenos el que mejor lo puede representar dentro de un aula serían las gráficas.

Referencias bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de la modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN. México.

Decretos (2003). *Decreto 1850*. Ministerio de Educación Nacional. Colombia

Enlaces (2007). *Estándares en Tecnología de la Información y Comunicación para la Formación Inicial Docente. Ministerio de Educación, Centro de Educación y Tecnología.* Chile.

Mendez, M (2006). *Las prácticas sociales de modelación multilineal; modelando un sistema de resortes.* Tesis de Licenciatura no publicada, Universidad Autónoma de Guerrero, Facultad de Matemáticas, Unidad Acapulco. México.

Organizacion para la Cooperación y Desarollo Económico (2004). *Learning for tomorrow's world: First result from PISA 2003.* París

EL USO DE LAS GRÁFICAS EN UNA COMUNIDAD DE PRÁCTICAS. EL CASO DE LA MAESTRÍA EN INGENIERÍA DE LA UADY

Isabel Tuyub y Gabriela Buendía
CICATA-IPN. México
be.tuyub@gmail.com, gbuendiag@hotmail.com

Resumen. El presente escrito muestra un ejemplo sobre la forma en cómo la Comunidad de Práctica de la maestría en ingeniería de la Universidad Autónoma de Yucatán (UADY) *usa* las gráficas cartesianas de variación y cambio para inferir prácticas de esa comunidad, que puedan acercar la matemática que se enseña en las comunidades escolares con la que realmente se implementa en el campo profesional. Dicho uso se infiere bajo una mirada socioepistemológica, al distinguir cómo se *resignifican* las gráficas, por qué y para qué se emplea de esa forma. Este análisis se realizó en producciones escritas claves de la comunidad de estudio. Que al identificarla como una Comunidad de Práctica (CoP), en el sentido de Wenger (2001), se manifestaron dos tipos de usos que permitieron organizar el análisis, cuyos resultados señalan que la comunidad emplea la linealidad como herramienta para optimizar procesos y resolver problemas propios de su área.
Palabras clave: comunidad epistémica, uso de gráficas
Abstract. This paper present an example of how the Community of Practice of Master of Engineering at Autonomous University of Yucatan (UADY) uses the Cartesian graphs for analysis of variation and change. We will wish to approximate the School Community with the Professional Community through of practices the last community. The use of this type of graphs will infer with socioepistemological vision for distinguish how *resignify* these cartesian graphs, why? She use this graphs for what? This analysis was performed on key community´s written productions. To identify her as a Community of Practice (CoP), according to Wenger (2001), she allowed two types of uses organized the analysis. The result of investigation indicated that the community uses the linearity as a tool to optimize processes and to solve problems in your area.
Key words: Epistemic community, the use of graphs

Introducción

Algunas comunidades profesionales no reconocen la naturaleza de la matemática que está inmersa en la ejecución de sus prácticas; sin embargo, basta con hojear algunos libros que ellos emplean, indagar artículos de investigación que producen o que utilizan, para darse cuenta de que hay inmerso conocimiento matemático, probablemente porque las comunidades profesionales integran la matemática en su quehacer para producir conocimiento propio de la disciplina o construyen conocimiento matemático para dar explicaciones a fenómenos que ocurren en sus prácticas profesionales; a tal grado que ellas mismas no perciben la matemática puesta en juego en dichas prácticas.

En ambientes profesionales de talle académico especializado como la ingeniería, la matemática no sólo aparece explícita para resolver ecuaciones algebraicas, obtener fórmulas de modelos matemáticos, nociones matemáticas de cálculo como derivadas e integrales, entre otras; si no tiene una intencionalidad y también se manifiesta en su *carácter funcional* cuando nos dirigimos a la matemática que se integra al individuo y lo norma, inferida desde las prácticas de la comunidad a la que pertenece; por ejemplo la matemática que se infiere en las estrategias para resolver

problemas; la que se fomenta en argumentaciones por medio de interpretación de gráficas; en la modelación de un fenómeno físico por medio del comportamiento cualitativo de funciones, que incluso por medio de estos comportamientos se toman decisiones; la que permite el diseño de estrategias de calidad o con la que se comprueban hipótesis; por mencionar algunas.

El carácter funcional de la matemática también es reconocido para aquellos grupos de comunidades profesionales que comparten un mismo lenguaje codificado, que exigen un alto dominio en los conceptos y un cierto grado de especialización en el área; con reconocida experiencia, especialización y competencia, aquellos les denominamos *comunidades epistémicas*.

De lo anterior y con lo que le compete a la Matemática Educativa podríamos preguntarnos sobre qué papel juega la matemática en una comunidad epistémica, cómo la matemática se relaciona, se manifiesta en relación con la construcción del conocimiento de cierta comunidad epistémica. Si consideramos que existe matemática funcional en las prácticas de cierta comunidad epistémica entonces las preguntas se dirigirían hacia cómo esa matemática funcional apoya a la construcción de conocimiento dicha comunidad.

El estudio de comunidades puede ser demandante, en el sentido de no saber qué aspectos son representativos para analizar dentro de la comunidad, cómo caracterizarla o qué de ella se debe analizar para evidenciar lo requerido, por esta razón nos apoyamos en los constructos de las CoP´s que permitieron dibujar el panorama y el eje rector de la investigación: los escenarios de la comunidad y los tipos de usos identificados en ellos.

Al querer indagar sobre la construcción de conocimiento matemático en una comunidad epistémica vista como una CoP, se consideró que una visión socioepistemológica que profesa que en las prácticas intencionales de una comunidad se produce conocimiento matemático por medio de *prácticas sociales* y del uso de la matemática. En el uso situacional de la matemática se reconstruyen significados asociados a un conocimiento matemático. Por ello que nos enfocamos al uso de las gráficas y en la reconstrucción de significados de éstas en situaciones de importancia para la CoP, esto es lo que denominamos resignificación de las gráficas.

De ahí que consideramos que por medio del uso de las gráficas de variación y cambio de la comunidad epistémica de estudio se puede inferir la construcción de conocimiento matemático de dicha comunidad, por lo que tiene sentido indagar sobre cómo se resignifican las gráficas cartesianas de variación y cambio de la Maestría en Ingeniería de la UADY.

Antecedentes

Los antecedentes irán encaminados a describir los elementos esenciales de la investigación: matemática funcional, comunidad epistémica, comunidad de práctica y uso de las gráficas. La idea de describirlos es poseer un panorama de estos ejes y cómo se logra una articulación de éstos.

Matemática funcional. Es un "conocimiento matemático que deberá integrarse a la vida para transformarla, reconstruyendo significados permanentemente" (Suárez y Cordero, 2008, p.52) que se aprecia en prácticas intencionales de una comunidad, en las que la matemática adquiere sentido y significado de lo que se hace y en lo que se hace. Esto se da porque la matemática ha estado al servicio de otros dominios científicos y prácticas de referencia (Cantoral y Farfán, 2003) desde la antigüedad y sigue permeando hasta nuestros días, tanto así que la matemática puede permitir el desarrollo e interés en la investigación y adquisición de conocimiento científico.

Comunidad epistémica. Haas (1992) la define como una red de profesionales especializados, cuya producción no solo es transmitida sino revalorada y transformada para las necesidades de la comunidad, como por ejemplo las de corte científico o especializado. En una comunidad epistémica, el conocimiento sólo es posible en el marco de una comunidad y se entiende como el producto de las sociedades en las que emerge, se válida y se aplica (Ramírez, 2009).

Una comunidad de investigadores comparte un conjunto de significados básicos que estructuran su comunicación, dan sentido a su trabajo y aportan modos de entender y ordenar el mundo compartido por dicha comunidad (Rubio, 1999). No sólo se interesa en la transmisión del conocimiento sino en el poder que éste ejerce sobre los problemas existenciales que le competen a esa comunidad y por lo tanto le interesa la continuidad del conocimiento al tomar en cuenta lo epistemológico, aspectos que son propios de la naturaleza del saber (conocimiento en uso). La Maestría en Ingeniería estaba conformada por ingenieros, arquitectos, químicos, biólogos; con interés de generar y difundir conocimiento, nuevo o innovar existentes, con el fin de mejorar la precisión u optimizar los resultados asociados a la ingeniería de construcción o ambiental.

Comunidad de Práctica. Está conformada por un grupo de personas que construyen conocimiento con características especiales, con intereses comunes y un objetivo que los une (de carácter social, académico o científico) y por el cual participan; debe haber algo que los motiva y que los identifica. Por ejemplo un grupo de ingenieros trabajando en problemas similares, alumnos que definen su identidad en la escuela, una red de cirujanos explorando nuevas técnicas. Dicho grupo no necesariamente debe tener una presencia física o que se reúnan en un mismo tiempo para generar conocimiento y aprender; su existencia depende del grado de participación y compromiso mutuo entre sus miembros (Lave y Wenger, 1991). Además no requieren el mismo

grado jerárquico y existen aprendices y expertos, en donde los aprendices tienen un papel muy especial pues los expertos cuidan que ellos den continuidad al conocimiento.

Las CoP´s se caracterizan por tener un *dominio compartido*; la *práctica* como campo de aplicación de los saberes desde el cual se nutre la experiencia y la *comunidad* relacionada con la interacción y el intercambio de saberes que se dan en su interior y que se encuentran articulados por interacciones entre la identidad, la confianza y la colaboración, de esta forma el conocimiento de la comunidad se mantiene, se desarrolla y/o se comparte (Wenger, 2001). Este compartir se logra por medio de la *cosificación*, que consiste en materializar la práctica, la cual puede ser en producciones escritas de la comunidad, como son los artículos de investigación, tesis, proyectos, entre otros.

Uso de las gráficas. Existen investigaciones que han estudiado el "uso" de las gráficas en distintos contextos, por ejemplo Roth (2003) a través de estudios etnográficos en ambientes laborales, reporta su interpretación y establecimiento de relaciones entre características que infiere de articulación de gráficas de profesionales. Para con las gráficas los científicos no exhiben ser expertos, pues en sus libros de texto no se aprecian estudios de gráficas complicadas; en la vida profesional, al explicar gráficas que producen, hacen referencia a detalles contextuales de los objetos o fenómenos estudiados, metodológicamente usan problemas típicos de comportamiento. Roth y Bowen (2001) relataron dos estudios de casos en el área de ecología, evidenciaron la orientación socio-cultural de la gráfica como práctica, así las dificultades de los estudiantes en las lecturas de las gráficas no se debe a un déficit cognitivo, pues los mismos problemas presentaron científicos expertos ante gráficas no conocidas. Se apoyaron de la semiótica y la fenomenología hermenéutica para vincular la matemática con la experiencia y así determinar las traducciones que implican las relaciones entre las gráficas y las situaciones. Destacan que si las gráficas son familiares la interpretación es clara, los símbolos son transparentes; pero si es desconocida, los símbolos se vuelven dificultades, por lo que se requiere apoyo de los textos secundarios y de los explicativos que se digan de dichas gráficas. Toman en cuenta que las gráficas cartesianas no son sólo utilizadas para la construcción de fenómenos, sino también como prueba de la existencia de los fenómenos, por ello son empleadas como medios en las publicaciones científicas. Lo que se puede apreciar es que las gráficas estudiadas en diferentes contextos por Roth y colegas están encaminadas a su interpretación lectora proporcionada por una comunidad.

Por lo comentado en los párrafos anteriores de este apartado y al ligarlo a nuestra investigación, percibir a la comunidad epistémica de la Maestría en Ingeniería de la UADY como una CoP espontánea, es decir que se formó de forma natural con base a los intereses académicos, (véase ampliamente en Tuyub, Martínez y Buendía, 2011), permite metodológicamente considerar sus

producciones escritas como fuentes de conocimiento, determinar los dos ejes de análisis que se describe en el apartado de método de investigación. Además, permite tomar a las prácticas de la CoP como prácticas epistémicas que demanden construcción de conocimiento, en particular matemático.

Elegimos estudiar el uso de gráficas cartesianas de variación y cambio, pues han sido usadas como una forma de describir el movimiento de situaciones u objetos, para caracterizar comportamientos de fenómenos, interpretar soluciones, comunicar resultados, para entender problemas o generar habilidades para resolverlos, favorecer la optimización de procesos y la resignificación del conocimiento matemático (Buendía, 2010); además de ser percibidas en el ambiente de la ingeniería como un saber de carácter permanente.

Marco teórico

La teoría socioepistemológica estudia las circunstancias que favorecen o posibilitan la construcción del conocimiento y toma en cuenta el saber matemático (conocimiento matemático en uso) de tal forma que la matemática se aprecie como un conocimiento con significados propios que se construyen y reconstruyen en el contexto mismo de la práctica que realiza el hombre (Arrieta, Buendía, Ferrari, Martínez y Suárez, 2004) en una comunidad. Respeta contexto, espacio, tiempo, ideología y cultura.

Esta reconstrucción de significados (resignificación) se puede evidenciar en los *usos* del conocimiento matemático, considerados una base epistemológica que determina los significados de la matemática a partir de establecer una relación dialéctica entre las experiencias situadas de los individuos, la matemática y su función en actividades de naturaleza social, tomando en cuenta cuatro dimensiones: lo epistemológico, lo cognitivo, lo social y lo didáctico.

Se asume que un universo amplio y significativo de gráficas puede contribuir al desarrollo de la forma de pensamiento matemático (Dolores, Chi, Canul, Cantún y Pastor, 2009). Son consideradas como una manifestación (representación) del conocimiento matemático en diferentes contextos, a través de las relaciones dialécticas entre sus *funcionamientos* y *formas* (Cordero, 2008). El funcionamiento hace alusión al para qué se emplea la gráfica en determinada tarea, y la forma en el cómo el individuo actúa con ella y sobre ella (Buendía, 2010). Cordero (2006) menciona que la *graficación* es la modelación de los comportamientos tendenciales de las funciones, lo cual determina una vía para la construcción de conocimiento y en ella se pueden determinar diferentes usos de las gráficas.

De ahí que inferir funcionamientos y formas es una manera metodológica propia de la socioepistemología para dar evidencia de los usos de las gráficas. Además, este marco permite

incorporar la idea de CoP como herramienta metodológica para la caracterización de la población e identificación de escenarios de análisis, momentos en los que se genere una situación de aprendizaje o un conocimiento por gráficas cartesianas de variación y cambio, los denominamos *episodios de la CoP*.

Es así que interesa determinar los tipos de resignificación de las gráficas cartesianas de variación y cambio de la comunidad epistémica de la maestría en ingeniería de la UADY en determinados escenarios dibujados por la comunidad vista como CoP.

Método de investigación

Se identificó a la comunidad como CoP y nos apoyamos de algunos de sus constructos para validar las producciones escritas como medios de análisis, se dibujaron dos episodios de la comunidad: uno en el que se involucran notas de aprendices rescatadas con entrevistas no estructuradas y grabaciones de clases de la maestría y seminarios obtenidas por medio de la observación no participante. La segunda hace alusión a los productos de investigación, en éste se incorporan artículos de investigación de aprendices y expertos, tesis de los aprendices y reporte de investigación de expertos.

En cada uno de estos episodios se pudieron percatar que las gráficas poseían dos intencionalidades: 1) Para organizar información, con el plan de comprobar hipótesis, comparar entre dos comportamientos. 2) Para mostrar procedimientos o técnicas, con el propósito de predecir y tomar decisiones. A estas dos vertientes les denominamos uso 1 y uso 2 de la gráfica, respectivamente. Ambos tipos de uso pudimos inferir que tienen la finalidad de consolidar resultados, pues inclusive al momento de presentar resultados de investigación se hacía alusión a una gráfica y sobre ella la explicación.

Estos dos usos fueron los ejes rectores del análisis de tal modo que se infirieron los funcionamientos y las formas de cada uno de ellos en cada uno de los episodios. Para con ello inferir la resignificación de las gráficas cartesianas de interés.

Ejemplo de Análisis del uso 1

Debido a la extensión del documento y del estatus de la investigación, se presentará un ejemplo sobre el uso 1 en gráficas vistas en la materia de *administración y control de proyectos* en el que la CoP emplea para inferir efectos de oferta y demanda con curvas lineales, bajo del cual se proporcionarán las consideraciones finales:

El objetivo en una de sus clases fue obtener la recaudación de impuestos del gobierno por medio de las distorsiones de mercado, la tarea que se analizó fue determinar el beneficio neto social (excedente del consumidor más el excedente del productor).

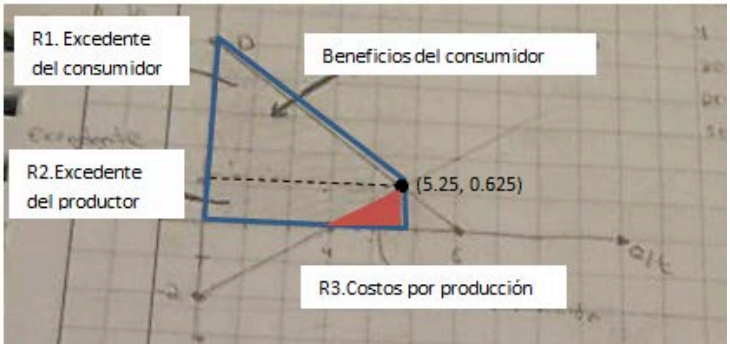


Imagen 1. Grafica que utiliza un aprendiz para obtener el beneficio neto social.

Para lograr la tarea identifica el punto de intersección, emplea el método algebraico de suma y resta de las ecuaciones de las rectas para encontrarlo, luego con la altura de ese punto y los ejes cartesianos identifica el trapecio rectángulo con altura en x, lado mayor OD y lado menor y, que se remarca en la Imagen 1, el cual representa el beneficio del consumidor. Esta región gráficamente la subdivide en tres regiones (R1, R2, y R3) que representan el excedente del consumidor, excedente del productor y costos de producción, respectivamente. El beneficio neto social (la tarea) es la suma de R1 y R2.

El funcionamiento radica en determinar el beneficio neto social, esto se interpreta como el área de una región (entre los ejes y ambas rectas), para obtenerlo identifica áreas de regiones con significado R1 y R2, que a la vez son figuras conocidas porque poseen fórmulas para hallar sus áreas, datos que se obtienen solo a partir del punto de intersección de la oferta y la demanda (denominado punto de equilibrio). Este punto es de suma importancia para el inicio del ejercicio que realiza el aprendiz, el cual podemos denominar de referencia.

El ejercicio de la clase se queda a este nivel, es decir no busca dar la explicación o emplear la gráfica más allá de identificar suma de áreas de regiones, por ello lo ubicamos en el uso de información

Lo que igual se rescata de la comunidad es que cuando el experto explica a los aprendices la lectura de las regiones, éste no requiere de cálculos, sino de ejemplos hipotéticos sobre gráficas cartesianas que siguen el modelo de la Imagen 1, pero cuando solicita al estudiante un ejercicio requiere de resolución de sistemas de ecuaciones delas rectas para hallar el punto exacto y con ello dar una respuesta numérica como el beneficio neto social.

Consideraciones finales

Lo que se pretende es encontrar las diferentes formas y funcionamientos de cada uno de los dos usos manifestados en los dos episodios, con la intención de indagar algunas similitudes y poder apreciar la manera en cómo se resignifican las gráficas cartesianas de variación y cambio en determinado problema (situación) que le compete a la comunidad epistémica.

Con este ejemplo se puede notar la importancia de puntos de referencia, que las gráficas cartesianas se resignifican como medios para obtener puntos de referencia que apoyan a la obtención de lo solicitado. De igual forma la inclinación de las rectas (las pendientes) proporcionan un significado a estás y de ahí el significado de las regiones.

Referencias bibliográficas

Arrieta, J., Buendía, G., Ferrari, M., Martínez, G. y Suárez, L. (2004). Las prácticas sociales como generadoras del conocimiento matemático. En L. Díaz (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17(1),* 418-422, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Buendía, G. (2010). Una revisión socioepistemológica acerca del uso de las gráficas. En G. Buendía (Ed.), *A diez años del posgrado en línea en Matemática Educativa en el IPN*, 21-40, México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa AC.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *6*(1), 27-40.

Cordero, F. (2006). La modellazione e la rappresentazione grafica nell'insegnamento-apprendimento della matematica. *La Matematica* e *la sua Didáctica 20*(1), 59-71.

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R.M. Farfán, J. Lezama, A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano*, 285-309, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C. y Díaz de Santos S.A.

Dolores, C., Chi, A., Canul, E., Cantún, C. y Pastor, C. (2009). De las descripciones verbales a las representaciones gráficas. El caso de la rapidez de la variación en la enseñanza de la matemática. *UNION Revista Iberoamericana de Investigación Matemática 18*, 41-47.

Haas, P. (1992). Epistemic Communities and International Policy Coordination. *International Or-ganization 46* (1), 1-35.

Lave, J & Wenger, E. (1991). *Situated learning. Legitimate peripheral participation.* United Kingdom: Cambridge University Press.

Ramírez, S. (2009). Conocimiento y sociedad: Asimetrías y lugares comunes. En R. Suárez (Ed.), *Sociedad del conocimiento. Propuestas para una agenda conceptual*. UNAM: México.

Roth, W. (2003). *Toward an Anthropology of Graphing. Semiotic and Activity-Theoric Perspectives*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Roth, W. & Bowen, M. (2001). Professionals Read Graphs: A Semiotic Analysis. *Journal for Research in Mathematic Education 32*(2), 159-194.

Rubio, J. (1999). Los conceptos básicos de la investigación. *Proyecciones 1(1)*, Publicación Electrónica de la División de Administración y Ciencias Sociales de Rectoría Sur. ITESM-CEM, recuperado el 5 de mayo de 2013 en http://www.cem.itesm.mx/dacs/publicaciones/proy/n1/excon1.html

Suárez, L. y Cordero, F. (2008). Elementos teóricos para estudiar el uso de las gráficas en la modelación del cambio y de la variación en un ambiente tecnológico. *Revista Electrónica en Educación en Ciencias 3(1),* 51-58.

Tuyub, I., Martínez, G. y Buendía, G. (2011). La comunidad de formación científica hacia una comunidad de práctica. En G. Buendía (Ed.), *Reflexión e investigación en Matemática Educativa,* México: Lectorum.

Wenger, E. (2001). *Comunidades de Práctica. Aprendizaje, significado e identidad.* Barcelona: Paidós.

ACERCAMIENTO HISTÓRICO EPISTEMOLÓGICO DE LA OPTIMIZACIÓN

Tamara Del Valle Contreras y Astrid Morales Soto
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso Chile
tamaradc.mat@gmail.com, ammorales@ucv.cl

Resumen. El discurso escolar del contenido de programación lineal, en los establecimientos educacionales chilenos, se ha convertido en un proceso mecánico y sin sentido para el estudiante. Para revertir esta mirada, se intenta dar respuesta a la siguiente interrogante ¿Cuáles son los significados reales que emergen y dan fuerza a la programación lineal? Se evidenciará el estudio del rol actual de la programación lineal y los procesos históricos de su surgimiento, con el fin de identificar aquellos factores que le dan fuerza a su desarrollo y construcción.
Palabras clave: optimización, modelación y Socioepistemología
Abstract. The school discourse linear programming content in Chilean educational institutions, has become a mechanical process without regard to the student. To reverse this view, What are the meanings that emerge and give strength to Linear Programming? the study evidenced the role of linear programming current and historical processes of their creation, in order to identify those factors that give strength to its development and construction.
Key words: optimization, modeling y Socioepistemology

Introducción

Esta investigación es un trabajo en curso, el cual pretende presentar evidencias de cómo los problemas ligados a la programación lineal permiten al estudiante transitar por un proceso de modelación que se encuentra sustentado de argumentos y son fundamentales para la construcción de conocimientos matemáticos. En este avance, específicamente, se presentará un estudio histórico-epistemológico de la programación lineal.

Es común ver la enseñanza de la programación lineal doctrinada por pasos a seguir, tanto del método gráfico o del método simplex, convirtiendo a esta unidad en un proceso mecánico y sin sentido para el estudiante. A su vez, los docentes justifican estas prácticas señalando el poco tiempo que tienen para abordar la unidad, o bien, que no es parte de los contenidos que se evalúan en la Prueba de Selección Universitaria (PSU).

En los textos escolares chilenos se puede observar que el método gráfico (método de la programación lineal) aparece pauteado: se señala como identificar la función objetivo; se pide graficar las restricciones en un sistema de inecuaciones; luego se solicita que a partir de las restricciones se identifique el polígono que se forma al interior de los conjuntos soluciones y, finalmente, se solicita valorizar los vértices del polígono para dar respuesta a la optimización solicitada. De esta manera, se pierde toda la riqueza del problema al promover la noción de esta unidad como un mecanismo de resolución.

Para abordar esta propuesta es necesario estudiar el rol actual de la programación lineal y los procesos históricos de su surgimiento, con el fin de lograr identificar aquellos factores que dan fuerza a su desarrollo y construcción. En el proceso, también es necesario distinguir el rol actual de la modelación en la programación lineal y cómo ésta se encausa desde una mirada Socioepistemológica, para identificar aquellos factores que surgen del proceso de modelación.

La Programación Lineal a lo largo de la historia.

El matemático francés Joseph Fourier (1768-1830) fue el primero en intuir, de forma imprecisa, los métodos de lo que actualmente llamamos programación lineal. Luego, en 1858 se aplicaron los métodos de la programación lineal a un problema concreto del *cálculo, en el cual se buscó un plan óptimo para el transporte de arena para la construcción de las obras de edificación de la ciudad de Moscú.*

La formalización de la programación lineal llegó a tomar importancia durante la segunda guerra mundial, la cual fue utilizada para planificar los gastos; reduciendo los costos al ejército y aumentando las pérdidas del enemigo. En la postguerra (aproximadamente 1947), muchas industrias ya lo utilizaban en su planificación diaria.

El matemático Janos Von Neuman (1903-1957), en el año 1947, conjetura la equivalencia de los problemas de programación lineal y la teoría de matrices desarrollada en sus trabajos, quien influyó en que otros investigadores, como George Dantzig (1914-2005), se interesaran por el desarrollo riguroso de esta disciplina.

En Campero (2010) se cita a Dantzig explicando cómo se fue formando la idea de función objetivo, quien reconoce lo complejo de encontrar relación directa entre las acciones emprendidas y la meta establecida. Para ello, se estudiaban y promulgaban ciertas reglas básicas que lograrían resultados óptimos, donde se trabajaban todas las combinaciones y alternativas de las acciones para dicha meta, y se elegía la mejor combinación. Por su parte, Dantzig señalaba que no se podrían estudiar todas las combinaciones, incluso aseguraba que no había algoritmo o herramienta computacional que lo hiciera.

En los primeros aportes de Dantzig, se muestra como éste luchaba con la adición de reglas básicas para elegir de entre las soluciones factibles la que fuese, en algún sentido, la más óptima, sin una idea de función objetivo. Luego, se propone confeccionar un método con un fuerte sostén en un modelo práctico de programación lineal, donde las reglas empleadas en la planeación se expresaban en un formato muy distinto al empleado actualmente para formular un programa lineal. De esta manera, comienza a tomar fuerza la idea de una función objetivo para ser maximizada o minimizada (Campero, 2010).

Este nuevo modelo buscaba ser aplicado en la planeación industrial y en la economía, pero luego de un tiempo y gracias a su efectividad, comenzó a ser empleado en diversas disciplinas como, por ejemplo, el área de la nutrición, la bioquímica, la programación computacional, la biogenética, la ingeniería, entre otros.

Luego de que Dantzig establece el problema general de la programación lineal (el modelo óptimo), promueve la intuición geométrica para hallar soluciones en un corto plazo. Para ello, trabaja con el gráfico formado por las acciones o restricciones que dan sentido a la planeación de su trabajo, estableciendo que:

> Comencé observando que la región factible es un cuerpo convexo, es decir, un conjunto poliédrico. Por tanto, el proceso se podría mejorar si se hacían movimientos a lo largo de los bordes desde un punto extremo al siguiente. Sin embargo, este procedimiento parecía ser demasiado ineficiente. En tres dimensiones, la región se podía visualizar como un diamante con caras, aristas y vértices. En los casos de muchos bordes, el proceso llevaría a todo un recorrido a lo largo de ellos antes de que se pudiese alcanzar el punto de esquina óptimo del diamante (Dantzig citado en Campero, 2010, p.22).

En esta última cita, y en todas las declaraciones personales que Dantzig presentó sobre la elaboración de su trabajo, deja en evidencia que el modelo construido requiere de componentes externos que le entregan sustento a su diseño. Además, se puede observar las necesidades sociales que lo conllevan a la elaboración del modelo, en el cual se descentraliza de la programación lineal en sí misma y fortalece la idea de optimizar.

Lamentablemente, debemos reconocer que con el transcurso del tiempo, los modelos utilizados en la programación lineal han sido empleado sin estar al tanto de su procedencia, sin siquiera tener conciencia de cuáles son los procesos que permiten que el modelo diseñado logre optimizar una situación lineal cualquiera, e inclusive, sin ningún remordimiento al no comprender el modelo lineal que está detrás.

En este apartado se puede evidenciar lo imprescindible y necesario que es estudiar el desarrollo histórico de la programación lineal, ya que nos ha permitido comprender los aspectos que han llevado a autores como Dantzig a hacer su modelo y conocer las necesidades sociales que influyeron en la elaboración de éste. Por consiguiente, se pueden identificar tres factores que emergen de la construcción de los primeros métodos diseñados por Dantzig, como es la noción de optimización, las soluciones y las restricciones o acciones. Estos tres aspectos serán estudiados más adelante, bajo la mirada de la Teoría Socioepistemológica.

Situación actual de la Programación Lineal.

A medida que ha transcurrido el tiempo, la programación lineal ha tomado un importante lugar en el desarrollo de proyectos y en la toma de decisiones, sobre todo por su carácter optimizador. Esto se puede observar en la composición de dietas alimenticias, en el uso de transporte público, en la elaboración de programas computacionales y en todo aquello donde se busque la optimización de recursos a raíz de problemas que puedan ser modelados. Su desarrollo ha sido tal, que ya es parte de una de las ramas de la matemática llamada investigación de operaciones, la cual consiste en el uso de modelos matemáticos para realizar procesos de toma de decisiones. En definitiva, este método científico se ha vuelto tan imprescindible, que inclusive hoy es parte de los programas impartidos por el Ministerio de Educación Chileno (MINEDUC).

La tercera unidad del programa de tercer año medio (estudiantes de 16 y 17 años) en el plan de formación diferenciado matemática, lleva el nombre de programación lineal. En dicha unidad, se espera que los alumnos y alumnas logren traducir las restricciones de un problema de programación lineal en un sistema de inecuaciones, reconozcan y planteen la función objetivo en problemas de programación lineal y que además resuelvan problemas sencillos que involucren procesos de optimización.

Al analizar las actividades propuestas por el MINEDUC, se puede evidenciar que el uso del modelo en la programación lineal, sale a la luz para dar respuesta a un tipo de problema lineal, dejando a la modelación con el estatus de herramienta utilitaria. El programa de estudio de tercer año medio, devela lo que Cordero (2006b, p.3) ha destacado en uno de sus trabajos, donde señala que "el tratamiento de la modelación en la enseñanza de las matemáticas es considerada como una herramienta didáctica que ayudará al estudiante a hacer representaciones adecuadas y eficientes del objeto matemático", representaciones que por muy eficiente y adecuadas que sean, no logran tener significado para el estudiante.

Elementos que le dan fuerza a la Programación Lineal: desde una mirada Socioepistemológica.

La socioepistemología estudia el reflejo de cualquier actividad humana haciendo matemática, donde la modelación y el uso de la matemática son parte del funcionamiento mental de la persona. Para entender esta postura teórica hay que posicionarse en la idea de que el objeto matemático no preexiste, sino que se construye a través de las prácticas sociales. Esta idea no se centra en el objeto en cuestión, sino que en las actividades humanas o prácticas que desarrollan las personas a través de su experiencia y en aquello que los conduce a hacer lo que hacen.

Para aclarar la idea de mirar a la programación lineal desde una mirada Socioepistemológica, es necesario ahondar en qué se entiende (desde la teoría) por un proceso de modelación. Asimismo, mirar bajo el alero de esta teoría a la programación lineal, involucra estudiar aquellos factores (soluciones, restricciones y optimizar) que inciden en la construcción de los modelos diseñados, otorgando importancia a las prácticas que regulan dichos factores, con el fin de construir a futuro un diseño de situación acorde a la realidad.

Qué es la modelación para la socioepistemología:

Para Cordero (2006b), la modelación ha tomado un papel importante en la Didáctica de la Matemática, ya que se busca que en una situación de modelación, el alumno sea capaz de construir socialmente el conocimiento matemático.

La Socioepistemología propone mirar la modelación de manera muy distinta a como se mira hoy en día en la programación lineal. Esta nueva propuesta no encasilla a la modelación en un modelo matemático, el cual se entrega al estudiante como una técnica que contiene pasos a seguir, como fue señalado en el tercer apartado.

Para Cordero (2006b) "la modelación en la matemática escolar tiene que ser algo más robusto que una representación o una aplicación matemática, tiene que ser una práctica plasmada, específicamente, como la argumentación de la situación en cuestión". Cuando Cordero habla de una práctica plasmada, hace mención a las prácticas sociales que emergen como herramienta fundamental para las personas, cuando éstos intentan matematizar la realidad inmediata (Camacho, 2011). Es decir, la modelación pasa a ser el argumento del sujeto que resuelve la situación, cambiando su estatus utilitario a uno funcional.

En los escritos de Cordero, se hace notar que una situación de modelación en la socioepistemología es más compleja que la modelación matemática, ya que en éstas influyen la actividad humana, el modo de argumentación, las experiencias del sujeto, sus vivencias y los conocimientos previos del sujeto, es decir, "…la modelación es, en sí misma, una construcción del conocimiento matemático" (Cordero, 2006b).

Factores que dan Fuerza a la Programación Lineal:

Al realizar el estudio histórico y actual de la programación lineal, se buscó evidenciar aquellos factores que le dan fuerza al objeto en cuestión, específicamente, se indagó en los factores que emergen de manera innata y necesaria por los autores que creaban los modelos que hoy utilizamos. De esta manera, fue que se llegó a evidenciar tres prácticas referenciales necesarias para la elaboración de los modelos construidos por Dantzig y que, por lo demás, coincidían

también con el desarrollo que promueve hoy el currículum de nuestro país para resolver problemas de programación lineal. Estas son la optimización, las restricciones y las soluciones que emergen.

Restricciones: Las restricciones o acciones que poseen los problemas de la programación lineal, son los limitantes que terminan modelando el problema en cuestión. En el método gráfico las restricciones vienen dadas a través de inecuaciones lineales, las cuales son graficadas y desembocan en sistemas de inecuaciones.

En el trabajo de Borello (2010) sobre la resignificación de las desigualdades, se muestra cómo el discurso matemático escolar hace que se pierda el sentido de la desigualdad, arrastrando consigo el sentido de la inecuación. Por consecuencia, la noción de inecuación queda huérfana, lo que conlleva a que el estudiante al buscar establecer relaciones con ideas previas, lo haga con la noción de ecuación, haciendo que desaparezca rápidamente la idea de inecuación. Es decir, Borello cuestiona cómo la escuela con su discurso saca la inecuación del flujo de la desigualdad, arrastrando a la inecuación a ser tratada como técnica de aprendizaje que deja rezagada a la desigualdad.

Tener clara la noción de desigualdad, es un pilar para el trabajo de la enseñanza de la programación lineal, ya que éstas facilitan el proceso de modelación de las restricciones del problema, en el cual se debe acotar la situación para poder optimizar. "El objeto desigualdad es la herramienta con la que se llevan a cabo todas aquellas actividades que hacen referencia a la comparación y al acotamiento… permite modelizar" (Borello, 2010).

La idea es devolverle a la desigualdad su papel protagónico, pero para ello es necesario propiciar un cambio en el entorno. Enriquecer ésta noción, permite engrosar uno de los factores fundamentales de la programación lineal, potenciando la comprensión que poseen nuestros estudiantes respecto a las restricciones.

Optimización: La optimización siempre ha estado presente en la actividad humana, como por ejemplo, al equilibrar una dieta alimenticia contemplando la cantidad de carbohidratos y proteínas que puede consumir una persona al día, o bien, al momento de elegir la bomba de bencina que ofrece un precio más conveniente, considerando la distancia a la que se encuentre ésta de mi ubicación.

La optimización ha ido prosperando a medida que pasa el tiempo, debido al duro ambiente de competencia formado por los investigadores que intentaban hacer las cosas mejor que el otro, por la influencia de la segunda guerra mundial de la cual hablábamos en un comienzo y con la necesidad de industrialización, donde se requería de competencias económicas. Para ello, se crearon las más

avanzadas técnicas de optimización que hoy podemos ver en el área de investigación de operaciones, e inclusive, la teoría de la convexidad que se trabajan en el plan diferenciado de tercer año medio, provienen de una extensión de la optimización.

Hoy en día, la optimización se define como el estudio de cómo describir y cómo definir lo que es mejor, una vez que se conoce algún criterio que sirva de base de comparación, es decir, para optimizar es necesario realizar comparaciones entre las distintas acciones comprometidas, con el fin de siempre seleccionar la mejor opción. Campero (2010) para declarar la existencia de máximos y mínimos dice que "La optimización tiene, por decirlo así, dos enfoques, uno optimista y otro pesimista… se desea maximizar algún objetivo… el objetivo sería minimizar las pérdidas", asociando el concepto de pesimista y optimista a la noción de maximizar y minimizar.

Cuando se requiere optimizar, surge la componente función objetivo, en relación al objetivo de minimizar y maximizar los resultados, el cual corresponde a un modelo lineal que intenta representar la realidad en la cual está inmerso el problema. Esta función es imprescindible en el modelo gráfico (utilizado en la enseñanza media), atrayendo consigo múltiples dificultades en los estudiantes, como la de no reconocer las variables en juego para ser representadas en una función afín.

La función objetivo va acompañada de las restricciones antes mencionadas, que le dan cuerpo al problema, entregando limitantes y condiciones. Éstas, pasan a ser representadas por medio de un gráfico, con el cual se intentan definir los puntos máximos y mínimos por medio de la visualización, es decir, encontrando los vértices del polígono formado con las líneas que muestran el movimiento de la función objetivo y las respectivas restricciones (teoría de la convexidad).

En la enseñanza de la programación lineal en el sistema escolar, la gráfica es considerada como una habilidad que permite visualizar lo necesario para resolver el problema en cuestión, perdiendo los recursos de crear conocimientos matemáticos que ésta nos facilita y olvidando lo importante que es para la optimización (en este caso) el uso de gráficas.

La necesidad de optimizar resultados abre una gran gama de argumentos que pueden ser válidos para el estudiante y que por tiempo, o quizás por desconocimientos, los profesores no logran sacarle provecho a la riqueza que nos entrega una situación con estas características. Lo esencial es potenciar la acción de optimizar, con el fin de que el estudiante le otorgue sentido a la optimización, ya que éste es el pilar fundamental que sustentó a la programación lineal.

Soluciones: En la enseñanza media, establecer las soluciones en la programación lineal consiste en valorizar la función objetivo con los puntos que conforman los

vértices del polígono formado con las restricciones. Este proceso se torna mecánico para los estudiantes, ya que no hay mayor conciencia de lo que se está haciendo.

La comprensión de que significan las soluciones en la programación lineal, arrastra los problemas que poseen los dos factores anteriores, las restricciones y la optimización. En el primero, se arrastra la pérdida de conciencia de la desigualdad, lo que influye en que se busquen las soluciones de igual manera que en una ecuación. Esto conlleva a que no quede clara la idea de conjunto solución, en Borello (2010) se cita que "Algunos docentes parecen no tener clara la naturaleza del conjunto solución de una inecuación", atribuyendo al docente esta falencia. En el segundo factor, se arrastra el problema de que la idea de optimizar se encuentra "dormida" en la programación lineal, y por ende, el vínculo entre las soluciones y la optimización se encuentra ausente.

Al centrarnos en estos tres factores fundamentales, nos podemos dar cuenta que para poder elaborar un diseño de situación que logre reconstruir socialmente la noción de programación lineal, es necesario establecer un cambio de roles respecto a las restricciones, las soluciones y la optimización. El entendimiento vago que trae el estudiantado respecto a estos tres factores, inciden en que su uso sea mecánico y sin sentido. Promover la idea de cambiar los roles de estos tres componentes, implica devolverles su estatus funcional, tan cual lo fue para matemáticos como Dantzig en el momento que tuvo la necesidad de construir el modelo.

Proyecciones de la propuesta de investigación.

Para la elaboración de esta investigación, es necesario realizar un estudio epistemológico de aquellos factores que le dan fuerza a la programación lineal, ya que es un eje crucial para la Teoría Socioepistemológica y, así también, fortalecerán el diseño de situación que me he propuesto construir.

La noción de optimización, de las restricciones y las soluciones de la programación lineal son parte importante de la investigación. Es por ello que se debe insistir en la profundización de estos factores, con el fin de cambiar el rol que estos poseen (memorísticos y mecánicos) y promover globalmente el uso de la gráfica como práctica de modelación desde la socioepistemología. Es así como puedo aproximarme a decir que en los tres factores esenciales, antes mencionados, surge la gráfica como argumento. En la optimización, la gráfica es un gran referente para encontrar aquellos

puntos máximos y mínimos. Por otro lado, las restricciones han perdido su sentido, su comprensión se sustenta en la idea de ecuación, perdiendo completamente su significación como inecuaciones y como las soluciones se estudian en la enseñanza media como sistemas de ecuaciones que forman un polígono convexo, es que propongo que la gráfica sea un referente para comprender e identificar el comportamiento de dichas restricciones, agudizando la mirada desde las prácticas sociales.

En consecuencia, en este proceso de modelación se logra evidenciar como emerge la graficación a partir de la profundización de los tres factores que le dan fuerza a la programación lineal, en el cual la gráfica pasa de ser usada de manera utilitaria a ser trabajada con un estatus funcional, privilegiando y favoreciendo el aprendizaje.

Referencias bibliográficas

Borello, M. (2010). *Un Planteamiento de Resignificación de las Desigualdades a Partir de las Prácticas Didácticas del Profesor. Un Enfoque Socioepistemológico*. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. Distrito Federal, México.

Camacho, A. (2011). Socioepistemología y Prácticas Sociales. Hacia una enseñanza Dinámica del Cálculo Diferencial. *Revista Iberoamericana de Educación Superior 3(2)*, 152-171.

Campero, J. (2010). *Propuesta Didáctica en Optimización Dinámica: El Caso del Cálculo de Variaciones y la Teoría de Control.* Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. Distrito Federal, México.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El Uso de las Gráficas en el Discurso Matemático Escolar. Un Estudio Socioepistemológico en el Nivel Básico a través de los Libros de Texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 10(1)*, 7-38.

Cordero, F. (2006b). La modellazione e la rappresentazione grafica nell`insegnamento-apprendiento della matematica. *La matematica e la sua Didacttica 20 (1)*, 59-79.

Covian, O. (2005) *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: El caso de la Cultura Maya.* Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Mian, N. (s.f.). *Investigación de Operaciones: Ingeniería Industrial*. Instituto Tecnológico Superior de Calkini. Campeche, México.

MINEDUC (s.f). *Algebra y Modelos Analíticos*. Santiago: Programa de Estudios.

Montiel, G. (2006). Construcción Social de la Función Trigonométrica. En G. Martínez Sierra (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19*, 818-823. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Origen de la Programación Lineal (s.f). Recuperado el 12 de mayo de 2012 de http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd98/Matematicas/29/origen.html.

ANÁLISIS SOCIOEPISTEMOLÓGICO DE LOS OBSTÁCULOS ASOCIADOS A LA DIVISIÓN POR CERO

Daniela Veiga
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González" Argentina
veigadaniela@yahoo.com.ar

Resumen. Frecuentemente, al iniciar el estudio de conceptos básicos del análisis matemático, nos encontramos con dificultades y errores relacionados con la división por cero. La necesidad de dar respuesta a esta problemática, da origen a este trabajo que retoma las respuestas dadas por un grupo de alumnos de la escuela media que constituyen las evidencias sobre las cuales se inicia el proceso de investigación que se encuentra en su primera etapa de realización y cuyos resultados parciales se exponen aquí. Se enmarca la tarea en la perspectiva socioepistemológica indagando en los orígenes y evolución de este conocimiento, analizando los alcances y efectos del discurso matemático escolar vigente en la educación media y contemplando las concepciones de los alumnos acerca del cero y la división construidas en ambientes escolarizados y no escolarizados.
Palabras clave: División por cero, obstáculos, socioepistemología
Abstract. Frequently, at the beginning of the study of basic concepts of mathematical analysis, we find difficulties and mistakes related to the division by zero. The need to act in response to this problem originated this paper, which recovers the responses of a group of middle school students as evidence upon which the research process is faced; currently being on its first stage with partial results reported here. The task is framed in the socioepistemological perspective, inquiring into the origins and evolution of this knowledge, analyzing the scope and effects of the current school mathematical discourse in high school and observing the students' conceptions about zero and division both of them constructed inside and out of scholastic environments.
Key words: dividing by zero, obstacles, socioepistemology

Introducción

De todas las cifras que componen nuestro sistema de numeración, sin lugar a dudas, el cero es el único que puede despertar las más diversas apreciaciones. Por un lado, es la representación matemática de la nada y el vacío ideas que, según D'Amore (2007), son simples de entender hasta por un niño de cinco años.

Sin embargo, detrás de esa "aparente" simplicidad se esconden siglos de búsquedas, explicaciones, ideas controvertidas que dan cuenta de una multiplicidad de dificultades asociadas a este concepto.

> En el caso particular de la división por cero, es posible detectar varias dificultades en distintas instancias escolares. Lo llamativo es que a pesar de las diversas explicaciones brindadas por los docentes, los errores persisten y lejos de superarse, parecen afianzarse con el correr de los años hasta que finalmente, los docentes quedamos con

> la sensación de que los alumnos responden mecánicamente buscando dar con la respuesta esperada por su profesor. (Veiga, 2013, p. 3)

Este trabajo de investigación surge frente a la necesidad de dar respuesta a diversas problemáticas detectadas en la clase de matemática relacionada con la división por cero. Si bien el concepto de división se aborda desde los primeros años de la escolaridad y el cero no constituye, en principio, un obstáculo cabe preguntarse ¿porqué persisten los errores de intentar dividir por cero?, ¿qué influencia ejerce el algoritmo de la división entera en la construcción de este concepto?, ¿qué relación existe entre la división aritmética y su paso al límite?, ¿cómo influyen las respuestas de los docentes frente a esta dificultad?, ¿qué respuesta dan los libros de texto que usamos en las aulas de matemática?... Estas son sólo algunas de las preguntas que guiaron investigación y a las cuales se busca dar respuesta.

Marco teórico

La presente investigación se sustenta en la socioepistemología como marco teórico de referencia. Se buscará dar respuesta desde un enfoque sistémico de sus cuatro componentes, a saber: epistemológica, social, cognitiva y didáctica.

Las cuatro componentes socioepistemológicas permiten analizar los fenómenos didácticos relacionados con la problemática de la división por cero, abarcando no sólo las estructuras cognitivas de quien aprende y los métodos empleados en la enseñanza, sino que profundiza el análisis incluyendo la componente epistemológica inherente al conocimiento matemático como una de las características indispensables para explicar, predecir y superar las dificultades y obstáculos que emergen de las prácticas escolares.

> El escenario sociocultural influye no sólo en las conductas, sino en la manera de actuar y de pensar de los miembros de la sociedad que lo habita, moldeando, de cierta manera, sus acciones y pensamientos, condicionándolos sustancialmente. Todas las características de los escenarios socioculturales influyen en la construcción del conocimiento, comprendido éste como un producto sociocultural, y por lo tanto, representativo de la sociedad en que se gesta. (Crespo Crespo, 2012, p. 96 – 97)

Desde el punto de vista didáctico, es posible advertir que las intervenciones de los docentes frente a los obstáculos relacionados con la división por cero constituyen un elemento más de análisis que pone en evidencia la necesidad de revisar el discurso matemático escolar. La división por cero se manifiesta en tres escenarios diferentes: aritmético, algebraico y analítico. En cada uno de estos escenarios, la naturaleza de la división por cero es completamente diferente. Sin embargo, se observa que en el discurso matemático escolar no existe tal distinción. Por el contrario, se torna en un concepto obvio y transparente.

Desde el punto de vista epistemológico, un recorrido por el devenir histórico este concepto pone en evidencia que el cero constituye en sí mismo un obstáculo epistemológico que requiere de una atención particular. En el caso de la división por cero, se mostrará qué confluyen distintas ideas que tienden a empañar este concepto.

Desde punto de vista cognitivo, las concepciones previas de los alumnos pone en evidencia la asociación del cero al concepto de nada o vacío. Esto sumado a la ausencia del tratamiento en los diseños curriculares y libros de texto trae como consecuencia una serie de errores y dificultades que se manifiestan en la división por cero.

Incorporamos a esta investigación el análisis y clasificación de los obstáculos según su origen ya que, debido a la naturaleza del cero, este concepto deriva en una serie de obstáculos cuya categorización puede ser útil para el análisis, anticipación y tratamiento de los mismos.

Artigue (1990) menciona varias características que tienen los obstáculos. En una de ellas se refiere a la resistencia del mismo evidenciando que la división por cero constituye un obstáculo en el aprendizaje de la matemática:

> Este conocimiento resiste a las contradicciones a las cuales se lo confronta y el establecimiento de un conocimiento mejor para que el precedente desaparezca. Es pues indispensable identificar e incorporar su rechazo en el nuevo saber […] Después de tomar conciencia de su inexactitud, el conocimiento continúa manifestándose de modo intempestivo y obstinado. (p. 254)

Antecedentes de la división por cero

Luego de realizar una exhaustiva investigación se encontraron innumerables trabajos que abordan el origen y evolución del cero el distintas civilizaciones. No obstante, son muy pocas las que abordan específicamente la problemática de la división por cero. Cataño Barrera (2007) observa que en las clases de matemática y en distintas situaciones se da por entendido que el cero constituye un caso particular, pero no se abordan en profundidad ninguna de esas particularidades quedando a cargo del alumno realizar el proceso necesario para su comprensión y asimilación.

Realizan un recorrido histórico, es fácil advertir que varios civilizaciones incluyeron al cero su sistema de numeración. Sin embargo, fue la cultura India la que desarrolló el concepto del número cero, tal como lo conocemos actualmente.

> Esta civilización incorpora con naturalidad, el uso del cero y el nombre sánscrito utilizado para nombrarlo es: *shunya* (vacío). No obstante, en la filosofía india, se desarrollaron una gran cantidad de conceptos relacionados con la Nada que abrieron paso al cero matemático. (Veiga, 2013, p. 53)

Algunos de los matemáticos indios que realizaron mayores aportes y, de alguna manera, se refirieron al uso del número cero son: Brahamagupta (598 – 670); Mahavira (800 – 870) y Bhaskara (1114 – 1185).

> Brahamagupta, postuló la división por cero de la siguiente manera:
>
> 1) Cero dividido por cero es cero.
>
> 2) Cero dividido por negativo o los números positivos son o cero o se expresa como una fracción con cero como numerador y la cantidad finita como denominador.
>
> 3) Números positivos o negativos cuando son divididos por cero, son una fracción con el cero como denominador.
>
> (Pinedo, 2001; Cataño Barrera, 2007; D'Amore, 2007; Sánchez Risco, 2010; Danoso y Castro, sf)

> Por su parte, Mahavira afirma que "un número permanece inalterado cuando es dividido por cero" (Pinedo, 2001, p. 11; Danoso y Castro, sf, p. 5)
>
> Finalmente, Bhaskara postula que "una cantidad divida por cero se torna en una fracción con el denominador igual a cero. Esta fracción determina una cantidad infinita. En esta cantidad en la cual cero es el divisor, no hay alteración aunque se sumen o se resten muchos". (Pinedo, 2001, p. 11; D'Amore, 2007, p. 434; Guimarães, 2008, p. 54; Danoso y Castro, sf, p. 5)

Estos intentos por definir la división aritmética por cero, ponen en evidencia la naturaleza epistemológica de este concepto que trae aparejados una serie de obstáculos que se manifiestan en la división y como tales, resultan muy difíciles de erradicar. Por esta razón, es importante considerar este análisis histórico para poder interpretar las respuestas dadas por los alumnos en las clases de matemática.

Del mismo modo, haciendo una revisión histórica de la aparición de la división por cero en el cálculo infinitesimal nos remontamos a los trabajos de Newton y Leibniz y sus cantidades infinitamente pequeñas, casi nulas. La falta de rigurosidad en sus argumentaciones fue lo que hizo que a muchos de los matemáticos de su época, les resultara muy complejo comprender sus explicaciones y fue objeto de varias críticas. En particular, se les objetaba la posibilidad de dividir por cero cuando en realidad la división se realizaba entre infinitesimales. Se recuerda al lector que en este periodo histórico aún no estaba formalizada la definición de límite y por lo tanto, el concepto de infinitesimal.

El cero en el discurso matemático escolar

A fin de analizar los efectos del discurso matemático escolar en relación al cero y la división por cero, y comprender el origen de los obstáculos asociados a este conocimiento, se realiza una revisión de las propuestas que figuran en los diseños curriculares para escuela media en la Ciudad Autónoma de Buenos Aires (Argentina) y se examina el discurso matemático presente en algunos libros de texto, contemplando, en todo los casos, los elementos cognitivos, epistemológicos, didácticos y socioculturales que permiten explicar los fenómenos didácticos vinculados a este concepto.

Dentro de los diseños curriculares, el trabajo particular de la división por cero, aparece explicitado en segundo y tercer año del secundario, en el marco de la resolución de ecuaciones lineales. En estos años, se propone trabajar con problemas que se modelicen con ecuaciones lineales con una incógnita y sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas que admitan, en cada caso, una, ninguna o infinitas soluciones; del mismo modo, se aconseja naturalizar el trabajo con ecuaciones que no tengan solución o que tengan infinitas.

Por otro lado, a partir del análisis del discurso matemático en cinco libros de texto, se arriban a las siguientes conclusiones:

- En los textos analizados, se recurren a algoritmos y procedimientos que evitan la aparición de la división por cero en la resolución de ecuaciones y sistemas.
- En general, la claridad y orden en los desarrollos que justifican las soluciones determinadas en una ecuación, se pierden por completo cuando se intentan dar las razones por las cuales una ecuación puede llegar a tener infinitas soluciones o ninguna.
- Algunos libros de texto, prefieren restringir el estudio de las ecuaciones y sistemas a aquellas que tengan una solución y ésta sea única.
- Los libros que presentan todas las posibilidades respecto a la cantidad de soluciones de una ecuación o sistema, no suelen retomar estas ideas en la enseñanza de otros conceptos y por lo tanto, es un conocimiento que queda planteado como un caso particular, completamente aislado del resto de los conceptos.

Dificultades y obstáculos asociados a la división por cero

A partir de la experimentación que se realizó en tres cursos del quinto año de la escuela secundaria, la misma consistió en la resolución de cuatro actividades que involucran la división por cero en tres contextos diferentes: resolución de ecuaciones incompatibles e indeterminadas, cálculo de límites indeterminados y división aritmética por cero. Los errores cometidos por los alumnos en esta parte de la experimentación permiten ilustrar, a modo de ejemplo, los puntos de partida de nuestro análisis de las dificultades y obstáculos asociados.

> Este tratamiento, trae aparejadas las respuestas mecánicas de los alumnos que suelen olvidar mucho más rápidamente de lo que suponemos. De esta manera, frente a una división por cero las respuestas suelen variar entre infinito, nada, cero, math ERROR, etc. Lo que es peor, la incertidumbre es tan grande, que se traslada a otras divisiones donde el cero es el dividendo, y a operaciones como la radicación, donde suelen responder que no se puede calcular la raíz cuadrada de cero. (Veiga, 2013, p. 68)

A continuación, se presenta una categorización de los obstáculos y dificultades asociadas a la división por cero que no pretende ser rígida y estructurada sino que tiene la finalidad de una organización que facilite su análisis.

- Dificultades asociadas al concepto de división aritmética: la idea arraigada de que la división es un reparto equitativo y que debe tener un resultado.
- Dificultades asociadas al concepto de infinito: los alumnos conciben al infinito como número y realizar operaciones con él. Otros, en cambio, asocian la expresión del infinito como equivalente a algo que no tiene solución cómo se puede ver en la figura 1.

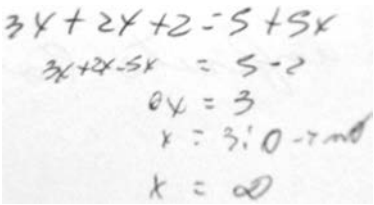


Figura 1. Resolución de una ecuación incompatible

- Dificultades asociadas al concepto de ecuación: en general, no admiten la posibilidad de que una ecuación pueda no tener solución o infinitas como se puede ver en la figura 2.

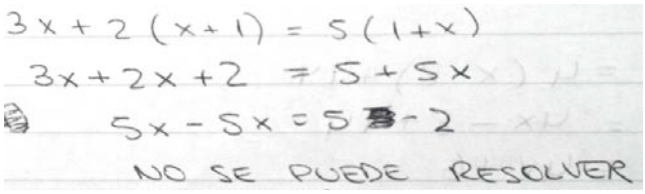


Figura 2. Respuesta dada en la resolución de una ecuación incompatible

- Dificultades asociadas al concepto de función. Ausencia de la noción de infinitesimal: en general, considera el cálculo de límites y de imágenes, conceptos equivalentes.
- Dificultades asociadas a las características de las situaciones planteadas: en general, no diferencian la naturaleza la división por cero planteada en un contexto aritmético, algebraico o analítico. Los trabajan como situaciones equivalentes.

Del análisis de las dificultades detectadas durante la etapa de la experimentación, puede deducirse que la división por cero encierra múltiples obstáculos íntimamente relacionados entre sí, a saber:

- Obstáculos didácticos: originado por ausencia de un tratamiento específico de la división por cero a lo largo de toda la escolaridad. Las características del trabajo que se realiza con funciones en los contextos escolares, oculta el carácter dinámico de las mismas lo que dificulta el abordaje de nociones de cálculo que involucran el concepto de infinitesimal.
- Obstáculos epistemológicos: se refleja en la concepción que tienen acerca de la división por cero, del infinito y las funciones.
- Obstáculos ontogenéticos: se manifiestan en la imposibilidad de concebir el carácter dinámico de los infinitesimales que los diferencia de la división aritmética. Por otro lado, la búsqueda permanente de generalizaciones asociadas a la división por cero dejan entrever la dificultad que este concepto encierra.

Conclusiones

Considerando los antecedentes históricos, el análisis realizado del discurso matemático presente los diseños curriculares y libros de texto y contemplando las dificultades y obstáculos observados en experimentación es posible arribar a las siguientes conclusiones:

- El tratamiento que recibe la división por cero en la resolución de ecuaciones indeterminadas e incompatibles resulta escaso.
- Los alumnos no advierten la diferencia entre la división aritmética por cero (que no está definida), la resolución de ecuaciones determinadas e incompatibles y el cálculo de límites en los que no se divide por cero, sino por infinitesimales.

- Los obstáculos que dan origen a las dificultades de los alumnos no son contemplados ni en los diseños curriculares, ni en los libros de texto que suelen usar los docentes en sus clases de matemática.

A partir de esta realidad, es de esperar que el alumno tenga dificultades en admitir la imposibilidad de la división aritmética por cero y su diferenciación en el ámbito algebraico y analítico.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1990). Epistemologic et Didactique. *Recherchez en Didactique des Mathématiques 10 (2)*, 241-286.

Cantoral, R. (2003). La aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa: una mirada emergente [CD–ROM]. *XI Conferencia Interamericana de Educação Matemática* (tema Educación Matemática & Desafíos y Perspectivas). Blumenau, Brazil: Universidad Regional de Blumenau.

Cataño Barrera, A. (2007). *Estudio didáctico del cero*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada de IPN. México.

Crespo Crespo, C. (2012). Socioepistemología. En M. Pochulu y M. Rodríguez (Comp.). *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos* (pp. 91–114). Buenos Aires: Eduvim y Universidad Nacional de General Sarmiento.

Donoso, P. y Castro, E. (sf). *Necesidades, representaciones y usos del cero a través de la historia*. Recuperado el 7 de mayo de 2012 de http://www.ugr.es/~jmcontreras/thales/1/ComunicacionesPDF/Cero.pdf

Guimarães, F. (2008). *Sentidos do zero*. Tesis de maestría no publicada, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Brasil.

Pinedo, C. (2001). *El cero a través del tiempo*. Recuperado el 23 de octubre de 2012 de http://br.geocities.com/christianjqp/publicacoes1.htm.

Sánchez Risco, J. (2010). *La matemática en la India (500 d.c. a 1200 d.c.)*. España: Universidad de Castilla-La Mancha.

Veiga, D. (2013). *Estudio socioepistemológico del cero. El caso de la división*. Tesina para obtener el grado de Diplomatura no publicada. Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González". Buenos Aires, Argentina.

RELME 15, RELME 27… REFLEXIONES SOBRE LA EVOLUCIÓN DE LA MATEMÁTICA EDUCATIVA EN LATINOAMÉRICA

Cecilia Crespo Crespo
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González. Buenos Aires Argentina
crccrespo@gmail.com

Resumen. En los últimos años, la matemática educativa ha sufrido grandes cambios tanto en las temáticas que aborda como en los enfoques que utiliza y la manera en la que se investiga y publica. Los congresos, como las Reuniones Latinoamericanas de Matemática Educativa reflejan estos cambios a través de los trabajos presentados, al igual que las publicaciones que se realizan en nuestra disciplina. Haber tenido la oportunidad de organizar dos reuniones en nuestro país, separadas por doce años, da la posibilidad de apreciar de manera cercana estos cambios. Proponemos un recorrido a través de estos años para poder apreciar y comprender el crecimiento de nuestra comunidad.
Palabras clave: comunidad, matemática educativa, evolución
Abstract. In recent years, educational mathematic has suffered many changes in many matters in the way in which it is investigated and published. Congresses, as the Reuniones Latinoamericanas de Matemática Educativa reflect these changes through the presented works, as the publications that are done in our discipline. To have had the opportunity to organize two meetings in our country, separated by twelve years, provides the possibility of appreciating in a clear way these changes. We propose a journey through these years to be able to observe and understand the growth of our community.
Key words: community, educational mathematic, evolution

Introducción. La presencia de la matemática educativa como disciplina científica

Este trabajo se propone analizar algunos aspectos de la evolución de características de investigaciones y presentaciones de matemática educativa, con la finalidad de comprender la comunidad de nuestra disciplina que participa de las Reuniones Latinoamericanas de Matemática Educativa para poder identificar tendencias.

Entendemos a la matemática educativa como una ciencia social que interpreta los fenómenos que emergen de la realidad del aula de matemática en escenarios determinados. Se trata de una disciplina joven con inquietudes antiguas. Si bien su reconocimiento es reciente como disciplina de científica, hace mucho tiempo que el aprendizaje de la matemática ha sido preocupación de quienes se dedican a esta disciplina. En los últimos años es posible ver que está caracterizada por un gran crecimiento en todo el mundo, puesto de manifiesto a través de la aparición de eventos, sociedades y publicaciones de esta disciplina. En el quehacer disciplinar de una ciencia social en la actualidad, podemos citar la producción de nuevo material teórico, la creación de ámbitos de trabajo como organismos y proyectos para su difusión y la formación de nuevos investigadores que contribuyen a ese nuevo conocimiento (Silva Crocci y Cordero, 2010).

Si miramos un poco hacia atrás, las ciencias sociales debieron asumir que por orientarse a la producción del conocimiento sobre seres humanos y sociedad, sus características eran distintas de las de las ciencias formales y experimentales. Sólo entonces lograron la legitimación de sus

conocimientos y el reconocimiento como ciencia. Anteriormente debieron enfrentarse a críticas por falta de cientificidad debido a que se las tildaba de baja capacidad predictiva y objetividad por ser medidas con los parámetros de la concepción de ciencia de la modernidad, definición de ciencia entonces dominante.

Actualmente en las ciencias sociales, se ha comprendido que en estas disciplinas no es posible aceptar enunciados científicos acabados y han ido desarrollando métodos propios (Bourdieu, 1999). El contexto social crea condiciones para la producción de verdades científicas. Lo producido por la ciencia es explorado y analizado a partir de las condiciones sociales en las que se produjo (Cohen y Piovani, 2008). Los escenarios socioculturales deben tenerse en cuenta al analizar una comunidad científica, ya que le imprimen a las mismas características que le son propias.

Cómo analizar la evolución de una comunidad académica

Al analizar la matemática educativa en Latinoamérica, no se puede obviar que los constructos emergen de problemáticas y necesidades específicas de su escenario. Nuestra disciplina debe orientarse a desarrollar un programa propio de acuerdo con sus características culturales y necesidades regionales y resignificar las problemáticas en función de su escenario. Debe recordar que si se universaliza el conocimiento no se resignifica, hecho que es conocido como fenómeno de adherencia.

El concepto de comunidad científica fue propuesto por *Thomas S. Kuhn*. Cualquier disciplina se halla materialmente soportada por una comunidad de individuos interesados en el desarrollo de la misma y que trabajan en el marco de unas determinadas condiciones o circunstancias históricas.

En este trabajo necesitamos articular la producción científica y la comunidad científica. La investigación realizada encuentra explicación en ésta, en las características y el contexto de quienes integran esa comunidad. Las teorías nacen en regiones específicas para responder a necesidades propias de dicha región. La construcción de conocimiento de matemática educativa en Latinoamérica propone la identidad como categoría conceptual válida para la reflexión. "Las escuelas de pensamiento van construyendo conocimiento ligadas a la historia de la región que las vio nacer" (Silva Crocci y Cordero, 2012, 300).

Los elementos a tener en cuenta al hablar de comunidad científica son:

- Contexto social (influencias de investigación y comunicación)
- Contexto institucional (marco académico, iniciativas editoriales)

- Contexto epistemológico (líneas de investigación, perspectivas teórico-metodológicas, debates, etc.)
- Estructura interna de la comunidad (comunicación e interacciones)

Algunos indicadores de existencia de una disciplina científica son la organización académica, el grado de autonomía y la transmisión de conocimientos en formación de grado y postgrado. Por ello en este trabajo, sobre estas ideas, consideraremos como indicadores para analizar la evolución de nuestra comunidad, a los siguientes:

- Tipos de trabajos aceptados y programados en nuestras reuniones
- Origen de los trabajos
- Temáticas que abordan
- Cuestionamientos que se hace la comunidad
- Bibliografía que utilizan
- Formación académica

Doce años en la comunidad de matemática educativa en Latinoamérica

Nos hemos concentrado en esta oportunidad en las dos Reuniones Latinoamericanas de Matemática Educativa que se llevaron a cabo en Buenos Aires: Relme 15 en 2001 y Relme 27 en 2013. Consideramos que este análisis permite realizar una buena comparación y a partir de ella inferir algunas características de la evolución durante doce años de la comunidad de matemática educativa. Se presentan a continuación algunos aspectos relacionados con esta comparación.

a) Acerca de trabajos aprobados y programados en las reuniones. Fijando la atención en las Relme

Si se observa cuáles fueron las categorías de los trabajos que fueron programados en estas dos reuniones, es posible comprender cuáles son las demandas, necesidades e intereses de los actores que interactúan en el escenario en el que de lleva a cabo el evento (Tabla 1).

	Relme15	Relme 27
Conferencias	23	28
Cursos Cortos	30	20
Mesas Redondas	4	6
Reportes de Investigación	116	328
Comunicaciones breves	181	208
Talleres	80	52
Carteles	39	42
Grupos de Discusión	6	6

Tabla 1: Tipos de actividades programadas en Relme 15 y en Relme 27

En este caso, es posible apreciar un notable aumento de la cantidad de reportes de investigación y aunque en menor proporción de comunicaciones breves. De esto se infiere que en el tiempo transcurrido, se ha afianzado la investigación en nuestra disciplina y la formación de investigadores nóveles. La presentación de estos trabajos no depende del comité organizador, sino de quienes deciden participar de la reunión. Todos ellos han sido sometidos a arbitraje de un comité evaluador siendo enviados a dos colegas en evaluaciones doblemente ciegas.

Otro dato que consideramos es de importancia para indagar acerca de características de la comunidad es la nacionalidad de filiación de los autores de los trabajos (Tabla 2). En este caso mostramos los datos de dos maneras: por cantidades y porcentaje para poder comparar cantidades y su relación con la totalidad.

País	Relme 15		Relme 27	
Angola	0	0,00%	1	0,13%
Argentina	207	42,60%	182	24,20%
Bolivia	2	0,40%	0	0,00%
Brasil	10	2,10%	49	6,52%
Colombia	11	2,30%	56	7,45%
Costa Rica	11	2,30%	12	1,60%
Cuba	38	7,80%	9	1,20%
Chile	10	2,10%	81	10,77%
Dominicana	13	2,70%	3	0,40%
Ecuador	1	0,20%	2	0,26%
EEUU	2	0,40%	0	0,00%
España	6	1,20%	25	3,32%
Francia	1	0,20%	0	0,00%
Guatemala	3	0,60%	4	0,51%
Honduras	0	0,00%	1	0,13%
México	113	23,30%	249	33,11%
Nicaragua	0	0,00%	1	0,13%
Panamá	14	2,90%	4	0,51%
Perú	3	0,60%	8	1,06%
Puerto Rico	15	3,10%	0	0,00%
Uruguay	10	2,10%	7	0,93%
Venezuela	15	3,10%	59	7,85%

Tabla 2: Países de filiación de los trabajos programados en Relme 15 y en Relme 27

Claramente se infiere que México, cuna del movimiento de matemática educativa latinoamericano sigue liderando la cantidad de trabajos. La sede, Argentina ha disminuido en porcentaje la cantidad de trabajos enviados, quizá motivado este hecho por la emergencia y presencia de diversos eventos locales y por sucesos económicos acaecidos en los últimos tiempos. Se observa un importante incremento de trabajos de Brasil. La participación de este país se ha hecho más activa año a año, sobre todo reforzada por la organización de Relme 26 en Belo Horizonte y la incorporación de la lengua portuguesa como lenguaje oficial de Relme, además del castellano.

Siempre se detecta en cada Relme, y estos no son la excepción, una fuerte presencia de trabajos provenientes del país sede anterior y el siguiente. En el caso de Relme 15, la anterior sede fue Panamá y Cuba la siguiente. En el caso de Relme 27: Brasil y Colombia.

Otro dato de interés constituye la presencia en Relme 27 de trabajos cuyos autores presentan filiaciones a instituciones de dos países: Argentina-Cuba, Argentina-España, Argentina-México,

Brasil-Colombia, Brasil-Venezuela, Cuba-Perú, Colombia-Guatemala, Costa Rica-Chile, Costa Rica-España, Chile-España, Chile-México y España-Perú. Este hecho permite inferir una colaboración internacional, favorecida por estudios de postgrado realizados en países diferentes al de origen, tanto de manera presencial como a distancia. También favorece esto el uso de recursos tecnológicos beneficiando la comunicación a distancia, y su utilización para intercambiar ideas y experiencias y organizar actividades. Muchos colegas de distintas nacionalidades han ido estableciendo lazos académicos a través de congresos como Relme y continúan el contacto durante todo el año por medio de correo electrónico o redes sociales.

b) Acerca de trabajos publicados. Una mirada al ALME

Otro aspecto importante en relación a las Reuniones Latinoamericanas de Matemática Educativa es el Alme (Acta Latinoamericana de Matemática Educativa). Se trata de una publicación científica anual, resultado de la compilación de investigaciones que se presentan año a año en la RELME. La estructura exigida para su publicación es de artículo dentro del campo de la Matemática Educativa. El Comité Editorial de cada Alme es el encargado de convocatoria, recepción, evaluación y edición. El Comité Científico Internacional se encarga de la evaluación de las propuestas. Cada Alme se entrega en la RELME siguiente.

Los propósitos fundamentales de Alme pueden describirse como:

- Generar un espacio abierto a la comunidad para publicar los resultados de sus investigaciones dentro de todas las escuelas de pensamiento y respetando la naturaleza y tradiciones de nuestros países
- Permitir que los miembros de la comunidad conozcan la realidad educativa de nuestra región así como de otras zonas y puedan acceder a investigaciones que en ellas se están llevando a cabo
- Contribuir a la profesionalización tanto de la investigación en Matemática Educativa como de la docencia en matemática en nuestros países, aportando elementos que permitan el crecimiento de ambas y el desarrollo de Latinoamérica como región de producción de investigaciones del más alto nivel
- Promover la cultura del intercambio en la investigación, la consulta, la reflexión en conjunto y diálogo entre colegas para fortalecer el desarrollo local
- Comunicar a colegas de otras regiones lo que en la nuestra se está haciendo y logrando, para permitir que se reconozca la importancia de las teorías locales que se han desarrollado a la par del crecimiento de nuestra comunidad

En este caso, centramos la atención en Alme 26 (Flores, 2013), por ser la que se entregó en Relme 27. En particular, se analizaron las referencias por antigüedad. El interés de este análisis es tratar de conocer qué bibliografía consultamos.

En la Tabla 3, se observa que la mayoría de las referencias provienen de la última década completa. Esta cantidad va disminuyendo a medida que nos alejamos en el tiempo. En relación a la década actual, para tratarse sólo de cuatro años, es posible también inferir la gran cantidad de referencias que han sido publicadas en los últimos años y que son consultadas por los autores en sus trabajos.

Década	Cantidad	
2010-2013	293	17%
2000-2009	882	52,34%
1990-1999	389	23,09%
1980-1989	73	4,33%
1970-1979	27	1,60%
1960-1969	15	0,89%
1950-1959	2	0,12%
1940-1949	2	0,12%
1930-1939	1	0,06%
1920-1929	1	0,06%

Tabla 3: Antigüedad de las referencias bibliográficas de Alme 26, por década

La Tabla 4 muestra la antigüedad de las referencias de los últimos años. También se detecta una disminución a medida que nos alejamos en el tiempo, pero en este caso se detecta otro fenómeno, probablemente debido al tiempo de difusión de las publicaciones en la comunidad. Los últimos cuatro años concentran la mayoría de las publicaciones referenciadas.

Año	Cantidad
2013	3
2012	61
2011	113
2010	117
2009	135
2008	125
2007	96
2006	102
2005	85
2004	83
2003	70
2002	61
2001	55

Tabla 4: Antigüedad de las referencias bibliográficas de los últimos años en Alme 26

También es interesante analizar las referencias bibliográficas de Alme 26 por región de origen (Gráfico 1). Este gráfico permite identificar de qué origen son las ideas que nutren el pensamiento académico de la comunidad.

El gran porcentaje de publicaciones de Latinoamérica permite afirmar que se trata de una comunidad que se lee y lee las investigaciones de sus colegas.

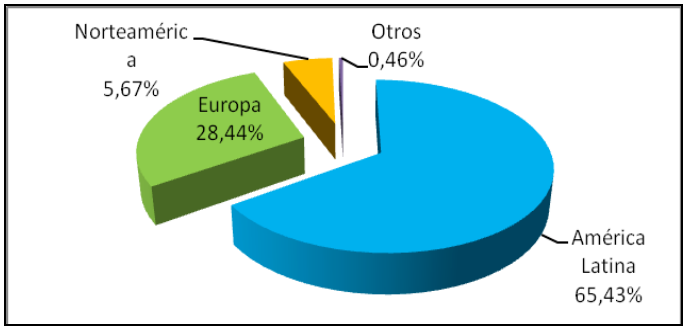


Gráfico 1: Referencias bibliográficas de Alme 26 clasificadas por región de origen

En relación a los idiomas en los que fueron escritas las publicaciones referenciadas, el Gráfico 2 brinda esa información.

Más de la mitad de las publicaciones referenciadas de encuentran en español. El idioma más referenciado después es el portugués. Este último hecho puede estar influido por el hecho de que Relme 26 se realizó en Brasil y por lo tanto hubo gran cantidad de ponencias en este idioma, las cuales dieron origen a publicaciones en Alme 26 de este origen.

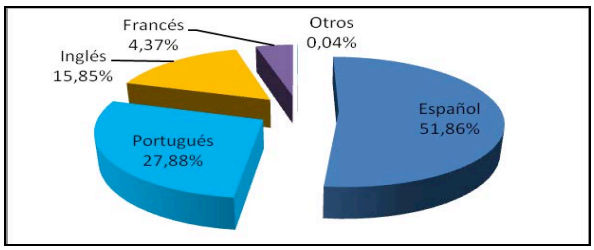


Gráfico 2: Referencias bibliográficas de Alme 26 clasificadas por idioma

La publicaciones referenciadas son de distintos tipo: libros, artículos, tesis, anales de congresos, documentos curriculares, entre otros. El gráfico 3 muestra el porcentaje de cada tipo que aparecen en Alme 26. La mayoría de las referencias realizadas provienen de artículos y libros. También aparece referenciada una importante cantidad de tesis tanto de maestría como de doctorado.

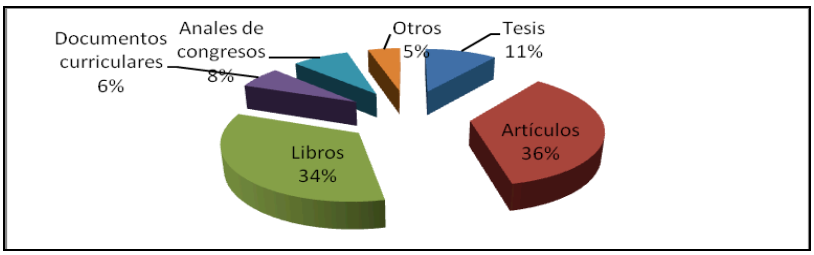


Gráfico 3: Referencias bibliográficas de Alme 26 clasificadas por tipo de publicación

Resulta interesante comparar las características que se describen anteriormente con la que se presenta en la Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (Relime). Relime es la otra publicación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (Clame). Acerca de

ella encontramos que "está documentada la marcada tendencia en la cultura científica local de citar bibliografía anglosajona o francesa, al tiempo que no nos leemos entre nosotros, ni mucho menos nos citamos en nuestra propia lengua, *¿cómo lograr que las nuevas generaciones de investigadores en el campo se lean, se debatan, se citen en su propia lengua?* Nuestra única respuesta es generando tradición, ojalá y tengamos tiempo" (Cantoral y Reyes, 2012, p.134). En este sentido, en Alme, se ha manifiesta una predominancia de las referencias de la última década, de los últimos 4 años y el reconocimiento de referentes regionales, con la presencia de clásicos. La comunidad de Alme puede caracterizarse como una comunidad que lee y analiza lo que produce (tesis) y lo que publica (artículos).

La organización temática de las Alme ha ido evolucionando, transitando desde la organización por tipo de actividad que dio origen a cada artículo, hasta lograr agruparlos según ciertos bloques acordes con los elementos generales del discurso que presentan. Actualmente no existe una focalización en el tipo de actividad que es origen del artículo, sino un desplazamiento de temas a marcos o visiones del aula. La socioepistemología aparece como marco presente en muchos artículos y característico de nuestra comunidad. También la edición de Alme ha transitado por distintas etapas. En un comienzo y hasta 2005, cada sede era responsable del proceso de edición. Luego se comenzó a conformar la idea de un Comité Editor que trascienda y aproveche la experiencia anterior, con miembros provenientes de distintos países y con continuidad en sucesivas publicaciones.

c) Acerca de algunos hechos sucedidos en los últimos años

No es posible analizar la evolución de nuestra comunidad académica sin mencionar algunos hechos ocurridos en estos años que son clara muestra de su crecimiento.

Por un lado, han surgido nuevos postgrados y postítulos en matemática educativa en diversos países, con modalidades tanto presenciales como a distancia. Estos permiten la formación y perfeccionamiento de profesores e investigadores.

En nuestras aulas de Institutos de Formación Docente, cada vez se hace más común la lectura y análisis de trabajos de Alme, Relime y publicaciones de sociedades nacionales de profesores de matemática (Lestón, 2013). De esta manera, los futuros profesores reflexionan sobre las temáticas, problemáticas y enfoques abordados durante sus estudios y como consecuencia de ello plantean preguntas sobre la construcción de la propia identidad del rol docente, problematizando sus aulas. Se acercan a resultados de la investigación desde su formación de base y valoran la investigación vinculada al aula.

También en estos tiempos se ha llevado a cabo la creación y consolidación de sociedades nacionales de educación matemática. Se han establecido vínculos entre distintas sociedades nacionales y organizaciones internacionales (Clame, Fisem), al comprender que todas tienen el fines similares. Esta vinculación internacional facilita intentos de coordinación de fechas de eventos y permite pensar en un futuro en la organización de eventos conjuntos. Estas sociedades organizan sus congresos y reuniones y tienen publicaciones nacionales destinadas a docentes, investigadores formados, investigaciones nóveles y estudiantes.

Algunas conclusiones a partir de lo anterior. Latinoamérica: una y plural…

A partir de todo lo anterior podemos afirmar que comunidad de matemática educativa ha crecido académicamente en los últimos años. Esto se refleja en la producción de teorías, la realización de investigaciones, la obtención de grados académicos y la creación de carreras de postítulos y posgrados. Ha madurado en su manera de trabajar, de organizarse, de vincularse. Podría decirse que estamos aprendiendo a ser comunidad.

La evolución de la matemática educativa muestra la consolidación creciente del campo disciplinar, la formación de recursos humanos, el cambio del foco de las problemáticas, el cuestionamientos acerca de métodos y marcos, pero siempre dentro del respeto a la pluralidad y la búsqueda de la manera de producir conocimiento.

El recurso científico comunitario se consolida a largo plazo y se abre a distintas posturas teóricas para convivir y dialogar. En ese diálogo se consolida y fortalece y esto posibilita atender a particularidades de la región. Para desarrollarse y crecer como comunidad, es preciso tener en cuenta las oportunidades y capacidades para generar recursos humanos, las funciones del quehacer disciplinar y el hecho de que las verdades científicas son construcciones sociales resultantes de determinadas condiciones de producción.

En Latinoamérica la comunidad de matemática educativa comparte características que nos dan identidad. Surgen algunos retos innegables. Es preciso detectar y asumir fortalezas y debilidades de la comunidad y no perder de vista orígenes y pluralidad. También será útil analizar la presencia de continuidades y rupturas en las investigaciones realizadas. De esta manera se podrán conocer los caminos ya transitados, las líneas de investigación abandonadas y los problemas no explorados en profundidad. La consolidación progresiva de la matemática educativa en los últimos años que respeta la diversidad de escenarios socioculturales, facilita la articulación, vinculación y enriquecimiento mutuo.

Referencias bibliográficas

Bourdieu, P. (1999): El campo científico. En *Intelectuales, política y poder,* Capítulo 5 (75-110). Buenos Aires: Eudeba.

Cantoral, R. y Reyes, D. (2012). Editorial. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa 15 (2)*, 131-135.

Cohen N. y Piovani, J. (2008). *La metodología de la investigación en debate*. Buenos Aires: Eudeba

Cordero, F. y Silva Crocci, H. (2012). Matemática educativa, identidad y Latinoamérica: el quehacer y la usanza del conocimiento disciplinar. En *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 15* (3), 295-318.

Flores, R. (Ed.) (2013). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Volumen 26*. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Lestón, P. (2013). Hacia una formación docente con la mirada en el aula. En R. Flores, (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Volumen* 26, 1769-1779. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Silva-Crocci, H. y Cordero, F. (2010). La identidad y la adherencia en la formación del Matemático Educativo en Latinoamérica. P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 23* (pp. 968 – 976). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

CAPÍTULO 4

EL PENSAMIENTO DEL PROFESOR, SUS PRÁCTICAS Y ELEMENTOS PARA SU FORMACIÓN PROFESIONAL

Introducción al Capítulo de El Pensamiento del Profesor, sus Prácticas y Elementos para su Formación Profesional

Nora Lerman y Patricia Lestón

Miembro del Comité Organizador Nacional – Relme 27. (Argentina)
nlerman@outlook.com, patricialeston@gmail.com

La socioepistemología, marco teórico que surgió en la comunidad latinoamericana de matemática

La formación de profesores ha sido uno de los capítulos que más ha crecido en las últimas Reuniones Latinoamericanas de Matemática Educativa. Basta con revisar las últimas ediciones de Alme para ver cómo se ha extendido para incorporar reflexiones e investigaciones desde distintos marcos teóricos, demostrando una vez más la pluralidad de pensamiento que en esta publicación conviven. La matemática educativa tiene "siempre la intención, explícita o implícita, de contribuir a la mejora progresiva de la educación científica regional, favorecer la constitución de una ciudadanía con una visión más científica del mundo, y fortalecer a una comunidad profesional emergente" (Cantoral, 2009, p. 302). Y pensar en poder lograr esto sin mirar a la formación de docentes sería imposible.

Son los docentes, profesores, maestros; profesionales de la educación en general, quienes tienen la tarea de cambiar la realidad de las aulas. Y es en su formación, inicial o continua, donde los resultados de las investigaciones de matemática educativa, deben impactar. Sin embargo, lo más interesante de esto, es que quienes están participando de las investigaciones y reuniones, cada vez en mayor número, son profesores de aula así como futuros docentes que se animan a acercarse a las reuniones y a las publicaciones, participando activamente y no meramente como espectadores. Las reflexiones sobre sus propias prácticas, la problematización de lo que ocurre en sus aulas y la construcción de un escenario de discusión sobre la propia actividad han emergido gracias a los espacios como Relme y Alme. CLAME ha colaborado en la creación de las circunstancias y ha enriquecido a una comunidad en la sistematización de la comunicación de los saberes, a partir de las distintas publicaciones; y esa comunidad ha tomado la posta y se anima cada vez más, a participar no sólo siguiendo sugerencias hechas por otros, sino animándose a sugerir.

Llevar al aula propuestas didácticas que rediseñen dicho discurso no se limita a secuencias que el profesor debe seguir como algoritmos, sino que debe reconocer en ellas cómo se problematiza un saber, el tipo de interacción que se genera en el sistema didáctico, los momentos de construcción de conocimiento, cuándo se logran los objetivos de aprendizaje, cómo se generan construcciones

personales y colectivas, cómo pasar del consenso a la institucionalización del saber, reconocer los momentos de intervención para provocar respuestas del alumno, etc. Es decir, la comprensión de aquello que fundamenta la propuesta didáctica se torna más importante que la propuesta misma. (Montiel, 2010, p. 71)

Es por eso que invitamos al lector a revisar los escritos que aquí se compilan, que nos dicen cómo el pensamiento y las prácticas del profesor se modifican en base a los resultados de las investigaciones.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. (2009). Revistas Latinoamericanas en Isi Wok, reflexiones con la comunidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 12 (3)*, 301-304.

Montiel, G. (2010). Hacia el rediseño del discurso: formación docente en línea centrada en la resignificación de la matemática escolar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 13 (4 – I)*, 69-84

REFLETINDO A FORMAÇÃO MATEMÁTICA DOS PROFESSORES DOS ANOS INICIAIS

Renata Camacho Bezerra
Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE Brasil
renatacamachobezerra@gmail.com

Resumen. A formação matemática dos professores dos anos iniciais vem ganhando destaque nos últimos tempos, por diversos motivos, dentre eles, porque a disciplina de Matemática em todos os níveis de ensino apresenta índices alarmantes de repetência, evasão escolar e porque compreender o processo de ensino e aprendizagem da Matemática nos anos iniciais pode nos ajudar a compreender as dificuldades que o ensino da disciplina adquire em outros níveis. Procuramos ao longo do trabalho, identificar a formação dos professores de Pedagogia e que lecionam Matemática nos anos iniciais através de um estudo bibliográfico propor como alternativa o trabalho colaborativo para o desenvolvimento daquele que tem a responsabilidade de trabalhar a Matemática já nos primeiros anos da vida escolar dos alunos
Palabras clave: formação de professores, matemática, anos iniciais, pedagogia
Abstract. The teachers education in Mathematics in the early years has been gaining attention recently, for various reasons, among them, because the mathematics subject at all levels of education presents alarming failures, scholar evasion and because understanding the process of teaching and learning mathematics in the early years could help us to understand the difficulties that teaching this subject acquires at other levels. We researched during the work, identify the education of pedagogy's teachers that teach Mathematics in the early years through a literature study and propose an alternative of collaborative work to develop the one who has the responsibility to teach mathematics in the first years of school life student
Key words: teacher education, mathematics, early years, pedagogy

Introdução

A formação e professores é um campo em que muitos professores e educadores discutem e tecem comentários e/ou sugestões. No entanto, este campo apresenta uma série de angústias, dúvidas e questões que precisam ser paulatinamente melhor entendidas e discutidas não apenas no âmbito da universidade, mas com toda a comunidade escolar, com o professor, com o diretor, com os pais, com os alunos, enfim discutir a formação de professores é mais do que discutir uma problemática isolada é discutir de maneira dialética, no ir e vir de perguntas e de respostas, no meio em que se está inserido, de forma a promover a transformação do sujeito e da realidade.

Diante disso o autor Di Giorgi (2011), afirma que:

> A formação do professor para atuar nos anos iniciais do ensino fundamental tem sido alvo de políticas públicas, de programas de formação contínua das secretarias de educação estaduais ou municipais, bem como de inúmeros estudos, pesquisas e debates na atualidade. No entanto, ainda constitui uma questão não resolvida (Di Giorgi, 2011, p. 49).

E embora percebamos que o governo nos últimos anos tem investido na formação inicial e continuada do professor, poucas pesquisas têm comprovado e/ou estudado se tais investimentos e

melhorias chegam aos nossos alunos, ou seja, se este investimento na formação do professor reflete no processo de ensino e aprendizagem e de que forma isto acontece.

Neste sentido é importante dizer que entendemos formação, como Marcelo García (1999), ou seja, um processo contínuo, sistemático e organizado que abarca toda a carreira docente e seus diferentes condicionantes e ainda, como algo que nunca se conclui, é sempre um processo e como afirma D'Ambrosio (2005), deve ser sólida e multidimensional ao longo de toda a vida.

No Brasil, de acordo com are solução do Conselho Nacional de Educação/Conselho Pleno CNE/CP no. 01 de 15 de Maio de 2006 os egressos dos cursos de Pedagogia deverão estar aptos a "VI- ensinar Língua Portuguesa, Matemática, Ciências, História, Geografia, Artes, Educação Física, de forma interdisciplinar e adequada às diferentes fases do desenvolvimento humano" (Resolução CNE/CP 1/2006). No entanto a autora Curi (2005), com base em suas pesquisas afirma que a maioria dos cursos de Pedagogia, cerca de 90%, elegem as questões metodológicas como essenciais à formação de professores polivalentes em detrimentos das questões de conteúdo de matemática em suas grades curriculares, o que a literatura aponta como um fato que acontece também com outras disciplinas. Para a autora,

> (...) é possível considerar que os futuros professores concluem cursos de formação sem conhecimentos de conteúdos matemáticos com os quais irão trabalhar tanto no que concerne a conceitos quanto a procedimentos, como também da própria linguagem matemática que utilizarão em sua prática docente. Em outras palavras, parece haver uma concepção dominante de que o professor polivalente não precisa 'saber Matemática' e que basta saber como ensiná-la (Curi, 2005, p. 69).

Vale ressaltar que já no final do Século XX, estudos internacionais, comparados, alertavam para o problema das aprendizagens o que inevitavelmente, nos levou a discutir a formação de professores. No entanto foi no inicio do século XXI, que de acordo com Nóvoa (2009) os docentes "... voltam a ocupar um lugar central nas políticas que procuram reforçar a educação de todos como uma dimensão fundamental de sociedades que valorizam a diferença, o conhecimento e a liberdade" (Nóvoa, 2009, p.08).

Parece-nos claro o que é necessário para facilitar o processo de ensino e aprendizagem, bem como, o desenvolvimento profissional do docente,

> (...) articulação da formação inicial, indução e formação em serviço numa perspectiva de aprendizagem ao longo da vida; atenção aos primeiros anos de exercício profissional e à inserção dos jovens professores nas escolas; valorização

> do professor reflexivo e de uma formação de professores baseada na investigação; importância das culturas colaborativas, do trabalho em equipa, do acompanhamento, da supervisão e da avaliação dos professores; etc. (Nóvoa, 2009, p. 13).

O que ainda não é claro é porque mesmo cientes da problemática, dos condicionantes que a envolve, temos dificuldade de concretizar na prática da sala de aula as ideias e os discursos estudados e conhecidos.

Nóvoa (2009), afirma que "Não haverá nenhuma mudança significativa se a "comunidade dos formadores de professores" e a "comunidade dos professores" não se tornarem mais permeáveis e imbricadas", (Nóvoa, 2009, p. 16), é necessário um caminhar articulado, entre formação inicial e continuada, entre o ensino fundamental, médio e o superior e entre os professores de todos os níveis.

> (...) as nossas propostas teóricas só fazem sentido se forem construídas dentro da profissão, se forem apropriadas a partir de uma reflexão dos professores sobre o seu próprio trabalho. Enquanto forem apenas injunções do exterior, serão bem pobres as mudanças que terão lugar no interior do campo profissional docente (Nóvoa, 2009, p. 18).

Na carreira docente universitária pude trabalhar a Matemática em suas diversas facetas: com alunos de Licenciatura em Matemática, Ciências Contábeis e Pedagogia e neste último, por diversas vezes busquei traçar conexões entre os cursos de Matemática e Pedagogia.

O que observei, geralmente, foi uma resistência bastante grande nestas articulações, no entanto, me anima saber que esta barreira vai sendo vencida à medida que cada vez mais alunos de Pedagogia se interessam por estudar, compreender e discutir os processos de ensino e aprendizagem da Matemática nos anos iniciais.

Devido a isso discutir a formação de professores seja ela inicial ou continuada e investir "... na construção de redes de trabalho colectivo que sejam suporte de práticas de formação baseadas na partilha e no diálogo profissional" (Nóvoa, 2009, p. 22) passa a ser uma possibilidade onde o professor seja sujeito ativo do processo.

O que se quer ao longo do percurso é procurar transformar a prática em conhecimento e diante disso, criar subsídios para mudar o enfoque da formação continuada de professores, ou seja, uma formação que é "... dominada mais por referências externas do que por referências internas ao

trabalho docente..." inverte a lógica e passa a "... instruir as práticas profissionais como lugar de reflexão e de formação" (Nóvoa, 2009, p. 33).

Essa preocupação com o professor e com a formação do professor se justifica e se fundamenta no fato de que,

> (...) ensinamos aquilo que somos e que, naquilo que somos, se encontra muito daquilo que ensinamos. Que importa, por isso, que os professores se preparem para um trabalho sobre si próprios, para um trabalho de auto-reflexão e de auto-análise (Nóvoa, 2009, p. 38).

Diante disso, para Di Giorgi (2011), a dimensão política deve ser a compreensão da articulação entre a formação do professor e o desenvolvimento da profissão docente.

Muitos autores, segundo Passos (2006), têm rompido coma concepção tradicional de formação e tem optado pelo termo "desenvolvimento profissional", concebendo o mesmo, como:

> a) um movimento de "dentro para fora" no qual o professor ou futuro professor se desenvolve, enquanto pessoa e profissional (Ponte, 1998);
>
> b) "uma viagem pessoal que vai de um mundo estático para um outro no qual a exploração e a reflexão são as normas" (Cooney, 2001, p.10);
>
> c) Um "processo dinâmico e evolutivo da profissão docente que inclui tanto a formação inicial quanto a permanente, englobando os processos que melhoram o conhecimento profissional, as habilidades e as atitudes" (Imbernón, 1994, p.45);
>
> d) Um processo que combina aspectos formais e informais, mediante o qual o professor "torna-se o sujeito de aprendizagem", destacando-se não apenas os conhecimentos e os aspectos cognitivos, mas também as "questões afetivas e de relacionamento" que promovem a individualidade de cada professor Hargreaves (1998). Apud (Passos, 2006, p. 195).

Mas como vemos o conceito de formação continuada e desenvolvimento profissional não se contrapõem, ao contrário, se complementam na visão dos autores e onde o professor se constitui como o principal protagonista da ação seja ela considerada formativa ou de desenvolvimento profissional.

No nosso entender o conceito de formação continuada está intimamente ligada ao desenvolvimento profissional e se completam em aspectos e definições, como sugere Passos (2006),

> (...) consideramos a formação docente numa perspectiva de *formação contínua* e de desenvolvimento profissional, pois pode ser entendida como um processo pessoal, permanente , contínuo e inconcluso que envolve múltiplas etapas e instâncias formativas. Além do crescimento pessoal ao longo da vida, compreende também a formação profissional (teórico-prática) da formação inicial – voltada para a docência e que envolve aspectos conceituais, didático-pedagógicos e curriculares – e o desenvolvimento e a atualização da atividade profissional em processos de formação continuada após a conclusão da licenciatura. A *formação contínua,* portanto, é um fenômeno que ocorre ao longo de toda a vida e que acontece de modo integrado às práticas sociais e às cotidianas escolares de cada um, ganhando intensidade e relevância em algumas delas (Passos, 2006, p. 195).

Formar-se, e aprender para melhor formar-se, não pode ser caracterizado como um processo linear e sim trabalhado como algo multifacetado, e bem distante dos simplismos que caracterizam o ensino tradicional.

Pensar formação é considerar inúmeros condicionantes: o pessoal, a formação inicial/continuada, a escola, a família, a comunidade, aspectos sociais, aspectos políticos, aspectos econômicos, dentre outros.Diante disso, é necessário pensarmos uma formação como um processo contínuo e em construção.

> (...) enfoca-se a ideia de que esse processo de construção, viabilizado pela interação com os outros, suscita o desenvolvimento da autonomia do sujeito, porquanto permite indagar, participar, formular hipóteses, defender pontos de vista e propor soluções (Maldaner, 2011, p. 14).

Ao abordar esta formação convergimos para discussões de uma educação, que como afirma D'Ambrosio (1997), só faz sentido se visa o desenvolvimento pleno do homem.

> Temos, certamente, que melhorar a formação do professor, mas tão ou mais importante do que isto é criar, um lugar, na Universidade, para atender às necessidades dos que já tão diplomados, através de um contato mais contínuo e permanente, que implique tanto a vinda do professor para a Universidade, como a ida da Universidade para as escolas (Durham, 1986, p. 151).

Assim, como cita Maldaner (2011), "Essa situação aponta para a necessidade de uma mudança fundamental no fazer pedagógico, no sistema educativo como um todo e em cada professor em particular..." (Maldaner, 2011, p. 27).

> Queremos conhecer mais e melhor os professores e seu trabalho docente porque temos a intenção de descobrir os caminhos mais efetivos para alcançar um ensino de qualidade, que se reverta numa aprendizagem significativa para os alunos. Isso supõe, por um lado, um trabalho colaborativo entre pesquisadores da universidade e os professores das escolas, e por outro lado um esforço analítico muito grande, seja no interior dos grupos de pesquisa, seja entre grupos para reunir elementos que ajudem a reestruturar as práticas de formação (André, 2010, p.178).

Toda essa preocupação se justifica por diversas pesquisas que apontam que nas escolas brasileiras os níveis de aproveitamento nas disciplinas em geral é muito baixo e em Matemática o índice é ainda mais alarmante, embora haja diversas iniciativas, inclusive governamentais, de incentivo a formação inicial e continuada.

Na educação, muitas vezes os resultados discutidos na teoria demoram a alcançar a prática, isso se dá por diversos motivos um deles talvez seja porque muitas vezes os professores são sujeitos passivos das investigações não participando ativamente dos processos.

Diante do apresentado é importante ressaltar que

> Pesquisas realizadas mais recentemente *sobre* e *com* professores evidenciam que o trabalho coletivo, e em especial o trabalho colaborativo representam um contexto altamente favorável à aprendizagem e ao desenvolvimento profissional do professor (Boavida y Ponte, 2002; Cochran-Smith y Lytle, 1999; Fiorentini, 2004a; Hargreaves, 1998; Miskulin Et al., 2005, Passos, 2006, p. 202).

Por fim, neste estudo teórico pudemos perceber que é importante discutir a formação (inicial e continuada) e conceber a mesma como elemento articulado ao desenvolvimento profissional e a que literatura vigente tem apontado para o desenvolvimento cada vez maior de parcerias entre a escola e a universidade e entre todos os níveis de ensino. O trabalho colaborativo é uma possibilidade de que a formação de professores e o desenvolvimento profissional adquiriram novas perspectivas e de fato possamos modificar o processo de ensino e aprendizagem de Matemática em todos os níveis de ensino e consequentemente alterar os elevados índices de fracasso escolar nesta disciplina.

Referências bibliográficas

André, M. E. D. A. (2010). Formação de professores: a constituição de um campo de estudos. *Educação.*33(3), 174-181.

Curi, E. (2005).*A Matemática e os Professores dos anos iniciais.*São Paulo: Musa Editora.

D'Ambrosio, U. (1997). *Educação Matemática: da teoria à prática.*(2ª. Ed) Campinas/SP: Papirus.

D'Ambrosio, B. (2005). Conteúdo e metodologia na formação de professores. In Fiorentini, D. Nacarato, A. M. (Orgs.) *Cultura, formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam Matemática.* São Paulo: Musa Editora.

Di Giorgi, A. G. Et al. (2011). *Necessidades formativas de professores de redes municipais: contribuições para a formação de professores crítico - reflexivos.* São Paulo: Cultura Acadêmica.

Durham, E. R. (1986). Limitações da universidade na formação social do professor. In Catani, D. B.; Miranda, H. T.; Menezes, L. C.; Fischmann, R. (Orgs). *Universidade, escola e formação de professores* (pp. 147-152). São Paulo: Editora Brasiliense.

Maldaner, A. (2011).*Educação matemática: fundamentos teóricos-metodológicos para professores dos anos iniciais.*Porto Alegre/RS: Mediação.

Marcelo García, C. M. (1999). *Formação de professores para uma mudança educativa.* Portugal: Porto Editora LDA.

Nóvoa, A. (2009). *Professores Imagens do futuro presente.* Lisboa/PT: Educa.

Passos, C. L. B. et al. (2006). Desenvolvimento profissional do professor que ensina Matemática: Uma meta-análise de estudos brasileiros. *Revista Quadrante.*XV (01 e 02) Portugal.

Resolução CNE/CP 1/2006. (2006, 15 de maio).O Conselho Nacional de Educação institui diretrizes Curriculares Nacionais para o Curso de Graduação em Pedagogia, licenciatura. Brasília, DF. Recuperado em 10 de novembro de 2013, de http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/rcp01_06.pdf.

EXPERIENCIA DE ARTICULACIÓN ENTRE ASIGNATURAS DEL PROFESORADO EN MATEMÁTICA

Nora Ferreyra, María Eva Ascheri y Rubén Pizarro
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UNLPam Argentina
noraf@exactas.unlpam.edu.ar, mavacheri@exactas.unlpam.edu.ar

Resumen. La formación inicial de futuros docentes de matemática debiera abordar un trabajo exploratorio y experimental como herramienta esencial para construir el conocimiento matemático y así poder desarrollar prácticas profesionales desde esa perspectiva. En este sentido, en la Universidad Nacional de La Pampa (Argentina), desde las asignaturas Taller de Resolución de Problemas y Cálculo Numérico de la carrera Profesorado en Matemática, se han implementado acciones tendientes a mejorar la articulación vertical, entre ellas, la resolución compartida de distintos problemas. Presentamos una experiencia áulica donde se plantea un problema, se generan fórmulas y se concluye desplegando nuevas técnicas y justificando procedimientos a partir de nuevos conocimientos
Palabras clave: profesorado en matemática, resolución de problemas, cálculo numérico
Abstract. The initial training of future teachers of mathematics requires exploratory and experimental work as an essential tool to build mathematical knowledge and professional practice in order to develop that perspective. In this sense, in the Problem Solving Workshop and Numerical Analysis, courses of Teacher of Mathematics career in National University of La Pampa (Argentina), have implemented actions to improve vertical articulation, including shared solving various problems. We present a classroom experience in which there is a problem, are generated formulas, develop new techniques and procedures are justified from new knowledge
Key words: teachers of mathematics, problem solving, numerical calculus

Introducción

En los últimos años, la enseñanza de la matemática ha puesto el acento en actividades que constituyen situaciones problemáticas cuya resolución requiere investigar, analizar, conjeturar, generalizar, producir explicaciones y validaciones, entre otras tareas específicas.

El Programa Epistemológico señala como objeto de estudio la matemática institucionalizada, la que se enseña y la que se pretende enseñar y propone desarrollar este tipo de actividades para hacer participar al estudiante en la construcción de su propio conocimiento.

En principio, con un trabajo exploratorio que permita reflexionar, establecer conjeturas, desarrollar nuevas técnicas y, posteriormente, en otra etapa de la actividad, con cuestionamientos acerca de la validez de las conclusiones y la necesidad de hallar explicaciones para el funcionamiento de determinados objetos.

La formación inicial de los futuros docentes de matemática debiera abordar un trabajo exploratorio y experimental como herramienta esencial para construir el conocimiento matemático y poder desarrollar sus prácticas profesionales desde esa perspectiva.

Por otra parte, un plan de estudios, conformado por asignaturas que funcionan de manera independiente, con diferentes docentes y con división entre clases teóricas y prácticas, origina

cierta desarticulación y atomización del conocimiento que no contribuye a la formación de docentes con actitud de integración e investigación compartida.

La formación de Profesores en Matemática

La sociedad actual plantea un escenario de situaciones educativas cambiantes, las instituciones de enseñanza, en todos los niveles, requieren poder incorporar nuevas prácticas educativas que garanticen la formación de los estudiantes y que atiendan a la igualdad de oportunidades de los jóvenes en el acceso al saber.

El conocimiento matemático resulta esencial para el desarrollo de otras ciencias y la modelización de situaciones problemáticas, por lo cual su enseñanza adquiere también un carácter fundamental. En el ámbito de la Educación Matemática, se ha estudiado la Resolución de Problemas y reconocido su importancia en la construcción del sentido del conocimiento (Charnay, 1988; Bosch y Gascón, 2004).

Particularmente, se han caracterizado diferentes modelos de aprendizaje acorde a las relaciones que se establecen entre los tres polos principales identificados en una clase, es decir entre el docente, el alumno y el saber.

El/la Profesor/a de Matemática como profesional de la enseñanza requiere de una formación que le brinde conocimientos matemáticos tanto para administrar recursos que lo habiliten a resolver problemas y modelizar situaciones provenientes de otras ciencias como para desplegar niveles de formalización propios de la disciplina y ser capaces de abordar la construcción de significados matemáticos en contextos educativos. Desde los espacios de formación didáctica del profesorado se insiste en la importancia de la construcción del sentido en la enseñanza y el aprendizaje, sin embargo, en muchas asignaturas del plan de estudios se presentan los contenidos de manera desarticulada, sin establecer la necesidad o discutir las ventajas de contar con nuevas técnicas que aporten a la resolución del problema.

La formación inicial de grado de los profesores universitarios debiera prever la participación en diversos ámbitos de producción cultural, científica y social, en distintos contextos sociales, de manera que, a partir de una correcta articulación entre teoría y práctica, los graduados puedan impulsar prácticas pedagógicas transformadoras basadas en una sólida formación general, pedagógica y específica.

En este sentido, en la Universidad Nacional de La Pampa (Argentina), desde las asignaturas Taller de Resolución de Problemas y Cálculo Numérico incluidas en el plan de estudios de la carrera Profesorado en Matemática, se han implementado diversas acciones tendientes a mejorar la

articulación vertical, entre ellas, la resolución compartida de distintos problemas que comienzan a explorarse en un cuatrimestre, en el cual se obtienen algunos resultados y se generan fórmulas, para concluir la resolución en otro cuatrimestre, desplegando nuevas técnicas y comprometiéndose en la justificación de procedimientos a partir de nuevos conocimientos y revisión de los anteriores.

El Taller de Resolución de Problemas se desarrolla en el segundo año de la carrera Profesorado en Matemática, en él se fomenta el estudio de situaciones particulares, la elaboración de conjeturas y la búsqueda y producción de modelos matemáticos adecuados a determinadas situaciones. En el cuatrimestre siguiente los estudiantes cursan Cálculo Numérico, cuyo principal objetivo es estudiar métodos numéricos para resolver problemas y ponerlos en práctica utilizando la computadora como herramienta de trabajo.

La mayoría de las situaciones planteadas en el transcurso de las asignaturas iniciales de la carrera, se caracterizan por tener, generalmente, una única solución a la cual se arriba a través de la resolución de alguna ecuación o sistema de ecuaciones, por métodos directos y usando la calculadora. La búsqueda de soluciones a partir de buenas aproximaciones está ausente en los primeros años de formación de los estudiantes, y las actividades realizadas parecen indicar que siempre es posible obtener soluciones exactas con métodos algebraicos.

Al momento de iniciar el cursado de la asignatura Cálculo Numérico, pocas veces los estudiantes se han enfrentado con problemas en los que se plantee una necesidad genuina de disponer de ese conocimiento.

Experiencia

Con el doble objetivo de resolver una situación problemática en el ámbito de la geometría por un lado y por el otro, generar en los estudiantes la necesidad de obtener soluciones mediante métodos numéricos utilizando la computadora como herramienta de cálculo, se desarrolló con 10 estudiantes de segundo año de Profesorado en Matemática de la UNLPam la siguiente tarea basada en las propuestas de actividades de Berté (1999).

En la misma, identificamos uno de los modelos presentados por Charnay (1988), denominado "aproximativo" y centrado en la construcción del saber por el alumno. En este modelo el docente propone las distintas situaciones, organiza las etapas en la clase (investigación, formulación, validación, institucionalización), ordena la comunicación y propone elementos convencionales del saber (notación, terminología). El alumno, por su parte, indaga, explora, propone soluciones, las compara con las de sus compañeros, las defiende o las discute.

Consigna N° 1:

Con los papeles disponibles, utilizando tijera y cinta, construir conos, cuya base se ubique en la mesa y sin superponer capas de papel.

La actividad inicial giró en torno al desarrollo plano de un cono, se hicieron conjeturas acerca de la figura a recortar inicialmente, para poder plegar, pegar y finalmente obtener el cuerpo pedido.

En general, los estudiantes intentaron la construcción a partir de un triángulo isósceles y, al ver que no cumplía la condición, "retocaron" la figura inicial y concluyeron en la necesidad de comenzar a partir de un semicírculo o bien de un sector circular.

Se obtuvieron así los primeros conos con distintas características y se discutió acerca de las razones de estas diferencias de tamaño y/o forma.

Se analizó la posibilidad de tener conos con igual base y altura o viceversa y los requisitos para ello.

Puesto que las condiciones iniciales eran muy disímiles como para sacar conclusiones (ver Figura 1), con el fin de estudiar las variables que intervienen en el modelo de llegada, se propuso la siguiente tarea a partir de círculos de cartulina, todos del mismo tamaño, que se pusieron a disposición de los estudiantes.

Figura

Consigna N° 2:

Realizar sólo dos cortes rectos en cada uno de los círculos dados y pegar sin superponer cartulina para obtener conos cuya base se ubique en la mesa.

La variedad de casos particulares presentados permitió avanzar. La idea medular de la situación, se concentra en la necesidad de establecer una relación entre el ángulo central de corte en el plano y el "tamaño" del cono obtenido. En este caso, se profundiza en las características particulares del cuerpo, esto es, altura, radio y superficie de la base, volumen, generatriz, discutiendo las variaciones de unas y otras y las distintas posibilidades (ver Figura 2).

Se plantean, entre otras, las siguientes cuestiones:

- ¿de qué depende la altura del cono?, ¿qué valores máximo y mínimo puede tomar la altura del cono?
- ¿qué altura tendrá el cono si se descarta un corte cuyo ángulo central mide un ángulo recto?
- ¿cuál es el ángulo central del sector circular que se debe cortar para obtener un cono con una determinada altura?
- Si el radio del círculo original es 1, ¿qué volumen se obtiene al cortar un ángulo recto?
- ¿qué volumen se obtiene al cortar un ángulo central dado θ?
- ¿cuál es el ángulo central del sector circular que se debe cortar para obtener un cono de un determinado volumen?

Se discute sobre la posibilidad de obtener, a partir de un solo círculo y un corte, dos conos diferentes, con lo cual, posteriormente derivan otras conjeturas y análisis.

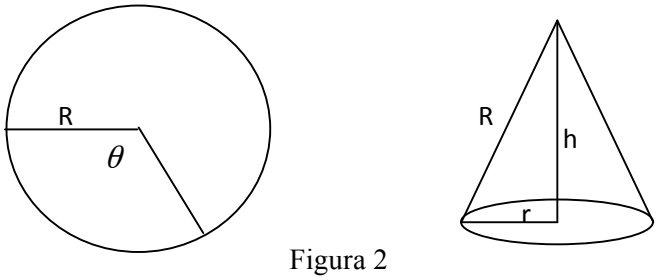


Figura 2

En el desarrollo del trabajo se obtiene, sin demasiadas dificultades, la fórmula que permite calcular el volumen del cono a partir del ángulo de corte, pero no es inmediato calcular el ángulo a partir del volumen.

Algunos plantearon tomando como variable el ángulo cortado y descartado (θ), otros, directamente el ángulo que queda determinado en el desarrollo plano del cono (α), obteniendo de esta manera diferentes fórmulas.

Para calcular el volumen en función de θ o de α, resolvieron $V = \dfrac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$ con *r* radio de la base del cono y *h* su altura.

Según la variable considerada, en la clase se obtuvieron dos expresiones tanto para *r* como para *h*,

$$r = \frac{(2\pi - \theta)\cdot R}{2\pi} \text{ y } h = \frac{R\sqrt{(4\pi - \theta)\theta}}{2\pi} \text{ o bien } r = \frac{\alpha \cdot R}{2\pi} \text{ y } h = \frac{R\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}}{2\pi}$$

respectivamente, con R radio del círculo original.

Posteriormente trabajaron, cada uno con la variable que venía trabajando, en la fórmula para obtener el volumen.

$$V = \frac{R^3\sqrt{(-\theta^6 + 12\pi\theta^5 - 56\pi^2\theta^4 + 128\pi^3\theta^3 - 144\pi^4\theta^2 + 64\pi^5\theta)}}{24\pi^2} \qquad \text{(a)}$$

$$V = \frac{R^3\left(4\pi^2\alpha^4 - \alpha^6\right)}{24\pi^2} \qquad \text{(b)}$$

A partir de estos resultados los estudiantes pudieron responder muchas de las preguntas formuladas, sin embargo, como hemos dicho, las respuestas a algunas cuestiones se presentan más complejas, por ejemplo, *si el radio R es 15 cm, ¿qué ángulo debo cortar para obtener un volumen de 750cm³?*

Con este nuevo interrogante y a partir de las fórmulas (a) y (b) para obtener el volumen, los estudiantes se encuentran ante la imposibilidad de resolver analíticamente las ecuaciones polinómicas de grado 6.

Se convoca a los profesores de Cálculo Numérico para introducir el estudio de métodos de resolución alternativos. Surge así la necesidad de utilizar algún método numérico acorde a la situación problemática planteada y se presenta, a los estudiantes, el software educativo **Secaη** (http://secanu.exactas.unlpam.edu.ar/) elaborado por el grupo de investigación de Cálculo Numérico (Ascheri, Pizarro, Garcia, Astudillo y Culla, 2012).

Considerando la fórmula (a) y realizando las operaciones necesarias obtenemos la siguiente expresión, considerando que *V=750*.

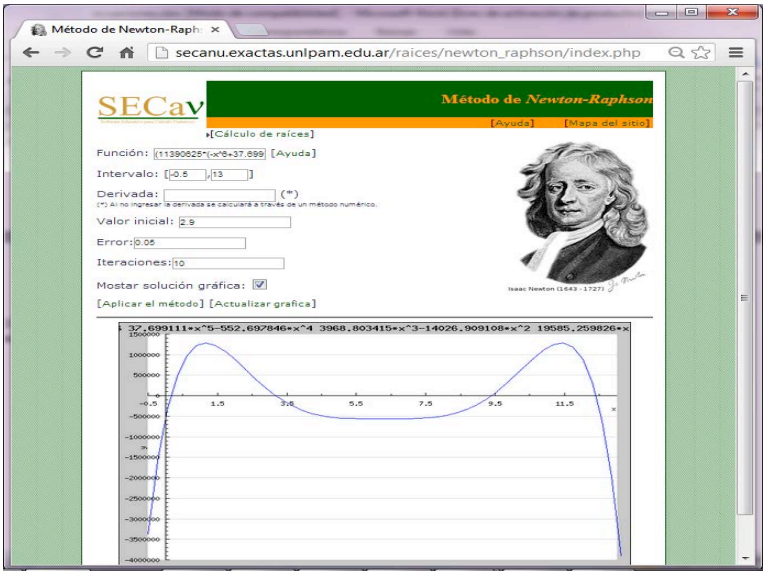
$$750 = \sqrt{\frac{R^6(-\theta^6 + 12\pi\theta^5 - 56\pi^2\theta^4 + 128\pi^3\theta^3 - 144\pi^4\theta^2 + 64\pi^5\theta)}{576\pi^4}}$$

Dado que el software realiza cálculos con valores Reales y no con Complejos, en lugar de calcular las raíces de *V* calcularemos las raíces de V^2. Remplazando *R* por 15cm y realizando los cálculos obtenemos la siguiente expresión:

$$750^2 = \frac{11390625(-x^6 + 37.699111x^5 - 552.697846x^4 + 3968.803415x^3 - 14026.909108x^2 + 19585.259826x)}{576\pi^4}$$

0= (11390625(-x^6+37.699111*x^5-552.697846*x^4+3968.803415*x^3-14026.909108*x^2 + 19585.259826 * x))/(56107.6364)-562500*

Utilizando el software en Cálculo Numérico, y específicamente el método de Newton Raphson, se obtiene una primera aproximación de la gráfica de la función que se muestra en la Figura 3.



Figura

A partir de esta gráfica obtenemos que las raíces de la función están próximas a 0, 3, 9 y 12. Tomando luego estos valores como valores iniciales y aplicando el método de Newton Raphson se obtienen las siguientes raíces con un error menor a 0.0001 (ver Tabla 1)

Valor inicial	Raíz aproximada	Cantidad de iteraciones
0	0.158721	4
3	3.179059	3
9	9.387330	4
12	12.407633	5

Tabla 1

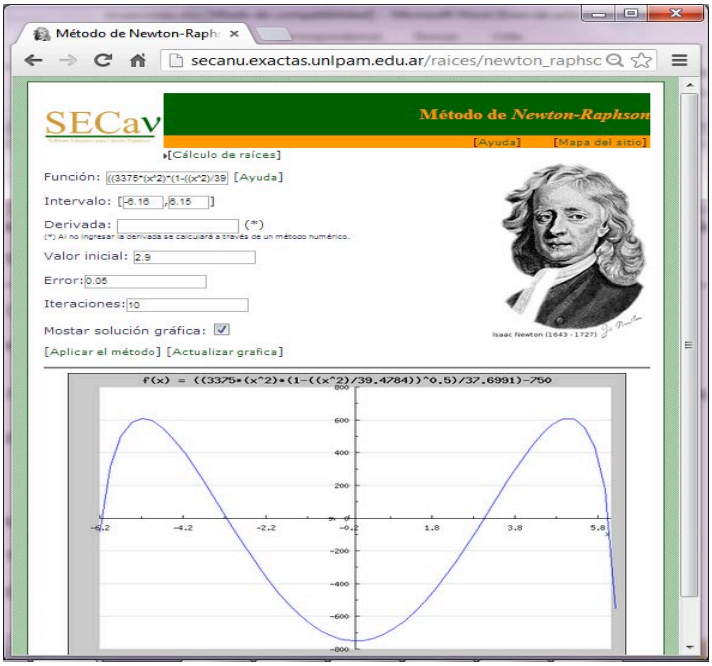
Trabajando ahora con la fórmula (b) se obtiene la siguiente ecuación,

$$V = \frac{R^3\alpha^2\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{4\pi^2}}}{12\pi} \rightarrow V = \frac{3375x^2\sqrt{1-\frac{x^2}{39.4784}}}{37.6991} \rightarrow$$

V= (3375(x^2)*(1-((x^2) / 39.4784))^0.5)/37.6991 →*

0 = ((3375(x^2)*(1-((x^2)/39.4784))^0.5)/37.6991) - 750*

que nuevamente resolveremos utilizando el software de Cálculo Numérico, y específicamente el método de Newton Raphson, se obtiene una primera aproximación de la gráfica de la función que se muestra en la Figura 4.



Figura

A partir de esta gráfica, descartando los valores negativos, se obtiene que las raíces de la función están próximas a 3 y 6. Tomando luego estos valores como valores iniciales y aplicando el método de Newton Raphson se obtienen las siguientes raíces con un error menor a 0.0001 (ver Tabla 2).

Valor inicial	Raíz aproximada	Cantidad de iteraciones
3	3.104124	3
6	6.124462	4

Tabla 2

Luego de analizar los resultados obtenidos a partir del uso del software, con las oportunas explicaciones de los responsables de la asignatura Cálculo Numérico, los estudiantes pudieron comparar soluciones y reinterpretar los resultados en el contexto del problema original.

Conclusiones

En nuestra opinión, la combinación de elementos de Cálculo Numérico con los tradicionales utilizados en Taller I, es una buena alternativa para introducir a los estudiantes en el estudio de los métodos numéricos con el uso de la computadora. El hecho de disponer de los contenidos temáticos desarrollados en Taller I, a través de las presentaciones usuales, en combinación con el uso de métodos numéricos y la computadora como herramienta de cálculo, provocó en los estudiantes un mayor compromiso con el trabajo investigativo, se logró una mayor participación y mejor asimilación de los contenidos curriculares involucrados.

Al concluir la experiencia los participantes valoraron positivamente la posibilidad de trabajar, cada uno, a partir de sus propios razonamientos y discutir, en grupo, el sentido de los resultados hallados. También mencionaron la importancia de adquirir un conocimiento en el momento en que surge la necesidad de disponer de él, con lo cual, creemos haber aportado elementos a su formación pedagógica. Finalmente, consideramos que la mejora en el proceso de construcción del conocimiento no depende de la utilización de métodos numéricos y la computadora, sino de su adecuada integración curricular, es decir, del entorno educativo diseñado conjuntamente por los docentes de ambos espacios.

Referencias bibliográficas

Ascheri, M. E., Pizarro, R. A. (2008). *Cálculo Numérico*. Santa Rosa: EdUNLPam.

Ascheri, M. E., Pizarro, R. A., García, P., Astudillo, G. J. y Culla, M. E. (2012). Software educativo Secaη. Disponible en: http://secanu.exactas.unlpam.edu.ar/ http://es.wikipedia.org/wiki/Software_matem%C3%A1tico

Berté, A. (1999). *Matemática de EGB 3 al Polimodal*. Buenos Aires: A-Z Editora.

Bosch, M. y Gascón, J. (2004). La praxeología local como unidad de análisis de los procesos didácticos. Boletín del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas. Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/welcome.htm.

Charnay, R. (1988). Aprender (por medio de) la resolución de problemas. En Parra y Saiz (comps), *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones* (pp. 51-63). Buenos Aires: Paidós.

CÓMO ENSEÑAS Y TE DIRÉ COMO APRENDEN

Mariela Kreimer
Universidad Tecnológica Nacional. Argentina
marielakreimer@hotmail.com

Resumen. Considerando las dificultades que presentan los estudiantes en el quehacer matemático, se realizó una investigación que indagó cómo influye el docente, desde su rol de promotor de la construcción de aprendizajes y gestor de instancias que habilitan la adquisición de competencias matemáticas para la construcción de conceptos fundados en la actividad intelectual del alumno. Se contrastaron mediante observaciones de clase, dos estilos docentes a los que se denominaron tradicional – conductista y constructivo - humanista, los mismos, fueron tipificados en base a estudios anteriores

Palabras clave: docente, tradicional, constructivo, enseñanza, aprendizaje

Abstract. Considering the difficulties shown by students in their mathematical tasks, this research has been undertaken in order to determine how this can be affected by different teaching styles. Teachers' influence has been analysed from their role of promoters of the construction of knowledge and of an appropriate environment for the acquisition of mathematical skills in order to construe concepts based on the students' intellectual activities. By means of classroom observations, two different teaching styles have been compared, which will be referred to as traditional-behaviourist and constructive-humanist. This standarisation was based on existing theoretical frameworks

Key words: teacher, traditional, constructive, teaching, learning

Introducción

Actualmente podemos observar en los distintos niveles educativos las crecientes dificultades que presentan los alumnos en el desarrollo de competencias matemáticas. Este estudio enfocó su atención en cómo modificar la situación desde el docente, quien dirige las condiciones de aprendizaje. La relación docente – alumno es asimétrica, el docente la conduce desde un rol de mayor autoridad en el proceso. Por ello se observó la forma en la que desarrolla su tarea, considerando sus actitudes en el manejo grupal e individual de sus alumnos y la propuesta didáctica puesta en práctica. El docente sugiere o propone un determinado modelo vincular, va marcando las pautas de comunicación, los tiempos, el clima y las condiciones de trabajo. En el desarrollo de su tarea define su estilo y el rol de los alumnos, determina el conjunto de expectativas que tiene para con ellos y viceversa.

Para promover la actividad matemática en los estudiantes debemos invitarlos a experimentar, proponer, comunicar y argumentar diversas resoluciones y propuestas personales.

> Hacer Matemática en la escuela implica desde los primeros aprendizajes poner en juego las ideas, escuchar a otros, ensayar y discutir soluciones, resolver problemas, aprender a plantearlos, buscar los datos necesarios para su solución, formular y comunicar sus procedimientos y resultados, argumentar a propósito de la validez de una solución, dar prueba de lo que se afirma,

> proponer ejemplos y contraejemplos, traducir de un lenguaje a otro, descubrir demostraciones e interpretar demostraciones hechas por otros (Municipalidad de la ciudad de Buenos Aires. Secretaría de Educación. Dirección de Currículum, 1995, p. 6).

En el desempeño de su rol el docente podrá promover que los estudiantes realicen actividad matemática brindándoles autonomía, reconociendo sus esfuerzos y sus logros, estimulando la participación y el intercambio de ideas. "Para enseñar hay que motivar a los alumnos, y la mejor manera de hacerlo, es devolviéndoles la confianza en sí mismos." (Berté, 1999, p.7). La resolución personal en los estudiantes funcionará como motivadora en su quehacer matemático, mostrándoles que son capaces de construir conceptos en forma autónoma. Algunos docentes consideran que cuánto más claros son, más aprenden sus alumnos. La matemática de esa forma se reproduce, no es creativa, por lo cual, pierde su esencia y los estudiantes no le otorgan sentido a los contenidos.

> (…) lo que debe ser importante para el alumno no es conocer la solución, es ser capaz de encontrarla por sí mismo y de construir así a través de su actividad matemática una imagen positiva de sí mismo, valorizante frente a las matemáticas (Charlot, 1986, p. 9)

Esta investigación se propuso indagar qué características del docente podrán promover la construcción de conceptos matemáticos fundados en la actividad intelectual del alumno considerando qué es hacer matemática y cómo se aprende en forma genuina

Revisión de Antecedentes

Este trabajo se inscribe en el marco de las investigaciones de Flanders (1978), Rogers (1978) y Barreiro (2000).

Flanders (1978) estudió el comportamiento de los maestros tipificándolos en base a dos modelos, el que ejerce influencia directa y el que ejerce influencia indirecta.

Influencia Indirecta

- Acepta sentimientos
- Alaba o estimula
- Acepta o usa ideas de los estudiantes
- Hace preguntas

Influencia directa

- Diserta
- Da instrucciones
- Critica o justifica su autoridad

Flanders (1978) realizó sus estudios basándose en estas categorías y concluyó que las clases expuestas a un patrón de influencia indirecto producían en los estudiantes una participación activa en las clases y en consecuencia mayores logros. En cambio, la forma directa aumentaba la sumisión de los estudiantes condicionándolos a pedir ayuda y a comprobar con el maestro más a menudo para estar seguros de que iban por buen camino.

Rogers (1978) estudió cuáles son las actitudes y cualidades de los docentes que facilitan el aprendizaje. La conclusión a la que arribó es que hay algunas cualidades básicas del maestro (autenticidad, aprecio, aceptación, confianza y comprensión empática) que promueven en los miembros del grupo una actitud positiva hacia el aprendizaje. En consecuencia, genera un buen clima de trabajo y los estudiantes manifiestan comportamientos activos. Se tiende a producir en los miembros del grupo un refuerzo de la autoestima y se hacen más hábiles en cuanto a apelar a sus procesos cognoscitivos más elevados en la resolución de problemas, adquieren autonomía y capacidad de reflexión. Contrariamente, los alumnos de docentes que presentan esas características en un bajo nivel pueden verse retrasados en sus adquisiciones.

Otras investigaciones más recientes, fueron realizadas por el GREC (Grupos de Reflexión, Encuentro y Crecimiento) desde 1978 hasta la fecha. Barreiro (2000), integrante del GREC, sintetiza los trabajos realizados por dicha organización en la que se establecieron dos paradigmas docentes NIP (Normativo, Individualista, Punitivo) y CHI (Comprensivo, Humanista, Integrativo).

El docente que adhiere al paradigma NIP, pone énfasis en el cumplimiento de las normas en el dominio y la obediencia (normativo). Es verticalista, si se produce un conflicto busca identificar un culpable (individualista). Pone énfasis en los aspectos negativos de los alumnos y como respuesta impone un "castigo" (punitivo).El docente que adhiere al paradigma CHI es comprensivo, acepta críticas, apuesta a la educabilidad (humanista) y busca la integración del grupo (integrativo).

Las conclusiones a las que se arribaron es que adherir a un paradigma NIP puede producir en los alumnos incomunicación y temor por preguntar. No habrá un clima de trabajo cooperativo, habrá favoritismos y competencias negativas. En cambio, el adherir a un paradigma CHI estimula el crecimiento personal de cada uno de los miembros del grupo, su espíritu crítico y su autonomía. Genera participación activa, motivación y por ende mayores logros en sus aprendizajes.

Marco Teórico

Dos enfoques conviven en las prácticas de los profesores de matemática en la actualidad:

- Un enfoque tradicional en el que el docente es el poseedor del conocimiento. El mismo debe ser presentado con la mayor claridad posible al alumno, el cual al tomar conocimiento de los cuerpos teóricos existentes estará en condiciones de resolver problemas a partir de ellos.
- El segundo enfoque, es el proveniente de la denominada *"Escuela Francesa de Didáctica de la matemática"*. Uno de sus puntos fundamentales lo constituye la *Teoría de Situaciones Didácticas* (TSD) de Guy Brousseau.

La TSD se funda en la concepción de que el aprendizaje matemático se construye adaptándose a un medio que es factor de contradicciones de dificultades. Se produce en tal caso un desequilibrio. Se denomina situación al modelo de interacción del sujeto con el medio. Estas "*situaciones*" le permiten al sujeto construir conocimiento por sí mismo. Esta *"génesis"* de conocimiento está presente tanto en quien produce conocimiento *"novedoso"* para la humanidad (el investigador en matemática) como así también para quien construye conocimiento en ámbitos escolares que si bien no son novedosos para la humanidad lo son para el individuo que interactúa con el medio.

Para aprender, el alumno deberá resolver situaciones problemáticas planteadas por el maestro aceptándolas como un desafío personal, adaptándose a las mismas por sus propios medios, formulando conjeturas, reflexionando, analizando y validando distintos procedimientos. Para que esto sea posible, el maestro no debe explicitar sus intenciones o sea no debe manifestar cuales son los conocimientos que quiere producir (Brousseau, 1986).

Caracterización de los cuatro tipos de creencias sobre la enseñanza/aprendizaje propuestos por Domenech (1999, 2004)

ENSEÑANZA CENTRADA EN EL PROFESOR (Enfoque tradicional)	ENSEÑANZA CENTRADA EN EL ALUMNO (Enfoque constructivista)
El profesor es el que posee el saber y nada de lo que diga se puede cuestionar.	La situación educativa se organiza tomando como centro al estudiante.
La educación es esencialmente logocéntrica, dirigida por el profesor y fuertemente centrada en su autoridad (moral o física).	El profesor no dirige la instrucción sino que su papel se limita a guiar y orientar el proceso de E/A.
El papel del profesor es de transmisor del conocimiento.	Pretende desarrollar habilidades de aprendizaje y de pensamiento en los estudiantes.
El alumno juega un papel pasivo-receptivo.	El alumno es un constructor activo de su propio conocimiento.
Se valora la cantidad de contenidos asimilados,	El profesor crea situaciones de aprendizaje y

no la calidad. La metodología es fundamentalmente expositiva.	plantea conflictos cognitivos para favorecer esa construcción. El profesor trata de favorecer la motivación intrínseca del estudiante. Es decir, la motivación no proviene de fuera sino de dentro.
ENSEÑANZA CENTRADA EN EL PRODUCTO (Enfoque conductista) La situación educativa debe entenderse como un proceso de tipo técnico. Se concede mucha importancia a la planificación y a la concreción de los objetivos. El proceso es rígido porque está supeditado a la consecución de los objetivos, formulados de forma operativa. El profesor proporciona mucha práctica a los alumnos. La enseñanza debe ser individualizada.	ENSEÑANZA CENTRADA EN EL PROCESO (Enfoque humanista) Importancia del desarrollo de destrezas socio-afectivas (sentido crítico, reflexión). El alumno decide su propia marcha, y marca su propio ritmo, lo que fomenta la responsabilidad, autonomía e independencia. Rechazan la rigidez de los objetivos operativos. Importancia del aprendizaje cooperativo, diálogo y las interacciones. Se valora mucho más el aspecto afectivo que los resultados.

Metodología de la Investigación

La investigación se centró en un estudio de casos en los que se contrastaron dos estilos docentes que se encuadraban en los perfiles descriptos por Domenech (1999, 2004) tradicional – conductista y constructivo-humanista. Para llevarlo a cabo se realizaron observaciones de clase en un colegio secundario privado ubicado en Capital Federal. Se comenzó observando a todos los docentes de Matemática de la escuela y luego se seleccionaron dos de ellos teniendo en cuenta quienes presentaban una tendencia significativa a las características de los perfiles descriptos. Finalmente, la recolección de datos se realizó en dos terceros años con un docente al que denominamos A, quien respondía al enfoquetradicional – conductista y con un docente al que denominamos B, que respondía al enfoqueconstructivo - humanista. Se los observó durante dos meses en los cuales cada docente desarrolló un contenido en particular de principio a fin.

Se relevaron los siguientes datos: *relación afectiva docente – alumno, propuesta didáctica, producciones de los alumnos en el desarrollo de las clases, intercambios entre docente - alumno y entre pares, comportamiento y actitudes de los alumnos.*

Presentación de Resultados

CLASE DEL DOCENTE A Enfoque tradicional – conductista	CLASE DEL DOCENTE B Enfoque constructivo - humanista
Relación afectiva docente – alumno El docente tuvo una relación cordial con el	*Relación afectiva docente – alumno* El docente tuvo un trato cordial y afectivo con

grupo. Ante un error o duda, volvía a explicar los contenidos reiteradas veces en forma paciente y amena, pero no los invitaba a la reflexión, los corregía mostrándoles la forma correcta de resolver. No demostraba tener confianza en los alumnos, se aseguraba de que resolverían toda actividad propuesta sin vacilar.	los estudiantes, reconoció sus esfuerzos y su trabajo. Demostraba tener confianza en los estudiantes, brindándoles autonomía, invitándolos constantemente a que aporten sus ideas y utilizando todas sus propuestas en forma positiva.
Propuesta didáctica El docente exponía explicando con detalle cada contenido y luego presentaba un ejercicio modelo para que los alumnos reproduzcan su formato. Enseñaba por repetición y ejecución mecánica de procedimientos.No proponía actividades de reflexión. Los alumnos no transitaban instancias de discusión en las cuales tuvieran la posibilidad de formular conjeturas, comunicar y argumentar sus producciones.	*Propuesta didáctica* Para presentar los temas nuevos o trabajar los conceptos desarrollados, el docente proponía ejercicios de reflexión o problemas donde podían construir en forma autónoma los contenidos. Para practicar alguna técnica del contenido dado se resolvían ejercicios de aplicación. Para resolver los problemas se reunían en subgrupos e intercambiaban ideas. Posteriormente, comentaban y validaban sus propuestas entre los distintos grupos en una puesta en común guiada por la docente. El docente estimulaba a sus alumnos a adquirir nociones matemáticas proponiéndoles problemas para que las pudieran producir como respuesta personal a una pregunta y no por imposición.
Producciones de los alumnos en el desarrollo de las clases Los ejercicios propuestos por el docente eran siempre de aplicación, los alumnos replicaban procedimientos y muchas veces cometían errores conceptuales por falta de comprensión. En general, trabajaban pocos alumnos y comentaban por lo bajo que esperaban que los ejercicios fueran resueltos en el pizarrón. Los alumnos no argumentaban ni realizaban producciones personales en base a sus conocimientos.	*Producciones de los alumnos en el desarrollo de las clases* Los alumnos estaban atentos a las propuestas que iban surgiendo, participaban activamente, intercambiaban ideas e iban construyendo nuevos conceptos a partir de las mismas. Cuando se realizaba una puesta en común para presentar los problemas resueltos los alumnos exponían sus propuestas explicando y argumentando cómo las habían pensado. Los alumnos iban construyendo los contenidos en forma autónoma.
Intercambios entre docente - alumno y entre pares	*Intercambios entre docente - alumno y entre pares* El docente generaba un clima de trabajo

El docente disertaba, anticipaba los contenidos y preguntaba a la espera de una respuesta predeterminada, no daba lugar a la discusión y reflexión de los conceptos para que los alumnos los puedan construir y otorgarles sentido.Solo proponía ejercitación para que resuelvan individualmente, no se generaban intercambios entre pares para argumentar y validar sus producciones. El docente corregía los errores de los alumnos en forma inmediata o ignoraba sus intervenciones. No los hacía reflexionar para guiarlos a la respuesta deseada. Los alumnos que participaban buscaban la "aprobación" de sus planteos en forma externa.	homogéneo. Se ocupaba de que todos se integraran, escuchen sus explicaciones y participen de la clase. No intervenía en los comentarios para decir si eran acertados o no, los guiaba con preguntas, promoviendo la interacción entre pares. Se generaban debates donde se formulaban diversas posturas que se validaban a través del diálogo. Se trabajaba en subgrupos, se desarrollaban explicitaciones y argumentaciones. El docente les brindaba libertad a los alumnos para formular propuestas, tomar decisiones, reflexionar y construir los contenidos en forma autónoma, individual o grupalmente.
Comportamiento y actitudes de los alumnos Generalmente, cuando el docente explicaba los contenidos, muchos de los alumnos charlaban entre sí y no prestaban atención. Los alumnos manifestaban que la clase era muy lenta y que se aburrían.	*Comportamiento y actitudes de los alumnos* Los alumnos realizaban las tareas, intervenían activamente en la clase, reflexionaban sobre los contenidos, interactuaban entre ellos, se preocupaban por entender y aprender, todos tenían buena predisposición al trabajo en la materia y manifestaban un gran interés por las clases.

Conclusión

El docente A, cuyo enfoque tenía una tendencia significativa al modelo tradicional – conductista transfirió los contenidos acabados y construidos. En consecuencia, los alumnos esperaban que el docente les proveyera información y reproducían la misma. Redujo la enseñanza a una repetición y no genero una buena predisposición al trabajo en la materia. Los alumnoseran receptores pasivos de conocimientos, no hubo construcción genuina de los mismos.

El docente B, cuyo enfoque tenía una tendencia significativa al modelo constructivo – humanista estimuló a sus alumnos a que se enfrenten a situaciones problemáticas en las que cuestionaron los conocimientos ya adquiridos, los analizaron, validaron y los reformularon para dar origen a nuevos conceptos. Generó en ellos inquietudes, reconoció sus esfuerzos y sus logros, estimulo el intercambio de ideas favoreciendo el desarrollo de la actividad matemática en el aula.

En conclusión, el docente que presentaba una tendencia significativa al enfoque constructivo – humanistales brindo a sus alumnos la posibilidad de construir los conceptos en forma autónoma,

transmitiéndoles confianza e interés por el trabajo en la materia a través de su propuesta vincular y didáctica. De esta forma, promovió la construcción de conceptos fundados en la actividad intelectual de los alumnos.

Referencias bibliográficas

Barreiro, T. (2000). *Trabajos en grupo*. Buenos Aires: Ed. Novedades Educativas.

Berté, A. (1999). *Matemática dinámica*. Buenos Aires: A-Z Editora.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématique, 7(2)*, 33-115.

Charlot, B. (1986). *La epistemología implícita en las prácticas de enseñanza de las matemáticas*. Conferencia dictada en Cannes. Recuperado el 19 de septiembre de 2013 de www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/cepa/epistemologia_charlot.pdf

Domenech, F. (1999). Las teorías educativas implícitas del profesorado universitario. *III Congreso Internacional de Psicología y Educación.* Santiago de Compostela, 8-11 de septiembre.

Domenech, F. (2004) *Psicología de la educación* e *instrucción*: su aplicación al contexto de la clase. Castelló: Universitat Jaume I.

Flanders, N. (1967). *Influencia del maestro, actitudes de los alumnos y realizaciones.* México: Rabasa.

Municipalidad de la ciudad de Buenos Aires. Secretaria de Educación. Dirección de Curriculum. (1995). *Actualización curricular*. E.G.B. Matemática. Documento de trabajo núm.1.

Rogers C. (1978). *Libertad y creatividad en la educación*. Buenos Aires: Paidós Ibérica S.A.

TRABAJO COLABORATIVO, UN TEJIDO QUE HACE TRAMA ENTRE LA ESCUELA Y LA INSTITUCIÓN FORMADORA

Claudia Asteasuain, Ethel Barrio y Estela Dávila, Analía Petich
Instituto Superior de Formación Docente Nº 12, Neuquén. Argentina
casteasuain@gmail.com, ethel.barrio@gmail.com, estedavila@gmail.com, apetich@gmail.com

Resumen. Presentamos un trabajo colaborativo construido entre profesoras del IFD N° 12 y maestras de la Escuela N° 178, de la ciudad de Neuquén (Argentina). En el marco de un Ciclo de Desarrollo Profesional Docente convocado por el INFD, nos propusimos -como formadoras de maestros- "acampar en el otro escenario", para conocer más profundamente el funcionamiento de la enseñanza de la matemática en la escuela primaria. Diseñamos un dispositivo de acompañamiento que nos permitió reconocer cómo van tomando decisiones en torno al tratamiento del cálculo en 2° grado, focalizando en algunos procesos de cambio en las condiciones reales de desempeño laboral
Palabras clave: matemática escolar, trabajo colaborativo, procesos de cambio
Abstract. We present a collaborative work written by teachers from IFD N° 12 and professors from school N° 178, from Neuquén (Argentina). In the context of a Professional Development Cycle, convened by the INFD, we proposed –as teacher' educators- "to camp in the other stage", in order to get to know deeply the way in which teaching math in primaries schools works. We design a device of accompaniment that permitted us recognize how decisions about treatment of 2nd grade calculation are made, focusing in some change processes in the real conditions of job performance
Key words: school mathematics, collaborative working, change processes

Introducción

Punto de partida

El ciclo Análisis de las Prácticas de Enseñanza de Matemática en la Escuela Primaria -línea de acción del Área de Desarrollo Profesional del INFD- nos convocó, a profesoras de Didáctica de la Matemática y del campo de la Práctica del Profesorado en Educación Primaria del ISFD N°12 de Neuquén, a integrar un equipo de trabajo para pensar juntas, desde distintas miradas, qué está pasando en las escuelas primarias con la enseñanza de la matemática. Desde el inicio, el ciclo promovió un acercamiento a la escuela primaria con una mirada investigativa; en particular, nosotras elegimos trabajar con la Escuela N°178 de la ciudad de Neuquén (Argentina), sabiendo que allí encontraríamos disponibilidad para "continuar" el trabajo colaborativo ya iniciado años anteriores.

Desde un diálogo colectivo con los maestros que tenían alguna vinculación con la matemática que se enseña en la escuela, instrumentamos una serie de entrevistas abiertas que nos permitió transparentar los discursos y pensar juntos sobre esta cuestión. Durante los meses de marzo y abril del 2012 realizamos tres entrevistas, de las que participaron maestras y maestros de ambos turnos y ciclos de esa escuela. A partir de las distintas voces que identificamos en las entrevistas, nos propusimos construir un espacio de trabajo compartido entre las maestras de segundo grado, la maestra de apoyo y nuestro equipo del IFD.

Decidimos indagar en "los procesos de cambio en la práctica docente" donde interjuegan las "tensiones entre "lo nuevo" y "lo propio"" (Block, Moscoso, Ramírez y Solares, 2007, p. 751). Nos propusimos identificar los factores que contribuyen a generarlos, las condiciones que posibilitan su toma de consciencia, las oportunidades que representan, los conflictos que abren. Ver cómo interviene "lo propio": las matrices de aprendizaje, la formación -tanto inicial como continua-, la trayectoria profesional -tanto la experiencia de aula como los recorridos por distintas instituciones-, las condiciones laborales, las prescripciones, la componente personal, las concepciones que se tienen de la matemática.

Perspectiva de Investigación

Posicionadas en un modo particular de entender el trabajo colaborativo, decidimos generar un espacio que propiciara la construcción de sentidos compartidos en torno a las preocupaciones sobre la enseñanza de la matemática. Establecer un diálogo que nos permitiera enriquecer nuestras miradas, preguntarnos juntas, ir encontrando algunas respuestas orientadas a mejorar nuestras maneras de enseñar.

El Documento Metodológico Orientador para la Investigación Educativa nos sirvió de guía para encuadrarnos dentro de la investigación cualitativa, que sostiene una concepción holística, es decir, intentamos comprender en profundidad desde la totalidad contextual en que se producen las prácticas, orientando la comprensión situacional a la toma de consciencia. Optamos por una perspectiva fenomenológica: "Para el fenomenólogo, la conducta humana, lo que la gente dice y hace, es producto del modo en que define su mundo. El fenomenólogo intenta ver las cosas desde el punto de vista de otras personas" (Taylors y Bogdan, 1987, p. 23).

Entendiendo que los significados son productos sociales, asumimos el carácter inacabado, procesual y artesanal de la tarea destinada a mejorar las prácticas, generando tensiones entre marcos conceptuales y esquemas prácticos.

Logramos construir un dispositivo de trabajo con encuentros quincenales con las maestras de dos horas reloj cada uno, las memorias de los encuentros, entrevistas grupales y el focus group. Estas últimas fueron las herramientas exploratorias que nos permitieron, por un lado, conocer un poco más acerca de cómo funciona la enseñanza del cálculo en esos segundos grados, y por el otro, acompañar a este grupo de maestras en su decisión de hacer cambios sin tener aún suficientes certezas para implementarlos en el aula.

El focus group fue una opción metodológica sumamente desafiante y potente, en tanto posibilitó un modo dialogal de interacción entre pares, que tuvo el propósito de recuperar las creencias, los significados, las interpretaciones que se fueron manifestando en cada momento del proceso.

Nuestra posición como investigadoras, fue la de moderadoras de un espacio de comunicación donde pudimos observar y analizar las interacciones. Informaciones, conocimientos, actitudes, memorias, representaciones y emociones se pusieron en juego en estos espacios. En cuanto al tipo de preguntas, y al modo de preguntar, al principio fueron de carácter general, cautas, y el uso de un lenguaje como el que usamos en nuestra vida cotidiana. El qué y el cómo son cuestiones sustanciales para la construcción de un equipo de trabajo, de intercambio, de reflexión, de diálogo, de exploración.

Generamos, a partir de este modo de indagación, una interacción para la toma de consciencia en "el aquí y ahora" partiendo de una lectura en positivo de lo existente "lo que hay" (sin juzgarlo) y produciendo espacios problematizadores de deconstrucción y construcción de significados. Con estos insumos diseñamos un plan de acción que supuso diferentes etapas: planificación de cada encuentro de trabajo, actuación, evaluación para la toma de decisiones y planificación de nuevas acciones. Esta trama espiralada fue consolidando una lógica que orientó el desarrollo del trabajo de campo.

Itinerario del Trabajo de Campo

Para llevar adelante la realización del trabajo de campo, planificamos el dispositivo mencionado a partir de algunas dimensiones que pueden ser miradas desde tres planos: el interinstitucional, el institucional y el docente. En el plano interinstitucional, nos propusimos construir un acuerdo con supervisión ofreciendo durante este período del trabajo de campo horas institucionales y el aval correspondiente. En el plano institucional, mantuvimos encuentros con el equipo directivo y realizamos entrevistas grupales con el propósito de ir definiendo, progresivamente, el objeto de la indagación. Finalmente, en el plano docente, planificamos seis encuentros quincenales con las tres docentes de segundo grado y la maestra de apoyo.

Los modos de documentar las acciones realizadas fueron variados: una hoja de ruta para los momentos de trabajo con las maestras; grabación de los encuentros; documentos compartidos en Google Docs, bitácoras; videoconferencias con las tutoras del Ciclo vía Skype, y fotografías de distintos momentos de trabajo en aula y con el equipo.

A continuación detallamos los aspectos más relevantes trabajados en cada uno de los encuentros con las cuatro docentes:

- *Primer encuentro*

Iniciamos el encuentro con el análisis de un caso: "Una reunión de padres con la maestra de segundo grado". Entendimos que un caso encierra una posibilidad como herramienta, que permite

instalar una situación que no es propia y que puede interpretarse desde los marcos disponibles. En él se proponía el análisis de producciones de sus hijos. A partir de este análisis, se pudo observar que las docentes analizaban las cuentas desde la clasificación como cuentas "con dificultad" y "sin dificultad". De acuerdo a cómo las explicaron, lo único que operaba era el agrupamiento de unidad, decena, centena, como meta a ser presentado en el aula. Desde su perspectiva, el multibase les permitía un sistema de transmisión bien organizado para esos propósitos: agrupamiento, canjes, cuentas sin dificultad para llegar a la cuenta con dificultad. Desde su concepción, la suma y la resta se trabajan en forma sucesiva y no simultánea.

Como estrategia para ampliar las alternativas del tratamiento del cálculo aditivo, les propusimos que analizaran -para el encuentro siguiente- un juego que requiere la realización de composiciones y descomposiciones aditivas en contexto de dinero.

- *Segundo encuentro*

Las docentes optaron por trabajar en el aula el problema planteado en el caso y no el juego propuesto en el encuentro anterior. Aparecieron producciones de los alumnos de los distintos segundos vinculados a problemas que las maestras inventaron a raíz de la cuenta que estaba presente en el caso. En esta oportunidad se recuperó el valor social del intercambio y la importancia de gestionar espacios de discusión en la clase de matemática.

Como cierre de ese encuentro nos llevamos la idea que no saben cuál es el alcance del cálculo al que desean llegar en segundo grado, poniendo en evidencia el nivel de incertidumbre que tienen al respecto.

Las cuatro maestras acordaron trabajar un problema común en los tres grados que serviría de insumo para el encuentro siguiente.

- *Tercer encuentro*

Se retomó la elaboración y puesta en aula de la siguiente situación: "Se organizó una rifa para la fiesta de la escuela. El tercer grado juntó 38$ y el segundo grado 45$. ¿Cuánto juntaron en total?".

Al contrastar las resoluciones de los alumnos se abrió un proceso de reflexión en torno a los diferentes procedimientos. Se abrió una nueva dimensión de análisis y un nuevo objeto de enseñanza: la escritura del cálculo, poniendo en tensión la representación mental y el registro escrito de la cuenta. A partir de ese momento aparecieron otros posibles, ensayando modos más ajustados para registrar los cálculos.

Como propuesta para el encuentro siguiente, acordamos con las maestras avanzar juntas en la construcción de acuerdos para explicitar el alcance del tratamiento del cálculo en la planificación anual de los segundos grados.

- *Cuarto encuentro*

En ese momento del itinerario de trabajo, decidimos hacer "una pausa" para mirarnos, y recuperar el proceso desarrollado hasta entonces. Acordamos hacer un punteo en un afiche y les pedimos a las maestras que lo completaran incorporando sus propias consideraciones. La idea fue reflexionar acerca de qué recuperamos de los encuentros y cómo nos veíamos como grupo.

Los aspectos relevantes que fuimos explicitando han sido, por un lado, las resonancias que quedaban de los encuentros, para reconocerlas como puntas que se abrieron y que nos permitieron ir armando la trama, entendiendo que lo que resuena es aquello que nos lleva a la búsqueda, a tomar decisiones. Por otra parte, el proceso de escuchar lo que hacen otras pone de manifiesto la confianza, la apertura para animarnos a transformar nuestras prácticas y a producir colectivamente.

Asimismo identificamos la variable tiempo en todas sus formas: cuando es lento, cuando se termina, se acelera, se estira, atraviesa los encuentros de trabajo en el aula, con colegas, y se torna significativo cuando la tarea convoca, propone, desafía, desestructura.

Se reconoció el error, como aspecto/lugar que moviliza, motiva el aprendizaje con sentido, con significado, y el lugar de las consignas y la gestión de la clase, instalando la potencia del debate colectivo en la clase de matemática.

La propuesta inicial de este encuentro había sido planificar en forma conjunta; sin embargo, las maestras comentaron que habían diseñado e implementado en el aula un problema de resta, viniendo al encuentro con las producciones de los alumnos. Analizamos entonces ese problema y la relación con las respuestas, confrontando qué fue lo esperado por ellas y lo realizado por los alumnos.

A partir de dicho análisis, se acordó la elaboración de una secuencia de problemas, en el contexto del dinero y fuera de él, en el marco de un proyecto de salida al supermercado para diseñar y llevar a cabo en aula la realización de una receta de cocina.

- *Quinto encuentro*

Como punto de partida se analizó la secuencia de problemas. Al confrontar los enunciados, se instaló la necesidad de conocer si esa secuencia incluía distintos tipos de problemas asociados a las estructuras aditivas. Con la intención de ofrecer un marco desde el cual realizar el análisis,

propusimos trabajar un material bibliográfico como marco teórico referente a la tipología de problemas en las estructuras aditivas.

- *Sexto encuentro*

En un primer momento propusimos la recuperación del proyecto de la salida al supermercado y la elaboración de la receta de bombones. Posteriormente se seleccionó una situación de clase donde se había trabajado con un problema de relación de medidas. Ello permitió analizar las interacciones entre maestras y alumnos, haciendo foco en el contraste entre los procedimientos anticipados por ellas, y los que efectivamente desplegaron los estudiantes.

A modo de cierre de los espacios de encuentro se propuso, por una parte, la elaboración de un texto escrito en primera persona para evaluar el proceso de trabajo compartido. Por otra parte, considerando que estábamos en la etapa final del trabajo de campo, intentamos promover un espacio de reflexión para diseñar estrategias que les permitieran -a ellas- dar continuidad a la lógica del trabajo compartido.

Algunas Construcciones Provisorias

Para organizar de algún modo la abundante y rica información recabada a lo largo de los seis encuentros de trabajo, elaboramos algunas categorías que se desprenden del marco referencial anterior y son las siguientes:

a) El objeto matemático y su enseñanza. Dentro de esta categoría nos interesó focalizar la mirada en las siguientes cuestiones: el uso del material concreto, el lugar de los problemas, el tratamiento de los algoritmos y el registro escrito del cálculo como asunto de la enseñanza.

b) Sujetos de la enseñanza y el aprendizaje matemático. En esta categoría centramos la mirada en la diversidad de producciones, su análisis y comprensión, los recorridos de las docentes y el lugar de la experiencia en el aprendizaje y en la enseñanza.

Las voces de las maestras nos han permitido constatar que, en los proceso de cambio, difícilmente se puede hablar de rupturas definitivas, entre las prácticas y nociones anteriores y aquellas que se plantean como diferentes.

> El acercamiento a "lo nuevo" necesariamente se hace desde lo ya establecido; la mirada que se pone sobre "lo otro" está enfocada por las experiencias y saberes anteriores, es desde ahí que se regula, dosifica y adapta aquello que desde un principio puede resultar ajeno (Block *et al*, 2007, p.756).

La sensación de sostén en el trabajo en equipo, el hecho de tener interlocutores con quienes compartir, con quienes hablar, la identificación de los procesos que se pusieron en juego, permitieron un trabajo de metacognición desde el cual se pudo dimensionar la potencialidad que ofrece el trabajo en colaboración, a la hora de pensar nuestras prácticas de enseñanza en la escuela.

Reflexiones Finales

Como ya hemos mencionado, los encuentros con las maestras se desarrollaron en un modo dialogal de interacción entre pares. En la posición investigativa que asumimos, el estilo de interrogación tuvo el propósito de recuperar las creencias, los significados y las interpretaciones que se iban poniendo de manifiesto en cada momento del proceso.

El diseño del dispositivo de acompañamiento nos brindó la oportunidad de ver cómo ellas iban cambiando y tomando decisiones, y a la vez nos ayudó a tomar consciencia de que los procesos de cambio son muy lentos. En ese sentido, interpretamos esta etapa de la trayectoria formativa de estas maestras, como un momento de su formación que, en su carácter de inacabada, supone necesariamente un proceso en continuidad, que no debería quedar librado al voluntarismo y mucho menos, hacerse en soledad.

En este itinerario pudimos conocer, con mayor nivel de profundidad, lo que acontece en el aula real de la escuela primaria con los sujetos inmersos en ella, particularmente estas maestras, y que conforman el contexto en el cual las secuencias didácticas "puras" toman cuerpo y se ponen en funcionamiento. El desafío del trabajo compartido con las maestras nos permitió meternos en sus lógicas para trabajar desde adentro, desde lo que verdaderamente está ocurriendo, está pasando, para poder interrogarnos y construir respuestas.

Esta vivencia nos llevó a ampliar nuestras miradas y a realizar acciones que interrumpieron la rutina. Pudimos reconocer y extender nuestros marcos interpretativos, interpelando nuestras prácticas como formadoras de maestros.

Consideramos que el camino que recorrimos nos brindó aprendizajes que podrían integrarse en dos ideas que consideramos estructurantes: aprender a utilizar el conocimiento en situación y aprender a situarnos frente al conocimiento, al propio y al de los otros/as.

> Sólo hay formación cuando uno puede tener un tiempo y un espacio para un trabajo sobre sí mismo. La experiencia de un trabajo profesional sólo puede ser formadora para aquel que lo lleva a cabo si encuentra los medios de volver, de rever lo que ha

hecho, de hacer un balance reflexivo. Reflexionar es al mismo tiempo reflejar y tratar de comprender, y en ese momento sí hay formación (Ferry, 1997, p. 56).

Referencias bibliográficas

Block, D., Moscoso, A., Ramírez, M., y Solares, D. (2007). La apropiación de innovaciones para la Enseñanza de las Matemáticas por maestros de educación primaria. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, *12(33)*, 731-762.

Documento Metodológico Orientador para la Investigación Educativa. Recuperado el 9 de Abril de 2014 de http://cedoc.infd.edu.ar/upload/Documento_metodologico_investigacion.PDF.

Ferry, G. (1997). *Pedagogía de la formación.* Formación de Formadores. Buenos Aires: Novedades Educativas.

Taylors, J. y Bogdan, R. (1987). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación.* Buenos Aires: Paidós.

APLICACIÓN DE ETNOMATEMÁTICAS PARA LA FORMACIÓN DE PROFESORES QUE TRABAJAN EN ENTORNOS INDÍGENAS

María Elena Gavarrete Villaverde
Universidad Nacional. Costa Rica
marielgavarrete@gmail.com

Resumen. Este documento describe algunos resultados de la tesis doctoral titulada 'Modelo de aplicación de etnomatemáticas en la formación de profesores para contextos indígenas en Costa Rica', presentada en enero del 2013 en la Universidad de Granada, España. Dicho trabajo plantea la importancia de impulsar la difusión de los aspectos relacionados con la herencia del conocimiento cultural indígena que tiene relación con el conocimiento matemático, para propiciar la dignificación del conocimiento ancestral; a través de una adecuada formación profesional que contribuya a reforzar las identidades culturales desde el entorno escolar
Palabras clave: formación de profesores, etnomatemáticas indígenas, diversidad sociocultural
Abstract. This paper describes some results of the thesis entitled 'Apply of teacher training model on ethnomathematics for indigenous contexts in Costa Rica', presented in January 2013 at the University of Granada, Spain. It discusses the importance of promoting the dissemination of aspects of indigenous cultural heritage knowledge that is related to mathematical knowledge, to promote the dignity of ancestral knowledge, through of adequate teacher training to help strengthen indigenous cultural identities from the school environment
Key words: teacher training, indigenous ethnomathematics, sociocultural diversity

Introducción

Este documento trata sobre Etnomatemáticas en Costa Rica y muestra algunos resultados de la tesis doctoral de Gavarrete (2012), en la cual se diseña, implementa y evalúa un modelo de formación profesional que atiende la diversidad sociocultural en la educación matemática para contextos indígenas.

La investigación expone la importancia de impulsar la difusión de los aspectos relacionados con la herencia del conocimiento cultural indígena que tiene relación con el conocimiento matemático, para propiciar la dignificación del conocimiento ancestral y promover una adecuada formación profesional que contribuya a reforzar las identidades culturales desde el entorno escolar.

Históricamente en el modelo de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en las escuelas indígenas de Costa Rica se da un choque metodológico, pues los estudiantes quieren aprender de forma holística y utilizando el entorno escolar de acuerdo con su cultura y su cosmovisión; sin embargo, la estructura curricular que impone el maestro es distinta, pues aborda las asignaturas por separado y las lecciones ocurren siempre en el salón de clase (Torres et al, 2007).

Ante esto, el trabajo de Gavarrete (2012) pretende contribuir, desde la perspectiva de las etnomatemáticas y la formación de profesores, a valorar la interculturalidad como un elemento trascendental de la acción pedagógica. Para ello en la investigación se propone un modelo que

promueve la 'contextualización activa' y que concibe al docente como un profesional comprometido que investiga, analiza, se encultura matemáticamente y realiza acciones didácticas convenientes al entorno escolar, adecuando la estructura curricular y planificando situaciones significativas de aprendizaje, de acuerdo a: la realidad etnolingüística, la cosmovisión cultural y las potencialidades de sus estudiantes.

La investigación de Gavarrete (2012) plantea una serie de premisas y conjeturas que señalan la preeminencia de una visión monocultural de corte eurocentrista que impera en la educación matemática costarricense y en la formación profesional de esta disciplina; y a la vez, plantea la necesidad de motivar procesos de reflexión sobre la matemática en las culturas, así como también la necesidad de promover la aplicación de etnomatemáticas en los procesos de formación de profesores con la finalidad de exaltar la acción pedagógica y combatir la exclusión promovida por un currículo monocultural. Se defiende que la Etnomatemática y la Etnodidáctica (Oliveras, 1996) son alternativas para combatir la exclusión, en este caso atendiendo la interculturalidad como parte importante en el proceso de la formación de profesores.

Con la aplicación de este modelo para formar docentes se persigue proponer una estrategia de acción educativa que no amenace las raíces ancestrales de los contextos indígenas costarricenses, y a la vez, no los limite o excluya dentro del panorama globalizado de la Educación Matemática mundial.

Etnomatemática, Conocimiento Matemático Cultural y Aspectos Didácticos

Partimos de que la etnomatemática para D'Ambrosio (1985, 1997, 2004, 2005, 2007, 2008) no significa el estudio de las "matemáticas de las diversas etnias", por tanto plantea que la esencia del Programa de Etnomatemática es el estudio de las "distintas formas de conocer".

A partir de la idea anterior, Gavarrete (2012) se preocupa por estudiar las "maneras de conocer" que ha identificado la cosmovisión de tres grupos indígenas costarricenses: Ngäbes, Bribris y Cabécares; y plantea el constructo del 'Conocimiento Matemático Cultural', en el cual las 'etnomatemáticas indígenas vivas' (Gavarrete, 2012) se conciben como unas matemáticas que tienen un sentido holístico de la realidad y que permiten establecer una estructura conceptual por medio de la cual conciben, relacionan y representan el mundo y las relaciones entre los objetos tangibles e intangibles que componen ese mundo, además de que, como las "matemáticas vivas" (Oliveras, 1996, 2000, 2006) tienen vigor en el contexto histórico, geográfico y social.

El Conocimiento Matemático Cultural (CMC) es caracterizado por Gavarrete (2012) a través de una serie de atributos: "es versátil y dinámico, holístico y transdisciplinar, contribuye a definir el

comportamiento humano y es una herramienta para la sobrevivencia y la trascendencia dentro de un grupo cultural" (p. 52).

El CMC se considera versátil y dinámico porque ocurre de manera diferente en culturas y épocas distintas; es holístico y transdisciplinar porque trabaja sobre un modelo que se compone de saberes en distintas áreas, que se elabora y aplica de adentro hacia afuera con un carácter integrador. Además el CMC se considera como un recurso para la sobrevivencia y la trascendencia porque organiza los aprendizajes para enfrentar el presente y recurre a la memoria para solventar el futuro; de esta forma, en el proceso de adquisición y elaboración de conocimiento, el presente se entiende como resultado de un proceso individual y cultural.

En relación al plano educativo, Gavarrete (2012) concibe la Etnomatemática como una vertiente de la Didáctica de la Matemática que estudia el desarrollo del conocimiento de un grupo cultural, regido por una tradición mítica y cosmogónica, que define sus comportamientos a partir de la manera de percibir e interpretar el mundo y las relaciones tangibles e intangibles de los elementos del mundo.

En los entornos indígenas debe promoverse un equilibrio intercultural y el acceso a la educación debe ser para todos, considerando que el proceso de enseñanza debe suponer la herencia ancestral y las particularidades de la cosmovisión y de la lengua; pues éstas determinan una manera distinta de comprensión del mundo y de las relaciones que hay en él, así como la manera de representar o comunicar dichas relaciones.

Contextualización de la Investigación: Integrando CMC y Formación Docente

La investigación de Gavarrete (2012) contempló dos propósitos fundamentales, el primero de ellos fue identificar y caracterizar el conocimiento matemático cultural de algunos grupos étnicos de Costa Rica, y el segundo fue proponer un modelo para la formación de profesores que trabajan en entornos indígenas, en el que intervenga el conocimiento de sus Etnomatemáticas propias.

Esta investigación se sitúa en el Programa de Etnomatemáticas y pone de manifiesto un desafío por desarrollar acciones para la Educación Matemática Intercultural en Costa Rica. En particular, se abordó la problemática que enfrenta la Educación Rural Indígena de este país, la cual está sujeta a unas razones sociológicas y políticas, que generan una encrucijada entre la imagen identitaria y las dificultades por asumir la multiculturalidad costarricense en el desarrollo curricular (Gavarrete, 2012).

Respecto al desarrollo de la investigación, se llevaron a cabo cinco estudios integradores: el primero de ellos consistió en un estudio etnológico, es decir una comparación de etnografías, a

partir de una cartografía sociocultural de las matemáticas indígenas en los pueblos Ngäbe, Bribri y Cabécar (Mauss, 1974, Hernández-Sampieri, 2006). Sirvieron como fundamento empírico y guía para el diseño del modelo, tres diagnósticos elaborados desde el nivel macro hasta el nivel micro, para recabar elementos relacionados con la contextualización del diseño del modelo formativo. Por último, el quinto estudio consistió en una etnografía de aula con maestros indígenas, en la cual se implementó y evaluó el modelo de formación basado en etnomatemáticas.

La caracterización del Conocimiento Matemático Cultural se realizó in situ por parte de los maestros indígenas, a través de un inventario de signos culturales (Oliveras, 2005, 2006) con potencial de estudio desde las etnomatemáticas. Estos hallazgos fueron profundizados a través del estudio etnológico sobre las etnomatemáticas de los grupos étnicos implicados.

Se pudo concluir que el Conocimiento Matemático Cultural Indígena se puede identificar en expresiones culturales del patrimonio tangible e intangible de los grupos estudiados y además se puede afirmar que es un conocimiento axiomático regido por el conocimiento cosmogónico, donde el aprendizaje adquiere un carácter riguroso, secuencial y vigilado.

Otro elemento importante es que el CMC pervive gracias a la tradición oral, que recurre a elementos cosmogónicos para construir sistemas de representación de sus abstracciones, es decir, que el mundo físico es el sistema de representación del mundo mítico, y, dado que son culturas ágrafas, utilizan en su estructura lingüística un sistema clasificatorio de objetos, donde la forma geométrica o el sistema de ubicación espacial cobra relevante importancia. Es por esto que Gavarrete (2012) incorpora la actividad de 'Clasificar' como un elemento esencial descriptor del CMC, complementado por las seis actividades matemáticas universales planteadas por Bishop (1998, 1999, 2000): contar, medir, localizar, diseñar, jugar y explicar.

Tejiendo un entramado de teoría y hallazgos del trabajo etnográfico, Gavarrete (2012) plantea una propuesta didáctica multicultural y transdisciplinar que integra las dimensiones del Programa de Etnomatemáticas (D'Ambrosio, 2008), así como los elementos teóricos acerca de enculturación matemática (Bishop, 1999), y que se materializa a través de microproyectos para la educación intercultural (Oliveras, 2005).

El diseño del "Modelo del Curso de Etnomatemáticas para formar Maestros de Entornos Indígenas" (MOCEMEI) es una etapa de la investigación que se fundamenta en los estudios exploratorios y el trabajo etnográfico realizado.

El modelo MOCEMEI se inspiró en el modelo MED planteado por Oliveras (1996), donde se promueve formar al docente como un investigador de su propio proceso de enculturación, pues la investigación sobre las ideas que subyacen en las prácticas de sus propias culturas, a través del

estudio de las diversidades culturales, étnicas y lingüísticas les proporcionan herramientas para conducir la enseñanza a partir de los hallazgos y contribuir con un entendimiento mutuo y el respeto por la valía del propio conocimiento matemático cultural, dando mérito a sus propios saberes y propiciando actividades contextualizadas con tareas que integren las etnomatemáticas occidentales y los resultados del proceso de enculturación y orientándolos a una propuesta curricular donde los materiales de enseñanza estén situados en una estructura epistemológica que relacione los contextos locales, nacionales e internacionales y propicie nuevas vías en el aprendizaje significativo en los estudiantes.

Matemática Sociocultural: Desafíos Educativos en la Formación Profesional

El modelo MOCEMEI se diseñó en España entre 2010 y 2011, fue implementado en Costa Rica durante el segundo semestre del año 2011, en la carrera de Educación con énfasis en lengua y cultura Cabécar, y fue evaluado en España durante el primer semestre del año 2012.

Durante la implementación del modelo MOCEMEI se aplicó un diseño instruccional que pretendió promover una reconceptualización didáctica a través del desafío planteado a los maestros en formación por reflexionar acerca de cuáles eran las conexiones significativas de existencia entre constructos matemáticos, el conocimiento cultural y el currículum de matemáticas. Así, los maestros indígenas participantes experimentaron una nueva posibilidad de abordaje de la tarea profesional, en la cual fueron dinamizadores y acompañaron a sus estudiantes en los descubrimientos y en la experiencia de 'descongelar' las matemáticas implícitas en el conocimiento cultural.

Respecto a la implementación se concluye que el modelo MOCEMEI es válido para los tres grupos étnicos, está fundamentado teórica y empíricamente a través de los diagnósticos y el estudio etnológico realizado. Además se considera pertinente porque permite visibilizar el Conocimiento Matemático Cultural Indígena, fortalece la identidad cultural y aporta a la formación de profesores desde la visión intercultural de las matemáticas.

Como aspectos relevantes de la evaluación cabe destacar que los docentes en formación reflexionaron sobre su práctica docente y experimentaron una pedagogía multicultural, además, a alteridad cultural desarrollada por la investigadora, que a su vez fue también formadora, promovió el empoderamiento docente sobre el Conocimiento Matemático Cultural de los profesores en formación.

En general, la incorporación de la Etnomatemática en la Acción Didáctica en Costa Rica se percibe y evalúa en tres planos:

- Incorporar en el currículum elementos del entorno sociocultural, propicia el factor motivacional en el aprendizaje (Presmeg, 2007, Gerdes, 1996), potencia la competencia de planificación docente (Rico et al, 2008), facilita la incorporación del componente sociocultural en la malla curricular (Gerdes, 1985, 1996) y denota un cambio en el dominio afectivo (Gómez Chacón, 2000) del aprendizaje matemático.
- Incorporar las ideas matemáticas de otras culturas en la cotidianeidad potencia la propia idiosincrasia cultural en interconexión con las otras culturas (Oliveras, 2006) y permite reflexionar sobre el papel de la matemática en la alteridad cultural (Vergani, citada por D'Ambrosio, 2008), a la vez que fortalece la autonomía cultural indígena, con lo cual se guarda coherencia con los desafíos propuestos por la UNESCO (2012) respecto la atención a la diversidad y la propuesta por evitar la exclusión y el aislamiento y ayudar a los alumnos a ver cómo las matemáticas tienen un valor universal que puede potenciar el acercamiento de pueblos y culturas y contribuir a la capacitación mutua comprensión y colaboración.
- Incorporar el componente sociocultural en los programas de formación docente permite concebir la matemática como una actividad humana (Markarian, 2003) propia de todas las culturas, también como un fenómeno social, al atribuirle una visión funcional en la noción de prácticas matemáticas (D'Ambrosio, 2007, 2008) y permite fortalecer los valores de las matemáticas (Bishop, 1988).

En general, la inclusión del conocimiento relacionado con etnomatemáticas en la formación de los maestros indígenas contribuyó en su desenvolvimiento profesional, en torno a la idea del maestro-investigador etnomatemático, ya que los participantes del estudio desarrollaron aptitudes para investigar las prácticas matemáticas vinculadas a su cultura, con lo cual adquirieron herramientas para proponer una contextualización curricular, que contiene una visión transdisciplinar del conocimiento y una reflexión sobre el papel sociocultural de las matemáticas en la construcción del conocimiento en el entorno escolar indígena.

Las competencias multiculturales promovidas a través del desarrollo del modelo MOCEMEI sirven como herramienta para el diseño contextualizado de nuevas estrategias pedagógicas que procuran el respeto por el conocimiento matemático cultural indígena, ya que esta propuesta formativa alienta el uso de distintos materiales y fomenta niveles de reflexión profesional (Bishop, 1995, 1999) relacionados con la valorización del conocimiento indígena y las implicaciones éticas de la investigación durante el proceso de enculturación.

Esta visión axiológica implica considerar que la educación multicultural se nutre de la noción de que es perfectamente posible, deseable y provechoso, un mutuo enriquecimiento y contribución entre las referidas culturas funcionales instrumentales y de todo tipo, para la creación de un producto terminal cada vez más integral y pleno, independientemente de la rama del conocimiento de que se trate.

Reflexiones Finales

En el trabajo de investigación desarrollado por Gavarrete (2012) se difunden algunos aspectos relacionados con la herencia del conocimiento cultural indígena que tienen relación con el conocimiento matemático, y estos hallazgos persiguen dignificar el conocimiento ancestral a través de una adecuada formación profesional en etnomatemáticas, para plantear que la visión sociocultural de las matemáticas permite reforzar las identidades culturales y contribuir a enaltecer la acción didáctica en los contextos diferenciados.

El desarrollo del modelo MOCEMEI es un intento por desafiar la creatividad docente de los maestros indígenas en formación, a través de la invitación por conducir la conceptualización de los contenidos matemáticos hacia el currículum escolar de una nueva forma que integre o promueva distintas posibilidades de abordar las prácticas matemáticas.

Los elementos que aporta Gavarrete (2012) no pretenden ser exhaustivos ni definitivos, pues el carácter pionero del estudio requiere de un seguimiento que permita alcanzar resultados más profundos, sobre el Conocimiento Matemático Cultural Indígena; en particular, sobre los enigmas que confiere el estudio del lenguaje desde la visión etnomatemática y sobre los significados asociados al conocimiento del mito en la estructura cosmogónica indígena, que describe otra lógica de comprensión de la realidad.

El trabajo expuesto suscita reflexiones respecto al papel de la etnomatemática en la formación profesional y plantea nuevos desafíos de investigación y acción pedagógica, que constituyen la visión prospectiva de nuevas investigaciones en el área.

Referencias bibliográficas

Bishop, A. (1988). Mathematics education in its cultural context. *Educational Studies in Mathematics, 19*, 179-191.

Bishop, A. (1995). Educando a los culturizadores matemáticos. *Revista UNO, 6*(2), 7-12.

Bishop, A. (1998). Equilibrando las necesidades matemáticas de la educación general con las de la instrucción matemática de los especialistas. *SUMA, 27*(1), 25-37.

Bishop, A. J. (1999). *Enculturación matemática, la educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidós.

Bishop, A. (2000). Enseñanza de las matemáticas: ¿cómo beneficiar a todos los alumnos? En N. Gorgorió, A. Deulofeu y A. Bishop (Eds.), *Matemáticas y educación: Retos y Cambios desde una perspectiva internacional,* (pp. 35-56). Barcelona: Graó.

D'Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. *For the Learning of Mathematics, 5* (1), 44-48.

D'Ambrosio, U. (1997). Globalización, educación multicultural y etnomatemática. En UNESCO-Santiago (Ed.), *Conocimiento matemático en la educación de jóvenes y adultos. Jornadas de reflexión y capacitación sobre la matemática en educación* (pp.13-26).Santiago de Chile, UNESCO-Santiago-OREALC. Recuperado el 02 de agosto de 2012 de http://unesdoc.unesco.org/images/0011/001159/115928so.pdf.

D'Ambrosio, U. (2004). Educación matemática, etnomatemática i pau. *Perspectiva Escolar*, *284*, 15-22.

D'Ambrosio, U. (2005). Sociedade, cultura, matemática e seu ensino. *Educação* e *Pesquisa, 31*(1), 99-120.

D'Ambrosio, U. (2007). La matemática como ciencia de la sociedad. En J.Giménez, J.Diez-Palomar, M. Civil (Eds.), *Educación Matemática y Exclusión* (pp.83-102). España: Graó.

D'Ambrosio, U. (2008). *Etnomatemática. Eslabón entre las tradiciones y la modernidad.* México: Limusa.

Gavarrete, M.E. (2012). *Modelo de aplicación de Etnomatemáticas en la Formación de Profesores para Contextos Indígenas de Costa Rica*. Tesis Doctoral no publicada, Universidad de Granada, España.

Gerdes, P. (1996). Chapter 24: Ethnomathematics and Mathematics Education. En A. Bishop et al. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp.909-943). Holanda: Kluwer Academics Publishers.

Gómez Chacón, I. (2000). *Matemática emocional. Los efectos en el aprendizaje matemático.* Madrid: Narcea

Hernández Sampieri, R. (2006). *Metodología de la investigación.* México: McGraw Hill.

Markarian, R. (2003). *La dimensión humana de la matemática, ensayos sobre matemática y cultura*. México: Ediciones la vasija.

Mauss, M. (1974). *Introducción a la Etnografía* (2ª ed.). Madrid: Ediciones Istmo.

Oliveras, M.L. (1996). *Etnomatemáticas. Formación de profesores e innovación curricular*. Granada: Comares.

Oliveras, M.L. (2000). Etnomatemáticas. En J. Fuentes y M. L. Oliveras (Eds.), *Matemáticas en la Sociedad*. (pp. 39-50). Repro-digital Constitución: Granada.

Oliveras, M.L. (2005). Microproyectos para la educación intercultural en Europa. *Revista UNO*, *38*, 70-81.

Oliveras, M. L. (2006). Etnomatemáticas de la multiculturalidad al mestizaje. En J. Goñi (Eds.), *Matemáticas e interculturalidad* (pp.117-149). Barcelona, España: Grao.

Presmeg, N. (2007). The role of culture in teaching and learning mathematics. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.435-458). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Rico, L.; Marín, A.; Lupiañez, J.L. y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en Secundaria: el caso de los números naturales. *Suma (58)*, 7-23.

Torres, R., Morales, J. y Ovares, S. (2007). La pedagogía intercultural en los territorios indígenas de Costa Rica. *Educare* (Volumen extraordinario II), pp.195-206 Recuperado el 20 de marzo de 2011, de http://www.revistas.una.ac.cr/index.php/EDUCARE/article/view/1392

UNESCO (2012). *Challenges in basic mathematics education*. París: UNESCO. Recuperado el 10 de agosto de 2012 de http://unesdoc.unesco.org/images/0019/001917/191776e.pdf.

SIGNIFICADOS DEL CONOCIMIENTO GEOMÉTRICO QUE CIRCULA EN EL NIVEL MEDIO Y EN LA FORMACIÓN INICIAL DEL PROFESOR EN MATEMATICAS: UN PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Julia Edith Corrales y Silvia Catalina Etchegaray
Universidad Nacional de la Patagonia Austral-UACO. Argentina
julia_corrales@hotmail.com, setchegaray@exa.unrc.edu.ar

Resumen. Esta investigación científica, hace foco en la necesaria articulación de la formación del profesor con su gestión en el nivel en el que desarrolla su actividad profesional. Para ello trata de estudiar y analizar el funcionamiento de la enseñanza del saber geométrico en su conjunto. La investigación está centrada en la exploración de significados institucionales y personales correspondiente al campo de la geometría que "vive" en la escuela media y en la formación inicial del profesor en matemática correspondiente a la zona del Golfo San Jorge de Argentina (Provincias de Chubut y Santa Cruz). Se pretende arribar a algunos criterios idóneos para analizar y rever los planes de estudio para la formación de docentes de Nivel Medio, fundando algunas recomendaciones de tareas/situaciones/cuestiones, técnicas y tecnologías del desarrollo teórico de la Geometría que debieran estar presentes en dicha formación, desarrollar un conjunto de prácticas geométricas para la formación inicial de los profesores en matemática
Palabras clave: análisis, significados, geometría, formación docente
Abstract. This scientific investigation focuses on the necessary articulation of teacher education with the teacher's performance in the level in which he develops his professional activity. For such purpose, the functions of Geometry teaching as a whole are studied and analyzed. The investigation is centered on the exploration of institutional and personal meanings corresponding to the field of Geometry as taught in middle school and in the initial training of teachers of Mathematics belonging to the Golfo San Jorge area in Argentina (provinces of Chubut and Santa Cruz). The intention is to find some appropriate criteria so as to analyze and review the education programs corresponding to the training of middle level teachers; to establish some recommendations as regards tasks/situations/issues, techniques and technologies of the theoretical development of Geometry that should be considered for such training, and to develop a set of Geometry practices for the initial training of teachers of Mathematics
Key words: analysis, meanings, geometry, teacher education

Introducción

La presente investigación se interesa en la formación del Profesor en Matemática para el Nivel Medio en la zona sur de la Patagonia, en la transposición de los saberes aprendidos en geometría en su formación inicial, a los saberes enseñados en la escuela secundaria; el uso de distintos recursos en la construcción del saber geométrico con el objeto de generar y estudiar algunos criterios de idoneidad para lograr una mejor calidad en la formación de profesores.

La reforma de los planes de estudio de la formación inicial de Profesores debe estar sustentada por el estudio de marcos de referencia educativos que atrapen tanto la construcción del conocimiento geométrico por la comunidad de los matemáticos, las investigaciones educativas asociadas a la temática investigada, como las producciones de los formadores de profesores y las que generan los propios docentes (de todos los niveles) en ejercicio, como así también la relación de los significados que portan el uso de distintos recursos.

Se pretende arribar a algunos criterios idóneos para analizar y rever un plan de estudio para la formación de docentes de nivel medio, fundando algunas recomendaciones de tareas/situaciones/cuestiones, técnicas y tecnologías del desarrollo teórico de la Geometría que debieran estar presentes en dicha formación, desarrollar un conjunto de prácticas geométricas para la formación inicial de los profesores en matemática desde un estudio reflexivo sobre los significados personales que emergen cuando dichas prácticas están vinculadas al uso de las nuevas tecnologías.

Marco Teórico y Metodología

Esta indagación se enmarca en el "enfoque ontosemiótico sobre la cognición matemática" a partir de ahora EOS, cuyo principal referente e iniciador es el Dr. Juan Díaz Godino (2002).

En diversos trabajos, Godino y colaboradores (Godino,Batanero,1994; Contreras, Font, Luque y Ordóñez, 2005; Font y Ramos, 2005; Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Font y Wilhelmi, 2006, Godino, 2011; Font, Godino y Gallardo, 2013) han elaborado un sistema de nociones teóricas y categorías sobre la naturaleza, origen y significado de los objetos matemáticos desde una perspectiva educativa, tratando de articular de manera coherente las dimensiones epistémica (significados institucionales o socioculturales) y cognitiva (significados personales, psicológicos o individuales). Estas nociones y categorías se convierten en eficaces herramientas que nos ayudan a operativizar diversos actos de investigación sobre problemas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en particular para este proyecto en el área del conocimiento geométrico.

La actual propuesta está centrada en la exploración de significados institucionales y personales correspondiente al campo de la geometría que "vive" en la escuela media y en la formación inicial del profesor en matemática.

La cuestión que, con tanta generalidad, proponemos tratar en este proyecto nos enfrenta necesariamente a tener que explicar qué significa desde nuestro punto de vista explorar significados en dichos espacios educativos. Es en ese sentido que formularemos una breve síntesis que caracterice los principales constructos teóricos sobre los que se sustenta y se desarrolla esta investigación. En efecto, los significados institucionales / personales en este enfoque (EOS) son interpretados como "los sistemas de prácticas operativas y discursivas que se ponen en juego en una institución / por una persona, para resolver una cierta clase de situaciones – problemas" Díaz Godino et al. (1994).

De los sistemas de prácticas matemáticas operativas y discursivas emergen nuevos objetos que provienen de las mismas y que dan cuenta de su organización y estructura. Teniendo en cuenta la faceta institucional y personal que poseen los significados, también podemos hablar de -objetos

institucionales- cuando los sistemas de prácticas son compartidos en el seno de una institución, mientras que si corresponden a una persona o sujetos serán calificados como objetos personales.

El EOS considera la siguiente tipología de objetos matemáticos primarios: lenguaje, situaciones-problemas, conceptos-definición, proposiciones, procedimientos y argumentos, cuyos seis procesos primarios se organizan en entidades más complejas para constituir sistemas conceptuales y teorías (Font, Rubio y Contreras, 2007). Se relacionan entre sí formando configuraciones, definidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos constituyen los elementos de significado de un objeto matemático. Estas configuraciones pueden ser epistémicas si son redes de objetos institucionales, o cognitivas si representan redes de objetos personales.

Estos significados son descritos mediante configuraciones de objetos que intervienen y emergen de los sistemas de prácticas, Godino et al (2006) que tratan de modelizar las relaciones dialécticas que conforman los procesos de enseñanza y aprendizaje. De esta manera estas redes de relaciones, sus objetos emergentes y las propias relaciones entre ellas -en distintos momentos sociales e históricos- nos estarían otorgando posibles indicadores y explicaciones sobre el asunto investigado (Etchegaray, 2010).

Asimismo, la interpretación de estas configuraciones requiere contar con claras herramientas de valoración que permitan captar la singularidad de los procesos de enseñanza y de aprendizaje indagados, determinando qué es "idóneo" desde un conjunto de distintas dimensiones: epistémica, cognitiva, ecológica, afectiva, mediacional (así como la coordinación de estas idoneidades). De esta manera, será posible analizar algunas propuestas de tareas concretas y fundamentadas que permitan incidir en el funcionamiento de los sistemas de prácticas vigentes. Nuestro primer recorte para llevar a cabo nuestro estudio se centra en las dimensiones epistémica y cognitiva, relacionándolas con las facetas personal e institucional.

Consideramos que, tal como es compartido en el ámbito de la investigación en las didácticas específicas, no alcanza con reducir la descripción y explicación de los procesos de enseñanza y aprendizaje a sus componentes conceptuales, procedimentales y actitudinales, como habitualmente está considerado en las distintas instituciones educativas. Frente a ello, pensamos que el enfoque propuesto permite abordar la complejidad de dichos procesos primarios en términos de un conglomerado de situaciones-problema, definiciones, procedimientos, proposiciones, lenguajes y argumentos y sus relaciones efectivas y potenciales, lo que nos posiciona desde otro lugar para analizar epistémica y cognitivamente la relación de diferentes tareas/problemas/situaciones con el uso de diferentes recursos.

La metodología implementada es esencialmente cualitativa. Las herramientas semióticas (sistemas de prácticas institucionales/personales, configuraciones epistémicas y cognitivas) descritas sintéticamente con anterioridad son las que fundamentan y contextualizan teóricamente y metodológicamente esta indagación.

Las mismas se aplicarán, como ya se anticipara, al análisis de procesos específicos de enseñanza-aprendizaje de la geometría en el nivel medio y superior. Se analizarán esencialmente aspectos parciales de procesos de estudio institucional como un texto científico o escolar y producciones personales en torno a tareas geométricas.

Tal como lo sostiene el EOS el centro de atención del análisis didáctico intenta progresar: desde la situación problema (o del concepto/estructura conceptual) a la configuración epistémica/cognitiva, y de ésta hacia la configuración didáctica –que incluye no sólo el saber geométrico y los alumnos sino también el papel del profesor-, los diferentes recursos (TIC) y las interacciones entre los diversos actores del acto educativo. En este marco de complejidad, analizaremos y evaluaremos significados institucionales y personales e identificaremos potenciales conflictos semióticos en los diferentes contextos recortados.

Para la investigación utilizaremos además de procesos de estudios institucionales como los que se mencionaron anteriormente, fragmentos de encuestas, registros de profesores y alumnos, de clases impartidas tanto en el Profesorado en Matemática como en el nivel medio.

Diseño de la Investigación

La Investigación atiende al siguiente problema Didáctico – Matemático:

Débil y escasa presencia de la geometría en las aulas del secundario en la Cuenca del Golfo San Jorge.

La Hipótesis de trabajo sostiene que:

Este problema está íntimamente relacionado con la escasa reflexión epistémica -en la etapa de formación inicial del profesor-, tanto sobre los diferentes elementos de significados que conforman y definen los saberes geométricos, como sobre su evolución.

El principal interrogante que se propone indagar es:

¿Qué aportes vinculados a la comprensión de la racionalidad matemática quedan ausentes en la formación de los futuros docentes de nivel medio, al no establecerse en su formación inicial una relación significativa con los saberes geométricos?

El objetivo general de esta investigación es contrastar los sistemas de prácticas geométricas que desarrollan los propios alumnos del profesorado y los alumnos del nivel medio en relación con los cambios de significados tanto institucionales como personales. Para el logro del mismo se requieren estudios profundos, representativos y de marcos de referencia educativos, que atrapen tanto la construcción del conocimiento matemático - en particular en esta indagación la construcción del conocimiento geométrico - por la comunidad de los matemáticos, las investigaciones educativas asociadas a la temática investigada, como las producciones de los formadores de profesores y las que generan los propios docentes (de los distintos niveles) en ejercicio.

Participantes y Contexto

Participaron en el estudio todos los docentes del área de Geometría, Álgebra, Lógica, Didáctica, Informática y Taller Docente del Profesorado en Matemática de la Universidad.

Alumnos egresados del profesorado, docentes de las escuelas secundarias de la zona de influencia (participaron un 75% del total de las instituciones), la totalidad de los alumnos estudiantes del tercer y cuarto año del profesorado.

Interrogantes y Acciones

Los interrogantes fundamentales planteados en el proyecto que organizaron las fases de acción son:

.¿Qué cambios o avances se produjeron sobre los significados de los objetos geométricos, a partir de su construcción histórica-cultural?

.¿Qué pierden los futuros docentes del "pensar", del "decir", del "hacer" geométrico, como consecuencia de la forma en que se relacionan con la geometría en el marco de su formación inicial?

Acción 1: El rol de la historia de la Geometría para su enseñanza.

Estudio histórico-epistémico para reconocer e indagar los procesos y significados que caracterizaron a la Geometría Griega y Cartesiana.

¿Cómo se estudió? Identificando tipos de problemas, técnicas, nociones, propiedades, argumentos, lenguajes en el proceso histórico en lugar de los objetos acabados, para poder analizar los significados.

Acción 2: Estudio reflexivo sobre la dualidad que vive en la Institución de Formadores entre el conocimiento Matemático y el conocimiento Didáctico.

Se realizó un estudio de problemas planteados en la Tesis de Gascón de la continuidad entre las geometrías sintética y analítica y de un Abanico de Tareas de Geometría Sintética.

¿Cómo se estudió? En particular en esta investigación se analizaron los distintos sistemas de prácticas de la construcción del conocimiento geométrico- por la comunidad de los matemáticos, las investigaciones educativas asociadas a la temática investigada, como las producciones de los formadores de profesores y las que generan los propios docentes específicos (de todos los niveles) en ejercicio.

Acción 3: Construcción y estudio de distintos Sistemas de Prácticas Geométricas para trabajar en la Formación Docente.

Se han estudiado y analizado un conjunto de prácticas geométricas, tanto personales como institucionales, con la finalidad de atrapar y explicar los conflictos que puedan generar.

¿Cómo se estudió? A partir de un análisis epistémico a-priori de los objetos geométricos y sus respectivos significados en la resolución de los problemas para reconocer conflictos potenciales de significados que podrían manifestarse durante la resolución de las tareas, con una de las herramientas de las configuraciones epistémicas y elementos del EOS.

Resultados

Se ha avanzado, en la construcción de modelos epistémicos de referencias sobre los objetos geométricos pertenecientes al pensamiento griego, al euclideano y al cartesiano (Etchegaray, Corrales, Vázquez, 2011) Etchegaray et. al (2012), en la descripción de los elementos de significados de los diferentes currículo de las escuelas secundarias correspondientes al contexto geográfico indagado y en el relevamiento de prácticas de enseñanza de geometría consideradas fértiles por los profesores de las diversas escuelas del nivel medio, como así también de la identificación y caracterización de los problemas que definen el sentido de estas prácticas - desde la perspectiva de los profesores - y también de los alumnos del profesorado.

A partir del estudio y análisis de los límites y restricciones en los elementos de significado inherentes al trabajo de un conjunto de prácticas asociadas a la geometría sintética, la geometría analítica y la pregunta ¿Qué cambios de técnicas van realizándose al pasar de un problema al otro? se puede concluir que:

- Ha permitido confrontar la dualidad que vive en la dialéctica teoría y práctica del hacer en los docentes que participan en el proyecto y sostienen la formación docente. La diferencia de los distintos sistemas de prácticas y los significados que un matemático pone a funcionar al abordar el hacer desde la matemática pura en la docencia universitaria en

relación con las maneras de hacer de estas prácticas geométricas en espacios didácticos-matemáticos.

- El estudio de los significados en el hacer de un matemático y el lugar de dichos significados en el trabajo didáctico nos convocó a otra cuestión y otros interrogantes de suma importancia: ¿La ciencia debe ser entendida sólo como resultado, esto es como teoría? ¿Cómo establecemos la relación teoría-práctica en la Formación docente inicial de un profesor en matemática? ¿El lugar qué ocupa el problema, cuando pensamos en el hacer geométrico, es el mismo lugar que ocupa en aritmética o álgebra? ¿Son los problemas los que regulan los cambios de técnicas o es el lenguaje? ¿Es el contexto o el tipo de pregunta quien regula que la resolución se desarrolle desde una geometría sintética o analítica u otra? ¿Debe abordarse la enseñanza de la resolución de problemas en situaciones donde se abordan construcciones con regla y compás? ¿Y si se resuelven con un software, por ejemplo el Geogebra que debe enseñarse?

Contraponer diferentes sistemas de prácticas personales y hacerlas dialogar como aportes para la Formación Docente Inicial ha generado entre los docentes formadores de formadores el cuestionar desde distintos lugares; la existencia y unicidad del objeto matemático involucrado como producto de las relaciones y procesos puestos en juego. La construcción, en distintos contextos: estático (con lápiz y papel) y dinámico (con Geogebra) produce rupturas con significados afianzados, instituidos, como así también, genera significados contextuales propios.

Algunas Ideas/Aportes para la enseñanza que se conciben importantes:

Generar prácticas gestionadas de tal forma que "obligue" al mismo tiempo, por ejemplo, pensar sobre la relación entre el "particular" planteado por el alumno con el "general" previsto por el docente, la "parte" seleccionada para la exploración "singular" de cada estudiante con el "todo" sintetizado desde el saber matemático.

A continuación, presentamos una situación trabajada como modo de ejemplo del estudio realizado: ¿Es posible construir un paralelogramo dado dos lados consecutivos y la diagonal?

Se solicitaba su resolución con lápiz y papel y también utilizando el software libre Geogebra, a los fines de analizar comparativamente los diferentes elementos de significados que se ponen a funcionar dependiendo del contexto (estático o dinámico respectivamente) en el cual se encuadran las prácticas matemáticas. Producción de conocimiento de como viven la Prácticas Operativas y Reflexivas en la Formación Docente, la articulación entre lo que se dice, de lo que se hace, de las reglas que se imponen y de las razones que se dan en los distintos espacios (Geometría I, II, Didáctica, Optativas I y II, Fundamentos de la Matemática y otros).

La relación entre la desigualdad triangular y el teorema del coseno surge como un emergente al hacer "dialogar" prácticas didáctico-matemáticas en diferentes contextos: estático (con lápiz y papel) y dinámico (con Geogebra).

La Desigualdad Triangular "nos asegura que existe", en cambio el Teorema de Coseno nos dice "existe y es este el paralelogramo". Ante esta relación develada por comparar "modos de hacer" y de "validar" ese hacer en dos contextos diferentes, surgen nuevas preguntas que interpelan la relación entre estos objetos matemáticos que están sosteniendo la actividad llevada a cabo por el problema planteado.

Nos proponemos continuar este estudio y análisis de significados y conflictos semióticos de un nuevo "abanico" de tareas geométricas que actúan o que potencialmente pueden actuar sobre el actual sistema de la Formación docente inicial para generar (a partir de la producción y reflexión colectiva) algunas sugerencias que identifiquen los temas, procesos o problemas centrales que deben abordarse en los espacios de Geometría para la formación docente.

Referencias bibliográficas

Contreras, A., Font, V., Luque, L. y Ordóñez, L. (2005). Algunas aplicaciones de la teoría delas funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 25*(2), 151-186.

Etchegaray, S. (2010). Reflexiones y aportes para repensar la enseñanza de la Matemática. *YUPANA - Revista de Educación Matemática de la Universidad Nacional del Litoral - Aportes y reflexiones para el aula*, *5*, 11-26.

Etchegaray, S, Corrales, J. y Vazquez, L. (2011). *Significados geométricos emergentes de la cultura griega: su evolución*. Ponencia presentada en el Congreso de Educación en Matemática. Rosario UNL, Argentina.

Font, V. Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, 33(1), 89-105.

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics, 82*, 97–124.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325–355.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *22*(2/3), 237–284.

Godino, J; Batanero, C. y Font, V (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1-2), 127-135.

Godino, J (2009) Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *20*, 13-31.

Godino, J (2011). *Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Ponencia presentada en el XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil.

Pino-Fan, L., Godino, J. D. y Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa*, *13*(1), 141-178.

USO DEL MARCO TPACK POR ALUMNOS DE UN PROFESORADO DE MATEMÁTICA

Lorena Verónica Belfiori
Instituto Superior de Formación Docente y Técnica N°103. Argentina
lorenabelfiori@gmail.com

Resumen. Los recursos TIC, por ejemplo GeoGebra, contribuyen a los procesos didácticos de información, colaboración y aprendizaje en el campo de la Formación Docente. Como parte de los procesos de información, permiten la búsqueda y presentación de información relevante. En los procesos de colaboración, facilitan el establecimiento de redes de intercambio. Mientras que en los procesos de aprendizaje, requieren de recursos que contribuyan a la consecución de conocimientos cognoscitivos, procedimentales y actitudinales. Se propone que los futuros docentes de matemática sean formados en la integración del conocimiento tecnológico, pedagógico y disciplinar (TPACK) para que a posteriori lo apliquen en sus clases, verifiquen las bases de una buena enseñanza con apoyo tecnológico, soliciten la comprensión de la representación de ideas, de las técnicas pedagógicas, del conocimiento sobre qué hace fácil o difícil la comprensión de un concepto y cómo la tecnología puede contribuir a compensar esas dificultades que enfrentan los alumnos.
Palabras clave: formación docente, TIC, tecnología educativa, GeoGebra
Abstract. ICT resources, for example GeoGebra, are a contribution to information, collaboration and learning processes in the field of Teacher Training. As part of information processes, they allow the search and presentation of relevant information. In collaborative processes, they facilitate the establishment of exchange networks. While within the learning processes, they require resources that contribute to the achievement of cognitive, procedural and attitudinal skills. It is proposed that future Maths Teachers are trained on the integration of technological pedagogical content knowledge (TPACK) to put into practice in their classes, to check the basis of a good teaching with technological support, to require the comprehension of the representation of ideas, the pedagogical techniques, the knowledge of what it makes the comprehension of a concept easy or difficult and how the technology can help to compensate those difficulties students face.
Key words: teacher training, ICT, educational technology, GeoGebra

Introducción

La Matemática es una ciencia dinámica inserta en la historia de la humanidad como ciencia autónoma e instrumento para otras la cual se encuentra íntimamente ligada al desarrollo tecnológico y a la reflexión filosófica.

Su enseñanza requiere tener en cuenta que sus aplicaciones no son siempre sencillas de explicar por lo que hay que desplegar distintas estrategias ya que ese hecho muchas veces ocasiona que no se comprendan. El programa GeoGebra puede ayudar al aprendizaje de esta ciencia. Además, tradicionalmente se enseña en forma segmentada, exponiendo sólo verdades acabadas, omitiendo explicitar el proceso histórico de construcción que demuestra indefectiblemente que existieron errores hasta lograrse el saber tal como lo tenemos hoy. El hacer visible esa historia, por ejemplo, a través de videos o de relatos del docente, "humaniza" el saber y evita que los alumnos sientan desánimo y frustración creyéndola perfecta y cerrada. A ellos se les transmite la idea de que todos los conocimientos se construyeron prácticamente en un momento, no se les muestra los años (cuando no siglos) que llevó la formalización de un concepto o el descubrimiento de una fórmula.

En la historia, la mayoría de los contenidos matemáticos se crearon por necesidad, mientras que en la escuela los alumnos los aprenden por obligación.

Por ello, como reflexiona Litwin (2008), el dictado de clases magistrales debe ser evitado, ya que hacen parecer a la matemática como algo inalcanzable para muchos alumnos e imposible para otros tanto. Es aconsejable considerar la enseñanza de esta ciencia como una actividad humana desplegando todas las acciones que estén al alcance del docente ligadas a las distintas posibilidades para guiar, ayudar o conducir las tareas, gestionando la clase y generando situaciones de aprendizaje mediante el uso de distintas estrategias, procedimientos y técnicas. Actualmente se plantea poner en práctica la fusión de contenidos pedagógicos, disciplinares y tecnológicos en la planificación de las clases de que deben preparar los estudiantes del profesorado de matemática para lograr esto.

Es innegable la influencia que las computadoras han tenido en el desarrollo de la Matemática como disciplina. Estas facilitan su acceso a un número y diversidad cada vez mayor de usuarios, aumentando las demandas de formación básica, incrementando el número de contenidos matemáticos a enseñar, incluyendo el uso adecuado del software como GeoGebra, Excel, Winplot y otros que facilitan en los temas de estadística la realización del análisis de datos en cualquier campo de aplicación, o en los temas de geometría la verificación de propiedades y conjeturas realizadas por los alumnos. Esto trae aparejado que se le preste mayor importancia a los aspectos interpretativos y conceptuales y menor a los procedimentales y algoritmos de cálculo.

Varias investigaciones concluyeron que matemática se aprende haciendo matemática. Hoy en día vivimos rodeados de tecnologías digitales con las cuales se puede "hacer matemática" posibilitándole al docente modificar la naturaleza de su clase. Estas herramientas juegan un papel esencial en la manera en que se consigue representar, ilustrar, ejemplificar, explicar, verificar y demostrar las ideas y conceptos de esta ciencia para hacerlos más accesibles a los alumnos.

Enseñanza de la Matemática y TIC

La enseñanza de esta ciencia ha cobrado nuevas posibilidades a partir del desarrollo de las tecnologías y la posibilidad de que los alumnos de las escuelas secundarias y de los profesorados cuenten con netbooks personales. La incorporación del *modelo 1 a 1* en las aulas, a través del cual se le entrega una computadora a cada alumno y docente para que adquiera un acceso personalizado, directo, ilimitado y ubicuo a la tecnología de la información, de manera simultánea, que da lugar a una vinculación entre sí y con otras redes en un tiempo que excede el de la concurrencia escolar, augura una rica perspectiva para mejorar las prácticas pedagógicas, pero también incluye grandes desafíos para los docentes quienes deben revisar su forma de trabajo. Por

ello se propone una práctica docente reflexiva que modifique la metodología de enseñanza de la matemática incluyendo a la tecnología dentro de la planificación de las clases. Para tal fin se trabaja desde un marco tecnológico, pedagógico y disciplinar integrado.

La implementación de las TIC en la educación y los nuevos estilos de aprendizaje exigen que el docente cambie sus estrategias para captar la atención de los estudiantes y hacer más efectiva la enseñanza y el aprendizaje. Esto ocurre tanto en el contexto de la educación media como superior.

Al profesor se le exige entonces, un nuevo comportamiento profesional, se le pide tener una nueva actitud hacia los alumnos aplicando conocimientos y habilidades pedagógicas flexibles según las distintas situaciones y contextos educativos, teniendo conocimientos de la disciplina en sí y conocimientos didácticos asociado a ella. Es tarea del docente impulsar y motivar el trabajo reflexivo de los alumnos, dominar aspectos sociales y emotivos de los estudiantes, ser hábil en la generación de entornos de aprendizajes ricos y enriquecedores, diseñar modelos que se adapten a las inciertas y cambiantes condiciones de aprendizaje que se dan en las clases de Matemática, saber preparar a los alumnos para una integración y participación en el mundo del trabajo o para la continuidad de sus estudios tal como lo sugiere Alsina (2000). Por lo tanto nos enfrentamos al reto de formar ciudadanos sanamente escépticos, inquietos, con gran curiosidad y ganas de aprender, y con recursos propios para poder hacerlo.

Los alumnos del profesorado, como futuros docentes de matemática deben tener en cuenta lo importante que es tanto el qué (qué contenidos) como el cómo (cómo enseñarlos) a la hora de preparar y planificar sus clases. Deben pensar en cómo organizar las tareas de aprendizaje, promover la interacción con el material de trabajo y establecer un tiempo y un ritmo adecuados, graduándolos de acuerdo con las posibilidades de los distintos alumnos que tengan en el aula e intervenir eficazmente en situaciones cambiantes de la clase. Además, deben planificar cómo generar situaciones de aprendizaje mediante el uso de distintas estrategias, procedimientos y técnicas de enseñanza. El desafío no consiste en encontrar la propuesta ideal, sino en elegir y usar de forma efectiva métodos válidos. El repertorio de estrategias, procedimientos y técnicas de los que disponen los futuros docentes es muy amplio; sin embargo, de todo ese menú de opciones deben considerar aquellas que se adecuen a los propósitos educativos, a la situación educativa y a los alumnos que integran la clase.

Por ello, en el tercer año de la carrera del profesorado de matemática del ISFD y T N° 103, se implementa un proyecto colaborativo que integra el uso de tecnología en las aulas a través del marco teórico metodológico TPACK (conocimiento tecnológico pedagógico disciplinar) en la

materia "Matemática y su Enseñanza III". En esta materia los alumnos deben planificar clases, teniendo en cuenta todo lo anteriormente expresado, para luego llevarlas a la práctica en aulas del nivel medio.

Es importante que los futuros docentes de matemática experimenten en su formación la inclusión del conocimiento tecnológico al conocimiento pedagógico y disciplinar integrando los tres tipos de conocimiento, entendiendo que la tecnología no es un condimento mágico que soluciona los problemas de aprendizaje ni que debe ser el centro de la clase sino que es una herramienta más que se debe analizar en qué momento, para qué propósito y de qué manera incluirla. Esto se logra a través de las vivencias de la integración de las TIC en sus clases de "Matemática y su Enseñanza III" poniendo de relieve que las tecnologías utilizadas tradicionalmente en el aula, ya sea el pizarrón, los libros de textos o los mapas conceptuales en afiches, se hicieron transparentes con el tiempo porque se naturalizaron y dejaron de llamar la atención debido a su estabilidad. En cambio las tecnologías digitales actuales permiten representar, ilustrar, ejemplificar, explicar y demostrar los conceptos matemáticos de manera más asequible a los alumnos.

El programa GeoGebra es uno de los más utilizados por estos estudiantes para preparar sus clases ya que se encuentra en las netbooks de docentes y alumnos. Este utilitario puede ser empleado para temas desde el nivel primario hasta el universitario, permite el trazado dinámico de construcciones geométricas de todo tipo así como la representación gráfica, el tratamiento algebraico y el cálculo de funciones reales de variable real, sus derivadas, integrales, además de trabajar temas de estadísticas, recursos de análisis y cálculo, también cuenta con recursos y materiales libres.

El Modelo TPACK

Los autores del TPACK, Koehler y Mishra (2006), proponen que este marco teórico metodológico sirve no solo para unificar las propuestas de integración de tecnologías en la educación, sino también para transformar la formación docente y su práctica profesional. Por esta razón, este marco identifica algunos de los conocimientos necesarios para que los docentes puedan integrar la tecnología en la enseñanza sin olvidar la naturaleza compleja, multifacética y contextualizada de estos conocimientos. Integrar las TIC en las clases de matemática implica no solamente conocer las herramientas, sino también "reacomodar" las prácticas docentes, revisar y resignificar los conocimientos pedagógicos y disciplinares, ya que la integración de éstas en la enseñanza de un contenido requiere el desarrollo de una sensibilidad que atienda a la relación dinámica y transaccional entre los tres componentes: tecnología, pedagogía y disciplina.

Teniendo en cuenta el modelo TPACK, los contenidos, problemas y asuntos de la Matemática son organizados, representados y adaptados para su enseñanza atendiendo a los intereses y habilidades de los alumnos, con lo cual, a veces, el contenido define la pedagogía y la tecnología que se utilizan y otras veces, la tecnología exige cambios en la pedagogía y habilita nuevas formas de representar un contenido. Incorporar tecnología no es lo mismo que sumar un nuevo contenido al programa, muchas veces cuestiona preceptos fundamentales de la disciplina o la pedagogía. Por lo que el modelo TPACK requiere de tres acciones fundamentales: primero, tener en claro cuáles son las necesidades pedagógicas, segundo, buscar y seleccionar recursos y, finalmente, definir el modo de uso de los recursos.

Tanto los medios didácticos tradicionales como los recursos TIC permiten ofrecer distintas formas de trabajar los contenidos y actividades. Un diseño integrado y complementario de estos recursos en el proceso instructivo contribuye a alcanzar los resultados de aprendizaje esperados.

Pero como se dijo antes, no solo es cuestión de incluir la tecnología en las clases sino de cambiar la metodología de las mismas. Fundamentalmente, se busca proponer actividades que sean diseñadas para ser catalizadoras de una enseñanza reflexiva y creativa focalizando la planificación didáctica en las acciones del estudiante más que en las del docente. Se le da importancia al trabajo colaborativo, al aprendizaje ubicuo y a la participación de todos.

Trabajo de Campo

El alumno vive en una sociedad muy distinta de la sociedad industrial anterior, hoy está en la sociedad de la información. En ella, con la introducción de las Tecnologías de la Información y la Comunicación en las distintas actividades humanas se ha modificado intensamente hábitos, procedimientos y la cantidad y calidad de información que se maneja, hecho que dio lugar a transformaciones profundas que deben ser acompañadas desde la educación.

Se investigó a través del estudio de casos la implementación en las prácticas de clases del método TPACK realizada por los alumnos del profesorado de matemática del ISFD y T N° 103 en la materia "Matemática y su enseñanza III".

Estos estudiantes desarrollan sus prácticas en instituciones que cuentan con la implementación del plan Conectar Igualdad a través del cual se le entrega a cada alumno y a cada docente una computadora con programas educativos, en el caso de matemática, se cuenta con Matemáticas de Microsoft, Winplot, Euler Math Toolbox y GeoGebra, además del conocido Excel del paquete Microsoft Office.

Es muy importante el tiempo que los practicantes le dedican a organizar las tareas de aprendizaje, a promover la interacción con el material de trabajo y establecer un tiempo y un ritmo adecuado, graduados de acuerdo con las posibilidades de los distintos alumnos interviniendo eficazmente en situaciones cambiantes de la clase.

Una vez conocido el conjunto de estudiantes con el cual realizarán sus prácticas, los alumnos del profesorado planifican las situaciones de aprendizaje que generarán mediante el uso de distintas estrategias, procedimientos y técnicas de enseñanza considerando aquellas que se adecuen mejor a los propósitos, a la situación educativa y a los alumnos. Para ello promueven la actividad grupal proponiendo un orden para realizarla y dedicándole tiempo a su planificación.

Es vital que no pierdan de vista que la educación no consiste solamente en adquirir conocimientos, sino que esos conocimientos deben llevar al estudiante a cuestionar y generar nuevos aprendizajes de manera tal de integrarlos en la vida práctica.

Para diseñar las clases con la implementación del marco teórico metodológico TPACK, los alumnos debieron tomar decisiones curriculares, tecnológicas y pedagógicas. Luego de las prácticas en los distintos cursos, los estudiantes deben compartir a través de un documento, una presentación o un mural colaborativo las experiencias vividas reflexionando acerca de las mismas con sus compañeros.

Centrando la atención en los alumnos que planificaron la secuencia de clases de estadística para un cuarto año de escuela secundaria, vemos que lo primero que tuvieron en cuenta fue que el volumen, el dinamismo y la complejidad de información a la cual se puede acceder actualmente superan exponencialmente cualquier etapa anterior de la sociedad. No sólo se obtiene información confiable, conocimientos actualizados y veraces de los docentes, los libros y de un número limitado de centros de saber, sino también en espacios de conocimiento que surgen en las sociedades en red. Por lo que debieron preparar sus clases diseñando actividades que les brinden a los estudiantes herramientas cognitivas y competencias que permitan accionar de modo crítico, creativo, reflexivo y responsable sobre la abundancia de datos para aplicarlos a diversos contextos y construir conocimiento relevante basado en ellos.

Plantean como propósitos de la secuencia de clases analizar la insuficiencia de las medidas de tendencia central para describir algunas situaciones en estudio, advirtiendo la necesidad de otras medidas como la varianza y la desviación estándar para tipificarlas e interpretarlas gráficamente; justificar decisiones al abordar situaciones de certeza o de incertidumbre, recurriendo a nociones matemáticas adecuadas; promover la valoración y el uso de los recursos tecnológicos para el análisis de fenómenos o problemas a explorar, para la resolución de problemas y para el control

de los resultados, considerando sus alcances y limitaciones; y promover el trabajo colaborativo, la discusión e intercambio entre pares y la autonomía de los alumnos.

En una primera clase proponen ver y analizar un video que introduce y recuerda el concepto de estadística y su desarrollo a través de la historia, las características de una muestra y una población diferenciándolas y las medidas de tendencia central. El trabajo planteado es a través de un cuestionario que se resuelve en parejas y luego se hace una puesta en común para debatir y enriquecer las respuestas dadas. De tarea se deja un problema de resolución individual para calcular e interpretar la media, moda y mediana en una situación particular.

En una segunda clase retoman la tarea planteada y cuestionan acerca de la insuficiencia de las medidas de posición para describir completamente la situación a través de los resultados obtenidos. Para introducir las medidas de dispersión presentan una actividad que exige comparar muestras. Para ello los alumnos deben resolver haciendo uso del programa GeoGebra pero muchos habían trabajado con este programa con actividades de geometría por lo que se les explica la forma de utilizarlo para estadística. Otros plantean que es preferible usar Excel por lo que se pide que investiguen ese programa tratando de resolver el mismo ejercicio con él. Nuevamente, de tarea se proponen varias situaciones problemáticas y la búsqueda, ya sea en internet o en alguna bibliografía, del concepto y cálculo del coeficiente de dispersión.

En una tercera clase se divide el grupo en dos y cada uno construye en forma colaborativa la explicación de la resolución de un ejercicio usando GeoGebra o Excel, según el grupo retomando los conceptos estadísticos.

Finalmente se evalúan los aprendizajes a través de un ejercicio integrador que los alumnos pueden resolver con ayuda de la computadora.

Al finalizar sus prácticas los alumnos del profesorado compartieron sus reflexiones acerca de lo vivido antes de entrar a las aulas y dentro de ellas a través de un mural colaborativo por tema, ya que varios implementaron las mismas actividades pero en distintos cursos y el grupo total fue dividido en temas de estadística, de geometría y de álgebra lineal. Se encontraron con la necesidad de expandir la demostración del conocimiento propio, manejar datos tanto propios como de varios centros académicos, documentar experiencias, conectar ideas y resolver problemas.

Conclusiones

Por un lado se pudo verificar que el dominio del contenido, la pedagogía y la tecnología no aseguran por sí solos una enseñanza eficaz integrando TIC, sino que es necesario disponer de formación y experiencia en los espacios de intersección donde estos componentes se influyen y

condicionan entre sí. Se busca no sólo dominar el contenido y las estrategias de enseñanza/aprendizaje sino también saber qué herramientas tecnológicas utilizar y cómo y en qué momento se pueden aplicar teniendo en cuenta que a su vez su uso puede modificar los contenidos y las propias dinámicas de enseñanza y aprendizaje.

Todos los grupos concordaron en que GeoGebra es un programa de fácil utilización, amigable y flexible para las distintas tareas planteadas, permite que los alumnos construyan conocimiento, verifiquen sus aciertos, descubran sus errores y los corrijan.

Es muy importante la toma de decisiones en torno a los distintos elementos del currículo que permite enfatizar la dimensión creativa y constructiva de la preparación y desarrollo del proceso, el rol del profesor como facilitador de entornos y la explicitación y discusión en torno a esos elementos.

Por otro lado, el modelo TPACK puede contribuir a reorientar, centrar y filtrar los distintos usos educativos de las TIC. Desde el momento que se enfatiza la importancia de analizar el impacto del uso de las tecnologías, se reclama la necesidad de revisar críticamente las prácticas TIC más innovadoras.

Se verificó que el TPACK es la base de una buena enseñanza con tecnología y requiere la comprensión de, la representación de ideas mediante el uso de tecnología, de las técnicas pedagógicas que utilizan la tecnología en formas constructivas para enseñar un contenido, del conocimiento sobre qué hace fácil o difícil la comprensión de un concepto y cómo la tecnología puede contribuir a compensar esas dificultades que enfrentan los alumnos, y del conocimiento de las ideas e hipótesis previas de los alumnos y de cómo la tecnología puede ser utilizada para construir conocimiento disciplinar.

Referencias bibliográficas

Alsina, C. (2000). *El currículum de matemática en los inicios del siglo XXI*. Barcelona: Editorial Grao.

Koehler, M. y Mishra, P (2006). Technological pedagogical content knowledge: a framework for teacher knowledge. *Teachers College Record, 108*(6), 1017-1054. Recuperado el 2 de junio de 2012, de http://punya.educ.msu.edu/publications/journal_articles/mishra-koehler-tcr2006.pdf

Litwin, E. (2008). *El oficio de enseñar: condiciones y contextos*. Buenos Aires: Paidós.

ALUMNO RECURSANTE. UN DIAGNÓSTICO DESDE LA PERSPECTIVA DE LOS ESTILOS DE APRENDIZAJE

Ana María Craveri y María del Carmen Spengler
Universidad Tecnológica Nacional. Argentina
craveri@arnet.com.ar, mariaspengler@gmail.com

Resumen. Con el fin de aportar elementos para la reflexión sobre la repetición en el nivel universitario, en este trabajo se plantea el análisis conjunto de algunas variables socio-académicas (género, edad, condición de la cursada, situación laboral) y cognitivas (los estilos de aprendizaje), con vista a una aproximación al perfil del alumno que cursa la signatura Probabilidad y Estadística en las carreras de ingeniería de la Facultad Regional San Nicolás Universidad Tecnológica Nacional. Del análisis resulta la constitución de tres conglomerados heterogéneos entre ellos y con un alto grado de homogeneidad interna en las variables consideradas que nos permite caracterizar al alumno que recursa la asignatura en cuestión.
Palabras clave: alumno recursante, estilos de aprendizaje, perfil
Abstract. In order to provide elements for reflection on repetition at university level, this paper presents a combined analysis of socio-academic variables (gender, age, condition of the course studied, employment situation) and cognitive ones (learning styles), with an approach to the profile of the student who takes the Probability and Statistics subject in Engineering careers at Facultad Regional San Nicolás Universidad Tecnológica Nacional. From the analysis, three clusters – heterogeneous among themselves and with a high degree of internal homogeneity of the variables considered– allow us to characterize the student who retakes the subject.
Key words: a student who repeats a course, learning styles, profile

Introducción

En la mayoría de las facultades de nuestra universidad pública existe una importante proporción de alumnos que no alcanza la condición de alumno regular y que, generalmente, se transforman en recursantes; entendiendo por alumno recursante a aquél que reincide en cursar año a año una asignatura hasta lograr la condición deseada (regular o promovido) para abordar el examen final de la materia. En muchos casos esta práctica trae aparejada frustación académica, retraso en sus estudios y, por lo general, la repitición reiterada conduce al abandono de la carrera (González Fiegehen, 2006).

El alumno recursante universitario es un problema que debe ser tenido en cuenta dentro del marco de evaluación de calidad de la universidad. Es un fenómeno de alta incidencia en los primeros años de carrera y entendemos que la posibilidad de permanencia en el sistema educativo no es un atributo exclusivamente personal, sino que se relaciona con condiciones de política universitaria y situaciones pedagógico-didácticas. Desde esta perspectiva, con el fin de aportar elementos para la reflexión sobre esta problemática, en este trabajo se plantea un análisis correlacional entre algunas variables socio-académicas y cognitivas, con vista a una aproximación al perfil del alumno que cursa la asignatura Probabilidad y Estadística, en general y de aquéllos que recursan esta materia en particular, en el contexto de las carreras de ingeniería que se dictan en la Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional San Nicolás (FRSN UTN).

Las conclusiones de este trabajo pueden ser de utilidad en la medida que se constituyan en información objetiva de base para la discusión, a nivel de gestión universitaria, y de análisis crítico de nuestra propia práctica docente, promoviendo la elaboración de materiales didácticos, uso de herramientas cognitivas y prácticas pedagógicas alternativas que atiendan a las características y posibilidades propias a esta categoría de alumno.

Marco Teórico

El análisis de la problemática planteada, considerando a la Estadística como una rama de la Matemática, se ubica en la intersección de dos campos conceptuales en el sentido de Vergnaud: La Educación Matemática en general y Los Estilos de Aprendizaje. Con relación a la enseñanza de la Estadística, en particular, Batanero advierte:

> Frecuentemente encontramos que la estadística se enseña aisladamente, sin conectarla con un marco más general de metodología de investigación y diseño experimental. […] Se debería enfocar el curso introductorio de estadística alrededor del razonamiento estadístico, es decir el ciclo de aprendizaje Planificación-Conjetura-Comprobación-Acción. El análisis estadístico de datos no es un proceso mecánico y, por tanto, no debería ser enseñado o aplicado de esta forma. Puesto que la estadística no es una forma de hacer sino una forma de pensar que nos puede ayudar a resolver problemas en las ciencias y la vida cotidiana. La enseñanza de la estadística debería empezar con problemas reales mediante los cuales los estudiantes puedan desarrollar sus ideas, trabajando las diferentes etapas en la resolución de un problema real (planificar la solución, recoger y analizar los datos, comprobar las hipótesis iniciales y tomar una decisión en consecuencia) (Batanero, 2000, p. 94).

En este sentido, desde nuestra experiencia docente, uno de los problemas principales en un curso introductorio de Estadística es lograr la transición del Análisis de Datos a la Inferencia. La escasez del tiempo disponible y de los conocimientos previos de los alumnos, impiden llevar a cabo un estudio suficientemente profundo de la teoría de la probabilidad, nexo entre la Estadística Descriptiva y la Estadística Inferencial.

Sin caer en reduccionismos facilistas, pero en la búsqueda de métodos que permitan un cierto grado de conocimiento de las distintas preferencias y modalidades cognitivas que caracterizan el aprendizaje de los alumnos en el contexto universitario, se recurre a las Teorías de los Estilos de Aprendizaje a fin de orientar las estrategias, recursos y materiales didácticos en general, tendientes a promover un aprendizaje significativo y autónomo.

Sobre Estilos de Aprendizaje en el contexto universitario se reconocen dos líneas de investigación predominantes: el modelo anglosajón de Felder y Silverman y el modelo europeo de Alonso, Gallego y Honey. Ambos están orientados hacia la indagación de los aspectos psicológicos y cognitivos del aprendizaje en su conjunto (Ventura, Gagliardi y Moscoloni, 2012). En este trabajo se sigue la línea de la Teoría de Honey-Alonso y se adopta su instrumento de diagnóstico de los Estilos de Aprendizaje: el CHAEA.

Como definición de Estilo de Aprendizaje adopta la definición propuesta por Keefe (1988) los Estilos de aprendizaje son los rasgos cognitivos, afectivos y fisiológicos que sirven como indicadores relativamente estables, de cómo los alumnos perciben interaccionan y responden a sus ambientes de aprendizaje.

Desde esta perspectiva una aproximación a los Estilos de Aprendizaje es la que ha promovido Kolb (1984), quien concibe el aprendizaje como un ciclo de cuatro etapas: experiencia concreta, observación reflexiva, conceptualización abstracta, experimentación activa. Honey y Munford (1986) han partido de una reflexión académica y de un análisis de la teoría y cuestionario de Kolb para llegar a los Estilos de Aprendizaje evaluados en el Learning Styles Questionary, del cual el CHAEA es una adaptación (Alonso, 1999). Peter Honey y Alan Munford clasifican los Estilos de Aprendizaje en cuatro tipos: activo, reflexivo, teórico y pragmático. Sintéticamente sus características serían:

- Estilo Activo: Las personas que tienen predominancia en Estilo Activo se implican plenamente en nuevas experiencias. Son de mente abierta y acometen con entusiasmo las tareas nuevas, se entusiasman al comienzo de una actividad nueva y se aburren con los largos plazos. Se sienten cómodos emprendiendo tareas grupales. Las personas que tengan un predominio de este Estilo se manifiestan con las siguientes características principales: animador, improvisador, espontáneo, arriesgado (Alonso, Gallego y Honey, 2002).

- Estilo Reflexivo: A los reflexivos les gusta considerar las experiencias y observarlas desde diferentes perspectivas. Son personas que gustan considerar todas las alternativas posibles antes de realizar un movimiento. Recogen datos, analizándolos con detenimiento antes de llegar a alguna conclusión. Son prudentes, disfrutan observando la actuación de los demás, escuchan a los demás y no intervienen hasta que no se han adueñado de la situación. Crean a su alrededor un aire ligeramente distante y condescendiente. Las personas que tengan un predominio de este Estilo se manifiestan con las siguientes características principales: ponderador, receptivo, analítico, exhaustivo (Alonso, Gallego, y Honey, 2002).

- Estilo Teórico: Los teóricos adaptan e integran las observaciones dentro de teorías lógicas. Enfocan los problemas de forma vertical escalonada por etapas lógicas. Tienden a ser perfeccionistas integran los hechos en teorías coherentes. Les gusta analizar y sintetizar. Son profundos en su sistema de pensamiento, a la hora de establecer principios, teorías y modelos. Para ellos si es lógico es bueno. Buscan la racionalidad y la objetividad huyendo de lo subjetivo y ambiguo. Las personas que obtengan una mayor puntuación en este Estilo tendrán las siguientes características principales: metódico, lógico, objetivo, crítico, estructurado (Alonso, Gallego, y Honey, 2002).
- Estilo Pragmático: El punto fuerte de las personas con predominancia en Estilo Pragmático es la aplicación práctica de las ideas. Descubren el aspecto positivo de las nuevas ideas y aprovechan la primera oportunidad para experimentarlas. Les gusta actuar rápidamente y con seguridad con aquellas ideas y proyectos que les atraen. Tienden a ser impacientes cuando hay personas que teorizan. Pisan la tierra cuando hay que tomar una decisión o resolver un problema. Su filosofía es siempre se puede hacer mejor, si funciona es bueno. Las personas que tengan un predominio de este Estilo se manifiestan con las siguientes características principales: experimentador, práctico, directo, eficaz, realista (Alonso, Gallego, y Honey, 2002).

Lo ideal, afirma Honey, sería que todo el mundo fuera capaz de experimentar, reflexionar, elaborar hipótesis y aplicar en partes iguales, Es decir, que todas las virtualidades estuvieran repartidas equilibradamente. Pero lo cierto es que los individuos son más capaces de una cosa que de otra. Los Estilos de Aprendizaje serían algo así como la interiorización por parte de cada sujeto de una etapa determinada del ciclo.

En relación a la construcción del conocimiento matemático destacamos el paralelismo entre esta teoría y la posición epistemológica y pedagógica de Polya a la que nos adherimos totalmente. En efecto las actitudes frente al aprendizaje que categoriza Honey, se encuentran presentes en las etapas para la resolución de un problema de Polya. En la descripción de estas etapas Polya (1975), enfatiza: la búsqueda de datos (Estilo Activo), la relación con otros problemas (Estilo Reflexivo), el conocimiento de propiedades y capacidad de búsqueda de modelos abstractos (Estilo Teórico), la ejecución y extensión del problema original en otros contextos (Estilo Pragmático). Todas estas actitudes son necesarias y su desarrollo equilibrado es uno de los objetivos de la Enseñanza de la Matemática en general y de la Estadística en particular.

Objetivos

- Indagar y analizar los Estilos de Aprendizaje de los alumnos. Aplicar el Test CHAEA y preparar baremos de interpretación de sus resultados.
- Aproximar el perfil del alumno que cursa la asignatura Probabilidad y Estadística, en general y de aquéllos que recursan esta materia en particular, en el contexto de las carreras de ingeniería que se dictan en la Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional San Nicolás (FRSN UTN).

Metodología

En esta experiencia, se indagó un grupo de 73 alumnos que cursaron la materia Probabilidad y Estadística durante el año 2012 constituido por 17 mujeres y 56 varones, 42 que cursaban por primera vez y 31 recursantes o repitentes. El dictado de la asignatura está incluido en el segundo año de las carreras de Ingeniería en sus distintas especialidades. Es una de las materias del ciclo básico, su desarrollo se plantea desde la perspectiva de la Estadística Aplicada, haciendo hincapié en la resolución de problemas en el área de la Ingeniería. Conforme a la reglamentación vigente, el alumno rinde la materia en condición de "promovido" (exento de rendir una primer instancia de evaluación sobre resolución de problemas) o "regular" (no exento de rendir esa primer instancia de evaluación). La condición de "promovido" se obtiene durante el año de cursado, a través de un desenvolvimiento notable en las evaluaciones parciales. Esta situación motiva a que, aquéllos alumnos que no obtienen la condición "promovido", opten por recursar la materia en el año siguiente.

El instrumento de recolección de datos para las variables de Estilo de Aprendizaje es el CHAEA que fue auto-administrado en el aula de clase en formato papel y completado de manera anónima respetando el protocolo de consentimiento informado. El Cuestionario consta de 80 afirmaciones (20 para cada uno de los estilos) que el alumno debe marcar con un signo + si está más de acuerdo que en desacuerdo o con un signo – si, por el contrario, está más en desacuerdo que de acuerdo.

En la última hoja se encuentran los números identificatorios de las afirmaciones distribuidos en cuatro columnas encabezadas con I, II, III y IV según el estilo al que pertenecen (estos números romanos corresponden al estilo Activo, Reflexivo, Teórico y Pagmático respectivamente). El alumno marcará con un círculo el número de la afirmación que marcó con signo +, contará el número de marcas en cada columna y lo consignará al pie de la misma. El número consignado constituye el puntaje obtenido en cada estilo que tendrá un valor mínimo de 0 puntos y un máximo de 20.

La interpretación de las puntuaciones está en función de los resultados de todos los sujetos participantes con quienes comparamos los datos individuales. Lo importante es no sólo saber que ha puntuado 13 en Reflexivo, por ejemplo, sino sobre todo qué significa este puntaje al compararlo con el colectivo cercano y otros colectivos que hayan facilitado un baremo general de interpretación.

Simultáneamente con el CHAEA se administró un breve cuestionario para recabar información sobre otras variables de interés en esta investigación a saber: género, edad en años cumplidos, año de ingreso a esta facultad, condición de la cursada, situación laboral, con vista a un análisis conjunto de aspectos socio-académicos y cognitivos.

Se hace necesario, en este momento, definir la modalidad" recursante" de la variable "condición de la cursada". Se considera "alumno recursante" a *aquel alumno que ha cursado más de una vez la asignatura Probabilidad y Estadística en cualquiera de las especialidades de ingeniería que se dictan en la FRSN UTN, independientemente de los resultados obtenidos*. Se le requiere al alumno que conteste la pregunta ¿cursa por primera vez la materia? a la cual debe responder por sí o por no.

Sobre el uso de la computadora se le pregunta: ¿usa, o usó, la computadora como herramienta en alguna(s) materia(s)? con las opciones: poco, a veces, mucho.

Sobre la variable *situación laboral* se le solicita que estime *el número de horas semanales de trabajo o* bien marque el casillero *no trabajo.*

Con relación al segundo objetivo planteado, recurrimos al análisis cluster pues nos interesa clasificar la información en un esquema más simple, de tal manera que podamos caracterizar grupos de alumnos como un total. El análisis cluster se ajusta idealmente a la definición de grupos de sujetos con homogeneidad máxima dentro de los grupos, a la vez que mantiene una heterogeneidad máxima entre los conglomerados. De esta manera, la posibilidad de identificar la estructura de una serie de variables nos proporciona, no solamente simplicidad, sino también una manera de descripción, una base para el análisis de relaciones de dependencia e incluso descubrimiento de nuevas relaciones. En definitiva esta clasificación nos permite aproximar al perfil del alumno según su condición de cursado.

Resultados

Con respecto al objetivo de *Indagar y analizar los Estilos de Aprendizaje de los alumnos. Aplicar el Test CHAEA y preparar baremos de interpretación de sus resultados.*

Para cada variable: Activo, Reflexivo, Teórico y Pragmático se determina la distribución de frecuencias y se calculan los percentiles 10, 30, 70 y 90 de cada distribución que nos permiten

clasificar a un determinado alumno en uno de los cinco grupos de "preferencia" propuestos por Honey-Alonso (muy baja, baja, moderada, alta o muy alta) según el puntaje obtenido.

A continuación se presenta el baremo que resulta del análisis de los percentiles de nuestra muestra.

Baremo General. Preferencias en Estilos de Aprendizaje
Alumnos de Probabilidad y Estadística UTN FR SN

Estilo	**Preferencia**				
	Muy baja	Baja	Moderada	Alta	Muy alta
Activo	0 – 6	7 – 9	10 – 13	14 – 16	17 - 20
Reflexivo	0 – 11	12 – 14	15 – 17	18 – 19	20
Teórico	0 – 9	10 – 12	13 – 16	17	18 – 20
Pragmático	0 – 9	10 – 11	12 – 14	15 – 16	17 – 20

Fuente: elaboración propia.

¿Cómo se interpreta y utiliza el cuadro obtenido?

De acuerdo a estos resultados se interpreta que un alumno que obtuvo, por ejemplo 10 puntos en cada Estilo de Aprendizaje, tiene: preferencia Moderada en Estilo Activo, preferencia muy baja en Estilo Reflexivo, preferencia baja en Estilo Teórico, preferencia baja en Estilo Pragmático.

Con relación al objetivo de Aproximar al perfil del alumno, del análisis de la variable estilo de aprendizaje resulta que la puntuación media (promedio aritmético) más alta corresponde al estilo reflexivo (14,84), a continuación se ubica el estilo teórico (13,68) seguido del pragmático (12,49) y por último el estilo activo (11,07). Las distribuciones resultan prácticamente simétricas por lo que los promedios se ubican en la categoría de preferencia moderada en las cuatro variables. Se observa una correlación positiva entre el estilo Reflexivo y la Edad, al respecto hacemos notar que la distribución de esta variable es asimétrica positiva o sea presenta un sesgo hacia valores altos de edad con presencia de alumnos de más de 30 años. No se ha observado asociación entre las variables de Estilo de Aprendizaje y Género. El Estilo Pragmático está correlacionado positivamente con el Activo y el Teórico. También resulta ser significativa y positiva la asociación Reflexivo-Teórico. Para los alumnos con puntuaciones altas (bajas) en Estilo Pragmático se espera que también tengan puntuaciones altas (bajas) en el estilo Activo y el Teórico. Si tienen puntuaciones altas (bajas) en Estilo Reflexivo se espera que también éstas sean altas (bajas) en el Estilo Teórico.

Del análisis cluster resultan 3 conglomerados:

Cluster 1: Está constituido en su totalidad por alumnos recursantes. Reúne el 84,2% de los alumnos con ingreso entre el año 2001 y el 2008, el 35% de los que registran ingreso en el 2009, no hay ninguno con ingreso en el 2011. La edad promedio es de 23 años con una mediana de 22 años, el 95,8% son varones, el 58,3% trabaja hasta 40hs semanales o más, el 62,5% manifiesta utilizar poco o a veces la computadora, el 46% con preferencia muy baja o baja en estilo activo (comparativamente, la más baja predominancia en este estilo), el 33,3% con preferencia alta o muy alta en estilo reflexivo ((comparativamente la más alta predominancia en este estilo, el 75% con preferencia baja o moderada en estilo teórico y la menor proporción de preferencia alta o muy alta en estilo pragmático (20%).

Cluster 2: Está constituido en su totalidad por alumnos que cursan por primera vez la materia. Reúne el 73,1% de los alumnos de la muestra que ingresaron en el año 2010 y el 62,5% de los que ingresaron en el 2011. La edad promedio es de 21 años con una mediana de 20 años. Son todos varones, el 66,7% no trabaja, el 48,5% manifiesta utilizar poco o a veces la computadora. El 78% tiene preferencia de moderada a muy alta en estilo activo, el 69,7% preferencia baja o moderada en estilo reflexivo, el 78% tiene preferencia baja o moderada en estilo teórico y el 30,3% preferencia alta o muy alta en estilo pragmático.

Cluster 3: el 43,8% son recursantes. Reúne el 10,5% de los ingresantes entre 2001 y 2008, 25% de los ingresantes en 2009, el 23,1% de los que ingresaron en 2010 y el 37,5% de los ingresados en 2011, la edad promedio y la mediana coinciden en 20 años. Son todas mujeres, el 75% no trabaja, el 31% manifiesta utilizar poco o a veces la computadora, el 75% tiene una preferencia de moderada a muy alta en estilo activo, el 68,8% preferencia moderada o alta en estilo reflexivo, tiene un alto porcentaje de alumnos con preferencia muy baja en estilo teórico (25%), el 37,5% con preferencia alta o muy alta en estilo pragmático.

Conclusiones

En términos generales con respecto al alumno que cursa esta materia y atendiendo a los puntajes promedios de cada estilo, podríamos decir que los estudiantes parecen estar bien predispuestos para: seguir analogías, procesar información, generalizar propiedades y abstraer los contenidos del aprendizaje, no tendrían dificultades en llevar a la práctica estos contenidos pero deberían mejorar lo relativo a la búsqueda y exploración espontánea de la información y deberían ser estimulados en un aprendizaje autónomo. Vistas las correlaciones significativas entre las categorías de estilos de aprendizaje, el estilo no es excluyente y estos resultados nos llevan a coincidir con Alonso en que el Estilo es algo más que una mera apariencia y se constituye en un indicador de superficie del

sistema total de pensamiento y de los mecanismos que el individuo pone en juego para establecer lazos con la realidad.

Con respecto al perfil del alumno que recursa esta materia podemos decir que: la mitad tienen más de 22 años, hay muy baja proporción de mujeres, mayoritariamente trabajan, no tienen un marcado uso de la herramienta computacional, hay baja o muy baja preferencia en estilo activo, alta preferencia en estilo reflexivo, moderada preferencia en estilo teórico y baja predominancia en estilo pragmático.

Con respecto a los estilos de aprendizaje, todos tenemos mayor o menor preferencia en uno u otro, esta predominancia de un estilo sobre otro se va modificando con nuestra edad cronológica y nuestra experiencia como discentes. El alumno mejor capacitado será aquél capaz de aprender en cualquier situación de aprendizaje que se presente, para esto necesita un buen nivel de preferencia en todos los Estilos.

Podemos mejorar en cada uno de los Estilos con el metaconocimiento y las prácticas que refuercen nuestros Estilos predominantes y potencien a los menos desarrollados. Los docentes deberíamos ser capaces de utilizar distintos estilos de enseñanza para facilitar el aprendizaje de alumnos con distintos estilos de aprendizaje**.**

Referencias bibliográficas

Alonso, C. M, Gallego, D. J. y Honey, P. (2002). *Los estilos de aprendizaje. Procedimientos de diagnóstico y mejora*. Bilbao: Mensajero.

Alonso, C; Gallego, D; Honey, P (1999) *Los estilos de aprendizaje*. Madrid. Ediciones Mensajeros.

Batanero, C (2000). Controversies around significances tests. *Journal of Mathematics Thinking and Learning*, *2*(1-2), 75-98.

González Fiegehen, L. E. (2006). Repitencia y deserción universitaria en América Latina. *Informe sobre la Educación Superior en América Latina y el Caribe 2000 – 2005. La Metamorfosis de la Educación Superior, 1*(11) 156–168.

Honey, P y Mumford, A (1986) *The manual of learning opportunities*. P. Honey, Ardingly House. Maidenhead, Berkshire.

Keefe, J (1988). *Profiling and utilizing learning style*. National Association of Secondary School Principals. Reston. Virginia.

Kolb, D. (1984). *Learning cycle and the learning style inventory experiential Learning*. New Jersey. Prentice Hall.

Polya, G (1975). *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Ed. Trillas.

Ventura, A; Gagliardi, R; y Moscoloni, N. (2012). Estudio descriptivo de los estilos de aprendizaje de estudiantes universitarios argentinos. *Revista de Estilos de Aprendizaje, 9*(9), 71-84.

IMPACTO DE LAS PRÁCTICAS INSTRUCCIONALES DE LOS FORMADORES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Francisco Rojas y Jordi Deulofeu
Pontificia Universidad Católica de Chile — Chile
Universitat Autònoma de Barcelona — España
frojass@uc.cl, jordi.deulofeu@uab.cat

Resumen. El formador de profesores es aquel que apoya al profesor en el desarrollo y la mejora de la enseñanza de las matemáticas, y por ende tiene una fuerte incidencia en la construcción de los modelos de enseñanza de sus estudiantes. A partir de las exigencias que le vienen impuestas por la formación inicial, analizamos algunas de las características de la actividad instruccional de un grupo de formadores que han resultado impactantes para sus estudiantes, de acuerdo con las opiniones recogidas en dos focus group, estructurados temáticamente siguiendo la etapas del ciclo formativo. La coherencia que presenta el formador entre lo que hace y lo que dice se debe hacer en los procesos de enseñanza aprendizaje, resulta clave para los estudiantes en tanto una característica fundamental de las prácticas instruccionales de sus formadores.
Palabras clave: formador de profesores de matemáticas, práctica instruccional, formación inicial de profesores de matemáticas
Abstract. The teacher educator is who supports the teacher in the development and improvement of the teaching of mathematics, and thus has a strong impact on the construction of the models of teaching of their students. From the requirements that are imposed by different dimensions in the initial training, we analyse some features of the instructional activity of a group of educators who have been striking for their students, according to the opinions expressed on two focus groups, structured thematically following the stages of the training cycle. Coherence presented by the educator between what he does and what he says should be done in the teaching and learning processes, is key to students as a fundamental characteristic of instructional practices of their educators.
Key words: mathematics teacher educator, instructional practices, pre-service mathematics teacher education

Introducción

El formador es aquella persona que, en contextos de formación inicial o permanente, tiene como tarea ayudar a los profesores a desarrollar y mejorar la enseñanza de las matemáticas (Jaworski, 2008), siendo a la vez aprendiz y facilitador de aprendizaje (Zaslavsky, 2009), proceso en el cual la reflexión de su práctica juega un rol fundamental (Chapman, 2009). Sus prácticas instruccionales, tanto a nivel de las actividades matemático-didácticas que diseña e implementa como a nivel de la gestión de las mismas en el aula universitaria, y la construcción de los modelos de enseñanza de los futuros profesores, son aspectos fuertemente interrelacionados. Del proceso de formación, cuyo objetivo es que el futuro profesor construya un conocimiento y adquiera una experiencia concerniente a las distintas etapas del proceso de enseñanza, al menos se esperarían dos aspectos a construir: por una parte, que el cuerpo de formadores ofreciera a los futuros profesores oportunidades de aprender matemáticas tal como se espera que ellos la enseñen (transferencia del modelo didáctico), generando así procesos de modelación de la práctica de enseñanza y, por otra, que el formador planteara actividades que fueran oportunidades de aprender a enseñar matemáticas, en el sentido de planificar la enseñanza, analizar la gestión a través de episodios de

aula, y trabajar a partir de realizaciones de alumnos de secundaria, estableciendo una fuerte relación teoría-práctica (Boyd, Grossman, Lankford, Loeb y Wyckoff, 2009; Gellert, 2005).

En esta comunicación nos interesa mostrar lo que perciben estudiantes universitarios y formadores como elementos impactantes de la formación, en particular algunas de las características de las actividades propuestas por los formadores, y su gestión en el aula, y que llevan a la construcción de conocimiento profesional, de acuerdo con las opiniones recogidas en dos Focus Group con estudiantes y formadores de un Master de Formación del Profesorado de Secundaria en Matemáticas del curso 2011-2012, en la ciudad de Barcelona, España.

Fundamentos Teóricos

Muchas de las condiciones o cualidades que le son exigidas al formador son, en muchos aspectos, las mismas que le son exigidas a los profesores (conocimiento matemático y didáctico, del sistema educativo y del contexto social en el cual se desempeñan) (Jaworski, 2008). Sin embargo, la autora agrega que necesitan, además, conocimientos teóricos sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, así como sobre metodologías para indagar en estos aspectos. Este contexto le demanda al formador no sólo una práctica dirigida a ayudar a construir aprendizaje sobre la enseñanza, sino una práctica que además sea autoreflexiva, y que le permita por tanto mejorar dichos procesos, a la vez que construye un conocimiento profesional específico.

Sanchez y García, (2004), sostienen que en las múltiples relaciones entre formadores, conocimiento matemático y estudiantes, surgen los dominios base de conocimiento para la formación de profesores. La relación entre la matemática a ser enseñada y el formador, impone que éste conozca las formas en que el contenido se transforma para ser enseñado, lo que implica saber diseñar actividades o tareas a desarrollar con los profesores para construir procesos de generación de conocimiento útil para enseñar. A su vez, la relación entre el formador y los estudiantes se basa en un sistema de interacción, en el cual influyen las estructuras comunicativas que se dan en la formación, lo cual está en la base de la gestión del aula, y las condiciones que permiten compartir significados de los elementos involucrados en el proceso de aprender a enseñar. Por último, la relación entre los estudiantes y el contenido se basa en el proceso de aprender a enseñar, y será el formador quien tendrá la tarea de caracterizar dicho proceso, si lo que busca es comprender cómo aprenden sus estudiantes y, con esa información, mejorar el proceso formativo.

En cuanto al desarrollo profesional del formador se produce por procesos de aprendizaje a través de la práctica reflexiva, desarrollada en un entorno relacional, donde las interacciones que ocurren al interior de la comunidad de formadores de profesores de matemáticas les ayuda a crecer

profesionalmente (Llinares y Krainer, 2006; Zaslavsky y Leikin, 2004). Además, entender el proceso de desarrollo profesional de esta manera es particularmente útil para tratar de comprender cómo se llega a ser formador de profesores, proceso que se realiza a través de las reflexiones personales sobre las experiencias que facilitan el aprendizaje a los profesores (Zaslavsky, 2009).

Tanto el conocimiento como el desarrollo profesional del formador de profesores están ligados al modo en que reflexionamos sobre nuestras prácticas instruccionales, y sobre cómo los estudiantes construyen conocimiento para la enseñanza. Sobre la reflexión, Chapman (2009) sostiene que ésta "se inicia cuando el educador se encuentra con un algún aspecto problemático de la práctica, y trata de darle sentido" (p. 125). Sin embargo, para esta autora no es suficiente la sola indagación de la práctica, sino que es necesario que los formadores investiguen además sobre sus propios enfoques de enseñanza (cursos, programas o actividades), con la finalidad de "determinar su efectividad o la relación entre dicho enfoque y un aprendizaje efectivo y significativo" (p. 122).

El crecimiento y desarrollo profesional del formador está relacionado con las distintas dimensiones de la formación que le demandan actitudes y competencias específicas (Zaslavsky, 2008), a través de las cuales destacan de manera importante las actividades que realiza el formador, jugando un rol fundamental para lograr que cada una de estas dimensiones lleguen a ser operativas. Estas tareas tienen una alta influencia en la formación de los profesores, siendo su propósito general, en términos de diseño e implementación, permitirles construir el conocimiento necesario para enseñar matemáticas en la escuela, incluyendo lo relativo a la toma de decisiones emergentes, y ayudas para el desarrollo de características personales clave (Zaslavsky, 2007).

Además, esta autora sostiene que una parte importante del desarrollo de las tareas depende de cómo el formador las gestiona, es decir, de las maneras en que el formador usa las tareas para mostrar los enfoques didáctico-matemáticos subyacentes, así como las características personales que consideran que los estudiantes deberían desarrollar.

Desde el punto de vista del desarrollo profesional de los formadores, las tareas no sólo son los medios y el contenido por el cual se facilita el aprendizaje de los estudiantes, sino que a través de una reflexión sobre su diseño, implementación y modificación, llegan a ser los medios de aprendizaje del propio formador (Zaslavsky, 2009). Por ello, el proceso por el cual el formador llega a establecer y construir "buenas" actividades, es decir, aquellas para las cuales "la experiencia derivada de la actividad productiva consecuente informa a la práctica futura de los profesores" (Zaslavsky, 2007, p. 439), es recursivo, requiere de reflexiones sobre la práctica de enseñanza, y mucho tiempo para llegar a establecerse.

Metodología

El diseño metodológico de este estudio se basó en la contratación de la información obtenida a partir de la realización de dos Focus Group, uno con los estudiantes (FGE) y otro con los formadores (FGF), una vez que los estudiantes ya habían defendido su trabajo final de Master, y finalizado formalmente su formación.

Los participantes del FGE fueron 6 estudiantes que habían cursado el Master de Formación de Profesorado de Secundaria en Barcelona en el periodo académico 2011-2012. Este grupo fue seleccionado por haber mostrado altas tasas de participación en el programa, a la vez que una actitud crítica respecto de su propio proceso formativo. El FGF se realizó con 4 formadores que estuvieron involucrados en dicha formación, y que tuvieron directa relación con los principales cursos del ámbito didáctico.

La definición de los temas a trabajar, especificados más adelante, se estableció entendiendo la formación como proceso de cambio, y pensando en las distintas instancias que los futuros profesores experimentan a través de su proceso de formación. Con la información obtenida en el FGE, es decir, los aspectos más relevantes que los estudiantes consideraron de cada etapa de su formación, se procedió a definir cuestiones clave para ser preguntadas a los formadores. Esta manera de organizar la recolección de datos permitió poner en tensión la reflexión de los formadores en base a la opinión de los estudiantes que habían sido formados por ellos mismos, por lo que se esperaba un conocimiento profundo del contexto de dichas opiniones.

Dado este diseño metodológico, el análisis de los datos consistió en estudiar, en primer lugar, lo dicho por los estudiantes observando las opiniones más frecuentes en cada uno de los temas abordados. Para el caso de los formadores, también se realizó un análisis del contenido de su discurso, evidenciado lo más relevante de lo discutido. Además, y tal como se aprecia más adelante, se han realizado algunas conexiones clave entre ambos conjuntos de datos, que permiten concluir aspectos calves de las practicas instruccionales de los formadores en términos de impacto en el aprendizaje para la enseñanza de los futuros profesores. El esquema metodológico seguido en el estudio se puede apreciar en la siguiente figura 1.

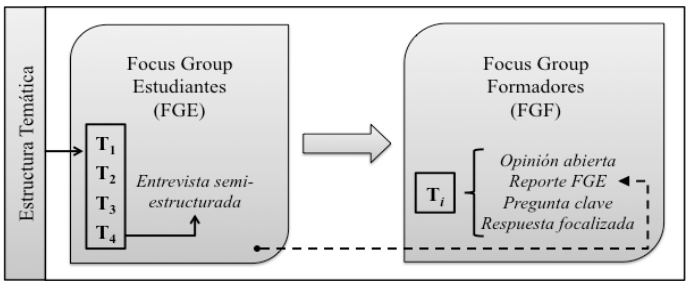


Figura 1. Diseño metodológico para la recogida de datos.

Los Focus Group se estructuraron en 4 temas nucleares: *Necesidad y expectativas de formación*, *Actividades de formación*, *Impacto y dificultades en el practicum*, y *Modelación instruccional*. A partir de la discusión de estos temas con los formadores y con base en lo dicho en el FGE, se les preguntó sobre cuatro cuestiones clave relacionadas con cada tema: (a) sobre el cuestionamiento del conocimiento matemático de base que traen los estudiantes al ingresar al Master, (b) sobre la relación entre las actividades de formación y las tareas profesionales que deberán desempeñar los futuros profesores, (c) sobre cómo se recoge la experiencia práctica en las clases y sobre su rol como tutor de la misma y (d) sobre los logros mínimos que se deberían alcanzar en la formación para ayudar a construir una idea de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas acorde con la *racionalidad formativa* del programa.

Si bien este estudio contempló una reflexión sobre la experiencia del practicum, tanto con los estudiantes como con los formadores, no la consideraremos en el análisis de resultados, ya que deseamos centrar nuestras reflexiones en las prácticas instruccionales de los formadores, tanto a nivel de las actividades propuestas como de la gestión en el aula, que han resultado impactantes para los estudiantes y les han llevado a la construcción de conocimiento profesional inicial.

Resultados

Al ser cuestionados los formadores por las necesidades y/o expectativas que creen que tienen los estudiantes al entrar al master, ven una clara diferencia entre el conocimiento matemático que se posee de la formación inicial y aquel que es necesario para la enseñanza. Sin embargo, los estudiantes no mencionan el conocimiento matemático específico como una necesidad de formación del master, pues consideran que saben suficientes matemáticas como para enseñar en la escuela: "lo que no quería del master, sobre todo, era que me explicaran el temario, yo no quería que me enseñaran más del temario de matemáticas de secundaria, porque eso ya me lo sabía o ya me lo aprenderé" (E2).

De esto surge una pregunta clave a los formadores: ¿cómo afrontan en los cursos que imparten en el Master el hecho de que los estudiantes no cuestionen su conocimiento matemático de entrada? Los formadores sostienen que el cuestionamiento del conocimiento matemático es un elemento significativo de la planificación de los cursos, por lo que es parte sustancial de las actividades de formación. Como estrategia para ello, los formadores ven en la resolución de problemas matemáticos escolares una vía para el conflicto del conocimiento matemático de entrada de sus estudiantes: "una de las vertientes del programa del master, creo yo, es poner al alumno delante de situaciones, alumnos del master, en que su alumno del colegio o el instituto se verá puesto durante las clases de matemáticas" (F3). Esto permite, según este formador, que los estudiantes

del master vivencien las dificultades que tendrían sus alumnos en la construcción del conocimiento matemático.

Sobre las actividades o formas de trabajo que impactan mayormente a los estudiantes, los formadores resaltan una en particular: "yo, no tengo duda, las que traen situaciones del aula a la clase" (F1). Según ellos, estas actividades permiten formar a los estudiantes en la observación de la comprensión que los alumnos van construyendo de un determinado tema de estudio. Por otra parte, la presentación de actividades problematizadoras, tanto didácticas como matemáticas, tienen alto impacto en los estudiantes, dada la cultura de enseñanza aprendizaje que estos estudiantes tienen: "esto creo que les impacta porque fundamentalmente nunca han trabajado así. Las clases que han recibido en donde sea, eh?... la tarea del profesor es exponer, explicar, muy bien o muy mal, es igual…" (F4). Este tipo de actividad problematizadora desarrollada en el master concuerda con la alta valoración que dan los estudiantes a la resolución de problemas: "plantear un problema, (…) y ver cómo desde un problema muy sencillo, de una cuestión casi casi trivial, puedes llegar a construir muchísimo, y sobre todo que puedes diseñar esos problemas para que todo el mundo sea capaz de llegar, (…) eso me pareció fascinante" (E5).

Considerando que la formación prepara para la práctica profesional, a los formadores se les pide reflexionar sobre la relación entre las actividades de formación y las tareas profesionales que el profesor deberá desempeñar en sus contextos laborales, y en particular si las primeras deben estar enfocadas a simular las segundas. Entre los formadores hay consenso en que existe un grupo de actividades de formación sobre las cuales debe lograrse una identificación con la profesión, es decir, que determinadas actividades que se presentan en la formación son precisamente aquellas tareas que tendrán que desarrollar los estudiantes en su contexto laboral. Entre ellas, los formadores distinguen como mínimo tres tareas profesionales nucleares: planificación, entendida como la creación de actividades de enseñanza aprendizaje de acuerdo con el currículum, gestión de la interacción y comunicación del conocimiento matemático a partir de las actividades elaboradas, y evaluación en el sentido de identificación del grado de logro de procesos y conceptos matemáticos en los alumnos.

Respecto del impacto de las prácticas instruccionales desarrolladas por los formadores, los estudiantes reconocen en ellas coherencia, es decir, consideran que desarrollan su práctica de la misma forma en que señalan que ellos deberían hacerlo en la escuela: "a nivel de formadores, en la parte más de matemáticas, pues casi todos, excepto uno que era más tradicional, te la hacían del modo que querían… que al final las clases se hacían del modo cómo querían ellos que aprendieses, y con eso… o sea, aprendes más con la práctica y cómo te están cuestionando los mismos formadores (…) en general, a mi lo que es la parte de matemáticas, hacían las mates, pues con

problemas, y aunque habían otras más tradicionales, en principio, predicaban con el ejemplo" (E2). Asimismo, los estudiantes señalan que la formación es inclusiva y que está basada en la reflexión.

Considerando estas características de su formación, los estudiantes señalan que han podido percibir la complejidad de la enseñanza, tanto en lo matemático como en lo didáctico. Además, señalan el cambio que han vivido en cuanto al foco del conocimiento profesional: desde la idea inicial de que para enseñar no se necesita más matemática que la que ya se sabe, se descubre la necesidad del cómo enseñar, y a partir de aquí se sostiene que existen tanto unas matemáticas específicas para la enseñanza, como un conocimiento sobre matemáticas necesario para desarrollarla: "Pero incluso en el 'qué', yo pensaba: en realidad yo no vengo a aprender aquí matemáticas porque ya sé suficientes como para secundaria. Y al ver que tampoco, (tampoco se suficiente), cuanta matemática has de tu aprender para poder ser profesor de secundaria (…) No tenía tan claro el concepto este de: qué matemáticas tenemos que saber para ser profesores de secundaria (…) Aunque no sea el contenido que directamente se enseña, pero ese otro contenido que tiene que envolver aquello que se enseña, pues yo no… arrogantemente quizá no era tan consciente de eso" (E1).

A partir del cambio de ciertas creencias evidenciadas por los estudiantes, se discute con los formadores cuáles serían los aspectos fundamentales que debe abordar la formación en cuanto la imagen que tienen los estudiantes de la enseñanza, el aprendizaje y las matemáticas. Los formadores sostienen que hay dos aspectos deseables que debiera cumplir un programa de formación: el quiebre epistémico-profesional y la obtención y manejo de herramientas (conceptuales y técnicas). Para lograr esto, los formadores discuten qué modelo de formación sería más propicio: el modelo transversal (planificación, gestión, evaluación) o el modelo temático (didácticas de temas específicos). Dado que lo que impacta a los estudiantes es la coherencia de las prácticas instruccionales, para los formadores sería la gestión de las actividades y del aprendizaje en general lo que contribuye a lograr estos mínimos, y no tanto el tipo de estructura curricular a la cual están expuestos los estudiantes durante su formación.

Discusión de Resultados y Conclusiones

Lo primero que se observa como relevante en este estudio, es el cambio en la idea que tienen los estudiantes respecto del lugar que ocupa el conocimiento matemático en la enseñanza de la matemática escolar. Por medio de diversas estrategias (poner a los estudiantes en situación de alumnos) y la aplicación de actividades de formación desafiantes, se logró que los estudiantes consideraran la necesidad de tener un conocimiento matemático específico para la enseñanza (Ball, Thames y Phelps, 2008), y ya no solo el conocimiento matemático general que traían de su

formación académica y/o escolar. Este cambio se basa en el enfoque didáctico del programa, la Resolución de Problemas, altamente valorado por los estudiantes, y también en el diseño e implementación de las actividades de formación.

Los formadores establecieron en estas actividades una relación teoría-práctica permanente (utilización de casos de aula para el análisis didáctico por parte de los estudiantes), basando el aprendizaje de la enseñanza a partir del estudio de la práctica (Zaslavsky, 2008), lo cual tiene una alta influencia en la formación de los profesores y permite construir el conocimiento necesario para la enseñanza (Zaslavsky, 2007). Además de las actividades didáctico-matemáticas que el formador diseña e implementa, para los formadores la gestión es un aspecto crucial en la relación entre el formador y el estudiante (Sanchez y García, 2004), ya que dicha gestión permite evidenciar los enfoques didácticos que subyacen la actividad instruccional del formador (Zaslavsky, 2007).

El impacto de las prácticas instruccionales del formador, se constituye por los actos formativos que se desarrollan, tanto a nivel de actividades como de gestión de clases, en su función de elementos modeladores de la práctica. No obstante, el impacto no está sólo en ambos elementos de manera puntual, ni tampoco únicamente en su relación, sino en la coherencia que presenta el formador entre lo que hace (actos formativos) y lo que dice que se debe hacer en los procesos de enseñanza aprendizaje. Esta coherencia será lo que permitirá evidenciar la racionalidad formativa del programa, y por tanto entregar el modelo que se busca que utilicen los profesores en su práctica, al menos en las etapas noveles.

Creemos que es muy relevante para la formación de profesores ahondar en la *racionalidad formativa* que evidencia el formador, para lo cual esperamos indagar en cuál es su sustento teórico en relación a la elección de tareas, del discurso que usa para justificar dicha elección, de la estructura de las tareas, de la interacción con los profesores durante la actividad, y de las formas en que el formador promueve la reflexión sobre la experiencia de aprendizaje producida (Zaslavsky, 2007).

Referencias bibliográficas

Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. C. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389 - 407.

Boyd, D. J., Grossman, P. L., Lankford, H., Loeb, S., y Wyckoff, J. (2009). Teacher Preparation and Student Achievement. *Educational Evaluation and Policy Analysis, 31*(4), 416-440.

Chapman, O. (2009). Educators reflecting on (researching) their own practice. In R. Evan y D. L. Ball (Eds.), *The professional education and development of teachers of mathematics. The 15th ICMI Study* (pp. 121 - 126). New York: Springer.

Gellert, U. (2005). La formación docente entre lo teórico y lo práctico. In I. M. Gómes-Chacón y E. Planchart (Eds.), *Educación matemática y formación de profesores. Propuestas para Europa y Latinoamérica*. Bilbao: Univeridad de Deusto.

Jaworski, B. (2008). Mathematics teacher educator learning and development. In B. Jaworski y T. Wood (Eds.), *The mathematics teacher educator as a developing professional. Handbook of mathematics teacher education* (vol. 4, pp. 1-13). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Llinares, S., y Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. In A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Hanbook of research on the psycology of mathematics education (PME)*. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Sanchez, V., y García, M. (2004). Formadores de profesores de matemáticas: una aproximación teórica a su conocimiento profesional. *Revista de Educación, 333*, 481-493.

Zaslavsky, O. (2007). Mathematics-related task, teacher education, and teacher educator. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10*(4-6), 433-440.

Zaslavsky, O. (2008). Meeting the challenges of mathematics teacher education through design and use of task that facilitate teacher learning. In B. Jaworski y T. Wood (Eds.), *The mathematics teacher educator as a developing professional. Handbook of mathematics teacher education.* (vol. 4, pp. 93 - 114). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Zaslavsky, O. (2009). Mathematics educators' knowledge and development. In R. Evan y D. L. Ball (Eds.), *The professional education and development of teachers of mathematics. The 15th ICMI Study* (pp. 105 - 111). New York: Springer.

Zaslavsky, O., y Leikin, R. (2004). Professional developmentof mathematics teacher educators: growth through practice. *Journal of Mathematics Teacher Education, 7*, 5-32.

ELEMENTOS DE CONOCIMIENTO MATEMÁTICO EN ESTUDIANTES PARA PROFESOR DE MATEMÁTICA. EL CASO DE LOS POLÍGONOS

Nuria Climent, Emma Carreño y C. Miguel Ribeiro
Universidad de Huelva. España
Universidad de Piura. Perú
Universidad de Algarve. Portugal
climent@uhu.es, emma.carreno@udep.pe, cmribeiro@ualg.pt

Resumen. Partimos de que el conocimiento del profesor de matemática es especializado en su conjunto, tal como se señala en el modelo Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK), propuesto por Carrillo y colaboradores (grupo SIDM). Considerando esa especialidad y especificidad, centramos la atención en los subdominios que se corresponden al dominio de conocimiento matemático (Matematical Knowledge) para buscar evidencias de Conocimiento de los Temas (KoT), Conocimiento de la Estructura de la Matemática (KSM) y Conocimiento de la Práctica de Matemática (KPM), en el abordaje que hace Martha, una estudiante para profesor sobre el contenido de Polígonos.
Palabras clave: conocimiento especializado, MTSK, formación inicial
Abstract. We assume that the mathematics teacher's knowledge is specialized as a whole, just as it is outlined in the model Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) proposed by Carrillo and collaborators (SIDM group). Considering that specialty and specificity, we focus on the subdomains that correspond to mathematical knowledge domain (mathematical Knowledge) to look for evidence of Knowledge of the Topics (KoT), Knowledge of the Structure of Mathematics (KSM) and Knowledge of the Practice of Math (KPM), in the approach that Martha makes. Martha is a student teacher on the content of Polygons.
Key words: specialized Knowledge, MTSK, initial training

Introducción

El conocimiento matemático ha sido y es uno de los focos más preocupantes y problemáticos en toda formación escolar y académica (refiriéndonos a una formación superior, técnica o universitaria). Los malos resultados evidenciados por los estudiantes en la matemática escolar, y su relación con el conocimiento del profesor llevan a plantearnos la influencia que ejerce, sobre esta realidad, la formación de los estudiantes para profesor (EPP), así como la formación continua de quienes ya son profesores.

Numerosas investigaciones han abordado la importancia que tiene que los profesores sepan lo que enseñan (Contreras & Blanco, 2001), coincidiendo en que el conocimiento del contenido es uno de los factores decisivos en un buen desempeño docente. No obstante, el conocimiento "puro" del contenido, en el sentido de conocimiento del tópico en sí mismo, es insuficiente para promover aprendizajes en los alumnos, por lo que se precisa además otro tipo de conocimiento, el que Shulman (1986) denominó conocimiento didáctico del contenido (PCK) (siglas de la denominación original Pedagogical Content Knowledge). El aporte de Shulman es relevante porque llama la atención sobre el foco de los planes de formación docente de aquella época, interpelando sobre la especificidad y las características (o estructura) del conocimiento del profesor.

Dado que su propuesta podía vincularse a cualquier área curricular, se precisaba investigaciones centradas en la matemática, razón por la cual la conceptualización del Mathematics Knowledge for Teaching (MKT) propuesto por Ball, Thames y Phelps (2008) cobra importancia. Los trabajos del grupo de investigación de la Universidad de Michigan (liderado por Deborah Ball) han sido referentes para iniciar una reflexión profunda sobre el contenido y las características que ha de tener el conocimiento del profesor de matemática. Partir de que dicho conocimiento es especializado porque es específico del profesor de matemática, dado que le es necesario para enseñar, ha sido la mayor contribución del modelo. Junto a esto, la consideración de que el conocimiento matemático (MK) puede caracterizarse, según sus matices, en tres subdominios, al igual que el conocimiento didáctico del contenido (PCK), nos ha llevado a intentar aclarar la naturaleza de cada uno de los subdominios y a pensar el contenido que se incluye en cada uno cuando nos situamos en un tema en concreto.

Ese proceso de reflexión ha permitido vislumbrar solapamientos entre subdominios como Conocimiento común del contenido (Common Content Knowledge-CCK) y Conocimiento especializado del contenido (Specialized Content Knowledge-SCK), pertenecientes al dominio de MK e incluso, entre subdominios de dominios distintos tales como el SCK con el Conocimiento matemático y de los estudiantes (Knowledge of Content and Students-KCS), este último incluido en el PCK. Esta confusa delimitación nos ha llevado a plantear un nuevo modelo cuya premisa de partida es que el conocimiento del profesor de matemáticas es especializado en su conjunto y no solo un subdominio (Escudero, Flores, & Carrillo, 2012); (Carreño & Climent, en prensa).

Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática (MTSK)

El nombre del modelo procede de aquella especialidad y especificidad que se ha mencionado antes, y las siglas se toman de su traducción al inglés: Mathematics Teacher's Specialised Knowledge. Otros aspectos que se consideran en el MTSK son: el referente desde el que se propone y analiza cada subdominio es la matemática y; las creencias en la matemática y en la enseñanza, y aprendizaje de la matemática; influyen en todo el proceso de adquisición y de análisis del MTSK que posee un profesor de matemáticas.

El MTSK se estructura en dos grandes dominios: el conocimiento matemático (mathematical knowledge-MK) y el conocimiento didáctico del contenido (pedagogical content knowledge-PCK). El primero está ligado a la matemática en sí misma, como disciplina que necesita conocer el profesor para enseñar un contenido determinado. Por su parte, el PCK conjuga aquel conocimiento disciplinar con los conocimientos pedagógicos, psicológicos y curriculares que se precisan para desarrollar las tareas de enseñanza. En el MK se incluyen los subdominios de

Conocimiento de los Temas Matemáticos (KoT), Conocimiento de la Estructura de la Matemática (KSM) y Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM). En el PCK se sitúa el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM) y Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS) (Carrillo, Climent, Contreras, & Muñoz-Catalán, en prensa).

Dado que en este documento nos centraremos solo en los subdominios del MK, describiremos brevemente estos:

❖ Conocimiento de los Temas Matemáticos (KoT): Es el conocimiento de los conceptos, proposiciones (teoremas, corolarios, axiomas), propiedades, procedimientos, clasificaciones, fórmulas y algoritmos, con sus respectivos significados y demostraciones. También se incluye en este subdominio las conexiones intraconceptuales puesto que están vinculadas al conocimiento del significado de un elemento específico (Montes, Aguilar, Carrillo, & Muñoz-Catalán, en prensa). Conjugar lo interior, es lo que permite señalar que el KoT tiene un carácter de avanzado (no básico), necesario para la enseñanza puesto que, considerando a Shulman (1986) "To think propely about content knowledge requires going beyond knowledge of the facts or concepts of a domain" (p. 9).

❖ Conocimiento de la Estructura de la Matemática (KSM): Es el conocimiento de las principales ideas y estructuras de la matemática (Carrillo et al. (en prensa)). Si bien este subdominio se refiere al conocimiento matemático, se diferencia del KoT porque, se centra en la matemática como un sistema unificado, de allí que en él se conjuguen los conceptos de complejización (matemática elemental desde un punto de vista avanzado), simplificación (matemática avanzada de una perspectiva elemental); así como las conexiones interconceptuales (Fernández, Figueiras, Deulofeu, & Martínez, 2010).

❖ Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM): el conocimiento de las prácticas de la matemática es por un lado, el conocimiento de cómo se hace matemática, lo que incluye cómo se elaboran definiciones o demostraciones, cómo se establecen las conexiones de las que se habló en los subdominios anteriores y por otro lado, cómo se establecen los convenios matemáticos y la respectiva justificación de los mismos. En palabras de Montes et al. (en prensa) es "la reflexión sobre la manera de hacer matemática".

Método y Evidencias de Conocimiento Matemático

Los ejemplos que se muestran son extraídos de algunos ítems de un cuestionario que indaga sobre el conocimiento especializado de estudiantes para profesor de Matemáticas de secundaria, cuando abordan el tema de polígonos. En este documento solo emplearemos las respuestas de Martha,

una estudiante de 22 años que cursaba el último año de su formación inicial. Ella, aunque no había tenido un rendimiento académico brillante, mostró disposición para reflexionar sobre su propio conocimiento, al momento de completar el cuestionario. Además, contaba con cierta experiencia de enseñanza ya que dictaba clases particulares a estudiantes de primaria y secundaria.

La discusión de las evidencias se realiza a través de indicadores elaborados para el análisis del cuestionario. Estos emergieron, en algunos casos, de la revisión de la literatura y en otros, del mismo proceso de análisis. También, como resultado de las sesiones de trabajo del grupo SIDM para construir el MTSK, surgieron una serie de categorías que dotan de contenido y estructuran cada subdominio. Estas han sido vinculadas a los indicadores para describir las evidencias de conocimiento inferidas.

Los ejemplos que se muestran proceden de la situación I del cuestionario (este proponía 4). En ella se plantea que al iniciar el tema de Polígonos, en una clase de 2° de secundaria (13-14 años), la profesora pide a sus alumnos que piensen qué es un polígono y cómo lo definirían. Luego de unos minutos, ella copia en la pizarra cuatro de esas definiciones: i) Es un cuerpo geométrico que tiene lados y ángulos diferentes. Pueden ser: cóncavos, convexos, regulares e irregulares; ii) Un polígono es una figura geométrica que tiene lados y ángulos de medidas iguales; iii) Es una figura geométrica la cual posee más de dos lados y sus ángulos miden más de 180°, su fórmula sería 180°(n-2); iv) Es una figura geométrica cerrada, compuesta por la unión de 3 o más puntos y que ocupa un lugar en el plano, los puntos no deben cruzarse.

Así, a partir de esta situación, se propone a los estudiantes para profesor distintas cuestiones, tales como: analizar las definiciones anteriores y valorarlas según los errores (E), conceptos confundidos (CC) e ideas válidas (IV) que se comunican en las definiciones (i, ii, iii y iv); identificar los subconceptos (SC) que a esos estudiantes de secundaria les hace falta aprender, antes de construir el concepto de polígono y finalmente, definir polígono y representar gráficamente polígonos y no polígonos. Las letras indicadas entre paréntesis constituyen el código de las unidades de información determinadas, según se extraigan de la definición dadas.

❖ Ejemplo 1: Errores, conceptos confundidos e ideas válidas de las definiciones dadas

Del análisis y valoración que hace Martha de las definiciones (i) y (iii) (ver Tabla 1) se extraen unidades de información que proporcionan indicios de KoT y KPM.

Definición dada por:	Errores de la definición	Conceptos que está confundiendo (interpretación del error)	Ideas válidas/ justificación de tal consideración
(i)	Tienen lados y ángulos diferentes (no siempre va a ser así.)	Pueden ser: cóncavos, convexos, regulares e irregulares. (Aquí (i) está fundiendo la clasificación por sus ángulos y por sus lados con la definición). Cuerpo geométrico.	Pueden ser cóncavos y convexos, así como regulares e irregulares. (Tiene la idea de cómo se pueden clasificar los polígonos).
(iii)	Sus ángulos miden más de 180°. Quiere decir que sus ángulos no pueden tomar menores valores de 180°. Es una figura geométrica ¿cerrada o abierta?	Su fórmula 180°(n-2) (Está confundiendo la fórmula, con la definición de polígonos).	Es una figura geométrica que posee más de dos lados (…) (Hasta aquí está bien la afirmación pero faltaría complementarla con más información para que tenga la definición de polígono)

Tabla 1. Respuestas de Martha al valorar las definiciones dadas de Polígono.

Las unidades de información muestran que el conocimiento de Martha está centrado predominantemente en el KoT, asociado a las categorías "propiedades" y "clasificación". Así, por ejemplo, al indicar como error: Tiene lados y ángulos diferentes (no siempre va a ser así) [E-i] hace pensar que este es parcial, sobre todo por la acotación final que hace. De igual forma, parece suceder al señalar: Sus ángulos miden más de 180° (Quiere decir que sus ángulos no pueden tomar menores valores que 180°) [E-iii] pues, lo último lleva a pensar que conoce que los ángulos también pueden medir menos de 180°. Otras evidencias de que Martha **conoce las propiedades o características de los polígonos** aparecen cuando determina como concepto confundido: Cuerpo geométrico [CC-i], aunque no indica con qué concepto puede estarse confundiendo (i); y también, al señalar como idea válida: Es una figura geométrica que posee más de dos lados [IV-iii]. Por otro lado, Martha evidencia que **conoce los criterios para clasificar los polígonos** y también **conoce las clases o tipos de polígono**, al indicar: (Aquí (i) está confundiendo la clasificación por sus ángulos y por sus lados con la definición) [CC-i], así como al señalar: Pueden

ser cóncavos y convexos, regulares e irregulares (Tiene la idea de cómo se pueden clasificar los polígonos) [IV-i], respectivamente.

También, aunque en menor proporción, se ha notado indicios de KPM, concretamente de la categoría denominada "modos de proceder en matemática", ya que por sus respuestas, Martha evidencia que **conoce las formas de crear o producir matemática**, concretamente, sabe qué es una definición matemática y por ende, repara en lo que es definir (Aquí (i) está confundiendo la clasificación (por sus lados y por sus ángulos) con la definición [CC-i], Su fórmula 180° (n-2) Está confundiendo la fórmula con la definición de polígono [CC-iii]); en las imprecisiones (Es una figura ¿cerrada o abierta? [E-iii]) u omisiones (Es una figura geométrica que posee más de dos lados. (Hasta aquí está bien la afirmación pero faltaría complementarla con más información para que tenga la definición de polígono) [IV-iii]) que presentan las definiciones dadas.

- **Ejemplo 2:** Subconceptos que hace falta trabajar con los alumnos (i, ii, iii y iv) para construir una definición correcta.

Tomando como referencia el trabajo de Contreras y Blanco (2001), entendemos como subconceptos los conceptos que son necesarios construir antes para comprender el concepto de polígono. Esta noción se proporcionó en el cuestionario mismo, pero pese a ello, este ítem resultó ser difícil de comprender, de allí que en la categoría de conexiones matemáticas se observe un conocimiento bastante elemental, asociado con "conceptos que permiten refutar o aclarar errores o conceptos confundidos" (¿Qué es un cuerpo geométrico? ¿Hay alguna diferencia entre cuerpo geométrica y figura geométrica? ¿Es lo mismo cuerpo y figura geométrica? [SC-i]); "conceptos quese involucran en la definición dada" (Se debería trabajar conceptos de ángulos y lados según se medida. [SC-ii].) y, "conceptos que precisan o permiten discriminar lo que es un objeto (Para trabajar bien la definición se necesitaría tener un concepto más, región interior de una figura geométrica [SC-iv]).

- **Ejemplo 3:** Definición de polígono y representación gráfica de polígonos y no polígonos.

Luego de que Martha realiza las tareas de los ítems anteriores, se le pide construir una definición adecuada para 2° de secundaria (asumiendo ella el rol de profesora) y además, ejemplificarla trazando 3 dibujos de polígonos y 3 de no polígonos. Su respuesta es la siguiente:

> "Un polígono es una figura geométrica plana cerrada que posee una región poligonal y está compuesta por la unión de tres o más puntos no colineales".

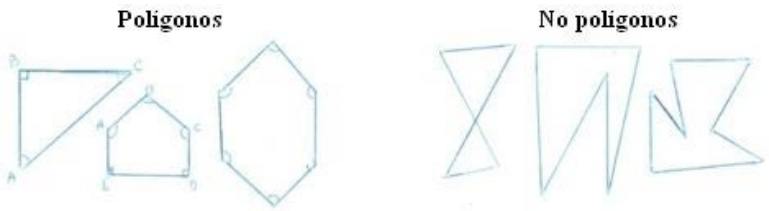


Figura. 1. Polígonos y no polígonos dibujados por Martha

Lo anterior, permite ver que, aún cuando tiene idea de que una definición matemática ha de ser precisa y breve, al explicitar qué es un polígono omite características que sí muestra en sus dibujos, haciendo pensar que su imagen conceptual de polígono es más restrictiva que la definición verbal que construye. Este conocimiento lo asociamos a las siguientes categorías e indicadores.

Sub-dominio	Categoría	Indicador	Conclusión extraída del ejemplo
KoT	Definiciones	Conoce una idea o definición verbal de polígono.	Los polígonos son figuras cerradas y convexas.
	Registros	Conoce las características críticas de los polígonos.	Figura geométrica cerrada. Posee una región poligonal. Compuesta por la unión de 3 o más puntos no colineales.
KPM	Modos de proceder en matemática	Conoce las formas de crear o producir matemática	Centrándonos en qué es una definición matemática, Martha repara poco en la precisión de su definición pues cae en redundancias (figura geométrica plana); añade características accesorias (posee una región poligonal), aunque por sus dibujos, es posible que esta característica le permite diferenciar un polígono de un no polígono y por ende, excluir a los de lados cruzados; y no explicita si los ángulos pueden ser cóncavos (ya que antes había dejado ver que solo podían ser convexos).
KSM	Conexiones	Conoce los conceptos matemáticos que se conectan.	Al definir conecta: figura plana, región interior, puntos no colineales.

Tabla 2. Evidencias de KoT, KPM y KSM.

Comentarios Finales

El MTSK parte de la consideración de que el conocimiento del profesor de matemáticas es específico de él, de allí su carácter especializado; se caracteriza por involucrar varias dimensiones

(disciplinar, didáctica y curricular) pero no como compartimento estancos, sino como un todo integrado. Es posible que haya conocimientos que comparta con otros profesionales pero, eso no es interés del modelo pues lo realmente importante es indagar sobre el conocimiento, en y desde sus distintas dimensiones, que pone en juego un profesor de matemática cuando enseña esta ciencia.

Los subdominios que integran el modelo son caracterizados y diferenciados entre sí, en un primer nivel, a través de categorías, tales como: propiedades, clasificaciones, definiciones y registros (entre otras) para el KoT; modos de proceder en matemática para el KPM y conexiones matemáticas para el KSM. En un segundo nivel, estas categorías se concretizan más a través de indicadores. En el KoT se tienen algunas como: conoce las propiedades o características de los polígonos (propiedades), conoce los criterios para clasificar los polígonos y conoce las clases o tipos de polígonos (clasificaciones), conoce una idea o definición verbal de polígono y conoce las características críticas de los polígonos (definiciones), conoce las representaciones gráficas de los polígonos y sus elementos (registros). Al KPM se ha asociado: conoce las formas de crear o producir matemática (modos de proceder en matemática) mientras que, al KSM se ha vinculado: conoce los conceptos matemáticos que se conectan (conexiones matemáticas).

Finalmente, del conocimiento evidenciado por Martha, puede decir que ha predominado el KoT. Así pues es claro que tiene idea sobre los polígonos y conoce varias de sus características. Esto le permite trazar representaciones gráficas, que aunque sean poco variadas o en algunos casos restrictivas, por lo general se corresponden con lo que se entiende por ese objeto. La mayor evidencia del KPM es el reparo en qué es una definición matemática y por ende, en los aspectos que hay que cuidar, aunque estos no se expliciten. Del KSM, apenas puede inferirse unas conexiones elementales entre conceptos que definen lo que es un polígono (figura plana, región interior, puntos no colineales).

Agradecimientos Los autores son miembros del proyecto de investigación "Conocimiento Matemático para la enseñanza respecto de la resolución de problemas y el razonamiento" (EDU2009-09789EDUC), financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación en España.

Referencias bibliográficas

Ball, D. L., Thames, M., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education* (59), 389-407.

Carreño, E. R., y Climent, N. (en prensa). Specialized and horizon content knowledge- Discussing prospective teachers knowledge on polygons. *Proceedings of the Eighth Congress European of Mathematics Education.*

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L., y Muñoz-Catalán, M. (en prensa). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. *Proceedings of Eighth Congress of European Research in Mathematics Education.*

Contreras, L., y Blanco, L. (2001). ¿Qué conocen los maestros sobre el contenido que enseñan? Un modelo formativo alternativo. *XXI. Revista de educación*(3), 211-220.

Escudero, D., Flores, E., y Carrillo, J. (2012). El Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas. In L. Sosa, E. Aparicio, y F. Rodríquez (Ed.), *Memorias de la XV Escuesta de Invierno en Matemática Educativa*, (pp. 35-42). México, D.F.

Fernández, S., Figueiras, L., Deulofeu, J., y Martínez, M. (2010). Redefining HCK to approach transition. In M. Pytlak, T. Rowland, y E. Swoboda (Ed.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mahtematics Education* (pp. 2610-2649). Poland: University of Rzeszów.

Montes, M. Á., Aguilar, Á., Carrillo, J., y Muñoz-Catalán, M. C. (en prensa). MTSK: From common and horizon knowledge to knowledge of topics and structures. *Proceedings of the Eighth Congress European of Mathematics Education.*

Shulman, L. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *American Educational Research Association, 15*(2), 4-14.

EL ROL DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR EN LA CONSTRUCCIÓN DE SIGNFICADOS TRIGONOMÉTRICOS

Gisela Montiel Espinosa
Instituto Politécnico Nacional México
gmontiel@ipn.mx

Resumen. Presentamos una discusión sobre el carácter normativo del discurso Matemático Escolar, a propósito de un estudio realizado a las producciones de profesores mexicanos de nivel medio superior, en la resolución de una situación-problema de cálculo de distancias inaccesibles, para reconocer los significados trigonométricos que subyacen a sus acciones. El estudio incorporó el análisis de los libros de texto, con el propósito de identificar las posibles condiciones escolares relacionadas con estos significados, y que pudieran transmitirse (en un sentido didáctico) a los estudiantes. Resultado de este estudio pudimos identificar las bases de comunicación de la trigonometría escolar y su relación con los fenómenos didácticos identificados en la literatura.
Palabras clave: Discurso Matemático Escolar, Significados Trigonométricos
Abstract. We present a discussion of the normative character of the Mathematic Scholar discourse, regarding a research of Mexican high school teachers' productions, in the resolution of a problem-situation of in accessible distance calculation, in order to recognize the trigonometric meanings underlying their actions. The study included the analysis of textbooks, in order to identify potential school conditions related to these meanings, that could be transmitted (in a didactical sense) to students. As a result of this research we could identify *communication bases* for school trigonometry and its relationship to didactic phenomena, already identified in the literature.
Key words: Scholar Mathematic Discourse, Trigonometric Meanings

Introducción: El Estudio Referido

En la investigación de Jácome (2011) profesores mexicanos del nivel medio superior, en un contexto de actualización docente, llevaron a cabo una experiencia didáctica cuya intención fue trabajar relaciones de proporcionalidad en la construcción de modelos geométricos para resolver una situación-problema tradicional de 'cálculo de distancias inaccesibles'. El diseño de la situación-problema pone énfasis en la toma de medidas angulares y en la construcción de modelos geométricos a escala, a través de la experiencia y la manipulación. Es decir, no se les proporcionó una ilustración con medidas hipotéticas, sino que se les pidió localizar un objetivo (alto) en su entorno para calcular su altura.

En los reportes entregados por los profesores se pueden observar distintos fenómenos, entre los cuales se presentó uno (ver figura 1) que no se había reportado y, por lo tanto, atendido en la investigación sobre estos tópicos.

Los pasos que sigue el profesor para calcular la altura de un objetivo alto, tomando medidas a 1, 2 y 3 metros de distancia de él, son básicamente los de la tradición escolar. Asumir la relación entre el ángulo y el cateto adyacente como relación de (de)crecimiento constante, no afectó a la resolución de la situación problema, por lo que los profesores obtuvieron la altura de su objetivo.

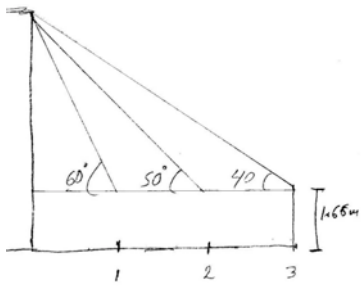


Figura 1. Ejemplo de significado lineal en la relación ángulo-distancia (cateto).

Surgió la inquietud inmediata por entender a qué se debe que el profesor no reconozca que esta relación no sólo no es posible, sino que de ser posible no serían necesarias las razones trigonométricas para resolver el problema. Podríamos decir entonces que quienes resuelven la situación-problema con la RTT estarían haciendo uso sin sentido de ella.

A partir de la experiencia de este estudio se han analizado los reportes de resolución de los profesores y algunos libros de texto, autorizados (en el periodo en el que se llevó a cabo la experiencia con los profesores) por la Secretaría de Educación Pública mexicana, en tanto distinguimos en la actividad y la producción del profesor de matemáticas, una expresión de su conocimiento del contenido escolar y de su didáctica como productos de su formación y su experiencia docente.

Es decir, nuestra perspectiva no se ocupa del sujeto cognoscente, sino del sujeto social que construye su conocimiento a partir de la interacción con su entorno inmediato: el profesor como un profesional formado en el mismo sistema educativo donde ahora ejerce una practica docente. Se analizan los libros de texto porque constituyen el mediador entre la práctica docente y el Programa de Estudios, y en ese sentido se convierte en la herramienta didáctica que "puede asegurar" al profesor estar siguiendo el enfoque didáctico que se le exige.

Fundamentación Teórica

Se constituyó un marco conceptual con dos planteamientos teóricos: la racionalidad práctica (Mesa y Herbst, 2011)y la construcción social de conocimiento trigonométrico (Montiel, 2011); asumiendo el significado como asociado a la actividad humana, que se identifica a partir de la intención (implícita) conectada a la acción (Kilpatrick, Hoyles, Skovsmose y Valero, 2005).De ahí que denominemos *significado lineal* a lo que subyace a la acción del profesor de plasmar una relación de (de)crecimiento constante en la relación ángulo-cateto adyacente en un triángulo rectángulo. Se eligen estos planteamientos teóricos por estar referidos específicamente al conocimiento trigonométrico.

Racionalidad Práctica del Profesor de Trigonometría

Herbst y Chazan (2011) caracterizan la racionalidad práctica como un contenedor de disposiciones, entendidas éstas en el sentido de Pierre Bourdieu como categorías de percepción y apreciación, que son viables en la enseñanza de las matemáticas para garantizar (o refutar) cursos de acción en ella. Con ello los autores se proponen caracterizar las bases donde el profesor justifica sus acciones. Estas disposiciones tienen incidencia en un colectivo y están presentes para cumplir tanto con las *normas* de una situación instruccional específica, como con las obligaciones profesionales de la enseñanza de las matemáticas.

Muy en particular, en una situación instruccional de "cálculo de valores de funciones trigonométricas" Mesa y Herbst (2011) identifican que la racionalidad práctica del profesor justifica al menos tres normas:

- ninguno, profesor o estudiante, se responsabiliza por justificar los pasos de solución en un ejemplo o por explicar por qué una respuesta tiene sentido.
- los estudiantes no tienen control sobre los pasos a seguir cuando el instructor resuelve ejemplos en el pizarrón; y.
- el instructor siempre proporciona suficiente información para resolver los problemas dados como ejemplo.

A partir del reconocimiento de estas normas, los autores identifican en la curricula del *community college* una percepción de la Trigonometría como proveedor de habilidades y conocimiento técnico para asignaturas más avanzadas, lo cual podría explicar por qué el profesor no invierte tiempo del curso en actividades distintas. Los autores consideran que esto influye para que las actividades didácticas tiendan a la repetición y a la modelación de procedimientos conocidos para que los estudiantes ganen familiaridad con el material, lo que eventualmente demostrará que han adquirido maestría con él.

Construcción Social de Conocimiento Trigonométrico

Montiel (2011) identifica, en escenarios históricos, a la anticipación como la práctica social que reguló las actividades asociadas a la matematización de la astronomía, ya sea para la predicción o la explicación de fenómenos celestes, era necesario que éste sucediera para estar en condiciones de comprobar el dato y a la vez el modelo; la matematización, numérica o geométrica, orientaba las decisiones prácticas de la agricultura, el comercio o la navegación, del mismo modo que guiaba a las explicaciones teóricas de la astronomía o la geografía. Esto es, se tenía la "necesidad" de

anticipación al fenómeno. Este acto anticipatorio preconfigura la emergencia de un conocimiento y en consecuencia, de un saber institucional: la Trigonometría.

A partir de este análisis Montiel desarrolla una epistemología de prácticas que le permite explicar algunos fenómenos didácticos y fundamentar diseños didácticos cuya intencionalidad sea la de construir herramientas trigonométricas funcionales, es decir, importantes en sí mismas y para quien hace uso de ellas. En particular para la construcción social de las razones trigonométricas propone la reconstrucción de condiciones como:

- El paso de lo macro a lo micro. Uso de modelos a escala para representar realidades no manipulables.
- Uso de herramientas y lenguaje geométricos para el análisis de los modelos.

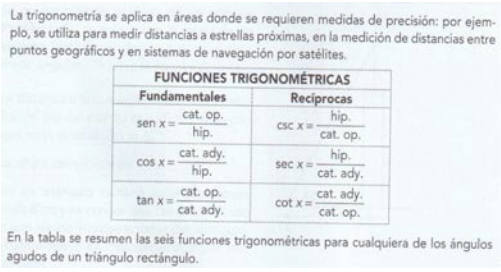
En ese sentido, se propone que desde su introducción las razones trigonométricas se identifiquen en el estudio de las cuerdas de un círculo, de tal suerte que el círculo unitario para transitar a las funciones no sea un "método didáctico", sino un contexto de significación.

Resultados

Se reconoce que el profesor juega el doble papel de estudiante-profesor (EP), pues atiende a las indicaciones del instructor para llevar a cabo la actividad al mismo tiempo que plasma en su reporte el dominio que tiene de los saberes en juego. En este sentido la situación-problema provoca una ruptura del contrato didáctico, pues no proporciona a EP toda la información para resolverla en papel y debe actuar sobre su entorno para obtenerla.

En principio, se asumió que el denominar a la tangente de distintas maneras (como razón, función, procedimiento, fórmula, etc.) era común en el profesor de nivel medio superior por la regularidad con la que él trabaja las funciones, aun cuando sólo esté utilizando una razón en la resolución de la situación-problema.

Sin embargo, esta misma indistinción se encontró en uno de los libros de textos (Figura 2), y Montiel y Buendía (2013) lo identificaron también en un programa de estudios; lo que señala una falta de claridad entre la naturaleza de una u otra noción matemática, provocada por el énfasis puesto en el procedimiento matemático más que en el concepto.


La trigonometría se aplica en áreas donde se requieren medidas de precisión: por ejemplo, se utiliza para medir distancias a estrellas próximas, en la medición de distancias entre puntos geográficos y en sistemas de navegación por satélites.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS	
Fundamentales	**Recíprocas**
$\text{sen } x = \frac{\text{cat. op.}}{\text{hip.}}$	$\csc x = \frac{\text{hip.}}{\text{cat. op.}}$
$\cos x = \frac{\text{cat. ady.}}{\text{hip.}}$	$\sec x = \frac{\text{hip.}}{\text{cat. ady.}}$
$\tan x = \frac{\text{cat. op.}}{\text{cat. ady.}}$	$\cot x = \frac{\text{cat. ady.}}{\text{cat. op.}}$

En la tabla se resumen las seis funciones trigonométricas para cualquiera de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo.

Figura 2. Fuente: Filloy, Rojano, Ojeda, Zubieta y Figueras, (2009).

Este énfasis se identifica como la vía para adquirir habilidad con las técnicas, la cual se manifiesta cuando el estudiante logra resolver tareas similares a las resueltas por el profesor en clase.

Mesa y Herbst (2011) reconocen que es deber y prerrogativa del instructor decir que los estudiantes han aprendido un cierto objeto de conocimiento, pero para hacerlo el profesor necesita confiar en cierta evidencia de parte de los estudiantes (por ejemplo, completar una tarea). En la experiencia analizada, si bien la situación-problema no proporciona toda la información, el profesor la obtiene y da evidencia del cumplimiento de la tarea obteniendo "un valor", es decir, "la" altura; lo cual explica que hayan promediado las tres alturas obtenidas (con las mediciones angulares a 1m, 2m y 3 m del objetivo) aunque explícitamente no se le solicitara.

Por su parte, algunos textos pasan de la expresión proporcional al cálculo de cocientes para establecer las razones trigonométricas (Figura 3).

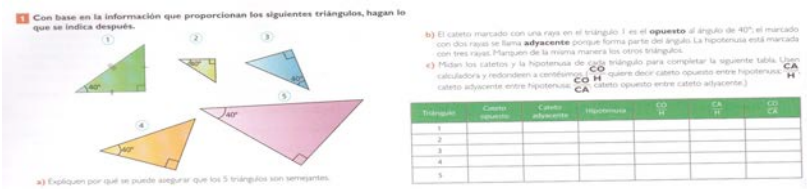


Figura 3. Fuente: García y Mendoza (2008)

Resulta entonces que la norma, identificada por Mesa y Herbst (2011), en la que el instructor proporciona al estudiante toda la información necesaria para resolver los problemas y obtener resultados con base en la repetición de un procedimiento, se puede identificar también en los libros de texto. La figura 4 muestra un ejemplo claro de esta norma, aunque también es evidente en los problemas de aplicación.

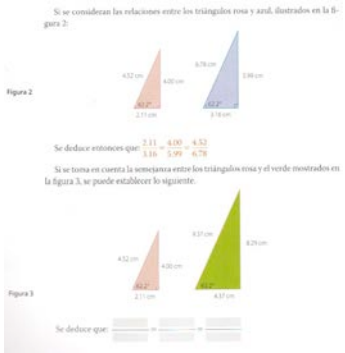


Figura 4. Fuente: Mancera (2008).

Otra ruptura del contrato identificada fue la que surge de solicitar un modelo a escala que represente la situación. Los modelos geométricos que hacen los profesores no constituían triángulos semejantes, cada razón trigonométrica se establecía en relación a un ángulo en particular. En cambio en los textos las razones trigonométricas siempre se establecen en relación a un mismo ángulo (ver por ejemplo las Figura 4 y 5), con base en lo cual adquiere sentido hablar de "razón".

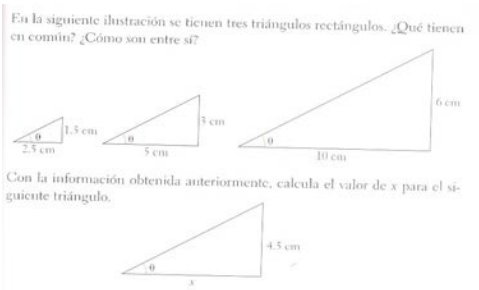


Figura 5. Fuente: Briseño, et al (2008).

Para identificar la razón constante en relación a un ángulo en particular se utiliza un lenguaje geométrico-proporcional, sin embargo, los triángulos no se construyen sino que se le proporcionan al estudiante para que sean medidos, en el mejor de los casos, o se identifiquen las medidas correspondientes al ángulo, los catetos y la hipotenusa.

Es decir, mientras que en la costumbre escolar se relacionan triángulos con triángulos (semejantes) en el papel, la situación-problema requería relacionar la realidad con el triángulo construido. De ahí que, en los textos, triángulos de distintos tamaños puedan representar una misma realidad porque son semejantes, no así los triángulos como los que se presentaron en el reporte R16 (Figuras 6, 7 y 8), en donde se puede identificar una influencia de las distancias a las que debe situarse el profesor del objetivo a medir (a 3m, 2m y 1m) para trazar la base de los triángulos.

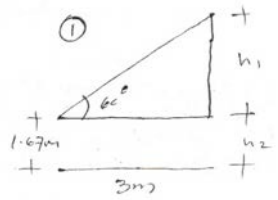


Figura 6. Modelo del cálculo de alturas a 3m del objetivo.

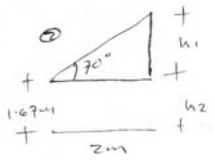


Figura 7. Modelo del cálculo de alturas a 2m del objetivo.

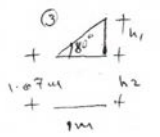


Figura 8. Modelo del cálculo de alturas a 1m del objetivo.

Al realizarlos el profesor no cuida el que, sin importar la posición a la que se encuentre, la altura del objetivo y por lo tanto la de los triángulos, debe ser la misma.

Es cierto que las medidas angulares son aproximaciones poco precisas por que fueron hechas con un pequeño tubo de cartón y un transportador, pero también es cierto que de haber construido 'modelos a escala' como lo pedía la situación-problema, habría sido evidente la imposibilidad de hacerlos con esas medidas. Ésta habría sido, quizá, la ruptura del contrato que más detonara una discusión respecto de la concepción que tienen los profesores sobre lo trigonométrico en el triángulo rectángulo.

En general, el uso de ilustraciones representativas se identifica como una costumbre escolar que no resulta problemática en la resolución de lo que se consideran "tareas trigonométricas", de hecho puede prescindirse de ellas porque no son una construcción geométrica mediadora entre el problema y la solución. Esto explica por qué no hay modelos a escala, aunque así los llamen, en las producciones del profesor.

En los problemas de aplicación los textos inducen al uso ilustrativo de los triángulos.La Figura9 es un dibujo alusivo a un problema de aplicación incluido en un libro de texto, donde se sobreponen los trazos y las medidas necesarias para convertirlo en un problema de "resolución de triángulo", igual a los resueltos previamente en el tema

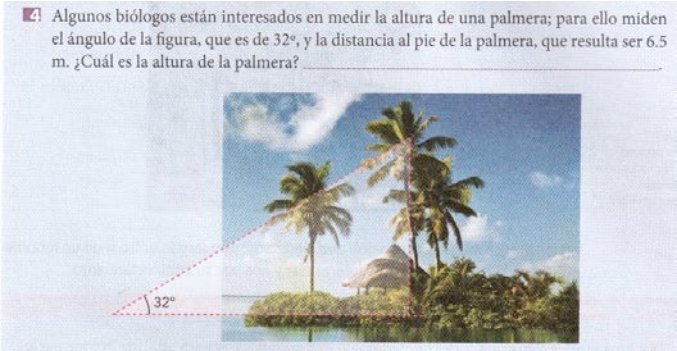


Figura 9. Fuente: Filloy et al (2009).

No es necesario que el estudiante haga el trazo, calcule medidas y obtenga una solución por otra vía; y en ese sentido el estudiante no tiene el control de lo que hace, no justifica, ni comprueba que su procedimiento sea el apropiado para dar respuesta al problema; con lo que se manifestarían dos de las normas identificadas por Mesa y Herbst (2011).

Tanto en este tipo de ilustraciones como en las figuras geométricas los libros utilizan, frecuentemente, medidas que no son reales; lo que las convierte sólo en información necesaria para sustituir en la fórmula que resuelve el problema.

Discusión

En la experiencia con los profesores el triángulo, como modelo geométrico, no es una construcción geométrica, en tanto no guarda una relación proporcional con la realidad modelada. De haber sido así, el profesor encontraría imposible utilizar las medidas de 60°, 50° y 40° para los ángulos indicados. Esta relación entre el ángulo y la distancia no es lineal, no es cuadrática, no es logarítmica, ni exponencial. Es aquí donde reconocemos *lo trigonométrico* de la construcción del modelo y la necesidad de utilizar la semejanza entre triángulos para estudiar la naturaleza de estas relaciones particulares.

Sin embargo, en los textos la semejanza resulta ser una condición inicial sobre la que se desarrolla el tema y en consecuencia todo lo que sigue a ella la cumple, no hay necesidad de corroborarla. Es decir, la construcción geométrica es innecesaria y se concentra la actividad matemática en la operación aritmética para la obtención del valor faltante, lo que aunado a la falta de atención y/o reconocimiento de lo que es trigonométrico en la relación ángulo-lado del triángulo es lo que identificamos como el fenómeno de la *aritmetización trigonométrica*.

Con base en lo anterior no podemos declarar que el profesor no domina los conceptos o tiene concepciones erróneas, sino que hay significados de lo trigonométrico que subyacen a su quehacer: significado lineal, significado como división de longitudes, significado como técnica para

obtener un valor; porque subyacen también a la Trigonometría escolar y en consecuencia a todo aquello que la transmite con intencionalidad didáctica.

En ese sentido hablar sólo de los conocimientos del profesor o de los desempeños del estudiante nos es insuficiente para entender por qué suceden los fenómenos didácticos, ya que ambos actores están sujetos a diversos factores y a su vez, dichos factores, a un valor epistémico de la matemática en juego. Proponemos entonces la noción de *discurso Matemático Escolar* como articulador de la racionalidad práctica y la construcción social de conocimiento, para ampliar la explicación del porqué el docente actúa con base en normas, sujetas a lo que es Trigonometría en su entorno.

El discurso matemático escolar subyace a lo inmediatamente visible. Tal como señalan Cantoral, et al (2006, p.86) la estructuración de dichos discursos no se reduce a la organización de los contenidos matemáticos, ni a su función declarativa en el aula (el discurso escolar), sino que se extiende un tanto más allá, al llegar al establecimiento de *bases de comunicación* para la formación de consensos y la construcción de significados compartidos.

El dME refleja una ideología sobre la forma de presentar y tratar (didácticamente) los objetos matemáticos en clase (Castañeda, et al, 2010), y naturalmente se manifiesta y transmite en lo inmediatamente visible: Planes y Programas de Estudio, libros de texto, exposición de clase, o, como se ha identificado en estudios especializados, en las creencias y concepciones de profesores, estudiantes y comunidad académica en general. En consecuencia es importante reconocer aquello que subyace a estas manifestaciones concretas del dME y permanece invariante aun con la innovación didáctica, debido a que en el fondo ésta no modifica lo que se está enseñando, sino sólo cómo se está enseñando.

Con base en la fundamentación teórica expuesta en el presente documento y la evidencia empírica del estudio referido reconocemos que el fenómeno estudiado es un efecto de la *pérdida del proceso geométrico en la construcción de lo trigonométrico*, donde las razones trigonométricas (como planteamiento del dME) se convierten en el proceso aritmético de dividir las longitudes de los lados del triángulo, lo cual, además, se manifiesta de manera clara en la estructuración del discurso escolar. En ese sentido, el dME como lo que subyace y ha permanecido invariante aun en el transcurso de varias reformas educativas es que *lo trigonométrico está en las razones trigonométricas, en la técnica para calcular un valor*.

Referencias bibliográficas

Briseño, L., Carrasco, G., Martínez, P., Palmas, O., Struck, F. y Verdugo, J. (2008). *Matemáticas 3*. México: Santillana Integral.

Cantoral, R., Farfán, R. M., Lezama, J. y Martínez, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 9*(4), 27–46.

Castañeda, A., Rosas, A. y Molina, G. (2010). El discurso matemático escolar de los logaritmos en los libros de texto. *Premisa, 12*(44), 3-18.

Filloy, E., Rojano, T., Ojeda, A., Zubieta, G. y Figueras, O. (2009). *Matemáticas 3º*. México: Ediciones Pedagógicas/McGraw-Hill.

García, S. y Mendoza, T. (2008). *Fractal 3*. México: Ediciones SM.

Herbst, P. y Chazan, D. (2011). Research on practical rationality: studying the justification of actions in mathematics teaching. *The Mathematics Enthusiast, 8*(3), 405-462.

Jácome, G. (2011). *Estudio socioepistemológico de la razón trigonométrica*. Elementos para la construcción de su naturaleza proporcional. Tesis para obtener el grado de maestro en ciencias en matemática educativa. CICATA-IPN, México

Kilpatrick, J., Hoyles, C., Skovsmose, O. y Valero, P. (2005). *Meanings of meaning of mathematics*. En J. Kilpatrick, C., Hoyles, O. Skovsmose, y P. Valero, P. (Eds), Meaning in Mathematics Education, 9-16. NY, USA: Springer.

Mancera, E. (2008). *Matemáticas 3*. México: Santillana Ateneo.

Mesa, V. y Herbst, P. (2011). Designing representations of trigonometry instruction to study the rationality of community college teaching. *ZDM Mathematics Education*, *43*(1), 41-52.

Montiel, G. (2011). *Construcción de conocimiento trigonométrico.* Un estudio socioepistemológico. México: Ediciones Díaz de Santos.

Montiel, G. y Buendía, G. (2013). Desarrollo del pensamiento funcional-trigonométrico. En M. Ferrari, G. Martínez y G. Buendía (Coords.), *Resignificación de funciones para profesores de matemáticas*, 169-205. México: Ediciones Díaz de Santos.

ANÁLISIS DIDÁCTICO DE UN PROCESO DE ESTUDIO DEL OBJETO MATEMÁTICO "PROPORCIONALIDAD"

Francisco Javier Parra Bermúdez, Ramiro Ávila Godoy y Jesús Ávila Godoy
Universidad Autónoma de Baja California, Universidad de Sonora México
fjparra@correo.física.uson.mx, ravilag@gauss.mat.uson.mx, jag_virgo@hotmail.com

Resumen. Presentamos un análisis didáctico del uso del significado del *objeto matemático proporcionalidad* en una situación problemática de un tema de cinemática, apoyándose en las Nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación. Nuestros análisis se realizan desde la perspectiva del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS), considerando las facetas que conforman una idoneidad didáctica. La experiencia se realizó con estudiantes de Ingeniería de la Universidad de Sonora.
Palabras clave: proporcionalidad, obstáculo, objeto matemático, significado, idoneidad didáctica
Abstract. We present a didactic analysis of the use of mathematical object meaning of proportionality in a problematic situation of a cinematic theme, based on the New Technologies of Information and Communication Technologies. Our analysis is conducted from the perspective of the onto-semiotic approach Cognition and Mathematics Instruction (EOS), considering the facets that make up a didactical suitability. The experiment was conducted with engineering students at the University of Sonora.
Key words: proportionality, obstacle, mathematical object, meaning, didactical suitability

Introducción

Se asume que el propósito fundamental de la investigación en Matemática Educativa es elevar la calidad de los aprendizajes de los estudiantes, lo cual lleva implícita la necesidad de mejorar los procesos de enseñanza de la disciplina, lo que a su vez plantea como un requerimiento fundamental a investigar, la elaboración de una metodología que permita describir, explicar y valorar los procesos que se dan en el aula escolar. El Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2009; Godino y Neto, 2013) incluye una metodología con este propósito: analizar los procesos de instrucción y estudio que se llevan a cabo en el aula tratando de determinar el grado de idoneidad didáctica (ID) de dichos procesos.

Dicha metodología proporciona elementos para analizar los fenómenos áulicos desde seis perspectivas diferentes, cada una de las cuales se corresponde con un factor cuya influencia en el proceso de estudio se considera determinante. Pretendemos ilustrar el uso de la metodología mencionada analizando lo sucedido en una clase del laboratorio de mecánica desarrollada en un curso que se imparte dentro de un proyecto más general en el que se investiga el papel de las Nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación (NTIC´s) en la construcción de significados de los objetos matemáticos en el contexto de la Mecánica Newtoniana (MN), que tiene como antecedente un reporte anterior (Parra, Ávila y Ávila, 2013).

Esta contribución consta de tres apartados y las conclusiones, en el primero se exponen algunas herramientas conceptuales que sustentan la metodología; en el segundo se describe el diseño de la

actividad de estudio y su contexto; y en el tercero, se muestra la valoración didáctica de la experiencia de enseñanza llevada a cabo con estudiantes de Ingeniería en un primer curso de Física, utilizando una simulación computarizada para un tema de mecánica.

Algunos Aspectos Teóricos

La metodología propuesta en el EOS para el análisis de la actividad didáctica y la valoración de su idoneidad se deriva de un sistema de supuestos y categorías que hacen operativas las diversas idoneidades parciales, especialmente las dimensiones epistémica y cognitiva. En el EOS son fundamentales los términos: Objetos matemáticos (situación problemática, conceptos, procedimientos, proposiciones, argumentos, lenguaje en sus diversas representaciones: gráfico, numérico, analítico y verbal), significado (institucional y personal) y obstáculo. Éste último lo caracterizamos como un significado que lleva al sujeto a interpretar inadecuadamente un problema.

Una idoneidad didáctica (Godino y Font, 2006) consta de 6 facetas:

a) *Epistémica*: grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o previstos), respecto de un significado de referencia. Las situaciones problemáticas constituyen un elemento central y el logro de una idoneidad epistémica alta requiere diversos objetos de la Matemática: definiciones, procedimientos, proposiciones, así como la justificación de los mismos en sus representaciones (gráfica, numérica, analítica y verbal). Las tareas deben proporcionar a los estudiantes diversas maneras de abordarlas, implicar diversos objetos y que los estudiantes conjeturen, interpreten, generalicen y justifiquen las soluciones.

b) *Cognitiva:* grado en que los significados pretendidos/implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos (Vygostki, 1934) y proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/implementados. Los estudiantes deben aprender la Matemática entendiéndola, construyendo activamente el nuevo conocimiento a partir de sus experiencias y conocimientos previos al hacer frente a situaciones problemáticas.

c) *Afectiva:* grado de implicación (actitudes, emociones, intereses y necesidades) del alumnado en el proceso de estudio. Lo cual se manifiesta en ciertos indicadores: las tareas tienen interés para los alumnos, se suponen situaciones que permitan valorar la utilidad de la Matemática en la vida cotidiana y profesional. Se promueve la participación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc.

d) *Interaccional:* grado de identificación y solución de conflictos, esto es cualquier disparidad entre sujetos (instituciones o individuos) sobre los significados atribuidos a un objeto) antes, durante y

después del proceso de instrucción. En la interacción entre alumnos: se favorece el diálogo y comunicación entre ellos. Se implementa la evaluación formativa con la observación sistemática del progreso cognitivo de los estudiantes.

e) *Mediacional:* disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales para el proceso de enseñanza-aprendizaje. Se usan materiales manipulativos e informáticos (cabrí, geogebra, applets,…) que permiten introducir las situaciones problemáticas, definiciones y las proposiciones son contextualizadas y motivadas usando modelos concretos y visualizaciones mediante simulaciones computarizadas. El número de alumnos, horario y condiciones del aula, permite llevar a cabo la enseñanza pretendida. El tiempo (presencial y no presencial) es adecuado, se dedica el tiempo suficiente a los contenidos más importantes y que presentan más dificultad de comprensión.

f) *Ecológica:* los contenidos, su implementación y evaluación se corresponden con el currículo, se presenta una apertura hacia la innovación didáctica basada en la investigación y la práctica reflexiva e integración de las NTIC´s. Los contenidos se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinares.

La ID es una herramienta metodológica didáctica útil para la formación de profesores, para orientarlo de manera global y sistemática en el diseño, implementación y evaluación de su práctica docente, propuestas curriculares, experiencias de enseñanza y aprendizaje en la clase teórica, conferencias y el laboratorio de cómputo, por citar algunas.

Descripción de la Actividad Didáctica

En este apartado se describen algunos aspectos de la estrategia de enseñanza, diseñada e implementada para el estudio de la caída libre de un cuerpo utilizando una simulación computarizada en línea. Se plantearon 13 actividades en una hoja de trabajo a partir de un problema (llenar 2 tablas y contestar 11 preguntas), a un grupo de 20 estudiantes del segundo semestre que cursaban el laboratorio de la asignatura de Física I (Mecánica) de la carrera de ingeniería civil de la Universidad de Sonora. El curso era de 7 horas a la semana, 5 de teoría y 2 de laboratorio, con un profesor de teoría y otro de laboratorio que es el referente en esta experiencia. Se disponía de 7 computadoras en un aula del laboratorio de Física, y de una hoja de trabajo para cada estudiante donde se presentaron las actividades.

Para visualizar el experimento virtual es necesario ingresar a la página web: http://didactica.fisica.uson.mx/ y seguir la ruta: *sala didáctica*, *cursos*, *curso de Física con ordenador* –acceder al tema-: *Cinemática (Movimiento rectilíneo: Movimiento de caída de los cuerpos*). La PC debe tener instalado el JAVA. En la Fig. 1 se muestra la simulación para el movimiento de caída de los

cuerpos, la cual genera una tabla de datos de cuatro columnas: tiempo, posición, velocidad y aceleración, además una gráfica de posición contra tiempo (x *vs* t). Las condiciones iniciales para la altura y la velocidad inicial son manipulables. El Problema consiste en dejar caer un cuerpo desde una altura de 100.0 m Se pide a los estudiantes llenar la tabla 1 para 10 tiempos diferentes y obtener las velocidades. Enseguida con los datos anteriores construir la tabla 2: obtener 8 cambios de velocidades con respecto al tiempo, usando la expresión: $(v_f-v_i)/(t_f-t_i)=$ .Posteriormente se plantean 11 actividades cuya información y resultados se describen en la sección siguiente del presente reporte.

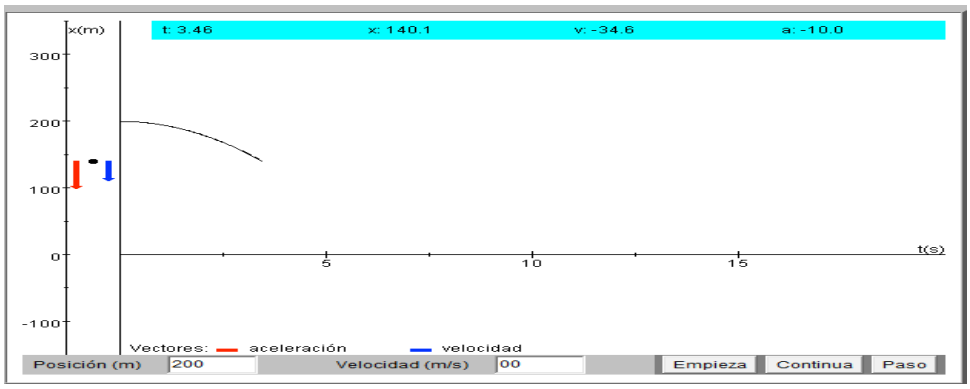


Figura 1. Corrida de un applet en línea para la caída de los cuerpos.

Valoración de la Idoneidad Didáctica de la Actividad Implementada

En esta sección se describe lo sucedido en el aula sobre el objeto de estudio y se muestran nuestras valoraciones didácticas a nivel de conjeturas. Empezamos presentando algunos resultados y su análisis de las respuestas de los estudiantes a las actividades de la hoja de trabajo, que nos permitió explicar y valorar lo sucedido en las facetas epistémica y cognitiva. La información sintetizada sobre las respuestas de los estudiantes a la tabla 2 y a las 11 actividades, se presentan en la Figura 2.

Una aclaración pertinente: Considerando que la valoración de la idoneidad didáctica de un proceso de estudio, de acuerdo con la metodología propuesta en el EOS, requiere valorar la idoneidad de cada una de las facetas de dicha metodología y que esto requiere recoger y analizar una gran cantidad de datos de muy diversa naturaleza y que el espacio de que se dispone para presentar este reporte es muy limitado, el análisis que se presenta aquí está restringido a dos de las facetas: la epistémica y la cognitiva.

Para llevar a cabo este análisis se utilizó la información de las actividades realizadas y la de las interacciones profesor-estudiantes registrada a manera de bitácora y de grabaciones de audio del suceso que ocurrió en un aula de laboratorio de Física. El propósito de las actividades propuestas y

promovidas por el profesor y realizadas por los estudiantes, fue que los estudiantes detectaran el tipo de proporcionalidad que se presenta en el fenómeno físico de caída de los cuerpos y lograran modelarlo matemáticamente. Además como parte de la formación de profesores pretendemos mostrar el uso del análisis y evaluación de la ID en un proceso de estudio. Para lo cual nos planteamos las siguientes preguntas: a) ¿En qué medida es idóneo el proceso de enseñanza y aprendizaje observado? b) ¿Qué cambios se podrán introducir para mejorar la idoneidad?

Epistémica

La observación del proceso de estudio nos permite caracterizar el sistema de prácticas operativas y discursivas efectivamente implementadas, relativas a la actividad de estudio de la caída libre de un cuerpo y del objeto matemático proporcionalidad (OMP). La comparación de estas prácticas con el significado pretendido nos permite identificar diversos desajustes y formular conjeturas sobre la idoneidad del proceso de estudio, en cuanto a su dimensión epistémica. Con respecto al llenado de la Tabla I de la hoja de trabajo: la simulación por su diseño, aparece con ciertas condiciones iniciales que no coinciden con las del problema planteado, sin embargo la mayoría de los estudiantes activan la simulación sin considerar lo anterior. Por lo que el profesor hace ese señalamiento a todo el grupo. Lo anterior podría evitarse si en la hoja de trabajo aparecieran con más detalle aspectos como: Verificar las condiciones iniciales de la simulación, por ejemplo considerar la caída a partir del reposo.

Los estudiantes muestran dificultades y pocos logros en detectar, la relación de proporcionalidad entre la velocidad y el tiempo de caída del cuerpo, así como la cte. de proporcionalidad, y modelar matemáticamente el fenómeno físico, con una fórmula matemática que les permita predecir la velocidad para cualquier tiempo específico. Para modelar el fenómeno de caída con las condiciones iniciales presentan la expresión:

$v = v_o - gt$ o sólo un caso particular, por ejemplo: $v=-10.0m/s$ para $t= 1.0s$.

En las respuestas pocos argumentan, a pesar de que en algunas actividades se formulan preguntas tales como ¿por qué?, ¿qué podemos decir? y en otras se pide a los estudiantes que justifiquen su respuesta. Por ejemplo en la 7: difieren del valor de la aceleración (gravedad) dado por la simulación a pesar de que ésta lo indica en todo el recorrido.

Cognitiva

Para el llenado de la Tabla II, el 40% de los estudiantes contestó que la aceleración es constante, a pesar de que el valor de ésta siempre aparece en el experimento virtual, por lo que conjeturamos que el problema lo descontextualizan del tema de caída libre y de la simulación. Al parecer lo

importante es manipular datos y obtener un resultado. Con respecto a la actividad 1(A1). ¿Cuál es el valor del cambio de velocidad por segundo? El 70% contestó 10m/s, cabe señalar que del porcentaje anterior, 8 estudiantes de 14 no fueron congruentes con los datos que expresaron en la tabla II, donde la aceleración la consideraron variable. Para la A2. ¿Permanece constante o variable el cambio de velocidad por segundo? El 50% (10 estudiantes) responden que es constante, de los cuales, 4 consideran que el cambio de velocidad por segundo es 10 m/s en la A1, y en A2 responden que el cambio de velocidad es variable.

Para la A3. ¿Qué podemos decir de la velocidad con respecto al tiempo, conforme éste transcurre? 2 estudiantes responden que varía, 2 que es aproximadamente cte., 4 que disminuye negativamente y 12 (60%), que aumenta negativamente. Para la A4. ¿Qué significa físicamente el valor del cambio de velocidad por segundo? 4 estudiantes (20%), responden que la aceleración, 14 (70%) contestan que es la velocidad (de los cuales 4 consideran que es cte., 6 que aumenta, y 4 que es instantánea); 2 contestan ambiguamente como que es la *"caída"*. Para la A5. ¿Cuál sería la expresión matemática (fórmula) que relaciona la velocidad y el tiempo con la cual se pudiera calcular la velocidad en cualquier instante, por ejemplo para t=1.34 s? El 60% contestan que es la expresión: $v = v_o - gt$, el 30% responden expresiones ambiguas tales como: $t_f - t_i(-10)$ y el 10% presentan un cálculo, por ejemplo, $v(1.34)=6.7$.

Para la A6. ¿Existe algún tipo de proporcionalidad entre la velocidad y el tiempo? Si la respuesta es no, di por qué; si la respuesta es sí ¿qué tipo de proporcionalidad es? El 70% considera que sí, sin embargo las argumentaciones son muy diversas: *"la velocidad aumenta de 10 en 10m/s y la cte., es la aceleración"* (2 estudiantes), "*porque la velocidad es cte."*(6 estudiantes) o "porque $\Delta v/\Delta t$ es la distancia" (4 estudiantes) y 2 responden que no, *"porque no avanza igual al transcurrir el tiempo"*, 4 no contestan. Para la A7. Bosqueja la gráfica *(v vs t)*, ¿Qué puedes decir de la relación entre la velocidad y el tiempo con base en la gráfica?, 50% contestan que es una parábola pero no la "leen" para el movimiento, 2 consideran que es una recta, 2 establecen relaciones entre las velocidades ($v_2=2v_1$), 2 expresan "*por la forma la a es cte., y la velocidad aumenta",* 4 no contestan.

Para la A8. ¿Cómo puedes calcular la pendiente de la gráfica (*v vs t*)?, el 100% presentan expresiones equivalentes, pero el 50% más ligada al problema físico esto es: $(v_f - v_i)/(t_f - t_i)$, el otro 50% $(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$, con respecto a ésta última la mayoría no saben relacionar las variables con el fenómeno físico, por ejemplo $(y_2 - y_1)$, se relaciona con la velocidad o con el tiempo. Lo anterior hace suponer que unos acuden más a la memorización, la palabra pendiente les evoca la fórmula matemática, y otros tratan de aplicarla, pero en su totalidad no la calcularon. Para la A9. ¿Qué significa físicamente la pendiente de la gráfica (*v vs t*)? El 40% responden que es la aceleración, 40% que es el cambio de velocidad y 20% la distancia. Para la A10. ¿Qué puedes decir, si la gráfica es

paralela al eje del tiempo?, el 60% consideran que la velocidad es cte. (8 estudiantes) y 4 que es un MRU, 40% consideran que: *"…no cae, está en reposo, la aceleración tiende a cero…"* Para la A11. ¿Cuál es la ecuación que mejor se ajusta a los puntos de la gráfica *v* contra *t*? Esta actividad tiene similitud con la 5, sin embargo las respuestas son más ambiguas, aunque persisten expresiones tales como: t_f-t_i(-10), o aún más generales, como: $v_f = v_o + at$. En la actividad realizada, al preguntarles ¿qué les causó mayor confusión?, manifestaron: *"…encontrar o hacer las relaciones matemáticas…", "…encontrar las relaciones matemáticas entre los factores…".*

Por lo anterior concluimos que al pretender resolver la situación problemática**,** en los estudiantes se manifiesta un conflicto cognitivo basado en un obstáculo que podemos denominar *cultural*, por la enseñanza recibida: dados unos datos obtener siempre un resultado numérico o algebraico, una fórmula general, sin una comprensión y argumentación en el contexto físico. Saber Física y Matemáticas es saber fórmulas y no construirlas, por lo que presentan un modelo fuera del contexto del problema trabajado con la simulación computarizada. Los significados personales de los estudiantes se van construyendo progresivamente a lo largo del proceso de instrucción, partiendo de unos significados iniciales al principio del proceso, y alcanzando unos determinados significados finales (logrados o aprendidos), sin embargo algunos de sus significados llegan a convertirse en serios obstáculos ante nuevas situaciones que les impiden ser competentes en el análisis, interpretación, argumentación y solución de problemas.

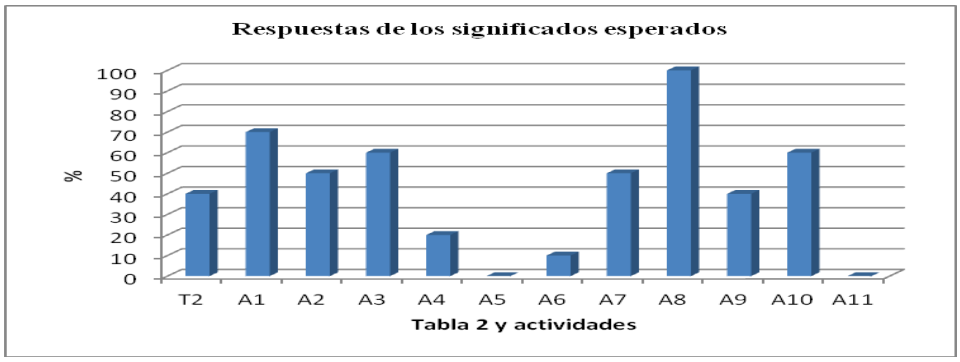


Figura 2. Se muestran los porcentajes de las respuestas de la tabla 2 y de las 11 actividades.

Conclusiones

En la teoría del EOS, consideramos que en la enseñanza de la Matemática, los alumnos puedan examinar y utilizar varias representaciones como una parte natural de la manera de resolver los problemas en diversos contextos y que es necesario romper con el enfoque cultural de la enseñanza tanto de la Física como de la Matemática que las reducen a resultados numéricos y fórmulas alejados de una comprensión conceptual de los significados institucionales de los objetos matemáticos.

Un obstáculo cultural que se manifiesta en el estudiante es que aprender significa manipular fórmulas desligadas de un contexto, no es aprender a "hacer" fórmulas, sino retener la información que le dieron para obtener resultados, lo que le queda de la escuela es que aprender Física es recordar fórmulas y no construirlas. El estudiante procede a dar respuestas numéricas por la formación recibida, dado que los problemas que plantean los profesores tienen siempre información suficiente para resolverse, es decir a partir de datos que se les dan obtener siempre un resultado. Siendo que en los problemas de la realidad social similares a los de la práctica profesional de los ingenieros difícilmente los problemas tienen la información suficiente para su solución. Por eso es imprescindible investigar tanto el aprendizaje de los estudiantes como la formación de los profesores.

Referencias bibliográficas

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2009). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. Recuperado el 10 de junio de 2012 de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf

Godino, J. y Font, V. (2006). *Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de un proceso de estudio de las matemáticas, Paradigma, 27* (2), 221-252.

Godino, J. y Neto, T. (2013). Actividades de iniciación a la investigación en Educación Matemática. Recuperado el 20 de septiembre de 2013 de http://www.ugr.es/~jgodino/

Parra, F.J., Ávila, R., Ávila, J. (2013). El significado del objeto matemático proporcionalidad. Su origen y desarrollo. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26, (pp 1239-1248)*. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Vygostki, L. (1934). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores.* Barcelona: Crítica-Grijalbo.

O PROJETO PIBID NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA: AÇÕES EDUCACIONAIS INOVADORAS COM BASES TEÓRICAS

Marcílio Dias Henriques, Leandro Gonçalves dos Santos, Meiriele Nonato de Oliveira, Roberta Gualberto Ferreira y Theysmara Menon
Instituto Estadual de Educação Juiz de Fora. Universidade Federal de Juiz de Fora Brasil
mdhenriques@oi.com.br, leandrogsantos007@yahoo.com.br, meirinonato@yahoo.com.br, roberta_gualberto@yahoo.com.br, theysmara@hotmail.com

Resumen. A presente comunicação breve apresenta alguns relatos de experiências de ações desenvolvidas no Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) da área de Matemática, encampado pela Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF) e cujas ações têm sido desenvolvidas junto a turmas de Ensino Secundário de escolas estaduais da cidade de Juiz de Fora (Minas gerais, Brasil). Um de nossos objetivos neste trabalho foi compreender como a prática do projeto PIBID/UFJF tem contribuído na formação pedagógica de futuros professores de Matemática. Descreveremos, ainda, algumas consequências de ações inovadores e sustentadas teoricamente, desenvolvidas neste projeto.
Palabras clave: PIBID, iniciación a la docencia, formación de profesores
Abstract. This brief communication presents some experience reports on the actions undertaken in the Institutional Scholarship Program of Initiation to Teaching (PIBID, in Portuguese) in the area of Mathematics, embraced by the Federal University of Juiz de Fora (UFJF) and whose actions have been developed with classes Teaching Secondary state schools in the city of Juiz de Fora (Minas Gerais, Brazil). One of our objectives in this work was to understand how the practice of designing PIBID / UFJF has contributed in pedagogical training of future mathematics teachers. We describe also some consequences of innovative actions and sustained theoretically developed in this project.
Key words: PIBID, initiation to teaching, teacher training

Introdução

O Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) é resultante de uma ação conjunta do Ministério da Educação brasileiro, da Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE), com o propósito de fomentar a iniciação à docência de estudantes de instituições federais de ensino superior no Brasil, e ainda preparar acadêmicos, em cursos de licenciatura presencial plena, para atuar na Educação Básica pública. Com este objetivo, o programa concede bolsas de iniciação à docência para os graduandos (bolsistas) de tais cursos, para coordenadores institucionais do programa (professores das licenciaturas) e supervisores (professores das escolas parceiras).

Segundo a Portaria Normativa n°. 38, de 12 de dezembro de 2007, o PIBID tem, dentre outros, por objetivo a "(...) valorização do espaço da escola pública como campo de experiência para a construção do conhecimento na formação de professores para a educação básica". (BRASIL, 2007, p. 39).

A inovadora proposta do PIBID – fundamentalmente apoiada na inserção dos acadêmicos no ambiente escolar e na reflexão sobre a prática que eles próprios ali desenvolvem – é

perfeitamente coerente com o defendido por Freire (2000, p.43), quando afirmou que "(...) na formação permanente dos professores, o momento fundamental é o da reflexão crítica sobre a prática". Na perspectiva que assumimos para os trabalhos do PIBID, dentro do projeto encampado pela Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), há sempre a preocupação de que os temas discutidos, as experiências realizadas, as propostas alternativas aplicadas ou elaboradas originem-se da própria realidade sócio-educacional onde estamos inseridos, como professores em formação inicial ou em serviço, sempre buscando uma reflexão crítica sobre a prática e sobre os resultados de tais ações.

Sabemos o quão penoso e ao mesmo tempo desafiador é o início da carreira docente. Para que sejam preparados bons professores, são necessários conhecimentos sobre os alunos, sobre a matéria que os professores ensinam e sobre o currículo (envolvendo métodos e conteúdos) em face de objetivos educacionais de quem ensina, de acordo com suas concepções e sua formação. Para se alcançar sucesso como educador, são necessários estudos, pesquisas, planejamento e muitos outros fatores que favorecem a realização profissional dos futuros professores (Mizukami, 2008).

No presente trabalho são apresentados e discutidos alguns relatos de dificuldades e desafios com os quais se deparam os futuros professores vinculados ao PIBID desenvolvido pelo Instituto de Ciências Exatas da UFJF. Desta forma, o texto transitará entre ações desenvolvidas neste programa, na área da Matemática, e as contribuições para a formação acadêmico-profissional dos bolsistas, relatadas em seus depoimentos gravados e transcritos, durante os meses de Junho e Agosto do ano de 2012, no interior da escola parceira, o Instituto Estadual de Educação de Juiz de Fora (IEE), ao serem desenvolvidas as ações que descreveremos mais adiante.

Caracterização do Projeto PIBID/UFJF

O PIBID tem se apresentado como uma iniciativa de grande importância na formação dos licenciandos em Matemática da UFJF que participam do projeto. Ele proporciona aos acadêmicos-bolsistas um contato efetivo com as salas-de-aula e com o ambiente escolar, de modo a oferecer-lhes oportunidades de observar falhas nos processos de ensino e de aprendizagem de Matemática, e de procurar maneiras mais eficientes para que realizem o seu trabalho, superando as adversidades que apareçam.

O projeto PIBID/UFJF da área da Matemática tem sido desenvolvido desde o ano de 2010 até a presente data, passando por alguns redirecionamentos do foco de ações, embora sempre envolvendo alunos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio de escolas públicas estaduais da cidade de Juiz de Fora. Desta forma, além de favorecer, de modo efetivo, a formação de

acadêmicos em Matemática (Licenciatura Plena), o projeto tem beneficiado mais de 350 estudantes do Ensino Médio da cidade de Juiz de Fora (Minas Gerais, Brasil), através de diversas ações planejadas junto ao coordenador institucional do projeto na UFJF.

O crescimento que o PIBID/UFJF proporciona à formação acadêmica dos bolsistas, através do contato entre aluno e professor, tem sido para eles de capital importância, pois são nas salas-de-aula que o futuro profissional pode observar as reais dificuldades dos alunos, além de suas próprias limitações, buscando, assim, mais conhecimento pedagógico e maneiras para lidar com as adversidades que o esperam. O projeto também oferece chance às discussão e implementação de novas formas de aprender a ensinar e de aprender a aprender. Inovar, metodologicamente, nas aulas, e dar voz aos alunos são os principais objetivos dos bolsistas, supervisores e coordenador do PIBID/UFJF.

Além de ações que estão sendo desenvolvidas neste até a presente data (Setembro de 2013), envolvendo a produção de vídeos e hipertextos, voltados para as avaliações do Exame Nacional do Ensino Médio, e ainda a criação de jogos educacionais para a aprendizagem de conceitos matemáticos, três ações permanentes tem sido implementadas junto aos alunos do IEE.

As principais ações do PIBID/UFJF, em andamento deste Maio de 2012 no interior do Instituto Estadual de Educação, são as seguintes:

- Laboratório de aprendizagem em Matemática básica.
- Oficinas de preparação para a OBMEP[1].
- Criação e utilização de aplicativos no *software* Geogebra.

O *Laboratório de Aprendizagem em Matemática Básica* tem como perspectiva resgatar conceitos matemáticos do currículo do Ensino Fundamental, para alunos que apresentam dificuldades ou baixo rendimento em Matemática. Os trabalhos nesta ação têm sido os mais intensos e volumosos, com uma frequência de dois dias por semana, de modo ininterrupto. No decorrer dos encontros, os alunos apresentaram muitas dificuldades em conteúdos básicos. Um dos obstáculos com os quais os bolsistas se depararam foi o fato de surgir uma grande rotatividade dos estudantes (alguns iniciavam sua participação, enquanto outros saíam desta oficina), o que tornava o trabalho cada vez mais difícil, porquanto desafiador.

Durante tal ação, isto é, o *Laboratório de Aprendizagem*, os acadêmicos perceberam uma grande dificuldade discente na interpretação dos problemas, registrando perguntas como: "Que conta eu faço aqui?"; isto que gerou grande surpresa aos bolsistas, visto que o trabalho foi realizado apenas

[1] Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas.

com alunos do Ensino Médio. De um total inicial de 62 inscritos, registramos 28 alunos que efetivamente participaram desta ação do PIBID/UFJF, no Instituto Estadual de Educação de Juiz de Fora.

Figura 1. Registros das atividades do PIBID/UFJF no Instituto Estadual de Educação de Juiz de Fora.

A *Oficina de preparação para a OBMEP* foi um trabalho oferecido a todos os alunos do Ensino Médio das escolas parceiras do PIBID/UFJF. No IEE, participaram 12 alunos. Seu objetivo principal foi preparar os alunos, que tivessem interesse na olimpíada, para que alcançassem boas colocações nas provas da OBMEP-2012.

A maioria dos estudantes que participaram dessa atividade demostravam grande conhecimento de Matemática e certa facilidade para lidar com conteúdos diversos, o que nos permitiu avançar com aulas bastante abrangentes, envolvendo os diferentes competências e assuntos que poderiam ser cobrados nas provas. Por diversas vezes, os professores se surpreenderam com o modo avançado, dos estudantes, em resolverem os problemas propostos, em sua grande maioria, retirados das provas da OBMEP dos anos anteriores.

Já a criação de aplicativos, elaborados a partir do *software* de geometria dinâmica Geogebra, tem sido uma ação que nos permite desenvolver novos métodos de trabalho com a geometria escolar, além de implementar uma interface do PIBID/UFJF com a pesquisa em Educação Matemática, na qual investigamos a possibilidade de criação de tarefas educacionais, através das quais podemos identificar dificuldades discentes com temas geométricos e intervir didaticamente, com a perspectiva de que assim os alunos possam superar tais dificulades; nesta investigação, utilizamos como referencial teórico e como método de leitura da produção de significados discentes o Modelo dos Campos Semânticos (Lins, 1999).

Após a análise dos dados coletados na primeira saída a campo, com dois sujeitos de pesquisa resolvendo tarefas propostas em aplicativos do Geogebra, faremos algumas possíveis modificações nas tarefas, de modo a aplicá-las a alunos de várias turmas das escolas parceiras do PIBID/UFJF.

Ressaltamos que o envolvimento dos bolsistas, nesta ação, vai desde o planejamento e a discussão dos módulos e dos objetivos que norteiam tal ação, até a análise pesquisa de campo, passando por todas as etapas intermediárias, como a criação dos aplicativos e registro das atividades. Uma pesquisa semelhante a esta, e de cujos aportes teórico-metodológicos nos valemos, foi realizada por Henriques (2011).

Concepções dos Bolsistas e Discussão das Ações

Nesta seção, apresentaremos trechos de algumas transcrições de entrevistas com os bolsistas e de seus relatos escritos, nos quais eles se reportam sobre as experiências pelas quais passaram, até este momento, durante as diversas ações do PIBID/UFJF e nas reuniões de planejamento e de estudos a posteriori das mesmas ações.

Embora o nosso foco de atenção principal neste trabalho seja dado às concepções dos acadêmicos-bolsistas sobre a importância do PIBID para seu crescimento profissional, também exibiremos alguns de seus comentários e pareceres gerais acerca das ações do projeto. Por uma questão ética, identificaremos os bolsistas por pseudônimos, quais sejam: Ana, Breno, Carlos, Dora e Elis.

Iniciaremos com o seguinte relato da aluna Dora, sobre duas atividades do projeto:

> A criação e a utilização de aplicativos foram pouco exploradas, sendo o principal obstáculo, nesta ação, a falta de infraestrutura do colégio, o que impossibilitou o trabalho nos meses de Maio a Julho de 2012. Uma das adversidades enfrentadas foi a evasão dos alunos, principalmente das turmas do laboratório de aprendizagem. Parece que diversos motivos contribuíram para isso: o mau costume dos alunos de ensino médio de não fazerem atividades fora do horário normal de aula; o pouco incentivo por parte dos professores e do colégio para que esses alunos frequentassem as aulas do projeto (...).

Em seguida, observamos as impressões de Dora sobre os benefícios do projeto:

> O PIBID também está me ajudando a entrar em contato com a área de pesquisa acadêmica, trabalhar com prazos pré-determinados e na maioria das vezes curtos, manter os registros e atividades sempre documentadas e em dia, sem contar o trabalho em equipe. O projeto apoia minha formação profissional, pois através dele inicio minha carreira com um contato real com a escola, vivendo as dificuldades que aparecem no dia-a-dia escolar, tanto para os alunos quanto para os futuros professores de Matemática.

Vejamos, agora, o que afirmou o aluno Carlos, sobre a Oficina da OBMEP:

> Durante todo o processo de resolução das provas da OBMEP, pude perceber que os alunos apresentaram dificuldades com geometria, como, por exemplo, no que diz respeito a semelhança de triângulos. Durante a resolução dos exercícios, tentei explica-los um pouco de semelhança e o porquê que os triângulos são semelhantes. (...) As dificuldades apresentadas em todas as atividades em que eu estava presente, eram aparentemente normais.

Ainda sobre a Oficina voltada para a OBMEP, identificamos nas percepções de Elis um pensamento reflexivo crítico, de importância capital para que haja um envolvimento real dos professores e alunos no processo educacional, a chamada competência crítica, cujo ponto-chave é a consideração crítica de conteúdos e outros aspectos curriculares e humanos (Skovsmose, 2001). Vejamos, então, o que afirmou a bolsista Elis:

> As oficinas voltadas para a OBMEP foram bastante produtivas. Observamos o interesse de alguns alunos, que ditaram o ritmo do nosso trabalho. Observamos nesses alunos uma lógica até nos seus chamados "chutes", nos quais sempre havia um fundamento matemático. Participaram também alguns alunos que não tinham muito interesse nas olimpíadas, mas queriam a nossa ajuda na Matemática escolar; esses alunos às vezes ficavam ali sem saber o que estava ocorrendo, totalmente distraídos, mas sempre estavam presentes nas aulas. (...) Com pouco tempo, já observei o interesse de alguns alunos que andam fazendo todas as questões, chamando-nos só quando tem dúvidas. Mas, infelizmente, também tem aqueles que estão acostumados com o professor fazendo as coisas no quadro e, diante de um obstáculo, não o enfrentam e simplesmente o ignoram, passando para outro exercício. (...) Estou tentando estar sempre próxima para assim ajudá-los a passar por tais barreiras.

Já a bolsista Ana se referiu às dificuldades discentes (e também às suas próprias dificuldades) da seguinte maneira:

> As principais dificuldades dos alunos, observadas no LabMat [Laboratório de Aprendizagem Matemática] durante o primeiro mês de atividades, foram as dificuldades ligadas à ordem de prioridade das operações numa expressão algébrica, bem como a ordem de eliminação dos sinais de associação (parênteses, colchetes e chaves). Como professora, a dificuldade tem sido em ajudar os alunos a corrigirem alguns "erros" de resolução de problemas, sem impor um método e uma solução única como correta das questões. Em termos de conteúdo os alunos da OBMEP, nessa primeira etapa, dominavam bastante coisa. Mas havia uma dificuldade generalizada com relação à

> Geometria Plana (...). É notável o grande potencial de raciocínio que estes alunos possuem para desenvolver modos de pensar sobre os diferentes campos da Matemática, sobretudo quando estão envolvidos na resolução de problemas que exigem alguma habilidade geométrica.

O acadêmico Breno revelou sua percepção e suas concepções da seguinte forma:

> (...) entrar em contato com o meu ambiente de trabalho logo no início da minha formação, através do PIBID, esta ajudando muito. Se fossemos acompanhar a formação normal da faculdade, esse contato só aconteceria plenamente por volta do sexto período, nos estágios, e nestes não podemos intervir diretamente em sala-de-aula, como acontece no PIBID/UFJF. No IEE, deu para sentir como é você entrar numa escola como professor, notar a responsabilidade grande que têm os profissionais da área. (...) A troca de experiência com o professor supervisor do PIBID na escola e com os alunos fora da sala-de-aula, é muito gratificante. (...) Ver as dificuldades que alguns alunos tinham em aula e ir pra casa pensando no por que e como fazer pra ajudar na próxima aula e como ser melhor do que foi na aula anterior; notar os diferentes jeitos de ensinar dos outros colegas bolsistas aprimorando assim as próprias técnicas; ter *feedback* sobre o nosso trabalhos junto aos alunos, se esta bom ou não... Tudo isso é muito rico pra minha formação.

Considerações Finais

O programa PIBID/UFJF tem nos permitido vislumbrar algumas conexões entre a teoria aprendida na universidade e a prática docente nas instituições em que possivelmente os acadêmicos-bolsistas estarão inseridos, dentre poucos anos, como professores titulares.

Além disso, o PIBID tem proporcionado aos bolsistas um embasamento teórico, a partir da análise e da discussão de obras e textos da área de Educação Matemática, pois tal estudo favorece a reflexão acerca da prática pedagógica e do engajamento do professor para que o *aprender a ensinar* se dê continua e satisfatoriamente, beneficiando professores e alunos.

O PIBID/UFJF tem proporcionado aos graduandos sua participação em experiências metodológicas, tecnológicas e práticas docentes de caráter inovador e interdisciplinar, buscando a superação de problemas identificados durante as ações do projeto. Com base nestas experiências, podemos avaliar que o PIBID/UFJF traz significativas contribuições, não só para os bolsistas, mas também para os alunos das escolas parceiras, os quais podem desfrutar ao máximo de uma oportunidade diferenciada no seu meio estudantil, através de uma atenção individualizada durante cada oficina, cujas atividades são planejadas sempre levando em consideração a necessidade de

ouvir cada aluno e de se criar meios de expressão discente através dos quais as dificuldades de aprendizagem possam emergir e, em seguida, ser discutidas e superadas por intermédio de interações discentes e intervenções docentes.

Preparar módulos, oficinas, materiais e atividades diferenciadas, criar tarefas educacionais, aplicativos de softwares, jogos e vídeos, aplicar novas metodologias, realizar pesquisas em interface com a prática docente e publicar tais pesquisas em eventos da área têm sido uma experiência intensa e ao mesmo tempo geradora de grandes reflexões, tanto para o professor supervisor na escola, quanto para os bolsistas de iniciação à docência.

Envolvendo, ainda, reuniões semanais para planejamento das atividades em cada ação, muitas vezes com mudanças de direcionamento do trabalho, o PIBID/UFJF tem criado, entre alunos de Licenciatura em Matemática desta universidade, uma cultura de vivência efetiva dos problemas e dificuldades pedagógicos, mesmo antes da conclusão de sua graduação. No decorrer destes encontros, são observadas dúvidas, limitações que pareciam não existir e, por fim, reflexões que só a atuação plena em (e para a) sala-de-aula pode proporcionar.

Acreditamos que programas como este podem diminuir a grande evasão que tem sido notada, em nossos dias, nos cursos de Licenciatura em Matemática das universidades públicas brasileira.

Referências bibliográficas

Brasil (2007). Portaria Normativa n°. 38, de 12 de dezembro de 2007**.** Dispõe sobre o Programa de Bolsa Institucional de Iniciação à Docência - PIBID. *Diário Oficial da República Federativa do Brasil.* Brasília, DF, 13 de Dezembro de 2007. Seção1, p. 39.

Freire, P. (2000). *Pedagogia da autonomia:* saberes necessários à prática educativa. 16 ed. São Paulo: Paz e Terra.

Henriques, M. D. (2011).*Um estudo sobre a produção de significados de estudantes do ensino fundamental para área e perímetro.* 218 p. 2011. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora (MG).

Lins, R. C. (1999). Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a Educação Matemática. In: Bicudo, M. A. V. (Org.). *Pesquisa em educação matemática*: concepções e perspectivas. São Paulo: Editora da UNESP. p. 75-94.

Skovsmose, O. (2001). *Educação matemática crítica*: a questão da democracia. Campinas, São Paulo: Papirus.

GESTIÓN DE LAS COMPETENCIAS MATEMÁTICAS Y REFLEXIÓN DOCENTE: EL CASO DE LA MODELIZACIÓN Y LA ARGUMENTACIÓN EN EL AULA

Horacio Solar Bezmalinovic; Francisco Rojas, Andrés Ortiz y Rodrigo Ulloa
Universidad Católica de la Santísima Concepción. Chile
Pontificia Universidad Católica de Chile
hsolar@ucsc.cl; frojass@uc.cl; aortiz@ucsc.cl; rulloa@ucsc.cl

Resumen. En este artículo, caracterizamos algunos aspectos que son importantes de considerar por parte del profesor para una gestión de las competencias de argumentación y modelización en el aula de Matemáticas. Se presenta el caso de dos profesoras que participaban en un seminario para el desarrollo de competencias matemáticas, a quienes se les registró la clase para ser analizada en el seminario. De los casos presentados, destacamos que el desarrollo de la argumentación depende principalmente de la gestión de aula, en cambio la competencia de modelización depende tanto del diseño de situaciones de aprendizaje como de su gestión en el aula.
Palabras clave: competencia matemática, modelo de competencia matemática, argumentación matemática, modelización matemática
Abstract. In this paper, we characterize some aspects that are important to consider by the teacher for a competences management the argumentation and modelling in the classroom. A case of two teachers who participated in a seminar for math competences development, who were recorded for analysis class at the seminary. In the cases presented, we emphasize that the development of the argumentation depends mainly on classroom management, however modelling competence depends on both the design of learning situations and their management in the classroom.
Key words: mathematical competence, mathematical competence model, mathematical argumentation, mathematical modeling

Introducción

Actualmente, el enfoque por competencias es considerado en la comunidad internacional como una propuesta educativa que va más allá del aprendizaje de contenidos. En el ámbito escolar, destacan algunos proyectos en torno a la implementación de este enfoque en matemática basados en las competencias propuestas por Niss (2002). En estas experiencias, el listado de competencias matemáticas corresponde a procesos matemáticos tales como razonar, argumentar, representar, calcular, modelar, resolver problemas y comunicar. Desde nuestro punto de vista una de las contribuciones del enfoque por competencias al currículo de matemáticas es dotarle una estructura orientada al desarrollo de procesos matemáticos (Solar, Azcárate y Deulofeu, 2012). Además, las competencias matemáticas, al sustentarse en procesos, se caracterizan por ser transversales a los núcleos temáticos y desarrollarse a largo plazo de manera cíclica en cada nivel educativo.

Para el desarrollo de competencias matemáticas en los alumnos, es esencial que los docentes cuenten con herramientas específicas que promuevan dicho desarrollo. En investigaciones desarrolladas en los últimos años (Solar at al., 2012a; Solar, Rojas, Ortiz y Ulloa, 2012), que ha dado pie al grupo "Competencias Matemáticas" (COMMAT), se ha logrado consolidar un Modelo

de Competencia Matemática (MCM) que permite a los docentes articular en su gestión de clases el trabajo con competencias matemáticas. Para ello, hemos propuesto una metodología de trabajo docente, en la cual se busca tanto la comprensión de dicho modelo por parte de los profesores como también impactar en el aula por medio de actividades bien organizadas, siguiendo el MCM como modelo didáctico para la gestión del conocimiento matemático.

En particular, nos hemos centrado en estudiar dos competencias que consideramos muy relevantes de promover en el aula: argumentación y modelización. En base a los resultados obtenidos en nuestras investigaciones, podemos señalar que los docentes se han apropiado de una manera diferente de estas competencias, que se ha reflejado tanto en sus reflexiones como en la gestión del aula (Solar, et al. 2012b).

En el estudio presentado, se caracterizan algunos de los aspectos que son importantes de considerar por parte del profesor para una gestión de las competencias de argumentación y modelización. A partir de estos antecedentes, la pregunta que guía este estudio es: ¿De qué manera la MCM contribuye a que los profesores gestionen argumentación y modelización en el aula?

Marco Teórico

El marco teórico que fundamenta este artículo desarrolla tres aspectos: el Modelo de Competencia Matemática (MCM), la competencia de modelización y competencia de argumentación.

Modelo de Competencia Matemática (MCM)

El Modelo de Competencia Matemática (MCM) que hemos propuesto se sustenta en la perspectiva funcional de las matemáticas, "mathematical literacy" *(*OECD*,* 2003*)*. En concreto, el MCM para la competencia de modelización se conforma por cuatro componentes (Solar, 2009; Solar et al., 2012b):

- *Competencia matemática*: En base a los estándares de procesos del NCTM (2003) y las competencias matemáticas propuestas por Abrantes (2001), Niss (2002) y Pisa (OECD, 2003) acordamos elegir y optar por procesos matemáticos nucleares que denominamos competencias matemáticas, las cuales organizan y articulan el currículo de matemáticas.
- *Procesos matemáticos*: el significado de proceso se ha acuñado de la propuesta curricular del NCTM (2003). Cada competencia matemática se compone de procesos matemáticos; éstos están presentes de forma transversal a los contenidos matemáticos y se desarrollan a largo plazo.

- *Organizaciones matemáticas*: pese a que los contenidos matemáticos no se constituyen como el elemento estructurante del MCM, se hace necesario articularlos con los procesos o competencias matemáticas específicas. En particular se utilizaron las bases de la Teoría Antropológico de lo Didáctico (TAD) (Chevallard,1999), en la cual los contenidos matemáticos se estructuran en términos de Organizaciones Matemáticas, las cuales permiten establecer un núcleo de relaciones entre contenidos, desatomizándolos y permitiendo así una articulación con las competencias matemáticas. Una organización matemática nace como respuesta a un tipo de cuestiones problemáticas y está constituida por cuatro categorías de elementos: tipos de tareas, elementos técnicos, tecnológicos y teóricos.

- *Niveles de complejidad*: el progreso de la competencia se determina en términos de la complejidad de la actividad, que depende tanto de las tareas como de los procesos que la conforman. La expresión nivel de complejidad se adopta de los grupos de competencia de PISA (OECD, 2003) basados en la pirámide propuesta por de Lange (1995). En nuestro modelo de competencia, los niveles de complejidad se denominan de la misma manera que en PISA, pero se determinan de una forma distinta; además, a partir de nuestros estudios empíricos se ha visto la conveniencia de agregar un nivel más entre conexión y reflexión, el cual hemos denominado generalización, resultando así cuatro niveles de complejidad: reproducción, conexión, generalización y reflexión.

Competencia de Modelización

La modelización en el aula de matemáticas es uno de los tópicos que actualmente destaca en didáctica de la matemática y que está cada vez más vinculado con la noción de competencia. En el estudio 14 ICMI las competencias en la modelización han sido interpretadas principalmente de dos maneras: como las acciones a llevar a cabo en la fases de modelización (Kaiser, 2007), y como niveles de complejidad (Henning y Keune, 2007).

En términos generales, la modelización se presenta como las fases para resolver un problema proveniente de una situación real por medio de un modelo matemático (Maaß, 2006). Se inicia generalmente con una situación extramatemática, se simplifica a un modelo real, y se matematiza para obtener un modelo matemático; se resuelve dentro del modelo y se interpreta la solución de modo coherente con la situación inicial; finalmente se evalúa si responde a la situación original. Estos cinco pasos señalados son denominados fases de modelización.

Para caracterizar la competencia de modelización nos hemos sustentado en las fases de modelización de Maaß (2006), los trabajos sobre modelización en términos de matematización

conducidos por de Lange (1987), y los trabajos sobre modelización emergente (Gravameijer, 2007), este último enfoque ha sido de particular interés para atribuirle una función didáctica a la competencia de modelización. El término "emergente" se refiere tanto al carácter del proceso por el cual los modelos surgen en la educación matemática realista, como al proceso por el cual estos modelos apoyan la aparición de los modos matemáticos formales de saber. El modelo primero empieza a destacar como un *modelo de* las estrategias informales de los estudiantes. Entonces, con el tiempo el modelo gradualmente se convierte en una entidad propia y empieza a servir como un *modelo para* un razonamiento matemático más formal.

Competencia de Argumentación

En general, los análisis de argumentación en el aula se sustentan en el modelo argumentativo propuesto por Toulmin (1958), que sigue un proceso lineal desde los datos hasta las conclusiones. Esta secuencia consta de seis elementos (Goizueta y Planas, 2013). Para estudiar la argumentación en el aula de matemáticas, Krummheuer (1995) propone una secuencia de argumentación basado en el modelo argumentativo de Toulmin. Sin embargo, reduce el sistema original a cuatro elementos: datos, garantía, respaldo y conclusión.

Para nuestro análisis interpretamos los componentes del modelo argumentativo de Toulmin como procesos matemáticos. En efecto, nuestro estudio se enfoca en la caracterización de los procesos matemáticos que aparecen en la argumentación, a diferencia del tipo de análisis que realizan Krummheuer y otros autores que han seguido a Toulmin para estudiar la argumentación en el aula de matemáticas, que se centran en la secuencia argumentativa. A diferencia de Krummheuer, se considera como base el modelo argumentativo original de Toulmin, para así poder discutir en nuestra propia investigación qué papel juegan todos los procesos que conforman la estructura argumentativa.

En Solar et al. (2012a) se muestra un estudio realizado en un curso de 8° básico sobre qué procesos argumentativos de la estructura de Toulmin (1958) emergen en la implementación de una unidad didáctica de interpretación de graficas funcionales, obteniendo como resultado agregar el procesos de interpretación a la estructura argumentativa.

Metodología

La experiencia que presentamos, comenzó con la conformación de un seminario de 10 sesiones quincenales con 11 profesoras de primer y segundo año de educación primaria pertenecientes a establecimientos educacionales de la ciudad de Concepción (Chile) y alrededores. El seminario se organizó siguiendo una metodología de trabajo docente, que iniciaba con un estudio por parte de las profesoras del MCM a través el análisis conjunto de episodios de clases de otras profesoras,

grabados con el propósito de mostrar el desarrollo de competencias matemáticas. Como parte de la metodología de trabajo docente, una vez que las profesoras analizaban los episodios, se les sugería la implementación de actividades puntuales para el desarrollo de las competencias.

En este artículo se presenta el caso de dos profesoras, Graciela y Sandra, a quienes mediante una observación no participante, se les registró la clase para luego ser analizada mediante una discusión reflexiva en el seminario.

Análisis de Datos

En una de las sesiones del seminario se analiza un episodio de clase en que la profesora Graciela propone al curso la resolución del siguiente problema aditivo de composición: "Enrique tiene 26 gusanos de seda y Lorena tiene 38. ¿Cuántos gusanos de seda tienen en total los dos?". Los niños resuelven utilizando diferentes técnicas, luego Graciela hace pasar a dos niños a mostrar sus cálculos, el primero mediante el algoritmo tradicional, y el segundo por la técnica del "trasvasije". Graciela propone que se contrasten las dos técnicas y en particular que el niño que utilizó trasvasije explique al curso cómo es el procedimiento.

En la sesión del seminario, se discute cual es la competencia predominante en la gestión de la actividad. A continuación se presenta un extracto del seminario en que los docentes analizan el episodio de clase.

> Guía: cual son las competencias predominantes en el video o en la gestión de esta actividad
>
> Valentina: Puede ser el razonamiento y la argumentación... no se vio todo el video pero en lo poco que se vio, ella le pregunta a los niños como lo hicieron y llama a otro niño para modelar adelante y lo hizo de otra forma diferente al algoritmo tradicional y le fue consultando que él le diga como lo hizo, como lo fue haciendo, que explique a los demás como lo hizo.
>
> Mónica: El cálculo y manipulación de expresiones también
>
> Guía: ¿Por qué Mónica?
>
> Mónica: Porque realizó procedimientos de cálculo
>
> Guía: porque realizó procedimientos de cálculo
>
> Mónica: los niños realizan los procedimientos…

Guía: ¿están de acuerdo con Mónica de agregar Cálculo y manipulación de expresiones? Hay alguna de esas dos que es más predominante. ¿María Antonia que piensas tu?

María Antonia: trabaja las dos en realidad porque se contrasta las dos técnicas

Guía: ¿Laura que piensan tu?

Laura: si porque (...), las dos técnicas quedan claras en este caso, queden bien identificadas el trasvasije y el algoritmo.

Guía: ¿Carmen?

Carmen: opino lo mismo que ella, porque en realidad los niños explicaron bien, fueron (a la pizarra), decían como lo hacían

Guía: ¿Tú estás de acuerdo Graciela con tus colegas?

Graciela: Siento que tuve la intención de que argumentarán pero yo no quedé conforme con su argumentación.

Guía: en qué caso no quedaste conforme

Graciela: Porque siento como que la parte del algoritmo tradicional fue muy mecánico, porque ni explico.

Guía: ¿y quién lo explicó?

Graciela: lo explique yo [en el seminario hay una exclamación de sorpresa] y la parte de la técnica del trasvasije, sabes que quedó un poco más clara pero igual su explicación fue un poco más mecánica que razonada y argumentada.

En el extracto del seminario, se discute cual es la competencia predominante en la gestión de la actividad, una parte de los profesores coinciden que es la competencia de cálculo porque se realizan diferentes procedimientos. No obstante Graciela interviene diciendo que el énfasis en esa parte de la clase es en la argumentación, y no precisamente en el cálculo, y en base a ello dice no estar del todo satisfecha con la argumentación de los niños dado que fue más mecánico que razonado. En el análisis de esta discusión se aprecia la importancia de tener claridad sobre la competencia que se promueve.

Otra sesión del seminario se diseñó para problematizar en torno a la modelización. Se analiza la implementación que hace la profesora Sandra, de una actividad cuyo propósito era que los niños utilizarán esquemas de barras para modelizar problemas de composición. Para ello, la profesora

propuso el siguiente problema:"Tengo 25 cajas con jureles y sierras. Si tengo 19 cajas de sierras, ¿cuántas cajas de jureles hay?". En el episodio de la clase se observó cómo la profesora promueve el uso de esquemas, siendo lo ideal que los alumnos los utilicen para reconocer el tipo de problema aditivo (comparación) y plantear la operación. Sin embargo, en el episodio se evidenciaron grandes dificultades en los estudiantes para usar el esquema y reconocer la operación, lo cual se manifestó en el considerable tiempo invertido en la resolución del problema.

En la sesión del seminario las profesoras reflexionaron sobre las dificultades presentadas en el episodio de clase. A continuación se presenta un extracto de la discusión de las profesoras.

> Ángela: Yo siento que a priori es muy complejo porque tu le estas trasladando los pescados que están al lado de la pantalla a una huincha [referido al esquema] que dice 19…. Pero yo siento que el objetivo de lograr la modelización del esquema, ese mismo yo le hubiera resuelto mostrándole el 19 que son tantos pescados, y que estos tantos son los jureles y tenemos que sacar la diferencia que son otros tipos de pescado y después cuando él ya tiene en la cabeza este cuento, ahí utilizamos la huincha porque el ya va a saber que este pedazo rojo es el total de todos los pescados.
>
> Sandra: Yo tengo que asumir los siguiente, lo que pasa es que yo tiré mis chiquillos a los leones al tiro, y yo insisto que no fue muy fluido para ellos, y mi segundo problema yo lo tuve que haber hecho primero porque el esquema era de conchitas y lo le puse digamos 19, en la cinta le puse los 19 conchitas, y en la otra le puse 11 por ejemplo y había que sacar cuantas más tenía la amiga y ahí contaron solamente y la sacaron altiro,
>
> Sandra: Yo me hice un autoanálisis y llegué a la conclusión que no tuve que haber puesto este problema
>
> Graciela: Yo creo que a lo mejor le faltó a Sonia quizás es rescatar la acción [aprobación otra profesora], porque aquí habían peces, pero habían dos tipos de peces y que tu necesitabas separar del cual había de cada tipo. Qué ellos supieran identificar para poder separar como condición para poder restar y en base a eso presentar el esquema.

En la discusión se puede apreciar que Ángela planteó que faltó dedicarle más tiempo a la comprensión de los datos del problema para luego usar el esquema para representar los datos; Sandra, aludió que los niños aun no estaban preparados para usar esquemas para este problema y que tuvo que comenzar con el segundo problema que presentó esa clase en que las colecciones

eran de la misma naturaleza (conchitas) y los niños identificaron la operación sin dificultad; y Graciela argumentó que faltó destacar la acción involucrada de separar para reconocer la resta antes de presentar el esquema. Por tanto, se llega a la conclusión de que el problema de comparación no fue el apropiado para introducir el uso esquemas, y que tuvo que haber sido con un problema más sencillo, por ejemplo, de juntar o separar (composición).

Conclusiones

De los dos casos presentados, destacamos que las condiciones para el desarrollo de la argumentación y modelización son diferentes. Para un adecuado desarrollo de la argumentación es importante que el docente realice buenas preguntas y explicitación de los razonamientos de los estudiantes, sin importar necesariamente el tipo de problema presentado. Ante estas características podemos decir que es una competencia asociada principalmente a la gestión de clase. En cambio para el desarrollo de la modelización es necesario tener claridad de los modelos que pueden emerger según el tipo de problemas, y un trabajo de estudio de estos modelos con los estudiantes. Estas características nos permiten señalar que la competencia de modelización depende tanto del diseño de situaciones de aprendizaje como de su gestión en el aula.

Referencias bibliográficas

Abrantes, P. (2001). Mathematical competence for all: options, implications and obstacles. *Educational Studies in Mathematics*, *47*, 125-143.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des practiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*(2), 221-266.

De Lange, J. (1987). *Mathematics:* insight and meaning. Utrecht: OW y OC.

De Lange, J. (1995). Assessment: No change without problems. En T. A. Romberg (Ed.), *Reform in school mathematics and authentic assessment* (pp. 87–172). New York: SUNY Press.

Goizueta, M. y Planas, N. (2013). Temas emergentes del análisis de interpretaciones del profesorado sobre la argumentación en clase de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, *31*(1), 61-78.

Gravemeijer, K. (2007). Emergent modelling as a precursor to mathematical modelling. En W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, M. Niss, (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI Study* (pp. 137–144). New York: Springer.

Henning, H. y Keune, G (2007). Levels of modeling competence. En W. Blum; P. L. Galbraith; H.-W. Henn y M. Niss (Eds.*), Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI Study* (pp. 225–232). New York: Springer.

Kaiser, G. (2007). Modelling and modelling competencies in school. En Haines, C., Galbraith, P., Blum, W., Khan, S. (Eds.), *Mathematical Modelling. The 12th ICTMA Study. Education, Engineering and Economics* (pp. 110-119). Chichester: Horwood.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. En P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229-269). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *38*(2), 113-142.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática. Sociedad Andaluza de Educación Matemática*. España: Thales.

Niss, M. (2002) (coord). *Mathematical competencies and the learning of mathematics: The danish kom project*. Roskilde: Roskilde University.

OCDE. (2003). *Marcos teóricos de PISA 2003*. Conocimientos y destrezas en matemáticas, lectura, ciencias y solución de problemas. Paris: autor.

Solar, H. (2009). *Competencias de modelización y argumentación en interpretación de gráficas funcionales: propuesta de un modelo de competencia aplicado a un estudio de caso. Tesis doctoral.* Bellaterra: Universitat Autònoma de Barcelona.

Solar, H., Azcárate, C. y Deulofeu, J. (2012a). Competencia de argumentación en la interpretación de gráficas funcionales. *Enseñanza de las Ciencias, 30*(3), 133-154.

Solar, H., Rojas, F., Ortiz, A. y Ulloa, R. (2012b). Reflexión docente y competencias matemáticas: un modelo de trabajo con docentes. *RECHIEM*, *6*(1) 257-267.

Toulmin, S. (1958). *The uses of argument*. Cambridge: Cambridge University Press.

EL TRABAJO GEOMÉTRICO PERSONAL DE FUTUROS PROFESORES

Carolina Henríquez-Rivas
Universidad Católica de Valparaíso Chile
carohenriquezrivas@gmail.com

Resumen. El propósito de este escrito es mostrar avances en el marco de una investigación en Didáctica de la Matemática sobre el trabajo geométrico de profesores chilenos en el tránsito de la geometría sintética a la analítica en la enseñanza secundaria. Se presenta el trabajo producido por dos estudiantes de Pedagogía en Matemática en su último año de formación, uno resuelve usando métodos sintéticos, el otro empleando métodos analíticos. El análisis se enmarca en la Teoría *Espacio de Trabajo Matemático* (ETM). Los resultados sobre el ETM de profesores, permitirán profundizar en aspectos teóricos actualmente no abordados, así como la generación de propuestas de enseñanza.
Palabras clave: profesor, trabajo geométrico, paradigma geométrico
Abstract. The purpose of this paper is to show advances in the framework of a research in Didactics of Mathematics on the geometric work of Chilean teachers in the transit of the synthetic geometry to analytic geometry in the secondary education. We present the work produced by two students of Pedagogy in Mathematics in his final year of formation, one resolves using synthetic methods, the other using analytical methods. The analysis is based on the Theory *Mathematical Work Space (MWS)*. The results on the MWS of teachers, will allow to penetrate into theoretical aspects nowadays not approached, as well as the generation of proposed for teaching.
Key words: teacher, geometric work, geometric paradigm

Introducción: Contexto de la investigación

En este escrito se muestra parte de los avances y evidencias obtenidas relativos al trabajo geométrico de futuros profesores, lo cual forma parte de una investigación doctoral en Didáctica de la Matemática sobre el *trabajo geométrico de profesores chilenos en el tránsito de la geometría sintética a la analítica en la enseñanza secundaria*. En general, se analiza el trabajo del docente desde distintos niveles: sus referentes matemáticos, cómo organiza y ejecuta la enseñanza y en un sentido personal, dadas sus propios conocimientos y creencias.

El tema de la enseñanza de la geometría y sobre las geometrías sintética y analítica en particular, es un asunto que ha sido abordado desde hace más de un siglo por diversos autores y en circunstancias diferentes. Por ejemplo, Klein (1908) en relación a las geometrías sintética y analítica distingue entre una y otra, señalando que en la geometría sintética se estudian las figuras en sí mismas sin intervención de fórmulas, mientras que en la analítica, estas se aplican mediante el uso de los sistemas de coordenadas, además, añade "En realidad, la diferencia entre ambas especies de Geometría es puramente cuantitativa: según predominen las fórmulas o las figuras, se tiene una u otra Geometría" (p. 74). En el *Programa de Erlangen* de Klein, las distintas geometrías son caracterizadas en términos de los grupos de transformaciones. Desde este punto de vista, una geometría sería el conjunto de propiedades invariantes mediante las transformaciones del grupo

correspondiente, poniendo fin a las disputas entre las geometrías sintética y analítica (Hernández, 1995).

Específicamente sobre la enseñanza de la geometría en secundaria, Santaló (1980) se refiere a la falta de consenso respecto de los contenidos y metodologías. Sobre estudios realizados en el campo de la Didáctica de la Matemática, destacan los de Gascón (2002; 2003) quien da cuenta de la falta de *continuidad y complementariedad* entre la enseñanza de las geometrías sintética y analítica en la enseñanza secundaria y el bachillerato, señalando que se estudian como *"mundos separados"*. Gascón propone a través de cierto tipo de problemas, poner de manifiesto su complementariedad.

En este trabajo, a partir del contexto anteriormente expuesto y desde una perspectiva teórica que considera aspectos epistemológicos, filosóficos y cognitivos, se presenta el análisis al trabajo geométrico de dos futuros profesores en su último año de formación.

Marco Teórico

Este estudio se sustenta principalmente en la teoría *Paradigmas Geométricos y Espacio de Trabajo Geométrico* (ETG) desarrollado inicialmente por de Houdement y Kuzniak (1996, 2006) y ampliada por Kuzniak (2011) al *Espacio de Trabajo Matemático* (ETM), que surge con la necesidad de profundizar en otros dominios de la matemática.

Espacio de Trabajo Matemático

Desde esta perspectiva es posible observar cómo un sujeto que resuelve una tarea, reflexiona de acuerdo a las creencias, técnicas y conocimientos, conformando su propio ETM. En el ETM se definen dos planos, uno cognitivo y el otro epistemológico, en relación directa con los contenidos matemáticos del dominio en juego. Cada plano contempla tres componentes; en el cognitivo están presentes los procesos de *visualización*, de *construcción* y de *prueba* y, en el plano epistemológico, el *representante*, los *artefactos* y el *referencial*. Las componentes de los planos, se articulan mediante tres génesis: *semiótica, instrumental y discursiva*. La génesis semiótica, asociada a las representaciones de los objetos matemáticos. La génesis instrumental, permite hacer operatorios los artefactos en el proceso constructivo. La génesis discursiva que da sentido al referencial teórico (definiciones, propiedades) para ponerlo al servicio del razonamiento matemático (Kuzniak, 2011). En la siguiente figura (1), se muestra el ETM y las génesis que permiten articular los planos.

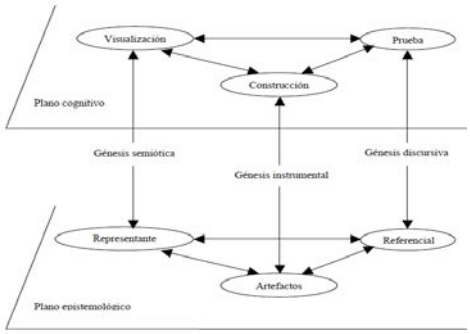


Figura 1. Espacio de Trabajo Matemático y sus génesis (Kuzniak, 2011).

La idea de *representante* está relacionada a la noción signo de Peirce (1974), tiene que ver con el objeto matemático bajo formas más o menos abstractas: íconos, índices y símbolos. Un signo remite a su objeto de alguna de estas tres formas, según el proceso semiótico –llamado aquí visualización– involucrado en función de las significaciones de su utilizador. En relación a los *artefactos*, estos no solo abarcan los de tipo material sino que los de tipo simbólico (no material), aludiendo a la distinción efectuada por Rabardel (1995).

El proceso de transformación efectuado por el sujeto de artefacto a instrumento se denomina génesis instrumental (Trouche, 2002) el cual favorece el proceso de construcción de configuraciones matemáticas. La componente *referencial* remite a la componente de índole teórico matemático del dominio en juego, las propiedades y definiciones involucradas en un razonamiento y cómo estas son explicitadas en un discurso para argumentar y convencer.

En los distintos ETM se identifican tres tipos, dependiendo de la reflexión del sujeto cuando se enfrenta a un problema: un referencial matemático definido de manera ideal solamente sobre criterios matemáticos (ETM de referencia), un espacio definido en términos didácticos en una institución dada con una función definida (ETM idóneo) y, un espacio propio de cada utilizador fruto de la reflexión entre sus conocimientos matemáticos y los que utiliza para resolver una tarea (ETM personal).

Paradigmas Geométricos y Espacio de Trabajo Geométrico (ETM_G)

Para definir el ETM_G y los paradigmas geométricos, se deben considerar las particularidades de la geometría y, naturalmente, su desarrollo en términos epistemológicos. Así, para profundizar en las componentes de los planos cognitivo y epistemológico del ETM_G, se contemplan otros enfoques. Por ejemplo, sobre el proceso de *visualización y razonamiento* se considera lo desarrollado por Duval (1995, 2005), sobre los *artefactos* e *instrumentos* las concepciones de Rabardel (1995) y Trouche (2002) sobre génesis instrumental y los procesos de *prueba* según Balacheff (1987).

Sobre las génesis del ETM, específicamente la *génesis semiótica*, al considerar las particularidades del dominio geométrico, esta se denomina *génesis figural*, la cual permite describir el proceso semiótico que está asociado al pensamiento visual que opera en geometría. Si bien las *génesis instrumental* y *discursiva* no varían en su denominación, también se consideran las particularidades del dominio geométrico. El *espacio real y local* se presenta como componente particular del ETM_G (se trata del *representante* en el ETM) es el soporte material con un conjunto de objetos concretos y tangibles, basado en la concepción semiótica de Duval (1995, 2005); en este caso el proceso de *visualización,* asociado a los tratamientos sobre las figuras. Las formas de visualizar pueden funcionar de modo *icónico* o *no-icónico*, según el tipo de operación con las figuras y cómo se movilizan sus propiedades (Duval, 2005).

Sobre la componente de los *artefactos* en el ETM_G, se considera la concepción cognitiva desarrollada por Rabardel (1995) sobre artefactos e instrumentos (antes mencionado en el caso general del ETM). En este enfoque, los instrumentos pasan a ser *entidades mixtas* formadas por el artefacto (regla, compás, un software, etc.) y componentes cognitivos relacionados con los esquemas de uso. Además, los instrumentos son considerados como *entidad mediadora* entre el sujeto (utilizador) y el objeto sobre el cual se relaciona la acción.

Sobre el ETM_G y su caracterización, es preciso señalar que interactúa el individuo frente a una tarea específica, que permite activar y construir el espacio de trabajo de cada *geómetra* –sujeto que resuelve la tarea geométrica. Desde esta perspectiva podemos observar cómo un geómetra reflexiona de acuerdo a las creencias, técnicas y el conocimiento de distintos modelos geométricos cuando enfrenta a una tarea, es decir, el ETM_G puede variar, dependiendo del *paradigma geométrico* dominante.

En las investigaciones realizadas por Houdement y Kuzniak (1996, 2006) ellos identifican tres tipos de geometrías que coexisten en la enseñanza de la geometría, estos son: *Geometría Natural* (GI), es decir, la geometría sobre objetos reales, la importancia en las mediciones, el trabajo es de tipo material; *Geometría Axiomática Natural* (GII), los objetos geométricos descritos por una propiedad, su definición, al momento de validar, esto se hace dentro de un sistema axiomático local; *Geometría Axiomática Formal* (GIII), independencia de la geometría y la realidad, la axiomática explícita y completa. Esta noción de *paradigma geométrico* ha sido inspirada por la noción de paradigma introducida por Kuhn (1962) sobre las estructuras de las revoluciones científicas.

Es posible analizar las entradas en el ETM_G y cómo se articulan los planos mediante las génesis y, especificando, las componentes puestas en juego, es lo que se denomina *circulación* entre las componentes en el ETM_G. Los resultados obtenidos, respecto a las circulaciones entre las

componentes en el ETM_G de profesores, permitirán profundizar en aspectos teóricos actualmente no abordados. Destacamos en este punto, el diseño de propuestas de enseñanza que consideren el tránsito y complementariedad entre los enfoques sintéticos y analíticos en la Enseñanza Secundaria, especialmente, aquellos que privilegian el paradigma geométrico GII, o bien, el tránsito de GI a GII.

Cabe señalar, que por no tratarse del objetivo principal de este reporte, no serán presentadas las propuestas de enseñanza antes mencionadas.

El ETM_G Personal de Futuros Profesores: Dos Casos

El objetivo de este estudio es analizar las circulaciones entre las componentes de los planos en el ETM_G *personal* de dos futuros docentes, cuando los métodos empleados son sintéticos o analíticos y, además, identificar el *paradigma geométrico* privilegiado en cada trabajo. Se trata de los casos de dos estudiantes chilenos en último año de formación en Pedagogía en Matemática, que han tenido al menos un semestre de práctica en el aula como docentes –práctica profesional. Los estudiantes pertenecen a la misma universidad y se encuentran en el mismo nivel, ambos cursaron asignaturas que involucran contenidos geométricos. Cabe señalar que se pidió explícitamente a los estudiantes resolver la tarea dada con uno u otro método, es decir, uno utilizó métodos sintéticos, el otro, analíticos, ambos usaron GeoGebra para construir o verificar las configuraciones geométricas y propiedades involucradas, además, seleccionaron una secuencia de imágenes que utilizaron para relatar (por escrito) su razonamiento.

La tarea que debían resolver es la siguiente: *"Probar que las rectas que unen los puntos medios de los lados sucesivos de cualquier cuadrilátero forman un paralelogramo"*. El análisis a priori de la tarea, contempla el uso de artefactos materiales tradicionales e informáticos (dada su extensión no se expone este desarrollo).

Se utilizará la notación ETM_{GS} cuando el trabajo se realiza usando métodos sintéticos y ETM_{GC} cuando son analíticos provenientes del sistema de coordenadas cartesianas. FP_1, FP2 para referirse a futuro profesor 1 y 2, respectivamente. Para analizar las circulaciones entre las componentes de los planos de cada ETM_G, se utilizarán las claves: para el plano cognitivo, visualización [A], construcción [B], prueba [C] y, para el plano epistemológico, espacio local y real [1], artefactos [2], referencial [3].

Primer Caso: ETM_{GS} de FP_1

Evidencias

A continuación, extractos del ETM_{GS} realizado por el FP_1. Primero, una secuencia de imágenes (1, 2 y 3) y los tratamientos realizados. Luego, extractos del relato realizado por el geómetra de forma escrita.

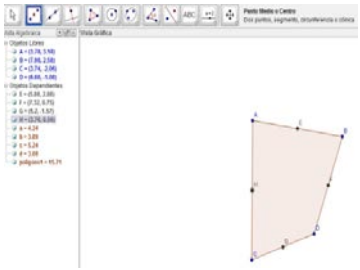


Imagen 1

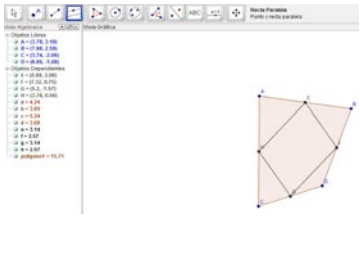


Imagen 2

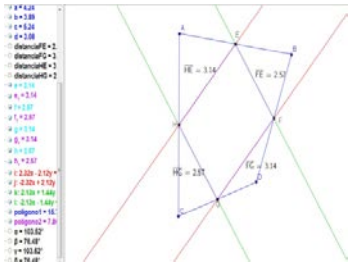


Imagen 3

[Relato de FP_1]:

1) Dibujar el cuadrilátero […].

2) Utilizar herramienta punto medio y luego unir los puntos.

3) Utilizar herramienta que mide distancia o longitud, herramienta de ángulo, para comprobar que es un paralelogramo.

4) Comprobar que el cuadrilátero que se forma cumple con las propiedades del paralelogramo.

5) Luego deslicé uno de los vértices del cuadrilátero, […], entonces, comprobé que se cumplen las propiedades.

6) Traté de hacer la demostración "formal" […], pero no pude.

En lo que sigue, se analizarán las evidencias sobre el ETM_{GS} realizado por FP_1.

Circulación entre las Componentes y Paradigma Geométrico

De acuerdo a lo analizado en relación a la tarea dada, la circulación entre las componentes del ETM_{GS} de FP_1, se describe como sigue: en primer lugar, el trabajo se activa por la génesis instrumental, pues utiliza el software [2] que le permite realizar las construcciones [B] de las configuraciones geométricas [1]; cuadrilátero, punto medio, y las potencialidades propias del software son usadas [2] activando nuevamente la génesis instrumental en coordinación con un trabajo de visualización [A] que permite "ver y validar" que se cumplen ciertas propiedades [3] ya conocidas por FP_1 para un número reducido de casos, mediante los deslizamientos de los vértices [C]. En resumen, la circulación entre las componentes en este caso es: [2] [B] [1] [2] [A] [3] [C].

Con respecto al paradigma geométrico que se basa el trabajo, este se encuentra en GI, pues está directamente relacionado con la realidad; la validación empírica usando un artefacto material y

mediciones para probar unos pocos casos. Si bien hay un trabajo de orden discursivo, este se presenta debilitado, pues no se trata de un *razonamiento deductivo* –o demostración, en alusión al razonamiento definido por Duval (1995) – lo cual incluso es declarado por FP_1.

Segundo Caso: ETM_{GC}

Evidencias

A continuación, se muestran extractos del ETM_{GC} realizado por FP_2. Primero, la secuencia de imágenes (4, 5 y 6) realizadas con sistema de coordenadas cartesianas y, posteriormente, se presenta el relatado del geómetra de la tarea realizada.

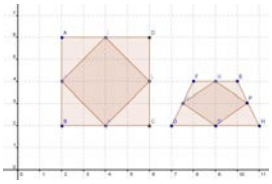


Imagen 4

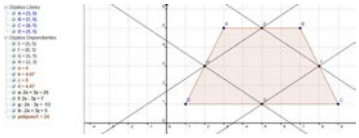


Imagen 5

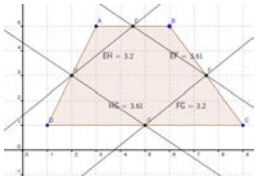


Imagen 6

[Relato de FP2]:

1) Se tiene un cuadrilátero ABCD. Se determinan los puntos medios.

2) Se trazan las rectas e, f, g, h. Al mover los vértices A, B, C, D y crear otros cuadriláteros, se pueden observar paralelogramos […], donde se cumplen las propiedades del paralelogramo.

3) Luego volviendo al cuadrilátero creado originalmente, podemos ver que las rectas e, g tienen igual pendiente, por lo tanto son paralelas, lo mismo se puede realizar con las rectas f y h.

4) *También podemos verificar algunas propiedades del paralelogramo, utilizando herramientas de GeoGebra, como medir la distancia entre dos puntos*

En lo que sigue, se analizarán las evidencias sobre el ETM_{GC} realizado por FP_2.

Circulación entre las Componentes y Paradigma Geométrico

De acuerdo a las evidencias desarrolladas a partir de la tarea dada, la circulación entre las componentes del ETM_{GC} del FP_2 es: inicialmente, el trabajo se aborda sin considerar el sistema de coordenadas, es similar a lo realizado por FP_1, lo cual queda en evidencia en las imágenes del FP_2. Hasta los argumentos expuestos en el punto 2) del relato, la circulación se activa por la componente artefactos [2] que, conocidas sus potencialidades, permite construir las configuraciones geométricas [B]; cuadriláteros, puntos, rectas [1], que al manipular el artefacto [2] en coordinación con el proceso de visualización [A] permite verificar empíricamente por medio de ciertas propiedades [3], que el cuadrilátero formado es un paralelogramo [C]. Hasta este

momento, no hay indicios de un trabajo que considera el sistema de coordenadas cartesianas ni las representaciones algebraicas que provienen del trabajo en este sub-dominio (a pesar de las imágenes en el plano cartesiano). Es en el punto 3) del relato, que efectúa un trabajo en el sub-dominio analítico, pues usando un teorema de las pendientes [3] y las representaciones algebraicas de las rectas [1], proporcionadas en la *vista algebraica* del software, "ve" que el cuadrilátero es efectivamente un paralelogramo [A]. Finalmente, vuelve a lo realizado en el punto 2), la circulación se repite en [3] y [C]. En resumen, la circulación entre las componentes es: [2] [B] [1] [2] [A] [3] [C] [3] [1] [A] [3] [C].

Según lo examinado, el paradigma que predomina en el ETM_{GC} de FP_2 es GI, pues si se considera el momento del trabajo en que alude al sistema de coordenadas, representaciones algebraicas y propiedades que provienen de este sub-dominio, se trata de un trabajo para un número reducido de casos específicos. En este caso, las configuraciones en el sistema de coordenadas, tiene una posición específica (local), la visualización se relaciona a lo que se ve usando la *vista algebraica* del software y herramientas de medición.

Análisis Global: Aspectos Comunes sobre las Génesis de los ETM_G

Si bien la intensión es analizar el ETM_G de dos FP al emplear métodos geométricos distintos, se han detectado aspectos relativos a las génesis comunes en ambos casos. Con respecto a la *génesis instrumental*, el trabajo se activa por medio de esta génesis, se observa en ambos casos cierto manejo del software y de sus potencialidades, es decir, se movilizan los procesos de instrumentalización e instrumentación (Trouche, 2002). En ambos casos, los deslizamientos que permite efectuar el software son fundamentales para probar de forma empírica para un número reducido de casos, lo dinámico no es aprovechado en todo su potencial. No es explícita la presencia de artefactos no-materiales (simbólicos), específicamente en el trabajo de FP_2.

La *génesis figural,* en ambos casos permite articular los objetos (figuras) con el proceso de visualización, el cual según la clasificación de Duval (2005) es de tipo *icónico*, pues las configuraciones son lo que representan visualmente y no se obtienen por construcción geométrica o descomposición dimensional. Si bien se utilizan propiedades, estas permiten verificar para unos pocos casos, trabajo que luego no se formaliza.

Es posible afirmar que en el trabajo solicitado por la tarea, se privilegia en ambos casos el proceso de visualización. Finalmente, sobre la *génesis discursiva*, predominan las pruebas de tipo pragmática, en alusión a las tipologías propuestas por Balacheff (1987). Si bien los relatos dan cuenta del conocimiento de ciertas propiedades del paralelogramo para probar, se trata de la génesis mas debilitada, incluso esto fue declarado por los propios estudiantes (llamados futuros profesores).

Conclusiones y Reflexiones

Este y otros análisis realizados (en el marco de la investigación doctoral) a los distintos tipos de ETM_G (personal, idóneo, de referencia), más estudios de carácter epistemológico, han permitido profundizar en aspectos no abordados del ETM, específicamente en el sub-dominio de geometría analítica (GC). Lo anterior, se traduce en el estudio de distintos ETM_G y una aproximación a la formulación de los paradigmas geométricos en el sub-dominio de GC.

Los estudios realizados sobre el ETM_G de los docentes, así como la profundización y ampliación teórica, han permitido constatar la necesidad de centrar la atención en *tareas* que activan un determinado trabajo, es decir diseñar a nivel de ETM_G-idóneo, *tareas de referencia* que provoquen ciertas circulaciones. Se consideran dos tipos de tareas de referencia: con dificultad de resolución en GS y que se puedan resolver en GC y, otras, con modificación de enunciados. Como se menciona en el punto 2.2, son de interés para los efectos de la investigación en curso, aquellas tareas que privilegian el paradigma geométrico GII, o bien, el tránsito entre GI y GII.

Con respecto al trabajo realizado por cada FP y el paradigma privilegiado en cada caso, en los respectivos sub-dominios, ambos se basan en el paradigma GI. Al respecto, es preciso señalar que a priori se pensaba que privilegiarían GII en ambos casos. Llamó la atención, por ejemplo, la manera de visualización privilegiada por ambos geómetras analizados, de tipo *icónica* (Duval, 2005), además, las pruebas del tipo *pragmática* (Balacheff, 1987), donde la génesis discursiva es débilmente explotada. En ambos casos, no se aprovechó el potencial del entorno tecnológico utilizado. Es evidente que en este asunto se debe considerar para el diseño de tareas de referencia que favorezcan el tránsito entre las geometrías y el trabajo en las tres génesis del ETM.

Reconocimiento

Financiamiento parcial a través del Proyecto de investigación del Fondo Nacional Desarrollo Científico y Tecnológico (FONDECYT) 1110988, Chile.

Referencias bibliográficas

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18*(2), 147-176.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine.* Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berne, Suisse: Peter Lang.

Duval, R. (2005). Les Conditions Cognitives de l'apprentissage de la géométrie: Developpement de la Visualisation, Différenciation des Raisonnements et Coordination de luers Fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives 10*, 5-53.

Gascón, J. (2002). Geometría sintética en la ESO y analítica en el bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados? *Suma*, *39*, 13-25.

Gascón, J. (2003). Efectos del autismo temático sobre el estudio de la geometría en secundaria. *Suma, 44*, 25-34.

Hernández, J. (1995). Las estructuras matemáticas y Nicolás Bourbaki. *Seminario Orotava de historia de la ciencia, año IV,* 55-78.

Houdement, C. y Kuzniak, A. (1996). Autours des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, *16*(3), 289-321.

Houdement, C. y Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 11*, 175-193.

Klein, F. (1908). *Matemática elemental: Desde un punto de vista superior. Volumen II. Geometría.* Traducción de R. Fontanilla. Madrid: Biblioteca Matemática.

Kuhn T. (1962). *The structure of scientific revolutions*. Traducción de Solís Santos. México: Fondo de Cultura Económica (Breviarios; 213).

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses Genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16,* 9-24.

Peirce, C. S. (1974). *La ciencia de la semiótica.* Buenos Aires: Nueva Visión.

Rabardel, P. (1995). *Les Hommes et les Technologies: Une approche cognitive des instruments contemporains*. Francia: Armand Colin.

Santaló, L. (1980). Situación de la enseñanza de la geometría frente a las nuevas tendencias de la educación matemática. *Revista de Bachillerato,* suplemento del n° 13, 23-28.

Trouche, L. (2002). Une approche instrumentale de l'apprentissage des mathématiques dans des environnements de calculatrice symbolique. En D. Guin et L. Trouche (Eds.). *Calculatrices Symboliques. Transformer un outil du travail informatique*: un problème didactique *(pp.187-214).*Grenoble: La Pensée Sauvage.

EL DESAFÍO DE CAMBIAR LAS PRÁCTICAS DOCENTES. UNA EXPERIENCIA DE ASESORÍA TÉCNICA EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

Pilar A. Peña Rincón, Francisco J. Rojas Sateler
CICATA-IPN. México
Pontificia Universidad Católica de Chile. Chile
pilaralejandrapena@yahoo.es, frojass@uc.cl

Resumen. En el contexto de un plan de mejoramiento educativo desarrollado por una escuela primaria de la ciudad de Curicó (Chile), se ha implementado un programa de formación continua a docentes que imparten matemáticas, el cual contempla dos líneas de trabajo: *acompañamiento de la acción docente en aula* y *talleres de especialización didáctica.* Ambas acciones pretenden abrir espacios de reflexión pedagógica sobre la gestión de aula, con tal de instalar y desarrollar principios didácticos que apunten al desarrollo de habilidades y competencias matemáticas en los estudiantes. Los resultados de estas acciones apuntan a que los elementos de la racionalidad formativa que más impactaron las prácticas docentes fueron los relativos a la problematización y a la generación de espacios para la exploración, construcción y comunicación de ideas matemáticas.

Palabras clave: formación continua, profesor de matemáticas, asesoría a escuelas, racionalidad formativa

Abstract. In the context of an educational improvement plan developed by an elementary school in the city of Curico (Chile) has implemented a training program for teachers who teach math, which includes two lines of work: support of the teaching classroom and teaching specialized workshops. Both actions aim to create opportunities for pedagogical reflection on classroom management, provided to install and develop teaching principles aimed at the development of skills and math skills in students. The results of these actions suggest that the elements of rationality most impact formative teaching practices were those relating to the problematization and the creation of opportunities for exploration, construction and communication of mathematical ideas

Key words: in-service teacher education, mathematics teacher, advice to schools, formative rationale.

Introducción

Como base de la acción docente, tanto las tareas matemáticas dispuestas para la enseñanza como la gestión en aula de las mismas, y la reflexión de ambos procesos, son la base de la acción docente (Ponte, Quaresma y Branco, 2012). En este trabajo damos un especial énfasis a la gestión, ya que la interacción entre profesor y estudiantes, con base en el desarrollo de la tarea, permite la construcción del conocimiento matemático. La implementación de las actividades de aprendizaje requiere del docente que esté atento a lo emergente, a lo espontáneo o contingente de la acción de aula (Rowland y Zazkis, 2013), rescatando las evidencias de ello a través de diversos mecanismos. Por ello, esta gestión no es ajena a los procesos de diseño y evaluación de la enseñanza. Por una parte, el diseño no solo considera la planificación o distribución temporal del contenido, sino la *anticipación didáctica*, es decir, anteponerse a las construcciones matemáticas de los estudiantes, creando secuencias de actividades matemáticamente ricas, a la par de establecer las posibles dificultades que estos tendrán y las preguntas o interacciones que se pueden formular para que esos conocimientos se consoliden de forma adecuada.

Por otra parte, la gestión también incluye la evaluación, en términos de la búsqueda de información para la toma de decisiones, es decir, considerar una evaluación para el aprendizaje, y no sólo del aprendizaje. Este aspecto es fundamental, ya que requiere y potencia una reflexión didáctica de gran riqueza, que aporta de forma importante al desarrollo profesional del profesor.

En los procesos de formación continua del profesorado, es crucial realizar un tratamiento didáctico del contenido matemático, considerando que la matemática elemental presenta una gran profundidad conceptual (Ma, 2010). Para ello es necesario abordar los obstáculos propios del aprendizaje de conceptos matemáticos clave, ahondando en cómo se aprenden dichos conceptos, y reflexionar en torno a cuáles son las principales dificultades que se presentan. A su vez, este tratamiento debería estar focalizado en el desarrollo de procesos matemáticos, tales como argumentación, resolución de problemas, modelización, entre otros, que definen las competencias a largo plazo que deseamos que nuestros estudiantes tengan al terminar su escolarización obligatoria.

Para lograr lo anterior, los procesos de enseñanza aprendizaje, ya sea con alumnos en la escuela o con profesores en formación continua, necesitan de un marco de acción. En nuestro caso, ese marco lo dieron un conjunto acotado de principios didácticos, pero suficientemente robusto como para ser abordados a través del programa de asesoría. Estos principios respondían a la lógica de la problematización del conocimiento y del "hacer matemática", en una estructura interactiva dialógica, manteniendo altas expectativas de aprendizaje. En concreto, se trabajaron como principios orientadores de la acción docente, los siguientes:

- El acceso al conocimiento matemático se realiza a través de la problematización, por lo cual es importante que las actividades que se planteen a los estudiantes sean desafiantes.
- El error contribuye al aprendizaje, pues es una fuente privilegiada para la reflexión en el aula, a la vez que es una evidencia del proceso de aprendizaje.
- Para que ocurra un aprendizaje significativo, se requiere que la comunicación sea abierta e incluyente, lo que implica generar espacios para la exploración y comunicación de ideas matemáticas.
- Que el estudiante siempre puede aprender, lo que implica mantener nuestras expectativas siempre altas sobre lo que ellos pueden hacer y lograr.

Explicitar estos principios didácticos, deseables para la acción docente en aula, en el proceso de formación continua con profesores tiene como objetivo que los docentes vivencien un modelo que les permita construir aprendizajes con sus estudiantes, ya que las situaciones de simulación de

aprendizaje escolar y resolución de problemas resulta de alto impacto para los profesores que las viven (Rojas y Deulofeu, 2013). En este sentido, las prácticas instruccionales de los formadores realizadas en este estudio están basadas en el modelamiento de los enfoques didáctico-matemáticos que el programa de formación aplicado espera que los profesores utilicen en el aula (Chapman, 2009; Deulofeu, Márquez y Santmartí, 2010). Al mismo tiempo, dicha práctica modelaba las actitudes profesionales (Zaslavsky, 2007) y los principios didácticos de los que se espera que los profesores se apropien.

Considerando lo anterior, este trabajo busca mostrar parte del proceso observado en los docentes que han formado parte de este programa, y en particular, en esta fase de la investigación nos centramos, en responder qué elementos de la *racionalidad formativa* de la formadora impactan en el cambio de las prácticas docentes de los participantes.

Contexto de Formación: Programa de Asesoría

La apertura de espacios de reflexión de la práctica en los establecimientos educacionales chilenos, con tal de instalar y desarrollar principios didácticos que apunten al desarrollo de habilidades y competencias matemáticas en los estudiantes, no es una acción frecuente. Por ello, grandes esfuerzos nacionales han apuntado a que diversos actores apoyen y asesoren a las escuelas para que puedan instalar estas capacidades.

En diversas investigaciones se constata que las capacitaciones impuestas por el sistema tienen bajo impacto, ya que los cambios que se realizan no son producto de la reflexión y decisiones del docente, sino de agentes externos que no conocen necesariamente la realidad del contexto escolar. Es por ello que en la asesoría que se da cuenta en este estudio, no se planteó entregar herramientas sin previo estudio conjunto de su funcionalidad, sino que desarrollarlas desde y con los docentes, de manera tal de complementar los conocimientos teóricos y prácticos en función de la mejora de la enseñanza y por ende de los aprendizajes.

Es así como una característica clave de esta asesoría, fue la *lógica bottom-up* que se siguió en su diseño y ejecución, ya que consideramos que para que un programa de formación impacte en la cultura docente, es imprescindible que se constituya desde los propios docentes que están en aula.

En este contexto, este artículo da cuenta del apoyo realizado a una escuela de la ciudad de Curicó (Chile),en el marco de su plan de mejoramiento educativo, en el cual se decidió, en conjunto con los docentes, trabajar sobre dos líneas de acción: *acompañamiento de la acción docente en aula* y *talleres de especialización didáctica.* Principalmente, los acompañamientos estaban enfocados en levantar reflexiones pedagógicas a partir del estudio de la propia práctica (Schön, 1983), y los

talleres buscaban construir conocimiento matemático específico para la enseñanza (Ball, Thames y Phelps, 2008).

Acompañamiento en Aula

El acompañamiento en aula es una acción vital para el mejoramiento de las prácticas docentes, puesto que abre la posibilidad de un espacio de reflexión pedagógica en torno a las prácticas docentes concretas que se están realizando en la escuela (Cardemil, Maureira y Zuleta, 2010). En particular, las visitas al aula en la asignatura de matemática pretendían, en primer lugar, acompañar el proceso de instalación progresiva de ciertas prácticas docentes, fundamentadas en los principios didácticos señalados. Un segundo objetivo del acompañamiento en aula, fue que la coordinadora académica y el jefe técnico del colegio desarrollasen una capacidad de retroalimentar a los y las docentes en relación con la puesta en práctica de las diversas dimensiones y de los principios didácticos que forman parte de una clase efectiva, entendida como aquella que permite que todos los y las estudiantes logren el objetivo de aprendizaje propuesto.

Con esta finalidad, en cada visita a la escuela, la formadora junto a la coordinadora académica y/o al jefe técnico, realizaban dos acompañamientos en aula con sus respectivas retroalimentaciones, en la modalidad de observadores no participantes. En un inicio se utilizó la pauta de acompañamiento al aula que tiene el colegio, para incorporar progresivamente aquellos principios didácticos que vayan siendo abordados en los talleres de formación continua.

A partir de este proceso de inclusión paulatino, se consolido la siguiente *pauta de observación descriptiva* que vincula cada momento estructural de la clase (inicio-desarrollo-cierre) con ciertos momentos matemáticos (problematización, desarrollo del problema, puesta en común, conclusión) ligados a los principios didácticos fundantes, y que permite registrar paralelamente lo que hacen docentes y estudiantes en cada uno de dichos momentos. Los siguientes son los focos de observación que contiene la pauta:

	Docente	Estudiantes
Inicio/ Problematización	• Establece nexo con la última clase y/o revisa tarea de la clase anterior. • Propone una situación de aprendizaje de matemática desafiante a los estudiantes.	• Se involucran en la situación propuesta y se ponen a trabajar. • La situación planteada constituye un desafío para ellos.

Desarrollo/Desarrollo del problema-puesta en común	• Da tiempo para que los estudiantes trabajen en resolver la situación planteada. • Monitorea y reorienta las producciones de los estudiantes. • Genera interacción pedagógica. • Acoge el diálogo y centra las intervenciones, retomando el tema central de la clase.	• Demuestran una actitud activa (trabajan, escriben, consultan, piden ayuda, etc.). • Responden a la interacción pedagógica.
Cierre/ conclusión	• En el contexto de la situación propuesta, organiza la revisión de los procedimientos utilizados.	• Participan activamente en el proceso de revisión final.

Tabla 1. Pauta de observación descriptiva.

Durante la observación de clases, se utilizaron notas de campo como medio para registrar episodios clave del desarrollo de la misma, para posteriormente completar la pauta en forma conjunta con el o la docente, estableciendo así un diálogo reflexivo que buscaba poner en tensión los principios didácticos en función de lo observado, y establecer así los acuerdos de mejora.

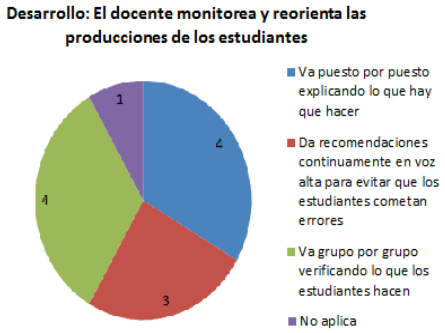
Talleres de Especialización Didáctica

Los talleres de especialización didáctica tienen el propósito de desarrollar conocimientos matemáticos y didácticos en los y las docentes. El modelo de taller contempló el desarrollo de una o varias actividades matemáticas, y la posterior reflexión en torno al diseño y la gestión de aula. La actividad matemática consistió en una problematización para comprender qué tipo de problemas resuelve ese contenido matemático (sentido), y la reflexión comprendió un análisis detallado de los aspectos que deben ser considerados antes de elaborar una clase, y el contraste entre este diseño y lo que realmente ocurrió. Dicho de otro modo, se trataba de debatir en torno a qué es lo que se espera que ocurra con una actividad para lograr un aprendizaje determinado, y cómo debe ser conducida para lograr dicho objetivo. En los talleres se realizaron reflexiones meta-didácticas sobre la gestión de aula de la formadora con la finalidad de que los profesores se hicieran parte en forma progresiva de la racionalidad del programa de formación.

Resultados

En la sistematización de los resultados, tanto de los acompañamientos a los docentes en aula con base en la revisión de las pautas de observación como de las autoevaluaciones del proceso de mejora realizadas con los y las docentes, se observó que estos lograron proponer desafíos matemáticos a sus estudiantes, dándoles tiempo para la exploración y resolución autónoma de los problemas planteados. De hecho, en la gestión de la puesta en común, los profesores lograron

incorporar el error como fuente de aprendizaje, y generar espacios para que los estudiantes expresaran sus ideas matemáticas en forma argumentada. Por otra parte, a partir de los procesos de aprendizaje experimentados en los talleres, los docentes valoraron el modelo didáctico que está a la base del programa formación, a la vez que comprendieron los obstáculos a los cuales se enfrentan los estudiantes en los procesos de construcción de conocimiento matemático. Los siguientes gráficos muestran estos hechos en función de las 12 observaciones de aula que se realizaron, uno para cada momento estructural de la clase. En ellos se rescata el indicador más relevante pada cada etapa.



Conclusiones

Al relacionar los talleres con la observación en aula, pudimos constatar que los elementos de la racionalidad formativa que más impactaron las prácticas docentes fueron los relativos a la problematización y a la generación de espacios para la exploración, construcción y comunicación de ideas matemáticas. No obstante, el desafío que resultó más complejo para los docentes fue evitar dar instrucciones acerca del procedimiento matemático a utilizar en la resolución de determinados problemas. Asimismo, pudimos constatar que el modelamiento instruccional, el cual posibilitó que los docentes en su rol de aprendices fuesen capaces de resolver los desafíos planteados, de desarrollar ideas matemáticas y reflexionar en torno a ellas, contribuyó de manera importante al cambio de las prácticas docentes.

Referencias bibliográficas

Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. C. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of teacher education, 59*(5), 389-407.

Cardemil, C., Maureira, F., y Zuleta, J. (2010). *Modalidades de acompañamiento y apoyo pedagógico al aula*. Santiago: CIDE- U.A. Hurtado.

Chapman, O. (2009). Educators reflecting on (researching) their own practice. In R. Evan y D. L. Ball (Eds.), *The professional education and development of teachers of mathematics. The 15th ICMI Study* (pp. 121-126). New York: Springer.

Deulofeu, J., Márquez, C., y Santmartí, N. (2010). Formar profesores de secundaria: la experiencia de la Universitat Autònoma de Barcelona. *Cuadernos de Pedagogía, 404*, 80-84.

Ma, L. (2010). *Conocimiento y enseñanza de las matemáticas elementales la comprensión de las matemáticas fundamentales que tienen los profesores en China y los EE.UU (Edición traducida a cargo de Patricio Felmer)*. Santiago de Chile: Academia Chilena de Ciencias.

Ponte, J. P., Quaresma, M., y Branco, N. (2012). Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 1*, 65 - 86.

Rojas, F., y Deulofeu, J. (2013). *Elementos de impacto de las prácticas instruccionales de los formadores en la formación inicial de profesores de matemáticas.* Paper presented at the XVII Simposio de la Sociedad Española de investigación en Educación Matemática, Bilbao (España).

Rowland, T., y Zazkis, R. (2013). Contingency in mathematics classroom: opportunities taken and opportunities missed. *Canadian Journal of Science, Matehmatics and Technology Education, 13*(2), 137-153.

Schön, D. A. (1983). *The Reflective practitioner*: how professionals think in action. Londres: Temple Smith.

Zaslavsky, O. (2007). Mathematics-related task, teacher education, and teacher educator. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10*(4-6), 433-440.

ACCIONES DE FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS. ALGUNAS EXPERIENCIAS DE DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN

Silvia Elena Ibarra Olmos
Universidad de Sonora. México
sibarra@gauss.mat.uson.mx

Resumen. En el marco de las modificaciones curriculares que están en marcha en México en los niveles escolares básico y medio superior, se presentan una serie de acciones de formación (diplomados) dirigidas a profesores de matemáticas de una región ubicada en el noroeste del país. Dichas acciones tienen como marco contextual las reformas curriculares oficiales, pero han sido diseñadas tomando como base resultados de investigación en Matemática Educativa. Se exponen en este trabajo los criterios seguidos para su diseño, así como algunas conclusiones surgidas de su puesta en escena, a partir de las cuales se vislumbran posibles acciones de investigación.
Palabras clave: Formación continua de profesores de matemáticas.
Abstract. As part of the curricular changes that are underway in Mexico in levels basic and higher, we are presenting our experiences about the design and staging of a series of courses aimed at teachers of mathematics in a region located in the northwest of the country. The courses are based on official curricular reforms, but have been designed based on results of research in Mathematics Education. We are describing in this paper the criteria for its design as well as some conclusions from its staging and possible actions of research.
Key words: Continuous training of mathematics teachers.

Introducción

Desde hace algunos años se han puesto en marcha en la República Mexicana reformas curriculares tanto en el nivel básico (preescolar, primaria y secundaria) como en el bachillerato. La hoy llamada Reforma Integral de la Educación Básica dio inicio en 2004 con la Reforma de la Educación Preescolar, prosiguió en el año 2006 con la Reforma de la Educación Secundaria, cerrando este proceso en 2009 con la Reforma a la Educación Primaria. En el caso de la Reforma Integral de la Educación Media Superior (bachillerato), entró en vigor en agosto de 2009, es decir a inicios del ciclo escolar 2009-2010.

Todas estas reformas tienen como punto en común que están planteadas con el enfoque por competencias, aunque no se exhibe en los documentos oficiales que contienen las citadas reformas, una definición de lo que son las competencias que sea uniforme, pero sobre todo que sea comprensible a los profesores.

A pesar de la serie de cursos, diplomados y acciones de formación y actualización sobre el tema que la Secretaría de Educación Pública, responsable de la creación e impulso a las reformas, ha propuesto con la intención de clarificar al profesor los cambios en su ejercicio profesional cotidiano, están empezando a emerger en el ámbito nacional algunos indicadores de que las cosas no están marchando como se planearon.

En este contexto, desde nuestro quehacer como matemáticos educativos, desde hace algunos años nos involucramos en el diseño y ejecución de acciones de formación continua (cursos y diplomados), dirigidos a profesores de matemáticas en servicio de diferentes niveles educativos. Geográficamente nuestra zona de trabajo está ubicada en el Estado de Sonora, situado en el noroeste de la República Mexicana.

Nuestra propósito inicial consistió en asumir esos espacios de formación en espacios para la reflexión conjunta con los profesores sobre su quehacer cotidiano, qué matemática enseñan, cómo y para qué.

En este trabajo compartimos nuestras experiencias más recientes sobre el particular, las cuales surgieron como respuestas a las preguntas:

- ¿Cuáles son los elementos mínimos de planeación para el diseño curricular de este tipo de iniciativas?
- ¿Qué resultados de investigación de Matemática Educativa es posible incorporar en el diseño de cursos y diplomados de formación continua, dirigidos a profesores de matemáticas en servicio?
- ¿Cómo entran éstos en juego en la puesta en escena de dichas acciones?

Las respuestas a cada una de estas interrogantes serán desarrolladas en el siguiente apartado.

Propósitos, contenidos y medios

De entrada afirmamos que se requiere conocer las características de las instituciones y profesores a los cuales se dirigirá la acción de formación, tomar en cuenta el entorno curricular vigente y contar además con un diagnóstico de las necesidades e inquietudes de los profesores.

En este sentido nuestras propuestas siempre toman como base los planes y programas oficiales, pues éstos constituyen los marcos generales en los que los profesores deben trabajar. Éstos (planes y programas oficiales mexicanos de matemáticas) tienen como características comunes el enfoque centrado en competencias y la exigencia de que los docentes desarrollen competencias profesionales que les permitan promover en sus estudiantes el desarrollo de las competencias matemáticas.

Los tres elementos mencionados con anterioridad (características de instituciones-profesores, entorno curricular y diagnóstico de necesidades), nos llevaron a declarar como propósitos a alcanzar el que los profesores participantes:

a) Profundicen en la comprensión de los objetivos, las orientaciones didácticas y los contenidos disciplinares de la matemática del nivel educativo en el cual trabajan.

b) Desarrollen habilidades para conducir el proceso de aprendizaje de las matemáticas de sus alumnos, generando ambientes de confianza, autoestima, respeto hacia los demás y hacia el medio ambiente, disciplina, creatividad, curiosidad y gusto por el estudio de las matemáticas.

c) Desarrollen conciencia no sólo de la importancia del trabajo en equipo de sus alumnos, sino también de los profesores en su escuela y en su comunidad y asuman una actitud responsable de colaboración y cooperación con sus compañeros de trabajo.

d) Desarrollen habilidades intelectuales para la formulación, análisis y resolución de problemas en diversas situaciones en las que la matemática es útil.

e) Desarrollen competencias para emplear, consciente y convenientemente los recursos tecnológicos de la información y la comunicación en el diseño de actividades de aprendizaje de sus alumnos.

f) Desarrollen habilidades para la expresión oral y escrita.

Esto lo traducimos en la necesidad de impulsar la transformación de las prácticas de enseñanza en los salones de clases de matemáticas, con acciones basadas en los resultados de investigación que se han obtenido en ya poco más de 40 años del surgimiento de la Matemática Educativa en México.

Los resultados teóricos y prácticos que permean nuestros diseños son:

g) El papel de la resolución de problemas como fuente de construcción de la matemática.

h) La matemática como producto de un proceso de construcción social.

i) La naturaleza pragmática y contextual de los significados de los objetos matemáticos.

j) La importancia y beneficio que el uso de las diferentes representaciones de los objetos matemáticos tienen en el aprendizaje de las matemáticas.

k) El papel del uso de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación en los procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.

l) La importancia del proceso comunicativo y del trabajo colaborativo en la enseñanza y el aprendizaje en general y de las matemáticas en particular.

Las temáticas matemáticas a tratar surgen de la interacción previa con profesores, vía encuestas electrónicas, así como de artículos de investigación sobre dificultades en el manejo de diferentes

nociones matemáticas. En cuanto a los medios generalmente se plantea la elaboración de un cuadernillo de actividades, el cual contempla el uso de applets de GeoGebra, uso de Excel y calculadora.

Las actividades de aprendizaje empleadas con los profesores y su puesta en escena

El avance de Matemática Educativa ha tenido muchas consecuencias. Una, especialmente importante en nuestro trabajo, es la evolución de las concepciones sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Mucho tiempo se habló del "proceso de enseñanza-aprendizaje", entendido como un proceso causa-efecto, en el cual el estudiante aprendía (reproducía) a partir de lo que el profesor transmitía.

Actualmente se acepta la existencia de dos procesos: uno, el de aprendizaje, caracterizado como un proceso de estudio, de análisis e interpretación; otro es el proceso de enseñanza. El concebir al aprendizaje como se dijo tiene su consecuencia en lo que significa enseñar. En la enseñanza se conducen los procesos de estudio (aprendizaje) de los estudiantes, de tal manera que entonces al profesor le corresponde la responsabilidad de planear e instrumentar las acciones necesarias para que los alumnos estudien (analicen, interpreten, construyan).

Esto se logra a partir de situaciones planteadas en contextos extra o intramatemáticos seleccionados apropiadamente por los maestros y que van siendo abordados por los estudiantes bajo su conducción (la de los profesores). Son estos procesos de estudio de situaciones problema lo que dará pie al desarrollo de las habilidades y competencias establecidas en los planes y programas de estudio de matemáticas.

Con estas consideraciones es que se diseñaron las actividades que constituyen los cuadernillos de trabajo que se emplearon con los docentes.

Las formas de conducción del trabajo en el aula toman en cuenta que el desarrollo de la actividad matemática en el salón de clases se efectúa en tres momentos, cuidadosamente planeados: uno de trabajo individual, donde se dará pie a las reflexiones de la persona, otro de trabajo en equipo donde el individuo tendrá la posibilidad de exponer, contrastar, y argumentar con pares; un momento final de trabajo grupal, en el que, a partir de las vivencias grupales se institucionaliza el conocimiento matemático puesto en juego en la clase, lo cual queda a cargo del profesor.

Una consideración básica en nuestras propuestas es que es necesario que el profesor viva procesos de estudio de situaciones-problema similares a aquellas que viven sus alumnos, analice las competencias generales y disciplinares que se pueden promover en la resolución de los problemas asociados a tales situaciones, identifique las potencialidades de diversas situaciones para integrar

los conocimientos disciplinares y reflexione sobre las actividades didácticas que un profesor debe, a su vez, llevar a cabo para conducir eficiente y eficazmente los procesos de aprendizaje de sus alumnos.

Es muy importante señalar la inclusión de lo que se ha llamado *momentos de reflexión sobre la práctica*, donde la expectativa es que los profesores puedan hacer consciente las características de su propia práctica y por otra, aprovechar el conocimiento, análisis y valoración de las prácticas de otros compañeros para mejorar la propia.

Esto se promueve mediante la reflexión y discusión sobre los siguientes aspectos:

a) La relación existente entre la práctica docente de los profesores y el desarrollo de las competencias de los estudiantes.

b) La relación existente entre la práctica docente de los profesores y los significados de los objetos matemáticos que se pretende adquieran los estudiantes.

c) El uso que el profesor hace de la resolución de problemas en sus prácticas docentes.

d) El papel que el profesor asigna a las diversas representaciones de los objetos matemáticos (numérica, gráfica, analítica y verbal) en el proceso de enseñanza.

e) La manera en que el profesor usa las nuevas tecnologías de la información y la comunicación en el proceso de enseñanza y el uso que promueve hagan sus alumnos de dichas tecnologías y, en ambos casos, el propósito o los propósitos con que lo hace.

f) La formas en que se desarrolla el proceso comunicativo en el aula, tanto entre los alumnos como entre ellos y el profesor.

g) La forma en que el profesor promueve el trabajo colaborativo en el aula y el propósito con que lo hace.

A través de interrogantes como:

¿Cómo están estructuradas las actividades?

¿Qué momentos se pueden identificar en ellas?

¿Cuál es el papel que juegan las preguntas?

¿Qué hace el conductor?

¿Qué hace el resto de los participantes?

¿Cómo se están usando los recursos tecnológicos de apoyo?

¿Qué relación se puede establecer entre todo lo anterior y las competencias profesionales de un profesor de matemáticas?

Algunas Experiencias

Bajo estas consideraciones, hemos diseñado y puesto en escena los siguientes diplomados durante 2011 y 2012:

a) Diplomado *Prácticas docentes en las matemáticas de secundaria*, dirigido a profesores de matemáticas de secundaria en servicio. (Ibarra, Villalba, Armenta, Del Castillo, Grijalva, Soto, Urrea, Ávila, 2011).

b) Diplomado *Prácticas docentes en las matemáticas de telesecundaria*, dirigido a profesores de matemáticas de telesecundaria en servicio. (Rodríguez, Armenta, Jiménez, Urrea, Soto, 2011).

c) Diplomado *Enseñanza de las matemáticas*, dirigido a profesores de matemáticas de bachillerato en servicio. (Grijalva, Soto, Bravo, Urrea, Rodríguez, Ávila, Ibarra, 2012).

Las versiones electrónicas de los materiales con los que trabajaron los profesores durante el desarrollo de cada uno de los diplomados mencionados pueden consultarse en la siguiente dirección electrónica: http://pmme.mat.uson.mx/baem1.html.

A manera de ilustración

A continuación reproducimos dos actividades tomadas del Módulo 2 del Diplomado "Enseñanza de las matemáticas", el cual estuvo dirigido a profesores de matemáticas de bachillerato. Se anexa con la intención de ilustrar cómo es que se da concreción a algunas de las consideraciones teóricas y de planeación expuestas con anterioridad.

Actividad 3. La Sana Alimentación

Tal y como hemos visto en las secciones anteriores, los resultados de ENSANUT 2012, apuntan a que la población mexicana enfrenta grandes riesgos derivados de los altos índices de obesidad.

Las acciones que el sector salud ha realizado para enfrentar estas situaciones son muchas y las encontramos publicitadas en los medios de comunicación. Una de las creaciones de la Secretaría de Salubridad y Asistencia es el llamado Plato del Buen Comer. Diseñado por nutriólogos mexicanos, el Plato del Buen Comer es lo que podríamos llamar la versión nacional de la Pirámide Alimentaria:

Figura 1. La Pirámide alimentaria. Tomada de http://homoludens.us/ejercicio-fisico-y-salud/nutricion-y-ejercicio/la-piramide-de-los-alimentos/.

O la versión mexicana de la Rueda Española de la Alimentación, que fue diseñada en los años setenta:

Figura 2. La Rueda Española de la alimentación. Tomado de http://homoludens.us/ejercicio-fisico-y-salud/nutricion-y-ejercicio/la-piramide-de-los-alimentos/.

El Plato del Buen Comer tiene como intención presentar de una manera accesible y atractiva una propuesta de alimentación balanceada para la población mexicana. Por lo tanto, debe incluir los tres tipos básicos de alimentos. A continuación mostramos una gráfica ilustrativa:

Figura 3. El Plato del Buen Comer. Tomado de http://www.profeco.gob.mx/encuesta/brujula/bruj_2012/bol232_pdcomer.asp.

Se espera pues, que contando con esta información, en los hogares mexicanos pueda establecerse una manera sencilla de cómo planear la compra y consumo de los alimentos necesarios para tener una alimentación sana y balanceada. La recomendación general es comer mucho del grupo correspondiente a Verduras y Frutas, suficientes elementos del grupo Cereales, y poco del grupo Leguminosas y Alimentos de Origen Animal.

a) En este contexto, consideremos el caso de una familia de la clase media, que dedica $900 pesos semanales a la compra de alimentos. ¿Qué cantidad de dinero puede dedicar a la compra de alimentos de cada uno de los grupos contenidos en el Plato del Buen Comer? ¿Cuántas opciones posibles tiene esta familia? ¿Cómo podemos representar matemáticamente esta relación?

b) Si la familia intentara seguir la recomendación general sobre las cantidades de ingesta de los tres grupos de alimentos, y decidiera que la cantidad de dinero dedicada a comprar verduras y frutas será el doble de la que dedicará a comprar cereales, ¿qué opciones tendría ahora, suponiendo que sigue en su intención de adquirir alimentos de los tres grupos?

c) Si se cambian las condiciones propuestas en los incisos anteriores, de tal forma que ahora la cantidad destinada por la familia a adquirir alimentos de origen animal y leguminosas será el doble de la cantidad con la que se comprarán cereales y verduras y frutas; que además la cantidad destinada a adquirir cereales será una tercera parte de la dedicada a comprar frutas y verduras. ¿Cuánto se dedica a la compra de alimentos de cada uno de los grupos?

Actividad 4. Tercera Institucionalización Local

Al igual que lo hicimos apartados previos, nos dedicaremos a analizar los objetos matemáticos que se fueron poniendo en juego a lo largo de las actividades de esta sección. Los momentos de trabajo propuestos son individuales, por equipos y grupal.

Individualmente

Escriba la relación de los objetos matemáticos que desde su punto de vista surgieron al desarrollar las actividades de esta sección. Agrúpelos dependiendo de cuáles fueron utilizados como herramientas y cuáles emergieron a partir del trabajo realizado. ¿Cuáles de ellos son novedosos para usted? ¿En qué sentido son novedosos?

En equipo

Compare y discuta con los integrantes de su equipo las respuestas que proporcionó a los incisos anteriores. Anote en el espacio siguiente aquellos elementos que no había considerado en sus respuestas individuales.

Grupalmente

El conductor del grupo dirigirá una discusión grupal en la que se pondrán en juego los elementos vertidos en los anteriores y tendrá a su cargo el proceso de síntesis. Anote a continuación aquellos aspectos que aparecen en la síntesis grupal y que no hayan sido considerados en las reflexiones individuales y por equipo.

Comentarios Finales

Es indudable que el trabajo con profesores es muy rico en experiencias, pues emergen de manera natural las concepciones que ellos tienen sobre lo que es la matemática, su enseñanza y su aprendizaje.

Llama la atención que uno de los aspectos que más han valorado, es la posibilidad de contar con un espacio que de alguna manera pretende reproducir el aula donde ellos trabajan, y en el cual tienen la oportunidad de discutir, argumentar y reflexionar de manera colegiada sobre sus propias prácticas.

Como valor agregado, mencionaremos que estos proyectos se constituyen en escenarios naturales para la investigación en la línea *Formación de profesores,* en los cuales ya hemos empezado a trabajar.

Referencias bibliográficas

Ibarra, S., Villalba, M., Armenta, M., Del Castillo, A., Grijalva, A., Soto, J., Urrea, M., Ávila, y R. (2011). *Material del participante del diplomado prácticas docentes en las matemáticas de secundaria.* Hermosillo, Sonora, México: Universidad de Sonora y Secretaría de Educación y Cultura.

Rodríguez, M., Armenta, M., Jiménez, J., Urrea, M., y Soto, J. (2011). *Material del participante del diplomado prácticas docentes en las matemáticas de telesecundaria*. Hermosillo, Sonora, México: Universidad de Sonora y Secretaría de Educación y Cultura.

Grijalva, A., Soto, J., Bravo, J., Urrea, M., Rodríguez, M., Ávila, R., y Ibarra, S. (2012). *Reflexiones sobre la práctica docente, diseño y desarrollo de la actividad docente parte I y parte II*. Hermosillo, Sonora, México: Universidad de Sonora, Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora y Colegio de Educación Profesional Técnica del Estado de Sonora.

LA FORMACIÓN DOCENTE Y SU CONCRECIÓN EN EL DISEÑO DE ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS Y MATERIALES CURRICULARES

María Isabel Segura Gortáres, María Eugenia Ramírez Solís y Liliana Suárez Téllez
Instituto Politécnico Nacional. México
msegura@ipn.mx, meramire@ipn.mx, lsuarez@ipn.mx

Resumen. Después de implementar por generaciones un programa de formación docente a nivel nacional con el propósito de mejorar la calidad de la educación en el bachillerato mexicano, se explora el impacto de esta formación en las propuestas de estrategias y materiales didácticos diseñados por los profesores y empleados para la certificación docente en competencias para la educación media superior, en los campos disciplinares de ciencias de la salud, matemáticas, analizando cómo incorporan los aportes teóricos y de investigación utilizados en su formación y la puesta en marcha con los estudiantes dentro del aula.
Palabras clave: estrategias didácticas, materiales educativos, bachillerato, certificación docente
Abstract. After implementing a program for generations of teacher education at the national level with the aim of improving the quality of school education in Mexico, the impact of this proposed training strategies and materials designed by faculty and staff to explore teacher certification competitions for high school education in the disciplinary fields of health sciences, math, analyzing how they incorporate the theoretical research and inputs used in its formation and implementation with students in the classroom.
Key words: Teaching strategies, educational materials, school, teacher certification

Introducción

Por muchos años la Educación Media Superior (EMS) fue considerada como un nivel de paso desprovisto de objetivos claros y sustanciosos que le dieran un claro valor, aunado a esto, la difícil población que atiende debido a la edad de los jóvenes alumnos.

Así mismo, es necesario considerar las diversas modalidades de la EMS que México ofrece a nivel nacional, en nuestro caso el Instituto Politécnico Nacional (IPN) orienta sus esfuerzos en un bachillerato bivalente: propedéutico y terminal, es decir, dota a sus egresados de diversas competencias que le permitirán continuar con sus estudios en el nivel superior o bien incorporarse al sector productivo, en ambos casos la EMS no garantiza un empleo seguro ya que esto depende de múltiples factores.

De esta manera, en los últimos años el Nivel Medio Superior ha experimentado un crecimiento acelerado, una serie de reformas, gran diversificación y especialización en los procesos de formación docente.

La educación técnica lleva en nuestro país el estigma de ser de segunda clase y estar destinado a clases menos favorecida (Observatorio Ciudadano de la Educación, octubre 23 de 1999), con una baja eficiencia terminal y alto índice de deserción estudiantil, en donde, sin duda alguna uno de los factores que influyen en esto es el hecho de que los planes y programas de estudio se determinan centralmente y no considera la necesidad laboral del entorno.

A partir de estas variables el gran reto educativo consistió en el replanteamiento de la EMS que dé satisfacción a las exigencias tanto del sector productivo como a las demandas de la educación superior, sin dejar de lado las aspiraciones propias de los jóvenes ante las múltiples exigencias de un mundo globalizado.

Indudablemente los esfuerzos que se han realizado en la Educación Media Superior han sido rebasados por varios factores como las transformaciones demográficas, sociales y culturales y la evolución vertiginosa del conocimiento (Observatorio Ciudadano de la Educación, octubre 23 de 1999), ante esta serie de fenómenos la deficiencia principal recae en la falta de una propuesta adecuada de formación docente.

Esta problemática ha permanecido por décadas pues a pesar de la existencia y exigencia de requisitos académicos para la contratación, promoción y permanencia de los docentes, no responde en muchas de las veces a los perfiles que las unidades de aprendizaje requieren.

De esta forma es posible encontrar una serie de cursos un tanto desarticulados que si bien proveen al docente de herramientas y/o no dan respuesta a las exigencias que surgen de las transformaciones sociales, aunado a la resistencia al cambio presentado en los docentes.

Fundamentación

Una de las estrategias implementadas como respuesta a la problemática anterior es la RIEMS (2008) quien plantea la profesionalización y actualización de los docentes, dotando a éstos de un conjunto de saberes teóricos metodológicos que les permitan consolidar sus competencias docentes a fin de diseñar y llevar a la práctica procesos de enseñanza y de aprendizaje que permitan a la vez desarrollar competencias en los estudiantes.

Esta reforma está orientada por un lado, a la creación de un Sistema Nacional de Bachillerato (SNB) en un marco de diversidad a nivel nacional y a la construcción de un Marco Curricular Común (MCC) considerando competencias genéricas y disciplinares básicas, orientado a dotar a la Educación Media Superior (EMS) de una identidad clara y que responda a las necesidades presentes y futuras.

La estructura que se propone tiene como finalidad reordenar y enriquecer los planes y programas de estudio existentes y se adapta a sus objetivos, no busca reemplazarlos, sino complementarlos y especificarlos (Secretaría de Educación Pública, Acuerdo 442). Sin embargo no es tarea sencilla desligar las competencias que se requiere del docente y de los propios estudiantes, esto ha representado un trabajo continuo y arduo de ambos

La reforma integral del bachillerato mexicano (2008) se plantea como una estrategia fundamental, la profesionalización y actualización de los docentes, dotando a éstos de un conjunto de saberes teóricos metodológicos que les permita consolidar sus competencias docentes a fin de diseñar y llevar a la práctica procesos de enseñanza y de aprendizaje que accedan a la vez el desarrollo de competencias en los estudiantes.

Una vez concluido el programa de formación los directivos y profesores que lo acreditaron podrán optar entre cinco opciones para el proceso de certificación que convalide el desarrollo de las competencias docentes.

En una docencia profesional, de acuerdo a Romberg (1998) los profesionales usan los conocimientos (sobre su disciplina y sobre la pedagogía) para tomar decisiones y para observar cómo los docentes usan los marcos de referencia proporcionados en los programas de formación, para diseñar situaciones que permitan innovar su práctica docente, se ha retomado de manera particular dos de las opciones para la certificación docente, la primera *Diseño de una Estrategia Didáctica* y la segunda *Desarrollo de un Material Educativo* para observar cómo incorporan los aportes teóricos y de investigación utilizados en su formación.

Método

Las estrategias didácticas y los materiales educativos son ámbitos donde se refleja, con cierto nivel de concreción, los aportes de una formación docente sólida. En esta investigación se utiliza el marco del alineamiento constructivo (Biggs 2005) que propone, favorecer la comprensión profunda en los estudiantes a partir de hacer congruente los propósitos, los productos de evaluación y las estrategias, considerando un nivel taxonómico relacional y abstracto amplio. Se consideran también las metodologías activas, tales como desarrollo de proyectos, análisis de casos, aprendizaje basado en problemas (De Miguel 2005) entre otros, como aspectos fundamentales en las estrategias didácticas.

En este sentido, dado que las propuestas docentes son diversas y aunque se establecieron elementos observables en la caracterización, se analizaron por casos, pues hacen referencia a situaciones reales, dentro de las cuales se tomaban decisiones, emitían juicios fundamentados y valoraban situaciones.

Por otro lado, en la propuesta de Parcerisa (2007) se considera que los materiales didácticos deben reunir características de: flexibilidad del currículum, logro de aprendizajes significativos y contextualizados, atención a necesidades y diferencias en el aprendizaje, promoción del desarrollo de habilidades genéricas, así como nuevos campos de conocimiento y práctica.

Tanto las estrategias didácticas como los materiales educativos contribuyen a la concepción del currículum potencialmente aplicado, el cual (Suárez, Torres, y Ortega, 2012) acorta la distancia que existe entre el currículum planeado considerando aquí lo establecido en la Reforma Integral de Educación Media Superior (RIEMS), formar a los docentes de los planteles de Educación Media Superior para contribuir al alcance del perfil docente, los objetivos del Programa de formación de educación media superior (Profordems) establecidos en las competencias del docente y los marcos revisados (Biggs, 2005), Marzano (2004).

Considerando el currículo aplicado donde intervienen una serie de aspectos relacionados con la definición curricular de los profesores como la formación personal en EMS, manejo de TIC, incorporación del uso de paquetes didácticos en su práctica cotidiana y el currículo logrado visto como el resultado de incorporar lo anteriormente descrito que permita observar el impacto de éstos en los alumnos, reflexionando sobre las características propias de los estudiantes y los resultados de las pruebas internas y externas como ENLACE (Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares) y PISA (Program for International Student Assessment), permitiendo así concretar la reforma integral.

El método utilizado en la investigación es cualitativo, enfocado al estudio de casos (Suárez, L. Torres y Ortega 2012) el cual nos permite representar la realidad para analizar los aportes que en el IPN se vienen trabajando a partir del marco de la reforma integral, con la posibilidad de representar la realidad para analizarla con la posibilidad de construir un conocimiento contextualizado y significativo valorando sus resultados.

La muestra con la que se trabaja considera del 28% de docentes del bachillerato del IPN que han concluido un programa de formación de los cuales se pretende documentare interpretar los cambios en la docencia de los profesores de las diferentes áreas del conocimiento. En cada trabajo se aplican un conjunto de categorías derivadas de los marcos señalados para reconocer cómo son aplicados en las estrategias y materiales propuestos como evidencia del programa de formación para considerarlos en el currículum potencialmente aplicado.

Es importante mencionar que para la obtención de la información se basó primordialmente en las propuestas de los docentes utilizadas para su certificación, adicionalmente a esto se aplicó una encuesta a los docentes certificados sobre la conformación de sus propuestas a los alumnos sobre cómo vivieron la estrategia aplicada y una encuesta a los docentes evaluadores sobre las estrategias que implementaron durante la evaluación de los docentes.

Por otro lado, es significativo poner en claro que dé inicio en el planteamiento del proyecto de investigación, se seleccionaron dos de las cinco opciones que el proceso CERTIDEMS

(Certificación de Docentes de Educación Media Superior) contempla: opción 1: Estrategia didáctica, opción 2: Desarrollo de materiales educativos, opción 3: Proyecto de mejora educativa, opción 4: Proyecto de gestión educativa y opción 5: Diseño o rediseño de un curso, así las acciones del proyecto se han dirigido a las dos primeras, de esta manera, en la recolección de las propuestas docentes, se encontraron trabajos de Algebra (2), Geometría Analítica (2), Biología (1), Resolución de problemas (1), Ciencias Sociales (1) y Cálculo Integral (1) en los cuales se desarrollaron estrategias didácticas y fueron revisados y Geometría y Trigonometría (3), en el cual se desarrollaron materiales educativos, que de igual manera fueron revisados como parte de las acciones de investigación.

De igual manera, cabe considerar que las unidades de aprendizaje anteriormente mencionadas se encuentran dentro de los planes de estudio dentro del bachillerato mexicano.

Este la investigación se describe en general el impacto de los resultados de las investigaciones y los marcos de referencia analizados en el "Diplomado Competencias Docentes en el Nivel Medio Superior", que a través de la construcción de propuestas como: estrategias didácticas y materiales educativos constituyen dos de las opciones que permiten la certificación docente.

Resultados

Hasta el momento se tiene un avance sobre los resultados de la experiencia dado que éste no ha concluido aún, dentro de los cuales se ha podido observar:

1. Existen diferencias en la interpretación del significado de la palabra estrategia.
2. No hay claridad en la exposición y descripción de su estrategia.
3. En lo que respecta al cómo incorporan los aportes teóricos y la investigación utilizados en su formación, se encuentra que éstos son mencionados en la totalidad de los trabajos sin embargo, no todos se reflejan en la estrategia diseñada.
4. En la parte que se refiere a la forma en cómo evalúan el desempeño de los estudiantes no se ve de manera clara el alineamiento establecido en los marcos.

Conclusiones

A partir del análisis de la información vertida por los profesores en los trabajos utilizados para su certificación se observa la presencia de mediación didáctica en el desarrollo de las estrategias y materiales educativos, por otro lado, el docente tiene la capacidad de establecer de manera clara las condiciones en que se llevará a cabo la estrategia didáctica que de alguna forma permitirá al estudiantes fortalecer y/o desarrollar competencias.

Es necesario que el docente trabaje más a fondo las estrategias de evaluación de tal manera que reflejen lo que se pretende medir. Así mismo, la importancia del alineamiento constructivo revisado en el diplomado requiere ser considerado en la planeación de las estrategias didácticas implementadas por los docentes. Por otro lado, las actividades que realizan los docentes antes y durante de la implementación de las estrategias didácticas son variadas y coadyuvan a que éstas cumplan con el objetivo planeado.

Finalmente, hay cambios en el desarrollo de la actividad de los docentes como lo es el diseñar las actividades alrededor de los estudiantes, propiciando con esto la participación activa de los estudiantes; se ha incrementado el trabajo bajo contextos cercanos al docente, más vivenciales. Los recursos tecnológicos han pasado a ser una herramienta que el docente ha incorporado en su tarea cotidiana, sin embargo, aún se encuentran en un proceso adaptación, sin duda es necesario seguir capacitándose en éste ámbito.

En conclusión, en el espacio dedicado a la evaluación, el docente sigue aplicando pruebas escritas en diferentes momentos, parciales o finales, ha incorporado el trabajo por proyectos, exposiciones, etc. De igual manera, considera ejercicios de autoevaluación, coevaluación y heteroevaluación, elementos que le permitirán tomar un juicio de valor que represente lo que el estudiante ha aprendido.

Agradecimientos

Este trabajo fue realizado gracias al apoyo recibido mediante el proyecto: Uso de los resultados de la investigación en la docencia. Un análisis a partir de la Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS). Registro No. 20100075 de la Secretaría de Investigación y Posgrado del Instituto Politécnico Nacional; así mismo agradecemos a CERTIDEMS (Certificación de Docentes de Educación Media Superior) por su colaboración y apoyo.

Referencias bibliográficas

Biggs, J. (2005) *Calidad del aprendizaje universitario*. Madrid: Narcea.

De Miguel, M. (2006). *Modalidades de enseñanza centradas en el desarrollo de competencias*. Ediciones Universidad de Oviedo.

López, J., Sánchez, M. y Nicastro S. (2002). *Análisis de organizaciones educativas a través de casos.* Madrid: Síntesis Educación.

Observatorio Ciudadano de la Educación (1999). Nivel medio superior ¿eslabón perdido de la educación?

Parcerisa, A. (2007). *Materiales curriculares. Cómo elaborarlos, seleccionarlos y usarlos*. Barcelona: Grao.

Romberg, T. (1998). *Can teachers be professionals?* In D.A. Grouws y T.J. Cooney (Eds.) Effective mathematics teaching (pp. 224–244).EEUU: LEA y NCTM.

Suárez, L. y Ramírez, M. E. (2011). *Estrategias de enseñanza propuestas por docentes de bachillerato para el desarrollo de competencias* (pp. 739-745). XII Coloquio Nacional de Formación Docente.

Suárez, L. Torres, J. L. y Ortega, P. (2012). *Las matemáticas del bachillerato del Instituto Politécnico Nacional.* En C. Dolores (Ed.) ¿Hacia dónde reorientar el currículum de matemáticas del Bachillerato? (pp. 33-35). Plaza y Valdés Editores: México.

A FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA, NO BRASIL, NA PERSPECTIVA DO PROGRAMA DE CONSOLIDAÇÃO DAS LICENCIATURAS

José Fernandes da Silva y Ruy Pieropaolo
Instituto Federal de Minas Gerais - Campus São João Evangelista. Universidade Bandeirante de São Paulo Brasil
jose.fernandes@ifmg.edu.br

Resumen. Este artigo se constitui num relato de experiência sobre a formação inicial de professores de Matemática, no Brasil, no contexto do Programa de Consolidação das Licenciaturas (PRODOCENCIA). Trata-se de uma investigação qualitativa com levantamento documental. Tal programa busca apoiar ações e metas que fomentem inovações didáticas e pedagógicas no campo da formação de professores em diferentes áreas do conhecimento. A formação de professores, em especial, na Matemática, tem se constituído um desafio para a sociedade atual, pois é exigido que os professores atendam positivamente as demandas da sociedade. Ações como o PRODOCENCIA, podem contribuir eficazmente com a qualidade dos cursos de formação inicial de professores em Matemática, pois o observado nesta investigação foi o desenvolvimento de atividades que valorizam o lúdico, a iniciação à pesquisa, a construção de materiais didáticos e estabelecimento de vínculo entre formação inicial e educação básica.

Palabras clave: prodocência, formação inicial, prática pedagógica

Abstract. Current research is an experience report on the initial of Mathematics teachers training, in Brazil, in the context of the Program Degree Consolidation (PRODOCENCIA). This is a qualitative research with documentary survey. This program seeks to support actions and goals that promote educational and pedagogical innovations in the field of teacher training in different areas of knowledge. The training of teachers, especially in mathematics, has been a challenge for today's society, it is required that teachers positively meet the demands of society. Actions such as PRODOCENCIA, can effectively contribute to the quality of the courses of initial teacher training in mathematics, as observed in this investigation was the development of activities that value the playful, initiating research, the construction of teaching materials and establishing a relationship between initial and basic education

Key words: pro-teaching, initial training, pedagogical practice

Introducción

O presente artigo se traduz num relato de experiência sobre a formação inicial de professores de Matemática, no Brasil, sendo o Instituto Federal de Minas Gerais – Campus São João Evangelista, a instituição promotora. Tais experiências emergiram por meio de um programa do Ministério da Educação do Brasil, denominado Programa de Consolidação das Licenciaturas (PRODOCENCIA). Tal programa foi concebido e é administrado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). O PRODOCENCIA, segundo dados da CAPES, tem se constituído num programa que busca maior integração nos cursos de Licenciatura em Matemática, como: inserção de novos conteúdos e inovações no ensino por meio do desenvolvimento de projetos, sobretudo nos estágios supervisionados e práticas pedagógicas; formação dos licenciandos com maior articulação entre teoria e prática estabelecendo uma aliança com a educação básica por meio de articulação com as redes municipais e estaduais de ensino; produção de materiais didáticos e adoção da pesquisa como princípio formativo.

O PRODOCENCIA teve início no ano de 2007 e passou a ser uma das principais políticas da CAPES para a formação inicial de professores para a Educação Básica. O desenvolvimento das ações deste projeto é organizado por um coordenador institucional e outro adjunto. O coordenador institucional coordena o projeto na dimensão e no contexto da instituição buscando articular e gerencias as ações, bem como atender a CAPES com informações pertinentes ao desenvolvimento do projeto. Em contrapartida, o coordenador adjunto atua como um auxiliar do coordenador institucional, apoiando e colaborando com a realização das ações através da administração dos recursos financeiros.

O PRODOCENCIA e outras políticas voltadas para a Educação Básica se encontram sobre a responsabilidade da CAPES desde a criação da Lei nº 11502, de 11 de junho de 2007, que reestruturou a organização desta agência, pois até então, esta atuava fomentando a qualidade dos cursos de pós-graduação. A legislação estabeleceu que as políticas do Ministério da Educação fossem subsidiadas pela CAPES, tanto no contexto da formação inicial, quanto na formação continuada de profissionais do magistério da Educação Básica.

As políticas para a formação inicial de professores e em especial professores de Matemática se constituem em elementos importantes para a contemporaneidade, pois as instituições formadoras necessitam ser num espaço ideal para experiências positivas que busquem aliar teoria e prática, pois a formação docente é, acima de tudo, social e política.

É sabido pela comunidade acadêmica que a contemporaneidade exige um novo processo de formação de professores. As demandas da sociedade pedem atuais e futuros docentes com capacidades de romper com os ideais da reprodução e da repetição. Vive-se o momento de resolver problemas e intervir positivamente nos contextos políticos, sociais e culturais. A Matemática escolar tem uma dívida com a sociedade, pois uma parte do conteúdo abordado nas escolas tem contribuído para o fracasso de nossas crianças e nossos jovens, ao passo que, primordialmente, sua função seria subsidiar a formação de pessoas críticas e capazes de matematizar seu cotidiano.

Propostas de reelaboração e legislações surgiram e ainda surgem objetivando romper com um modelo de licenciatura centrada na dicotomia entre teoria e prática. Neste contexto ainda pode-se citar a dualidade entre conhecimento matemático e conhecimento didático pedagógico.

Os jovens professores sentem-se assustados com o local de trabalho, pois na sua formação inicial faltaram experiências significativas de investigação e discussão sobre como enfrentar positivamente as demandas da educação básica.

Existe uma dificuldade por parte das instituições formadoras em romper com o modelo tradicional de formação de professores. A legislação e os "sistemas educacionais" não priorizam o espaço da universidade como espaço para aprendizagens e experiências significativas sobre a docência. As experiências na vida universitária são colocadas em segundo plano, pois segundo Larrosa (2002) o excesso de informações, o excesso de opiniões, a falta de tempo e o excesso de trabalho limitam a articulação da teoria com a prática. Isso tem acontecido na formação inicial de professores, onde existe uma preocupação com os conteúdos e com os procedimentos burocráticos.

Neste sentido, Gonzalez (2010), afirma que os programas de formação inicial tem priorizado a formação linear em Matemática, considerando-a como algo neutro do contexto cultural. Ainda consideram o professor como transmissor de conteúdos e o aluno como sujeito passivo no processo. Colaborando com estas ideias, Freitas (2007), relata que toda a América Latina vem sofrendo há muito tempo com a má qualidade da formação de seus professores ficando a educação pública comprometida pelos baixos índices de investimentos nas condições de trabalho docente.

As propostas de mudanças no contexto da condição docente não foram bem sucedidas, pois segundo Rodriguez (2008), estas ideias foram implementadas sem levar em consideração os protagonistas do processo, no caso, os próprios professores. Ainda, de acordo com Rodriguez (2008), os países do cone sul sofrem de problemas comuns no que tangem à formação inicial de professores. Entre eles pode-se citar a falta de estudos sobre a formação de professores, desarticulação entre formação inicial e continuada, falta de um eixo articulador entre os centros formadores, políticas insuficientes para apoio à formação docente e grande diversidade de enfoques e propostas pedagógicas.

Uma das vertentes discutidas nas possibilidades de formação inicial de professores é relação entre teoria e prática. Muitos pesquisadores reconhecem que formar professores é um desafio e aliar os conhecimentos obtidos às demandas da escola atual é um entrave a ser superado. Nesta perspectiva as palavras de Libâneo e Pimenta (1999) reforçam que:

> As investigações recentes sobre formação de professores apontam como questão essencial o fato de que os professores desempenham uma atividade teórico-prática. É difícil pensar na possibilidade de educar fora de uma situação concreta e de uma realidade definida. A profissão de professor precisa combinar sistematicamente elementos teóricos com situações práticas reais (p. 267).

Sabe-se que o campo da docência é dinâmico e o contexto do trabalho se traduz no ato político que é ensinar e aprender. Para Tardif (2002) o saber do professor está diretamente ligado à sua identidade, à sua relação com os alunos e com todos os atores da escola.

Muitas discussões têm surgido na atualidade reportando ao tema formação de professores, mas existe uma distância muito grande entre as publicações e a efetivação destas ideias na prática cotidiana dos futuros professores. Assim, Fiorentini (2008) relata que:

> O que percebemos nos processos de formação de professores, é continuidade de uma prática predominantemente retrógrada e centrada no modelo de racionalidade técnica que cinde teoria e prática. A verdade é que ainda sabemos muito pouco sobre como transformar o discurso em práticas efetivas, ou melhor, como produzir discursos autênticos, e sem ambiguidade semântica, a partir de investigações e de experiências concretas que contemplem as novas concepções do professor como profissional autônomo e investigador de sua própria prática (p. 9).

Pelo citado, a aproximação entre o processo de formação do professor à prática é fundamental quando a Matemática escolar é considerada como uma construção histórica.

A discussão em torno da formação inicial de Matemática pode ser considerada recente, pois até meados dos anos 60 pouco se pesquisava em formação de professores. De acordo com Ferreira (2003), todos os países careciam de estudos relacionados à docência, pois o foco das pesquisas era testar quantitativamente métodos específicos. Ainda, segundo Ferreira (2003), em meados dos anos 80 iniciam-se estudos e pesquisas que tentam romper com o modelo de estudos experimentais modeladores.

A Educação Matemática no Brasil germina nos anos 80 com o surgimento de algumas comunidades preocupadas com a matemática instalada no país. Os esforços para a implementação da Educação Matemática se concretizam com a criação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática no ano de 1988. Na década de 90 os trabalhos de Fiorentini (1994) discutem e revelam o panorama sobre a formação de professores de Matemática. As pesquisas de Fiorentini (1996) mapearam a Educação Matemática no Brasil através de investigações em programas de formação de professores.

Diante de diferentes propostas de reformas, via poder público, e diante de diferentes estudos que apontam a necessidade de repensar a formação inicial de professores, é fundamental analisar o contexto em que os professores de Matemática estão sendo formados.

Investigar o contexto do Brasil em relação à formação de professores para Educação Básica torna-se muito importante se levamos em consideração alguns dados do censo da Educação Básica. Dados revelados pelo censo escolar (MEC), em 2011, indicam que temos 2.039.261 professores que atuam em todos os níveis da Educação Básica do Brasil e neste ano foram formados apenas 238107 novos docentes, destes apenas 11331 novos mestres para a docência em Matemática. Neste contexto, temos ainda um universo de 50 milhões de alunos, sendo 26 milhões no Ensino Fundamental e Médio que possuem entre 11 a 17 anos.

Neste sentido, ao investigar o Programa de Consolidação das Licenciaturas (PRODOCENCIA) do Instituto Federal de Minas Gerais – Campus São João Evangelista, objetivou-se explicitar experiências e práticas pedagógicas voltadas para a formação inicial. Esta instituição participa do programa citado com um projeto intitulado "Consolidação das Licenciaturas em Física e Matemática do Instituto Federal de Minas Gerais – Campi Ouro Preto e São João Evangelista". Neste projeto são explicitadas ações afirmativas para promoção das licenciaturas, e no caso da Matemática, objetivam fomentar aliança entre teoria, prática e pesquisa na formação inicial. Destaca-se, neste projeto, a necessidade de romper com a baixa procura pelos cursos de licenciatura, com a pouca articulação com a Educação Básica, com o distanciamento entre os conteúdos valorizados e o contexto social, com a deficiente estrutura física e com o modelo tradicional de formação docente.

As atividades enumeradas no projeto foram desenvolvidas nos anos de 2011 e 2012 e se encerraram em março de 2013. Trata-se de propostas financiadas pelo governo federal referente à aquisição de materiais permanentes (televisões, computadores e acessórios, material bibliográfico, projetores, filmadoras e câmeras fotográficas) e materiais de custeio (canetas, lápis, papéis, tintas e outros). As ações para a formação de professores de Matemática foram, em 2011, especificamente para fortalecimento da estrutura didático pedagógica do curso, uma vez que este foi inaugurado no ano de 2010. Com tais recursos financeiros a instituição pode promover, em 2011, um seminário a nível regional, fomentando estudos e pesquisas em Educação Matemática. Na época da realização deste seminário foi criado um grupo de pesquisa com objetivos de alavancar estudos em Educação Matemática.

A criação de um laboratório de ensino aprendizagem de Educação Matemática possibilitou a aliança entre teoria e prática, pois neste ambiente são realizadas aulas de construção de material didático, monitorias e cursos de capacitação para alunos e docentes da comunidade que circunda a instituição. Sua estrutura física é dotada de acervo bibliográfico, jogos, brinquedos, instrumentos pedagógicos (régua, esquadro, transferidor e outros), computadores, impressoras e televisão.

Figura 1. Oficinas realizadas no espaço do Laboratóriode Ensino e Aprendizagem de Matemática.

Outro ponto forte do projeto foi o financiamento integral de participações de professores e alunos em congressos nacionais e internacionais. Esta ação possibilitou que diferentes pesquisas e trabalhos fossem compartilhados com a comunidade acadêmica. Ao todo foram 15 trabalhos publicados em anais de eventos nacionais, 01 trabalho completo publicado em evento internacional e 06 materiais didáticos voltados para a Educação Básica, construídos (Geometria Espacial, Matemática Financeira, Sequências, Matrizes e Álgebra), publicados em evento nacional.

Buscando estabelecer uma relação mais próxima com a Educação Básica parte das ações do PRODOCENCIA objetivaram realizar oficinas de capacitação em Matemática para professores da Educação Básica. Tais oficinas foram coordenadas por docentes e alunos da licenciatura. O espaço utilizado foi o Laboratório de Matemática com seus recursos. Buscou-se, também, a inserção de trabalhos com softwares, nas capacitações de docentes da educação básica. Neste momento os licenciandos participaram como monitores e colaboradores do processo.

Os grupos de estudos formados buscaram investigar temáticas diversas em Educação Matemática. Destacam-se os estudos realizados com abordagens dentro da resolução de problemas, tecnologias, etnomatemática, modelagem e outros no contexto de diferentes disciplinas na forma interdisciplinar.

Para trilhar o percurso metodológico desta investigação balizou-se na investigação qualitativa. Valeu-se das análises documentais em projetos, relatórios de pesquisas, fotografias, livros de atas e filmagens. Inicialmente foi realizada uma busca orientada no projeto criado e aprovado no ano de 2010. As ações foram enumeradas e posteriormente confrontadas com os arquivos da instituição, a fim de averiguar a efetivação das mesmas. Todo este processo ocorreu nas dependências do Instituto Federal de Minas Gerais – Campus São João Evangelista. A escolha desta instituição se justifica pelo fato desta fazer parte do *roll* das recentes instituições criadas para atender a demanda por cursos técnicos, tecnológicos e formação de professores, especialmente nas áreas de Matemática, Física, Química e Biologia.

A instituição pesquisada localiza-se no Brasil, Estado de Minas Gerais, na região sudeste do país. A cidade de São João Evangelista possui 17000 habitantes, tendo como economia principal a agropecuária e, recentemente, a entrada de atividades de mineração. Alunos de diferentes cidades e regiões migram para São João Evangelista em busca de qualificação profissional. Ao todo, são 120 alunos em processo de formação inicial em Licenciatura em Matemática.

Sabendo que a formação inicial em Matemática é um espaço ideal para experiências positivas e inovadoras, ficou evidente o Programa de Consolidação das Licenciaturas (PRODOCENCIA) do Ministério da Educação do Brasil se constitui em um projeto que induz práticas eficientes para a formação inicial de professores. O apoio financeiro aliado a desenvolvimento de metas voltadas para a inovação pedagógica tem possibilitado desenvolvimento de estudos e pesquisas necessários à ação docente e discente. Tanto alunos quanto professores da Licenciatura em Matemática têm desenvolvido trabalhos e experiências no Laboratório de Matemática, voltados para a valorização do lúdico e da criatividade. Estes trabalhos aproximam teoria e prática e valorizam a ação de formação docente para a educação básica.

Referencias bibliográficas

Lei nº 11.502, de 11 de julho de 2007 (2007). Brasília, DF. Recuperado em 26 de junho de 2013, de http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2007-2010/2007/Lei/L11502.htm.

Ferreira, A. C. (2003). Um olhar retrospectivo sobre a pesquisa brasileira em formação de professores de matemática. Em D. Fiorentini. *Formação de professores de matemática: explorando novos caminhos com outros olhares* (pp. 19-50). Campinas-SP: Mercado de Letras.

Fiorentini, D. (2008). A Pesquisa e as Práticas de Formação de Professores de Matemática em face das Políticas Públicas no Brasil. *Bolema, 29*, 43-70.

Fiorentini, D. (1996). *Brazilian research in mathematical modelling*. Trabalho apresentado no VIII Congresso Internacional de Educação Matemática, Sevilla,ES.

Fiorentini, D. (1994). *Rumos da Pesquisa Brasileira em Educação Matemática*: o caso da produção científica em cursos de pós-Graduação. Tese de Doutorado não publicada, Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas. Brasil.

Freitas, H. C. L. (2007). A (nova) política de formação de professores: a prioridade postergada. *Revista Educação & Sociedade*, *100*, 1203-1230.

González, F. (2010). Un modelo didáctico para la formación inicial de profesores de matemática. *Sapiens Revista Universitaria de Investigación*, *11*, 47-59.

Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, Censo escolar. (2012). *Base de dados INEP*. Recuperado em 16 de agosto de 2013, de http://portal.inep.gov.br/basica-censo.

Larrosa, J. (2002) Notas sobre a experiência e o saber de experiência. Revista *Brasileira de Educação. 19*, 20-28.

Libâneo, J. C., Pimenta, S. G. (1999). Formação dos profissionais da educação: visão crítica e perspectivas de mudança.*Revista Educação & Sociedade, 68*, 239-277.

Rodríguez, M. V. (2008*)*. Políticas de formação de professores: as experiências de formação inicial em Argentina, Chile e Uruguai. *Revista Nuances: estudos sobre Educação. 16*, 119-139.

Tardif, M. (2002). *Saberes Docentes e Formação Profissional.* 2 ed. Petrópolis: Vozes.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN DE RECURSOS DIDÁCTICOS EN EL ÁREA DE MATEMÁTICA

Carina Pacini, Lucía Sacco, Rosana Scolari y Liliana Tatángelo
Instituto Superior de Formación Docente Nº127 "Ciudad del Acuerdo". Argentina
carinapacini@yahoo.com.ar, lcsacco@gmail.com, rosanascolari@yahoo.com.ar, lilianatatangelo@fibertel.com.ar

Resumen. La tarea del docente se encuentra afectada por diversos factores que la enriquecen pero que también la dificultan. Uno de estos factores es el surgimiento de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC). El avance tecnológico conlleva la necesidad de investigar sobre la elaboración y el uso de recursos informáticos. La presente investigación tiene por objetivo principal formular criterios de uso de recursos didácticos vinculados con las TIC que contribuyan a la didáctica de los espacios curriculares del ISFD N° 127. Se adopta una concepción plurimetódica (Medina Rivilla, 2003). La socialización de los resultados permitirá promover y fortalecer la producción de conocimiento en el nivel educativo superior

Palabras clave: recursos, actividades y competencias matemáticas, criterios

Abstract. The work of the teacher is affected by various factors that enrich it but also make it difficult. One of these factors is the development of Information and Communications Technology (ICT). Along with technological progress comes the need to study the development and use of computer resources. The main goal of this study is to develop criteria for the use of ICT resources that enrich the art of teaching in the curricular areas of ISFD N°127. This study adopts a multi-methodological approach (Medina Rivilla, 2003). The spreading of results will help promote and strengthen the production of knowledge in the higher educational level

Key words: resources, mathematical activities and skills, criteria

Introducción

El presente trabajo se encuadra en un proyecto de investigación que se lleva a cabo desde principios del 2013, en el Instituto Superior de Formación Docente N°127 de la ciudad de San Nicolás. El mismo se halla en el marco de la Convocatoria 2012 "Conocer para incidir sobre las prácticas pedagógicas", propuesta por el Instituto Nacional de Formación Docente y la Coordinación de Investigación Educativa, Ministerio de Educación de la República Argentina.

Esta propuesta de producción de conocimientos, a partir del análisis y estudio sistemático de los problemas presentes en el sistema de formación docente, resulta pertinente para el desarrollo de áreas de investigación que aporten conocimiento en torno a los recursos didácticos vinculados a las TIC, en particular, utilizados en la enseñanza de la matemática.

Planteamiento del Problema

Uno de los momentos que forma parte del proceso de diseño de una clase, es la búsqueda y construcción de recursos didácticos. Durante dicho momento el docente utiliza su creatividad y su saber para elegirlos de manera que cumplan con criterios de calidad y con los objetivos educativos

concretos que persigue. Esta tarea, en la mayoría de los casos, está afectada por numerosos factores que la dificultan y no permiten que se realice de manera óptima.

Entre dichos factores se pueden mencionar, la intensa rutina de trabajo diario que se lleva a cabo, impide tener el tiempo suficiente para realizar una búsqueda y una evaluación de nuevos materiales; el tradicional aislamiento y soledad del docente, propiciado por la misma organización de las instituciones y la distribución del tiempo y del espacio y la ausencia de asistencia técnica permanente para acercarse a los distintos recursos y para evaluar las posibilidades de su implementación.

A los factores anteriores, se suma la incorporación de las TIC en el aula, en particular de las Netbooks. Cambian los usos del tiempo, los espacios de la escuela y de la comunidad y la organización habitual de trabajo en el aula. La discontinuidad de los procesos individuales, entre cada alumno y máquina, rompen en cierta medida la idea de homogeneidad y control de los procesos que los docentes valoran como condiciones elementales para la clase (CEPP, 2008).

La sola incorporación de las TIC no implica una garantía de actualización educativa. Es necesaria una propuesta pedagógica que logre una transformación en las costumbres y prácticas didácticas llevadas a cabo por los docentes en el marco de un contexto situacional mediado por la tecnología. Esta perspectiva de análisis requiere una alfabetización en competencias comunicativas emanadas de estos formatos digitales, derivados del lenguaje formal, simbólico y técnico propio de la matemática (Fainholc, 2012).

Este proyecto surge, a partir de un diagnóstico de los modos en que se presentan estos factores en el Profesorado de Matemática.

En particular, propone una revisión de los recursos didácticos que se utilizan en algunos espacios curriculares que constituyen la estructura medular del futuro docente de matemática, de manera tal que contemplen tanto el nuevo perfil del estudiante de profesorado como el del docente formador

Objetivos

El equipo de investigación se propone:

- Caracterizar los recursos didácticos vinculados con las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC), específicos del área de matemática.
- Generar criterios de selección, uso y evaluación de un recurso didáctico, que permita la realización de actividades matemáticas y el desarrollo de competencias específicas de los espacios curriculares seleccionados.

- Fortalecer la producción de conocimiento de recursos didácticos vinculados con las TIC, específicos del área de matemática.

Estado del Arte

Existe numerosa bibliografía referida la integración de las TIC en los diferentes niveles educativos. También lo que sucede en los institutos de formación docente en cuanto a investigaciones en torno al uso y aprovechamiento de un recurso didáctico con soporte informático (video, software, etc.), a los cambios que estos generan y al aporte a los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

Como así también, aquellos que proponen criterios de evaluación y usabilidad de recursos didácticos digitales y virtuales de manera general.

En particular, una de las investigaciones referida a entornos virtuales, es el trabajo realizado por Marzal, Calzada - Prado (2003). Estos autores, además de presentar una interesante determinación de criterios para la evaluación del uso de los recursos didácticos virtuales, señalan que para que el aprendizaje en entornos virtuales resulte realmente significativo, deben darse dos condiciones básicas: disponer de competencias relacionadas con la alfabetización en información y, en especial, disponer de criterios adecuados para evaluar contenidos digitales.

Jaramillo y Ruiz, en el artículo publicado en la Revista Colombiana de Educación N°58 (2010), aporta herramientas para la evaluación de un ambiente de aprendizaje en donde se ha implementado una práctica en la que incluye las TIC.

Diferentes centros de investigación educativa promueven el desarrollo de investigaciones en torno al análisis y evaluación de recursos didácticos utilizados en el aula y vinculados con las TIC, y de la importancia que reviste el actuar docente en referencia a la selección del recurso adecuado.

En Argentina, un referente importante para la formulación de los criterios a definir, es el propuesto en la sección Aportes para la enseñanza del Nivel Medio, del portal educativo de estado argentino educ.ar, en su núcleo teórico referido a la formación docente y el desafío de enfrentarse a las TIC. El mismo menciona La National Council of Teachers of Mathematic, como la asociación de profesores de matemática de EE.UU., que publica anualmente documentos llamados Principios y Estándares para la Educación Matemática, los cuales son un recurso y guía para quienes toman decisiones en esta área de enseñanza.

Por último, el Centro Nacional de Innovación e Investigación Educativa (CNIIE), dependiente del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte del Gobierno de España. En una de sus áreas plantea una fuerte interrelación entre Formación del Profesorado, Investigación e Innovación Educativa

mediante la secuencia: investigación educativa, trasferencia de resultados vía innovación y diseminación del conocimiento mediante la formación del profesorado.

Marco Teórico

Por la naturaleza del proyecto, interesan los estudios de distintos dominios que contribuyan a la delimitación de los conceptos específicos, sobre los cuales se basará la investigación. Tales conceptos son el de recurso didáctico, enfoque ontosemiótico del conocimiento, competencia matemática y transposición didáctica.

Se adopta la definición de recurso didáctica de Spiegel (2010). Este autor define a los recursos didácticos como las herramientas a las que echa mano o elige un docente para planificar su clase, todas estas herramientas – sean físicas o procedimentales – serán recursos didácticos para ese docente a partir de esta elección. Un recurso didáctico es todo material, que a partir de sus ventajas para el contexto en el que será utilizado, se convierte en instrumento para la composición en función de la necesidad del docente. A su vez reafirma, que la evaluación de los recursos en cuanto a sus aspectos propios, contenidos, diseño didáctico y aprovechamiento del formato, como así también, su relación con la composición de la clase, es decir, la determinación de cuál o cuáles son las funciones que el docente aspira que cumpla, resultan imprescindibles.

Para Cabero (2003), los profesores tendrán que desempeñar, en los nuevos entornos de formación, dos roles significativos, uno el de diseño de medios y otro el de tutorización. En cuanto al primero, el profesor se convertirá no sólo en un consumidor de medios, sino en un diseñador y productor de recursos adaptados a las necesidades de sus estudiantes. Al respeto Jiménez, y Montes de Oca (2008) consideran relevante al diseño de los recursos didácticos de modo de impactar en la calidad de los aprendizajes. Área Moreira (1999), afirma que cualquier innovación educativa requiere de materiales curriculares específicamente elaborados para la misma, pues, sin ellos, es poco probable que el profesorado desarrolle prácticas pedagógicas coherentes.

Para la definición de los criterios de análisis y evaluación de los recursos didácticos, se considera, en primer lugar, el aporte del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) de Godino (2011). Este autor considera que la noción de idoneidad didáctica, aporta elementos originales y significativos para elaborar una teoría de diseño instruccional en un área de contenido específico, la cual brinde principios y criterios generales basados en resultados contrastados por la investigación llevada a cabo.

Otro referente para la definición de criterios de diseño, análisis y evaluación de los recursos didácticos es Parceriza Arán (1996). Este autor plantea categorizaciones teóricas de los materiales

curriculares, como modelos de generación, clasificación y análisis de materiales curriculares, específicamente en el área de la Matemática del nivel universitario.

Otro de los conceptos que considera referente esta investigación, es el de competencia. El uso del término competencia ha penetrado fuertemente en el discurso de la educación matemática, sobre todo en el ámbito del desarrollo curricular. En este contexto, competencia es la capacidad de actuar eficazmente en una situación de un tipo definido, capacidad que se apoya en los conocimientos, pero que son se reduce a ellos. Para hacer frente, lo mejor posible, a una situación, se debe poner en juego y en sinergía varios recursos cognitivos. Las competencias, movilizan diferentes conocimientos que, por lo general, son disciplinarios entre ellos los conocimientos de afrontar un problema complejo, o de resolver una actividad compleja (Perrenoud, 2004).

Por último, otro concepto a tener en cuenta es el de la transposición didáctica del saber, que se realiza vía los materiales curriculares (Chevallard, 2000). La deformación, el ocultamiento, el envejecimiento o desgaste que sufre el saber en este proceso constituyen los riesgos de la transposición didáctica. Por eso se considera relevante la investigación de criterios de análisis que permitan valorar en los diversos materiales y recursos didácticos que se trabajan en el aula, la distancia entre los mismos y el saber.

Metodología

El diseño metodológico se proyecta desde una perspectiva plurimetódica (Medina Rivilla, 2003). Esta investigación adopta un enfoque cualitativo. El alcance del estudio se ajusta al tiempo de un año, a lo largo del cual se propone trabajar sobre diferentes ejes de análisis.

Se delimita como objeto de estudio los recursos didácticos digitales y virtuales, vinculados con los espacios curriculares Geometría Analítica, Álgebra y Análisis Matemático, de 1ero a 4to año del Profesorado de Matemática del ISFD N°127, con el propósito de fomentar y fortalecer la producción de conocimiento en cuanto a criterios para la selección, uso y evaluación de los diferentes recursos didácticos que se relacionen con actividades y competencias matemáticas específicas de dichos espacios.

El grupo de investigación está conformado por docentes de los espacios curriculares de Fundamentos de la Matemática y Computación de 4to año, Análisis Matemático de 3ero, Espacio de la Práctica de 1ero, coordinadora del Departamento del Espacio de la Práctica Docente y alumnas cursando el Espacio de la Práctica de 4to.

La investigación se inició a mediados del 2013 y se considera finalizarla en julio del 2014. La misma se ha organizado en las siguientes etapas de trabajo:

1. Realización de un diagnóstico de la situación, analizando ¿Qué características tienen los recursos utilizados en estos espacios? ¿Cuáles son las nuevas oportunidades que ofrecen? ¿Qué es lo que lo hace valioso o adecuado para la producción de conocimiento?, etc.

Esta etapa incluyó actividades como confección y aplicación de un cuestionario que permita un estudio inicial de campo sobre cuáles son los RD con soporte tecnológico, uso de los mismos y competencias de los usuarios, observaciones no participantes y reconocimiento de características y significados institucionales y personales en cuanto a recursos y materiales didácticos vinculados con las TIC utilizados en los espacios curriculares seleccionados, identificando fortalezas y debilidades.

2. Caracterización los recursos didácticos vinculados con las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC), específicos del área de matemática como son software matemáticos, revistas digitales matemáticas y páginas y portales específicos de matemática.

Durante esta etapa se realizaron actividades como la búsqueda de cada uno de los recursos didácticos seleccionados, descripción minuciosa de cada uno de ellos como herramientas didácticas que aporten a la clase y que brinden el acceso al conocimiento, analizando su ventaja diferencial (Spiegel, 2010), identificación de actividades de cada uno de los espacios curriculares posibles de ser realizadas con la asistencia de los recursos didácticos estudiados y definición de las competencias matemáticas que permiten desarrollar los recursos didácticos estudiados a través de las actividades realizadas en los espacios curriculares.

3. La definición de criterios de diseño, análisis y evaluación de recursos didácticos que utilicen las tecnologías de la información y la comunicación.

En esta etapa de trabajo se han definido criterios de análisis de los recursos didácticos vinculados con las TIC específicos del área de matemática, los cuales permitan investigar si cada recurso didáctico propicia el trabajo autónomo, facilita la construcción del conocimiento por parte del alumno, promueve el desarrollo de competencias específicas del área de matemática y permite la integración efectiva entre tecnología, pedagogía y contenido.

Resultados

En referencia a la primera etapa de trabajo, los resultados de la encuesta realizada a los docentes de los espacios curriculares seleccionados, indican que el 35% utilizan recursos en formato digital, el 12% virtual, el 35 % impreso y el 18 % una combinación de formatos. Entre los recursos digitales más utilizados son el software específico de matemática (22%), las presentaciones en Power Point y páginas de Internet (cada uno en un 16%) y las redes sociales (13%). Entre las actividades

realizadas con dichos recursos, los docentes especifican utilizarlos, principalmente, para realizar interpretaciones gráficas (29%) y para la elaboración de trabajos prácticos (21%). Otro aspecto interesante es que el 60% de los docentes utilizan recursos diseñados por otros, ya sea compañeros o que encuentran en Internet. Entre los criterios que los profesores mencionan, por los cuales han seleccionado el recurso, se pueden indicar: masividad, accesibilidad, practicidad, organización, ahorro de tiempo, eficiencia, efectividad y simplicidad en su uso.

En la segunda etapa de trabajo, se realizó la caracterización de algunos recursos didácticos vinculados con las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC), específicos del área de matemática. En particular se realizó un trabajo minucioso sobre software matemático, revistas digitales, páginas y portales específicos de matemática, confeccionando fichas de cada uno de dichos recursos que sirvan de información al usuario del mismo. Estas fichas incluyen, además de las características generales del recurso didáctico, indicaciones en cuanto a actividades y competencias que cada uno permite desarrollar en relación a los espacios curriculares seleccionados.

Este trabajo permitió, en una tercera etapa, la definición de los criterios de análisis de los recursos didácticos que integran las TIC en el área de la Matemática (RD-TIC-M). Se ha considerado dividir los criterios de análisis de los recursos didácticos en internos y externos.

Los internos, aquellos vinculados con:

a. La transparencia (Scolari, 2004) del recurso digital o virtual, con los microeventos (prácticas sociales, actividades y competencias) que ellos permiten.

Para este autor, la transparencia es un criterio que depende de la mayor o menor habilidad del diseñador para disimular la misma existencia de la *interface*, o sea, para eliminar los obstáculos para el uso del recurso y, así, poder ampliar el número de usuarios del mismo.

b. La idoneidad didáctica (Godino, 2011). (epistémica, cognitiva, interaccional, medicional, emocional y ecológica).

Estas idoneidades deben ser integradas teniendo en cuenta las interacciones entre las mismas, lo cual requiere hablar de idoneidad didáctica como criterio sistémico. Desde el punto de vista de pertinencia (adecuación al proyecto de enseñanza) de un proceso de instrucción; el principal indicador empírico de esta idoneidad puede ser la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes y los significados institucionales pretendidos/implementados. Estos criterios se pueden utilizar para evaluar los procesos efectivamente implementados.

Los criterios externos, resultan aquellos parámetros relacionados con los deseos que justifican el diseño o los modos de implementación del recurso didáctico, también con los intereses o cuestiones pedagógicas, políticas, ideológicas y económicas que fijan quienes tienen y ejercen quienes diseñan el recurso didáctico.

Se ha considerado, que una vez finalizada la investigación, dichos criterios se socializarán a través de jornadas de capacitación en el ISFD N°127, que aporten a la mejora de la práctica docente, no solo en los espacios curriculares seleccionados, sino a toda la comunidad educativa, colaborando en el desarrollo de competencias específicas matemáticas en el futuro docente.

Referencias bibliográficas

Área Moreira, M. (1999). Los materiales curriculares en el contexto de los procesos de diseminación y desarrollo del curriculum. En J. M. Escudero y otros (Eds.), *Diseño, desarrollo e innovación del curriculum*. Madrid: Edit. Síntesis.

Cabero, J. (2004). Formación del profesorado en TIC. El gran caballo de batalla. En: *Comunicación y Pedagogía*. Tecnologías y Recursos didácticos (pp. 27-31). ISSN 1136-7733. España: Universidad de Sevilla.

Centro Nacional de Innovación e Investigación Educativa (CNIIE) dependiente *del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte* del Gobierno de España.

CEPP. (2008). *Evaluación del programa "Todos los chicos en el Red". Informe de resultados.* Buenos Aires.

Chevallard, Y. (2000). *La Transposición didáctica*: del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires. Editorial Aiqué.

Fainholc, B. (2012). *Una tecnología educativa apropiada y crítica: nuevos conceptos*. Buenos Aires: Editorial Humanitas-Lumen magisterio.

Godino, J. (2011). *Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.* Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Jaramillo Marín, P. y Ruiz Quiroga, M. (2010). *El desarrollo de la autonomía*: más allá del uso de la TIC para el trabajo independiente. N° 58. Colombia: Revista Pedagógica Nacional. Investigaciones.

Jiménez, E. y Montes de Oca, A. (2008). *Andamios para el aprendizaje*. Santo Domingo. República Dominicana: Editora Universitaria.

Marzal, M.A.; Calzada-Prado, F.J. (2003). *Un análisis de necesidades y hábitos informativos de estudiantes universitarios en Internet*. Binaria, 3. Retrieved 10 May, 2007, from http://www.uem.es/binaria/in.html

Medina Rivilla, A. (2003). *Método para la realización de proyectos de investigación y tesis doctorales.* Madrid: Universitas.

Nacional Council of Teacher of Mathematics (2000). *Principios y Estándares para la educación Matemática*. Traducción a cargo de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES.

Parceriza Aran, A. (1996). *Materiales Curriculares.* Cómo elaborarlos, seleccionarlos y usarlos. Barcelona: Graó.

Perrenoud, P. (2004). *Diez nuevas competencias para enseñar*. Barcelona. Editorial Graó.

Scolari, C. (2004). *Hacer clic.* Hacia una sociosemiótica de las interacciones digitales. IV Premio de Ensayo Eusebi Colomer de la Fundación Epson. Gedisa editorial. Primera edición. Barcelona.

Spiegel, A. (2010): *Planificando clases interesantes.* Itinerarios para combinar recursos didácticos. Argentina: Ediciones Novedades Educativas.

UNA PERSPECTIVA DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA LA ENSEÑANZA DEL PROFESOR CENTRADA EN SU ESPECIALIZACIÓN: EL MODELO MTSK

Dinazar I. Escudero, Eric Flores-Medrano, Nuria Climent, José Carrillo, Luis C. Contreras, Miguel A. Montes, Álvaro Aguilar y Nielka Rojas
Universidad de Huelva España
Universidad de Granada.
climent@uhu.es, carrillo@uhu.es, lcarlos@uhu.es

Resumen. Esta comunicación toma como eje de discusión la especificidad del conocimiento del profesor de matemáticas plasmada en modelos analíticos. Fruto de esta reflexión y de la búsqueda de instrumentos teóricos que nos permitieran analizar dicho conocimiento, elaboramos un modelo al que denominamos *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK) que considera la especialización en el conocimiento del profesor como característica definitoria. Ayudados de ejemplos, discutiremos cómo visualizamos esta especificidad y presentaremos brevemente el MTSK como un resultado del trabajo teórico y empírico que ha llevado a cabo el Grupo de Investigación de Didáctica de la Matemática en la Universidad de Huelva, España.

Palabras clave: Conocimiento especializado, MKT, MTSK

Abstract. This communication takes the mathematics' teacher knowledge specificity embodied in analytical models as argument axis. Result of this reflection and the pursuit of theoretical tools that allow us to analyze such knowledge, we are developing a model that we call *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* (MTSK) considering specialization in teacher knowledge as a defining characteristic. Helped by examples, we discuss how we visualize this specificity and present MTSK briefly as a result of theoretical and empirical work that has been carried out in the Didactic of Mathematics Research Group at the Huelva´s University, Spain.

Key words: Specialized Knowledge, MKT, MTSK

Introducción

Hay una larga tradición de investigaciones que se han preocupado por examinar qué conocimiento necesita el profesor de matemáticas para llevar a cabo su labor, considerando diferentes enfoques y necesidades según las distintas regiones en las que se estudia (e. g. Usiskin, 2001; Ball, Thames y Phelps, 2008; Sosa, 2011). En esta línea, existe una tendencia a diferenciar distintas componentes en dicho conocimiento (usando, últimamente, los términos dominios y subdominios).

Entendemos que de este modo se proponen marcos analíticos para investigar sobre el conocimiento del profesor (y eventualmente para poder orientar el diseño de programas de formación), más que pretender reflejar una estructura organizativa de su conocimiento, que sabemos es integrado. Nuestra comprensión del contenido del conocimiento del profesor es heredera de la contribución de Shulman (1986), respecto de su llamada de atención sobre la especificidad del conocimiento profesional en relación con la materia a enseñar. Uno de los modelos más destacados en los últimos años que pone énfasis en dicha especificidad, es el propuesto por el grupo de investigación en Educación Matemática de la Universidad de Michigan llamado *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT).

Esta comunicación toma como eje de discusión la especificidad del conocimiento del profesor de matemáticas. Analizamos, apoyados en un ejemplo, cómo entendemos que esta especificidad es considerada en el MKT y mostramos algunas necesidades detectadas con respecto al tratamiento de dicha característica y a problemas de delimitación y definición de los subdominios que identifica.

De los seis subdominios de conocimiento que plantea el MKT en Ball et al. (2008), sus autores subrayan la importancia del *Conocimiento Especializado del Contenido* (SCK, de aquí en adelante, las siglas se corresponden con la traducción al inglés). En Flores, Escudero y Carrillo (2013), se identifican dos tendencias usadas para definirlo: como un conocimiento específico del profesor puramente matemático o como un conocimiento que va *más allá* del *Conocimiento Común del Contenido* (CCK, otro de los subdominios del MKT, atribuible al conocimiento asociado a un adulto bien educado al nivel que se está analizando).

En este mismo trabajo, de una larga lista de ejemplos que se han utilizado para ilustrar al SCK se extrae uno que resulta representativo, sobre el que se realiza un proceso de desempaquetado para identificar el conocimiento puramente matemático asociado al profesor, con la intención de hacer un análisis crítico de la naturaleza de este conocimiento.

La información obtenida del desempaquetado no permite inferir que el conocimiento involucrado sea específico del profesor de matemáticas, ni tampoco que sea diferente del CCK. Es más evidente, desde el punto de vista descrito en los trabajos del MKT, un uso específico del conocimiento que la existencia de un conocimiento especial o específico del profesor. Se hace notar, además, que la delimitación entre SCK y CCK se ve condicionada por las concepciones del investigador que observa el fenómeno.

Se presentan dos problemáticas subyacentes al análisis, una de corte teórico: ¿qué se entiende por especializado en el conocimiento del profesor de matemáticas?; y otra de corte analítico: ¿cómo distinguir lo especializado de lo común (o de lo ampliado si añadimos el *Conocimiento del Horizonte Matemático*, el otro subdominio matemático en el MKT)?

Fruto de la reflexión sobre lo especializado en el conocimiento del profesor de matemáticas, y de la búsqueda de instrumentos teóricos que nos permitieran analizar dicho conocimiento, así como apoyados en investigaciones empíricas, elaboramos un modelo al que denominamos *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK) que considera la especialización en el conocimiento del profesor como característica definitoria (Escudero, Flores y Carrillo, 2012), el cual se describirá posteriormente.

Discusión del Conocimiento Especializado en dos Modelos

En esta sección se muestra el análisis, desde dos modelos, de la noción de *conocimiento especializado* atribuible al profesor de matemáticas. Los modelos utilizados son el MKT y el MTSK. Se parte de un ejemplo que se utiliza en Suzuka et al. (2009) para ilustrar aspectos de conocimiento especializado del contenido (SCK) del MKT, y se hace una crítica que va delineando lo que, desde el MTSK, se entenderá por *especializado*.

En Suzuka et al. (2009) proponen un ejemplo en el que está involucrado conocimiento matemático para la enseñanza, en particular, señalan que se evidencia conocimiento especializado del contenido.

Plantean que un profesor debería poder resolver correctamente $\frac{5}{6} \div \frac{1}{3}$. Sin embargo, mencionan, esto es muy alejado de aquello que es suficiente para su labor en el aula. Para ilustrar esta insuficiencia proponen un caso en el que un estudiante realiza el siguiente proceso: $\frac{5}{6} \div \frac{1}{3} = \frac{10}{12} \div \frac{4}{12} = 10 \div 4 = 2\frac{1}{2}$, y plantean una serie de cuestionamientos que son parte de las demandas del profesor:

> ¿Es esta una coincidencia, o podría ser un método matemáticamente válido? Si el método funciona, ¿funciona en general o sólo para números específicos? ¿Por qué pueden ser ignorados los denominadores de las fracciones en la división (como en el ejemplo anterior), pero no en la multiplicación, adición o sustracción? Tener la habilidad para preguntarse y responder a estas demandas supera a tener la habilidad de dar la respuesta en sí. Nosotros llamamos a esto conocimiento especializado de matemáticas (Suzuka et al., 2009, p. 9, traducción nuestra).

Si bien no todo el conocimiento que se involucre en responder a esas tareas es puramente matemático, nosotros nos centramos en hacer un análisis detallado de las exigencias matemáticas ya que, de acuerdo con los autores del MKT, la naturaleza del SCK es puramente matemático (Ball et al., 2008). Para hacerlo, partimos de una posible forma de pensamiento que permite llegar a ese resultado, sin que pensemos que esa haya sido la que llevó a cabo el estudiante que realizó esa operación de ese modo. Es decir, procederemos desde el propio conocimiento del contenido.

Un conocimiento en el que el profesor puede apoyarse es saber los distintos significados de la división de fracciones. En particular, dado que no resulta natural repartir $\frac{5}{6}$ de algo entre $\frac{1}{3}$, el

significado que es más plausiblemente asignable a esta operación es el cuotitivo (número de veces que cabe $\frac{1}{3}$ en $\frac{5}{6}$).

En registro gráfico, la operación se apoyaría en el esquema de la Figura 1.

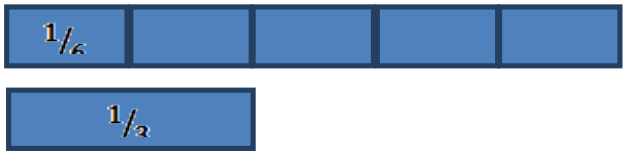


Figura 1. Representación gráfica de los números involucrados en la operación.

El profesor también requiere saber sobre equivalencia de fracciones: que $\frac{1}{3}$ es equivalente a $\frac{2}{6}$. Con lo cual, construye una situación propicia para verificar y dar sustento a que el resultado es $2\frac{1}{2}$. Este razonamiento, si bien está apoyado en aspectos visuales, también puede ser explicado a través de sus fundamentos. Se trata de un cambio de dividir dos números fraccionarios a dividir dos números enteros, ya que, al considerar al $\frac{1}{3}$ como $\frac{2}{6}$ ambos números son de la *misma naturaleza* (naturaleza $\frac{1}{6}$) y la tarea se convierte en dividir *5* elementos entre *2*. Este proceso es equivalente a aquel en el que el común denominador es *12*.

El proceso, además, funcionará con cualquier otro par de fracciones, dado que la división en sí es la misma (al estar considerando parejas de fracciones equivalentes a la pareja inicial, esto es, el mismo par de números racionales). Bastan estos conocimientos para que el profesor pueda verificar que el procedimiento es matemáticamente válido.

Para dar respuesta a otras preguntas, es necesario hacer una abstracción de por qué el procedimiento sirve.

La división, en su significado cuantitivo, tiene la facultad de comparar a dos cantidades. Para poder comparar sólo los numeradores, es necesario que estos tengan las mismas unidades, es decir, la operación $\frac{5}{6} \div \frac{1}{3}$ es transformada en la pregunta: ¿Cuántas veces caben *4* trozos de tamaño $\frac{1}{12}$ en *10* trozos de tamaño $\frac{1}{12}$? Donde la respuesta es dos veces y media. Lo que nos da explicación de que no se están ignorando los denominadores, sino que se les consideran al momento de hacerlos iguales (común denominador) para preparar a los numeradores para ser operados.

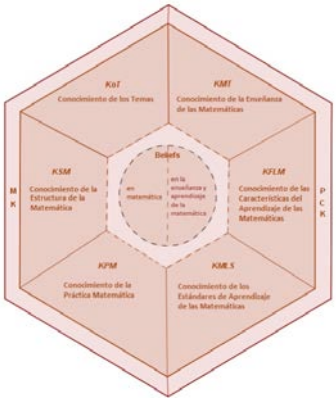
Se requiere matizar el hecho de que para la adición y sustracción no es posible ignorar de la misma forma a los denominadores. En realidad el procedimiento utilizado en la división puede deberse (conjetura de qué llevó a un estudiante a proceder así) a la forma en la que se operan sumas y restas de fracciones con diferente denominador, en la que, una vez convertidas a fracciones con el mismo denominador, solo se aplica la operación a los numeradores. La pregunta que se equivale con esa forma de proceder para $\frac{a}{n}+\frac{b}{n}$ sería ¿Cuánto resulta de sumar a trozos de tamaño $\frac{1}{n}$ con b trozos de tamaño $\frac{1}{n}$? La respuesta es $a+b$ trozos de tamaño $\frac{1}{n}$ (donde $\frac{1}{n}$ forma parte de la interpretación del resultado, no pudiendo obviarse como en el caso de la división).

Una vez identificados los elementos de conocimiento puramente matemáticos, procedemos a analizar cuáles de estos podrían ser considerados como parte del SCK según las definiciones propuestas en el MKT. La difusa delimitación entre lo común y lo especializado no permite garantizar que alguno de los elementos (significado de la división, equivalencia de fracciones, distintos algoritmos para la división de fracciones) sea exclusivo de la labor del profesor o sea algo *más allá* del conocimiento que se espera que tenga un adulto bien instruido al nivel escolar identificable para la realización de divisiones de fracciones.

Por otro lado, en el análisis surge un elemento de interpretación del posible pensamiento del estudiante que requiere de elementos matemáticos, pero que no es un conocimiento matemático en sí. Este conocimiento posee tintes más relativos a un elemento propio del profesor de matemáticas. Es, a su vez, un conocimiento que requiere saber sobre características de aprendizaje del estudiante y de relaciones entre las operaciones de fracciones. Es en esta visión integradora donde se sustenta la perspectiva de conocimiento especializado en nuestro modelo, el MTSK.

El MTSK (ver Figura 2) es un modelo analítico que considera al conocimiento especializado del profesor de matemáticas como un cúmulo que contempla conocimientos de distintas naturalezas. Considera dos dominios de conocimiento provenientes de Shulman (1986, 1987): el dominio de Conocimiento Matemático y el dominio del Conocimiento Didáctico del Contenido. Además, se caracterizan tres subdominios de distinta naturaleza para cada uno de los dominios.

Figura 2. Esquema de los dominios y subdominios que conforman al MTSK. Las concepciones son referidas al profesor de matemáticas, pero, al no ser objeto de discusión en esta comunicación, hemos decidido no ahondar en su caracterización.



En lo que se refiere al dominio de Conocimiento Matemático consideramos tres subdominios: a) *Conocimiento de los Temas Matemáticos* (KoT), esto es, conocimiento de los conceptos, procedimientos, fenomenologías y fundamentación teórica del tema en cuestión (en el ejemplo anterior, significados de la división, de la fracción y de la división y suma de fracciones, algoritmos para realizar estas operaciones con fracciones, o la idea de fracciones equivalentes); b) *Conocimiento de la Estructura de la Matemática* (KSM), sobre el contenido matemático en las conexiones, que supone ver, entre otras cosas, la matemática avanzada desde un punto de vista elemental y la matemática elemental desde un punto de vista avanzado (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013).

Así como considerar la complejización y simplificación respecto de un tema matemático (en el ejemplo dado, las operaciones con números naturales vistas desde las operaciones con números racionales), y c) *Conocimiento de la Práctica Matemática* (KPM), es un conocimiento matemático de tipo sintáctico (según Schwab, 1978), por ejemplo, el papel que tiene el ejemplo y el contraejemplo en la generalización en matemáticas, saber qué es demostrar, qué es definir, entre otros.

En el dominio del Conocimiento Didáctico del Contenido: d) *Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas* (KMT); e) *Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas* (KFLM) (como el conocimiento de la generalización habitual de los estudiantes del procedimiento estándar para sumar fracciones de distintos denominadores a otras operaciones con fracciones de distinto denominador) y f*) Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas* (KMLS).

Los subdominios del Conocimiento Didáctico del Contenido incorporan aspectos de conocimiento del profesor que pueden ser asociados al conocimiento generado en las investigaciones en Matemática Educativa. Por ejemplo, aspectos relacionados con el conocimiento de teorías de enseñanza de las matemáticas (teoría de Situaciones Didácticas para el diseño de

actividades), o con teorías de fundamentos del aprendizaje en matemáticas (teoría APOS para entender/propiciar procesos de aprendizaje), o con estándares sobre el nivel de aprendizaje esperado de un tema en cierto momento educativo (los estándares de la NCTM, los niveles de Van Hiele), respectivamente.

Reflexiones Finales

Esta comunicación se planteó por objetivo contrastar dos visiones acerca de lo que se considera como especializado en el conocimiento del profesor de matemáticas. Por un lado, en el MKT lo especializado es visto como aquel conocimiento puramente matemático *exclusivo* del profesor de matemáticas. Por otro lado, en el MTSK lo especializado es visto como un cuerpo de conocimientos que *define* al núcleo básico de conocimiento profesional del profesor de matemáticas y que tiene sentido, en su conjunto, sólo para él (que es diferente del cuerpo de conocimientos del profesor de otras asignaturas y del usuario de las matemáticas para otras disciplinas distintas a la docencia).

Planteamos bondades de tipo analítico del MTSK con respecto al MKT debido a la difusa delimitación entre algunos subdominios. En esta comunicación ejemplificamos la difusión entre el CCK y el SCK, sin embargo, en otros trabajos (e. g. Carrillo et al., en prensa) se han abordado los problemas de delimitación entre diversos subdominios. No obstante, reconocemos la profunda aportación del grupo de Educación Matemática de la Universidad de Michigan (específicamente de los autores del MKT) a la comprensión de aspectos relacionados con el conocimiento del profesor de matemáticas y que nos permitieron delinear algunos de los elementos que consideramos en el MTSK.

Agradecimientos Los autores son miembros del proyecto de investigación "Conocimiento Matemático para la enseñanza respecto de la resolución de problemas y el razonamiento" (EDU2009-09789EDUC), financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación en España.

Referencias bibliográficas

Ball D. L., Thames, M.H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M.A. Mariotti (Eds.). *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2985-2994). Middle East Technical Universitiy, Ankara, Turquía: ERME.

Escudero, D., Flores, E., y Carrillo, J. (2012). El Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas. En L. Sosa, E. Aparicio y F.M. Rodríguez (Eds.), *Memorias de la XV Escuela de Invierno en Matemática Educativa*, 35-42.

Flores, E., Escudero, D. I., y Carrillo, J. (2013). A theoretical review of specialised content knowledge. En B. Ubuz, C. Haser y M.A. Mariotti (Eds.). *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2055-3064). Middle East Technical Universitiy, Ankara, Turquía: ERME.

Schwab, J. J. (1978). Education and the structure of the disciplines. En I. Westbury y N.J. Wilkof (Eds.), *Science, curriculum and liberal education*, 229-272, University of Chicago Press: Chicago.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *American Educational Research Association*, *15*(2), 4-14.

Shulman, L.S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of a new reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1-22.

Sosa, L. (2011). Conocimiento del profesor para la enseñanza de las matemáticas. Contribución teórica al conocimiento del contenido y estudiantes. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa vol. 25*, 1151-1159.

Suzuka, K., Sleep, L., Ball, D. L., Bass, H., Lewis, J. M., y Thames, M.H. (2009). Designing and Using Tasks to Teach Mathematical Knowledge for Teaching. En D.S. Mewborn y H.S. Lee (Eds.), *AMTE Monograph Series Volume 6. Scholarly Practices and Inquiry in the Preparation of Mathematics Teachers*, 7-24. San Diego, California: Association of Mathematics Teacher Educators.

Usiskin, Z. (2001). Teachers' Mathematics: a collection of content deserving to be a Field. *The Mathematics Educator*, *6*(1), 86-98.

UM MODELO PARA ANÁLISE DO PROCESSO DE GENERALIZAÇÃO

Maria Lucia Panossian y Manoel Oriosvaldo de Moura
Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo Brasil
malupanossian@hotmail.com; modmoura@usp.br

Resumen. Este artigo tem como foco o processo de generalização no ensino de álgebra. Tal processo é citado por professores e revelado em propostas curriculares oficiais, abrangendo diferentes conceituações. Entende-se que a organização do ensino de álgebra deve abranger a generalização como processo matemático (em que se generalizam relações, propriedades, conceitos, etc.) e/ou como forma de pensamento e produto do ensino (no sentido em que é necessário ensinar o estudante a 'generalizar'). Desta forma se destaca a necessidade de analisar e detalhar este processo em situações de ensino. Para tanto, este artigo apresenta um modelo de análise do processo de generalização com quatro componentes: conteúdo, elemento mediador; formas de expressão e significado; critérios de validade, às quais foram atribuídos quatro níveis de generalidade. Destaca-se por meio da análise de uma situação enunciada de ensino o potencial do modelo para estabelecer discussões sobre os processos de generalização e sobre a organização do ensino de álgebra.
Palabras clave: generalização; modelos de análise; situações de ensino
Abstract. The focus of this article is the process of generalization in algebra teaching. This process quoted by teachers and revealed in syllabus proposals, embracing different conceptualizations. It understood that the organization of the algebra teaching has to embrace the generalization as a mathematical process (in which one generalizes relations, attributes, concepts, etc.) and/or as a way of thinking and a product of teaching (in the sense that it is necessary to teach students to 'generalize'). In the way it is highlighted the need of analyzing and detailing this process in teaching situations. For this, the paper presents a model of analysis of the generalization process composed by four components: content, mediating element; forms of expression and meaning; validity criterion, which were assigned four levels of generalization. It is highlighted through the analysis of an enunciated teaching's situation; the model's potential for establishing discussions about the processes of generalization and about the organization of the teaching of algebra.
Key words: generalization; analysis model; teaching situations

Introdução

Em 2011, foi realizado um curso de atualização com professores da rede pública do Estado de São Paulo intitulado 'Atividades de ensino de álgebra a partir dos fundamentos da teoria histórico-cultural'. Este curso pretendia discutir com os professores, princípios para a organização do ensino da álgebra na Educação Básica, analisando as situações de ensino da proposta curricular (São Paulo, 2008), que vigora em toda a rede estadual atualmente.

Durante este curso, o processo de generalização foi citado pelos professores de forma recorrente como um elemento importante para o ensino de álgebra. Entretanto, não há clareza entre os professores em relação ao que realmente se constitui como processo de generalização ou como ele pode ser ensinado.

Destaca-se a possibilidade de generalizar propriedades, relações etc. por meio do conhecimento algébrico, mas também se considera a possibilidade de ensinar a 'generalizar' de forma desvinculada dos objetos matemáticos como retratado na fala de uma professora: "[…] o que a

gente estava questionando é será que não seria o caso de ensinar ele primeiro a generalizar? Ter uma aula só para aprender a generalizar [...] a gente chegou a esta conclusão será que não precisa de uma aula disso".

A análise sobre a proposta curricular que serve de orientação aos professores da rede estadual de ensino também revela a generalização como um *processo,* a ser desenvolvido sobre objetos matemáticos, ou seja, generalizam-se propriedades, generalizam-se fórmulas, generalizam-se relações, generalizam-se regularidades como se destaca no trecho a seguir:

> Um dos objetivos centrais do processo de ensino e aprendizagem da Álgebra é generalizar regularidades. O uso de letras para representar, por exemplo, o padrão de uma determinada sequência numérica é um dos recursos que a álgebra nos permite. Nesse caso, a generalização de uma sequencia numérica com o uso de expressões algébricas pode ser útil para determinar números específicos da sequência sem recorrer a processos aritméticos (São Paulo, 2009a, p. 11).

Mas também se destaca a generalização como uma capacidade cognitiva a ser desenvolvida no estudante e desta forma como um *produto* do ensino. Entende-se que é necessário estabelecer esta relação entre a generalização como uma forma de pensamento do aluno a ser desenvolvida e/ou como um processo realizado sobre objetos matemáticos. A capacidade cognitiva do estudante em generalizar se desenvolve quando ele realiza os processos de generalização. E ao mesmo tempo, os processos de generalização se desenvolvem na medida em que o estudante possui condições cognitivas para realizar este processo.

Em suas pesquisas, Radford (1996, 2001) indica que o processo de generalização não é um conteúdo específico da matemática e que existem exemplos em que a conclusão da generalização é absurda, preocupando-se com o que pode constituir uma 'boa' ou 'má' generalização. Neste sentido pretende retomar o papel epistêmico da generalização no conhecimento matemático, e em particular no conhecimento algébrico. Destaca ainda que há muitos tipos de generalizações e que de um ponto de vista didático, a generalização depende dos objetos matemáticos que estão sendo generalizados, sendo sua base lógica a de justificar sua conclusão, e neste sentido um processo de prova, que se move entre conhecimentos empíricos e abstratos.

Assim, Radford (2010) se refere a níveis de generalização do pensamento matemático, caracterizados pelo desenvolvimento epistemológico dos conceitos matemáticos e seus sistemas semióticos de representação.

> Levamos em consideração o fato de que o pensamento matemático pode ocorrer em vários níveis de generalidade. A isso, adicione a premissa epistemológica que a dificuldade conceitual da tarefa matemática e dos sistemas semióticos que medeiam o pensamento matemático que é assim provocado caracteriza estes níveis de generalidade (Radford, 2010, p. 115).

É fato que ainda não se distinguem claramente os diferentes níveis do processo de generalização considerados para aprendizagem da álgebra em diferentes faixas etárias. Desta forma se justifica a necessidade de constituir um 'modelo' para análise destes níveis de generalização, particularmente as algébricas, nas situações de ensino enunciadas em propostas curriculares e livros didáticos, bem como presentes no discurso e ações dos professores. Metodologicamente, este modelo foi constituído a partir das análises sobre as situações de ensino da proposta curricular do Estado de São Paulo (São Paulo, 2008), a partir da categoria 'generalização' fundamentada teoricamente principalmente em Davýdov (1982) e Radford (1996, 2001).

O Modelo de Análise do Processo de Generalização em Situações de Ensino

Ao estabelecer componentes para o processo de generalização, o modelo proposto neste texto, permite analisar os níveis de generalização envolvidos em diferentes situações de ensino. A constituição deste modelo envolveu estudos teóricos sobre a generalização enquanto processo psíquico e matemático e foi elaborada durante um estágio de pesquisa com o professor Joaquin Gimenez, em 2012, na Universidade de Barcelona.

A constituição deste modelo se pauta em pressupostos da teoria histórico-cultural (Vygotsky, 2001; Leontiev, 1983) e assume que o estudo do processo de generalização matemática na experiência histórica humana oferece elementos para compreendê-lo enquanto movimento lógico de pensamento. Considera também os estudos e pesquisas de Davydov (1982) sobre os processos de generalização empírica (obtida por meio da abstração do que é comum a casos particulares) e teórica (que extrai o que é geral e constitui a essência dos conceitos).

O modelo foi estruturado tendo como referência inicial o modelo de análise do enfoque ontosemiótico (Godino, 2002, Font, 2007) que estabelece dualidades (Pessoal/Institucional; Exemplar/tipo; Ostensivo/Não Ostensivo; Elementar/Sistêmica; Expressão/Conteúdo) para analisar as práticas matemáticas, sua representação e desenvolvimento.

Assim, como no modelo do enfoque ontosemiótico, pretende-se que o modelo aqui apresentado contemple dimensões epistemológicas e psicológicas do processo de generalização. Para estabelecer as componentes deste processo e os níveis de generalidade foram considerados os pares dialéticos: geral/particular; concreto/abstrato; análise e síntese; material/ideal.

Este modelo de análise da generalização é constituído por quatro componentes: o CONTEÚDO, *o que* está sendo generalizado, varia de características físicas de objetos a relações conceituais; o ELEMENTO MEDIADOR, *como* a generalização está se processando, varia do uso de um elemento particular desconhecido até um elemento que contempla a variação; a FORMA DE EXPRESSÃO e SIGNIFICADO, como a generalização se *expressa* e se identifica com seu conteúdo, varia desde o uso da linguagem natural, até expressões simbólicas que contém como significado a relação entre conceitos; e o CRITÉRIO DE VALIDADE, como se prova o processo de generalização, varia desde casos particulares ao controle de provas conceituais. Para cada uma destas componentes foram definidos quatro níveis, visualmente representados como circunferências concêntricas conforme a figura:

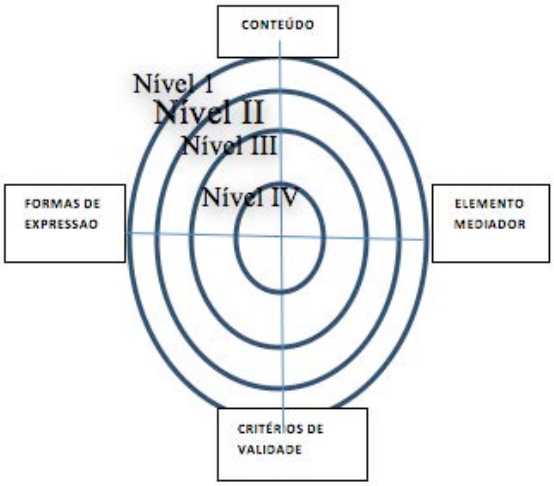


Figura 1. Modelo de análise da generalização em situações de ensino.

O primeiro nível, representado pela circunferência maior e com contorno mais externo, representa o nível I onde a generalização se atém ao que é sensível, palpável, objetos físicos e fenômenos aparentes. No nível II considera-se a generalização pelo estabelecimento de algumas relações entre os objetos e os fenômenos, que não são necessariamente as essenciais, no nível III identificam-se as relações essenciais e a generalização se processa sobre regras estabelecidas sobre estas relações, e no nível IV a generalização envolve as estruturas matemáticas complexas.

Optou-se no modelo por definir o nível I como sendo o mais externo, por ser também o mais disperso, e o nível IV representado pela esfera mais interna por concentrar nas estruturas matemáticas a essência do processo de generalização. Entende-se que os níveis I e II são caracterizados por concentrarem formas empíricas de pensamento, enquanto as formas teóricas se concentram nos níveis III e IV.

De forma sintética, os níveis de generalização se distribuem pelas componentes da seguinte forma:

	Conteúdo	Elemento Mediador	Expressão e Significado	Critérios de Validade
Nível I Experiência sensível	Percepção direta dos objetos concretos (empírico). Ex.: tamanho, cor, forma, quantidade, etc.	O elemento particular desconhecido. Ex.: a incógnita	Identificação direta signo-objeto. Ex.: associar a letra 'm' como 'uma maça'.	Valida através de casos particulares. Recorre a um exemplo para justificar a generalização.
Nível II Primeiras relações entre objetos e fenômenos	Abstrações iniciais e relações simples entre os objetos, atribuição de alguns significados. Ex.: correspondência entre a quantidade de dois conjuntos.	O elemento particular que representa o geral. Ex.: Identificar uma quantidade maior para expressar o movimento geral	Identificação operacional Signo/abstrações iniciais. Ex.: Historicamente, o uso da palavra 'aha' para expressar quantidades desconhecidas.	Valida através de premissas e argumentos. Ex.: o uso de tabelas com vários casos particulares
Nível III Regras estabelecidas sobre as relações	Objetivação de significados em conceitos. Relações estabelecidas. E: fórmulas de área ou perímetro.	O elemento genérico (permite as relações particular/geral/ particular).	Identificação conceitual Signo-conceito. Ex.: a palavra ou o símbolo que representa o conceito de perímetro	Valida através de provas conceituais. Ex.: demonstrações de teoremas, usando conceitos e propriedades.
Nível IV Estruturas matemáticas complexas	Relações estabelecidas sobre os conceitos. Em busca de um concreto que é síntese de múltiplas relações. Ex.: funções, área definida em função da dimensão do lado.	O elemento variável. Independe de que as grandezas sejam numéricas, geométricas, matriciais, vetoriais etc.	Identificação sistêmica Signo-sistema de conceitos. Ex.: Símbolos associados à composição de funções	Valida e controla as provas conceituais. Ex.: O próprio método algébrico, a possibilidade de axiomatizações.

O movimento de análise é representado por quadriláteros criados dentro das circunferências. Os lados do quadrilátero são segmentos de retas que ligam o nível de determinada componente ao nível de outra componente como será exemplificado no próximo item.

A Análise de uma Situação de Ensino Usando o Modelo

Para exemplificar, será realizada a análise usando o modelo sobre uma situação da Proposta Curricular do Estado de São Paulo (São Paulo, 2009b), cujo enunciado é o seguinte: Cada figura da sequência de bolinhas a seguir está indicada por um número. Qual seria a fórmula para determinar o número de bolinhas da figura genérica 'n' dessa sequência?

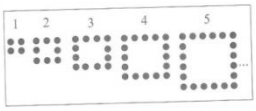


Figura 2

Pela análise do enunciado da situação, identificou-se que é esperado que o estudante relacione o número de pontos com a posição de cada figura e desta forma estabeleça uma relação simples entre os objetos (Conteúdo- Nível II). Espera-se ainda que a generalização seja realizada através de uma figura genérica, que estabelece o movimento entre os casos particulares e um caso geral (El. Mediador - nível III).

O símbolo 'n' representa a relação e expressa uma abstração relacionada a quantidade de pontos de cada figura mas não um conceito (Expressão e Significado- nível II). Não se identificam no enunciado elementos para validação da generalização (Validade - nível I). O quadrilátero formado está representado na figura 3 pela linha sólida.

Este modelo também foi usado para analisar a interação de uma professora com os estudantes. A professora relata dificuldades em fazer com que os estudantes estabeleçam a relação entre a posição da figura e a quantidade de pontos (lei de posição). A relação acontece pela contagem dos pontos ("*todo mundo contou as bolinhas, colocaram o valor e eles perceberam que crescia de 4 em 4")* caracterizado como uma lei de recorrência, presa a contagem dos objetos (Conteúdo – Nível I). A professora recorre a diferentes particulares para alcançar o geral: *"eu precisei fazer mais o que, fazer mais o 6, como seria o 6, o 7, o 8….32…o que vocês estão fazendo, ah multiplicando por 4…"*(El. Mediador – Nível II). *A* professora usa a letra 'n' para expressar a relação (Expressão e significado - nível II) e se atém a comprovar através de casos particulares (Validade - Nível I). O quadrilátero formado está representado na figura 4 pela linha pontilhada.

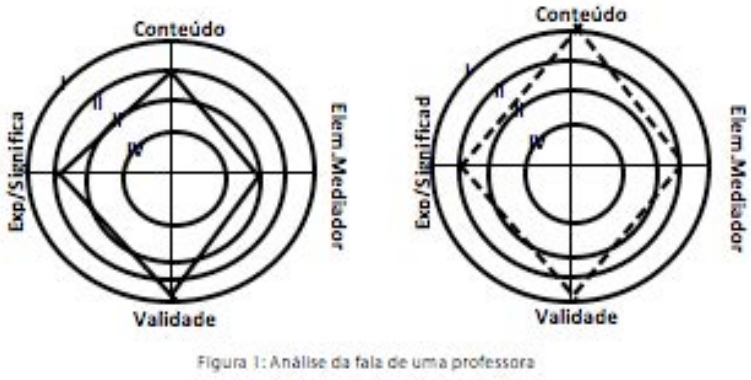


Figura 2: Análise do enunciado de uma situação

Uma comparação das análises realizadas pelo modelo permite que se identifique a 'distância mediadora de aprendizagem', entre o que se pretende pelo enunciado da situação e o que é possível alcançar na interação do professor com os estudantes.

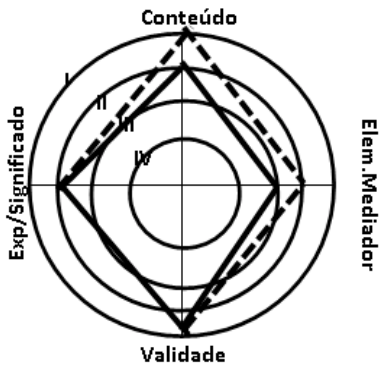


Figura 2. Representação no modelo da 'distância mediadora de aprendizagem'.

Considerações Finais

A partir dos estudos sobre os processos de generalização de Davydov (1982) e Radford (1996,2001) e com base nos fundamentos da teoria histórico-cultural (Vigotski,2001; Leontiev,1983), analisou-se a compreensão sobre generalização matemática nas situações de ensino apresentadas na Proposta Curricular do Estado de São Paulo. A dificuldade em reconhecer os níveis de generalização em diferentes situações de ensino gerou a necessidade de constituição de um modelo de análise da generalização que foi aqui sucintamente apresentado.

Este modelo, que deve ser considerado como constantemente em construção, pretende realizar a análise sobre o processo de generalização algébrica em situações enunciadas de ensino para a faixa etária de 9 a 18 anos e também por meio da interação entre professores e estudantes. Estabelece níveis de generalização algébrica que poderiam ser esperados e alcançados ao longo do processo de ensino nesta faixa etária, mas não pretende indica-los como únicos, não se caracterizando desta forma como uma epistemologia do processo de generalização matemática.

Ainda assim, busca imprimir movimento entre as componentes definidas (conteúdo, formas de expressão e significado; elemento mediador; critérios de validade) e também entre os quatro níveis atribuídos a cada componente. Neste sentido estes níveis não devem ser compreendidos como etapas a serem superadas, mas como diferentes momentos do processo de generalização que podem ser encontrados em diferentes situações de ensino.

Potencialmente espera-se que sobre este modelo de análise da generalização matemática sejam acrescentadas componentes, alterando a mobilidade entre seus níveis, especificando cada vez mais o processo de generalização, permitindo aos professores conscientização de suas próprias ações, e clareza de objetivos em relação à aprendizagem dos estudantes.

Agradecimentos Esta pesquisa contou com auxílio da *Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo* (Fapesp).

Referências bibliográficas

Davýdov, V. V. (1982). *Tipos de generalización en la ensenanza*. Havana: Pueblo y Educacion.

Font, V. (2007). Una perspectiva ontosemiótica sobre cuatro instrumentos de conocimiento que comparten un aire de familia: particular/general, representación, metáfora y contexto. *Educación matemática*, *19*(2). 95-128.

Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *22*, 237-284.

Leontiev, A. N. (1983). *Actividad, conciencia, personalidad*. Havana: Pueblo y Educación.

Radford, L. (1996). Some reflections on teaching algebra through generalization. In Bednarz, N.; Kyeran, C.; Lee, L. *Approaches to Algebra*: Perspectives for research and teaching (pp. 107-111). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Radford, L. (2001). Factual, contextual and symbolic generalizations in algebra. *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 81-88.

Radford, L. (2010). The Anthropological turn in mathematics education and its implication on the meaning of mathematical activity and classroom practice. *Acta Didactica Universitatis Comenianae.Mathematics*, *10*, 103-120.

São Paulo (2008). Secretaria Estadual de Educação. *Proposta Curricular do Estado de São Paulo*: Matemática. São Paulo: SEE.

São Paulo (2009a). Secretaria Estadual de Educação. *Caderno do professor: matemática, ensino fundamental – 6ª. Série*, v.4. São Paulo: SEE.

São Paulo. (2009b). Secretaria Estadual de Educação. *Caderno do professor: matemática, ensino fundamental – 7ª. Série*, v. 2. São Paulo: SEE.

Vigotski, L. S. (2001). *A construção do pensamento e da linguagem*. São Paulo: Martins Fontes.

LA FORMACIÓN DE VALORES DESDE EL CONTENIDO DE LAS ASIGNATURAS MATEMÁTICA 1 Y MATEMÁTICA 2

Niurys Lázaro Alvarez y Ariuska Hernández Sablón
Universidad de las Ciencias Informáticas Cuba
nlazaro@uci.cu, asablon@uci.cu

Resumen. El desarrollo del trabajo educativo para la formación de valores, requiere trabajar desde el contenido de todas las asignaturas y en el desarrollo del proceso docente-educativo, considerando la clase como vía esencial para su materialización. El presente trabajo propone ejemplos de acciones a realizar dentro de la clase de Matemática para fortalecer el trabajo educativo desde el contenido de las asignaturas de Matemática 1 y 2.
Palabras clave: trabajo educativo, valores
Abstract. When it comes about political ideologies to our students, moral values formation requires a careful work from the subjects' content in the teaching-learning process. At this point, the lesson is considered a vital space to carry it out. The current research exemplifies different actions in order to strengthen moral values from the contents of Mathematics 1 and 2.
Key words: moral values formation, values

Introducción

Una de las tareas que se están emprendiendo por el país para enfrentar la formación de valores lo constituye el "Programa director para el reforzamiento de valores fundamentales de la sociedad cubana actual" aprobado por el buró político del Partido Comunista de Cuba.

Los fundamentos que sirven de base para la labor educativa y política ideológica, están claramente expresados y definidos en documentos del Partido y en estrategias educativas propias del Ministro de Educación Superior.

El comandante en jefe planteó "La escuela ocupa el lugar principal dentro del conjunto de influencias que actúan en la formación de niños y jóvenes (...) El corazón del trabajo educativo es la labor de los profesores" (Castro Ruz, 1981, p.18).

Es importante que se eduque al hombre según los valores que respalda el medio donde se desarrolla; con el propósito de lograr un equilibrio en la humanidad. Lo anterior se materializa en las actividades docentes, que dejan una importante huella en la conducta del estudiantado, no solo en el conocimiento adquirido en las asignaturas que reciben, sino también, en su responsabilidad, laboriosidad, patriotismo, honestidad, en la solidaridad, entre otros valores.

Sobre la educación en valores son muchas las investigaciones en Latinoamérica, en Cuba particularmente (Gámez, 2004 y Dopico, 2007) enfatizan en la necesidad de dar un enfoque integral, de acuerdo a las necesidades, aspiraciones y problemas del cubano de hoy y la sociedad a la que se aspira para así mantener las conquistas alcanzadas.

Formar a las nuevas generaciones y lograr personalidades integrales con elevados valores humanos, constituye un propósito de la educación cubana. ..."Educar es sembrar valores, es desarrollar una ética, una actitud ante la vida. Educar es sembrar sentimientos." (Castro, F, 2001).

En particular sobre esta educación desde la Matemática y cómo motivar a los estudiantes por la asignatura, existen numerosas investigaciones, entre ellas (García. Luis y otros, 2006; Escalona y Velázquez, 2012; Rodríguez. M. L, 2012; Sampedro. Reinaldo y otros, 2012), en todas se hacen propuestas para vincular el contenido matemático a las especialidades de Medicina, Economía o Ingeniería y mejorar la situación docente de los estudiantes.

Teniendo en cuenta que la clase debe permitir la formación en los estudiantes, de vivencias positivas en relación con su futura profesión para la cual se preparan, para que las formaciones motivacionales regulen verdaderamente la actividad, por lo que mediante el contenido de la asignatura se crearán las posibilidades de formar cualidades profesionales, entre ellas amor por la profesión.

El presente trabajo tiene por objetivo ejemplificar la posibilidad de realizar trabajo educativo desde el contenido de las asignaturas Matemática 1 y 2 como contribución a la formación de valores.

Desarrollo

Para tener un mejor entendimiento del objetivo del presente trabajo sería bueno establecer conceptos o definiciones, que serán de mucha utilidad durante el desarrollo del mismo.

El *Trabajo Político Ideológico* es la actividad de los grupos, clases, organizaciones e instituciones sociales, encaminada a la profundización de la conciencia política; dirigido a la transformación de las actitudes y conductas de los individuos en aras del logro de objetivos políticos o programas de acciones que responden a los intereses de las clases.

Los valores son determinaciones espirituales que designan la significación positiva de las cosas, hechos, fenómenos, relaciones y sujetos para un individuo, un grupo o clase social o la sociedad en su conjunto.

En la Universidad se parte de la necesidad de fortalecer valores, tales como la solidaridad, el patriotismo, el humanismo, la responsabilidad, el antiimperialismo, la modestia, la honestidad, la creatividad y la consagración al trabajo.

Responsabilidad: La responsabilidad implica hacernos cargo de las consecuencias de nuestras acciones, pudiendo existir una responsabilidad moral, impuesta por nuestra propia conciencia, o jurídica, establecida por las leyes, que nos conectan a la conducta considerada antijurídica que libremente escogimos, para que debamos responder por ella. […] (deConcepto.com)

Solidaridad: Es un principio básico de la existencia del orden social, por el cual cada individuo del grupo, desarrolla sus capacidades y goza de sus derechos, colaborando con los demás integrantes del cuerpo social, para desarrollarse en comunidad y armonía, logrando no solo su plenitud personal sino la de sus semejantes. Se basa en el principio de ayuda mutua y que la unión hace la fuerza de los pueblos y comunidades. […] (deConcepto.com).

Honestidad: la honestidad constituye una cualidad humana que consiste en comportarse y expresarse con sinceridad y coherencia, respetando los valores de la justicia y la verdad. […] (Definicion.de).

Teniendo en cuenta que la clase es la célula fundamental del proceso de enseñanza aprendizaje y considerando la premisa martiana de que "No fructifica la educación si no es continua y constante" (Martí Pérez, 2007, p. 146) es preciso considerar los siguientes elementos:

- El tratamiento de la formación de valores para el desarrollo del Trabajo Político Ideológico, requiere trabajar desde el contenido de todas las asignaturas y en el desarrollo del proceso docente-educativo, considerando la clase como vía esencial para su materialización.
- Empleo de métodos participativos en el proceso de enseñanza aprendizaje como vía para el perfeccionamiento del carácter activo del estudiante como sujeto del aprendizaje y de la formación de sus valores.
- Consolidar el trabajo educativo en el proceso de enseñanza-aprendizaje, logrando la formación de habilidades profesionales y prácticas en los estudiantes.
- Incorporar desde un enfoque profesional los aspectos de naturaleza académica, investigativa y productiva para el desarrollo paulatino de intereses, conocimientos y habilidades profesionales que permitan al estudiante el logro de una actuación independiente en el ejercicio integral de su profesión.
- Centrar la comunicación profesor- alumno en el respeto mutuo, la confianza, la autenticidad en las relaciones que favorezcan la influencia del docente como modelo educativo en la formación de valores en sus estudiantes.

En las asignaturas Matemática 1 y 2 se pueden identificar diferentes temas que brindan esta posibilidad. A continuación se muestran ejemplos en diferentes temas, haciendo uso de la bibliografía básica (Cálculo con Trascendentes Tempranas de James Stewart, 2009) que se utiliza en la Universidad de las Ciencias Informáticas en La Habana, Cuba que cuenta con ejemplos resueltos y ejercicios propuestos que brindan esta posibilidad.

Cálculo Integral

En Matemática 2 al tratar las aplicaciones de la integral definida al cálculo de volumen se utiliza el ejercicio 43 de la Sección 6.2 del libro de texto (LT) Cálculo con Trascendentes Tempranas (CTT) de James Stewart para informar datos sobre el Centro de Soluciones Informáticas Médicas (CESIM) de la Facultad 7, donde los alumnos se vincularán a la producción de software a partir del segundo semestre de tercer año.

43. El barrido para una tomografía axial computarizada (TAC) produce vistas de secciones transversales igualmente espaciadas de un órgano humano, las que suministran información acerca de mismo que, de lo contrario, sólo se obtendrá por cirugía. Suponga que la TAC de un hígado humano muestra secciones transversales con 1.5 cm de separación. El hígado tiene 15 cm de longitud y las áreas de las secciones transversales, en centímetros cuadrados, son 0, 18, 58, 79, 94, 106, 117, 128, 63, 39 y 0. Aplique la regla del punto medio para estimar el volumen del hígado.

Figura. 1. Imagen de ejercicio 43 de la Sección 6.2 del LT CTT.

En este sentido se puede trabajar en el estudiante la responsabilidad, pues debe asumir diferentes compromisos no solo como estudiante sino también con la sociedad; además de instarlo a preparase para ser creativos y comprometidos con el trabajo, ser profesionales íntegros.

A los estudiantes se les explica las líneas de desarrollo de software que sigue el CESIM, cuales son los posibles roles que puede asumir para trabajar en equipo y así poder obtener un producto final con mayor acabado y utilidad.

Geometría del Espacio

Al iniciar la conferencia se muestran diferentes superficies cuádricas que son parte de la vida cotidiana, como es el caso de una planta termonuclear (Figura 2 y 3 a, b y c) interesa la torre del fondo pues es un ejemplo de Hiperboloide de un manto. Aquí se aprovecha para comentar sobre la situación de la planta nuclear en Chernóbil y se explica sobre el escape de aguas radiactivas en la planta Fukushima en Japón, las consecuencias y afectaciones a la humanidad y el medio ambiente. Se ilustran a continuación imágenes de ambas plantas nucleares:

Figura 2. Planta Nuclear de Chernóbil.

Figuras 3 a, b y c. Planta Nuclear Fukushima.

En la Figura 3-a se muestran imágenes que representan Hiperboloides de un Manto, en la Figura 3-c se observan tanques sellados que son muestra de otra superficie cuádrica, en este caso se trata de un Cilindro Circular.

Con estas imágenes no solo se está trabajando el contenido matemático, sino que crea un intercambio de información, conocimientos científicos y sociales, además de aflorar diversos valores en cada uno de los estudiantes. Porque uno de los valores que no puede faltar en un ser humano es la solidaridad y el humanismo hacia el prójimo, estos son los que a lo largo de la historia de la Revolución cubana ha inculcado a cada una de las generaciones. Se ejemplifican diferentes acciones de solidaridad hacia otros pueblos por parte de Cuba, como es el caso de los damnificados por la explosión de Chernóbil, donde miles de pacientes se han atendido en instituciones de salud cubanas.

Otro ejemplo ilustrativo son las antenas Parabólicas.

Figura 4. Imagen de antena parabólica.

Una antena parabólica es utilizada en la comunicación vía internet y la telecomunicación. En este punto se puede intercambiar sobre el uso indebido de este servicio en la universidad, recordándole al estudiante algunas normas disciplinarias del reglamento y compromisos establecidos al firmar el Código de Ética así como comentar las sanciones establecidas al que incurra en estas faltas.

Así mismo en las Clases Prácticas de *Superficies Cuádricas* se puede hacer alusión a lo anterior con ejercicios como: Ejercicios del 21 al 28 L/T Cálculo con Transcendentes Tempranas, Parte3, página 826 donde el estudiante tiene que relacionar las ecuaciones dadas con las gráficas de superficies representadas y para ello se propone un esquema didáctico donde según la cantidad de variables lineales y cuadráticas, así como la presencia de términos independientes o no, en la ecuación; se identifica la superficie que corresponde que pude ser un plano, cilindro, cono, paraboloide, hiperboloide, esfera o elipsoide.

Todo profesional debe tener ética, compromiso y responsabilidad que asume una vez que firma un contrato de trabajo. Estos valores se deben formar desde muy temprano, los cuales pueden iniciar con el simple hecho de hacer los trabajos independientes (extra clases) conscientemente. Al aplicar la experiencia en la clase, los estudiantes se mostraron muy interesados en este tema y realizaron múltiples preguntas, además de buscar y estudiar los reglamentos disciplinarios y código de ética para utilizar los recursos puestos a su disposición de forma racional y correcta.

Regla de la Cadena para el Cálculo de Derivadas de Funciones Compuestas de Varias Variables

Con el ejercicio 38 L/T Cálculo con Transcendentes Tempranas, Parte 3, página 925, se trabaja el tema del ahorro energético, es muy práctico, debido al continuo bajo voltaje que incide en la universidad cada vez que hay una tormenta u otra afectación ya sea ambiental o no. En este punto se les recuerda a los estudiantes no tener ningún equipo eléctrico conectado cuando ocurre un evento como el mencionado anteriormente, pues afectaría su vida útil y en el peor de los casos se puede romper. Una vez más se trabaja la responsabilidad en cada uno de los ejemplos mencionados anteriormente.

38. El voltaje V de un circuito eléctrico sencillo está decreciendo lentamente a medida que se consume la batería. La resistencia R está aumentando lentamente a medida que se calienta el resistor. Utilice la ley de Ohm, $V = IR$, para hallar cómo está cambiando la corriente I en el momento cuando $R = 400\ \Omega$, $I = 0.08$ A, $dV/dt = -0.01$ V/s, y $dR/dt = 0.03\ \Omega$/s.

Figura. 5. Imagen del ejercicio 38 LT CTT, Parte3, página 925.

Se hace referencia además de las medidas de ahorro adoptadas por la Universidad en cuanto al uso de los aires acondicionados, de las Computadoras en laboratorios y docentes, así como de otros equipos eléctricos. Una vez más se trabaja el sentido de pertenencia, la responsabilidad y compromiso en los estudiantes.

Diferenciales

El diferencial de una función ya sea de una variable real o de varias variables, es muy útil en diferentes campos científicos y económicos. Una muestra de ellos es el trabajo de valores aproximados, de variación aproximada o de estimación de errores. El ejemplo siguiente se utilizó para introducir la Conferencia sobre el Diferencial de una función y motivar a los estudiantes por la asignatura y la vinculación a proyectos en el CESIM, antes mencionado, que procesa datos de las imágenes médicas y ayuda a diagnosticar enfermedades.

Ejemplo: Las arterias coronarias irrigan de sangre al corazón, las obstrucciones de estas arterias por placas de colesterol o calcio, son la causa más importante de fallecimiento por problemas del corazón. El tronco coronario izquierdo tiene un diámetro aproximado de 5 mm, aunque varía de una persona a otra. En un estudio realizado a un paciente fumador de 55 años e hipertenso, se midió una sección de interés de dicho tronco (forma cilíndrica), resultando tener un diámetro de 3 mm y una longitud de 1.97 mm. Seis meses después se le repitió el estudio y el diámetro de la misma porción ahora fue de 2.8 mm. Calcule cuánto disminuyó el volumen de sangre que puede contener dicha porción de arteria.

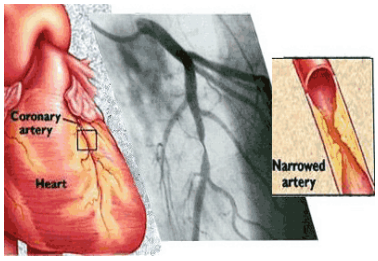


Figura 6. Imagen del corazón y arteria afectada.

Para la solución del ejercicio se introduce el concepto de diferencial y función diferenciable. Se aprovecha para realizar trabajo educativo en cuanto a las consecuencias del hábito de fumar para el corazón y otras en enfermedades y la importancia de no hacerlo en lugares públicos.

En Matemática II al estudiar las *funciones de varias variables*: ejemplo 3 página 913, Cálculo con Transcendentes Tempranas, Parte 3, el cual fue puesto en la Conferencia #10 "Diferenciabilidad de funciones de varias variables. Diferencial Total". Con este ejemplo se trabaja el tema de inicio de la temporada ciclónica en Cuba. Se les pide a los estudiantes mencionar algunas de las medidas preventivas para estas temporadas y se le motivó a participar en el ejercicio Meteoro que se realiza anualmente en esta etapa.

Conclusiones

El reforzamiento de los valores es una tarea difícil y compleja a la cual se enfrenta arduamente la sociedad. En este sentido le corresponde a las instituciones educacionales un papel activo. La asignatura Matemática, al ser básica para el estudio de diversas especialidades en la Educación Superior, tiene mucho que aportar y así lo demuestran disímiles investigaciones de la Matemática Educativa.

El presente trabajo sirve para reflexionar sobre cuanto potencial presenta el contenido de las asignaturas Matemática I y II para contribuir a fortalecer valores en los estudiantes, tarea estratégica del Ministerio de Educación Superior en Cuba.

Referencias bibliográficas

Castro Ruz, F. (1981). *Discurso pronunciado en el acto de graduación del destacamento pedagógico "Manuel Ascunce Doménech"*, p. 18.

Castro Ruz, F. (2001). *Discurso pronunciado en el acto de graduación de los maestros emergentes* el 15 de Marzo 2001.

Cortina, A. (2000). *El mundo de los valores:* ética mínima y educación. Bogotá: El Búho.

DeConcepto.com, (s.f).*Conceptos*. Recuperado el 30 de abril del 2012 de: http://deconceptos.com

Definicion.de, (s.f).*Concepto de Honestidad*. Recuperado el 30 de abril del 2012 de: http://definicion.de/honestidad/.

Dopico, Y. (2007). *La formación de valores: eslabón fundamental en el sistema educacional cubano actual.* En línea: http://www.monografias.com/trabajos52/formacion-valores-cuba/formacion-valores-cuba.shtml.

Escalona, y Velázquez. (2012). Resolución de problemas de optimización sin el uso de límites y derivadas. Interpretaciones médicas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 25* (pp. 365-374). México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Frisancho, S. (2001). *¿Educación en valores o formación moral?: Algo más que sólo una discusión acerca de términos.* Proyecto educación y cultura para la paz. En: OEI. Boletín 24. http://www.campus-oei.org/valores/pecpperu.htm

Gámez, O. (2004). *Los proverbios como alternativa en la formación de valores en las clases de idioma inglés*. Memorias IV Conferencia Internacional sobre Lenguas Extranjeras, Cultura y Comunicación. Holguín, Cuba. En línea: http://homepage.mac.com/jefftennant/wefla/WEFLA%2004/tematicas/T7/T7_T02.pdf.

García, Azcárate y Moreno. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativ*a. Versión impresa ISSN 1665-2436. Relime v.9 n.1 México mar. 2006.

Horruitiner Silva, P. (2009). *La universidad cubana.* El modelo de formación. Editorial Universitaria. ISBN 978-959-16-0676-1.

Martí Pérez, J. (2007). *Escenas Mexicanas*. Revista Universal. México 26 de octubre de 1875. Tomo 6. Extraído de la compilación de Valdés Galarraga, Ramiro. Diccionario del pensamiento Martiano. 4ta Edición, La Habana, Editorial de Ciencias Sociales.

Sampedro, R y otros. (2012). Propuesta de un sistema de tareas para gestionar el conocimiento matemático en las carreras de ingeniería. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, vol. 25*, 405-413. México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Stewart, J. (2009). *Cálculo con trascendentes tempranas*. Partes 1, 2, 3 y 4. La Habana, Cuba, Editorial Félix Varela.

Resolución Ministerial 210 del 2007.

Rodríguez, M. L y otros. (2012). Propuesta de asignaturas en la disciplina Matemática para Ingeniería Química en la Universidad Camagüey Cuba. Flores, R. (Ed.). (2012). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, vol. 25* (pp. 375-383). México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

EL DESARROLLO DE HABILIDADES cognitivas y COGNITIVO-LINGÜÍSTICAS EN LAS PLANIFICACIONES DE GEOMETRÍA TRIDIMENSIONAL DE RESIDENTES DEL PROFESORADO EN MATEMÁTICA

Natalia Landaluce , Natalia Sgreccia y Marta Massa
Universidad Nacional de Rosario Argentina
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas
nslanda@fceia.unr.edu.ar, sgreccia@fceia.unr.edu.ar, mmassa@fceia.unr.edu.ar

Resumen. Este reporte de investigación se centra en el análisis de las habilidades cognitivas y cognitivo-lingüísticas que estudiantes-residentes de un Profesorado en Matemática pretenden desarrollar cuando se planifican clases de geometría tridimensional en escuelas secundarias. Se analizaron sus producciones, buscando evidencias de la integración de conocimientos disciplinares y pedagógico-didácticos que el futuro profesor ha de expresar en su práctica. A partir de un estudio cualitativo-exploratorio, las planificaciones fueron segmentadas en episodios según los distintos momentos que se prevén en las clases. En cada episodio se identificaron las estrategias didácticas específicas y las habilidades cognitivas y cognitivo-lingüísticas asociadas

Palabras clave: planificación, geometría, habilidades cognitivas y cognitivo-lingüísticas

Abstract. This research report focuses on the analysis of cognitive and cognitive-linguistic skills that students of a Training Teacher in Mathematics intend to develop when they plan three-dimensional geometry classes for teaching in secondary schools. Their productions were analyzed, looking for evidence of the integration of disciplinary and pedagogical-didactical knowledge that a future teacher has to express in his or her practice. From a qualitative-exploratory study, each planning was segmented into episodes according to the different moments that are anticipated in the development of the classes. Specific teaching strategies and associated cognitive and cognitive-linguistic skills were identified in each episode

Key words: planning, geometry, cognitive and cognitive-linguistic skills

Introducción

La formación de profesores para la educación secundaria se realiza en Argentina en instituciones de educación superior universitarias y no universitarias. En la Universidad Nacional de Rosario (UNR) la carrera de Profesorado en Matemática (PM) se viene desarrollando desde el año 1988 y se organiza en tres campos de conocimiento:

1. *Campo de Formación Orientada*: brinda la formación matemática específica y de otras disciplinas asociadas.
2. *Campo de Formación Pedagógica*: orientada a la adquisición de conocimientos y habilidades necesarias para la enseñanza.
3. *Campo de Formación Especializada*: organiza la articulación pedagógica-disciplinar para la práctica docente en dos niveles educativos: secundario y superior.

El diseño curricular se completa con un Eje Integrador de contenidos de los tres campos, que inserta la problemática de la enseñanza desde el primer año de la carrera, mediante actividades que estimulen la generación de prácticas originales y la reflexión crítica.

Residencia es una asignatura del Campo de Formación Especializada y se ubica en el último año de la carrera. Se la concibe como un espacio de praxis, de síntesis de teoría y práctica contextualizada, de producción y construcción de conocimientos a través de la reflexión crítica. Se lleva a cabo mediante un trabajo colaborativo, presencial y virtual, entre compañeros y docentes de la asignatura. Es de cursado anual y en la mitad del tiempo se realizan prácticas de enseñanza situadas en aulas de Matemática de escuelas secundarias, orientadas por el profesor del curso como co-formador.

En el año 2012 se inició un estudio acerca de la integración de conocimientos disciplinares y pedagógico-didácticos cuando los residentes del PM de la UNR planifican sus prácticas de enseñanza de geometría tridimensional en escuelas secundarias. Interesó indagar acerca de las representaciones y lenguajes que ellos promueven en sus propuestas didácticas y las habilidades cognitivas y cognitivo-lingüísticas que pretenden desarrollar. El presente reporte se centra en las estrategias didácticas incorporadas en dichas propuestas. El conocimiento producido en esta investigación resulta sustantivo como insumo para la discusión en la asignatura *Residencia*, ya que considera los alcances de los contenidos a enseñar y las condiciones que favorecen su aprendizaje.

Perspectiva Teórica

La planificación, como prefiguración de la realidad, sirve para guiar la práctica con un fundamento teórico de acuerdo con los objetivos establecidos. Son sus características básicas: la *representación* en palabras y esquemas de una clase con los materiales didácticos, su escenario de desarrollo y los movimientos previstos de los alumnos y el docente; la *anticipación* de secuencias para el desarrollo de contenidos y actividades; y el *carácter de prueba o intento* en tanto es organizadora y susceptible de modificación en el curso de la acción (Gvirtz y Palamidessi, 1998).

El docente debe representar la complejidad de los elementos que intervienen en la situación de aula (la cultura, el proyecto educativo, el rol del docente y del alumno) tomando la acción como práctica condicionada por restricciones emergentes. También ha de articular formas de enseñar, medios y contenidos de modo que el nuevo conocimiento se relacione y se diferencie de los conocidos, estableciendo una red de significados aplicables a nuevas situaciones de manera comprensiva y creativa (Sanjurjo, 2005).

Aebli (2002) establece formas básicas de enseñar a fin de propiciar condiciones favorables para el aprendizaje:

- *Educar por cinco medios*. Comprende: narrar y referir (para "revivir" contenidos y significados); mostrar (como saber enactivo); contemplar y observar (como organización de esquemas de asimilación); leer con los alumnos (para orientar la comprensión del lenguaje y de formas comunicativas propias de la disciplina que se enseña); escribir y redactar textos (orientado a la producción propia de significados construidos).
- *Acción, operación y concepto*. Compuesta por: elaborar un curso de acción (representación de distintas acciones en vista a una meta definida); construir una operación (posibilidad de codificación simbólica de un proceso de acción); formar un concepto (atribución de significado en el contexto de una red con estructura interna).
- *Cuatro funciones en el proceso de aprendizaje*. Abarca: construcción solucionadora de problemas (planificar acciones y estrategias en función de la meta); elaborar (consideración de variantes de procedimientos); ejercitar y repetir (en vías a la fijación) y aplicar (transferencia de un conocimiento a situaciones nuevas).

En el caso particular de la enseñanza de la geometría tridimensional, Gutiérrez (1998) destaca la importancia de considerar estrategias de vinculación 2d-3d.

Entre los procesos básicos que se prevén realizarán los alumnos están aquellos orientados al desarrollo de habilidades cognitivas y cognitivo-lingüísticas (Jorba, Gómez y Prat, 1998) necesarias para el aprendizaje. En particular, Höffer (1981) considera habilidades geométricas, entre las que destaca las "de comunicación" relacionadas con la capacidad del alumno para leer, interpretar y explicar información, usando vocabulario y símbolos matemáticos.

Las habilidades cognitivas requeridas en el aprendizaje de la Geometría son:

Identificar: Distinguir el objeto de estudio matemático sobre la base de sus rasgos esenciales, excluyendo lo accesorio en vías a la clasificación.

Comparar: Establecer una relación entre dos entes matemáticos de un mismo conjunto o clase. (Por ejemplo, cuando se establecen posiciones relativas entre dos objetos).

Clasificar: Agrupar de acuerdo a criterios establecidos por semejanzas y diferencias.

Codificar: Expresar el mismo objeto a través de formas y signos diferentes.

Analizar: Establecer características, propiedades y funciones de las componentes de un objeto matemático, así como las relaciones entre ellas.

Inferir: Formular una consecuencia a partir de enunciados o registros previos.

Interpretar: Atribuir significado a las expresiones y representaciones matemáticas de modo que éstas adquieran sentido en función del propio objeto matemático.

Algoritmizar: Plantear una sucesión de operaciones matemáticas como un procedimiento, con secuencia lógica-metodológica, conducente a la solución de un problema.

Calcular: Operar con uso de tablas, calculadoras y/o computadoras sobre un algoritmo.

Modelizar: Asociar a un objeto no matemático un objeto matemático que represente determinadas características, comportamientos o relaciones.

Visualizar: Dibujar un diagrama que exprese la manipulación mental de imágenes geométricas. Requiere de la captación de representaciones externas para leer y comprender gráficos y diagramas, y de la construcción de imágenes mentales para transformar conceptos, relaciones e imágenes en otra clase de información (Gorgorió y Jones, 1996).

Conjeturar: Elaborar una anticipación basada en indicios y observaciones.

Deducir: Producir una conclusión lógica a partir de premisas generales enunciadas.

Verificar: Comprobar o examinar la validez de una proposición geométrica.

Transferir: Extender o trasladar el significado de un contexto a otro.

Estas habilidades cognitivas se concretan en las habilidades cognitivo-lingüísticas que se usan de diferente manera y originan distintas formas de aprender, tales como:

Describir: Producir enunciados que enumeren cualidades, propiedades, características del objeto o fenómeno que se describe. Implica: observar, comparar, encontrar las semejanzas y diferencias, identificar lo esencial y producir un texto oral o escrito.

Graficar e interpretar gráficos: Comunicar información de manera visual y sucinta de registros figurativos, objetos representados, objetos ideales.

Definir: Enunciar las características necesarias y suficientes del objeto de estudio.

Ejemplificar/contra-ejemplificar: Dar un caso particular relativo a un ente matemático.

Sintetizar: Extraer la información esencial y organizarla de un modo personal.

Demostrar: Establecer una sucesión finita de pasos a través de un razonamiento lógico para fundamentar la veracidad de una proposición o refutarla.

Explicar: Presentar razones de manera ordenada que den sentido para comprender y modificar un estado de conocimiento.

Justificar: Producir razones, establecer relaciones entre ellas que lleven a examinar su aceptabilidad y valorar la resistencia a las objeciones.

Argumentar: Integrar la habilidad de explicar con la de justificar y trabajar con contra-ejemplos para sostener o refutar las objeciones del sujeto receptor.

Enfoque Metodológico

La investigación se realizó con un enfoque cualitativo y alcance exploratorio (Hernández Sampieri, Fernández Collado y Baptista Lucio, 2003). El trabajo de campo se efectuó en la asignatura *Residencia* del PM de la UNR en el año 2012.Se analizaron las planificaciones vinculadas con la geometría tridimensional elaboradas por tres residentes para sus prácticas de aula en las escuelas secundarias, desde tres dimensiones: *contexto*, *disciplina* y *didáctica*, comprendiendo cada una de ellas las categorías según se muestra en la Fig.1. Este reporte se centra en la categoría *estrategias* de la dimensión *didáctica*.

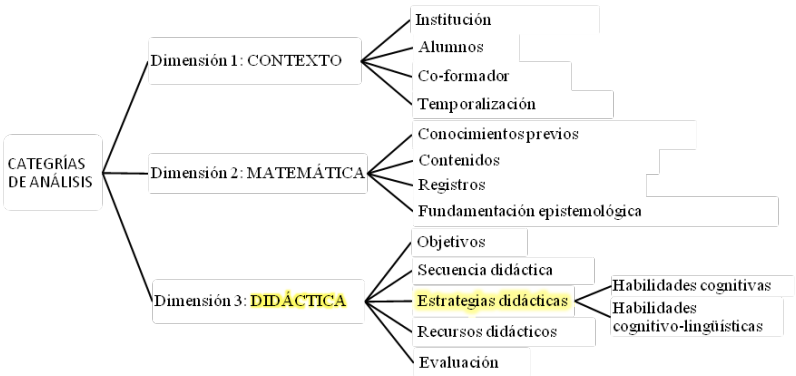


Figura 1. Categorías de análisis empleadas en la investigación.

Las planificaciones se segmentaron en episodios según los distintos momentos previstos en el desarrollo de las clases. En cada episodio se reconocieron y analizaron las estrategias específicas para la enseñanza de la geometría 3d y las habilidades cognitivas y cognitivo-lingüísticas involucradas. Se complementó con el procesamiento de las observaciones de las clases realizadas por los docentes de la asignatura *Residencia* y por otros residentes, para ampliar la información entre el pensar (planificar) y el hacer (implementar).

Análisis y Discusión de Resultados

Se presentan en las Tablas 1 a 3 una síntesis de los resultados emergentes del análisis de las tres clases planificadas con mayor detalle. En las mismas se consignan las formas básicas de enseñar utilizadas como estrategias en cada episodio y las habilidades cognitivas y cognitivo-lingüísticas asociadas. Se destacan en color las explicitadas por el residente. Las restantes son aquellas posibles de desarrollar a partir de actividades que se proponen. Algunas de ellas se registraron en las

observaciones de clases. A medida que se avanza hacia las últimas clases, se observa que los residentes destinan mayor espacio a actividades de fijación aunque las planificaciones se reducen a un mero listado de ejercitaciones diversas, sin establecer su vinculación con las habilidades que se pretenden desarrollar.

Como se muestra en la Tabla 1, en la clase relativa a cuerpos redondos y de revolución fue posible reconocer siete episodios, que van desde la generación de motivación al vincular el contenido con la cotidianeidad y contexto educativo de los alumnos, hasta situaciones de aplicación de lo desarrollado en la clase con puestas en común en el grupo-clase. Se identificaron ocho formas básicas de enseñar (Aebli, 2002), entre las cuales predominó "formar un concepto" en los episodios intermedios de la clase. En relación con las habilidades se observa que el residente otorga explícitamente importancia al trabajo centrado en la definición y la graficación para la construcción de conceptos, sin prestar atención que la estrategia le ofrece interesantes instancias para potenciar la visualización, el análisis y la producción de inferencias, entre otras habilidades.

Episodio	Estrategias	Habilidades	
		Cognitivas	Cognitivo-lingüísticas
1. Motivación según el horizonte matemático previsto	mostrar, observar y contextualizar	identificar, analizar, comparar e inferir para potenciar la abstracción	Describir
2. Actualización de contenidos previos	recordar para institucionalizar	comparar y clasificar	sintetizar y ejemplificar
3. Definición de entes geométricos	formar un concepto	visualizar, identificar, analizar, comparar e inferir	definir, ejemplificar y graficar
4. Manipulación hacia la clasificación	narrar y referir	enunciar criterios	Graficar
5. Clasificación	formar un concepto	Clasificar	
6. Aplicación	aplicar e integrar con nociones previas	interpretar, visualizar, identificar, analizar, inferir y relacionar 2d-3d	Graficar
7. Evaluación	evaluar		Narrar

Tabla 1. Habilidades identificadas en la clase: "Cuerpos Redondos y Cuerpos de Revolución".

La Tabla 2 (asociada a la clase "Clasificación de Cuerpos Redondos") muestra que nuevamente el residente centra su planificación básicamente en la formación de conceptos, priorizando el trabajo sobre la definición y la graficación. En la formación de conceptos se omite explicitar un trabajo para el desarrollo de habilidades cognitivas básicas para el aprendizaje geométrico, tales como: modelizar, visualizar, identificar, analizar, comparar, inferir semejanzas y diferencias, dando

evidencias de una escasa integración de contenidos de los campos de la Formación Pedagógica y Especializada.

Episodio	Estrategias	Habilidades	
		Cognitivas	Cognitivo-lingüísticas
1. Actualización de contenidos previos	"recuperar" conceptos previos		
2. Manipulación hacia a la definición de cuerpos	mostrar, contemplar y observar, narrar y referir	clasificar (con omisión de criterios) e inferir	describir
3. Definición de cilindro. Elementos. Institucionalización.	formar un concepto sin recurrir a conceptos previos	identificar, inferir y modelizar	definir,graficar
3'. Transferencia de características del cilindro recto al oblicuo	elaborar y aplicar	transferir (del cono recto al oblicuo)	graficar e interpretar gráficos
4. Definición de cono. Elementos. Institucionalización.	formar un concepto y aplicar	identificar, modelizar, transferir (del cilindro al cono) e inferir	definir, graficar e interpretar gráficos
5. Definición de esfera. Elementos. Institucionalización.	formar un concepto	identificar y modelizar	definir, graficar e interpretar gráficos
6. Construcción de un cilindro en vías a deducir área lateral y total.	contemplar y observar	comparar, identificar, inferir, visualizar y modelizar	
7. Deducción del área lateral y total del cilindro.	"recuperar" conceptos previos y formar un concepto	analizar, visualizar, comparar, clasificar y codificar	describir, graficar e interpretar gráficos y definir
8. Aplicación. Identificación desarrollo plano ↔ cuerpo redondo	elaborar		justificar

Tabla 2. Habilidades identificadas en la clase: "Clasificación de Cuerpos Redondos".

Las estrategias didácticas que propone el residente y las factibles de desarrollar se presentan en la Tabla 3 (correspondiente a la clase en que se aborda el área de cuerpos redondos). A semejanza de lo señalado en relación con las tablas anteriores, se destaca que el residente centra su planificación en el reconocimiento de características de los cuerpos en vías a la comprensión de las definiciones y el cálculo de áreas. No se incentiva el desarrollo de habilidades de comunicación, tales como: ejemplificar y justificar. La inclusión de procesos de transferencia 2d → 3d es escasa.

Episodio	Estrategias	Habilidades	
		Cognitivas	Cognitivo-lingüísticas
1. Actualización de contenidos previos	"recuperar" conceptos previos	comparar, clasificar, identificar y analizar	sintetizar, graficar e interpretar gráficos
2. Manipulación hacia el cálculo del área lateral y total del cono	mostrar, narrar y referir, observar y (des)armar	relacionar, inferir y visualizar	ejemplificar por analogía

3. Inferencia del área lateral y total del cono. Institucionalización.	formar un concepto	identificar, calcular, analizar, interpretar y modelizar	describir, graficar y definir
4. Relato de hecho histórico. Definición del área de la esfera. Manipulación hacia el cálculo	narrar y referir, mostrar, contemplar y observar	codificar, calcular, comparar y verificar inferir	contra-argumentar
5. Inferencia del área de la esfera a partir de la del cilindro.	formar un concepto	comparar, identificar, visualizar, calcular e inferir	describir, definir, sintetizar y modelizar
6. Aplicación → desarrollo plano del cono	elaborar y aplicar	codificar, visualizar, analizar, identificar, inferir y clasificar	interpretar gráficos
7. Derivación de definición del tronco de cono y su área lateral y total. Institucionalización.	formar un concepto, elaborar y aplicar	codificar, analizar, modelizar, calcular, deducir, inferir y comparar visualizar y identificar	definir por analogía, y graficar
8. Aplicación sobre tablas de datos y situaciones a modelizar: cucuruchos ↔ conos rectos/ pelota ↔esfera	aplicar y elaborar	interpretar, codificar, analizar, visualizar, inferir y calcular	justificar

Tabla 3. Habilidades identificadas en la clase: "Desarrollo plano, área lateral y total de Cuerpos Redondos".

Las planificaciones muestran que se prioriza el desarrollo de los contenidos conceptuales desde un plano enunciativo, con escasa explicitación de las habilidades cognitivas y cognitivo-lingüísticas que se pretenden desarrollar. Estas últimas pudieron ser reconocidas en las observaciones de las clases. El esquema de estrategias utilizadas responden a algunas de las habilidades geométricas, en tanto habilidades cognitivas específicas, consideradas por Höffer (1981): visuales; de razonamiento; de dibujo y construcción; de aplicación. Con excepción de la tercera, las restantes se explicitan en un nivel elemental. Los procesos de razonamiento deductivo planificados son escasos, pese a ser fundamentales para el aprendizaje de la demostración en geometría (Jones, 2002).

Se destaca la ausencia de procesos orientados a la transferencia de contenidos, limitándose a una mera aplicación directa. Si bien se incluye la institucionalización de conceptos se observa que ello se limita a una mera aplicación que no es socializada entre los alumnos ni tampoco se hace un seguimiento de la misma. No se explicita la manera en que se desarrolla y organiza la actualización de conceptos previos.

Comentarios Finales

El estudio realizado da claras evidencias de la importancia que el residente le otorga a la *definición* al pensar los contenidos disciplinares a ser desarrollados en una clase donde se pretende enseñar Geometría 3d en la escuela secundaria. Las estrategias seleccionadas al pensar secuencias

didácticas se centran fundamentalmente en algunas formas básicas de enseñanza vinculadas con la visualización y la interpretación gráfica. Esto denota debilidades formativas de los futuros docentes al no ser capaces de organizar la planificación como espacio de integración de los diferentes campos de formación, es decir, cuáles son las nociones y habilidades importantes asociadas en un cierto dominio de conocimiento (Deng, 2007).

Se atiende al desarrollo de algunas habilidades cognitivas asociadas con contenidos procedimentales pero, en particular, se omite referencias explícitas de procesos de enseñanza asociados a la modelización a pesar de su importante rol en la formación del pensamiento geométrico. Sin embargo, en las observaciones de las clases se registran momentos que dan cuenta que el residente la incluye en su práctica y también al seleccionar las actividades de aplicación.

Los resultados obtenidos muestran la necesidad de re-trabajar en *Residencia* las planificaciones elaboradas por los futuros docentes a través de actividades que permitan la reflexión acerca de las habilidades cognitivas que se requieren en la construcción de nuevas nociones como procesos de pensamiento y sobre aquellas que son base para la comunicación oral y escrita de las ideas matemáticas.

Referencias bibliográficas

Aebli, H. (2002). *Doce formas básicas de enseñar.* Una didáctica basada en la psicología (6ª Ed.). Madrid: Narcea.

Deng, Z. (2007). Transforming the Subject Matter: Examining the Intellectual Roots of Pedagogical Content Knowledge.*Curriculum Inquiry, 37*(3), 279-295.

Gutiérrez, A. (1998). Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial. *Revista Ema. Investigación e Innovación en Educación Matemática*, *3*(3), 193-220.

Gorgorió, N. y Jones, K. (1996). *Elements of the visualisation process within a dynamic geometry environment*. Ponencia presentada en el "Topic Study Group 12 del 8th International Congress on Mathematical Education", Sevilla, Julio.

Gvirtz, S. y Palamidessi, M. (1998). La planificación de la enseñanza. En *El ABC de la tarea docente: Currículum y Enseñanza* (pp. 175-206). Buenos Aires: Aique.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, P. (2003). *Metodología de la investigación* (3ª Ed.). México, DF: Mc Graw Hill.

Höffer, A. (1981). Geometry is more than Proof. *Mathematics Teacher*, *74*(1), 11-18.

Jones, K. (2002). Issues in the Teaching and Learning of Geometry. En L. Haggarty (Ed.). *Aspects of Teaching Secondary Mathematics: perspectives on practice* (pp.121-139). Londres: Routledge Falmer.

Jorba, J., Gómez, I. y Prat, A. (1998). *Hablar y escribir para aprender. Uso de la lengua en situación de enseñanza-aprendizaje desde las áreas curriculares.* Madrid: Síntesis.

Sanjurjo, L. (2005). *La formación práctica de los docentes*. Rosario: Homo Sapiens.

ACERCA DE LA INICIACIÓN DEL ACOMPAÑAMIENTO A PROFESORES EN MATEMÁTICA EN PROCESOS DE GÉNESIS DOCUMENTAL

Natalia Sgreccia y Pablo Carranza
Universidad Nacional de Rosario Argentina
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas
nataliasgreccia@gmail.com, pfcarranza@gmail.com

Resumen. Interesan los procesos de génesis documental en los que un grupo de profesores se están iniciando en el marco de un proyecto de acompañamiento docente que vincula Matemática y Tecnología. La participación es a través de un espacio virtual de trabajo colaborativo, donde intercambian todo aquello que resulte enriquecedor para integrar el software GeoGebra en sus clases. Para iniciar el acompañamiento previsto, resulta necesario tener un panorama de cómo este proyecto se integra con otras actividades de los profesores. Se emplean para ello tres ejes de análisis: comunicación por medios virtuales e informáticos; participación en proyectos y en capacitaciones; demandas

Palabras clave: génesis documental, formación continua, medios virtuales, software

Abstract. We are interested in documentary genesis processes in which a group of teachers are being initiated in the framework of a teaching accompaniment project linking Mathematics and Technology. The participation is through a collaborative virtual space where they exchange all that proves rewarding to integrate GeoGebra software in their classes. To start the provided accompaniment, it is necessary to have an overview of how this project integrates with other activities of teachers. For that, we use three axis of analysis: communication by virtual and computational media; participation in projects and in continuous training; demands.

Key words: documentary genesis, continuous training, virtual media, software

Introducción

En esta investigación interesan los procesos de génesis documental en los que un grupo de profesores se están iniciando en el marco de un proyecto de acompañamiento docente que vincula Matemática y Tecnología (PICT 292/08). El proyecto es de tres años de duración y actualmente nos encontramos en su primer año de ejecución.

En particular, nos abocamos a estudiar las posibilidades que los medios provistos por las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) ofrecen como herramienta didáctica en las aulas de secundaria de Matemática y, también, como herramienta comunicacional entre los profesores en Matemática que hacen uso de ellas en un trabajo colaborativo. En el primer caso (herramienta didáctica) se emplea el software GeoGebra y en el segundo (herramienta comunicacional) los profesores utilizan Facebook, Skype y E-mails para diseñar en conjunto sus propias secuencias didácticas a implementar con sus alumnos de secundario.

Cabe advertir que el trabajo colaborativo entre los profesores se da simultáneamente en equipos de dos tipos: intraescuelas (los docentes de Matemática de una misma escuela) e interescuelas (los docentes de Matemática de distintas escuelas, distantes entre sí, que participan en el proyecto).

Los autores de este reporte, con cinco personas más, son los integrantes del proyecto de investigación y se relacionan con los docentes en su rol de acompañantes de los procesos desplegados.

Es así que se trata de un proyecto que comprende dos sentidos:

- de *investigación*, al analizar las condiciones de emergencia (qué hace que surja como tal, qué cuestiones deben quedar claras entre los involucrados desde el inicio, qué cosas hay que ir cediendo para empezar a funcionar) y sustentatiblidad (cómo propiciar que el modo de trabajo desplegado en el mismo que perdure en el tiempo, acompañados con nosotros como investigadores y, sobre todo, ya sin nuestro acompañamiento) del trabajo en equipo por medios virtuales de profesores en Matemática.
- de *capacitación*, pues atiende a la formación continua de los docentes que participan, al enriquecerse didácticamente cuando analizan sus propuestas de enseñanza, tanto antes (análisis a priori) como después (análisis a posteriori) de implementarlas en aula. De hecho, el proyecto fue declarado de interés educativo por el Ministerio de Educación de la Provincia de Río Negro (Resolución N° 2553/2012).

En este reporte hacemos foco en aspectos relacionados a las condiciones de emergencia del trabajo en equipo por parte de los profesores al interior de las escuelas participantes. Se considera de interés debido a que la participación en equipo a nivel institucional constituye uno de los pilares de la propuesta ofrecida a los profesores.

Encuadre Teórico

La noción de génesis documental grupal (Gueudet y Trouche, 2008) alude a los procesos de materizalización de la participación comunitaria de los profesores y de sus efectos en su desempeño profesional. La comunidad de profesores se piensa en el sentido de comunidades de práctica, como agrupamientos intencionados de profesionales que trabajan juntos en y por un proyecto común, como puede ser la producción de materiales de enseñanza de una disciplina escolar, como es la Matemática.

La comunidad, en la génesis documental, contribuye cuando aporta novedades acerca de recursos para los profesores, propone situaciones de clase innovadoras, analiza las evoluciones de las producciones y las enriquece con elementos nuevos.

La relación que se pretende construir entre los docentes y los acompañantes es justamente de acompañamiento (Beauvais, 2006), donde se concibe a los profesores como profesionales

autónomos, capaces de producir sus recursos didácticos y poseedores de las herramientas necesarias para decidir sobre la viabilidad del trabajo con sus alumnos.

Metodología

El estudio se encuadra en una investigación-acompañamiento, en el sentido anteriormente señalado. Se trata de un proceso orientado al cambio social (Lewin, 1946) que cumple con tres condiciones esenciales (Carr y Kemmis, 1986):

- se plantea como una práctica social, considerada como forma de acción estratégica susceptible de mejoramiento.
- avanza a través de una espiral de bucles o de ciclos de planeamiento, acción, observación y reflexión, de modo crítico e interrelacionado.
- se implica a los responsables de la práctica en todos y cada uno de los momentos de la actividad, graduando la participación en un trabajo colaborativo en proceso.

Los participantes de esta investigación son profesores en Matemática que se desempeñan en escuelas secundarias distantes entre sí de las provincias de Neuquén y Río Negro (Argentina): Centenario, Allen, El Cuy, Los Menucos, Sierra Colorada y Ministro Ramos Mexía. Participan a través de un espacio virtual de trabajo colaborativo (inicialmente Plataforma Moodle, luego otros medios tales como Facebook), donde intercambian todo aquello que resulte enriquecedor con el objetivo de integrar el uso del software GeoGebra en sus clases. Comparten ideas y recursos sobre estrategias para trabajar con sus alumnos y reflexionan sobre posibles maneras de aprovechar las potencialidades de este software para la enseñanza de la Matemática en sus cursos.

Los profesores están acompañados por un grupo de investigadores quienes coordinan las actividades. El grupo de investigadores coordina acciones, facilita el cuestionamiento de los profesores, motiva el debate entre ellos y colabora con aportes que enriquezcan a los docentes. La intención es desarrollar una comunidad en la que el trabajo colaborativo resulte de una riqueza tal que complemente al individual.

La dinámica de trabajo comprende intercambios por medios virtuales (redes sociales o mails) y reuniones (virtuales o presenciales, estas últimas en menor medida) a partir de los cuales los profesores avanzan para concretar un ciclo didáctico, caracterizado de manera general por cinco fases:

- elección de un contenido a desarrollar en sus clases utilizando GeoGebra.
- análisis bibliográfico y de experiencias previas.

- preparación de la actividad a experimentar y su análisis a priori.
- experimentación en las aulas.
- análisis a posteriori de la experimentación.

De esta manera, la investigación se nutre en la acción de cuatro dimensiones:

- *pedagógico-disciplinar*: al colaborar en la elección de las actividades y poner a disposición aportes teóricos.
- *social*: al mediar y moderar la participación de los profesores.
- *organizacional*: al acompañar al grupo en el trabajo y la comunicación, y coordinar el calendario de actividades.
- *tecnológica*: al contribuir en cuestiones ligadas al software.

Las producciones emergentes del grupo de profesores se constituyen en el objeto de investigación. Se recogen datos a partir de lo que se va documentando en los espacios de trabajo y se los interpela mediante la técnica de análisis de contenido (Cabrera Ruiz, 2009).

Resultados

Se previó el trabajo en tres grupos, cada uno de ellos abocado a un eje de contenidos matemáticos e integrado por dos escuelas:

- grupo *Funciones*: integrado por Allen y Ministro Ramos Mexía.
- grupo *Álgebra*: integrado por El Cuy y Sierra Colorada.
- grupo *Geometría*: integrado por Centenario y Los Menucos.

Al momento están funcionando los dos primeros grupos, no habiéndose dado las condiciones de emergencia en el tercero.

El proyecto en el que se inscribe esta investigación tiene dos características esenciales que, en un principio, lo hicieron difícil de concretizar con los profesores:

- que la comunicación se realice por medio de una plataforma.
- que el acompañante no asuma el lugar de profesor.

Sobre la primera característica cabe advertir que un primer hallazgo de la investigación relativo a las condiciones de emergencia del trabajo colaborativo entre profesores en Matemática por medios virtuales, y que surgió a partir de los comentarios recurrentes de los docentes, es que una plataforma como Moodle no resultó apropiada para nuestra experiencia, a pesar de habérsele

hecho algunas adaptaciones consideradas oportunas (tales como simplificar la diversidad y cantidad de información que despliega).

Además de ser extremadamente pesada -lo cual dificulta el trabajo; más aún en varias de las localidades involucradas donde la conexión a Internet no es muy buena-, su estructura es fuertemente vertical (administrador, autorizaciones, términos y evaluaciones), lo cual contradice los principios del proyecto. Al recorrer las escuelas, apareció de manera insistente el "pero" de la plataforma en todas las escuelas y fueron los mismos docentes que propusieron estructuras horizontales tales como Facebook. Fue notorio el cambio en la participación de los profesores al cambiar el medio de comunicación.

En cuanto a la segunda característica señalada (rol del acompañante) es oportuno señalar que muchos son los cursos que los docentes realizan en la Web, pero en su mayoría tienen pautas predeterminadas sobre lo que hay que leer y sobre lo que hay que llevar al aula. De acuerdo con la concepción de acompañamiento aquí señalada (Beauvais, 2006) se considera que los profesores no son profesionales abstractos ni los proyectos se plasman en instituciones genéricas. Ellos están teñidos por las singularidades de la comunidad educativa donde se ejerce el trabajo. De esta manera, este proyecto de trabajo en equipo se intercepta con otros proyectos, hábitos y costumbres de la comunidad educativa donde los profesores se desempeñan. Esta intersección puede facilitar la participación u obstaculizarla, y esto en función de las coincidencias o divergencias que la dinámica de la propuesta tenga con las otras actividades o visiones ya existentes de los docentes.

Es así que emergió como necesario tener un panorama de cómo este proyecto se integra con otros proyectos o actividades de los profesores y ver de qué manera puede convivir dentro del ecosistema actual de las escuelas secundarias participantes. Esta integración se observó mediante tres ejes de análisis:

- *comunicación por medios virtuales* e *informáticos*: los docentes y los acompañantes visitan Facebook periódicamente (al menos una vez a la semana), comparten propuestas de enseñanza de los contenidos de los grupos, socializan artículos de especialistas en didáctica de la Matemática que pueden servir para ilustrar algunas de las ideas que allí surgen, interpretan resoluciones de alumnos con el uso de GeoGebra, acuerdan agendas de trabajo, se ponen de acuerdo para realizar encuentros presenciales entre ellos y/o con los acompañantes.
- *participación en proyectos y en capacitaciones*: algunas de las escuelas habían participado en un proyecto similar anterior en cuanto al trabajo colaborativo con sus colegas de la

escuela pero distinto en relación con el uso de TIC como premisa y en el hecho de involucrar a otra escuela en el trabajo en equipo, en la actualidad algunos de ellos en forma individual están realizando cursos del Programa Conectar Igualdad o especializaciones de TIC en la enseñanza, suelen ser persistentes en las tareas que emprenden, la modalidad a distancia los favorece en cuanto a los traslados (grandes distancias) pero a su vez algunos prefieren trasladarse y destinar días específicos y pautados a una sola actividad (sin dispersión).

- *demandas*: por momentos, y sobre todo al comenzar la implementación del proyecto, los docentes parecen solicitar mayor direccionalidad de nuestra parte, en cuanto a decirles qué hacer, de qué manera y en qué tiempos, debido a que -creemos- es el tipo de interacción al que están acostumbrados en las capacitaciones habituales.

Algunos otros avances que se han ido advirtiendo son:

- la inserción del proyecto en la realidad de cada escuela por medio de proyectos institucionales u otras actividades. Es decir, los profesores propusieron ellos mismos maneras de integración del proyecto a sus actividades pedagógicas. Una de ellas ha sido la creación de proyectos institucionales en el seno de cada escuela que permitan a los profesores trabajar en el nuestro. De esta manera se replica institucionalmente nuestro proyecto en cada una de las escuelas por medio de proyectos institucionales.
- el hecho de trabajar en las TIC les ha cuestionado la epistemología que tenían sobre ciertos objetos matemáticos. Ya estamos entonces en plena formación continua. En efecto, la reflexión colectiva está (de manera germinal aún) haciendo que los profesores enriquezcan sus concepciones sobre los conceptos matemáticos en juego.

Se tiene previsto un encuentro presencial entre el director del equipo de investigación y los docentes de cada escuela a principios de octubre y otro encuentro presencial hacia mediados de noviembre en el que participen todos los grupos y todos los acompañantes, pudiendo compartir "cara a cara" las acciones desplegadas en el año de trabajo y organizar las próximas.

Comentarios Finales

A pesar de algunas dificultades que surgieron al iniciar la implementación del proyecto, en cuanto a sus condiciones de emergencia (acceso a la plataforma Moodle, relación de acompañante no como profesor), hemos podido observar un fuerte interés de parte de profesores y de directivos en particiar en el proyecto de referencia.La dinámica de trabajo colaborativo que se intenta propiciar se caracteriza por el alejamiento de los acompañantes del clásico rol de capacitador detentor de

un saber para dar espacio al protagonismo de los profesores. Esta manera de trabajo parece estar, con el tiempo, teniendo sus frutos. Hemos observado una progresión por parte de los profesores en la apropiación del espacio colaborativo, incluso llegando ellos mismos a proponer y organizar tanto los encuentros como sus temáticas, así como las actividades con sus alumnos.

Si bien la evolución de los grupos es difícil, entre otras razones por la virtualidad de los espacios de comunicación y por la carga horaria laboral de los docentes, observamos que el trabajo colectivo de los profesores es posible y que ellos abordan soluciones específicas al contexto donde se encuentran insertos. Esto puede observarse en, por ejemplo, la organización de encuentros regionales y en la generación de proyectos institucionales, a iniciativa exclusiva de los mismos profesores.

Pareciera entonces que el trabajo en equipo de los profesores en Matemática es posible, incluso en situaciones comunicacionales y geográficas complejas, como ocurre en las localidades del proyecto (en su mayoría aisladas geográficamente, con inclemencias climáticas en invierno y necesidades básicas escasamente cubiertas).

Creemos que un factor positivo para el trabajo colectivo lo constituye el tipo de relación favorecida en el proyecto, donde los profesores se apropian de los espacios de reflexión y de toma de decisiones, dando lugar a sus propios saberes profesionales y del contexto.

Finalmente cabe señalar que estas consideraciones se constituyen en indicadores de interés para continuar este inicio de acompañamiento en el proceso de génesis documental involucrado, hacerlo emerger, y lo que es más importante: que pueda sostenerse en el tiempo, independientemente de nosotros como equipo de investigación.

Referencias bibliográficas

Beauvais, M. (2006). Des postures de l'accompagnateur à la posture de l'accompagnant: projet, autonomie et responsabilité. *7e colloque européen sur l'auto-formation "Faciliter les apprentissages autonomes"*. Auzeville, mayo.

Cabrera Ruiz, I. (2009). El análisis de contenido en la investigación educativa: propuesta de fases y procedimientos para la etapa de evaluación de la información. *Pedagogía Universitaria, 14*(3), 71-93.

Carr, W. y Kemmis, S. (1986). *Teoría crítica de la enseñanza. La investigación-acción en la formación del profesorado*. Barcelona: Martínez Roca.

Gueudet, G. y Trouche, L. (2008). Du travail documentaire des enseignants: genèses, collectifs, communautés. Le cas des mathématiques. *Éducation et didactique, 2*(3), 7-33.

Lewin, K. (1946). Action research and minority problems. *Journal of Social Issues, 2*(4), 34-46.

ESTUDIO DE LAS FUNCIONES CONTINUAS EN LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES

Romina Menares y Elizabeth Montoya
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile
menares.romina@gmail.com, emontoya@ucv.cl

Resumen. El presente escrito forma parte de una investigación que tiene entre sus principales objetivos conocer el trabajo en análisis de profesores, en particular su trabajo en torno a las funciones continuas. En el currículum actual de la secundaria en Chile se evidencia la poca o nula referencia que se hace a las funciones continuas, en materias donde matemáticamente la relación no solo existe, sino que en algunos casos, es lo que le da sentido al contenido. En este trabajo estudiamos particularmente una tarea relacionada con la continuidad, propuesta a estudiantes en la formación inicial y a profesores de en formación continua. Como soporte teórico, nos basamos en la teoría de *Espacio de Trabajo Matemático* de Kuzniak (2011), como una ampliación de la teoría iniciada por Houdement y Kuzniak (1996, 1999, 2006) de *Espacio de Trabajo Geométrico*. La investigación forma parte del proyecto Fondecyt 1110988

Palabras clave: profesores, funciones continuas, análisis matemático

Abstract. This paper forms a part of an investigation that has between his principal objectives to know the work in teachers' analysis, especially his work concerning the continuous functions. In the current curriculum of the secondary one in Chile it is demonstrated small or void reference that is done to the continuous performances, in matters where mathematically the relation not only exists, but in some cases, it is what gives him sense to the content. In this work we study particularly a task related to the continuity proposed students in the initial formation and to teachers of constant education. As theoretical support, we base on the theory of Mathematical Working Space of Kuzniak (2011), as an extension of the theory initiated by Houdement and Kuzniak (1996, 1999, 2006) of Geometric Working Space. The investigation forms a part of the project Fondecyt 1110988.

Key words: teachers, continuous functions, analysis mathematics

Introducción

El presente trabajo se centra en la formación inicial de profesores de matemáticas. Cuando hablamos de *profesor*, lo situamos en dos escenarios que nos resultan interesantes de explorar: al profesor en su formación inicial y el profesor en servicio, para este último, nos hemos centrado en el estudio del trabajo del profesor en formación continua. Esto implica, por un lado, sortear diversos obstáculos presentes en su paso por el aprendizaje de distintas materias y, por otro, las distintas decisiones pedagógicas y didácticas a las que se ve enfrentado en su quehacer como profesor. Consideramos que para realizar un estudio profundo de los aprendizajes en la formación inicial de profesores, es necesario mirar lo que más tarde el profesor realiza en el aula.

En Chile, la carrera que forma profesores de matemáticas es impartida por distintas universidades. Actualmente en el país, se realizan esfuerzos por estandarizar la enseñanza en la formación inicial. Con este fin se han producidos textos, llamados *estándares*, y se aplican cada año evaluaciones a

profesores recientemente egresados. En nuestro trabajo hemos estudiado las mallas y los programas – en la línea del análisis matemático – de seis universidades de Chile, que constituyen importantes centros de formación del profesorado, y hemos observado que existe una gran similitud en los planes y en los programas de estudio para los primeros años de la carrera; todos ellos pasan por el concepto de continuidad en un primer curso, que digamos, es de cálculo diferencial. Además en este nivel estudian los axiomas para los números reales, el concepto de límite de sucesiones y de derivada, para pasar a un segundo curso, donde se trabaja el cálculo integral y las series.

Con el fin de acercarnos al escenario donde el profesor se desempeña como docente, hemos realizado en primer lugar un estudio al currículo del liceo, donde observamos que aparecen temas relacionados con el análisis pero más bien de manera implícita; conceptos como sucesiones, funciones, o inecuaciones, forman parte de los planes de estudio, pero el trabajo en torno a ellos es generalmente algebraico, escondiendo cualquier sentido analítico en el objeto o en su tratamiento, obviando sus fundamentos para conservar solo los métodos.

Hemos notado que, por ejemplo, se trabaja con sucesiones, pero la noción de límite no constituye en el currículo un objeto de estudio. Se estudian además funciones, muchas de las cuales tienen la propiedad de continuidad (como por ejemplo la función lineal, afín, cuadrática e incluso funciones no definidas en todo **R**), pero esta propiedad aparece de manera implícita; no se cuestiona si una función es continua o no, solo se trazan las gráficas, o se manipulan algebraicamente; en el eje de estadística aparecen gráficos de funciones discontinuas, pero tampoco se cuestiona desde esa propiedad. La continuidad no es un objeto de estudio en el liceo, sin embargo, podemos observar que existen conceptos cuyo tratamiento y métodos de resolución encuentran fundamentos en la propiedad de continuidad, tal es el ejemplo de las inecuaciones, donde los tratamientos no aparecen sustentados en el Teorema del Valor Intermedio, en ocasiones donde es este teorema lo que le da fundamento.

El presente trabajo, sustentado en el enfoque *Espacio de Trabajo Matemático* (ETM) de Kuzniak (2011), tiene como objetivo estudiar el trabajo del profesor en el dominio del análisis para una tarea específica propuesta en los dos escenarios antes mencionados: en la formación inicial y en la formación continua. Buscamos conocer y caracterizar los aspectos matemáticos, donde el profesor encuentra los fundamentos de su trabajo, y aquellas adaptaciones y organizaciones didácticas presentes en su quehacer como docente. De este modo, su trabajo y como consecuencia –de la transposición didáctica– el trabajo de sus estudiantes, se fortalece en la medida en que el profesor logra fundamentar desde este dominio el trabajo sobre objetos, que se ven robustecidos al ser mirados y estudiados analíticamente.

El Espacio de Trabajo Matemático

El enfoque teórico que sustenta este trabajo es la teoría *Paradigmas Geométricos y Espacio de Trabajo Geométrico* (ETG), desarrollada inicialmente por Houdement y Kuzniak (1996, 2006). Actualmente profundizamos en aspectos no abordados en dicho enfoque y que se enmarcan en lo que Kuzniak (2011) llama *Espacio de Trabajo Matemático* (ETM), como una generalización del ETG a otros dominios de la matemática. En particular, profundizamos en el dominio del análisis (ETM_{An}).

La noción de *Paradigma Geométrico* está inspirada en la noción de paradigma en el sentido de Kuhn (1962). Un *Espacio de Trabajo Matemático,* se define como un ambiente organizado para permitir el trabajo de las personas que resuelven problemas matemáticos dependiendo del dominio (geométricos, algebraico, etc) (Kuzniak, 2011). Si bien las tareas – en el sentido de Chevallard (1999) – no forman parte del ETM, son las que activan y dan sentido al trabajo en un determinado ambiente desarrollado por un individuo, que puede ser entre otros, un estudiante, un experto matemático o un profesor que organiza la enseñanza.

En el ETM se distinguen dos planos, el epistemológico y cognitivo, y la articulación entre estos mediante un conjunto de génesis (semiótica, instrumental y discursiva) que favorecen su coordinación. El plano epistemológico del ETM, contempla tres componentes: el *representamen*, los artefactos y el referencial. El plano cognitivo contempla las componentes: visualización, construcción y prueba. Tanto las génesis, como las componentes de los planos, deben ser reinterpretadas dependiendo del dominio matemático específico en cuestión. Una primera génesis, inicialmente llamada *génesis figural,* se introduce en el marco del ETG para describir el proceso semiótico asociado con el pensamiento visual que se produce en geometría. Actualmente hablamos de *génesis semiótica*, ampliando el concepto a otros dominios de la matemática, pensando en el objeto y su representación en el sentido de Duval (2005).

Una segunda génesis, la *génesis instrumental* reposa en *artefactos* cuyo uso no es transparente e inmediato; necesita un cierto número de procesos que pueden ser descritos en el enfoque instrumental (Artigue, 2002). Además de los artefactos materiales o softwares, consideramos los artefactos simbólicos (Rabardel, 1995), que pueden ser una serie da algoritmos utilizados para desarrollar una tarea. En la *génesis discursiva* entra en juego el razonamiento, que articula la componente *referencial teórico* (en el plano epistemológico), con la componente *prueba* (del plano cognitivo). La noción de prueba está inspirada en las tipologías de pruebas de Balacheff (1987) y los aportes de Duval (1995) en lo relativo al razonamiento. Estas tres génesis no son independientes, tampoco deben considerarse como una biyección entre dos componentes determinadas, sino más

bien como relaciones que participan en las génesis del ETM global. A continuación se presenta un esquema del ETM (figura 1).

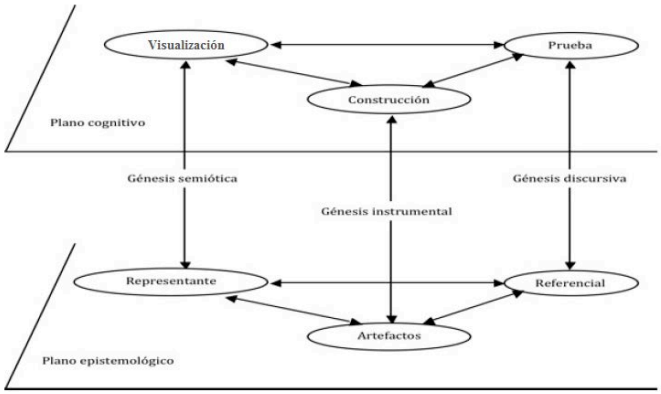


Figura 1. Espacio de Trabajo Matemático y sus Génesis, Kuzniak (2011).

La teoría busca caracterizar, a través de tres tipos, el espacio de trabajo: el ETM *de referencia,* definido de manera ideal en función de criterios matemáticos; el ETM *idóneo*, organizado para permitirle a un alumno comprometerse en la resolución de un problema; y el ETM *personal*, ambiente donde se lleva a cabo el tratamiento del problema por parte de un individuo, que puede ser estudiante o profesor.

En este escrito mostramos parte del estudio al ETM_{An} *idóneo* de un profesor universitario que dicta cursos de cálculo en la formación inicial de profesores. Eventualmente, este ETM_{An} *idóneo* pasa a ser parte del ETM_{An} *de referencia*.

El ETM_{An} Idóneo de un Profesor Universitario

Para nosotros, un objeto central en el dominio del análisis es la noción de continuidad. En el transcurso del desarrollo del análisis, hacia la fundación de la teoría de los números reales, se han tratado constantemente cuestiones acerca del problema del continuo. Bourbaki (1976), señala que mucho antes del nacimiento del cálculo infinitesimal, los griegos admiten como evidente el que una curva, susceptible de ser descrita por un movimiento continuo, no puede pasar de un lado a otro de una recta sin cortarla. Este es uno de los fundamentos del que, mucho más tarde, se conocería como el *Teorema del Valor Intermedio* (TVI).

A continuación, presentaremos una parte del estudio del ETM_{An} *idóneo* de un profesor universitario matemático. El estudio es de carácter cualitativo, sobre lo que el profesor –académico de una universidad chilena– declara ser su trabajo en el aula en la formación inicial de profesores. El académico (PA), tiene más de treinta años de carrera como matemático y profesor en carreras de licenciatura en matemáticas, posgrados en matemáticas, y en la formación de profesores de

secundaria. En la Institución (I1), este profesor imparte clases hace más de ocho años, y ha dictado al menos una vez, todos los cursos relacionados con el análisis matemático.

Para llevar a cabo el estudio, se realizan entrevistas grabadas y se usan medios descriptivos mediante transcripciones, estudio de las mallas y de los programas de cursos vinculados al análisis, que el profesor dicta, y se revisan otros antecedentes, como el plan de trabajo del profesor para los cursos.

La institución I1 tiene contemplado en su malla, en la línea del análisis, tres cursos de cálculo y uno de ecuaciones diferenciales. El primero es un curso –llamado *cálculo 1*– que tiene como uno de sus objetivos que los estudiantes reconozcan y apliquen los axiomas de cuerpo ordenado y completo para los números reales, luego pasa por las nociones de convergencia de sucesiones, cálculo de límites y demostración de propiedades. En este mismo curso estudian las funciones continuas y llegan hasta la representación y aplicación del concepto de derivadas.

En un segundo curso de cálculo, se trabajan teoremas relacionados con la derivada, como el *teorema del valor medio*, también se estudian integrales y convergencia de series. El tercero es un curso de cálculo en varias variables, donde se estudia el cálculo diferencial en R^n, pasando por un estudio más topológico: bolas abiertas, conjuntos abiertos, límites y continuidad; estudian también integrales de línea, integrales múltiples e integrales de superficie.

Las funciones continuas es un objeto de estudio en el primer curso de cálculo, donde se entregan una o más definiciones y se trabajan teoremas relacionados con la continuidad, tal es el caso del *teorema del valor intermedio*. En I1 las funciones continuas aparecen explícita o implícitamente a lo largo de todo el currículo. Según PA, los tres cursos de cálculo son muy importantes de trabajar pues en los tres se tratan funciones, concepto que los profesores egresados deberán trabajar más tarde en su ejercicio como docente.

Además se estudian áreas y volúmenes, que tienen que ver con los temas de enseñanza secundaria. La entrevista consta de tres preguntas fundamentales, de las cuáles nos centraremos solo en una de ellas: la que apunta directamente al trabajo con el Teorema del Valor Intermedio (TVI). La pregunta tiene como objetivo conocer cómo es el trabajo en torno a este teorema; cuáles son las definiciones que se entregan, si se realiza demostraciones y cuáles son, cuáles son los problemas que se proponen relacionados con el TVI.

Lo que se muestra a continuación es un análisis de resultados de la entrevista, bajo la teoría del ETM. Por sus características de descripción del trabajo en clases que realiza PA, hacemos corresponder este estudio al ETM *idóneo* de PA en la institución I1.

Cuando se le pregunta al profesor cómo introduce el TVI, él señala que comienza graficando los puntos que cumplen ciertas condiciones y luego pide a sus estudiantes que digan cómo puede ser la gráfica. El profesor declara realizar luego la demostración completa, para ello utiliza el Axioma del Supremo.

Al analizar esta primera parte de la entrevista, podemos decir que el profesor parte activando la *génesis semiótica*, destacándose la componente *visualización.* Luego, el trabajo matemático cambia, resaltando el componente referencial teórico, y es lo que provoca además el trabajo deductivo, poniendo énfasis en la *génesis discursiva.* Cabe destacar que fue el profesor quien cambia de manera intencionada y abrupta el trabajo matemático, pasando de una *génesis semiótica* a una *génesis discursiva*. Si bien, hay un cambio de registro, no es esta conversión la que moviliza las génesis.

Analizaremos ahora una de las actividades que el profesor propone a sus estudiantes y que nos parece atractiva, pues no es posible de resolver solo con manipulaciones algebraicas: *«Demostrar que la ecuación* $sen(x) = 1 - x$*, tiene solución* $x_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ *».* El profesor comienza graficando ambas curvas intentando dar una aproximación gráfica al problema. Hasta acá solo se ha representado la situación y hay un acercamiento a la *génesis semiótica*, como se muestra en la figura 2:

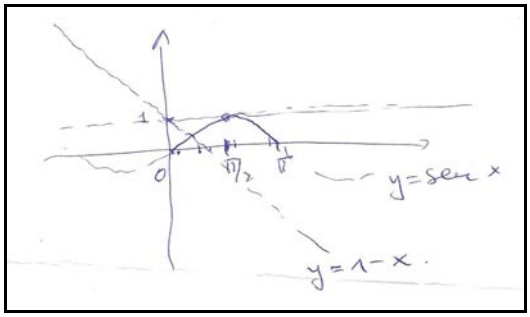


Figura 2. Gráfica del desarrollo de una tarea propuesta por el profesor universitario.

Luego, el profesor toma una función auxiliar: $F(x) = sen(x) - 1 + x$, y utiliza el TVI para concluir que existe $x_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tal que $F(x_0) = 0$, y que por lo tanto, se obtiene lo deseado.

La función auxiliar aparece en el trabajo matemático como parte del *referencial teórico*. Esta componente aparece más reforzada en la medida en que se decida tomar la función auxiliar para que la tesis del TVI aparezca, como un mediador que activa la presencia de la *génesis discursiva*, hacia un razonamiento y la componente *prueba*. Cabe señalar que antes de plantear la actividad a sus estudiantes, el profesor resuelve, a modo de ejemplo, otro problema donde toma una función

auxiliar. Esto podría llevar a que el problema planteado se resuelva más bien como una técnica en lugar de ser motivados por la gráfica o por la activación de la *génesis discursiva*.

El profesor declara que « los estudiantes toman esta función auxiliar luego de tener experiencia en desarrollar este tipo de problemas ». Lo que concluimos de este ejemplo es que se está privilegiando una técnica de resolución; si bien es cierto, se activa el TVI dentro de la componente *referencial teórico*, no se potencia el trabajo discursivo o semiótico, que será preponderante en el tipo de trabajo que el profesor en formación realice más tarde como docente en el liceo, para nociones que necesitan enriquecerse con un trabajo analítico.

El ETM_{An} Personal de un Profesor de Secundaria

A continuación presentamos el análisis de un cuestionario realizado a profesores de secundaria, que cursan educación continua. El cuestionario se basa en una pregunta en torno al TVI. Se les pide resolver, entre otros problemas, el estudiado en el *ETM_{An} idóneo* del profesor universitario, descrito en el apartado anterior: *«Demostrar que la ecuación* $sen(x) = 1 - x$, *tiene solución* $x_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ ». Se aplicó el cuestionario a un total de veinte profesores, y solo uno de ellos resuelve el problema utilizando la función auxiliar $F(x) = sen(x) - 1 + x$. El resto de los profesores busca resolver el problema de manera gráfica, como el ejemplo de una de las producciones, que se muestra en la figura 3:

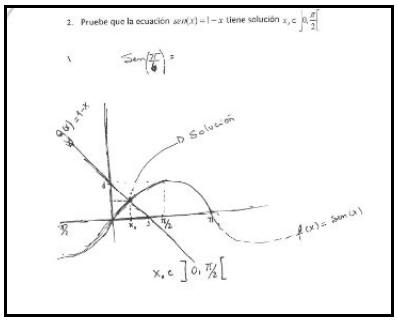


Figura 3: desarrollo de una tarea propuesta a un profesor de formación continua.

Para este trabajo, podemos decir, que está completamente potenciada la *génesis semiótica*, destacándose la componente *visualización*. La génesis discursiva aparece solo de manera implícita, por lo que decimos que las componentes referencial teórico y prueba, aparecen debilitados en este espacio de trabajo; lo que se concluye es a través de lo que se observa en la gráfica.

Además, podemos decir que el *ETM_{An} idóneo* de PA, está muy alejado del *ETM_{An} personal* del profesor de secundaria, pues este último, salvo un caso, no utiliza como *artefacto* la función auxiliar, y no potencia el trabajo en la *génesis discursiva*.

Conclusiones y Proyecciones

El principal objetivo de este escrito era mostrar evidencias del trabajo matemático idóneo en la formación inicial, y el trabajo matemático personal de profesores en educación continua, cuando los contenidos involucrados están en el dominio del análisis, particularmente, están basados en las funciones continuas. Identificamos cómo coordinan las génesis del ETM un formador de futuros profesores y un profesor de secundaria en formación continua, en su propio trabajo matemático. En el caso del profesor universitario, observamos que si bien es cierto, existe una activación principalmente de dos génesis (*semiótica y discursiva*), estas se muestran desconectadas o poco coordinadas. No es natural en su trabajo el paso de una génesis a otra, sino más bien, aparece como un ejercicio forzado. El profesor privilegia la génesis discursiva en su ETM *idóneo*, haciendo presente de manera explícita el TVI, como elemento del componente referencial teórico. Esto puede deberse en gran medida en que el profesor desconoce cómo realizar transposiciones didácticas adecuadas, que fortalezcan el trabajo en el análisis de sus estudiantes, generando elementos que aparecen en el trabajo como técnicas de resolución.

En el ETM personal de profesores en educación continua, evidenciamos precisamente una situación inversa a la anterior; los profesores privilegian la *génesis semiótica*, dejando debilitada la *génesis discursiva*. El TVI no aparece en su trabajo matemático, pues no es permitido por el tipo de trabajo generado, centrado en lo semiótico y no en lo discursivo.

A modo de proyección, trabajamos para proponer los paradigmas involucrados en el dominio del análisis, y así aportar a la especificación del marco del ETM en este dominio en particular, lo cual nos permitirá contribuir principalmente en la formación de profesores y en la forma de organizar la enseñanza.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a Reflection about instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7(3), 245-274.*

Balacheff N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational studies in mathematics*, *18* (2), 147-176.

Bourbaki, N. (1976). *Elementos de historia de las matemáticas.* Editorial Alianza Universidad. Traducción de Hernández. Madrid, España.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique dudidactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221–266.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Éditions Peter Lang, coll. Exploration, Recherches en sciences de l'éducation. Berne, Suisse.

Duval R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et Sciences Cognitives, 10,* 5-53. IREM de Strasbourg.

Houdement C., Kuzniak A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. *11*, 175-193. IREM de Strasbourg.

Houdement C., Kuzniak A. (1999). Géométrie et paradigmes géométriques. *Petit x*. *51,* 5-21. IREM de Grenoble.

Houdement, C. Kuzniak A. (1996). Autours des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématique*, *16*(3), 289-321.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives. 16,* 9-24.

Rabardel, P. (1995). *Les Hommes et les Technologies. Une approche cognitive des instruments contemporains*. Paris, Éd. Armand Colin.

ANÁLISIS DE PROCESOS COGNITIVOS EN GEOMETRÍA CON ESTUDIANTES DE PROFESORADO

Marco Antonio Rosales Riady
Universidad de Los Lagos. Universidade del Bío-Bío Chile
mrosales@ubiobio.cl

Resumen. Este reporte tiene como objetivo, presentar un análisis de la aplicación de dos reactivos que caracterizan procesos cognitivos de visualización propuestos por Duval (1998) y que intervienen en la resolución de problemas de geometría en estudiantes de primer año de Pedagogía en Educación Básica. Los resultados indican que la mayoría de los estudiantes logran articular parcialmente los distintos tipos de aprehensiones: perceptiva, discursiva y operativa. Al enfrentar las tareas encomendas privilegian la aprehensión perceptiva, pero se les complejiza el proceso cuando les toca asociar la configuración figural con alguna propiedad o concepto
Palabras clave: formación de profesores, pensamiento geométrico.
Abstract. This report aims to present an analysis of the application of two reagents that characterize cognitive visualization process proposed by Duval (1998) and involved in the resolution of problems of geometry in freshmen of pedagogy in basic education. The results indicate that the majority of the students manage to partially articulate different types of apprehensions: perceptual, discursive and operational. Faced with tasks orders privilege the perceptual apprehension, but the process complicates them when you touch them to associate the figural configuration with some property or concept
Key words: training of teachers, geometric thinking

Introducción

En el trabajo de Torregrosa y Quezada (2007) sobre la caracterización de los procesos cognitivos en geometría, se destaca la diferenciación entre ver y visualizar, ya que la primera acción es de carácter fisiológico, y la segunda de connotación cognitiva. Mencionan a investigadores como Arcavi, Zazkis, Hershkowitz, entre otros, quienes indican que visualizar es un proceso cognitivo complejo y que "está fuertemente relacionada con el razonamiento que se pueda tener al momento de interpretar una figura, de igual forma se relaciona con la representación que se pueda hacer de lo que se observa e interpreta." (Castellanos, 2010). Para Duval (Castellanos, op. cit.) las representaciones es la única forma de tener acceso a los objetos matemáticos, y actúan como medio de comunicación entre el profesor, el estudiante y el saber. Además, se distingue un objeto de su representación solo cuando hay comprensión. Por otro lado, Duval (Castellanos, op. cit.), afirma que las representaciones mentales son el resultado de la interiorización de las representaciones externas, generándose así, los llamados procesos cognitivos, los cuales manipulan las representaciones. En este contexto, existe una estrecha relación entre visualización y razonamiento, de esta manera, al hacer buen uso del razonamiento los estudiantes podrán comunicarse y expresar más fácilmente lo que encuentren al enfrentar un problema planteado.

Marco Teórico Conceptual

Duval establece la existencia de tres tipos de aprehensiones asociadas a la visualización. La *aprehensión perceptiva* se refiere a la identificación simple de una configuración, es un proceso básicamente intuitivo. La *aprehensión discursiva* es la actividad cognitiva que produce una asociación de la configuración con afirmaciones matemáticas, tales como definiciones, teoremas, axiomas, entre otras. Esta asociación es bidireccional, pudiendo ir de lo visual a lo discursivo, y viceversa. La *aprehensión operativa* consiste en la modificación de la configuración inicial para resolver un problema geométrico. Ésta puede ser un cambio figural en la que se le añaden o quitan elementos a la configuración original, generándose nuevas subconfiguraciones. También, la aprehensión operativa puede ser de reconfiguración en la cual hay una manipulación como piezas de un puzle. En el análisis de las producciones de los estudiantes se toman en consideración estos tres tipos de aprehensiones y sus interacciones.

Diseño Metodológico

Respecto a los Objetivos

Se implementaron dos actividades geométricas, reactivos, que se les aplicaron a un grupo de estudiantes de Pedagogía en Educación Básica con Especialidad en Educación Matemática de la Universidad del Bío-Bío, con el objeto de explorar las operaciones cognitivas de aprehensión vinculadas a la visualización en el modelo teórico de Duval, con particular atención a las construcciones geométricas en el plano. Particularmente, se esperaba que los estudiantes movilizaran conocimientos disciplinares en torno a, por una parte, propiedades de los triángulos y sus elementos primarios y secundarios, por otra, propiedades que vinculan al triángulo y la circunferencia. Así también, que manifestaran habilidades para: a) dibujar con instrumentos, tales como la regla y el compás; b) comunicar por escrito el procedimiento de construcción geométrica; c) visualizar conceptos y propiedades geométricas.

Respecto a la Muestra

La muestra fue intencionada, ya que para esta actividad se consideró solo a los estudiantes que cursan la asignatura de "Geometría: Generalidades, Triángulos y Cuadriláteros". Esta asignatura se imparte el segundo semestre del primer año de formación, siendo la primera del eje de geometría. El curso está compuesto de 44 estudiantes, de los cuales participaron 30 estudiantes quedando excluidos los ausentes.

Respecto a las Condiciones de Aplicación

La aplicación de estas actividades se realizó el día y hora en que se imparte la asignatura, correspondiendo a un día martes de 09:40 a 11:00, con una duración de 70 minutos, más 10 minutos donde se organizó la actividad, en que se les informó el objetivo da la actividad, que no tendrían ayuda de parte del profesor, y que podían trabajar en parejas formadas espontáneamente. Por último, se les entregó la guía de trabajo con las correspondientes instrucciones, y con los aprendizajes esperados a alcanzar.

Respecto al Diseño de los Reactivos

El diseño de los reactivos consideró que las actividades geométricas propuestas fueran abordables por parte de los estudiantes, acorde al estado de avance de la asignatura, y que se pudiera utilizar la regla y compás para la construcción de configuraciones figurales, sin usar tecnologías.

Se hizo un análisis preliminar de cada reactivo, tanto para la construcción, como para establecer el protocolo de construcción. A continuación, se presenta una síntesis del análisis preliminar.

El primer reactivo señala:

Considere tres segmentos de recta. ¿Bajo qué condiciones se puede construir un triángulo con los segmentos dados? Al establecer tales condiciones, construya un triángulo dados sus tres lados utilizando sólo regla y compás. Establezca el protocolo de construcción.

Para ser abordada esta actividad, los estudiantes deben hacer un análisis previo en cuanto a las magnitudes de los segmentos a considerar en la construcción, dejando de manifiesto una aprehensión discursiva. De todos los casos posibles, deben llegar a que para que existencia un triángulo, *la suma de las medidas de dos lados cualesquiera debe ser mayor a la medida del tercer lado.*

Las configuraciones que les proporcionan dicha propiedad son las siguientes:

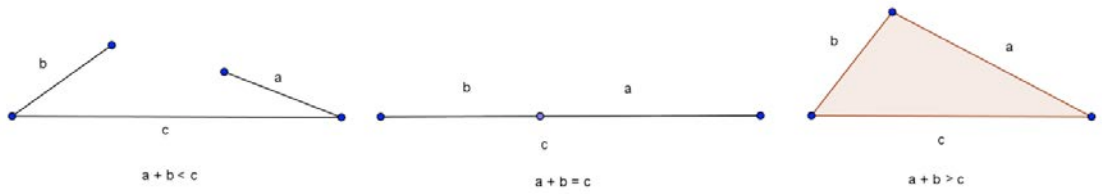


Figura 1

Claramente se deja en evidencia el cambio de anclaje, de lo figural a lo discursivo, en cada uno de los tres casos. Posteriormente a este análisis, los estudiantes se deben dar tres segmentos que satisfagan la condición, pudiendo ser todos congruentes, o bien, dos congruentes, o ninguno de ellos congruentes, dando origen a la clasificación de los triángulos según sus lados. Como requisito

básico para la construcción del triángulo requerido, deben saber trasladar un segmento, usando el compás y la regla. La configuración para un triángulo escaleno sería la siguiente:

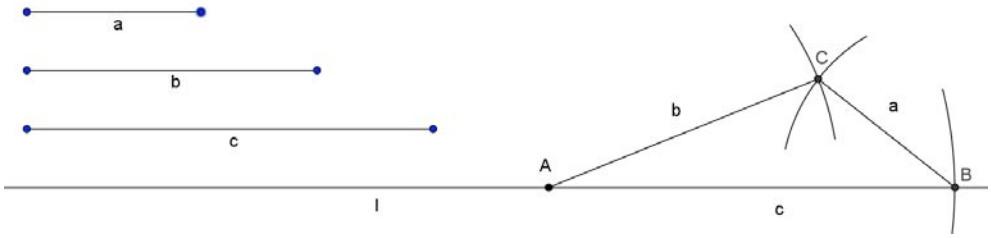


Figura 2

El protocolo de construcción sería:

1. Sobre una recta l se elige un punto A.
2. Con el compás, haciendo centro en A y abertura la longitud c, se determina el punto B en l.
3. Con el compás, haciendo centro en A y abertura la longitud b, se dibuja un arco arriba de segmento AB
4. Con el compás, haciendo centro en B y abertura la longitud a, se dibuja un arco arriba de segmento AB que intersecte al anterior, determinando el punto C.
5. Con la regla se une el punto C con los puntos A y B, concluyendo la construcción.

Los estudiantes al comunicar por escrito este protocolo de construcción, dejan de manifiesto operaciones cognitivas de aprehensión. En particular, la aprehensión operativa, con anclaje de lo visual a lo discursivo, ya que redactan, en su mayoría, después de haber realizado la construcción. Más aún, depuran el mensaje de la secuencia, estableciendo los rótulos correspondientes, puntos y magnitudes, evidenciando luego un cambio de anclaje de lo discursivo a lo visual. También se presentan elementos auxiliares en la construcción como son los arcos que se utilizan para determinar los puntos que originan el triángulo requerido. El movimiento de la imagen mental de los tres segmentos, queda así representado por la configuración solicitada, el triángulo, desde el enunciado de esta actividad.

El segundo reactivo señala:

"El punto de intersección de las tres bisectrices interiores de un triángulo es el centro de la circunferencia inscrita". Represente la afirmación.

La configuración asociada a esta actividad es:

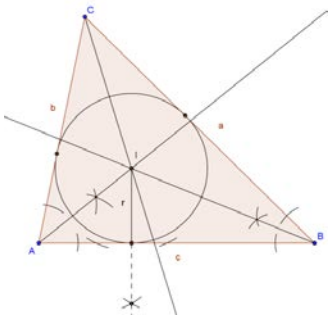


Figura 4

De la lectura de la consigna, los estudiantes, a través de la aprehensión discursiva deben asociar la configuración requerida con la definición de bisectriz de un ángulo. Luego aplican una aprehensión operativa, trazando la bisectriz de al menos dos de los ángulos interiores con el compás y la regla, y así determinar el punto de intersección de ellas. Así, nuevamente, se evidencia una asociación de la configuración en construcción con otra definición de incentro. En este caso, el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo. A continuación, aparece una tercera operación que deben realizar, determinar el radio de la circunferencia inscrita. Para ello, a través de una aprehensión operativa deben recurrir a la condición de perpendicularidad entre radio y cada uno de los lados del triángulo. Es decir, deben trazar la perpendicular a una recta, cada lado, desde un punto exterior, el incentro, para determinar el radio de la circunferencia inscrita. Por último, trazar la circunferencia inscrita en el triángulo.

Resultados de del Experimentación

Los resultados globales dejan en evidencia que no todos saben efectuar una construcción geométrica con regle y compás. Además, indican que la mayoría de los estudiantes logran articular parcialmente los distintos tipos de aprehensiones: perceptiva, discursiva y operativa.

Primer Reactivo

Del análisis de las respuestas de este reactivo se puede destacar que algunos estudiantes evidenciaron una aprehensión discursiva relativamente correcta, ya que no todos pudieron hacer una asociación de la configuración identificada con afirmaciones matemáticas, en este caso, al observar el triángulo, cualquiera que sea, siempre se puede establecer que "la suma de las medidas de dos de sus lados es mayor que la medida del tercer lado". Si bien, algunos estudiantes pudieron construir un triángulo, no siempre bajo la premisa de "dados los lados", sino que partían diciendo, por ejemplo, "dibujaremos un triángulo rectángulo". De la totalidad de los estudiantes, solo cuatro de ellos, se dieron primeramente los lados, para establecer las condiciones para asegurar la existencia de un triángulo. Por otro lado, los menos lograron establecer el protocolo de construcción.

A modo de ejemplo, mostraremos un par de casos:

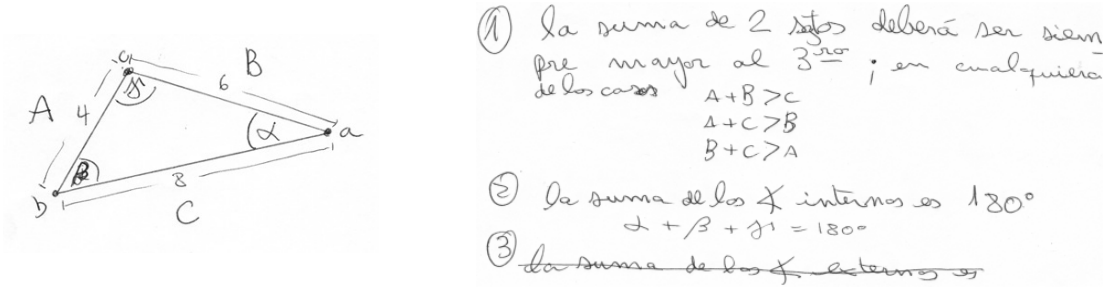


Figura 5

- Una pareja estableció (figura 5) que "la suma de 2 sgtos deberá ser siempre mayor al 3ero; en cualquiera de los casos A+B>C A+C>B B+C>A", evidenciando una aprehensión discursiva, haciendo un cambio de anclaje de lo visual a lo discursivo. De igual forma, asocia la configuración con el teorema que indica que "la suma de los < internos es 180°, $\alpha+\beta+\gamma=180°$", pero no se relaciona con lo pedido en la consigna. Se arrepintieron tachando "la suma de los < externos es". Ninguna de las restantes parejas de estudiante hizo un análisis que permitiera establecer las condiciones. Cabe hacer notar que la forma de rotular está invertida, los puntos con letras minúsculas y las magnitudes de los segmentos con letras mayúsculas, y también con números (4, 6 y 8), lo que nos permite inferir que es una forma de comprobar lo que comunica por escrito.

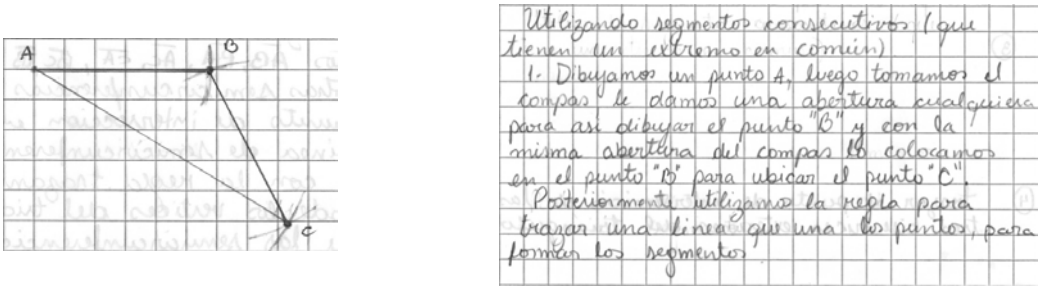


Figura 6

- La figura 6, muestra la producción de una pareja de estudiantes que da cuenta de un "protocolo de construcción", pero no se dan los segmentos. Lo redactado por ellos no dan cuenta del procedimiento. Las aprehensiones operativas utilizadas en la asociación de propiedades o teoremas de construcciones básicas no son las adecuadas. No fue posible establecer entre la producción la configuración y la descripción una correspondencia que permita justificar el procedimiento de construcción, por lo que se puede inferir dificultades de comunicación.

- Los conocimientos movilizados en esta situación, fueron muy elementales, ya que no se dieron los tres lados, para luego trasladarlos y construir la representación requerida. Dibujaron directamente el triángulo. Ninguno de las parejas estableció el protocolo de construcción esperado.

Segundo Reactivo

Respecto a la construcción que solicita esta consigna, nuevamente algunos estudiantes muestran una construcción errónea, al confundir la definición de "bisectriz" con la de "transversal de gravedad", por lo que queda en evidencia la falta de desarrollo de la aprehensión discursiva, el cambio de lo discursivo a lo figural, no se aprecia en algunos estudiantes, como en la figura 7.

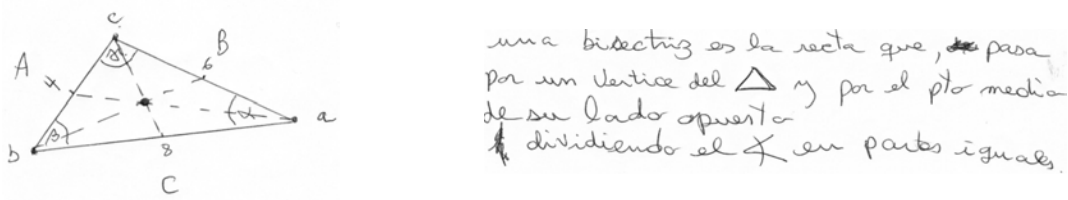


Figura 7

Además, la aprehensión perceptiva, es decir, la identificación simple de la configuración, el dibujo del triángulo con sus segmentos notables mal trazados, no permiten establecer la circunferencia inscrita como se muestra en la figura 8.

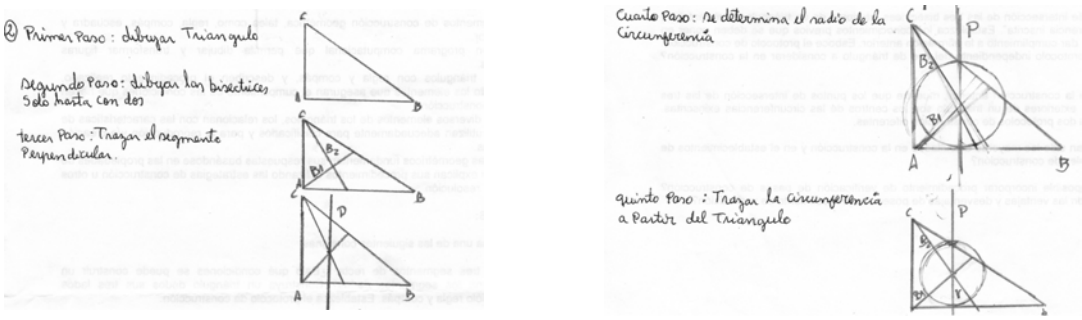


Figura 8

La asociación con la propiedad de las bisectrices interiores y la circunferencia inscrita no se ve reflejada en la configuración de la figura 9, a pesar de la explicación de esta pareja de estudiantes.

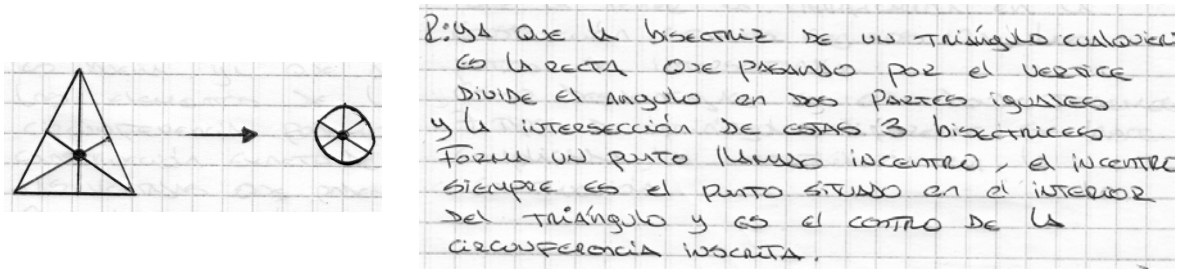


Figura 9

En conclusión, de la aplicación de ambos reactivos, los estudiantes presentan dificultades en la percepción visual de las figuras, lo que no les permite establecer propiedades de los objetos geométricos estudiados. No quedan en evidencia la articulación entre lo que se distingue visualmente de la configuración geométrica y las propiedades que cumplen dichos objetos. Además, presentan dificultades para argumentar los procedimientos utilizados en cada construcción abordada.

Referencias bibliográficas

Castellanos, I. (2010). *Visualización y razonamiento en las construcciones geométricas utilizando el software geogebra con alumnos de II de magisterio*. Tesis de Maestría no publicada. Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán. Tegucigalpa. Honduras.

Duval, R. (2001). *La geometría desde un punto de vista cognitivo. PMME-UNISON*. Consultado el 01de marzo de 2013 en http://fractus.uson.mx/Papers/ICMI/LaGeometria.htm.

Guzmán Retamal, I. (2009). Actividades geométricas en la enseñanza. Análisis desde el punto de vista cognitivo. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 19, 22-33.

Torregrosa, G., Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 275-300.

CARACTERIZANDO LA PRÁCTICA DOCENTE EN LA IMPLEMENTACIÓN DE UNA "PROPUESTA DIDÁCTICA DE LÍMITES INFINITOS MEDIANTE SITUACIONES CONTEXTUALES"

José Rafael Couoh Noh, María Guadalupe Cabañas-Sánchez y Eddie Aparicio-Landa
Universidad Autónoma de Guerrero; Universidad Autónoma de Yucatán. México
jose_rafael_1988@hotmail.com, gcabanas.sanchez@gmail.com, alanda@uady.mx

Resumen. Presentamos los avances de una investigación que se interesa por caracterizar la práctica profesional del profesor de matemáticas mientras desarrolla una propuesta didáctica sobre los límites infinitos que está basada en situaciones contextuales. Interesan dos cuestiones: a) comprender y a partir de ello caracterizar el tipo de ayudas, dificultades y formas de comunicación que establece con sus estudiantes en ese proceso, y b) reconocer de la propuesta didáctica, aquella(s) que posibilita(n) el aprendizaje de este tipo de límites. El estudio se realizará con estudiantes de Cálculo Diferencial de una licenciatura en Matemáticas, al momento en que este tópico es objeto de estudio. En este reporte, describimos principalmente la propuesta didáctica que será el instrumento para observar la clase del profesor universitario de Cálculo y en consecuencia caracterizar su práctica.

Palabras clave: límites infinitos, práctica del profesor, propuesta didáctica, situaciones contextuales

Abstract. We present the progress of research, which is interested in characterizing the professional practice of mathematics teacher while developing a didactic proposal about infinite limits, based on contextual situations. We are interested in two issues: a) understand and, from that, characterize the type of aid and forms of communication difficulties the teacher has with his students, and b) recognize from the didactic proposal, which one(s) that allow(s) learning such limits. The study was conducted with University Differential Calculus students, at the time that this topic is being studied. In this report, we describe mainly the didactic design that will be the instrument to observe the Calculus class and characterize the teacher practice.

Key words: infinite limits, teacher practice, proposal didactic, contextual situations

Introducción

Una buena parte de las investigaciones sobre los procesos de aprendizaje del Cálculo en nuestra disciplina, se han enfocado fundamentalmente a evidenciar las complejidades que subyacen en torno a su enseñanza a través de los errores y dificultades de los estudiantes con conceptos básicos. En ese contexto, Tall (1990) reconoce que conceptos como el límite y el infinito pueden ser interpretados de manera errónea en razón de la complejidad de sus significados. Artigue (1995) por su parte, afirma que las concepciones muy dependientes de una "geometría de la forma" no obligan a identificar con claridad sobre cuáles objetos se lleva a cabo el proceso límite, lo cual causa dificultades e introduce o refuerza convicciones erróneas como la creencia en que si "geométricamente" un objeto tiende hacia otro, todas las magnitudes que le están asociadas tendrán por límite valores correspondientes a las magnitudes del objeto límite. En este mismo sentido, Cornu (1991) sostiene que el concepto de límite es particularmente difícil, típica del tipo de pensamiento requerido en matemáticas avanzadas, en razón de que ocupa una posición central dentro del Análisis Matemático como un fundamento de la teoría de aproximación, de continuidad, y del Cálculo Diferencial e Integral. Asimismo, que una de las más grandes dificultades en la

enseñanza y aprendizaje de este concepto, se debe no solamente a su riqueza y complejidad, sino también a que los aspectos cognitivos no pueden ser abordados desde un único punto de vista de la definición matemática.

En el plano de la enseñanza, Duval (1993) sostiene que la formación de conceptos matemáticos implica una coordinación de varios registros de representación semiótica. En el concepto de límite, el registro numérico se estudia mediante tablas de valores, el gráfico mediante el uso de gráficas en los ejes cartesianos, el simbólico sustentado en la simbología matemática adecuada y el verbal, definiendo el concepto utilizando palabras coloquiales (Aquere et. al, 2009). En la enseñanza tradicional se tiende a una práctica algorítmica y algebraica del cálculo (Artigue, 1995). Tall (1990) sostiene que no es posible hacer más simple los conceptos complicados del Cálculo, pero se pueden dar experiencias más ricas basadas en contextos. Por ello, las investigaciones actuales relacionadas con la Didáctica del Cálculo proponen una aproximación más intuitiva y una metodología más activa para su enseñanza, ya que para los alumnos es un concepto árido, poco atractivo y demasiado abstracto (Engler et. al, 2008).

A este respecto, varios investigadores coinciden en que los contenidos del cálculo deben abordarse desde diferentes perspectivas buscando estrategias que contribuyan en una mejor comprensión por los estudiantes (e. g. Engler et. al, 2008). En ese sentido, algunos investigadores han desarrollado propuestas de enseñanza, tales como: Camacho y Aguirre (2001) quienes hacen un análisis preliminar del límite infinito para plantear una situación didáctica; Bertoia (2006) quien propone la interpretación del límite infinito mediante una experiencia con espejos; Engler et. al (2008) y Aquere et. al (2009) quienes diseñan una situación didáctica del límite infinito y una propuesta didáctica para la enseñanza del límite, respectivamente.

Sin duda el estudio sobre errores y dificultades de los estudiantes en torno a los conceptos de Cálculo son importantes, así como de propuestas de enseñanza. Sin embargo, se requieren además, estudios que den cuenta de la práctica profesional del profesor. Güçler (2013) menciona que hay investigación sobre la enseñanza de límites, pero todavía no es tan extensa como la investigación enfocada al aprendizaje de los estudiantes, por ello sugiere realizar estudios que examinen el discurso explícito del profesor ya que contribuye a perfeccionar su práctica docente. Oliveira (2009), sostiene que los estudios sobre la práctica del profesor contribuyen a mejorar su práctica. Por su parte, Laborde y Perrin-Glorian (2005), afirman que cuando se conoce la problemática que subyace en torno a procesos de aprendizaje de determinados conceptos matemáticos, conviene analizar la situación del salón de clases de matemáticas.

La investigación que se reporta se interesó precisamente por el estudio de la práctica del profesor. En particular, nos interesamos por caracterizar la práctica de un profesor de una licenciatura en matemáticas, a partir de las *ayudas* que introduce a los estudiantes, de las *dificultades* que encara y de las formas de *comunicación* que establece mientras implementa "una propuesta didáctica de límites infinitos basada en situaciones contextuales", para enfatizar aquella(s) que posibilita(n) o favorece(n) el aprendizaje de límites infinitos. El estudio se desarrollará con dos grupos del primer semestre de la Licenciatura en Matemáticas, en la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero.

En este reporte se describe principalmente la propuesta didáctica cuyo diseño es motivado, parcialmente, por Bertoia (2006) quien propone una situación para la interpretación del límite infinito mediante una experiencia con espejos en estudiantes del nivel secundario (5° grado) en Argentina. El concepto del límite infinito es objeto de estudio de manera explícita en la escuela mexicana en el Nivel Superior. Su importancia radica en que es fundamental en la introducción de otros conceptos del Cálculo Diferencial e Integral y del Análisis Matemático.

Fundamentos Teóricos

La teoría de los registros de representación semiótica de Duval

Para Duval (1993), los registros de representación semiótica son producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propias compulsiones de significado y de funcionamiento. Así, una figura geométrica, un enunciado en lengua natural, una fórmula algebraica, una gráfica, son representaciones semióticas que pertenecen a sistemas semióticos diferentes. Se considera generalmente a las representaciones semióticas como un simple medio de exteriorización de las representaciones mentales para fines de comunicación, es decir, para hacerlas visibles o accesibles a otros. En ese sentido, los registros de representación semiótica juegan un papel fundamental en la actividad matemática. Este investigador, hace hincapié en la importancia porque en la actividad matemática, se movilicen varios registros de representación semiótica (figuras, gráficas, escritura simbólica, lengua natural, etc...) en el transcurso de una misma tarea, o bien cómo elegir un registro en lugar de otro. Asimismo, señala que la coordinación de varios registros de representación semiótica desde esta perspectiva teórica, aparece como fundamental para una aprehensión conceptual de los objetos, en donde es necesario que el objeto no sea confundido con sus representaciones y que se le reconozca en cada una de ellas. Bajo estas dos condiciones una representación funciona verdaderamente como representación cuando este facilita el acceso al objeto representado.

Por otra parte, este investigador señala que la existencia de varios registros de representación semiótica permite hacer cambios de un registro a otro, cuyo objetivo es efectuar tratamientos de una manera más económica y más potente. Además, menciona que dichos registros se complementan, ya que toda representación es cognitivamente parcial con respecto a lo que ella representa y entonces, de un registro a otro los aspectos del contenido de una situación representados son diferentes. De esta manera, la conceptualización implica una coordinación de registros de representación. De acuerdo con Duval (1993) la conversión de una representación es la transformación de esta representación en una representación de otro registro conservando la totalidad o una parte solamente del contenido de la representación inicial. Se identifican las siguientes conversiones: 1) *ilustración* es la conversión de una representación lingüística en una representación figural; 2) *traducción* es la conversión de una representación lingüística en una lengua dada en una representación lingüística de otra lengua o de otro tipo de lenguaje; y 3) *descripción* es la conversión de una representación no verbal (esquema, figura, gráfica) en una representación lingüística. A continuación, presentamos la caracterización de los distintos registros de representación involucrados en nuestra investigación. De acuerdo con Duval (1998, citado en Dal Bianco, et. al, 2006; p. 5): El *registro de representación lenguaje coloquial* se da en el lenguaje común y es utilizado para representar situaciones llamadas del mundo real; el *registro de representación analítico* hace referencia a la definición del objeto matemático mediante una expresión algebraica; el *registro de representación tabular* corresponde a los valores numéricos del objeto matemático organizados en tablas de valores; y el *registro de representación gráfico* se refiere a la imagen del objeto en el plano cartesiano.

La práctica Profesional del Profesor

De acuerdo con Llinares (2000) la práctica profesional del profesor se ve como el conjunto de actividades que genera cuando realiza las tareas que definen la enseñanza de las matemáticas y la justificación dada por el profesor. En este sentido, la práctica del profesor no está inscrita únicamente en lo que sucede en el aula, sino que se conceptualiza desde una perspectiva más amplia, comunidad de práctica profesional en la que se incluyen tareas como tutorías, reuniones de seminario departamento, asistencia a actividades de formación, etc. En nuestro estudio retomamos éstas ideas, sin embargo, con base en nuestro objetivo nos centramos en el aula de clases, dado que las ayudas y dificultades, las analizaremos desde las intervenciones del profesor en el aula a través de las razones y explicaciones que realiza con sus estudiantes cuando se movilizan de un registro de representación a otro.

Aspectos Metodológicos

a) Participantes. Se desarrollará con dos profesores universitarios de Cálculo Diferencial cuando el concepto de límite infinito es objeto de estudio, implementando una propuesta didáctica de límites infinitos mediante situaciones contextuales.

b) Fase de planeación de la propuesta didáctica. Con base en el análisis de algunos libros de texto de Cálculo Diferencial e Integral, identificamos que el estudio de los límites infinitos se realiza de la siguiente manera: Se define una función, luego se tabulan algunos valores y finalmente se construye una gráfica a partir de dichos valores. Considerando lo anterior, elaboramos una propuesta didáctica bajo el marco de la teoría de los registros de representación semiótica de Duval, en la que se privilegió la conversión entre los registros de representación gráfico, tabular, lenguaje coloquial y analítico del tópico, en el contexto de la resolución de problemas. El objetivo general de la propuesta didáctica es que los estudiantes establezcan una definición del límite infinito sustentados de la simbología matemática ($\lim_{x\to a} f(x) = \infty, donde\ a \in \mathbf{R}$). Para ello, se diseñaron siete actividades. Las primeras tres corresponden al estudio de la relación entre el ángulo formado por dos espejos y el número de imágenes reflejadas, y abordan el caso particular $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$. Las siguientes tres involucran el contexto de los contaminantes tóxicos en aguas dulces, específicamente $\lim_{x\to 10} f(x) = \infty$. La última actividad, pretende que el estudiante sintetice el conocimiento adquirido escribiendo la expresión $\lim_{x\to a} f(x) = \infty, donde\ a \in \mathbf{R}$. Por cuestiones de espacio, se describen las primeras tres actividades, las cuales son similares a las siguientes tres.

Actividad 1. Su objetivo es que el estudiante comprenda la situación sobre los espejos. Se presenta un video del experimento, el cual consiste en: colocar de manera vertical sobre una base dos espejos rectangulares de iguales dimensiones unidos por uno de sus bordes, se pone un objeto sobre la base, se varía el ángulo formado por los dos espejos y se observa cómo cambia el número de imágenes reflejadas. Se cuestiona al estudiante para indagar respecto de su comprensión de la situación: Describan con sus propias palabras en qué consistió el experimento mostrado en el videoclip; ¿qué relación existe entre el número de imágenes reflejadas en los dos espejos y el ángulo formado entre ellos?; ¿a qué creen que se deba dicho comportamiento?

Actividad 2. Su propósito es calcular el límite infinito de una función a partir de la representación numérica y movilizando los registros de representación tabular, lenguaje coloquial y analítico. Se presentan cinco tablas de valores, con dos columnas cada una, que relacionan el ángulo formado por los dos espejos y el número de imágenes reflejadas en ellos; tres de las tablas tienen valores

completos, las cuales serán utilizadas para completar los datos de las dos tablas restantes (ver figura 1)

Ángulo formado por los dos espejos	Número de imágenes reflejadas
0.0015°	239999
0.0009°	399999
0.0005°	719999
0.0001°	3599999

Ángulo formado por los dos espejos	Número de imágenes reflejadas
0.015°	23999
0.009°	39999
0.005°	71999
0.001°	359999

Ángulo formado por los dos espejos	Número de imágenes reflejadas
0.15°	2399
0.09°	3999
0.05°	7199
0.01°	35999

Con base en los datos, analicen y respondan en cada caso lo que se pide.

a) Completen los datos faltantes en las tablas siguientes.

Número de imágenes reflejadas	Ángulo formado por los dos espejos
239	
359	
7199999	

Número de imágenes reflejadas	Ángulo formado por los dos espejos
	0.00005°
	0.00001°
	0.000001°

Figura 1. Registro tabular en la propuesta didáctica del límite infinito.

Se cuestiona respecto de los procedimientos realizados para completar las tablas, la variable independiente y dependiente, el número de imágenes reflejadas conforme disminuye y aumenta el ángulo entre los dos espejos, y el comportamiento del número de imágenes cuando el ángulo tiende a 0° y se pide expresarlo con la notación matemática correspondiente.

Actividad 3. Su finalidad es determinar el límite infinito de una función a partir de la representación gráfica y se favorecen los registros de representación gráfico, lenguaje coloquial y analítico. Se presenta una gráfica (ver figura 2) que modela la situación, elaborada a partir de algunos datos de las tablas anteriores.

Con base en la gráfica se cuestiona: ¿qué valores puede tomar la variable independiente y dependiente?; ¿qué comportamiento presenta el número de imágenes reflejadas cuando el ángulo formado por los dos espejos disminuye o aumenta?; ¿qué comportamiento presenta el número de imágenes reflejadas cuando el ángulo formado por los dos espejos se reduce, por ejemplo, cuando $\alpha = 5°, \alpha = 2°$?; ¿qué valor se esperaría para el número de imágenes si $\alpha = 0°$ y por qué?; ¿qué comportamiento tiene el número de imágenes reflejadas si α es muy cercano a 0°?; ¿existe un valor máximo de la función? Determínenlo en caso afirmativo, caso contrario, justificar por qué no existe; utilizando lenguaje común y la simbología matemática adecuada, describan la relación que guardan el número de imágenes reflejadas y la disminución del ángulo formado por los dos espejos.

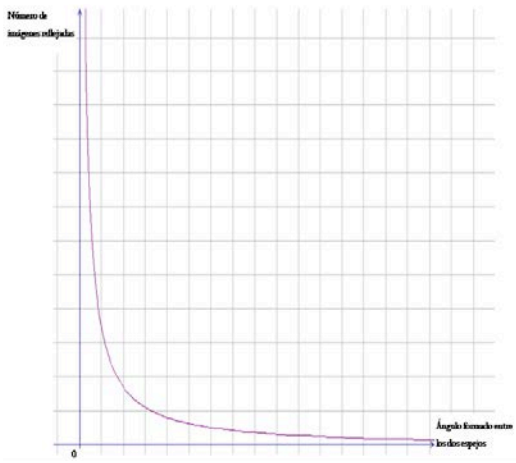


Figura 2. Registro gráfico en la propuesta didáctica del límite infinito.

c) Desarrollo de la propuesta didáctica. En cada grupo, las actividades se resolverán en un ambiente de lápiz y papel durante cuatro sesiones de 100 minutos cada una y serán videograbadas. Cada profesor organizará a los estudiantes en equipos, de tal forma que al menos un integrante tenga conocimientos consistentes de Cálculo. El rol del primer autor, quien planteó la propuesta didáctica, será acordar con los profesores, en dos sesiones de trabajo previo a la implementación, las actividades de la propuesta didáctica para incorporar elementos que consideren relevantes desde su experiencia docente y argumentar dichas modificaciones. En la puesta en escena, el primer autor se limitará a observar el desarrollo de la clase y a videograbar.

d) Entrevista final. El investigador seleccionará episodios de los videos que considere representativos de la práctica del profesor en el desarrollo de la propuesta didáctica y planteará preguntas para profundizar en ciertos aspectos. Se pretende una reflexión del profesor sobre su práctica con base en dichos videos y a partir de ciertos cuestionamientos, por ejemplo, qué modificaciones realizaría en su práctica y por qué.

Reflexiones Finales

El contexto utilizado y las actividades planteadas en la propuesta didáctica deben ser fundamentales para que los estudiantes se motiven en su resolución y en consecuencia lleguen al objetivo planteado. Estamos convencidos del gran valor que tiene la elaboración de propuestas didácticas, ya que al profesor le permite enseñar los conceptos matemáticos con mayor significado y al estudiante lo obliga a poner en juego sus habilidades y conocimientos matemáticos a través de la reflexión sobre la solución del problema; con lo cual confirmamos la postura de Tall (1990) y Engler et. al (2008) quienes sostienen, respectivamente, la importancia de dar experiencias más ricas basadas en contextos en la enseñanza del Cálculo y en una metodología más activa para su enseñanza.

Finalmente, consideramos que la propuesta didáctica está sujeta a modificaciones, ya que convendría validarla con algunos estudiantes e incorporar elementos desde la perspectiva de la práctica profesional de los profesores universitarios de Cálculo Diferencial.

Referencias bibliográficas

Aquere, S; Engler, A., Gregorini, M., Vrancken, S., Müller, D., Hecklein, M., y Henzenn, N. (2009). Una propuesta didáctica para la enseñanza de límite. *Revista Premisa, 40,* 14-24.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.). *Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Bertoia, M. (2006). La interpretación del límite infinito mediante una experiencia con espejos. *Revista Premisa, 30,* 24-27.

Camacho, A y Aguirre, M. (2001). Situación didáctica del concepto de límite infinito. Análisis preliminar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4(3),* 237-265.

Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking.* (pp. 153-166). Dordrecht. Kluwer Academic Publishers.

Dal Bianco, N., Botta Gioda, R., Castro, N., Martinez, S., y Prieto, F. (2006). Descripción bibliográfica de funciones trascendentes y su aplicación en las ciencias biológicas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19,* 4-10.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives*, 5, 37-65. Traducción: Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En E. Hitt (Ed.) *Investigaciones en Matemática Educativa II*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Engler, A., Gregorini, M., Vrancken, S., Müller, D., Hecklein, M., y Henzenn, N. (2008). El límite infinito: Una situación didáctica. *Revista Premisa, 36,* 11-21.

Güçler, B. (2013) Examining the discourse on the limit concept in a beginning-level calculus classroom. *Educational Studies in Mathematics, 82(3)*, 439-453.

Laborde, C. y Perrin-Glorian, M. J. (2005). Introduction: Teaching situations as object of research: Empirical studies within theoretical perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, *59*(1-3), 1-12.

Llinares, S. (2000). Intentando comprender la práctica del profesor de matemáticas. En J.P. da Ponte y L. Serrazina (coord.). *Educaçao Matemática em Portugal, Espanha e Italia.* (pp. 109-132). Lisboa, Portugal: Secçao de Educaçao Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciêncas de Educaçao.

Oliveira, H. (2009). Understanding the teacher's role in supporting student´s generalization when investigating sequences. *Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)", Supplemento n.2 al n. 19, 2009.*

Tall, D. (1990). Inconsistencies in the Learning of Calculus and Analysis. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 12,* 49-63

REFLEXIONES DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS AL ANALIZAR LOS ERRORES DE LOS ESTUDIANTES

Leticia Sosa Guerrero, Elvira Borjón Robles y Judith A. Hernández Sánchez
Universidad Autónoma de Zacatecas México
lsosa19@hotmail.com, eborjon@matematicas.reduaz.mx, judith700@hotmail.com

Resumen. En este artículo presentamos algunos resultados correspondientes a una experiencia en la formación de profesores. En un taller de actualización para profesores, con el objetivo de provocar la reflexión del profesor a través del análisis de errores de los estudiantes, se les asignó una tarea a un grupo de profesores de matemáticas. Mostramos un estudio de caso constituido por una profesora de nivel bachillerato, la tarea encomendada y la puesta en común en el grupo. Las reflexiones se orientan principalmente a tratar de buscar formas para poder dar un tratamiento didáctico a aquellos errores, además de conocer lo que piensan los estudiantes a través del análisis de los errores e incluso, intentar que los alumnos sean capaces de reflexionar sobre sus errores, construir su conocimiento, y dominar mejor los contenidos matemáticos.
Palabras clave: reflexión del profesor, conocimiento del profesor, análisis de errores, matemáticas.
Abstract. In this paper we report some results about an experience in the mathematics teacher training. We try to form a learning environment through a refresher course for teachers, from their own reflections on the analysis of the errors made by students in mathematics class. We assigned a task to a group of mathematics teachers. We show a case study (of a teacher of high school level), the task assigned and the implementation of the task in working group. The reflections are mainly aimed to seek ways to provide a didactic treatment to those errors as well as knowing what the students think through the analysis of the errors and that students will be able to reflect on theirs errors, build their knowledge, and better master the mathematical content.
Key words: reflection of teacher, teacher knowledge, analysis about error, mathematics

Introducción

Las investigaciones de Ball (2002), Jaworski (2002) y Kilpatrick (2003), después de que Shulman (1986) introdujo la noción de conocimiento didáctico del contenido (PCK – Pedagogical Content Knowledge), ponen de relieve varias cuestiones sobre el profesor de matemáticas. Con énfasis en la enseñanza, el conocimiento y las habilidades que pone en acción el profesor, así como en los procesos de aprendizaje para los cuales el profesor desarrolla esos conocimientos y habilidades, y en los contextos de formación que ofrezcan oportunidades de aprendizaje para ello (Gómez, 2007).

De hecho, hoy en día el conocimiento del profesor sigue siendo objeto de estudio. A nosotros nos interesa estudiar no solo el conocimiento del profesor sino también esa parte importante en su formación: la reflexión sobre su quehacer profesional. En este documento presentamos las reflexiones del profesor al analizar los errores de los estudiantes, bajo la hipótesis de que uno de los conocimientos que necesita el profesor está relacionado con saber cómo piensan o pueden pensar matemáticamente sus estudiantes al impartir un tema concreto, en el cual está inscrito el conocimiento concerniente con el análisis serio y profundo de los errores de sus estudiantes.

Fundamentos Teóricos

Para Shön (1983), la reflexión es una característica de una buena práctica y existen dos tipos de reflexión que pueden ocurrir y que determinan el conocimiento profesional del profesor: reflexión en la acción y reflexión sobre la acción. La reflexión en la acción es el proceso mediante el cual los profesores hacen explícito el conocimiento en la acción, significa detenerse a pensar durante la propia acción acerca de las razones por las que actuamos y las consecuencias de esa actuación. En tanto que, la reflexión sobre la acción es el proceso de análisis que efectúa el profesor *a posteriori* sobre las características y los procesos de las acciones que ha realizado.

El conocimiento profesional es un conocimiento necesario y específico de cada profesión. De acuerdo con Tamir (1991), el conocimiento profesional es el cuerpo de conocimiento y habilidades que son necesarios para funcionar con éxito en una profesión particular. En ese sentido, asumimos que es complejo comprender el conocimiento profesional del profesor de matemáticas y más aún aquél que pone en acción para analizar, estudiar y poder dar un tratamiento didáctico a los errores de los estudiantes además de que todavía hay mucho que estudiar al respecto.

De hecho, en la propuesta del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT –Mathematics Knowledge for Teaching- Ball, Thames y Phelps, 2008) se pone de relieve que el profesor, aparte de identificar los errores de los estudiantes, analice la naturaleza de los errores. Empero, consideramos que también es necesario profundizar en el entendimiento del aprendizaje de los estudiantes mediante el error.

Ya desde hace años existe una preocupación por el estudio de los errores, por ejemplo, Brousseau (1997) retoma de Bachelard (1938) el término de obstáculo epistemológico y lo explica como sigue:

> […] el error y el fracaso no tienen el papel simplificado que a veces se les quiere asignar. El error no es sólo el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar como se cree en las teorías empíricas o conductistas del aprendizaje, sino el efecto de un conocimiento anterior, que tenía su interés, sus logros, pero que, ahora se revela como falso o simplemente inadecuado. Los errores de este tipo no son erráticos o imprevisibles, sino que constituyen obstáculos (Brousseau, 1997, p. 84).

Más aún, Astolfi (2004) expresa que:

> El problema del error en el aprendizaje es seguramente tan antiguo como la enseñanza misma. Sin embargo, nos encontramos continuamente con el error en la vida diaria, y el

> sentido común no deja de repetirnos que sólo dejan de equivocarse los que no hacen nada… [...] (Astolfi, 2004, p. 7).

Inclusive, hay autores que reconocen que el error no es fácil de desaparecer pues puede ser persistente pero si es atendido puede contribuir de manera positiva en el proceso de aprendizaje (Brousseau, Davis y Werner, 1986, citados en Vrancken et al., 2006). Ante la importancia del error en el aprendizaje de los estudiantes, se hace eminente llamar la atención en los conocimientos que requiere el profesor para dar un tratamiento didáctico a esos errores, así como profundizar en conocer cómo puede desarrollarse ese conocimiento. Sin lugar a duda, esto no es trabajo fácil, pues es complicado definir y delinear las tareas que el profesor ha de desempeñar en el proceso de enseñanza y aprendizaje e identificar, conocer y comprender los saberes necesarios para ello.

Metodología

La investigación que aquí se presenta está inscrita en el paradigma interpretativo (Latorre, Del Rincón y Arnal, 1996), es de corte cualitativa en términos de Erickson (1986), quien pone de relieve a la característica que más distingue a la indagación cualitativa, la interpretación. En cuanto al método, dado que nos interesa profundizar en la interpretación de la reflexión que una profesora pone en acción en torno al conocimiento de los errores cometidos por los estudiantes, el método consiste de un estudio de caso (Stake, 2005). El caso está constituido por una profesora (Mari) de bachillerato con 12 años de experiencia, Mari es reconocida como una buena profesora por las autoridades de su institución, sus exalumnos y sus pares. Respecto a la técnica, la fuente primaria de información es la observación de las sesiones del taller (videograbaciones).

El caso que aquí nos ocupa es parte de una investigación más amplia cuyo objetivo es analizar los fenómenos que aparecen durante un taller en el que participaron 15 profesores de nivel medio superior realizado durante una semana, 2 horas al día. A todos los participantes se les explicó el modelo del Conocimiento Matemático para la Enseñanza y posteriormente se les asignó una misma tarea. Se les pidió que identificaran un error "común" de los alumnos en un contenido matemático concreto, luego deberían tratar de explicar los posibles pensamientos matemáticos que le permiten al estudiante dar esa respuesta errónea y finalmente hacer una propuesta concreta para dar un tratamiento didáctico a ese error en los estudiantes. Además, se les solicitó que presentaran lo realizado ante el grupo y que entregaran un reporte de ello por escrito.

Resultados

Mari propone que un error común en sus estudiantes consiste de las malas interpretaciones en el cálculo de límites, encontrando entre estos, situaciones, como por ejemplo, la siguiente $\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-3}$:

> El error frecuente que los alumnos de nivel medio superior comenten cuando tienen problemas como este, es el de pensar que el resultado de este límite es infinito. Los alumnos son propensos a escribir expresiones como las siguientes cuando se está trabajando con límites:
>
> $\lim_{x\to 4}\frac{1}{x-4}=\infty$ y $\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}=\infty$ (Mari en su exposición ante el grupo)

Al respecto, Mari presenta como posibles razonamientos/pensamientos de los estudiantes ante esos errores lo siguiente:

> Para estos casos, el pensamiento matemático que subyace en los alumnos cuando resuelven estas situaciones es el hecho de generalizar el análisis de las tendencias de x, cuando ésta se acerca al dos [para el caso $\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}=\infty$], pero sin tener en cuenta que las tendencias laterales pueden provocar cambios en los signos de los resultados que se obtienen. Es decir, los estudiantes llegan a pensar que cualquier número que se divide por un número muy pequeño, es infinito. (Mari en su exposición ante el grupo –el agregado en corchete es nuestro).

Interpretamos que Mari quiere hacer notar que en ese error de los estudiantes, ellos sólo se fijan en evaluar la función en el punto de tendencia de *x* y no propiamente en el límite de la función en el punto de tendencia de *x*.

Además, Mari agrega que:

> En primer lugar debemos señalar, que con esto se está destacando la noción que tienen los alumnos de que el infinito es un número, siendo que el infinito es una tendencia, una expresión, y no un número. En segundo lugar, existe una necesidad del docente de subsanar, y corregir esta concepción del alumno de que todo número fijo que se divide por un número cercano a 0 "es" infinito, y cambiar el pensamiento con respecto a los límites de funciones como las que planteamos en los ejemplos anteriores. (Mari en su exposición ante el grupo).

La propuesta de tratamiento didáctico que plantea Mari para ese error es el uso de distintas representaciones: gráfica y numérica. La estrategia de Mari consiste en trabajar estas dos perspectivas de la siguiente manera:

1. Sin decirle al estudiante que el resultado al que está llegando es incorrecto (al responder infinito en los límites anteriores), trabajar el límite de las funciones desde una tabla de valores.

   Mari considera que:

   > Este mecanismo resulta provechoso a la hora de entender el comportamiento de los límites en ciertos puntos, puesto que el alumno, desde una experiencia personal, siente mayor seguridad al sacar cuentas, al ir "probando" mediante el ensayo y el error lo que va sucediendo con la función en los puntos indicados.

   Mari supone que este mecanismo le da seguridad al estudiante sobre los caminos que utiliza y las acciones que realiza, antes de pasar a conceptos formales. Además, Mari expresa que:

   > El docente en este caso debería servir de guía incitando interrogantes, como por ejemplo, ¿qué significa que una función tenga límite infinito?, ¿cómo es el comportamiento de una función cuando su límite va a infinito?, ¿qué está pasando en las cercanías del punto de límite?

   y que a partir de esas preguntas y de las respuestas de los estudiantes el profesor pueda realizar una tabla donde se visualicen esos comportamientos y genere una forma de análisis de los límites laterales como se muestra en la siguiente tabla:

x	2,9	2,99	2,999	2,9999	3	3,00001	3,0001	3,001	3,01
f(x)									

   De tal forma que con esta tabla, el profesor y los alumnos puedan ver los valores diferentes que la función podría tomar en los puntos cercanos al punto de límite y de esa manera determinar que el comportamiento de la función por derecha y por izquierda es diferente. Esta sería una forma de ver tendencias laterales por izquierda y por derecha de una función en un determinado punto de límite.

2. Luego, si con esto no se logra "convencer" a los estudiantes, entonces también se les podría proponer hacer un gráfico de la función, ya sea en pizarrón, o mediante un

software, para ver, junto con la tabla, como sería el "dibujo" de la función. La Figura 1 siguiente, refleja la gráfica de la función mediante la utilización de un software:

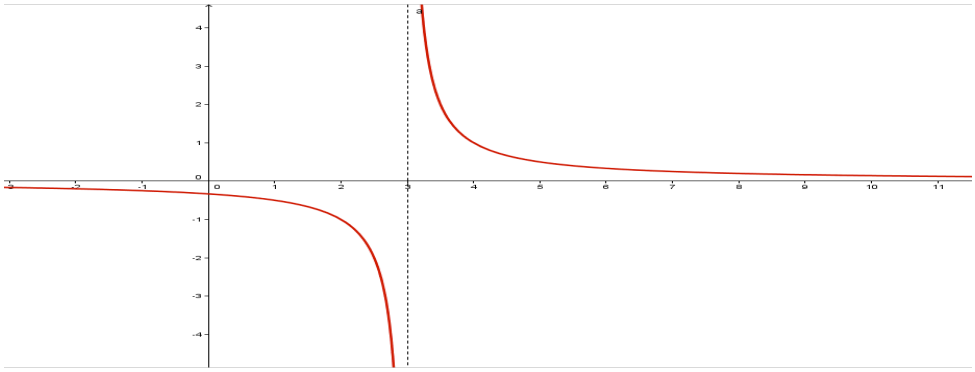


Figura 1. Gráfica de la función.

La idea de Mari es que vean la función en forma de "foto", que noten cómo se comporta la función cuando la variable se acerca al tres por la derecha y por la izquierda, haciendo hincapié en un entorno reducido centrado en tres, introduciendo así la idea del límite en un intervalo que este centrado en el punto de límite, y que sea lo más pequeño posible. A ella, le interesa hacer notar que las tendencias son muy diferentes, y que si bien se dirigen al infinito, lo hacen en distinto sentido. En esta dirección, Mari reflexiona en cuanto a la enseñanza y expresa: "[…] aquí la docente debería introducir en los alumnos la noción de que este hecho no se traduce en que el límite de la función es infinito, sino más bien que no existe el límite en dicho punto".

3. Después de lo anterior, Mari propone continuar trabajando con más ejemplos como los anteriores de tal forma que el estudiante visualice comportamientos desde lo gráfico o desde lo numérico porque ella considera que eso ayuda mucho a los alumnos que tienen dificultades para comprender por primera vez el concepto de límite.

4. Posteriormente, luego de trabajar los puntos anteriores, para completar el concepto de límite, Mary plantea trabajar ya con la definición formal de límite de una función:

> Sea f una función definida sobre algún intervalo abierto que contiene a un número "a", exceptuando posiblemente a "a". Decimos que el límite de f(x) a medida que x se acerca a "a", es L, y se escribe: $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si para cualquier $\varepsilon > 0$ hay un número $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ cuando $0 < |x - a| < \delta$. (p. 105).

5. Finalmente, con todas estas propuestas Mari esperaría que sus estudiantes revisen su respuesta inicial sobre el infinito como límite, y que puedan trabajarlo desde la concepción de un entorno reducido en x=3.

Ella reconoce que esta actividad le representa "[…] las formas de enseñanza que de a poco vamos aprendiendo en nuestra carrera." Y que esto en sí es sólo una propuesta, una hipótesis, lo cual conlleva a seguir mejorando la propuesta una vez que se vaya poniendo en práctica.

En general, a pesar de que el profesor pueda identificar y analizar los errores de los estudiantes, eso no implica que todos los errores tengan un tratamiento mecánico cuando se presentan en la clase, por tanto, en la práctica docente el profesor debe ser científico e ir construyendo el objeto a enseñar (Sosa, 2006).

Las reflexiones finales de la profesora son expresadas en los siguientes términos:

> Aprender a reflexionar sobre estos posibles comportamientos de los alumnos frente a diferentes situaciones, permite que podamos desarrollar más nuestro *pensamiento reflexivo*, en tanto que seamos capaces, no solo de advertir los errores que se puedan producir en el aula, sino también que podamos pensar de qué formas podemos subsanar estos errores, pero no corrigiendo a nuestros alumnos, y descartando sus procedimientos como equivocados. Debemos hallar la forma de enriquecer su conocimiento con esos errores, apelar a los *conocimientos comunes* que se tengan dentro del curso, para poder complementarlos con los *conocimientos especializados* (Sosa, 2012) que tenga el docente sobre determinado contenido matemático, pero evitando la enseñanza de forma "tradicional", es decir, que solo el docente posee conocimiento, lo explica, y los alumnos deben atenerse a aplicar lo que el docente ha dicho. Para ello es necesario que conozcamos a nuestros estudiantes, y con formas de ver los contenidos como éstas, por medio de análisis de los errores, de trabajar con respuestas que pueden ser inesperadas para los profesores, podemos garantizar un aprendizaje más significativo, donde los alumnos sean capaces de reflexionar sobre sus prácticas, construir su conocimiento, y dominar mejor los contenidos matemáticos. (Mari en su documento final escrito).

Mari agrega:

> Además, apenas comenzamos con el trabajo, estas situaciones son las que generan un cambio, una reestructuración de las bases tanto didácticas como matemáticas que trae un profesor al ingresar al aula, y permiten esta apertura, esta reubicación del docente frente a sus estudiantes. (Mari en su documento final escrito).

Sabemos al igual que Mari, que estos resultados son apenas un inicio de lo que nos falta por estudiar, por entender y comprender de los conocimientos del contenido y didácticos del contenido del profesor de matemáticas en el aula, de las carencias y fortalezas de los conocimientos del profesor que nos expresan a través de sus reflexiones.

Conclusiones

Aún hay mucho por investigar en cuanto a los conocimientos del profesor para enseñar matemáticas, de tratar de conocer incluso, cómo se usan esos conocimientos en la dinámica en el aula y bajo qué interacciones, y cómo desarrollar esos conocimientos en el profesor, sin olvidar el papel de la reflexión del profesor para mejorar su propia práctica docente. Esto, tratando de aspirar a llegar algún día a ser capaces de explicar al menos una parte de lo que Goldhaber (2002) llama el misterio de la enseñanza.

Los errores integran una parte fundamental en el aprendizaje de los alumnos, pues pueden servir para implicar al estudiante en la actividad de explicar sus propios errores y reflexionar sobre éstos. Esto pone de relieve el hecho de que el profesor sea consciente e intervenga en la enseñanza para sacar provecho a los errores para mejorar el aprendizaje del estudiante (Sosa y Aguayo, 2013). Con ello, es natural cuestionarse sobre los conocimientos que ocupa el profesor para dar un tratamiento didáctico a los errores de los alumnos y de qué forma pueden desarrollarse esos conocimientos (Sosa, 2011). En todo este proceso, la reflexión del profesor juega un papel fundamental si la consideramos como una característica de una buena práctica y que determinan el conocimiento profesional del profesor (Shön, 1983).

Por lo tanto, consideramos que analizar los errores de los alumnos de una manera consciente y detallada y además, ocuparse de diseñar el tratamiento didáctico para subsanar el error de sus alumnos, constituye una oportunidad de aprendizaje para el profesor y en particular, eso puede ayudar a fomentar y enriquecer su propio conocimiento profesional (Sosa, Huitrado, Hernández, Borjón y Ribeiro, 2013). Las reflexiones de la profesora giran en torno a intentar entender posibles comportamientos de los alumnos frente a diferentes momentos de aprendizaje, para advertir los errores que se puedan producir en la clase y tratar de buscar formas para poder dar un tratamiento didáctico a aquellos errores.

Además de hallar la forma de enriquecer los conocimientos del profesor y conocer a los estudiantes a través del análisis de los errores, incluso hacer que los alumnos sean capaces de reflexionar sobre éstos, construir su conocimiento, y dominar mejor los contenidos matemáticos. Más aún, generar una reestructuración de los conocimientos y acciones tanto didácticas como

matemáticas que trae un profesor al ingresar al aula, que permitan una apertura al cambio con la intensión de mejorar su práctica frente a los estudiantes.

Referencias bibliográficas

Astolfi, J. (2004). *El "error", un medio para enseñar*. Díada, Sevilla. Disponible en http://blogfcbc.files.wordpress.com/2012/03/7-astolfi-elerror.pdf

Bachelard, G. (1938). *La formación del espíritu científico.* Siglo XXI, México.

Ball, D.L. (2002). What do we believe about teacher learning and how can we learn with and from our beliefs? En D. S. Mewborn, D.Y. White, H. G. Wiegel, R. L. Bryant y K. Nooney (Eds.), *Proceedings of the twenty-fourth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Matematics Education*. *3*, 3-19.

Ball D.L., Thames, M.H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59* (5), 389-407.

Brousseau, G. (1997): "Epistemological obstacles problems and didactical engeneering" en Balachef, N., Cooper, M., Sutherland, R. y Warfield V. (Eds.) *Mathematics Education Library*, Kluwer Academic Publishers.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research of teaching. En M. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching*, pp. 119-161. Nueva York, Macmillan.

Goldhaber, D. (2002). The mistery of good teaching. *Education Next*, 2(1), 50-55.

Jaworski, B. (2002). Layers of Learning in Initial Teacher Education. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*(2), 89-92.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* Universidad de Granada.

Latorre, A., Del Rincón, D., Arnal, J. (1996). *Bases metodológicas de la investigación educativa*. Barcelona: Hurtado ediciones.

Kilpatrick, J. (2003). Promoting the proficiency of U.S. mathematics teachers through centers of learning and teaching. En R. Strässer, G. Brandell; B. Grevholm (Eds.), *Educating for the future. Proceedings of an international symposium on mathematics teacher education*. 143-157. Göteborg: Royal Swedish Academy of Sciencies.

Schön, D. A. (1983). *The Reflective Practitioner: how professionals think in action*. New York: Basic Books.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *American Educational Research Association, 15*(2), 4-14.

Sosa L. (2006). *Tipos de concepciones sobre la naturaleza de las matemáticas, de su enseñanza y de su aprendizaje. Un estudio con profesores en servicio.* Tesis de maestría no publicada. Cinvestav, México.

Sosa L. (2011). *Conocimiento Matemático para la enseñanza en bachillerato. Un estudio de dos casos.* Tesis doctoral publicada en http://hdl.handle.net/10272/4509.

Sosa, L. (2012). *Profesionalización docente. Conocimiento Matemático para la Enseñanza.* Seminario de capacitación y de posgrado. Universidad de Villa María, Córdoba, Argentina.

Sosa, L. y Aguayo, L. (2013). Pensamiento numérico: errores frecuentes de los estudiantes en la enseñanza. *5° Congreso Internacional sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas*. UNAM, México.

Sosa, L., Huitrado, J.L., Hernández, J., Borjón, E. y Ribeiro, M. (2013). Uma oportunidade para o profesor aprender analizando os erros dos alunos – Un exemplo de Álgebra. In atas *XIX Encontro Nacional de Professores de Matemática (ProfMat 2013)*, Lisboa: APM.

Stake, R.E. (2005). *Qualitative Case Studies. The Sage handbook of qualitative research (3rd ed.)*.Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Tamir P. (1991). Professional and personal knowledge of teachers and teachers educators. *Teacher and Teaching Education, 7* (3), 263-268.

Vrancken, S., Gregorini M.I., Engler, A., Müller, D. y Hecklein, M. (2006). *Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite.* Universidad Nacional del Litoral. Argentina.

CONTRIBUCIONES PARA EL MEJORAMIENTO DEL PROCESO DE DESARROLLO DEL EJE DE LA PRÁCTICA PROFESIONAL EN MATEMÁTICA

Lidia Beatriz Esper y Carmela L. La Tora
Universidad Nacional de Tucumán Argentina
Ministerio de Educación (MEd) de la Provincia de Tucumán.
Inst. Superior de Formación Docente.
liesper@yahoo.com.ar

Resumen. El trabajo se inscribe en el marco del Proyecto de Articulación e Integración de la Formación Docente, entre la Universidad Nacional de Tucumán y Ministerio de Educación y Cultura de la Provincia de Tucumán, denominado: "Mejoramiento del Proceso de Desarrollo del Eje de la Práctica Profesional en Educación Científica, en las Carreras de Profesorado de Educación Primaria y Profesorado de Matemática y su Impacto en las Escuelas Seleccionadas de los distintos niveles". Fue destinado a docentes del nivel primario y medio que reciben residentes, residentesy profesores en Matemática de los Institutos Superior de Formación Docente (ISFD).Se desarrollaron distintas acciones entre las que se encuentran: Jornadas de profundización disciplinar y didáctica, Seminarios Taller, Talleres institucionales e interinstitucionales de intercambio entre la Universidad y los ISFD e implementación de un Foro de relatos de experiencias. Se evaluaron avances y obstáculos encontrados en la ejecución y de cómo el proyecto favoreció la articulación interinstitucional.
Palabras clave: práctica profesional, formación docente, matemática
Abstract. The work forms part of the Project of Coordination and Integration of Teacher´s Education, between the National University of Tucumán and Ministry of Education and Culture of the Province of Tucumán, called: "Improving the Development Process of the Axis of Professional Practice in Science Education , in careers of Elementary Education Teacher and Mathematics Teacher and its Impact on the Selected Schools of different levels. " It was aimed at teachers of primary and middle levels who receives residents, residents and teachers in Mathematics of Higher Teacher Training Institutes (ISFD) , and Working day for deepening on discipline and teaching , Workshop Seminars , Institutional and inter- institutional workshops for the exchange between the University and the ISFD and implementation of a forum of stories of experiences: different actions between those that are developed. Progress and obstacles encountered in the implementation were evaluated and how the project encouraged inter-institutional linkage.
Key words: professional practice, teacher-training mathematics

Introducción

La enseñanza de las matemáticas en el momento actual pasa no tan solo por una discusión de lo didáctico, lo disciplinar y lo normativo del área, sino también, como ésta debe contribuir a la realización de la visión, misión y filosofía institucional de nuestras comunidades educativas y a los objetivos propios de la educación que la constitución y la ley, nos exigen.

Gran parte de las investigaciones recientes en Educación Matemática, relacionadas con el desarrollo profesional del docente, se han centrado en el análisis de las competencias asociadas al contenido matemático, y se asume que ello es parte clave de las competencias profesionales especificas (Llinares, 2009). Pero enseñar Matemática también exige al docente un cambio conceptual, procedimental y actitudinal paralelo al que promueve en sus alumnos, a fin de lograr un aprendizaje significativo. Esto requiere realizar ajustes y cambios destinados al mejoramiento de la práctica profesional en las carreras de Profesorado de Matemática. Un camino pare ello sería

satisfacer las demandas de una mayor articulación entre niveles, que es tema central en el sistema educativo argentino. Además, el vínculo de las instituciones formadoras se ha caracterizado por ser *restringido* y *unidireccional*. Restringido a una relación con las escuelas únicamente para desarrollar las residencias y prácticas de los futuros docentes en sus aulas; unidireccional, porque se presenta una vinculación entre Institución formadora y Escuela, sin que se establezca un sistema que articule el desarrollo y funcionamiento entre las mismas Instituciones Formadoras. Se generan de esta manera, diferencias sustantivas en relación a los contenidos, modalidades de enseñanza y estilos de trabajo.

Por lo tanto, surge como prioritario mejorar la enseñanza de la Matemática a través de acciones efectivas de cambio, que impacten en los distintos niveles educativos involucrados, fortaleciendo el apoyo mutuo, la integración y el seguimiento de los resultados.

Para transitar este camino de cambios, las Autoridades de la Universidad Nacional de Tucumán (UNT) y las del Ministerio de Educación (MEd) de la Provincia de Tucumán, decidieron firmar un convenio, constituyendo un equipo de trabajo que diagnostique de modo válido y confiable cómo se desarrolla la Práctica Profesional en Educación Científica. Y, a partir del mismo, formular un Proyecto de acción conjunto que supere las debilidades detectadas y potencie las fortalezas encontradas.

Con la finalidad de lograr este objetivo, surge el Proyecto de Articulación e Integración de la Formación Docente denominado: "Mejoramiento del Proceso de Desarrollo del Eje de la Práctica Profesional en Educación Científica, en las Carreras de Profesorado de Educación Primaria y Profesorado de Matemática y su Impacto en las Escuelas Seleccionadas de los distintos niveles", que fue puesto en marcha en la Provincia de Tucumán en el año 2010 y, cuyas actividades continuaron hasta marzo del año 2012.

La participación de expertos de ambas instituciones, conformaron un equipo que tomaron en consideración el contexto cultural y curricular de los Instituto Nacional de Formación Docente (ISFD), garantizando la autenticidad y la validez educativa de lo planificado en el Proyecto, con un enfoque amplio que, si bien refleja los cambios más recientes en materia curricular, va más allá del enfoque centrado en la escuela para orientarse hacia la aplicación de los conocimientos a las tareas y los retos cotidianos.

Datos generales del proyecto

El Proyecto pretende construir un espacio de formación teórico-metodológica, que permita actualizar los conocimientos acerca del eje de la práctica profesional en Matemática. Al mismo tiempo, iniciar un camino para la redefinición de estos espacios dentro de los diseños curriculares

de la formación docente. El mismo articula instituciones de Educación Superior Universitaria y no Universitarias y Escuelas Primarias y Secundarias (o Medias) de la Provincia de Tucumán, a fin de integrarlas miradas sobre las prácticas y residencias pedagógicas.

Los objetivos generales que se plantearon para el desarrollo son:

- Propender a la mejora y fortalecimiento del Sistema de Formación Docente a través de acciones interinstitucionales entre la UNT y la Dirección de Educación Superior y Artística, centrado en el proceso de desarrollo del eje de la práctica profesional en educación científica en las carreras de Profesorado de Educación Primaria y Profesorado de Matemática y su impacto en las escuelas de aplicación de los distintos niveles
- Reconocer al Campo de la Práctica Profesional como eje vertebrador del curriculum para la Formación Docente, recuperando el lugar de la práctica como un espacio formativo que promueve y sostiene a una educación con equidad.
- Preparar a los futuros docentes para desempeñarse en contextos institucionales, culturales y sociales diversos constituyendo vínculos sistemáticos entre las distintas instituciones formadoras.

Esto implica, entre otras cuestiones, las siguientes estrategias. Articular el trabajo entre la Universidad e ISFD para juntos desarrollar una tarea en equipo con Escuelas que reciban a los estudiantes del profesorado en Matemática (residentes). Trabajar con todos los actores involucrados: directivos, equipos de áreas, docentes y alumnos. Potenciar el desarrollo profesional de los docentes y de los futuros docentes. Promover la reflexión acerca de los desafíos de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática en los distintos contextos de las escuelas y profundizar la reflexión sobre nuestras prácticas de enseñanza, articulando los saberes institucionales, contenidos disciplinares, el proceso de aprendizaje y la buena enseñanza, en función de favorecer la calidad de la educación.

Las **Instituciones participantes** en el proyecto, son todas de gestión estatal:

- Universidad Nacional de Tucumán: Facultades de Ciencias Exactas y Tecnología, y Facultad de Ciencias Naturales (Cátedra de Matemática).
- Institutos Superior de Formación Docente ubicados en las localidades de Aguilares, Tafí Viejo,Villa Quinteros,Monteros y los ISFD *Lola Mora* y *Manuel Marchetti* de San Miguel de Tucumán,
- Escuelas: *Normal Superior Florentino Ameghino* de la localidad de Alberdi; *Normal Superior Manuel Belgrano* de Simoca; *Normal Superior Gral. Julio A. Roca* y *Superior de Comercio* de

Monteros, *Osvaldo Mangnasco* de Villa Quinteros y las esc. *Técnica Nº 1*, *Bellas Artes*, *Ciudadela*, *Comercio Nº 1* , *Normal Superior J.B. Alberdi* de San M. de Tucumán.

Descripción del Proyecto

Para llevar adelante este proyecto fue necesario plantear pasos y etapas que redundaron en la consolidación de algo más que un equipo de trabajo. Es un modelo alternativo de diseño de prácticas para mejorar los aprendizajes en los profesorados y en otras situaciones de aprendizaje en las diferentes instituciones que participaron.

Se distinguieron dos etapas de trabajos, que se retroalimentaron entre sí:

Etapa de Diagnóstico: como primera instancia, se hizo un diagnóstico a través del análisis de las planificaciones utilizadas en las escuelas seleccionadas, para revisar el estado de situación del proceso de enseñanza y aprendizaje centrado en Didáctica de la Matemática con Residencia según el nivel que corresponda. Para ello se llevaron a cabo Jornadas de trabajo con los Directores de Nivel de la Jurisdicción y Referentes de la UNT, Coordinadores de grado, Referentes institucionales y Profesores del campo de la práctica profesional, para socializar el proyecto, sus objetivos y acciones planificadas.

Etapa de Desarrollo: a partir de la etapa anterior, surge de los Referentes de la UNT, la planificación de las actividades en el Área Matemática para abordar las soluciones a los problemas detectados en el proceso de enseñanza aprendizaje de esta ciencia. Para abordar dichas problemáticas se propusieron las siguientes actividades:

- *Jornada de socialización* y análisis de los resultados del Diagnóstico. Revisión de factores favorecedores y obstaculizadores convergentes en el desarrollo curricular del campo de la práctica profesional.

- *Jornadas de profundización disciplinar y didáctica* en el área de Matemática, a cargo de especialistas de la UNT destinado a profesores de ISFD y profesores orientadores / tutores de los residentes, centrados en el Campo de la Práctica Profesional.

- *Seminarios taller* con profesores de los ISFD, profesores de educación secundaria que reciben residentes y residentes.

- Encuentros conjuntos (denominados *Talleres institucionales* e *interinstitucionales*) con profesor de didáctica - residente - profesor del aula - acompañante didáctico para elaborar propuestas didácticas y de explicitación de estrategias de resolución de problemas.

- *Foro de intercambio de experiencias* para la producción de documentos en los que se expresen posibles estrategias de mejora de la práctica profesional.

Estos encuentros, llevados a cabo en distintas instancias, permitieron realizar actividades innovadoras que favorecieron la articulación e integración de la formación docente en un espacio de reflexión acción. Los contenidos disciplinares abordados dentro del núcleo (problematizador) *Lo geométrico* (MEd, 2009), fueron: figuras geométricas, propiedades geométricas que se mantienen invariantes en las figuras planas, construcción de figuras con distintos instrumentos; perímetro y área de figuras.

Con los docentes de los ISFD de nivel primario, a través de propuestas superadoras se reflexionó en un taller sobre "Cuentas vs Problemas" y "Diferencias entre problemas y ejercicios de aplicación". Además se hizo un análisis y clasificación de los problemas aditivos y multiplicativos (Broitman, 1999, 2000;Parra, 1994;Sadovsky y col. 1999; Vergnaud,1976).

Con los docentes de los ISFD de nivel secundario, se realizaron actividades que permitieron abordar contenidos del Núcleo: *Lo Numérico* y *Lo Aritmético* (MEd, op.cit.); se realizaron actividades para identificar patrones (numéricos, geométricos y fractales) y para abordar contenidos del Núcleo: *Lo Analítico* y *Lo Algebraico* (MEd, op.cit.; Broitman e Itzcovich, 2001).Se tuvo en cuenta para la elaboración de las actividades, los trabajos de Napp y col. (2000); Charnay (1994), Chemello y Diaz, (1997); Sadovsky y col. (1998), entre otros. Además se trabajó en forma grupal, por área, para compartir experiencias sobre la utilización de las TIC en la actividad docente y conocer los múltiples recursos disponibles para su incorporación en los contenidos curriculares específicos. Se implementó el uso de los programas GeoGebra y Winfu, para los docentes del nivel primario y secundario respectivamente.

Se previó la participación de un experto en Didáctica de la Matemática, la Dra. Mabel Rodríguez de la Universidad Nacional de Gral. Sarmiento (Bs. As.) que dictó el seminario-taller:"Educación Matemática con enfoques didácticos para la enseñanza".

En esta línea de acción, tratamos de construir un espacio de formación en la "Didáctica de la Matemática", que permita actualizar los conocimientos y experiencias acerca del eje de la práctica, al mismo tiempo, iniciar un camino para la redefinición de estos espacios dentro de los diseños curriculares de la formación docente.

El Foro de intercambio de experiencias, para la producción de documentos en los que se expresan posibles estrategias de mejora de la práctica profesional, estuvo dirigido a la sistematización y producción de materiales delos docentes de los ISFD, UNT, docentes y residentes de nivel

primario y secundario, involucrados en el proyecto. Algunos de los trabajos presentados en el *Foro*, por docentes y alumnos, abordaron las siguientes temáticas:

- "Geometría fractal". Disertantes: residentes de 3° año del Profesorado de Matemática del ISFD Lola Mora;
- "Orientaciones didácticas para la enseñanza de la Geometría". Disertantes: docentes y alumnos del ISFD de la localidad de Simoca;
- "Grafos", "Expresiones Algebraicas" y "Simetrías". Disertantes: alumnos del IES Lola Mora y residentes de la Esc. Normal J. B. Alberdi de SM de Tucumán;
- "Semejanza y homotecia". Disertantes: alumnos del ISFD Lola Mora y residentes de la Esc. de Artes;
- "Sistema monetario". Disertantes: alumnos del ISFD de Villa Quinteros;
- "Matemática" Disertantes: docentes del ISFD de Aguilares;
- "Enseñar Matemática a través de la Resolución de Problemas". Disertantes: docentes y alumnos del ISFD de Monteros;
- "Función Lineal", Disertantes: residentes del ISFD de Monteros.

Preparar a un docente para "saber enseñar" Matemática, supone contar con un bagaje de saberes disciplinares que integran los aspectos conceptuales, procedimentales y actitudinales propios de esta ciencia. El adiestramiento en distintas alternativas metodológicas, permite a los docentes involucrados, avanzar hacia el aprendizaje de estrategias de razonamiento y de comprensión, es decir, avanzar hacia el mejoramiento de su práctica profesional.

Las actividades desarrolladas permitieron proporcionar, a alumnos avanzados de los ISFD, prácticas como complemento a su formación, enriqueciendo sus conocimientos y experiencias para el ejercicio futuro de la profesión. También, aportaron nuevas vivencias para los Proyectos Educativos Institucionales, afianzando la interacción en el Sistema Educativo Local, en respuesta a necesidades y demandas existentes en la comunidad.

Los docentes del Profesorado, desde su rol de protagonistas, compartieron talleres sobre alternativas metodológicas superadoras para enseñar y aprender Matemática, no sólo con sus alumnos residentes, sino también, con maestros de Escuelas Asociadas.

Los residentes implementaron las metodologías superadoras para abordar temáticas áulicas, planteando y buscando respuestas a situaciones problemáticas concretas. Esas actividades, fueron

observadas y registradas por las coordinadoras del proyecto y por las especialistas investigadoras de la UNT.

La multiplicidad de miradas, lejos de convertirse en un obstáculo, se la recupera como fortaleza para la producción de narrativas atravesadas por los distintos niveles educativos: primaria, media, superior no universitario y universitario; por el aporte de los estudiantes que reflexionarán con los docentes orientadores de la práctica las subjetividades /objetividades propias de sus primeros momentos en el aula; en fin, se trabajó desde la opción de volver enseñable una disciplina (Lucifora y col., 2009)

Evaluación de las acciones ejecutadas

Respecto del planteo de los objetivos generales del proyecto es posible inferir de los resultados que el total de los sujetos participantes pudo acceder a un estilo diferente de asumir las prácticas de residencia. Esto implica que hubo un comienzo de apertura de los especialistas en la disciplina para reconocer que las acciones de la práctica de la enseñanza no son patrimonio exclusivo de los Pedagogos. Por otro lado los residentes pudieron aportar a los "profesores del curso" contenidos y metodologías innovadoras.

Tiempo: Si bien se necesitó seis meses más para el desarrollo del total de las acciones, se pudo concretar el 100% de las planteadas en la propuesta y se logró realizar la divulgación por internet de algunos ejemplos de propuestas de desarrollo de contenidos.

Localización: La apertura de espacios de discusión entre actores diversos, generó la necesidad de desarrollar los encuentros en las sedes seleccionadas en capital y en el interior de la provincia. Esta decisión contribuyó a dinamizar la comunicación entre los actores involucrados.

Actores: En los informes específicos, elaborados por los especialistas se puede observar el creciente interés de los docentes por aportar a la tarea común desde cada rol particular.

Impacto: se puede apreciar desde perspectivas diversas: cuantitativa y cualitativa. Ambas se complementan para informar en la toma de decisiones. Además, se puede observar el impacto desde la perspectiva de los sujetos involucrados, de las Instituciones participantes y del gobierno de la educación, por mencionar algunas de las miradas significativas sobre la experiencia realizada.

En el caso del proyecto de referencia es posible inferir que el sostenimiento del número de participantes y la frecuencia de los encuentros antes, durante y después de las prácticas de la enseñanza manifiestan de alguna manera que la ideología de base del mismo está vigente.

La creación de espacios de discusión y el sostenimiento de los mismos, aseguró la dinámica teoría/ práctica postulada en los fundamentos del proyecto.

El uso de las TICs en la enseñanza pudo abrirse camino por la actitud y apertura de los profesores de práctica junto a los especialistas y la plasticidad de los practicantes (usuarios de las redes de comunicación)

Si bien se prioriza el valor del encuentro cara a cara de los actores involucrados en la experiencia, se considera de suma importancia el *Foro virtual*(página de internet en el sitio del Ministerio de Educación de Tucumán; http://des.tuc.infd.edu.ar) para que otros docentes compartan metodologías abordadas con determinados temas y para sostener el contacto en el tiempo y en espacio de contacto diferente del espacio-aula.

Respecto de la mirada de los sujetos involucrados, se ofrecieron materiales de autoevaluación al finalizar cada jornada de encuentro para responder en forma anónima y a partir de esa información se puede concluir que los usuarios mostraron un alto grado de satisfacción con la experiencia.

Respecto de los Institutos Formadores, se puede concluir que iniciaron una *Red* de comunicación interinstitucional que intenta superar el trabajo individual. Se estima que este primer paso puede ser significativo en el proceso de cambio curricular que está planteando el Ministerio de Educación para los profesorados en Educación Secundaria.

A modo de reflexión

Cumplidas las etapa del proyecto, consideramos que el mismo, puede convertirse en la principal variable de los procesos de construcción, reconstrucción, crecimiento y mejora del eje de la práctica en la formación de Profesores y Maestros en los ISFD, favoreciendo la relación entre Profesores y Residentes de los ISFD y los Docentes de las Escuelas Asociadas de nivel primario y secundario.

En la localidad de San M. de Tucumán, el número de residentes excede las posibilidades de encuentro personal con los profesores de práctica, tanto en la tutoría como en la práctica (en algunos casos un docente cada sesenta practicantes). Sería deseable que el gobierno de la educación proveyera el número de cargos suficientes para atender las demandas de la práctica de la enseñanza. Se estima que un docente de práctica articulando con el especialista de la disciplina, puede atender veinte alumnos con la carga horaria que se les asigna.

Se pudo observar en los encuentros sostenidos entre profesor de práctica, residentes y profesores de curso con presencia de estudiantes del nivel secundario, que el profesor de curso sigue aferrado a sus prácticas, y si bien acepta nuevos enfoques (por lo menos, desde lo verbal) es muy probable que en su práctica cotidiana no pueda remover viejos esquemas. Lo que sería importante rescatar es la actitud de apertura frente a la propuesta del residente respecto de la

enseñanza. Por su lado, las maestras de grado de primaria muestran una plasticidad mayor ante los nuevos enfoques. Sin embargo no acceden por diversas cuestiones, al uso de internet en la escuela.

Se espera que esta experiencia contribuya a generar algún tipo de cuestionamiento sobre la propia práctica de los profesores involucrados y que el modelo de talleres institucionales e interinstitucionales contribuyan al logro de lo expresado anteriormente, para lo cual es necesaria la continuidad de estas acciones, a fin de optimizar la articulación y el intercambio de materiales para socializar las experiencias con otros docentes y futuros docentes del Sistema Educativo.

Referencias bibliográficas

Broitman C. e Itzcovich, H. (2001). Orientaciones didácticas para el trabajo con números en los primeros años de la EGB. Bs. As.: GCBA, Dirección de Currícula.

Broitman, C. (1999). *Las operaciones en el primer ciclo: aportes para el trabajo en el aula*. 1ª ed. Bs. As.: Centro de Publicaciones Educativas y Material Didáctico.

Broitman, C. (2000). El tratamiento didáctico de los problemas multiplicativos desde los primeros años de la escolaridad básica. *Revista de Educação Matemática. Projeto* 3(1), 26-38.

Charnay, R. (1994). Aprender (por medio de) la resolución de problemas. En C. Parra y I. Saiz (Comps), *Didáctica de Matemática, Aportes y Reflexiones*, Bs. As.: Editorial Paidós. Cap. III.

Chemello G. y Díaz A. (1997). Matemática: Modelos Didácticos. Programa de perfeccionamiento docente. Bs. As.: PROCIENCIA. Conicet, MC y E.de la Nación.

Llinares, S. (2009). Competencias docentes del maestro en la docencia en matemáticas y en el diseño de programas de formación. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, Vol. 51(3), 92-101.

Lucifora, S., Dell´Oro, G., Gadowski, G., Fernández, B., Pérez, V. y Huarte Martínez, M. (2009). Proyectos de articulación e integración de la formación docente PROINTEGRAR I: Una experiencia de trabajo en conjunto entre la universidad, ISFD y Escuelas Medias de la provincia de Bs As en las disciplinas de Matemática, Historia, Geografía y Lengua. En L. Porta (Ed.) *Actas de las V Jornadas sobre la Formación del profesorado: docentes, narrativas e investigación educativa* (pp. 43,44) 1ª ed. Mar del Plata: U.N. de Mar del Plata.

MEd (2009). Proyecto de Mejora de la Formación Docente Inicial para el Nivel Secundario en Biología, Física, Matemática y Química. Bs. As.:Sec. de Políticas Universitarias.

Napp, C., Novembre, A., Sadovsky, P. y Sessa, C. (2000). Apoyo a los alumnos de primer año en los inicios del nivel medio. La formación de los alumnos como estudiantes. Estudiar Matemática. Bs. As.: Secretaría de Educación, Dcción Gral de Planeamiento.

Parra, C. (1994). Cálculo mental en la escuela Primaria. En C. Parra y I. Saiz (comps.) *Didáctica de Matemáticas, Aportes y Reflexiones* (pp. 219-274), Bs. As: Ed. Paidós.

Sadovsky, P., Lerner, D., Parra, C. y Segal, C. (1998). Actualización Curricular - Matemática - EGB - Documento de Trabajo N° 5. Bs. A: Secretaría de Educación. Dirección de Curriculum.

Sadovsky, P., Parra, C., Itzcovich, H. y Broitman, C. (1999). Pre Diseño Curricular para la Educación General Básica, Segundo Ciclo, Tomo 2, Matemática (p.491-584). Buenos Aires: Dirección de Currícula, Secretaría de Educación, GCBA.

Vergnaud, G. (1976). *El Niño, Las Matemáticas y la Realidad: Problemas en la Enseñanza de las Matemáticas en la Escuela Primaria*. Méjico: Ed. Trillas.

EL AFECTO EN EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA: UNA MIRADA DESDE LOS DOCENTES PARAGUAYOS

Oswaldo Jesús Martínez Padrón
Universidad Pedagógica Experimental Libertador Venezuela
ommadail@gmail.com

Resumen. En este documento se describe, densamente, lo que opinaron y observaron algunos docentes que enseñan Matemática en Educación Secundaria en la República de Paraguay. La información se obtuvo mediante las respuestas que dieron a un cuestionario que les fue aplicado en relación con "El Afecto en el Aprendizaje de la Matemática", el cual fue un tema de un Curso denominado Ñanduti, de la OEI, concebido como un Proyecto de Formación Permanente dirigido al profesorado de secundaria de Iberoamérica. A la data reportada se le hizo un análisis de contenido, destacando entre las conclusiones la existencia de variados factores de ámbito afectivo que impulsan o inhiben el aprendizaje de la Matemática. Los docentes también reportaron la presencia de un importante número de estudiantes que sienten repudio por esta asignatura, lo cual acompañan con actitudes adversas y con representaciones sociales ligadas al fracaso en el aprendizaje de la Matemática.
Palabras clave: afecto hacia la Matemática
Abstract. This paper makes a dense description of what they felt and observed some teachers who teach Mathematics in Secondary Education in the Republic of Paraguay. The information was obtained by the answers given to a questionnaire administered in connection with "The Affect in learning Mathematics" which was a theme of a course called Ñanduti, OEI, conceived as a permanent training project aimed at secondary school teachers in Iberoamerica. The data will be made a content analysis, highlighting the findings between the existence of various affective domain factors that drive or inhibit the learning of mathematics. Teachers also reported the presence of a significant number of students they feel repudiation by the mathematical, which accompanied with adverse attitudes and social representations linked to failure in the learning of mathematics.
Key words: affection for mathematics

Introducción

El impacto de las investigaciones en Educación Matemática en el mejoramiento del aprendizaje de la Matemática deja mucho que desear, así se entiende cuando se analizan las preocupaciones de muchos de los investigadores que participan en eventos tales como la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME). En la RELME 25, autores como Rodríguez (2012) y Müller, Engler y Vrancken (2012) aseguraron que aún prevalece el fracaso en el aprendizaje de la Matemática, indicando que quienes estudian esta asignatura continúan desmotivados para aprenderla. En este sentido, Veiga (2012) invita a que se siga revisando la actuación no sólo de quienes la aprenden sino de quienes la enseñan. En relación con este último aspecto, en la RELME 26, González de Hernández (2013) y Paulino y Marmolejos (2013) también insisten en que hay fallas en el proceso de formación de los docentes que enseñan esta área del saber, acotando la primera que el origen del problema de bajo rendimiento en Matemática no siempre es culpa del propio estudiante. En lo que respecta a la RELME 27 varios trabajos trazan estrategias de apoyo y se concretan acciones que aún no logran impactar de manera relevante el mejoramiento del aprendizaje de la

Matemática, destacando los que tienen que ver con el fracaso en la formación de los docentes, la desmotivación y el afecto hacia la Matemática (Parra, 2013; Camacho, 2013).

En este orden de ideas, Vila y Callejo (2004), Maaß y Schlöglmann (2009) y Martínez Padrón (2011) reportan el impacto que tienen las creencias y las actitudes en el aprendizaje de la Matemática, destacando este último que los estudiantes pierden el interés y el gusto por dicha asignatura al notar que sus bases no son suficientes para enfrentar los retos y superar algunos obstáculos que suelen presentarse en su trayectoria escolar, sobre todo cuando no le es posible utilizarla como herramienta para identificar, describir, explicar, contrastar, evaluar, conjeturar y predecir hechos y situaciones en diferentes momentos y contextos. Otros factores afectivos también están presentes en el éxito, o en el fracaso, de los docentes y sus estudiantes, en relación con la Matemática que se enseña, se aprende o se evalúa. Es por eso que, sobre esta base referencial, se desarrolló este documento cuyo objetivo es analizar lo que opinaron y observaron algunos docentes que enseñan Matemática, en la Educación Secundaria de la República de Paraguay, en relación con el afecto hacia la Matemática, lo cual fue posible durante el desarrollo de un curso que formó parte del Proyecto de Formación Permanente dirigido al profesorado de secundaria de Iberoamérica que, actualmente, ejecuta el Centro de Altos Estudios Universitarios de la Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI), y apoyado por la Agencia Española de Cooperación Internacional para el Desarrollo, la Federación Iberoamericana de Sociedades de Profesores de Matemáticas, la Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas "Isaac Newton" y la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales". Concretamente se hizo desde el desarrollo del tema denominado Afecto hacia la Matemática, que forma parte del Curso Ñanduti diseñado por Balbuena y Carrillo (2011) y puesto en marcha por esa organización con la meta de mejorar las competencias científicas, técnicas y didácticas del profesorado de Matemática de toda Iberoamérica.

El documento utilizado por los participantes del curso se derivó de una investigación documental de donde surgió una síntesis de los aspectos teórico-referenciales más relevantes del tema tratado, así como las actividades contentivas de interrogantes respondidas por tales participantes, en relación con el afecto hacia la Matemática. Las teorías propuestas por autores tales como Schoenfeld (1992), Ponte (1994), Gardner (1998), Gómez Chacón (2000), Vila y Callejo (2004), Goleman (1996; 2006), Martínez Padrón (2005; 2008a; 2008b; 2011), Albrecht (2006) y Maaß y Schlöglmann (2009), en relación con el afecto hacia la Matemática, fueron sometidos a un análisis de contenido. Las interrogantes solicitaron no sólo el reporte de experiencias personales y profesionales, sino de lo que pudieron detectar los cursantes al observar a los estudiantes que atendían en ese momento, en situación de resolutores de problemas de Matemática.

De las aportaciones dadas por los docentes, se consideraron algunos episodios críticos conectados con el afecto y el aprendizaje de la Matemática, sin descuidar los que tienen que ver con el dominio cognitivo y el social. Tales aportaciones fueron analizadas e interpretadas configurando un documento elaborado por Martínez Padrón (2011) que tiene un alcance mayor al presentado en esta oportunidad. A lo reportado por los docentes también se le hizo un análisis de contenido, interpretando los textos remitidos a la luz del conjunto de postulados teórico-referenciales ya construidos en relación con el tema tratado, abriendo conexiones entre variados factores afectivos que subyacen no sólo en quien aprende sino, también, en quien enseña o planifica, sin excluir al resto de actores o grupos socioculturales que pueden impactar en esos procesos.

Factores básicos del dominio afectivo

La constelación de factores que configuran el dominio afectivo recorre concepciones, ideas, sentimientos, apreciaciones, preferencias, valores, atribuciones, desarrollo personal, desarrollo social, motivaciones, creencias, emociones y actitudes, estando muchos de ellos imbricados en la consideración de los otros. Por tanto, no resulta fácil hacer tratamientos independientes de algunos de ellos. No obstante, es esta sección se describen, sucintamente, los tres últimos factores por configurar el conjunto básico de este dominio.

> En cuanto a las creencias, Martínez Padrón (2011) considera que constituyen principios rectores que forman parte del conocimiento adquirido por los sujetos sobre la base de sus experiencias de vida. Tienen un carácter intersubjetivo y representan construcciones que, implícitamente, están presentes al momento de actuar ante el objeto o sujeto que las motivan. En relación con las emociones, este mismo autor, basado en lo reportado por Gómez Chacón (2000) y Calhoun y Salomón (1989), concreta que son un complejo estado funcional que involucra tanto procesos fisiológicos como psicológicos, siendo los primeros de talante orgánico y los segundos se corresponden con actividades mentales y, por ende, de ámbito cognoscitivo. Goleman (1996) agrega que son sentimientos asociados con, entre otros: (a) pensamientos, (b) estados psicológicos y biológicos, y (c) tendencias de actuar. En cuanto a las actitudes, Martínez Padrón (2011) asevera que son reacciones valorativas o evaluativas manifiestas a través del agrado o desagrado hacia algún objeto, sujeto o situación. Esto obliga a pensar en variadas aristas, así como en componentes: cognitivo, afectivo, conativo y comportamental, sin excluir el axiológico (Gallego Badillo, 2000).

El afecto en el aprendizaje de la matemática

Cuando los estudiantes aprenden Matemática están expuestos a obtener alguna experiencia que les puede provocar reacciones que influyen en la formación de sus creencias acerca de la Matemática y acerca de sí mismo en relación con dicha asignatura (Gómez Chacón, 2000). Martínez Padrón (2008b) agrega que tales creencias pueden afectar sus comportamientos y sus acciones en situaciones de aprendizaje y en su capacidad de aprender Matemática. Estas, a su vez, pueden provocar reacciones emocionales que pudieran automatizarse y convertirse en actitudes que contribuyan con la formación y el mantenimiento de dichas creencias. Tal situación se constituye en uno de los planteamientos que permiten aseverar que el aprendizaje de la Matemática está directamente relacionado con el afecto, pudiéndose establecer conexiones, relaciones o explicaciones funcionales y no funcionales entre los factores comprometidos que subyacen no sólo en quien aprende sino, también, en quien enseña o planifica, sin excluir al resto de sujetos o grupos socioculturales que pueden impactar en esos procesos: los compañeros de clase, los docentes de quienes los estudiantes recibieron clase anteriormente, los padres, la noosfera y la sociedad en general.

En este orden de ideas, la conexión entre la Matemática que se aprende y el afecto hacia dicha asignatura está sustentada en factores tales como emociones, creencias y actitudes hacia la Matemática. Tal conexión ha sido muy descuidada al momento de considerar el fracaso de los que aprenden, de los que enseñan o del sistema social, económico y político donde están inmersos los protagonistas de la clase, pues, se descuidan momentos de insatisfacción, frustración, rabia, disgusto, repugnancia, desapego, incertidumbre, miedo, aversión, desánimo, resistencia o preocupación que limita el aprendizaje de la Matemática.

Como el aprendizaje también depende del contexto y de los demás, entonces lo que piensan, hacen o dicen los actores involucrados en la clase delinean, impactan y son impactados con lo que allí acontece.

Aunque lo recomendable es tratar la cognitivo, lo social y lo afectivo de manera integral, la discusión en este documento se sesga hacia lo afectivo por jugar papel preponderante en: (a) la facilitación o inhibición del aprendizaje de la Matemática; y (b) el éxito, o el fracaso, tanto profesional como personal de los sujetos, el cual, según Goleman (1996), tiene mayor dependencia en lo emocional que en lo cognitivo.

Lo que dijeron los docentes paraguayos

Entre las actividades que siguieron los docentes que participaron en el tema Afecto hacia la Matemática, del Curso Ñanduti, estaba la siguiente: Seleccione algunos problemas de Matemática, organice a sus estudiantes en grupos y colóquelos en situación de resolutores

de esos problemas. Obsérvelos, describa lo observado y marque algunos episodios críticos que reporten situaciones de gusto, molestia, placer, aversión u otro factor del dominio afectivo que permita describir, comprender o explicar lo que allí acontece en relación con el aprendizaje de los contenidos matemáticos que conforman la estructura de los problemas dados. De igual manera, solicite que describan algunas situaciones que le ocurrieron durante el proceso de resolución. Parte de esa información se muestra a continuación, aclarando que para reportar lo que dijeron esos docentes se utilizó la siguiente notación: **AN-n** donde **AN** indica el número del aula donde el participante hizo el curso y **n** indica el número asignado a cada participante, en esa aula particular.

❖ A2-2: Hay estudiantes que se interesan por buscar la solución del problema, <<*otros demuestran preocupación y hasta desesperación por no entenderlo. También están los que no demuestran ningún interés por aprender y los que se pasan molestando a los que procuran trabajar*>>. Entre los estudiantes hay quienes tienen dificultad en explicar el razonamiento realizado para resolver determinados problemas, unos por desconocimiento y otros por la dificultad que tienen en utilizar los términos matemáticos. Durante el desarrollo de los problemas, algunos estudiantes <<*demostraron su satisfacción por las situaciones planteadas*>> y se esmeraron en resolverlas, <<*otros se mostraron contrariados y constantemente se quejan de que es difícil, que no les gusta pensar para resolver las situaciones planteadas y que por estas razones no les gusta la matemática*>>. Una minoría se muestra indiferente, sin demostrar aceptación o rechazo por la tarea a ser realizada.

❖ A1-4: De los 40 estudiantes, 8 demostraron placer y pusieron <<*su empeño en resolver los problemas presentados*>>. Aproximadamente, un 50% de los restantes, se esforzó en <<*resolverlos para demostrar que son buenos/as alumnos/as, pero lo hacen por obligación. Los demás esperan la oportunidad para copiar de los otros compañeros del grupo, manifestando que no lo saben hacer*>>. Además, muchos estudiantes <<*demuestran total aversión por la matemática y llegan al 7° grado sin haber aprendido ni siquiera las operaciones básicas*>>.

❖ A1-5: En el aula hay todo tipo de reacciones, dependiendo de los gustos, capacidades y aptitudes de los estudiantes. <<*Algunos han demostrado gusto al tener que trabajar con los problemas y placer al poder resolverlos, otros siempre están muy molestos e incómodos a la hora de trabajar con esta materia y debo intentar motivarlos constantemente*>>. En estos casos, el docente declara <<*que a estos alumnos les cuesta mucho más aprender los conceptos y aplicarlos en ejercicios o problemas, ya que se nota que tienen una predisposición negativa hacia las matemáticas por diversos motivos y experiencias que debieron haber sucedido posiblemente a lo largo de su vida estudiantil*>>.

❖ A1-7: Cuando los estudiantes no demuestran interés por las actividades desarrolladas en un momento dado de la clase, entonces <<*sienten angustia, rabia y miedo*>> cuando tienen que resolver sus ejercicios.

❖ A1-10: <<*Los estudiantes que gustan de las matemáticas sienten placer, gusto al trabajar y desafían a repetir la experiencia. Los... que no… se sienten molestos dicen aburrirse,… preguntan para qué sirve esto*>>.

❖ A3-6: Hubo quienes dijeron que sintieron: (a) <<*angustia de no saber hacer… Nos rompimos la cabeza,…, ¡fue muy difícil!*>>; (b) <<*muy bien porque pudimos resolver los tres problemas. Tal vez no estén bien pero la intención es lo que vale*>> aunque, según el docente, <<*No hicieron bien ningún problema*>>; y (c) asustados <<*al ver el primer "ejercicio" porque nunca lo vimos antes, y los otros "ejercicios" tampoco los pudimos resolver porque nos olvidamos del procedimiento de resolución de este tipo de problemas*>>

❖ A2-4: Las reacciones de los estudiantes son diversas: <<*algunos compiten con otros compañeros y manifiestan euforia al encontrar una solución correcta… otros son más lentos y las reacciones en estos son más emocionantes, la satisfacción que sienten es más profunda porque saben que les llevó un poco más de tiempo pero que el esfuerzo tiene sus frutos*>>. Hay quienes manifiestan que: (a) <<*el razonamiento aplicado en la resolución de situaciones problemáticas…mucho depende del conocimiento, interpretación y correcta aplicación de los conceptos matemáticos*>>; (b) <<*con la práctica constante, se van adquiriendo mayores destrezas,…haciendo… que lo complejo sea más fácil*>>, *evitando el aburrimiento y produciendo* <<*satisfacciones positivas por el logro obtenido*>>

❖ (A2-1): Cuando los estudiantes solicitan razones sobre la aplicación o uso de lo aprendido o de lo que se les enseña, suelen escucharse expresiones tales como: <<*¿Para qué estudian eso si en la vida diaria no lo van a utilizar?*>> y << *¿Para qué sirve la matemática si voy a estudiar leyes?, ¡nunca entendí la matemática!, si voy al súper no voy a pedir la cuenta en progresión aritmética*>>

En resumen, la experiencia da cuenta de variados episodios directamente ligados con el afecto, haciendo mención al gusto, la molestia, el placer, el aburrimiento, el miedo, la aversión u otros factores constituyentes del dominio afectivo. No obstante, su consideración y manejo, junto con lo social, aún es muy deficiente, pues, se continúa ennobleciendo el concepto de inteligencia basado en la razón de los sujetos, aunque en el aula prevalezcan factores desfavorables tales como la ira, la violencia, el desgano, la desmotivación, el aburrimiento, la depresión o la falta de empatía o de autenticidad de quiénes enseñan o aprenden Matemática.

Es importante destacar que lo que tiene que ver con la actitud hacia la Matemática a veces se torna alarmante y desalentador. A2-5 señala que <<*es impresionante como el solo escuchar la palabra Matemática, produce una especie de repudio…* [y] *rechazo por parte de algunos estudiantes*>>. Este docente apunta que los principales responsables pudieran ser los mismos docentes, sobre todo aquellos de los primeros grados quienes no siempre inculcan el afecto hacia la Matemática y no tratan de hacerla agradable.

Al cierre de esta sección, vale agregar lo que dijo (A6-1): <<*he escuchado decir que las cosas no aburren porque son aburridas sino que nos aburren porque somos aburridos*>>. Esto pudiera acrecentarse si, además, se privilegia lo estrictamente intelectual en detrimento de la carga afectiva que pudiera servir para explicar, describir o comprender lo que acontece, con frecuencia, en las aulas de clase de Matemática

Conclusiones

Se puede advertir la existencia de experiencias que indican que la problemática existente en el aprendizaje de la Matemática continúa vigente y se mantiene supeditada a la ausencia de consideraciones puntuales que tienen que ver con la conjunción de los factores cognitivos, afectivos y sociales, destacando que para poder mejorar dicho aprendizaje es necesario que quienes enseñan contenidos matemáticos deben que poseer un conocimiento didáctico-matemático capaz de enfrentarlo a situaciones configuradas por ese compendio de factores. En tal sentido, hay que revisar, además de las actuaciones de los docentes y la de sus estudiantes, los procesos de formación que se llevan a cabo en las instituciones universitarias responsabilizadas de conformar al docente de Matemática deseado en estos nuevos tiempos.

En el caso del afecto hacia la Matemática, se puede concluir que aún continúa vigente la necesidad de investigar lo que acontece en la clase de Matemática en relación con la variedad de factores que conforman el dominio afectivo, pues, a pesar de que la Matemática sigue siendo considerada como el fundamento formal de la mayoría de las disciplinas de todas las épocas, aún es reportada como la menos popular de los planes de estudio. Las razones son variadas, pero, esa tendencia a alejarse de ella, de repudiarla, de considerarla complicada, aburrida o sin utilidad sigue marcando acciones de rechazo, lo cual puede justificarse por la presencia de actitudes adversas y por la existencia de representaciones sociales ligadas al fracaso en el aprendizaje de la Matemática. Por eso, continúan encontrándose sujetos con una aversión que, sin duda, ha contribuido a desfavorecer tanto su aprendizaje como su enseñanza. Es posible que esta problemática tenga su sustento en la dificultad que muchos tienen para comprenderla, en el aún sostenido rigor que caracteriza su manera de enseñarla y en la manera de proceder de muchos docentes que suelen infundir, incluso, hasta

temor para controlar la participación de los estudiantes y el orden de la clase, lo cual está íntimamente relacionado con el fracaso de los estudiantes, de sus docentes y de las instancias educaciones encargadas de formarlos como seres sociales competentes.

Referencias bibliográficas

Albrecht, K. (2006). *Inteligencia social*. Colombia: Javier Vergara Editor

Balbuena, L. y Carrillo, A. (2011). Ñandutí, curso on line de formación permanente de profesores de matemáticas de nivel secundario. *Revista UNIÓN*, 28, 75-83. Recuperado el 18 de Mayo de 2012 de http://www.fisem.org/web/union/images /stories/28/archivo_10_ volumen28.pdf.

Calhoun, C. y Salomón, R. (1989). *¿Qué es una emoción? Lecturas clásicas de psicología filosófica*. México: Fondo de Cultura Económica, S. A.

Camacho, R. (2013). Refletindo a formação Matemática dos profesores dos anos iniciais. *Resúmenes de Ponencias de la XXVII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*, p. 83.

Gallego Badillo, R. (2000). *Los problemas de las competencias cognoscitivas. Una discusión necesaria*. Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Gardner, H. (1998). *Inteligencias múltiples*. Barcelona: Editorial Paidós.

Goleman, D. (1996). *La inteligencia emocional.* España: Javier Vergara Editor

Goleman, D. (2006). *Inteligencia social. La nueva ciencia de las relaciones humanas*. España: Editorial Kairós.

Gómez Chacón, I. (2000). *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático*. España: Narcea, S.A., Ediciones.

González de Hernández, N. (2013). Factores asociados a una evaluación académica en la enseñanza de Matemática: herramienta estratégica para incrementar la calidad de la enseñanza y el aprendizaje. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 26, 897-904, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Maaß, J. y Schlöglmann, W. (2009). *Beliefs and attitudes in Mathematics Education*. New Research Results, Sense Publishers Totterdam/Taipei.

Martínez Padrón, O. (2005). Dominio afectivo en Educación Matemática. *Paradigma*, 24 (2), 7-34.

Martínez Padrón, O. (2008a). Actitudes hacia la Matemática. *Sapiens*. 9 (2), 237-256.

Martínez Padrón, O. (2008b). *Creencias y concepciones en encuentros edumáticos*. Tesis doctoral no publicada. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Caracas, Caracas, Venezuela.

Martínez Padrón, O. (2011). *El afecto en el aprendizaje de la Matemática*. Documento del Curso Iberoamericano de Formación Permanente de Profesores de Matemática, Centro de Altos Estudios Universitario. Organización de Estados Iberoamericanos.

Müller, D., Engler, A. y Vrancken, S. (2012). Propuesta de actividades sobre funciones en un entorno virtual de aprendizaje. Análisis de su implementación. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 25, 471-480, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Parra, H. (2013). Condiciones mínimas necesarias que debe considerar el docente para la contextualización de los contenidos matemáticos. *Resúmenes de Ponencias de la XXVII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*, p. 110.

Paulino, E. y Marmolejos, J. (2013). Importancia del aprendizaje de la acción del despeje y la sustitución numérica en la interpretación y solución de situaciones problemáticas. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 26, 421-428, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Ponte, J. (1994). *Knowledge, beliefs, and conceptions in mathematics teaching and learning*. Recuperado el 25 de Septiembre de 2002 de http://www.educ.fc.pt /docentes/ jponte/ind_uk.htm.

Rodríguez, C. (2012). Compendio alternativo para el estudio independiente. Matemática Superior I y Matemática Superior II. Carrera de contabilidad y finanzas. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 25, 443-450, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition an sense-making in mathematics. En D. Grows (Ed). *Handbook for research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York: McMillan.

Veiga, D. (2012). Introducción al capítulo de propuestas para la enseñanza de las Matemáticas. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 25, 386-387. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Vila, A. y Callejo, M. (2004). *Matemáticas para aprender a pensar. El papel de las creencias en la resolución de problemas.* España: Narcea, S. A. de Ediciones.

LOS SIGNIFICADOS DE LA ALEATORIEDAD DE LOS PROFESORES DE MATEMÁTICA Y DE BIOLOGÍA EN FORMACIÓN

Amable Moreno, José María Cardeñoso y Francisco González
Univ. Nacional de Cuyo Argentina
Univ. Cádiz España
Univ. de Granada
amoreno@fce.uncu.edu.ar, josemaria.cardenoso@uca.es, pagoga@ugr.es

Resumen. En este trabajo se analizan los significados de la aleatoriedad de 583 profesores de Matemática y 325 profesores de Biología en formación, de la provincia de Mendoza, Argentina. Se aplicó un cuestionario con doce ítems relativos a sucesos de los contextos de juego, cotidiano y físico natural. En cada uno de ellos el estudiante debe reconocer si el suceso es aleatorio o no, y luego argumentar su decisión en base al sistema de categorías propuesto por Cardeñoso (2001). Los resultados evidencian algunas diferencias significativas, los estudiantes de Biología logran un mayor reconocimiento de la aleatoriedad y sus argumentaciones desde la incertidumbre y la causalidad son significativamente mayores; mientras que los argumentos desde la multiplicidad son significativamente mayores entre los estudiantes de Matemática.
Palabras clave: aleatoriedad, profesores, training, matemáticas, biología
Abstract. In this work, the meanings of the randomness of 583 mathematics teachers in training and 325 biology teachers in training were analyzed, at the province of Mendoza, Argentina. In order to achieve the aim, a questionnaire with twelve items related to events in the game, natural physical and everyday contexts, was applied. In each of them the student must recognize whether the event is random or not, and then argue the decision based on the category system proposed by Cardeñoso (2001). The results show some significant differences, Biology students achieved greater recognition of randomness and their arguments from uncertainty and causality are significantly higher than students in mathematics, while arguments from multiplicity are significantly higher among students of Mathematics.
Key words: randomness, teachers, training, mathematics, biology

Introducción

El desarrollo de la Estadística en los últimos años ha tenido un impacto tan importante en todos los ámbitos de la sociedad, que finalmente se han ido incorporado tópicos de la misma a los planes de estudio de los distintos niveles del sistema educativo. Sin embargo, se ha podido apreciar una resistencia a la implementación efectiva de estos tópicos en las aulas de los niveles de primaria y de secundaria. La formación de los profesores de Matemática del nivel medio debe asegurar el desarrollo de la competencia profesional que les permita abordar la enseñanza de las ideas fundamentales de la Estadística (Garfield y Ben-Zvi, 2004); una de estas ideas es la aleatoriedad considerada como un contenido transversal del currículo de Estadística.

La importancia del estudio sobre la aleatoriedad, se fundamenta en el hecho de que las distintas interpretaciones de la aleatoriedad que han surgido a lo largo de la historia han dado lugar a distintas definiciones de probabilidad, y éstas a una estructura inferencial asociada.

Los futuros profesores de Matemática, que serán los responsables de la enseñanza de esta temática, requieren de una formación adecuada para no transmitir a sus alumnos concepciones erróneas (Watson, 2011). En consecuencia, como afirma Nikiforidou, Lekka y Pange (2010)

debemos lograr la formación de estudiantes estadísticamente alfabetizados con mínimas ideas erróneas. Por otra parte, como expresan Cardeñoso, Azcárate y Serradó (2008), Azcárate y Cardeñoso (2011) la educación estadística es un tema poco trabajado en las aulas y sobre el que los profesores de los diferentes niveles tienen pocos referentes teóricos y prácticos.

En relación con la formación del profesor de Biología, la comprensión de la aleatoriedad es necesaria, como se puede detectar analizando el diseño curricular del profesorado (Moreno y González, 2013). Este puntualiza que se deben jerarquizar algunas teorías, como la *Teoría de la evolución* como teoría unificadora de la Biología, tal como lo expresa Theodosius Dobzhansky (Mayr, 2006), para quien *nada tiene sentido en Biología excepto a la luz de la evolución.* La teoría evolucionista fue la responsable de introducir el *azar* en Biología y, como afirman los biólogos Losos et al. (2013), el gran flujo de datos en todas las áreas de la Biología Evolutiva reclaman nuevas clases de teorías para darles sentido, para ello se requiere de una teoría cuantitativa predictiva. Paralelamente, desde la Ecología también se plantea la necesidad del desarrollo de la capacidad predictiva para anticipar las consecuencias del cambio global. Brewer y Gross (2003) consideran que la evolución de la predicción ecológica será factible con una forma de pensar desde la *incertidumbre.*

Ante estas demandas, surge la necesidad de afrontar el desarrollo de un pensamiento probabilístico y estadístico en los estudiantes, para profesor de Biología (Moreno, Cardeñoso y González, 2012a, 2012b), que les permita interpretar las teorías que surjan en el seno de la misma.

Controversias en torno a la aleatoriedad

Las nociones estocásticas están fuertemente entrelazadas con los componentes filosóficos (Hacking, 2006). Éstos son importantes de mencionar porque los obstáculos que surgieron históricamente en la formación de los conceptos, se repiten con cierta frecuencia en los estudiantes. Así, para Borovcnick (2011) los componentes filosóficos que caracterizan a la aleatoriedad surgen de tres debates: aleatoriedad-adivinación, aleatoriedad-causalidad y evolución-creacionismo.

La humanidad siempre ha intentado anticipar su destino en la búsqueda de certezas en medio de circunstancias que escapan a su control. En esta tarea fue crucial el vínculo del hombre con sus dioses. Así, se empiezan a usar dispositivos que tengan algún elemento de azar; y a través de ellos exploran la voluntad de los dioses. En esta cosmovisión, los hechos fortuitos del mundo que nos rodean fueron considerados mensajes de los dioses y es por esta razón que la tarea de adivinación ocupó una buena parte de la atención de las personas.

Con el renacimiento surge el paradigma causal; la humanidad se vuelve sobre sí misma y llega a su fin la percepción de un universo ordenado e inmutable. La naturaleza mostraba a los hombres una faz cambiante y en esa búsqueda de unir causas y efectos, lo imprevisible pasa a ser un desafío de la ignorancia. Esta visión será dominante hasta comienzos del siglo XIX. Un representante de esta visión fue Laplace, quien 1812 resume todo el estado del arte en el tema en su *Teoría analítica de la probabilidad*, donde relaciona el azar con una limitación del conocimiento de un observador de fenómenos naturales. Este "*azar-ignorancia*" implica una concepción determinística del mundo exterior al observador fundada en ciertas premisas de orden metafísico: i) que el mundo al que pertenecen los fenómenos es real; ii) que existen leyes objetivas (leyes de la naturaleza) que rigen el comportamiento de los mismos y iii) que estas leyes son inherentes a los fenómenos, racionales y asintóticamente cognoscibles.

En el siglo XIX con el éxito de la termodinámica, las leyes causales macroscópicas fueron explicadas por modelos aleatorios a escala microscópica. Esto motivó a los físicos teóricos del siglo XX para eliminar la causalidad al referirse de nuevo a la aleatoriedad. De esta manera surge el concepto del "*azar objetivo*". Este azar reside fuera del sujeto que describe el mundo; es un azar intrínseco a la misma naturaleza, y se considera que el universo que nos rodea es irreductiblemente estocástico. Este concepto tardará aún bastante tiempo en imponerse; aceptar esta noción de azar implica sustituir el concepto clásico de "*azar-ignorancia*" de carácter epistemológico por el concepto de "*azar-absoluto*" de carácter ontológico.

La otra cuestión filosófica es la relación entre el azar y el creacionismo. En 1859 Darwin presentó su primer trabajo sobre el origen de las especies, que es hoy considerado el que mayor impacto causó en el pensamiento científico posterior y que consideramos como el ingreso formal del azar a las ciencias de la naturaleza. Este autor aseguró que los cambios que se producen en la vida que aseguran la supervivencia sólo pueden producirse al azar, ya que el medio ambiente, que es el causante de los menos favorecidos en la lucha por la existencia, también cambia azarosamente. La idea del origen y la evolución de las especies tuvo una buena acogida por los naturalistas, pero tuvo una fuerte oposición por teólogos y filósofos, la cual provino de haber reemplazado a un Supremo Hacedor por el Azar.

Conceptos de la aleatoriedad

La aleatoriedad ha recibido diferentes interpretaciones a lo largo de la historia. Así, encontramos que Aristóteles llamaba azar o casualidad al resultado de líneas causales que se encuentran en un punto de intersección (Hacking, 2006).

Kyburg (1974) propusó otra interpretación de la aleatoriedad mediante los siguientes cuatro términos:

- Un objeto que es miembro de un conjunto o colectivo;
- El conjunto del cual el objeto es un miembro (población o colectivo);
- La propiedad con respecto a la cual queremos estudiar la aleatoriedad del objeto;
- El conocimiento de la persona que emite el juicio de aleatoriedad

En esta interpretación el mismo objeto puede ser aleatorio o no dependiendo de la persona; por lo tanto estamos en presencia de una concepción subjetiva.

Mientras que para Ayer (1974) un fenómeno es aleatorio sólo si se comporta de acuerdo con el cálculo de probabilidades, aunque se hayan identificado los factores que regulan el fenómeno.

Kolmogorov definió la aleatoriedad de una secuencia en base a su complejidad computacional (Zabell, 1992). En este enfoque una secuencia es aleatoria si no puede ser codificada en una forma más simple, es decir usando menos caracteres; y la ausencia de patrones es una característica fundamental.

Para Cardeñoso (2001) la aleatoriedad es una magnitud que caracteriza la incertidumbre de ciertos fenómenos y la probabilidad es una medida relativa, al menos ordinalmente considerada, del grado de certeza en la verificación de un evento.

Algunos resultados de investigación sobre aleatoriedad

Las dos investigaciones previas que se consideran como referentes del presente trabajo son, la tesis doctoral de Azcárate (1995), y la tesis doctoral de Cardeñoso (2001).

Azcárate realizó un estudio con 57 futuros profesores de Educación Primaria, a quienes les aplicó una serie de enunciados en los que se describían diferentes fenómenos, se les preguntó a los estudiantes si dichos fenómenos eran aleatorios o no y se les solicitó que justificaran su respuesta. Las respuestas de los estudiantes mostraron la presencia de ideas deterministas con argumentaciones causales.

Cardeñoso (2001) realizó su investigación sobre las concepciones probabilísticas en 598 profesores de primaria en activo, y encontró que el mayor reconocimiento de la aleatoriedad (RA) se presenta en sucesos del contexto de juego; y el no reconocimiento de la aleatoriedad (NRA) en sucesos del contexto físico natural y cotidiano. Además, detectó una fuerte asociación entre el NRA y la aplicación de la causalidad, y entre el RA y las categorías de *multiplicidad* y de *incertidumbre.*

Marco teórico

En este trabajo se parte del sistema de categorías para la aleatoriedad propuesta por Cardeñoso (2001), que a continuación se describen:

- *Causalidad*: Argumentaciones que tienen como criterio de reconocimiento de la aleatoriedad de un fenómeno, las explicaciones en función de los diversos factores causales o en la ausencia de posibilidad de su control.
- *Multiplicidad*: Argumentaciones que tienen como criterio de reconocimiento de la aleatoriedad la existencia de múltiples posibilidades en el desarrollo de un fenómeno.
- *Incertidumbre*: Argumentaciones en las que se utiliza como criterio de reconocimiento de la aleatoriedad la propia imprevisibilidad del suceso, sin profundizar en la explicación o análisis del fenómeno de referencia.
- *Subjetiva*: Argumentaciones en las que se utiliza como criterio de reconocimiento de la aleatoriedad ciertas consideraciones referidas a la propia vivencia o creencia subjetiva.

Metodología

Se utiliza el cuestionario que diseñó y aplicó Cardeñoso (2001), y sobre el cual se han realizado algunas modificaciones para adaptarlo a nuestro contexto socio cultural. Fue cumplimentado por 583 profesores de Matemática y 325 profesores de Biología en formación, de la provincia de Mendoza, Argentina. Como el interés es saber si los estudiantes para profesor de Biología y Matemática reconocen o no la aleatoriedad y desde qué categoría justifican su elección, por lo cual se ha registrado la frecuencia con que usan cada una de las categorías, resultando apropiado considerar las variables definidas por Cardeñoso (2001): ALEA11, ALEA12, ALEA13, ALEA14, ALEA21, ALEA22, ALEA23, ALEA24. La forma general de las variables es ALEAij, si i es 1 indica que el estudiante afirma la aleatoriedad del suceso, si es 2 indica que la niega; j indica desde que categoría realiza la argumentación; si j = 1 indica la causalidad, j = 2 la multiplicidad, j = 3 la incertidumbre y j = 4 la subjetiva. Posteriormente se consideraron estas ocho variables en cada uno de los contextos: juego (J), cotidiano (C) y físico natural (F); dando lugar a 24 variables. Estas variables se midieron entre los estudiantes del profesorado de Matemática y entre los estudiantes del profesorado de Biología, a partir de las respuestas que dieron al cuestionario, y sobre las cuales se aplicó el test de Mann-Whitney y el test de Kruskal-Wallis a los efectos de encontrar diferencias significativas.

Resultados

Presentamos, los principales resultados de la investigación, aportando ilustraciones:

1. El test de Mann-Whitney permitió detectar que existen diferencias significativas en el reconocimiento de la aleatoriedad a favor de los estudiantes para profesor de Biología (u = 77096, p = 0.000).

2. El reconocimiento de la aleatoriedad en sucesos del contexto *cotidiano* es significativamente mayor entre los estudiantes de Biología, respecto de los de Matemática; y justifican su decisión fundamentalmente desde *argumentos causales* ($\chi(1)^2 =$ 6.53, p = 0.011) y desde la incertidumbre ($\chi(1)^2 =$ 47.12, p = 0.001)

S136 (Biología): "*Encontrarme por la calle con el primer Maestro/a que tuve en la Escuela, es un suceso aleatorio porque decidimos ir los dos al mismo lugar".*

El estudiante para profesor de Biología expresa un pensamiento determinista, y está implícita la idea de dos series de causas que se encuentran en un punto de intersección. Esta idea fue propuesta por Aristóteles, Tomás de Aquino y el probabilista del siglo XIX, A. A. Carnot (Hacking, 2006).

3. En el contexto de juego, los estudiantes para profesor de Matemática logran un reconocimiento de la aleatoriedad significativamente mayor que los de Biología, argumentando sus decisiones desde la multiplicidad ($\chi(1)^2$ = 25.53, p = 0.001).

S251(Matemática): "*Acertar el número que muestra un dado ya lanzado, pero que no puedo ver es un suceso aleatorio porque hay seis posibilidades distintas".*

4. En el contexto físico-natural, los estudiantes para profesor de Biología niegan la aleatoriedad de los sucesos de manera significativamente mayor que los de Matemática, y argumentan fundamentalmente desde la causalidad ($\chi(1)^2$ = 33.73, p = 0.001).

S228 (Biología): *"Sufrir un corte de digestión es un fenómeno no aleatorio porque depende de los cuidados, de la comida y del estado de ánimo con el que comió la persona".*

Este estudiante expresa un pensamiento determinista causal, enumerando las posibles causas que producen el fenómeno, característica del pensamiento causal.

5. En el contexto *cotidiano*, los estudiantes para profesor de Matemática niegan la aleatoriedad de los sucesos de manera significativamente mayor, en relación con los de Biología, y justifican su decisión desde la multiplicidad ($\chi(1)^2$ = 8.11, p = 0.004).

S298 (Matemática): *"Que me guste la película que voy a ver el próximo sábado en Cinemak, es un fenómeno no aleatorio porque depende de la trama de la película, si me atrapa o no".*

6. Los estudiantes para profesor de Matemática niegan la aleatoriedad de manera significativamente mayor en el contexto de juego, respecto de los estudiantes de Biología, argumentando desde la *multiplicidad* ($\chi^2_{(1)}$ = 9.86, p = 0.001) y desde la *subjetividad* ($\chi^2_{(1)}$ = 6.45, p = 0.011).

S417 (Matemática): *"Obtener el número 23 en la ruleta de 36 números es un suceso no aleatorio porque sólo hay un 23 y tenés muchos números más"* (Multiplicidad)

S449 (Matemática): *"Predecir el color de una bola que se extrae de una urna con bolas de distintos colores no es un fenómeno aleatorio porque es cuestión de suerte, a lo mejor acertás justo sin pensarlo"* (Subjetiva)

Conclusiones

En general los estudiantes para profesor de Biología logran un mayor reconocimiento de la aleatoriedad que los de Matemática. Estas dificultades en el razonamiento estocástico de los estudiantes de Matemática podrían ser, como expresa Meletiou-Mavrotheris (2007), el resultado de los efectos continuados de la tradición matemática formalista, a pesar de que en la actualidad la Matemática es considerada como una actividad de elaboración de significados.

Sin embargo, en el contexto de juego, el reconocimiento de la aleatoriedad es significativamente mayor en los estudiantes para profesor de Matemática, decisión que justifican desde la multiplicidad. Mientras que los de Biología lo hacen de manera significativamente mayor en el contexto cotidiano desde la causalidad.

En cuanto a la negación de la aleatoriedad, los estudiantes para profesor de Matemática no reconocen la aleatoriedad de manera significativamente mayor en el contexto cotidiano, en donde argumentan desde la *multiplicidad*; mientras que en el contexto de juego lo hacen desde la *multiplicidad* y la *subjetividad*. El uso notable de la *multiplicidad*, en el caso de los estudiantes para profesor de Matemática, podría estar asociada a la formación disciplinar de los mismos; en efecto, es posible que esto ocurra debido a que la *multiplicidad* se usa de manera natural, al enumerar los elementos de un conjunto, noción de uso frecuente en Matemática. Por otra parte, el motivo que les lleva a negar la aleatoriedad, a pesar de reconocer la existencia de múltiples posibilidades, puede tener su origen en la incorrecta comprensión del significado del término *aleatorio*. Para algunos autores la cognición de la aleatoriedad tiene dos componentes, uno conceptual y otro perceptivo (Nickerson, 2002; Nickerson y Butler, 2009; Zhao y Osherson, 2012). Uno puede ser

capaz de discriminar entre fenómenos aleatorios de los no aleatorios y, sin embargo, ser incapaz de identificar cuál es uno y cuál es el otro.

En relación con los estudiantes para profesor de Biología, ellos niegan la aleatoriedad de manera significativamente mayor en el contexto físico-natural argumentando desde la causalidad. De esta manera se confirma lo expresado por Pfannkuch y Brown (1996), quienes sostienen que el razonamiento causal se usa en situaciones del mundo real como resultado de su propia experiencia. Por lo que podemos concluir que, en la formación del profesor de Biología, el entramado de las disciplinas biológicas, como la genética, la evolución y la ecología, para las cuales la noción de *azar* surge naturalmente, inciden en forma sustantiva en el pensamiento de los estudiantes de este profesorado.

Referencias bibliográficas

Ayer, A.J. (1974). El Azar. En M. Kline, (Ed.), *Matemáticas en el mundo moderno* (pp- 172-181), Barcelona: Blume.

Azcárate, P. (1995). *El Conocimiento Profesional de Profesores sobre las nociones de Aleatoriedad y Probabilidad. Su estudio en el caso de la educación Primaria.* Tesis de Doctorado no publicada, Universidad de Cádiz.

Azcárate, P. y Cardeñoso, J.M. (2011). La Enseñanza de la Estadística a través de Escenarios: implicación en el desarrollo profesional. *Boletim de Educação Matemática 24(40)*, 789-810.

Borovcnik, M. (2011). Strengthening the role of probability within statistics currila. En C. Batanero, G. Burrill, y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI and IASE study* (pp.77-83), New York: Springer.

Brewer, C.A. y Gross, L.J. (2003).Training ecologists to think with uncertainty in mind. *Ecology 84 (6)*, 1412-1414.

Cardeñoso, J.M. (2001). Las *creencias y conocimientos de los profesores de primaria andaluces sobre la matemática escolar. Modelización de concepciones sobre la aleatoriedad y probabilidad.* Cádiz: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz.

Cardeñoso, J.M.; Azcárate, P y Serradó, A. (2008). Escenarios Interculturales para el Aprendizaje Estadístico en el Contexto Escolar. Recuperado el 10 de Diciembre de 2012 de http://www.ucv.ve/uploads/media/Hipotesis_alternativa_N16.pdf

Garfield, J., y Ben-Zvi, D. (2004). Research on statistical literacy, reasoning, and thinking: issues, challenges, and implications. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing*

statistical literacy, reasoning, and thinking (pp. 397-409). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Hacking, I. (2006). *La domesticación del azar*. Barcelona: Gedisa.

Kyburg, H.E. (1974). Propensities and Probabilities. *The British Journal for the Philosophy of Science 25*, 358-375.

Losos, JB, Arnold, SJ, Bejerano, G, Brodie, ED III, Hibbett, D, H.E. Hoekstra, D.P. Mindell, A. Monteiro, C.Ortiz, H.A. Orr, D.A. Petrov, S.S. Renner, R. E. Ricklefs, P.S. Soltis y T.L. Turner. (2013) *Evolutionary Biology for the 21st Century*. Recuperado el 15 de abril de 2013 de http://www.plosbiology.org/article/info%3Adoi%2F10.1371%2Fjournal.pbio.1001466

Mayr, E. (2006). *Por qué es única la biología: Consideraciones sobre la autonomía de una disciplina científica*. Buenos Aires: Katz Editores.

Meletiou-Mavrotheris, M. (2007). The Formalist Mathematical Tradition as an Obstacle to Stochastical Reasoning. En K. François, J.P. Van Bendegen (Eds.), *Philosophical Dimensions in Mathematics Education 42*. Belgium: Springer.

Moreno, A.; Cardeñoso, J.M. & González, F. (2012a) Un estudio exploratorio de las tendencias de pensamiento probabilístico de los estudiantes del profesorado de biología. En A. Estepa Castro, A. Contreras de la Fuente, J. Deulofeu Piquet, M.C. Penalva Martinez, F.J. García García, y L. Ordoñez Cañada (Eds.), *Actas del XVI Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática,* 407-415. Baeza: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Moreno, A., Cardeñoso, J.M. y González, F. (2012b). Un análisis sobre las interpretaciones de la aleatoriedad en los estudiantes del Profesorado de Biología. En A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Actas del XVI Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, 177-189, Baeza: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Moreno, A. y González, F. (2013). *El concepto de población: Un análisis en el contexto del profesorado de Biología***.** Saarbrücken: editorial académica española.

Nickerson, R.S. (2002). The production and perception of randomness. *Psychological Review 109*, 330-357.

Nickerson, R.S. y Butler, S.F. (2009). On producing random binary sequences. *The American Journal of Psychology 122*, 141-151.

Nikiforidou, Z., Lekka,A. y Pange, J. (2010). Statistical literacy at university level: the current trends. *Procedia Social and Behavioral Sciences 9*, 795–799.

Pfannkuch, M. y Brown, C.M. (1996). Building on and Challenging Students´Intuition About Probability: Can We Improve Undergraduate Learning? *Journal of Statistics Education 4 (1),* 39-53.

Watson, J.M. (2011). Foundations for improving statistical literacy. *Statistical Journal of the International Association of Official Statistics, 27 (3/4),* 197-204.

Zabell, S. L. (1992). The quest for randomness and its statistical applications. En F. Gordon & S. Gordon (Eds.), *Statistics* for the *XXI Century* (pp. 139-166). Washington: The Mathematical Association of America.

Zhao, J.H. y Osherson, D. (2012). *Perception and identification of random events*. Recuperado el 10 de diciembre de 2012 de http://www.princeton.edu/~osherson/papers/Ranperc.pdf

DESCARTES Y LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Jhon Helver Bello Chávez y Alberto Forero Poveda
Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Colomia
jhbelloc@udistrital.edu.co, albertoforero84@hotmail.com

Resumen. Este artículo presenta avances del proyecto de investigación: *El conocimiento didáctico del profesor de matemáticas a partir del estudio de la historia de la matemática. Una experiencia con la geometría de Descartes*; financiado por la Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Haciendo uso de un análisis de contenido del texto y realizando un estudio de documentos y artículos que permiten analizar el momento histórico en donde se desarrolló la obra; se argumentan cuatro aspectos que consideramos relevantes para trabajar con estudiantes para profesor en un espacio académico de didáctica del álgebra: la idea de mathesis universalis, la noción de curva, el papel del álgebra y las implicaciones del pensamiento cartesiano.

Palabras clave: Descartes, geometría, álgebra, curva, discurso

Abstract. This paper presents progress of the research project "Pedagogical Content Knowledge math teacher from the study of the history of mathematics. An experience with the geometry of Descartes, funded by the Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Using a content analysis of the text and researching documents and articles that analyze the historical moment in which developed the work, they argue four aspects that we consider relevant to work with student teachers in an academic teaching of algebra: the idea mathesis universalism, the notion of curve, the role of the algebra and the implications of Cartesian thought.

Key words: Descartes, geometry, algebra, curve, speech

Introducción

La historia de la matemática una oportunidad para el conocimiento del profesor

Hace más de dos décadas que las componentes del conocimiento del profesor se plantean como objeto de estudio en la comunidad científica que trabaja en el campo de la educación, al hacer una revisión del estado del conocimiento de esta problemática en Educación Matemática; se identifica que el trabajo más referenciado o las categorías asumidas para la elaboración de la mayoría de investigaciones respecto al conocimiento del profesor de matemática es el expuesto por (Shulman, 1987) , quien plantea siete categorías para el desarrollo del conocimiento profesional del profesor, las cuales han sido reinterpretadas por autores como (Grossman, 1990) en cuatro; el conocimiento disciplinar, el conocimiento didáctico del contenido, el conocimiento pedagógico general y el conocimiento del contexto.

En este sentido (Bolivar, 2005), citando la traducción de (Marcelo, 1993) define el conocimiento didáctico del contenido como "una especie de amalgama de contenido y didáctica", es decir, para el caso nuestro, una fusión entre matemáticas y didáctica que permita hacer consideraciones sobre la enseñanza, el aprendizaje y el conocimiento que para el profesor de matemáticas es útil.

En el campo de la Educación Matemática autores como (Guacaneme, 2010), plantean que el conocimiento histórico de la disciplina, por lo menos para el caso de las matemáticas, contribuye de manera transversal al conocimiento disciplinar y pedagógico del contenido del profesor de matemáticas, afirmación que teóricamente encuentra sustento por ejemplo, en el papel que le otorga a la historia y epistemología de la matemática autores como (D`amore, 2007), quien reconoce por lo menos dos criterios fundamentales para incorporar el conocimiento de la historia y epistemología de la matemática en la formación inicial y continua de profesores de matemáticas: un aspecto cultural y otro profesional.

El primero está relacionado con la necesidad que tiene el docente de trabajar en la transposición didáctica del conocimiento matemático para determinar el saber a enseñar y a partir de estas consideraciones, comunicarse haciendo uso de las matemáticas.

Según este autor, este acto de transposición debe estar vinculado a un cuerpo de posibilidades más allá de las definiciones, el cual permitirá que el profesor de matemáticas seleccione aspectos fundamentales del objeto de enseñanza. El conocimiento histórico, en tanto la transposición didáctica implica contextualizar, personalizar y humanizar el conocimiento matemático, se convierte en herramienta fundamental del conocimiento que pone en juego un maestro para analizar el saber a enseñar.

Parte de de este análisis, implica determinar las prácticas que permitieron constituir una obra, aspectos de tipo filosóficos, ontológicos y epistemológicos, que implican cambios en la noción de verdad, rigor, ciencia y matemáticas; en este documento se acoge la noción de práctica social de Foucault, la cual hace referencia a las dinámicas que permiten normalizar, determinar, regular y organizar un discurso, el cual debe su existencia a una compleja multiplicidad de interpretaciones del mundo.

Esta posición teórica, implica comprender que el análisis de obras históricas revela nuevas formas de pensar y comprender el accionar de un sujeto, en nuestro caso Descartes;

> "…las prácticas sociales pueden llegar a engendrar dominios de saber que no sólo hacen que aparezcan nuevos objetos, conceptos y técnicas, sino que hacen nacer además formas totalmente nuevas de sujetos y sujetos de conocimiento. El mismo sujeto de conocimiento posee una historia, la relación del sujeto con el objeto…" (Foucault, 1996, p.6).

De esta manera, el conocimiento del profesor debe estar vinculado con la comprensión de estas prácticas históricas, con las cuales es posible realizar interpretaciones didácticas.

El aspecto profesional, está vinculado a las posibles interpretaciones didácticas que un maestro hace de las producciones de sus alumnos, la posibilidad de reconocer un tipo de error que en la literatura en Educación Matemática se conocen como provenientes de ciertos obstáculos epistemológicos, requiere reconocer entre los errores de los estudiantes los que tienen origen en la epistemología, de esta manera, un conocimiento que favorece las interpretaciones que hace el maestro de las producciones de los estudiantes y se convierte en fundamental en la construcción del conocimiento profesional de profesor de matemáticas es la epistemología. Pero " … si la epistemología estudia la evolución de los conceptos, no es posible pensar en escindir los estudios de epistemología de la matemática de aquellos de la historia de la matemática." (D`amore, 2007, pág. 16),

(Tzanakis y Arcavi, 2000) mencionan tres diferentes enfoques para la integración de la historia en la educación matemática: (1) Aprendizaje de la Historia: por la provisión de información directamente de la historia, (2) Aprendizaje de tópicos matemáticos, siguiendo un aprendizaje y enseñanza por enfoques inspirados por la historia, y (3) Desarrollando una mayor conciencia, de la matemática en sí misma y de los contextos sociales y culturales en que las matemáticas ha sido construida.

De acuerdo a la revisión bibliográfica realizada en esta sección, sobre la formación de profesores, la relación Historia de la Matemática - conocimiento profesional del profesor de matemáticas, se puede indicar que la preguntas citada por (Gómez, 2001) y realizada por Cooney en 1994 respecto al conocimiento del profesor, ¿qué tipos de conocimientos necesitan los profesores de matemáticas para ser eficientes? Y ¿qué tipos de experiencias deben vivir los profesores para construir ese conocimiento?; aunque de ninguna manera creemos que la historia de la matemática responda las preguntas, creemos que este saber hace parte de los conocimientos y experiencias que un maestro de matemáticas debe tener, en cuenta, no solamente como conocimiento disciplinar, sino como, parte de lo que pone en juego al planear, gestionar y evaluar saberes.

Didáctica del álgebra y Descartes

Gran parte de la literatura en didáctica del álgebra fundamenta sus propuestas para el desarrollo de pensamiento algebraico, para la enseñanza y aprendizaje del álgebra; en la reflexión de procedimientos, problemas y heurísticas, relacionadas con el trabajo de matemáticos de la antigüedad, como: Euclides, Khowârizmî, Diofanto, Abu Kamil, entre otros. Sin embargo, el trabajo de Descartes respecto al álgebra, el cual se encuentra en uno de los anexos del discurso del método, Geometría; es citado pero no analizado y explorado con suficiencia.

El trabajo de Descartes es reconocido fundamentalmente porque partiendo de la geometría griega, el teorema de Thales, los trabajos de Euclides y Apolonio; conforma un tipo de matemática que traslada a la geometría de su papel protagónico, como eje central de la matemática, convirtiendo la matemática algebrizada propuesta por Descartes en un nuevo tipo de matemática, más fuerte por ser la aritmética y el álgebra la ciencia de las magnitudes y de esta manera más aplicable y general que la geometría;

> "…con Descartes el Álgebra figura en primera línea como técnica, como método de combinación y construcción, de tal modo que es el cálculo algebraico el que legitima los resultados de la nueva Geometría Analítica, que destruye los escrúpulos de los griegos relativos a la definición de las curvas y hace inútil la teoría de la construcción geométrica, que queda sustituida por la síntesis de la construcción algebraica" (González, 2001, p.5)

El trabajo sobre la geometría de Descartes, permite asociar una ecuación a una curva a partir de un referente, permitiendo pasar de la geometría al álgebra y viceversa. De igual manera, permite la asignación de una longitud a los segmentos, asociada a una unidad de medida; como afirma (D`hombres, 2000) es la innovación del cartesiano, expresar a todas las magnitudes involucradas en un problema como longitudes de líneas lo que permite que los términos conocidos y desconocidos terminen configurado una ecuación, encontrado las condiciones de dependencia de unas con las otras, relacionado de esta manera, cantidades conocidas y cantidades desconocidas, con el fin de obtener una expresión que permita hallar los valores de las desconocidas.

El trabajo de Descartes se considera en Historia de la Matemática, un puente, el cual permitió como afirma (Bell, 1949) un nuevo método de investigación sistemática que permitió resolver problemas geométricos antiguos y considerar curvas que desde los métodos griegos no se podían analizar. Para terminar, por lo menos tres consideraciones son importantes en los trabajos de Descartes respecto a la construcción del álgebra, las que corresponden a las representaciones simbólicas que realiza de la geometría a partir del álgebra; la construcción de un referencial con el cual medir la distancia de un punto a una recta y la asignación que hace de cantidades a las longitudes a partir de una unidad de medida.

Una mirada del contenido de la geometría

El texto, se compone de tres secciones, llamadas libros, en una primera mirada se observa que resuelven problemas geométricos, como afirma (Bos, 1998), se evidencia un sistema dual; técnico y analítico, el primero referido al procedimiento y el segundo como un inspector de la solución del problema geométrico; sin embargo, al tratar de manera más profunda el documento, se evidencia

trabajo respecto a asuntos que eran tratados en esa época, por ejemplo: lo relacionado con la clasificación de curvas, la instrumentalización de la matemática, el lenguaje de lo simbólico y una discusión sobre las construcciones geométricamente aceptables, lo cual argumenta a través del establecimiento de representaciones gráficas y simbólicas de curvas.

Descartes consideraba a la geometría como una forma de resolver problemas más que como una ciencia deductiva, tenía la intención como muchos de sus contemporáneos de crear una mathesis universalis, es decir una matemática universal que permitiera unir en un solo conocimiento, el aritmética, la geometría y los principios de álgebra que para su época estaban relacionados con los trabajos de los árabes y Vieta.

Desde esta mirada de la obra, se realizó un análisis de contenido, considerando como corpus documental el texto, la traducción al castellano de geometría dirigida por José Manuel Sánchez, (Descartes, 1996) y algunos artículos y documentos que localizan la época en que se desarrollan las ideas de Descartes, y sus comunicaciones con personajes como Beeckman, Fermat y Mersenne, (Forbes, 1977) (Rabouin, 2010); (Machamer y McGuire, 2006). Se usaron cinco categorías para seccionar el contenido del texto: frases en donde se realizan definiciones; párrafos en donde se argumenta o se prueba; construcciones mecánicas; construcciones que se usan para probar algo y problemas de aplicación.

Después de concluido el análisis, y considerando la importancia que puede tener la obra en el conocimiento del profesor de matemáticas, creemos que son cuatro los aspectos que sobresalen: la preocupación por una mathesis universales, una nueva noción epistemológica del objeto curva, el papel del álgebra simbólica y las implicaciones del pensamiento cartesiano.

La mathesis Universalis: detrás de este trabajo está el desarrollo respecto a la noción de matemáticas antes de Descartes, las visiones filosóficas del momento, la construcción de una nueva ciencia. Según (Patty,1997) la noción de matemáticas que se presenta en la obra está relacionado con el acceso a la verdad y por este camino con una noción de subjetividad que permite el conocimiento y la ciencia. En este sentido, cada uno forma la compresión y los juicios y de esta manera se cuestiona sobre la certeza del conocimiento.

En esta búsqueda Descartes desarrolla a través del texto de la geometría la apropiación de su propia subjetividad, a través de los siguientes asuntos: los descubrimientos de la construcción de curvas, la resolución de ecuaciones y su relación con objetos geométricos. Los cuales permitirían ahondar en su visión totalitaria de conocimiento.

Esta discusión de tipo filosófico y epistemológico permite que el estudiante para profesor de matemáticas ubique el trabajo de Descartes en el desarrollo de la construcción de este

conocimiento; el reconocer una idea, o mejor, un proyecto sobre el status de las matemáticas, permite que se reconozca como un conocimiento transformable, desde ideas de rigor, validez y validación, que hacen emerger nuevos conocimientos, en este caso la geometría analítica.

La noción de curva: se plantea la diferencia con la visión de curva antes de Descartes, reconociendo que éstas pertenecían a otra área del conocimiento, la mecánica; razón por la cual dentro de su obra aparecen algunos instrumentos para trazar curvas, los cuales entendemos como importantes en la comprensión de la obra y en el entendimiento de la importancia del lenguaje algebraico. El uso que hace el autor de esta noción, implica la solución de problemas, entre ellos el de Pappus y la trisección del ángulo; asuntos que son tratados desde la geometría hacia el álgebra, sin mantener estas dos formas de representación el mismo status epistemológico, pues, como lo afirma (Dennis,1997), Descartes nunca graficó una ecuación, las curvas eran construidas a partir de medidas geométricas, en la geometría, las ecuaciones no dieron origen a las curvas, fueron las curvas quienes dieron lugar a las ecuaciones; Descartes uso esta representación exclusivamente para realizar taxonomías entre ellas.

La diferencia epistemológica entre las representaciones de la curva, es un aspecto que consideramos debe ser discutido a profundidad con los estudiantes para profesor; la escuela actual, privilegia justamente la otra vía de desarrollo, de la representación simbólica de la curva a la representación gráfica; dejando sin contexto la existencia de la curva como producto del movimiento y las relación entre magnitudes.

El papel del álgebra: en relación con este aspecto, se identificó el problema del rompimiento de la homogeneidad Euclideana, como eje rector de esta discusión, pues, consideramos que éste, infiere en el tratamiento que se puede hacer de las operaciones, por ejemplo; la suma de expresiones cuadradas con cúbicas, determinando la posibilidad de entender a partir de representaciones de segmentos, este tipo de relaciones. Un aspecto complementario al anterior, está relacionado con los trabajos de Vieta, el tratamiento de lo desconocido a partir de lo conocido (D`hombres, 2000), que permitió la solución de ecuaciones y la realización de expresiones equivalentes, las cuales en un primer momento no significaron para la humanidad lo que significan para la matemática moderna; este progreso se dio sólo después de que los matemáticos habían alcanzado fe en la capacidad del lenguaje algebraico para representar y modelar la geometría.

Las implicaciones del pensamiento cartesiano: el papel de las matemáticas en el análisis del método de Descartes, infiere un proceso que fusiona filosofía y matemáticas, cuyo producto es un método subjetivo que va a trascender la historia de la humanidad, convirtiéndose en lo que comúnmente llamamos modernidad. De esta manera reconocemos en la obra, el desarrollo de un proceso que

permite resolver problemas geométricos a partir de representar el problema en formas algebraicas o gráficas; permitiendo un espacio a construcciones emergente, del movimiento y la mecánica.

Primeras conclusiones

Del proceso teórico de esta investigación y sin haber llevado a cabo la segunda parte del estudio, que consiste en la aplicación de algunas actividades relacionadas con los cuatro aspectos mencionados anteriormente, podemos realizar las siguientes afirmaciones respecto al papel que tiene el conocimiento que gira alrededor de la geometría de Descartes en cursos de formación inicial de profesores:

Es la obra de Descartes, en especial, geometría, un ejemplo de la importancia del conocimiento histórico en la formación inicial de profesores de matemáticas. Alrededor de este documento se visualiza una nueva forma de abordaje de los problemas geométrico, que consiste en decantar lo que ahora, en las matemáticas modernas, se realiza sin problema, pero que tuvo un surgimiento relacionado con otro tipo de conceptos, como el de curva y otro tipo de actividad matemática, como la referida a la mecánica y los instrumentos.

La historia de la matemática, es un potente campo de entendimiento de las matemáticas que permite pensar en aspectos que configuran una formación diferente del profesor de matemáticas, pensada esta, alrededor del conocimiento didáctico del contenido matemático, como se ve en los cuatro aspectos desarrollados anteriormente, el asunto no consiste en construir un discurso sobre un aspecto, autor particular o recitar una obra histórica; sino en construir un discurso sobre las matemáticas, sus formas y producciones.

La emergencia del conocimiento histórico, en relación con la formación de profesores de matemáticas, desarrolla nuevos campos de saber para quien se está formado, ejemplo de esto, es el análisis de la obra de Descartes, en donde se vislumbran aspectos íntimamente ligados a la formación de pensamiento algebraico que no hacen parte de las discusiones tradicionales dentro de esta formación. La relación de la noción de curva en correspondencia con la emergencia del uso de esta forma de pensar, a partir de la representación de problemas geométricos por medio de representaciones gráficas y simbólicas es sin duda, muestra de la potencialidad de la historia.

Referencias bibliográficas

Bell, E. (1949). *Historia de las matemáticas*. México. Fondo de Cultura de Económica.

Bolivar, A. (2005). Conocimiento Didáctico del Contenido y Didácticas Específicas. *Revista de Curriculum y formación de profesorado, 9(2)*, 1-39.

Bos, H. (1998). La structure de la Géométrie de Descartes. *Revue d'histoire des sciences,51(1),* 291 -318.

D hombres, J. (2000). La banalidad del Referencial Cartesiano. En C. Alvarez, & R. Martinez (Ed.), *Descartes y la ciencia del siglo XVII* (pp. 69-98). México: Siglo XXI.

D`amore, B. (2007). El papel de la Epistemología en la formación de profesores de Matemática en la Escuela Secundaria. *Cuadernos del Seminario en Educación 8(1),* 36-58.

Dennis , D. (1997). René Descartes' Curve-Drawing Devices: Experiment in the relations between mechanical motion and symbolic language. *Mathematics Magazine, 70 (3),* 163-174.

Descartes, R. (1996). *Discurso del método. La dióptrica. Los meteoros. La geometría*. (J. M. Sánchez Ron, Ed., & G. Quintás, Trad.) Barcelona: Círculo de lectores.

Forbes, E. (1977). Descartes and the Birth of Analitic Geometry. *Historia Mathematica, 4(2),* 141-151.

Foucault, M. (1996). *La verdad y las formas jurídicas*. Barcelona: Gedisa.

Gonzalez Urbaneja, P. M. (2001). *Geometria de Descartes*. Recuperado de www.xtec.es/sgfp/llicencies/200304/.../geometriadescartes.pdf.

Grossman, P. (1990). The Making of a Teacher. *Teacher Knowledge and Teacher Education*. New York: Columbia University.

Guacaneme Suarez, E. A. (2010). ¿Qué tipo de historia de las maemáticas debe ser apropiada por un profesor?. *Asociación Colombiana para la Investigación en Educación en Ciencias y Tecnología 2,* 136-148.

Macbeth, D. (2004). Viète, Descartes, and the Emergence of Modern Mathematics. *Graduate Faculty Philosophy Journal, 25(2),* 88-117.

Patty, M. (1997). Memorias del seminario en conmemoración de los 400 años del nacimiento de Rene Descartes. *Mathesis Universalis e integibilidad en Descartes* (págs. 135-170). Bogotá: Academia colombiana de ciencias Exactas, físicas y naturales.

Rabouin, D. (2010). What Descartes knew of mathematics in 1628. *Historia Mathematica, 37(3),* 428-459.

Shulman, L. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review, 57(1),* 1-21.

Shulman, L. (2005). Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. *Revista de currículum y formación del profesorado, 2(9),* 24-39.

Tzanakis, C., & Arcavi, A. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. In J. Fauvel & J. Maanen (Eds.), *History in Mathematics Education: The ICMI Study* (pp. 201-240). Dordrecht: Kluwer Academic publishers.

ACTITUDES HACIA LAS MATEMÁTICAS DE LOS FUTUROS PROFESORES DE E.G.B DE CHILE. ESTUDIO DE CUATRO DESCRIPTORES ACTITUDINALES

Marcelo Casis, Encarnación Castro y Nuria Rico
Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación Chile
Universidad Finis Terrae
Universidad de Granada. España
marcelocasis@gmail,com

Resumen. Para el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, las respuestas afectivas que generan los estudiantes hacia la disciplina, juegan un papel esencial. El dominio afectivo del estudiante hacia las matemáticas está constituido por actitudes, valores, creencias y emociones. Estudiamos las actitudes que poseen hacia las matemáticas los futuros profesores de EGB de Chile y en el presente reporte de investigación comentamos algunos resultados del análisis descriptivo que hemos realizado a cuatro descriptores actitudinales: autoconfianza, motivación, ansiedad y creencias del estudiante de que el dominio matemático está determinado por el género.
Palabras clave: actitudes, matemáticas, dominio afectivo
Abstract. The affective response of the students towards mathematics plays an essential role in the teaching and learning process of this discipline. The student's affective domain to mathematics implies attitudes, values, beliefs and emotional aspects. We observed students who are studying to become teachers of primary school in Chile and their attitude towards mathematics. In this research report we show some results of the descriptive analysis of four attitudinal descriptors: self-confidence, motivation, anxiety, and students' belief in the fact that being good at maths is significantly related to gender.
Key words: attitudes toward mathematics, affective domain

Introducción

Conceptualización teórica

Dominio afectivo

Diferentes autores se han referido al dominio afectivo de la educación matemática, y lo entienden como aquellos aspectos que van más allá de la cognición y que inciden en el aprendizaje de las matemáticas (McLeod, 1989). El afecto, dominio afectivo o dimensión afectiva, de la educación matemática lo constituyen las creencias, emociones, actitudes (McLeod, 1989, 1992; Krathwohl, Boom y Masia, 1964) y valores (Bishop, 1999; Gómez-Chacón, 2000).

Al aceptar que los afectos ejercen una influencia decisiva en el aprendizaje y en cómo los alumnos perciben y consideran las matemáticas (Gil, Blanco y Guerrero, 2005), aceptamos también que los estudiantes, al aprenderlas, se enfrentan a variados estímulos asociados a esta ciencia y ante ellos pueden reaccionar positiva y/o negativamente; reacciones que están condicionadas por una serie de elementos que algunos autores relacionan con las emociones. Gómez Chacón (2000), las define como reacciones emocionales y las entiende como la desvinculación entre lo que el sujeto espera experimentar al hacer matemáticas y lo que finalmente experimenta. Si ante situaciones similares, repetidamente se producen las mismas clases de reacciones afectivas, la activación de la reacción emocional (satisfacción, frustración, agrado, etc.), puede ser automatizada y convertirse en una

actitud. (Gil, Blanco y Guerrero, 2005). Estas actitudes, a su vez serán modeladas por una parte, en función de los valores que el individuo asigne a las matemáticas, influenciados por la carga cultural y social del medio contextual en que el individuo se encuentre (Bishop, 1988) y por otra, por las creencias que se hayan desarrollado respecto de la educación matemática en su conjunto y del aprendizaje matemático en particular (Bermejo, Lago & Rodríguez, 2000). Consideramos entonces, el dominio afectivo como un sistema interrelacionado de cada uno de estos descriptores.

Actitudes

Nuestro estudio centra su interés en uno de estos descriptores del afecto: las actitudes. Este constructo ha sido estudiado desde diferentes disciplinas, pero sólo a partir de las últimas décadas, lo ha sido desde la didáctica de las matemáticas. Gracias a estos estudios, se ha logrado delimitar el concepto y determinar su relación con la educación matemática (Beckler 1984; McLeod, 1989; Mandler 1989; Callejo, 1994; Guerrero , Blanco y Castro, 2001). Así para Nimier (1977) y Truttschel (2002) las actitudes hacia las matemáticas serían una suerte de bloqueo emocional o barrera psicológica entre el estudiante y la asignatura, mostrando en muchos casos temor, respeto e incluso odio hacia ella.

En el estudio de las actitudes, el modelo multidimensional planteado por Beckler (1984) y Rajecki (1982), es el que más ayuda a comprenderlas. Para estos autores las actitudes se entiende como una predisposición a responder a alguna clase de estímulos con cierta clase de respuestas (Rosenberg y Hovland, 1960), asignado al constructo un triple componente, que se relacionan entre sí. Estos tres componentes son:

- Componente Afectivo: Se la ha considerado como el componente fundamental de la actitud. Al presentarse un objeto, éste puede ser relacionado con sentimientos de agrado o desagrado.
- Componente Cognitivo: Puede considerarse el elemento que le da fundamento a la actitud. Independiente del grado de verdad, el conocimiento que posea el individuo de dicho objeto, por sí mismo ya es suficiente para fundamentar su actitud.

Componente Conativo o Comportamental: Se relacionan con las intenciones conductuales o tendencias de acción que se relacionan con una actitud. Se considera la consecuencia dinámica de la conjunción de los dos componentes anteriores.

Contexto de estudio

En relación al contexto de estudios, hemos decidido trabajar con futuros profesores de educación básica, fundamentalmente porque serán ellos los que tendrán la responsabilidad de guiar los primeros aprendizajes matemáticos de cientos de niños y niñas de Chile y según diversas

investigaciones, las actitudes que posean hacia las matemáticas, tarde o temprano serán transferidas a sus futuros estudiantes (Rokeach, 1968; Eiser, 1989; Rodríguez González, 1989) con las consecuencias que ello acarrea en el aprendizaje de esta disciplina. Para ello hemos aplicado un diseño muestral al total de estudiantes de Pedagogía en Educación Básica de Chile, obteniendo con ello una muestra de 613 individuos con un margen de error de $\mp 4\%$ y $\pm 5\%$

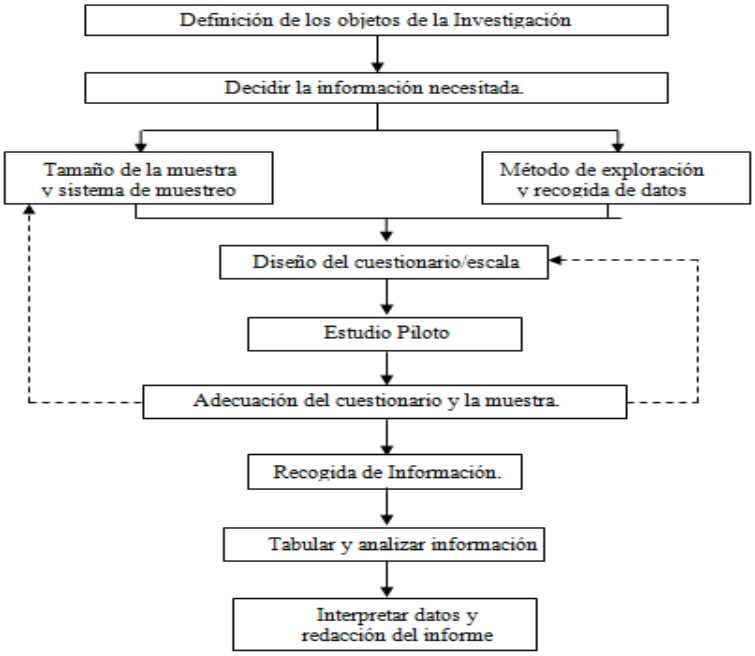
Metodología

Metodológicamente nuestro estudio corresponde a un diseño no experimental, transeccional o transversal de tipo exploratorio descriptivo y los datos los hemos obtenido desde tres diferentes escalas de actitud, adaptadas para nuestros propósitos. Las escalas utilizadas son:

a. Escala de Actitudes y Matemáticas (Fennema y Sherman, 1976); b. Escala de actitudes y emociones ante las Matemáticas (Caballero, Blanco y Guerrero, 2007) y c. Factores asociados a la actitud hacia las matemáticas (Candia, Navarro y Jacobo, 2009). A partir de estos instrumentos hemos elaborado una serie de ítems inéditos, siguiendo las etapas sugeridas por Donoso, Rico y Casis (2013), que junto a los seleccionados de las escalas anteriormente señaladas buscaron cubrir por una parte la componente actitudinal (afectivo, cognitivo y conativo), intrínseca al constructo, y por otro la componente psico social, que llevó un largo proceso de confección y que considera las dimensiones (personal, social, profesional e institucional). En el presente reporte, enunciamos algunos resultados obtenidos a partir de la dimensión personal. Dentro de esta dimensión hemos considerado cuatro categorías: *autoconfianza del estudiante como aprendiz de matemáticas*; *motivación que manifiesta el estudiante frente a la tarea matemática*; *creencias arraigadas en el estudiante de que el dominio matemático está determinado por el género del individuo* y por último el *grado de ansiedad que experimenta el estudiante al momento de enfrentarse a una tarea matemática.* Estos son los cuatro descriptores de actitud que estudiamos en el presente informe.

Como todo proceso de investigación, el nuestro además de la caracterización que hemos señalado, se desarrolla considerando una serie de etapas. Colás y Buendía (1994), las explicitan mediante un esquema (Figura 2.1), que se ajusta perfectamente al que seguimos en la presente investigación. Estas autoras clasifican las investigaciones que utilizan las escalas de actitud, como estudios tipo encuestas o "survey", al igual que los que se sirven de cuestionarios, entrevistas (estructuradas o semi estructuradas) y test, como técnicas de recogidas de datos.

Figura 2.1: Proceso de un estudio tipo "Survey"



Fuente: Colás y Buendía1994, p.179. Basado en Cohen y Manion, 1980.

Análisis

Con los datos obtenidos hemos realizado un análisis descriptivo de cada una de las categorías, considerando en ello la media obtenida, desviación típica y asimetría, con el fin de interpretar el comportamiento que han tenido los datos en cada uno de estos descriptores.

Respecto de la puntuación, cada uno de los ítems del cuestionario de actitudes consta de cinco posibles respuestas, cada una de las cuales tiene asociado un valor que varía de 1 (totalmente en desacuerdo) a 5 (totalmente de acuerdo). Las sentencias formuladas en negativo (a más puntuación menos presencia del constructo) les hemos asociado su valor inverso con la finalidad de unificar el criterio de que una mayor puntuación en los ítems del cuestionario describe un mayor nivel de actitud matemática en el sujeto, asociado a una determinada categoría. En el presente estudio hemos identificado la puntuación media obtenida por los participantes, en las escalas de cada categoría en siete niveles. De este modo, un estudiante podría presentar o no la categoría actitudinal evaluada según el valor obtenido en dicha categoría. Tabla 3.1

Tabla 3.1.Nivel en que se presenta la categoría actitudinal medida		
Rango de Valor Medio Obtenido en la Escala	Presencia del Constructo (Categoría)	Puntuación Actitudinal (Dimensiones)
1.0 - 1.6	Muy bajo	Muy Negativas
1.6 - 2.2	Bajo	Negativas
2.2 - 2.7	Medio bajo	Moderadamente Negativas
2.7- 3.3	Medio	Moderadas
3.3 - 3.8	Medio Alto	Moderadamente Positivas
3.8 - 4.4	Alto	Positivas
4.4 - 5.0	Muy alto	Muy Positivas

Análisis de cada categoría

En la Tabla 3.2 se recogen los estadísticos descriptivos del valor medio obtenido por los estudiantes participantes de la muestra en los ítems correspondientes a cada categoría de la dimensión personal. La asimetría de los datos se observa mediante los histogramas representados en los Gráficos 3.1 para la autoconfianza, 3.2 para la motivación, 3.3 dominio matemático y género, y 3.4 para la ausencia de ansiedad.

Respecto de los valores mínimos y máximos podemos decir que en las categorías motivación, dominio matemático y género y ausencia de ansiedad, hay individuos que han obtenido un valor medio de 1,00 (presentan ausencia del constructo) y otros, 5,00 (presentan presencia total del constructo). Sólo en la autoconfianza no se observan sujetos que hayan obtenido un valor medio de 1,00 pero si los hay con valor 5,00 para este constructo. De acuerdo a los valores medios obtenidos, se observa que ninguna categoría se ubica en un nivel inferior al nivel medio bajo. La categoría ausencia de ansiedad matemática se ubican en el nivel medio con 3,28 de media. Las categorías de autoconfianza y motivación, en el medio alto con una media de 3,37 y 3,70 respectivamente. La categoría dominio matemático y género se ubica en el nivel alto con 4,03. La desviación típica oscila entre 0,76 para dominio matemático y género, siendo esta la más baja y 0,89 para ausencia de ansiedad matemática, la más alta, aunque en todos ellos la dispersión es aceptable.

Tabla 3.2: Estadísticos descriptivos de la puntuación media de las categorías pertenecientes a escala de actitudes personales

	N	Mínimo	Máximo	Media	Desv. T.	Asimetría Est.	Asimetría Error
Autoconfianza	606	1,17	5,00	3,3783	0,83458	-0,282	0,099
Motivación	601	1,00	5,00	3,7079	0,84439	-0,659	0,100
Dominio Matemático y Género	607	1,00	5,00	4,0372	0,76210	-0,552	0,099
Ausencia de Ansiedad Matemática	605	1,00	5,00	3,2856	0,89872	-0,343	0,099

En todas las categorías se observa una asimetría negativa, dado que las frecuencias más altas se ubican a la derecha de la media, más cercano al nivel alto de presencia de constructo, con valores que van desde -0,282 (autoconfianza) y -0,659 (motivación).

Destacamos que la categoría que obtiene la media más alta es la de dominio matemático y género, con ello inferimos que los estudiantes no le asignan importancia al factor género en el dominio matemático que puedan poseer sus futuros estudiantes. Se encuentran bastante motivados en el aprendizaje matemático y confiados en sus capacidades y por último la ausencia de ansiedad se manifiesta en nivel medio, con lo que concluimos que a los estudiantes las matemáticas no les generan gran ansiedad.

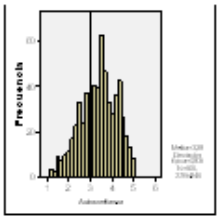


Gráfico3.1Asimetría Autoconfianza

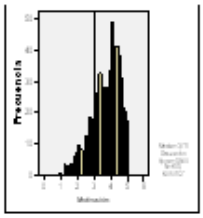


Gráfico 3.2 Asimetría Motivación

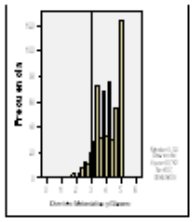


Gráfico 3.3 Asimetría Dominio Matemático y Género

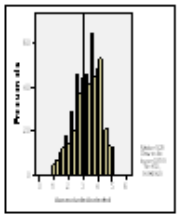


Gráfico 3.4 Asimetría Ausencia de Ansiedad

Análisis de la dimensión personal

La Tabla 3.3 recoge los estadísticos descriptivos del valor medio obtenido por los estudiantes participantes de la muestra en los ítems correspondientes al total de categorías pertenecientes a la dimensión personal. Lo que nos permite determinar el grado de actitudes personales que manifiestan los individuos hacia las matemáticas y el Gráfico 3.5 expone un histograma que muestra la asimetría de dichos datos. Como se observa, podemos decir que hay sujetos que han obtenido un valor mínimo de 1,45 (actitudes personales muy negativas hacia las matemáticas) y por el contrario, otros que obtienen una puntuación media de 4,83 (actitudes personales muy positiva hacia las matemáticas)

El valor medio obtenido por el conjunto de la muestra es de 3,60, con una desviación típica de 0.6 aproximadamente. Esto indica que de los siete niveles descritos en la Tabla 3.1, las actitudes personales que manifiestan los estudiantes hacia las matemáticas se ubica en el *nivel moderadamente positivas*, con una dispersión aceptable y una asimetría negativa, dado que las frecuencias más altas se ubican a la derecha de la media, más cercano al nivel positivo de actitud, con un estadístico de -0.296. De acuerdo con esto, podemos decir que, las actitudes personales que manifiestan los estudiantes hacia las matemáticas son moderadamente positivas.

Tabla 3.3: *Estadísticos descriptivos de la puntuación media de las categorías pertenecientes a escala de actitudes personales.*

	N	Mínimo	Máximo	Media	Desv. T.	Asimetría	
						Est.	Error
Actitud Personal	592	1,45	4,83	3,6075	0,64055	-0,448	0,100

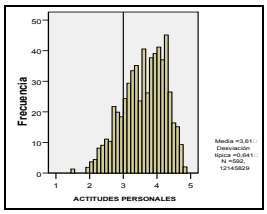


Gráfico X1: Histograma actitudes personales hacia las matemáticas

Conclusiones

De acuerdo con este análisis descriptivo, podemos determinar algunas conclusiones preliminares del estudio, las que señalamos a continuación:

- Las Actitudes personales de los futuros profesores de Educación General Básica de Chile son moderadamente positivas.
- La Autoconfianza como aprendiz de matemáticas y la Motivación hacia la disciplina que manifiesta tener el estudiante son moderadamente positivas
- Se observa una moderada ausencia de ansiedad por parte de los futuros profesores de E.G.B. de Chile.

Los estudiantes carecen de la creencia de que el dominio matemático está influenciado por el factor género, obteniendo una valoración positiva respecto a este punto.

Referencias bibliográficas

Bermejo, V., Lago, M. y Rodriguez, P (2000). Las creencias de alumnos y profesores sobre las matemáticas. En D. Vence, L. Pérez, J. Beltrán, V. Bermejo, M. Prieto y R. González (coords.) *Intervención psicopedagógica y currículum escolar* (pp 129-151).Madrid: Pirámide.

Beckler, S. (1984). Empirical validation of affect, behavior and cognition as distinct components of attitude. *Journal of Personality and Social Psychology*, *47*, 1191-1205.

Bishop, A. (1988). *Mathematical enculturation: a cultural perspective on mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bishop, A. (1999). *Enculturación matemática, la educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidós.

Callejo, M. (1994). *Un club matemático para la diversidad*. Madrid: Nercea.

Caballero, A., Blanco, L. y Guerrero, E. (2008). Descripción del dominio afectivo en las matemáticas de los estudiantes para maestro de la Universidad de Extremadura. *Paradigma XXIX (2)*. 157-171.

Candia, P., Navarro, L., Jacobo, A. (2009). Actitud hacia las matemáticas de estudiantes de ingeniería de un tecnológico del sur de Sonora. Manuscrito no publicado. Instituto tecnológico superior de Cajeme. México.

Colás, M. P.y Buendía, L. (1994). Investigación Educativa. Sevilla: Ediciones Alfacar.

Donoso, P., Rico, N., y Casis, M. (2013). Etapas de elaboración de un instrumento para indagar sobre las actitudes hacia las matemáticas. En Rico, L., Cañadas, M.C., Gutiérrez, J., Molina, M y Segovia I. (Eds). *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro*. Granada, España: Editorial Comares

Eiser, J.R. (1989) *Psicología Social*. Madrid: Pirámide.

Fennema, E. y Sherman, J. (1976). Fennema-Sherman mathematics attitude scales. *Catalogue of selected documents in psychology 6,* 324-326.

Gil, N.; Blanco, L.; Guerrero, E. (2005). El dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas. Una revisión de sus descriptores básicos. *UNION Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 2, 15-32.

Gómez-Chacón, I. M. (2000). Matemática Emocional. Los efectos en el aprendizaje matemático. Madrid: Narcea.

Guerrero, E., Blanco, L. y Castro, F. (2001). Trastornos emocionales ante la educación matemática. En García, J.N. (Coor.), *Aplicaciones de Intervención Psicopedagógica*. (pp. 229-237), Madrid: Pirámide.

Krathwohl, D., Bloom, B., Masia, B. (1964). Taxonomy of educational objectives, the classification of educational goals: Handbook 2: *Affective Domain*. New York: Longmann.

Mandler, G. (1989). Affect and learning: Reflections and prospects. En D.Mc Leod y V. Adams (Eds.), *Affect and mathematical problem solving. A new perspective.* (pp.3-19).New York: Springer-Verlag

McLeod, D. (1989): The role of affect in mathematical problem solving. En D. McLeod y V. Adams (eds.):*Affect and mathematical problem solving:A new perspective*.(pp.20-36). New York: Springer-Verlang.

McLeod, D. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualisation. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. (pp. 575-596). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Nimier, J. (1977). *Mathematiques et affectivité. Educational Studies in Mathematics*, 8(3), 241-250.

Rodriguez, A. (1989). Interpretación de las actitudes. En Rodríguez, A., y Seoane, J. (Coords.) *Creencias, actitudes y valores*. (Vol 7 del tratado de Psicología General). Madrid: Alhambra.

Rajecki, D. (1982). Attitudes: Themes and advances. Sunderland, MA: Sinauer Associates.
Rosenberg, M., Hovland, C. y Colbs. (1960) *Attitude organization and change*, N. Haven: Yale University Press.

Rokeach, M. (1968) *Beliefs, attitudes and values*, San Francisco, Jossey-Bass.

Truttschel, W. J. (2002). *Mathematics anxiety at Chippewa Valley Technical C*ollege. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Wisconsin.

APORTES DESDE UNA INVESTIGACION EN EL CONTEXTO DE LA FORMACION DEL PROFESORADO

María Beatríz Bouciguez, Liliana Irassar, María Cristina Modarelli, María Rosa Nolasco y María de las Mercedes Suárez
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires Argentina
cmodarel@fio.unicen.edu.ar, msuarez@fio.unicen.edu.ar

Resumen. En este trabajo se exhibe el análisis de las respuestas a un cuestionario administrado en el marco del Curso de Capacitación "El software libre en el aula de matemática". La instrumentación de dicho curso responde al objetivo *Generar espacios de formación e innovación para los docentes del Nivel Secundario a fin de optimizar las prácticas pedagógicas en beneficio del procesos de enseñanza y de aprendizaje* correspondiente al Proyecto de Investigación: "Articulación escuela secundaria-universidad: análisis de aspectos disciplinares, vocacionales y discursivo-comunicativos en los estudiantes de la FIO". Dicho proyecto está acreditado por el Programa de Incentivos de la SPU. El curso se formuló atendiendo a la incorporación de las netbook en las Escuelas Secundarias de la Provincia de Buenos Aires en Argentina y al hecho de que los profesores enfrentan dificultades para utilizar las nuevas tecnologías en las aulas, entre otros aspectos.
Palabras clave: formación continua, aulas con netbook
Abstract. This paper shows the analysis of the answers to a questionnaire which was provided within the framework of a Training Course called "Free software in maths class". The building up of the course aims to produce spaces of formation and innovation for High school teachers in order to improve pedagogical practices that benefit the teaching-learning process that belong to the Research Project: "Articulation of secondary school and university: analysis of disciplinary, vocational and discursive-communicative aspects in students at Facultad de Ingeniería de Olavarría".This project is already accredited by the Programme of Incentives of the SPU. The course was formulated in response to the provision of netbooks for High Schools of Provincia de Buenos Aires and to the fact that, among other aspects, teachers afford difficulties at the moment of using new technologies in the classroom.
Key words: continuous training, classrooms with netbooks

Introducción

Considerando que desde la Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires (DGCyE) se han determinado las Orientaciones para la presentación de Cursos de Capacitación y las mismas deben contemplar: *"La planificación de la enseñanza de las matemáticas en el marco de las definiciones del Diseño Curricular. El problema de la evaluación en el área. Los contenidos matemáticos: profundización de los contenidos del área y análisis didáctico, las condiciones de trabajo en las aulas, los tipos de problemas, la intervención del docente y la participación de los alumnos en los distintos años y ciclos*" desde el Proyecto de Investigación: "Articulación escuela secundaria-universidad: análisis de aspectos disciplinares, vocacionales y discursivo-comunicativos en los estudiantes de la FIO" se formuló la propuesta "El software libre en el aula de matemática" atendiendo estas recomendaciones.

Este trabajo consiste en el análisis de las respuestas producidas en la administración de un cuestionario en el marco del antes mencionado Curso el cual contó con puntaje asignado por la DGCyE mediante Resolución N° 5812-0087644/10 y se dictó en la Facultad de Ingeniería (FIO) de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNCPBA) en el año 2011.

Esta capacitación estuvo a cargo de docentes de la FIO integrantes del Núcleo de Actividades Científico Tecnológicas (NACT) denominado GIASU (Grupo de Investigación en Articulación Secundaria Universidad), grupo que lleva a cabo como una de sus líneas de trabajo el Proyecto de Investigación ya citado acreditado por el Programa de Incentivos de la Secretaría de Políticas Universitarias (SPU) del Ministerio de Educación de la Nación.

La instrumentación de este tipo de tareas viene a cumplimentar uno de los objetivos de dicho proyecto: *Generar espacios de formación, capacitación e innovación permanente para los docentes del Nivel Secundario y Superior; a fin de optimizar las prácticas pedagógicas y promover el análisis de las tareas docentes en beneficio de los procesos de enseñanza y de aprendizaje*; el cual será retomado y recreado en el Proyecto *Escuela secundaria-universidad: su articulación y la formación docente. Análisis de aspectos vocacionales y disciplinares en matemáticas en los estudiantes de la FIO*.

Como ya se dijo se exhibe el análisis e interpretación del cuestionario que fue respondido por los profesores asistentes, todos a cargo de asignaturas de Matemática en Escuelas Secundarias de Olavarría y zona.

Para la elaboración de la propuesta se utilizaron resultados provistos desde los proyectos de investigación que el GIASU ha venido desarrollando. También fueron insumos las encuestas administradas, en el marco de dichos proyectos y en cursos de capacitación y actualización realizados, a los docentes que dictan matemática en Olavarría y zona de influencia de la FIO; los mismos manifiestan como *necesidades*:

- revisión de contenidos disciplinares,
- gestión de la actitud del estudiante frente a las matemáticas,
- eficacia de métodos y técnicas empleados en la enseñanza de la matemática,
- necesidad de asesoramiento para la enseñanza de la matemática con TIC´s.

En este escenario, el nombre del curso no sólo actuó como excusa para convocar a los docentes sino también para validar nuestro interés investigativo en relevar sus prácticas. Los profesores enfrentan dificultades para utilizar las nuevas tecnologías pese a que constituyen una alternativa para enfrentar el desinterés de los estudiantes. El carácter de esas dificultades pone también de manifiesto cuestiones conceptuales en las que un uso adecuado de la netbook puede favorecer la intervención del docente en el proceso, especialmente para que los alumnos establezcan el "lazo" entre las nociones puestas en juego como *instrumento* y las mismas nociones consideradas como *objeto matemático.*

Estado del arte

1994

La formación de los docentes debería jerarquizar la búsqueda de ejes de articulación e integración entre contenidos y métodos, conocimientos y procedimientos, saberes científicos y saberes pedagógicos. Es indispensable que los profesores revisen en el aula sus creencias y concepciones de carácter epistemológico y didáctico, puesto que influyen en el abordaje de las estructuras curriculares y en su práctica docente.

Si se acepta que una pieza clave en el proceso de enseñanza - aprendizaje de las matemáticas, es el docente y si se consideran circunstancias tales como el excesivo número de alumnos por grupo, los diferentes sistemas de evaluación en las distintas instituciones, las deficiencias de los programas, la falta de oportunidades de los profesores para su superación profesional, la carencia de motivación de los alumnos, entre otras da como resultado, tanto una preparación de los alumnos por debajo de lo esperado como insatisfacción de los profesores con respecto a su labor.

Desde nuestro rol como investigadores del núcleo GIASU considerando el carácter de "observatorio" del mismo a nivel regional respecto de las problemáticas que involucran el acceso y la afiliación de los alumnos a los estudios superiores, entendemos que esta propuesta contribuyó a articular el trabajo investigativo con el campo profesional de los docentes de secundaria ya que constituyó una acción concreta de transferencia y formación docente dirigida a la comunidad en la que la FIO se inserta. Asimismo se considera que la formación continua del docente de matemática realizada de manera sistemática contribuiría a subsanar, en parte, las situaciones descriptas. Fornacier (1983) considera que una condición necesaria para enseñar matemática es saber matemática y establece una serie de aspectos que deberían estar presentes en la formación de los docentes:

1. Habilidad para detectar los elementos matematizables en las situaciones reales, en otras disciplinas y en el medio ambiente.

2. Conciencia de aquellos hábitos, valores, y actitudes que pueden ser cultivadas en la educación, particularmente dentro de la componente matemática de la misma.

3. Susceptibilidad para captar la naturaleza del estudiante: su experiencia previa, sus necesidades, sus percepciones, sus formas de aprendizaje, sus capacidades.

4. Familiaridad con técnicas de enseñanza a las que pueda recurrir para hacer frente a condiciones diversas.

5. Creatividad didáctica e inventiva para innovar.

Para favorecer los aprendizajes y el desarrollo del pensamiento conceptual es fundamental que los alumnos lleguen a articular diferentes representaciones semióticas; para lo cual es necesario

enfrentarlos a suficientes problemas de traslados entre las distintas representaciones semióticas que admite la noción matemática objeto del aprendizaje focalizado. Duval (1996) plantea dos interrogantes claves en relación con el aprendizaje: ¿cómo aprender a no confundir un objeto con la representación que se hace de él? y ¿cómo aprender a cambiar de registro? El objeto matemático representado no debe confundirse con su representación: la ecuación de una parábola y el gráfico de dicha curva se refieren al mismo objeto matemático, pero no dan cuenta de las mismas propiedades del objeto.

Chevallard (1989, citado por D'Amore, 2005) expone que un objeto matemático es un emergente de un sistema en donde se manipulan objetos materiales. Si bien estos se descomponen en diferentes registros semióticos: *registro oral*, *registro gestual* o *registro de escritura* se puede afirmar que, en esta acepción, ya no tiene interés la noción de significado de un objeto matemático sino la relación que se entabla con él. Un objeto matemático es invariante respecto de todas sus representaciones.

En matemática se utilizan numerosos registros de expresión y representación: registro del lenguaje natural, gráfico, figurativo (incluye dibujos), tablas de escritura para los números, etc.:

> Es indudable el valor cognitivo que comportan las actividades de articulación entre registros. Ahora bien, en torno a un procedimiento de resolución de sistemas de ecuaciones, una verdadera articulación debería permitir explicar, vía tratamiento en un determinado registro, los distintos pasos del procedimiento desplegado en el otro. Si en cambio, la conversión al registro de gráficos cartesianos está al servicio de trasladar la información que se obtiene para dar significado al estado final de un procedimiento algebraico, el tratamiento algebraico no llega a ser explicado en tanto procedimiento de resolución y más que una articulación de registros podríamos decir que el tratamiento en un registro se ofrece a cambio de otro. (Sessa, C. y Cambriglia, V. 2007, p.21)

Los diferentes softwares usados con criterios adecuados deben constituirse en un *aliado* que permita apropiarse de una gama de heurísticas para realizar un mejor control de la actividad y de los resultados. Es pertinente no restringir su uso a aspectos técnicos y de cálculo para así contribuir a poner en juego los conceptos y específicamente con GeoGebra se destaca la importancia de poder trabajar simultáneamente sobre tres registros de representación semiótica: numérico, algebraico y gráfico.

Frecuentemente los profesores observan que la adquisición del conocimiento matemático no introduce a los estudiantes en las formas del pensamiento matemático, como por ejemplo, la

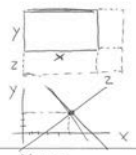
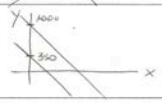
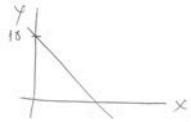
habilidad para cambiar el registro de representación pero correspondientemente numerosos estudios, dan cuenta de que algunos profesores exhiben dificultades similares a las detectadas en los estudiantes.

Análisis de las producciones

El cuestionario consistió en, dados tres sistemas de ecuaciones lineales en su registro verbal, realizar la conversión a los restantes registros de representación e identificar el objeto matemático.

Algunas de las veinticuatro producciones de los docentes se exhiben a continuación:

DOCENTE 1

Objeto matemático	Representación		
	Registro verbal	Registro Algebraico	Registro Gráfico
Sistema de ecuaciones compatible determinado	Si los lados de un rectángulo se alargan 2 cm cada uno, el perímetro es de 24 cm. Si se sabe además que la diferencia entre la medida de los lados es de 2 cm, ¿cuánto miden los lados del rectángulo?	$2\cdot(x+2)+2(y+2)=24$ $\left.\begin{array}{l} x+y+4=12 \\ x-y=2 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x+y=8 \\ x-y=2 \end{array}\right\}$	
Sistema de ecuaciones incompatible	La suma de dos números es 1000 y el doble de su suma da 700. ¿Cuáles son esos números?	$\left.\begin{array}{l} x+y=1000 \\ 2\cdot(x+y)=700 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x+y=1000 \\ x+y=350 \end{array}\right\}$	
Sistema de ecuaciones compatible indeterminado	El perímetro de un triángulo isósceles es 18 cm. Si se suma la medida de uno de sus lados congruentes a la mitad de la medida del lado no congruente, se obtiene 9. ¿Cuál es la medida de cada lado del triángulo?	$\left.\begin{array}{l} 2x+y=18 \\ x+\frac{1}{2}y=9 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} 2x+y=18 \\ 2x+y=18 \end{array}$	

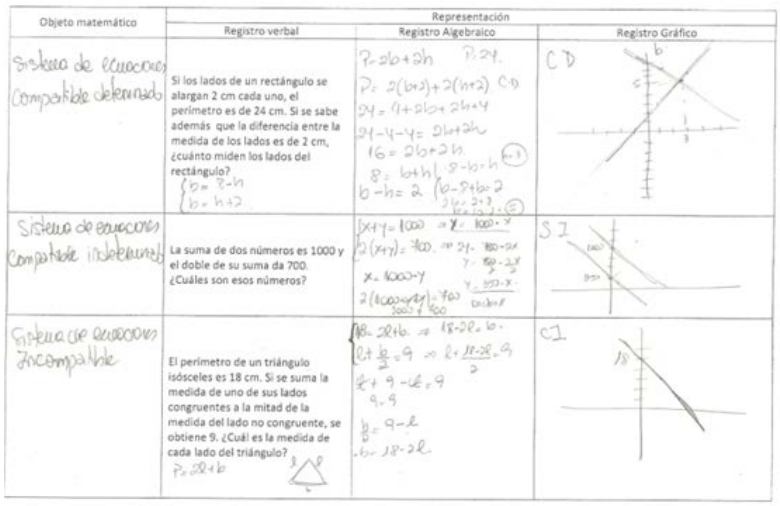
Identifica correctamente el objeto matemático; en el registro algebraico realiza también el tratamiento e incorpora el registro figurativo en el caso del primer problema en la columna del registro gráfico.

DOCENTE 2

Objeto matemático	Representación		
	Registro verbal	Registro Algebraico	Registro Gráfico
Sistema de ecuaciones (rectángulos)	Si los lados de un rectángulo se alargan 2 cm cada uno, el perímetro es de 24 cm. Si se sabe además que la diferencia entre la medida de los lados es de 2 cm, ¿cuánto miden los lados del rectángulo?	$2(x+2)+2(y+2)=24$ $2x+4+2y+4=24$ $\left\{\begin{array}{l} 2x+2y=16 \\ x-y=2 \end{array}\right.$	
Plantear y resolver sistemas de ecuaciones. (S.C., S.I)	La suma de dos números es 1000 y el doble de su suma da 700. ¿Cuáles son esos números?	$\left\{\begin{array}{l} x+y=1000 \\ 2(x+y)=700 \end{array}\right.$ S. Incompatible.	
Sistema de ecuaciones (triángulos)	El perímetro de un triángulo isósceles es 18 cm. Si se suma la medida de uno de sus lados congruentes a la mitad de la medida del lado no congruente, se obtiene 9. ¿Cuál es la medida de cada lado del triángulo?	$\left\{\begin{array}{l} 2a+b=18 \\ a+\frac{b}{2}=9 \end{array}\right.$	

No identifica correctamente el objeto matemático y agrega contenidos. El registro algebraico está correcto. En la columna del registro gráfico incorpora el registro figurativo.

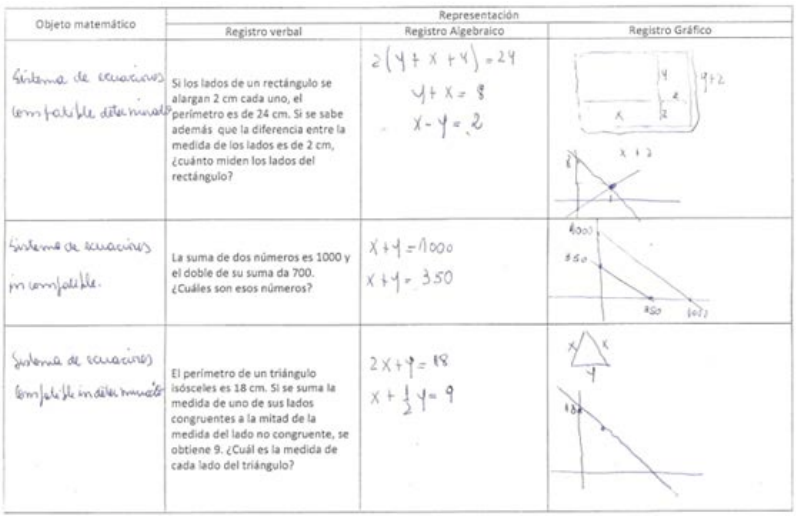
DOCENTE 3



Objeto matemático	Representación		
	Registro verbal	Registro Algebraico	Registro Gráfico
Sistema de ecuaciones Compatible determinado	Si los lados de un rectángulo se alargan 2 cm cada uno, el perímetro es de 24 cm. Si se sabe además que la diferencia entre la medida de los lados es de 2 cm, ¿cuánto miden los lados del rectángulo?		
Sistema de ecuaciones Compatible indeterminado	La suma de dos números es 1000 y el doble de su suma da 700. ¿Cuáles son esos números?		
Sistema de ecuaciones Incompatible	El perímetro de un triángulo isósceles es 18 cm. Si se suma la medida de uno de sus lados congruentes a la mitad de la medida del lado no congruente, se obtiene 9. ¿Cuál es la medida de cada lado del triángulo?		

Identifica correctamente uno solo de los objetos matemáticos, no agrega contenidos y si bien el registro gráfico estaría correcto no se corresponde con las otras columnas. En el registro algebraico incorpora el tratamiento también.

DOCENTE 4



Objeto matemático	Representación		
	Registro verbal	Registro Algebraico	Registro Gráfico
Sistema de ecuaciones compatible determinado	Si los lados de un rectángulo se alargan 2 cm cada uno, el perímetro es de 24 cm. Si se sabe además que la diferencia entre la medida de los lados es de 2 cm, ¿cuánto miden los lados del rectángulo?	$2(y+x+4)=24$ $y+x=8$ $x-y=2$	
Sistema de ecuaciones incompatible.	La suma de dos números es 1000 y el doble de su suma da 700. ¿Cuáles son esos números?	$x+y=1000$ $x+y=350$	
Sistema de ecuaciones compatible indeterminado	El perímetro de un triángulo isósceles es 18 cm. Si se suma la medida de uno de sus lados congruentes a la mitad de la medida del lado no congruente, se obtiene 9. ¿Cuál es la medida de cada lado del triángulo?	$2x+y=18$ $x+\frac{1}{2}y=9$	

Identifica correctamente el objeto matemático y convierte adecuadamente al registro algebraico. En el registro gráfico agrega lo figurativo.

DOCENTE 5

Objeto matemático	Representación: Registro verbal	Representación: Registro Algebraico	Representación: Registro Gráfico
Sistema de ecuaciones compatible determinado	Si los lados de un rectángulo se alargan 2 cm cada uno, el perímetro es de 24 cm. Si se sabe además que la diferencia entre la medida de los lados es de 2 cm, ¿cuánto miden los lados del rectángulo?	$P = 2b + 2h$; $24 = 2(b+2) + 2(h+2)$; $24 = 2b + 4 + 2h + 4$; $14 - 8 = 2(b+h)$; $8 = 2b + h$; $2 = b - h$; $\begin{cases} 2 = b - h \\ 8 = 2b + h \end{cases}$	
Sistema de ecuaciones compatible indeterminado	La suma de dos números es 1000 y el doble de su suma da 700. ¿Cuáles son esos números?	$x + y = 1000$; $2(x+y) = 700$; $2(x + 1000 - x) = 700$; $2x + 2000 - 2x = 700$; Sistema incompatible.	
Sistema de ecuaciones incompatible	El perímetro de un triángulo isósceles es 18 cm. Si se suma la medida de uno de sus lados congruentes a la mitad de la medida del lado no congruente, se obtiene 9. ¿Cuál es la medida de cada lado del triángulo?	$2x + y = 18$; $x + \frac{y}{2} = 9$; $x + \frac{18-2x}{2} = 9$; $x + 9 - x = 9$; $9 = 9$	

Identifica correctamente el objeto matemático del primer problema. En el registro algebraico realiza también el tratamiento e incorpora el registro figurativo en esa columna. Si bien no agrega contenidos hay una figura fuera de la tabla. El registro gráfico no se corresponde con las otras columnas y está incompleto.

Se exhibe a continuación un resumen que muestra el tipo de identificación realizado:

Problema 1											
Objeto matemático				Registro algebraico				Registro gráfico			
IC	IM	NI	NR	IC	IM	NI	NR	IC	IM	NI	NR
4	4	14	2	2	13	9	0	6	13	5	0
Problema 2											
Objeto matemático				Registro algebraico				Registro gráfico			
IC	IM	NI	NR	IC	IM	NI	NR	IC	IM	NI	NR
4	4	12	4	10	12	2	0	5	17	2	0
Problema 3											
Objeto matemático				Registro algebraico				Registro gráfico			
IC	IM	NI	NR	IC	IM	NI	NR	IC	IM	NI	NR
4	2	13	5	16	5	3	0	2	14	7	1

IC: Identifica correctamente; **IM**: Identifica medianamente; **NI**: No identifica; **NR**: No responde

Se detectó que los docentes confunden objeto matemático con contenidos (los que aparecían en el registro verbal para dar el contexto) y registro gráfico con figurativo (dibujan la figura geométrica que aparecía mencionada en el texto). Se evidenció que en el registro algebraico los docentes incorporan la resolución, es decir confunden conversión con tratamiento.

Conclusiones

Consideramos que el rendimiento académico de los estudiantes en matemáticas, es el resultado del efecto combinado de procesos de formación docente, prácticas pedagógicas, planes y programas de estudio y contextos económicos, sociales y culturales.

Adherimos a lo que expresan algunos autores quienes en el contexto de tratamiento de sistemas de ecuaciones afirman: "Asumimos que un trabajo de esta naturaleza debería acompañar al habitual de producción y apropiación de algoritmos de resolución, si se tiene en la mira dotar de sentido a los objetos y prácticas algebraicas". (Sessa, C. y Cambriglia, V. 2007, p.21)

En este relevamiento se detectó que en el registro algebraico los docentes incorporan la resolución, es decir confunden conversión con tratamiento. Si bien desde un punto de vista matemático la conversión y el tratamiento son un todo observamos que los docentes profundizan en el tratamiento y así gestionan sus clases.

En la enseñanza de este tema es necesario promover actividades que permitan desplegar distintas estrategias. Subyace en el tratamiento de los problemas similares a los brindados el concepto de sistemas de ecuaciones como "dos igualdades numéricas que se cumplen para un par de números desconocidos, a develar" (Panizza, M. 1999, p.454). En los cuadros que completan, lo que hemos denominado cuestionario, se evidencia que los docentes no utilizan en los procedimientos para resolver sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas con solución única el hecho de que todas las rectas que van obteniendo cumplen una condición: pasar por el punto solución del sistema. En el trabajo con sistemas que no tengan solución y con sistemas con infinitas soluciones, es imprescindible articular los métodos gráficos con los algebraicos: "Asociar dichos métodos [algebraicos] con los sistemas con única solución, restricción que reduciría considerablemente el dominio de aplicabilidad de los métodos algebraicos" (Sessa, C. y Cambriglia, V., 2007, p.15). Estas mismas autoras sostienen que la decisión didáctica de desvincular del tratamiento algebraico a los sistemas indeterminados o incompatibles podría estar condicionada por la omisión de la noción de sistemas equivalentes durante el tratamiento de sistemas determinados. En definitiva, para que un alumno disponga de un conocimiento apropiado acerca de los sistemas lineales, es necesario que interprete cómo sustituir un sistema por otro equivalente, qué significa la equivalencia entre sistemas, cuáles son los distintos registros de representación y qué significa la solución y también que sea capaz de resolverlos con ciertas garantías de éxito.

Consideramos que antes de introducir nuevas tecnologías es necesario centrarnos en el conocimiento disciplinar de los docentes ya que la introducción de una determinada tecnología en las prácticas educativas no supone un cambio en sí mismo. En éste sentido, qué tecnología o

tecnologías utilizar debería ser un elección pedagógica ligada a decisiones sobre los objetivos y propósitos, la selección y secuenciación de contenidos, la propuesta de actividades, las estrategias de enseñanza, los instrumentos y recursos de evaluación, entre otras variables.

Referencias bibliográficas

D´Amore, B. (2005) *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la didáctica de la Matemática*. México. Reverté Ediciones SA.

Duval, R. (1996) Quel Cognitif Retenir en Didactiques des Mathématiques? *Recherches en Didactique des Mathématiques. 16(3),*349-382.

Fornacier, J. (1983) La responsabilidad de los maestros de escuela primaria frente a la componente matemática del currículo: implicaciones para la formación de maestros. En R Morris (Comp.). *Estudios en educación matemática.* (pp. 5-16). París: Organización de las Naciones Unidas para la educación, la Ciencia y la Cultura. UNESCO.

Guzmán, I. (1998) Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. *Revista latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.1(1),* 5-21.

Panizza, M. Sadovsky, P. y Sessa, C. (1999) La ecuación lineal con dos variables entre la unicidad y el infinito. *Enseñanza de las Ciencias, 17 (3),* 453-461.

Sessa, C. y Cambriglia, V. (2007). La validación de procedimientos para resolver sistemas de e cuaciones. *Yupana, 1(4),* 11-24.

COMPETENCIAS DOCENTES NECESARIAS PARA MEJORAR LOS PROCESOS DE APRENDIZAJE EN MATEMÁTICAS EN CURSOS A DISTANCIA

Martha Leticia García Rodríguez, Alma Alicia Benítez Pérez y Alicia López Betancourt
ESIME Z, CECyT 11-Instituto Politécnico Nacional, UJED México
martha.garcia@gmail.com, abenitez@ipn.mx, abetalopez@gmail.com

Resumen. La presente investigación analiza las competencias docentes que un grupo de profesores ponen en práctica cuando diseñan materiales educativos en formato digital, del tópico de funciones vectoriales de variable real. Se asume la importancia de repensar en el papel de las TIC como una vía innovadora que complementada con el currículo puede contribuir para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje. El trabajo de los profesores incluyó cuatro fases: i) diseño; ii) producción de materiales; iii) aplicación del diseño y iv) evaluación. Los hallazgos son evidencia de las competencias que son necesarias en cada etapa para lograr los objetivos.
Palabras clave: Competencias docentes, aprendizaje, representaciones
Abstract. The aim of this paper is to analyze the teaching competencies that a group of teachers use to design digital educational materials, about real vector functions. The authors assume the necessity to reflect on the ICT role as an innovative way that integrated with the curriculum can contribute to improve the teaching and learning processes. The teachers work included four stages: i) design, ii) production of materials, iii) application and iv) evaluation. The results are evident skills required at each stage to achieve the objectives.
Key words: teacher competences, learning, representations

Introducción

La primera década del presente siglo, se ha diferenciado por la riqueza de información que se presenta a nuestro alrededor, para algunos autores como Marqués (2000) las sociedades actuales pueden ser consideradas como sistemas complejos en los que la información disponible mediante las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC) fluye a un ritmo acelerado. La presencia de las herramientas multimedia y de las TIC ha penetrado en todos los ámbitos de la vida personal, actualmente la computadora e internet se consideran parte fundamental e imprescindible en casi todas las actividades que se llevan a cabo. En el sector educativo, el papel de las TIC ha presentado expectativas de gran relevancia, pues la información obtenida mediante ellas puede ser un elemento determinante para la construcción de conocimiento, que se realiza mediante un proceso que exige a los actores involucrados –los docentes- prepararse para este desafío.

En particular internet proporciona diversos caminos para acceder a la información y a nuevas formas de trabajo, como trabajos de diseño de sitios web, de programación, de traducción por lo que ha modificado sustancialmente el estilo de vida de las sociedades. En el sector educativo internet ha desarrollado una vía más de comunicación entre el docente y el educando, gracias a la interacción síncrona y asíncrona que se puede crear entre ellos en una modalidad de estudio, como son los cursos a distancia.

En este contexto se han impulsado y desarrollado diversas investigaciones que abordan la educación a distancia, como el proyecto IberVirtual realizado en Argentina y cuyo objetivo fue fortalecer la educación a distancia en el espacio iberoamericano del conocimiento. Particularmente el proyecto incluyó la realizada en el Salvador, para la implementación de un modelo flexible y propio de educación universitaria a distancia. Como una primera acción realizada en el Salvador, se estudió la factibilidad de este proyecto como un factor para enfrentar la demanda de educación superior que no podía ser atendida con el modelo tradicional presencial. Del análisis de la situación se identificó como una necesidad prioritaria, formar cuadros de docentes para la elaboración de material didáctico adaptado para esta modalidad (Asociación Iberoamericana de Educación Superior y a Distancia, 2012).

En el mismo sentido, Rivera, Zamora y Soria (2010) señalan a la necesidad de preparar al profesorado para interactuar con la tecnología digital de manear eficaz, para ellos, es necesario que la formación incluya, el desarrollo y manejo de los contenidos en formato digital y la inclusión de enlaces web que permitan a los estudiantes contar con una gran cantidad de información. Además mencionan que los contenidos en formato web apoyan a los alumnos para que sean ellos quienes estructuren su aprendizaje, seleccionando el orden en el que examinarán los contenidos; también contribuye el acceso a los contenidos de una unidad de aprendizaje en horarios diversos, y el uso de recursos multimedia.

En concordancia con lo antes expuesto, la UNESCO ha establecido normas sobre competencias en TIC para docentes, en ellas se formulan directrices para la formación del profesorado, reconociendo que los docentes necesitan estar preparados para brindar a los estudiantes diversos caminos de aprendizaje con el soporte de las nuevas tecnologías, lo que presupone que deben saber inicialmente cómo deben utilizar la tecnología y segundo cómo esta puede contribuir para el aprendizaje de los estudiantes (UNESCO, 2008). Las ideas expuestas dieron origen a una investigación realizada en el Instituto Politécnico Nacional (IPN) con registro 20120702, una pregunta central de la investigación fue analizar ¿Qué competencias docentes se ponen en juego para diseñar, desarrollar e implementar contenidos educativos en formato digital para apoyar los cursos de matemáticas?

Elementos Teóricos

En el informe de la UNESCO (2008) que lleva como nombre Educación en y para la sociedad de la información se estipula que las TIC son motores del crecimiento de un país, e instrumentos para desarrollar las capacidades y la autonomía de las personas. Se menciona que a través del acceso a una educación de calidad para todos, es viable aumentar las contribuciones personales al

desarrollo de la sociedad, así como la distribución equitativa de los beneficios del crecimiento económico. En el informe se asientan tres enfoques que articulan las políticas de educación con el desarrollo económico: a) enfoque de nociones básicas de tecnología; b) enfoque de profundización del conocimiento y c) enfoque de creación de conocimiento. Las normas sobre competencias en TIC para docentes, establecidas en el informe de la UNESCO (2008, p. 26), abarcan estos tres enfoques de cambio educativo:

a) La formación de los docentes en el primer enfoque -de nociones básicas de tecnología- considera importante que los profesores adquieran las nociones básicas de tecnología digital y la utilización de las TIC. También recomienda a los docentes poner en práctica competencias y conocimientos tecnológicos de los recursos web, que son necesarios para emplear la tecnología con fines educativos, y obtener los conocimientos fundamentales sobre las disciplinas y la pedagogía que fortalezcan su propio perfeccionamiento profesional.

b) En el segundo enfoque de profundización del conocimiento, se puntualiza la formación profesional de los docentes orientada al empleo de las TIC para dirigir a los estudiantes en situaciones que demandan la solución de problemas complejos, y para efectuar la gestión de entornos de aprendizaje dinámicos. Los docentes deben contar con las competencias y los conocimientos que exige la creación de proyectos complejos, así como vigilar su gestión, para colaborar con otros docentes y formar redes con la finalidad de acceder a la información, comunicarse con sus colegas y con expertos externos, con ello se enriquece su propia formación profesional.

c) En este enfoque -de creación de conocimiento- los docentes son considerados educandos expertos y productores de conocimientos, dedicados a la innovación pedagógicas, para desarrollar nuevas estrategias sobre las prácticas de enseñanza y aprendizaje. Los docentes deben tener la capacidad necesaria y mostrar la inclinación adecuada para experimentar, aprender continuamente y utilizar las TIC para crear comunidades profesionales del conocimiento.

Son diversas las modalidades escolares, en las cuales se pone práctica las competencias docentes en TIC, por ejemplo, la educación a distancia. La educación a distancia es una estrategia educativa cuyo objetivo es la aplicación de tecnología para el aprendizaje, contribuye a disminuir las limitaciones debidas a situaciones geográficas que pudiera presentar los participantes, la disponibilidad de tiempo o bien la edad del estudiante. Dicha situación provoca nuevas situaciones tanto en el estudiante y como en el docente, así como nuevos enfoques metodológicos, es decir, se presentan cambios de roles (García, 1994), como los establecidos en las normas sobre competencias en TIC. Los contenidos educativos actualmente presentan recursos tecnológicos

que incluyen sonido, textos e imágenes, lo que origina que su diseño no sea una tarea sencilla, la dificultad radica en ofrecer valores agregados, como la interactividad mediante simulaciones que favorezca acercar los contenidos a las experiencias previas de los estudiantes. En este sentido, la intervención del docente no es directa, y tendrá que motivar y fortalecer el trabajo autónomo del estudiante, empelando sus competencias docenes en TIC para realizar planeaciones que contribuyan de manera clara y precisa con los objetivos planteados. En esta labor intervienen equipos de expertos con distintas funciones: en los contenidos de la disciplina; en la producción de los materiales; para guiar el aprendizaje y tutores para motivar el aprendizaje y resolver dudas; de las anteriores, las funciones que desempeñe el docente dependerán del tamaño y recursos de la institución y del número de alumnos (García 1994).

Metodología

El método de investigación se ubica en el paradigma cualitativo. El diseño de la investigación incluyó cuatro fases: i) diseño de las actividades; ii) producción de materiales; iii) aplicación del diseño y iv) evaluación.

La unidad de análisis es el trabajo realizado por un grupo de tres profesores durante el proceso de elaboración de contenidos en formato digital como apoyo para un curso de Cálculo Vectorial.

Población un grupo de tres profesores que imparten clases de Cálculo Vectorial en una carrera de ingeniería del IPN y que trabajan en contenidos digitales.

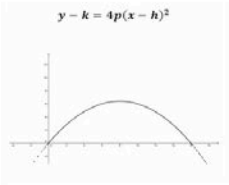
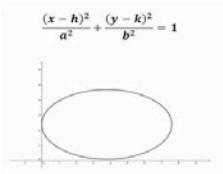
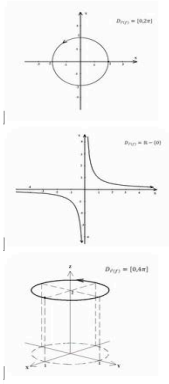
Los instrumentos utilizados para la recolección de datos fueron: a) reportes escritos; b) grabaciones en audio y c) reportes elaborados por el profesor-investigador.

Los conceptos implícitos en las actividades son: dominio de una función vectorial de variable real, representación gráfica de una función vectorial y ecuaciones paramétricas de una curva en el plano o en el espacio.

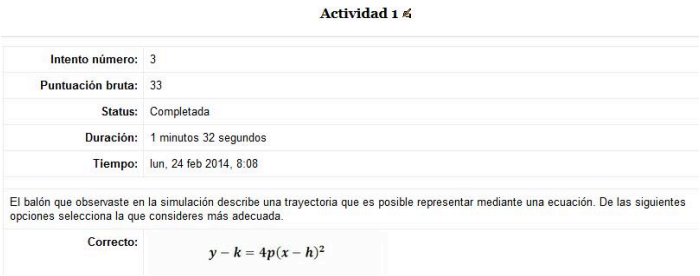
Fase de diseño de actividades. En la fase de diseño se consideraron dos aspectos. En el primero se acordó que para las actividades los profesores utilizarían tres representaciones: verbal, algebraica y gráfica. Con esto se asume que cada representación proporciona información específica y complementaria que contribuye para una mejor comprensión de los conceptos estudiados (Parnafes y DiSsesa, 2004). En el segundo se reflexionó en la conveniencia de diseñar algunas actividades con un software libre que fuera compatible con la el sistema de gestión de contenidos (Moodle) que es utilizado en la institución educativa. Hot Potatoes es una suite que incluye seis aplicaciones para generar ejercicios interactivos, que se pueden visualizar y utilizar desde cualquier navegador.

Fase de producción de los materiales. Para el estudio de las funciones vectoriales se propuso una simulación en Flash y tres actividades adicionales con Hot Potatoes (incluidas en la Tabla 1), ejemplos y ejercicios propuestos relacionados con este tema. En cada actividad se incluye un enunciado verbal, una gráfica y una ecuación.

Tabla 1

Enunciado Verbal	Gráfica	Ecuación	Objetivo
Un balón de futbol americano describe una trayectoria que es posible representar mediante una ecuación. De las siguientes opciones selecciona la que consideres más adecuada para representar la situación anterior.	 	Incluida con la gráfica	Conectar los conocimientos previos de los estudiantes de geometría analítica, con la representación gráfica y simbólica que modela la situación. Determinar que $y-k=4p(x-h)^2$ es la opción correcta para introducir el tema de parametrización: $x=t$ $y=4p(t-h)^2+k$
Observa en la figura que la posición del balón cambia con el tiempo, si quisiéramos determinar la posición del objeto en cualquier instante de tiempo; ¿Cuál de las siguientes herramientas sería conveniente usar?		Ninguna	Relacionar la figura con una posible representación de la posición del balón en diferentes instantes de tiempo. El estudiante justificará la figura seleccionada.
Relaciona la función vectorial con su representación gráfica y con el dominio que corresponda en cada caso.		$\vec{r}(f)=t\hat{\imath}+\frac{1}{t}\hat{\jmath}$	Identificar la expresión algebraica que representa la función vectorial considerando el número de componentes y su posible representación gráfica. La punta de flecha en cada gráfica indica el sentido de recorrido. El dominio de la función está relacionado con el sentido de recorrido.

Etapa de aplicación y evaluación de las actividades. Las actividades fueron implementadas en Moodle y 28 estudiantes se inscribieron en el curso. Los profesores dieron seguimiento al trabajo de cada estudiante haciendo uso de las herramientas que brinda la plataforma. Se analizó el trabajo de los estudiantes en cada actividad, se identificó el número de intentos realizados, el tiempo por actividad, y la puntuación obtenida como se observa en la Figura 1.



Actividad 1

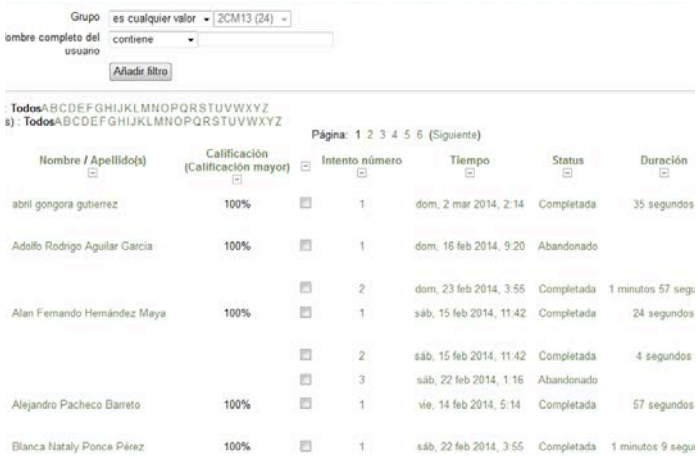
Intento número:	3
Puntuación bruta:	33
Status:	Completada
Duración:	1 minutos 32 segundos
Tiempo:	lun, 24 feb 2014, 8:08

El balón que observaste en la simulación describe una trayectoria que es posible representar mediante una ecuación. De las siguientes opciones selecciona la que consideres más adecuada.

Correcto: $y - k = 4p(x - h)^2$

Figura 1. Evaluación del estudiante A en la actividad 1

Otro recurso utilizado es la tabla generada en Excel con las calificaciones de cada estudiante en las actividades (Figura 2).



Grupo: es cualquier valor — 2CM13 (24)
Nombre completo del usuario: contiene
Añadir filtro

Todos A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z
Todos A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

Página: 1 2 3 4 5 6 (Siguiente)

Nombre / Apellido(s)	Calificación (Calificación mayor)	Intento número	Tiempo	Status	Duración
abril gongora gutierrez	100%	1	dom, 2 mar 2014, 2:14	Completada	35 segundos
Adolfo Rodrigo Aguilar Garcia	100%	1	dom, 16 feb 2014, 9:20	Abandonado	
		2	dom, 23 feb 2014, 3:55	Completada	1 minutos 57 segu
Alan Fernando Hernández Maya	100%	1	sáb, 15 feb 2014, 11:42	Completada	24 segundos
		2	sáb, 15 feb 2014, 11:42	Completada	4 segundos
		3	sáb, 22 feb 2014, 1:16	Abandonado	
Alejandro Pacheco Barreto	100%	1	vie, 14 feb 2014, 5:14	Completada	57 segundos
Blanca Nataly Ponce Pérez	100%	1	sáb, 22 feb 2014, 3:55	Completada	1 minutos 9 segu

Figura 2. Calificaciones de los 28 estudiantes en las actividades diseñadas.

Resultados y Discusión

En la fase de diseño, de producción, de aplicación y evaluación de las actividades con Hot Potatoes los profesores que participaron en la investigación, pusieron en práctica siete competencias docentes en TIC de las establecidas en el informe de la UNESCO (2008). Las competencias identificadas se presentan en la Tabla 2 y se agrupan en tres bloques, dos competencias corresponden al enfoque de nociones básicas de tecnología; tres al de profundización del conocimiento y dos al de creación del conocimiento.

Tabla 2

Enfoque de nociones básicas de tecnología	Competencia. Describe la finalidad y las funciones básicas de un software para crear una gráfica de apoyo.	Evidencia. Los profesores examinaron diferente software para graficar y seleccionaron el más amigable, que representara en forma gráfica la información necesaria para el estudiante y que tuviera licencia GNU (General Public License), como se muestra en la Tabla 1.
	Competencia. Utiliza un software para el registro, control de asistencia y registro de notas obtenidas por los estudiantes.	Evidencia. Los profesores examinaron la finalidad de los diferentes recursos de Moodle, orientaron a los participantes para trabajar en este ambiente con las actividades diseñadas, como se mostró en las Figuras 1y 2.

Enfoque de profundización del conocimiento	Competencia. Describe la función y finalidad de las actividades, el apoyo de la visualización, y la manera en que estos elementos contribuyen al entendimiento de los conceptos.	Evidencia. Los profesores analizaron la forma de relacionar los conocimientos previos de los estudiantes estudiados en geometría analítica, con el tema de funciones vectoriales. Utilizan la relación entre la representación gráfica de la función vectorial y la representación simbólica de la misma, para apoyar la reflexión de los estudiantes en el tema de funciones vectoriales.
	Competencia. Elabora material en línea que contribuya a una profundización y comprensión de los conceptos matemáticos, así como a su aplicación a la solución de problemas.	Evidencia. Los profesores diseñaron actividades como las que se muestran en la Tabla I en el software interactivo Hot Potatoes, para apoyar para el aprendizaje de los estudiantes del tema de funciones vectoriales de variable real.
	Competencia. Recurre a un marco teórico que ayude en la elaboración de materiales en línea.	Evidencia. Los profesores realizaron una planeación de las fases para el diseño y desarrollo de las actividades: i) diseño de las actividades; ii) producción de materiales; iii) aplicación del diseño y iv) evaluación.
Enfoque de creación de conocimientos	Competencia. Desempeña un papel dirigente para apoyar las innovaciones en su escuela y el aprendizaje permanente entre sus colegas.	Evidencia. El director del proyecto recibió capacitación previa en el manejo de Moodle, designó roles a los demás profesores participantes y promovió el intercambio de planes de acción y un planteamiento integrador en el que los participantes, evaluaron los progresos realizados y encontraron solución a los problemas.
	Competencia. Utiliza recursos de las TIC para participar en comunidades de profesionales con el propósito de examinar y aprovechar las prácticas didácticas más idóneas.	Evidencia. Los profesores participantes del proyecto establecieron comunicación mediante un software que permite comunicaciones de texto, voz y vídeo sobre Internet (VoIP). Almacenaron e intercambiaron información en un servicio de alojamiento de archivos multiplataforma en la nube. Utilizaron Moodle que fue adoptado con anterioridad por su institución de adscripción.

Es importante mencionar que los profesores participante ya contaban con experiencia en el manejo de software para graficación, El profesor responsable del proyecto recibió preparación para el manejo de Moodle y orientó la preparación de los demás participantes en el proyecto para utilizarlo.

Un aspecto que fue central en el trabajo es la experiencia de los profesores participantes en la impartición del curso de Cálculo Vectorial así como en otros cursos que forman parte del plan de estudios de la carrera de ingeniería en comunicaciones y electrónica.

El conocimiento de los contenidos del programa de Cálculo Vectorial se convirtió en un requisito indispensable para los profesores que participaron en el diseño de materiales en formato digital, para la selección de las actividades y la aplicación de las mismas, ya que las experiencias previas de

los estudiantes fueron el punto de partida de las discusiones que llevaron a elegir la forma de presentar la información a los estudiantes en cada problema.

En relación con las competencias de dirección y utilización de recursos TIC los profesores participantes buscaron entres diferentes herramientas GNU, aquellas que facilitaran su comunicación, el almacenamiento y compartición de información y la elaboración de material interactivo y que permitiera a los estudiantes su autoevaluación.

Conclusiones

En el diseño de los materiales se identificó que los profesores pusieron en juegos siete competencias los elementos que se consideran centrales son:

1. La reflexión que los profesores llevaron a cabo sobre la enseñanza y los procesos de construcción del conocimiento matemático, que los llevó a adoptar una teoría del aprendizaje, en este caso el uso de diferentes representaciones en las actividades diseñadas.
2. La necesidad de contar con nuevos conocimientos y experiencias que puedan ser traducidos en estrategias de enseñanza y de aprendizaje, como las actividades interactivas diseñadas y su implementación en la plataforma MOODLE.
3. El intercambio de conocimientos entre los docentes coadyuva a la conformación y mejoramiento de su comunidad académica, la discusión del tema de funciones vectoriales entre los profesores, fue el punto de partida para el diseño de los contenidos educativos.
4. El diseño e implementación de los materiales promueve que los profesores se mantengan actualizados en el uso de las TIC, en la búsqueda de software y de nuevos ambientes de aprendizaje mediados por las TIC,

Referencias bibliográficas

Buenas prácticas en educación a distancia (2012). Asociación Iberoamericana de Educación Superior y a Distancia. Recuperado 13 de diciembre de 2013 de:

http://portal.uned.es/pls/portal/docs/PAGE/AIESAD/LIBRO_BUENAS%20_PR%C3%81CTICAS_EN%20_EDUCACI%C3%93N_A_%20DISTANCIA_REDUCIDO.PDF

Competencias básicas en las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) (2004). Instituto Canario de Evaluación y Calidad Educativa. Evaluación e Investigación Educativa Editores, España. Recuperado el 5 de abril de 2011 de:

http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/Portal/WebICEC/docs/cbtic.pdf

García, L. (1994). Educación a distancia hoy. Madrid, UNED. ISBN: 84-362-3129-5.

García, M. (2012). El papel de las tecnologías informáticas en el desarrollo de competencias matemáticas. [En prensa].

Hot Potatoes Versión 6. Recuperado el 10 de octubre de 2010 de http://hotpot.uvic.ca/

Marquès, P. (2000). La cultura de la sociedad de la información. Aportaciones de las TIC Recuperado el 5 de mayo de 2011 de: http://peremarques.pangea.org/si.htm

Normas UNESCO sobre Competencias en TIC para Docentes (2008). Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura. Recuperado el 10 de junio de 2010 de: http://www.oei.es/tic/normas-tic-marco-politicas.pdf

Parnafes, O. y DiSessa, A. (2004). *Relations between patterns of reasoning and computational representations*, International Journal of Computers for the Mathematics Learning: 9, 251-280.

Rivera, E., Zamora, R. y Soria, M. (2010). Sistema de Educación a Distancia. *Revista Iberoamericana de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología*, 5. Recuperado de: http://teyet-revista.info.unlp.edu.ar/numero-5.htm

EXPLORANDO TONALIDADES EMOCIONALES EN LA FORMACIÓN INICIAL Y CONTINUA DE PROFESORADO DE MATEMÁTICAS

Jorge Ávila Contreras
Universidad Católica Silva Henríquez Chile
javila@ucsh.cl

Resumen. En este trabajo, se exponen evidencias de tonalidades emocionales presentes en espacios de formación inicial y continua, de profesorado de matemáticas. La información se obtiene a través de bitácoras de reflexión, narrativas biográficas, un cuestionario exploratorio y notas de clase; y, se analiza, mediante análisis de discurso por codificación abierta. El marco referencial considera contribuciones del pensamiento complejo, la construcción social del conocimiento y la identidad profesional docente. Al momento, se han podido distinguir tonalidades emocionales en relación a: las situaciones de enseñanza, al saber matemático escolar y a la identidad profesional y práctica de aula del profesorado.
Palabras clave: Emocionalidad y matemáticas, Formación inicial y continua
Abstract. This paper presents evidence of emotional tones present in spaces of initial and continuous training of teachers of mathematics. The information is obtained through blogs of reflection, biographical narratives, an exploratory questionnaire and class notes; and analyzed, through analysis of speech by open coding. The framework considers contributions of complex thought, the social construction of knowledge and the teacher professional identity. At the moment, is have been able to distinguish emotional shades in relation to: situations of teaching, the school mathematical knowledge and the practical and professional identity of teachers classroom.
Key words: Emotionality and mathematics, Initial and continuing formation

Introducción

Hoy en día, en la investigación educativa matemática, es ampliamente aceptado que los procesos de enseñanza y aprendizajes matemáticos son una tarea que no puede ser comprendida ni reducida a la mera transmisión de conocimientos por parte de un experto que sabe hacia un aprendiz que sólo asimila información, postura propia a una visión racionalista clásica del conocimiento. Diversas aportaciones contribuyen a la superación de esta visión (la didáctica fundamental, el enfoque socioepistemológico, la etnomatemática, la didáctica fenomenológica, por mencionar algunos). Por otro lado, desde la filosofía y la investigación científica, se releva cada vez más que la dimensión emocional del ser humano es una componente constituyente fundamental de éste, de su modo de conocer y moverse en el mundo (Maturana, 1990; Varela, 1990; Morín, 1999; Najmanovich, 2001; Casassus, 2007; entre otros). Sin embargo, a pesar de las implicancias que esto conlleva en cuanto a cómo se conoce y aprende, el racionalismo clásico aún persiste en los ambientes educativos.

El presente estudio en curso busca evidenciar la presencia de entramados emocionales que estarían presentes en los ambientes educativos de formación inicial y continua de profesorado de matemáticas y que estos entramados conviven con vestigios de un racionalismo clásico aún imperante en dichos espacios de formación.

Del estudio de las emociones

El estudio de las emociones no es reciente, ya en la década de los sesenta Smirnov et al. (1960, citado en Ibáñez, 2002) planteaban que las emociones influyen regulando la actividad y la conducta del sujeto. Maturana (1990) sostiene que las emociones son disposiciones corporales dinámicas que están en la base de las acciones y que toda acción humana se funda en una emoción. Lo humano, afirma Maturana, se constituye en el entrelazamiento de lo emocional con lo racional. Casassus (2007) destaca que la capacidad emocional es la fuerza que nos impulsa a adaptar y transformar nuestros entornos, externos e internos. Tal fuerza está en el centro de nuestra capacidad de evolucionar. Desde una perspectiva sociocultural, Zembylas (2005, citado en Rebollo y Hornillo, 2010) plantea que las emociones no son privadas o universales, se construyen a través del lenguaje y de las interacciones humanas, en contextos sociales amplios. Las relaciones de poder son inherentes al discurso y expresión de la emoción, al regular los contextos de cómo debemos sentir y expresarlas.

En el plano educativo, las emociones de los estudiantes no han sido parte de los factores a considerar para el diseño de estrategias metodológicas y evaluativas, debido a que nuestra cultura escolar desvaloriza "lo emocional" por considerarlo opuesto a "lo racional". (Ibáñez, 2002). Por su parte, Pekrun (2005, citado en Rebollo y Hornillo, 2010) junto con referir que los estudios de las emociones en el siglo XX escasearon en el ámbito educativo, agrega que la excepción se dio sólo en dos áreas: el estudio de la ansiedad relacionada con la evaluación y el rendimiento y, por otra parte, el de la relación entre emoción y motivación considerando el éxito y fracaso académico. Hargreaves (2001, citado en Ávalos et al., 2010) - observando interacciones de docentes con su entorno educativo - acuñó el concepto de "geografías emocionales". Las describe en función de distanciamiento o acercamiento en las relaciones y de los soportes o amenazas a los vínculos emocionales básicos. Advierte que toda reforma educativa implica un trabajo emocional, que se desarrolla en un entramado de relaciones humanas significativas que conforman la labor de la Escuela. Para Casassus (2007) las conductas emocionales del profesorado provienen frecuentemente de cómo la cultura define el papel del docente, más que de sí mismos. Marchesi y Díaz (2007), en tanto, reportan que el análisis de las emociones y los valores del profesorado exige tener en cuenta su historia personal y profesional, sus creencias y actitudes, sus condiciones laborales y los contextos sociales y educativos en que ejercen.

En la educación matemática, un referente en la última década, ha sido Inés María Gómez-Chacón, quien define la dimensión afectiva como "un extenso rango de sentimientos y humores (estados de ánimo) que son generalmente considerados como algo diferente de la pura cognición e incluye creencias, actitudes, valores, apreciaciones, gustos, preferencias, emociones, sentimientos…"

(Gómez-Chacón, 2000, citado en Domínguez y Jarero, 2011, p. 911). Los estudios de actitudes hacia la matemática y reacciones emocionales, no debiesen ser restringidos a situaciones de laboratorio a niveles de sujeto o de aula, deben considerar la realidad social que produce estas reacciones y el contexto sociocultural de los estudios. (Gómez-Chacón, 2003).

Marco Referencial

Se consideran contribuciones del pensamiento complejo, la construcción social del conocimiento y la identidad profesional docente. En la epistemología de la complejidad (Morín, 1990) ve a la complejidad como un "tejido de eventos, acciones, interacciones, retroacciones, determinaciones, azares, que constituyen nuestro mundo fenoménico (…) se presenta [la complejidad] con los rasgos inquietantes de lo enredado, de lo inextricable, del desorden, la ambigüedad, la incertidumbre" (Morín, 1990, p. 32). La naturaleza del ser humano se constituye por bucles de complejidad. Lo humano es y se desarrolla en bucles tales como: cerebro-mente-cultura; razón-afecto-impulso o individuo-sociedad-especie. Somos seres racionales, infantiles, neuróticos, delirantes siendo también racionales. Todo ello constituye el tejido propiamente humano. Todo desarrollo verdaderamente humano significa comprender al hombre como conjunto de todos estos bucles y a la humanidad como una y diversa. (Morín, 1999).

Con esta mirada, en la actividad docente y estudiantil, en diversas situaciones en que uno se sitúe en el ejercicio cotidiano de su rol, en un contexto específico *enactado* - al decir de Varela (1990) - se está al centro del huracán de la complejidad. Un acción docente que no presta atención a lo que ocurre con esos bucles de complejidad, priva al profesorado de conocer y, por ende, de considerar para sus diseños didácticos, aspectos de la condición humana que pueden favorecer, orientar u obstaculizar entendimientos y vivencias que el estudiantado pone en juego en sus experiencias de aprendizaje. El quehacer pedagógico muchas veces se naturaliza en términos de lo "que ya sabemos hacer" y con ello se logra poca visión de este tipo de complejidades.

La construcción social del conocimiento, por su parte, postula que el conocimiento se pone a disposición de las personas por la sociedad y tiene su origen dentro de la estructura social. El individualismo, por su parte, separa al sujeto cognoscente de su contexto social procurando validar el conocimiento por medio de un análisis del sujeto. Marx, Durkheim y Mannheim, sitúan al hombre y su pensamiento en el contexto social, en la estructura institucional que le es propia. La autonomía de lo teórico respecto del proceso social es ilusoria y lo sería más aún si se postula que la conciencia del hombre está condicionada por su ser social (Díaz y Ochoa, 2007).

Respecto de la identidad profesional docente, Bolívar (2007), señala que la identidad es un constructo conformado, conjuntamente, por factores racionales (cognitivos) y no racionales

(emotivos y afectivos), donde los valores personales y profesionales están en el núcleo que, a su vez, se expresa en la motivación, actitud y compromiso con que el profesorado afronta su trabajo. Según Barbier (1996) y Dubar (2000) -citados en Bolívar (2007)- la identidad tiene dos dimensiones, relacionadas dialécticamente entre sí, que articulan lo individual y lo estructural en un doble proceso: construcciones que el sujeto hace sobre sí mismo (identidad para sí, proyecto identitario) y representaciones que otros hacen de él (identidad para otro, reconocimiento identitario). La identidad, por tanto, se juega en las transacciones que opera el propio sujeto respecto de su historia y sus proyectos (transacciones biográficas), y entre la identidad atribuida por otros y asumida por sí (transacciones relacionales). Así, la identidad profesional docente es el resultado de un proceso biográfico y social, dependiente de la formación inicial y de la socialización profesional en las condiciones de ejercicio de la práctica profesional. Pero también, es una construcción ligada a su historia personal y a las múltiples pertenencias que arrastra consigo (sociales, familiares, escolares y profesionales). Es un proceso relacional, es decir, una relación entre sí y los otros, de identificación y diferenciación.

Aspectos metodológicos

Las textualidades que se analizan en el presente trabajo provienen de cuatro fuentes: a) Bitácoras estudiantiles, recopiladas de Ávila (2006), con las cuales el estudiantado reflexionaba acerca de sus aprendizajes en un curso de cálculo inicial; b) Narrativas biográficas, recopiladas de Urbina (2011), en el contexto de un curso de pos título de educación matemática para profesorado de educación primaria; c) Un cuestionario exploratorio, aplicado en el mismo pos título, a la cohorte 2012; y, d) Notas de clases, correspondientes a las clases de Ávila, en un curso de pedagogía en educación básica con mención en matemáticas, durante el año 2012.

Las tres primeras fuentes de información se recogen en la misma institución, a saber, una universidad privada con foco en la formación de profesores, en tanto que las notas de clase, fueron tomadas en una universidad pública, también con foco en la formación de profesores. Ambas universidades están en la Región Metropolitana, Santiago, Chile. El análisis de la información se efectúa con la técnica de codificación abierta, buscando identificar primeros núcleos de sentido por frases o párrafos. Se trata de identificar relaciones y significados de los hablantes a partir de sus propias textualidades.

Resultados. De lo desarrollado hasta ahora, por tratarse de un estudio en curso, al momento se puede dar cuenta de las siguientes tonalidades emocionales:

(a) Tonalidades emocionales ligadas a racionalismo clásico y a la práctica docente:

(Bitácora de reflexión, FIDM):*"Usted es una persona apasionada con lo que hace, pero esto muchas veces permite que uno reprima su ignorancia evitando hacer preguntas para no entorpecer la clase".*

(Bitácora de reflexión, FIDM): *"Todas las clases de límites no han sido tan interactivas (...) lo que no las hace más aburridas, me agradan más, creo que cuando se dialoga mucho se avanza poco, claro quizás mediante el diálogo el aprendizaje es más parejo y de mejor nivel (…) cuando ya he entendido una idea me impaciento por continuar, avanzar, para aprender más".*

(Cuestionario exploratorio, FCPM): *"Los profesores se lucían en mostrar sus conocimientos y se olvidaban que nosotros estábamos aprendiendo".*

Es frecuente que se instalen sensaciones docentes satisfactorias cuando una sesión de clases resulta ordenada o silenciosa. Una hipótesis pedagógica usual es que los estudiantes estuvieron atentos y concentrados, por lo que no efectúan consultas aún ante interpelaciones pedagógicas del tipo *¿está todo claro?¿alguna consulta o duda?* Esta descripción responde a una lógica implícita que encuadra al aprendizaje con una metáfora a la base de emisor-receptor de información (visión racionalista clásica del conocimiento). En la primera textualidad se observa una emoción estudiantil negativa de auto mirada de sumisión en la ignorancia; en la segunda, se denota un agrado del estudiante, quien a su vez, reconoce que no es la forma más óptima de aprendizaje, pero se elucida otra emoción, la ansiedad de seguir aprendiendo. Paradojalmente, su racionalidad compleja-emotiva le insta a validar la racionalidad clásica, aún reconociendo que en la interactividad hay aprendizajes más justos y mejores. La última, en tanto, levanta de manera implícita una desaprobación de racionalismo clásico, relevando la faceta expositiva de éste con foco en la autosatisfacción de quienes ejercen la docencia de esa manera, leído esto desde la otredad, es decir, del que se ha encontrado en su vida escolar situaciones de enseñanza de ese estilo, como estudiante.

(b) Tonalidades emocionales vinculadas a la díada relación docente/estudiante.

(Bitácora reflexiva, FIDM): *"Me he sentido súper apoyada por usted (…) ha hecho que me sienta en confianza con lo que escribo y que no se va a reír de mis argumentos".*

(Cuestionario exploratorio, FCPM): *"Tuve profesores que hicieron en mí una persona que no le teme a las matemáticas".*

La primera textualidad apunta fuertemente a la importancia de la dimensión personal en el profesorado; la segunda, más bien a la generación de una actitud favorable hacia la disciplina a propósito de la valoración positiva del hablante hacia el profesorado en su vida escolar, más que a la matemática *per se*, explícitamente, resalta a sus profesores.

(c) Tonalidades emocionales entramadas a una dimensión biográfica temporal

(Bitácora biográfica, FCPM): *"Siempre recuerdo las palabras de una antigua profesora de enseñanza media cuando le comenté que quería ser profesor, ella fue categórica y sin piedad, me dijo que estaba loco, que no tenía las condiciones naturales para hacerlo (…) ha sido un comentario que me ha seguido en mi vida académica".*

(Notas de clase, diálogo en FIDM): *Est: En sistemas numéricos me cuesta... es que me da miedo el profe ¡¡Parece alemán!! - - - - Prof: ¿Y qué hay con eso? - - - - Est: Es que yo vengo de familia alemán pos' profe. Son ¡así!... lo que ellos dicen es y no hay otra forma (…) Cuando el profe llegaba tenía ¡¡así un hoyo en el estómago!! Ya no daba más, transpiraba entera!! Ya no daba más…*

(Bitácora biográfica, FCPM): *"No fui la mejor en la básica siempre me costó matemáticas (…) ahora en la actualidad encontrándome de lleno con mis temores y miedos hacia el mundo de las matemáticas un desafío personal (…) se me presentaron mis temores en relación a cómo enseñaría las matemáticas de maneras que no fuese un karma para ellos como lo sentí alguna vez".*

Desde una mirada de la complejidad, se ilustran aquí entretejidos de variados polos que hacen concurrir/emerger/enactar distinciones emocionales que conforman biografías. En la primera, marcada por la acción docente directamente, mediante la faceta personal de la profesora, cimbra una emocionalidad negativa a sobrellevar en toda la vida académica de quien se proyecta y, luego funge, como profesor. La presencia de la profesora es proyectiva en el tiempo. La segunda, en tanto, no es el actuar docente quien genera una emocionalidad caótica en la estudiante, al revés, un rasgo del docente del cual no puede desprenderse, a saber, su impronta cultural alemana, gatilla emocionalidad negativa en la estudiante a propósito de su biografía personal. En este caso, la propia biografía va generando realidad en la clase de matemáticas en que se haya la estudiante, con ese profesor. Atendiendo a que, desde la visión de la modernidad, "Conocer era describir y predecir: el sujeto no entraba en el cuadro que él mismo pintaba. Se hallaba siempre inmóvil, afuera, siguiendo metódicamente las leyes eternas de perspectiva."(Najmanovich, 2001, p. 9). La segunda textualidad metaforiza la fuerza de un pensamiento lineal, el cual se encuentra a la base de la cosmovisión de la modernidad. Las textualidades analizadas, efectivamente, ilustran que ocurre precisamente lo contrario a lo que se pensaba en la modernidad, aquí es posible apreciar que hay una danza multidireccional de realidades generando realidad. El profesorado genera realidad más allá de lo que él mismo pueda prever o controlar. Las dificultades de aprendizaje no pueden analizarse, por tanto, desde una base metafórica de perspectiva lineal causa-efecto. Finalmente, en

la tercera textualidad, la emocionalidad (temor y miedo) hacia la disciplina es obnubilada y emerge la preocupación docente del cómo enseñarlas para no causar el mismo temor.

(d) Tonalidades emocionales ligadas a la disciplina

> **(Cuestionario exploratorio, FCPM):** *"La verdad siempre me costó mucho entender la matemática sentía temor y frustración frente a ella". "Fue frustrante tenía habilidades pero no me gustaban [las matemáticas]" "No me costaba entender pero me frustraba el no realizar los cálculos correctos"*
>
> **(Bitácora biográfica, FCPM):** *"No fui la mejor en la básica siempre me costó matemáticas (…) ahora en la actualidad encontrándome de lleno con mis temores y miedos hacia el mundo de las matemáticas*

En la primera y última textualidad, el temor a las matemáticas está ligado al no comprender a las mismas. En la segunda y tercera, hay un reconocimiento en sí, de ser habilidoso con la matemática, sin embargo, en ambas se evidencia frustración. En una, por la falta de agrado hacia ésta (sin explicar los *por qué*) y, en la otra, por no lograr los cálculos correctos. Es decir, en esta última, por dipolo contrario, el estudiante se conecta emocionalmente de manera favorable con la disciplina con foco en la buena respuesta.

(e) Tonalidades emocionales ligadas al saber matemático escolar

> **(Bitácora de reflexión, FIDM):** *"Cuando usted comentó que íbamos a ver logaritmos yo me dije noooo (…) luego me di cuenta que no eran tan fomes que eran entretenidos (…) comenzamos a ver limites de este término y ahí me comenzó a gustar un poco más.".*
>
> **(Bitácora de reflexión, FIDM):** *"Cuando pasamos a limite yo creía que entendía todo, pero cuando vimos la definición analítica de dicho concepto me frustré mucho. No entendía ni entiendo el por qué tanto procedimiento, cual es su fin…".*

Se ilustran dos casos que arrojan dinámicas opuestas: la primera, parte de una emoción desfavorable hacia los logaritmos y se desliza a una favorable, sostenido el cambio en inicio por una vivencia de entretención con ellos, y luego por su vinculación a la temática de límite, la cual sirvió de pivote para ir afianzando este cambio emocional; la segunda, parte de un estado de tranquilidad o conformidad bien entendida ("yo creía que entendía todo") respecto de las temáticas que se estaban tratando para, con la incorporación de la definición analítica de límite, generar un cambio emocional desfavorable, la frustración, gatillado por la no comprensión del para qué de aquello. Se

trasluce una necesidad de comprender el uso más que lo conceptual formal. Se aboga por una necesidad de sentido para que haya estabilidad emocional favorable al límite.

(f) Tonalidades emocionales ligadas a la actividad matemática

> **(Bitácora de reflexión, FIDM):** *"Me gustó harto [la actividad] porque era emocionante ver un gráfico y imaginarse que podría haber sido lo que había captado".*
>
> **(Bitácora de reflexión, FIDM):** *"En las primeras dos actividades me sentí un poco incómodo al comienzo ya que me costó un poco relacionar lo concreto con lo abstracto".*
>
> **(Bitácora de reflexión, FIDM):** *"Respecto a mi problema con los gráficos es un poco complicado para mí explicarlo, ya que ni siquiera yo me comprendo (…) no me logro ubicar en el plano, es decir tengo que recurrir a los números para poder creer que lo que pienso está bien o no".*

A diferencia de las anteriores, estas textualidades se recogen en el marco de la aplicación de una secuencia didáctica que entre sus consignas desafiaba a asociar fenómenos a gráficas capturadas por un sensor. Al igual que en las situaciones de enseñanza clásica, de tipo expositivas o interactivas con el docente, se presentan también, producto de la actividad matemática, emociones favorables y desfavorables para propiciar aprendizajes. La tercera textualidad resulta llamativamente dramática, además de dar evidencia respecto de un encerramiento de entendimientos en el registro numérico, visibiliza la angustiante experiencia del estudiante de no poder comprenderse ni siquiera a sí mismo trabajando en el plano.

A modo de reflexión final

De los análisis efectuados, a los cuatro instrumentos de recogida de la información, se evidencian tonalidades emocionales vinculadas a: la dimensión biográfica temporal tanto de docentes como de estudiantes; un racionalismo clásico instalado en la práctica docente y estudiantil; al accionar docente/persona; las situaciones de enseñanza; los saberes matemático escolares; las matemáticas como disciplina y a la actividad matemática. En particular, se logra vislumbrar entretejidos implícitos que relacionan a las emociones con vestigios de un racionalismo clásico aún imperante en nuestra sociedad, caracterizado por un pensamiento lineal causa-efecto propio a ese tipo de racionalidad. A la luz de estos resultados y de los desafíos que nos antepone la complejidad, se considera necesario seguir implementando estudios que permitan conocer y comprender, en profundidad cada vez más creciente, a las tramas implícitas que puedan coexistir entre las emociones que emergen y la cosmovisión de mundo o racionalismo base, involucrado a dichas emociones, en los espacios de formación de profesorado en matemáticas.

Referencias bibliográficas

Avalos, B., Cavada, P., Pardo, M. y Sotomayor, C. (2010). La profesión docente: temas y discusiones en la literatura internacional. *Estudios Pedagógicos, 26(1)*, 235-263.

Ávila, J. (2006). *Representaciones estudiantiles de la variación. Un estudio con bitácoras reflexivas*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

Casassus, J. (2007). *La educación del ser emocional.* Chile: Cuarto Propio.

Bolívar, A. (2007). La formación inicial del profesorado de Secundaria y su identidad profesional. *Revista Estudios de Educación, 12,* 13-30.

Díaz, L. y Ochoa, J. (2007). *Comprensiones de la identidad profesional docente: reflexión y acción sobre prácticas de enseñanza y representaciones.* Documento de trabajo. Proyecto DIUMCE: Construcción y reconstrucción de saberes en educación. UMCE, Santiago, Chile.

Domínguez, E. y Jarero, M. (2011). Creencias sobre la matemática y su relación con las prácticas de enseñanza. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 24, 911-920*. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Gómez-Chacón, M. (2003). La tarea intelectual en matemáticas: afecto, meta-afecto y sistemas de creencias. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 10(2)*, 225-247.

Ibáñez, N. (2002). Las emociones en el aula. *Estudios Pedagógicos, 28 (1)*, 31-45.

Marchesi A y Díaz T. (2007). *Las emociones y los valores del profesorado.* Recuperado el 10 de septiembre de 2010 de http://www.oei.es/valores2/Lasemocionesprofesorado.pdf

Maturana, H. (1990). *Emociones y lenguaje en educación y política.* Santiago: Dolmen.

Morín, E. (1990). *Introducción al pensamiento complejo.* México: Editorial Gedisa.

Morín, E. (1999). *Los siete saberes necesarios para la educación del futuro*. Recuperado el 20 de noviembre de 2004 de http://www.complejidad.org/27-7sabesp.pdf

Najmanovich, D. (2001). *El sujeto encarnado: Limites devenir e incompletud.* Recuperado el 15 de mayo de 2010 de http://fac.org.ar/1/docencia/foros/cardtran/gral/sujeto%20encarnado.htm

Rebollo, M. y Hornillo, I. (2010). Perspectiva emocional en la construcción de la identidad en contextos educativos: discursos y conflictos emocionales. *Revista de Educación, 353,* 235-263.

Urbina, M. (2011). *El papel de las emociones en la construcción de la identidad profesional de los docentes.* Tesis de Magíster no publicada, Universidad Católica Silva Henríquez. Santiago, Chile.

Varela, F. (1990). *Conocer. Las ciencias cognitivas: tendencias y perspectivas.* Barcelona: Editorial Gedisa.

ANÁLISIS DEL DISCURSO DIDÁCTICO DOCENTE EN LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICA

Nora Inés Lerman
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González". Argentina
CICATA – Instituto Politécnico Nacional México
nlerman@outlook.com

Resumen. El Discurso Didáctico (DD) del profesor de matemática corresponde a una de las dimensiones del Discurso Matemático Escolar (DME) que norma la acción pedagógica en las instituciones educativas. Los textos instruccionales de los profesores materializan sus intenciones didácticas, enmarcan y orientan la actividad y permiten comprobar su alcance. Se manifiestan en los enunciados del profesor en todo tipo de situaciones comunicativas: sincrónicas/asincrónicas, orales/escritas, verbales/no verbales. En la presente exposición se intentará hacer un recorrido por algunas de las variantes de abordaje metodológico en el análisis del DD para tenerlas en cuenta en estudios propios del campo de la Matemática Educativa.
Palabras clave: discurso matemático escolar, lingüística, contexto
Abstract. A math teacher's didactic discourse (DD) corresponds to one of the dimentions of the Scholar Mathematical Discourse (DME), which regulates the pedagogical action in educational institutions. Their instructional texts materialize their didactic intentions, frame and guide class activities and verify the texts' scope. The aforementioned instructional texts are manifested within teachers' statements in all types of communicative situations, such as: synchronous/asynchronous, oral/written, verbal/non-verbal. This paper will attempt to cover some of the variants in the methodological approach of the DD analysis, so they may be considered in Mathematic Education studies.
Key words: scholar mathematical discourse, linguistics, context

Qué es un discurso, su relación con la construcción del conocimiento

Para entender qué es un discurso, al cual Lavandera (1988) lo sintetiza en *texto más contexto*, hay que referirse no sólo al texto propiamente dicho sino también al contexto en el cual se produce. Deben ser tomados en cuenta los elementos necesarios para su correcta interpretación y los roles de los participantes involucrados.

Ese contexto discursivo está constituido por factores extralingüísticos condicionantes de la producción y significado de un enunciado. Por ejemplo: las circunstancias de espacio y tiempo donde se produce la comunicación, las mutuas expectativas e intenciones, las características, y los conocimientos de los que participan. Entonces, el contexto en el que se produce un enunciado condiciona su forma y cómo se lo interpretará.

Para que haya construcción de conocimiento se necesita de un discurso mediador para actuar sobre el mundo y como medio de representación. Ello lo posibilitan las tres funciones que posee todo discurso: la función identitaria, la relacional y la ideacional. La primera permite definir quién se es, la segunda cómo es la manera en que un individuo se vincula con los demás y la tercera, mediante qué normas, creencias y actitudes se actúa en una comunidad/institución.

Por lo tanto, un discurso sólo puede existir en la realidad en forma de enunciados concretos, es decir, en el habla.

Qué es un género discursivo (micro géneros discursivos en educación)

Según Bajtín (2011), la producción de enunciados implica necesariamente la invocación de un género discursivo. Para cada actividad social se cuenta con un amplio repertorio de géneros discursivos, los cuales se definen como formas típicas de enunciar en lo atinente a la temática, el estilo y la composición de lo que se enuncia. Se pueden reconocer con facilidad diferentes géneros discursivos en el ámbito educativo, publicitario, político, periodístico, médico o empresarial, por citar algunos ejemplos.

Es así que todo género discursivo está centrado en prácticas sociales determinadas (sistemas típicos de comunicación) y conformado por enunciados integrados en una actividad específica. Asimismo, posee características comunes o estables que tienen en cuenta tanto su forma como su estilo, los procedimientos que utiliza para su afianzamiento y la concepción del destinatario que define. Puede decirse que los géneros discursivos inducen a una regularidad en la comunicación dentro el campo social o comunidad en donde se los utilice. Es así que cuando se participa en cualquier interacción discursiva, los interlocutores siempre estarán sometidos a regulaciones de coerción y de organización.

Según la características expuestas, se tenderá a inferir que todo discurso es una producción sociocultural que puede llegar a comprenderse y analizarse con herramientas teóricas que permitan conocer su naturaleza y su función social a partir de los usos de los enunciados que lo ponen en evidencia en situaciones y actividades determinadas de las comunidades que lo reproducen, reafirman o resignifican.

El profesor de matemáticas y el Análisis de su Discurso Didáctico (ADD)

Según Constantino, Pardo y Riestra (2006), existen micro-géneros discursivos en el ámbito educativo que pueden subdividirse en dos grandes grupos: en los que predomina lo político (discurso político-educacional, discurso curricular y pedagógico-institucional) y en los que predomina lo didáctico (discurso de los manuales escolares, discurso profesional docente y discurso áulico). Es en el discurso áulico donde el docente de matemática es artífice de soportes de comunicación o textos instruccionales (que pueden ser analógicos o digitales: explicaciones, apuntes teóricos impresos, guías de trabajos prácticos, diálogos, exámenes escritos y orales, gestos, condiciones de proximidad física, actitud corporal, disposición del espacio, entonación de la voz, miradas, etc.) intencionales o no, que involucran un proceso de codificación técnicamente asistido con el propósito de generar efectos determinados en sus alumnos, es decir que tienen una

función conativa. Esos efectos pueden ser a nivel de pensamiento o de acción (por ejemplo: "*Recuerde alguna propiedad de las diagonales de algún cuadrilátero", "Resuelva el sistema de ecuaciones por el método de Gauss-Jordan",* respectivamente). Entonces, los textos instruccionales son intencionales/procedurales porque instan a realizar secuencias de acciones e inferencias en razonamientos, generalmente se materializan en enunciados típicos, los más evidentes son los que suelen llamarse *consignas*.

Los textos instruccionales pueden ser *explícitos*, es decir, con predominio de lo denotativo y manifiesto, fuertemente relacionados con la información, lo analítico y lo conceptual; o pueden ser *implícitos*: relacionados con lo subjetivo, lo connotativo y lo tácito, pueden expresar significados difusos, más centrados en la significación y la emoción. Dado que las dinámicas pedagógicas de comunicación del saber y del hacer en los cursos de matemática se reproducen o adaptan de fuentes preexistentes, habitualmente se lo realiza sin reflexión previa. En este trabajo se coincide con las falencias que Scheinsohn (2011) detecta en los dispositivos comunicacionales que circulan en las organizaciones. Extrapolados sus dichos a las instituciones educativas, se observa que los textos instruccionales de algunos profesores de matemática adolecen de lo siguiente:

- No se suele reflexionar sobre la pertinencia de su utilización en situaciones únicas y específicas.
- No se suele verificar que el contenido refiera de la mejor manera posible lo que deba referir.
- No se suele anticipar cuál será el medio más efectivo que asegure una adecuada transmisión/construcción de conocimiento por parte de los alumnos.
- No se tiene en cuenta el contexto de aplicación específico.

Todo ello supone que no siempre pasan por procesos conscientes previos de codificación y control por parte de los propios docentes. La proactividad respecto de los efectos no deseados en cuanto a su implementación sería de provecho si, entre muchas de las medidas posibles, se considerasen las particularidades y la riqueza de las categorías mixtas que podrían llegar a combinarse en la clasificación de textos instruccionales explicitada más arriba, a saber:

- Intencionales-explícitos
- No intencionales-explícitos
- Intencionales-implícitos
- No intencionales-implícitos.

El Discurso Matemático Escolar, normativo de las prácticas de textualización del saber por parte del profesor en los procesos de enseñanza-aprendizaje

El Discurso Matemático Escolar (DME), como elemento de análisis de la Socioepistemología, ha sido caracterizado como la regulación implícita o explícita de las interacciones y los saberes circulantes entre profesores y alumnos de matemática en la escuela. Por lo tanto, como todo discurso, conforma una práctica social por consistir, justamente, en el conjunto de las restricciones que norman el significado, el uso y los intercambios de esos saberes dentro de una comunidad. El DME está conformado por varias dimensiones o niveles:

- discurso disciplinar
- discurso pedagógico-institucional
- discurso curricular
- discurso de los libros de texto
- *discurso didáctico profesional del docente de matemática*

Estas dimensiones del DME norman la actividad docente y por consiguiente repercuten en la *práctica textual discursiva* de aula de los profesores de matemática. Son la resultante de la reconstrucción de su identidad individual y colectiva y configuran todas las facetas de su discurso didáctico, el cual se materializa en sus enunciados.

Los usos que hacen de los textos instruccionales los profesores de matemática en su praxis discursiva de aula también pueden analizarse en relación con las prácticas sociales pues se rigen por normas que regulan su diseño, su función y sus formas de circulación. Estas maneras recurrentes de generarlos/adaptarlos/reproducirlos y utilizarlos constituyen un espacio y un marco para su tarea, otorgan significado y sentido a la comunidad que los emplea, están reglamentadas por el DME pero sucede, generalmente, que son prácticas naturalizadas por estos actores, es decir que se reiteran y extienden en el tiempo y generalmente no son analizadas o cuestionadas.

Si sólo se toma en cuenta la función normativa de la praxis profesional del DME, del cual el discurso didáctico del profesor es una de sus dimensiones, se pierde la oportunidad de resignificarlo en situaciones concretas de comunicación pedagógica porque el DME conforma un discurso unidireccional, no recíproco, simultáneamente dirigido a la potencial gran masa discente y, debido a ello, es un discurso impersonal.

Las características del DME entran, a veces, en franca contradicción con el discurso didáctico del profesor puesto que se trata de situaciones áulicas específicas/únicas/situadas en donde deben

utilizarse micro-canales de comunicación y cuyas características son las siguientes: son más selectivos, se dan a nivel interpersonal y con posibilidades de intercambio de roles protagónicos, son más personalizados, multidireccionales y con dinámicas que poseen cierta proximidad/simetría intersubjetiva (por ejemplo: grupos de trabajo con contacto personal, en reuniones, en foros de discusión, debates y clases presenciales, entrevistas, etc.). Entonces, allí se produce un verdadero desfasaje que trae consecuencias e imprevistos.

Breve panorama sobre la evolución de las perspectivas teórico-metodológicas en ADD

Luego de efectuar un relevamiento de la bibliografía más representativa sobre el desarrollo de los enfoques sobre el tema del presente apartado, puede sintetizarse lo siguiente: El análisis del discurso didáctico comenzó con mediante un tipo de investigación tradicional que utilizaba métodos cuantitativos desde el paradigma proceso-producto, uno de sus exponentes fue Flanders (1977) con sus categorías de interacción didáctica. Lo cual era natural ya que la intención de corte técnico era la de identificar, rotular y cuantificar las situaciones discursivas en el aula. Había que hacer una especie de *stock* de las mismas, caracterizarlas y pensar en nuevas denominaciones.

La sociolingüística de los años ochenta comenzó a aportar el *cómo*, o sea, de qué tipo eran o de qué modo se daban esos fenómenos, realizar clasificaciones según ciertas regularidades en su devenir. Cadzen (1991), con sus observaciones caracterizó una estructura triádica o de **I**niciación/**R**espuesta/**E**valuación (la denominó IRE) que se repetía en las interacciones de clase (p. e.: *profesor:* -¿Qué resultado obtuviste en el primer ejercicio de la tarea?- / *alumno:* -¡$\sqrt{26}$, Profesor!- / *profesor:* -¡Muy bien!-). En los años noventa, los estudios etnográficos de la comunicación en contexto incorporaron los avances de la lingüística semántico-pragmática, se revalorizó la oralidad y se incluyeron aspectos sociopolíticos. Es decir, usos consensuados en contexto.

Entonces, al hacer un recorrido histórico, en materia de ADD se observa una evolución desde un paradigma tradicional hacia otro de corte interpretativo (los métodos cualitativos y la etnografía pura se fueron afianzando; en la actualidad se tiende a considerar un tipo de análisis textual que debe dar cuenta de los medios utilizados, por esta razón es que los estudios suelen centrarse en la situación comunicativa específica en todas sus variantes (estática/dinámica, sincrónica/asincrónica, oral/escrita, verbal/no verbal, analógica, mediada por las tecnologías). Se tiene un especial cuidado en atender a la interacción verbal porque tiene un rol principal en el desarrollo del pensamiento y se hace consciente la necesidad de contar con herramientas analíticas del discurso que permitan

develar las prácticas sociales subyacentes que norman las emisiones del habla/escritura/gestualidad/etc. de los profesores y los alumnos (ver Fig. 1).

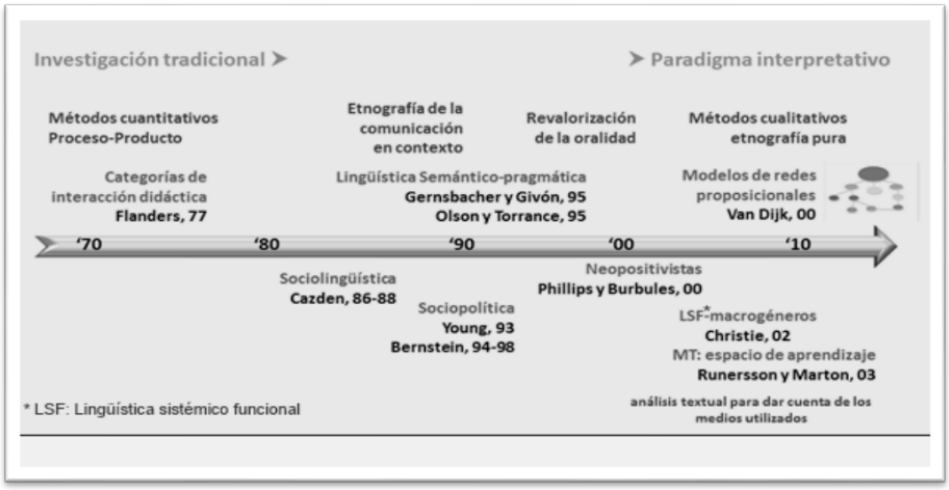


Fig. 1- Referentes en el análisis del discurso didáctico a lo largo del tiempo

Los enfoques de análisis del discurso didáctico estructurales se han complementado en relación ontológica/dialógica con paradigmas funcionales por ser estos últimos de carácter dinámico, inter/transdisciplinarios, pragmáticos y su interés radica en procesos cognitivos que se centran en el análisis del uso por sobre el análisis del código utilizado.

Además, el discurso didáctico instruccional es un medio semiótico socialmente construido para organizar patrones de conducta y planificar secuencias de acciones. Ello está en sintonía con los textos instruccionales de los profesores porque materializan sus intenciones didácticas, enmarcan y orientan la actividad en clase y permiten comprobar su alcance.

Todos los textos, si se analizan desde un paradigma funcional, podrán ser estudiados en relación con los contextos de uso y con las intenciones de los usuarios porque se deben a necesidades comunicativas de los participantes y se explican como un acto de interacción social.

El análisis del discurso didáctico del profesor formador de docentes de matemática, desde un paradigma funcional como método para develar su práctica textual, consistirá en problematizar sistémicamente sus soportes de comunicación didáctica, es decir, enunciados que produce/utiliza/emite-escribe-gestualiza dentro del contexto de aplicación. Con ello habrá de intentarse elucidar a cuál género discursivo apela con esa práctica, puesto que la interacción didáctica es de naturaleza discursiva/dialógica (un lenguaje y un discurso mediador son indispensables para la construcción de conocimiento). En síntesis, cuál es el género discursivo al cual invoca en su praxis y en qué consiste la práctica discursiva que lleva a cabo. Según el presente estudio ellos son, respectivamente, el Discurso Matemático Escolar y la práctica de *textualización*

del saber. La *textualización del saber* es un concepto que se ha construido expresamente en el presente trabajo de investigación en curso.

Una perspectiva, a modo de ejemplo: La Lingüística Sistémico Funcional

De las perspectivas clásicas y renovadas (Ver Fig. 2) por las que se pueden abordar metodológicamente a las prácticas discursivas de los profesores de matemáticas de la carrera de formación docente de la disciplina para su análisis, varias están en consonancia con los principios fundamentales de la Socioepistemología y con la construcción social del conocimiento.

Fig. 2- Perspectivas clásicas y renovadas en el análisis del discurso didáctico

Una de ellas, es la Lingüística Sistémico Funcional (LSF), teoría desarrollada por Halliday (1994) quien propone una gramática funcional sistémica y una teoría del género y del contexto, diseñada para explicar el uso del lenguaje. La LSF, por ser un enfoque funcionalista, considera que los aspectos socioculturales son dimensiones que explican la teoría, como por ejemplo: el contexto de situación, conformado por las tres variables de campo (contenido experiencial), tenor (relación entre los participantes) y modo (el papel de la lengua en la comunicación); y el contexto cultural con su potencial semiótico (Ver Fig. 3).

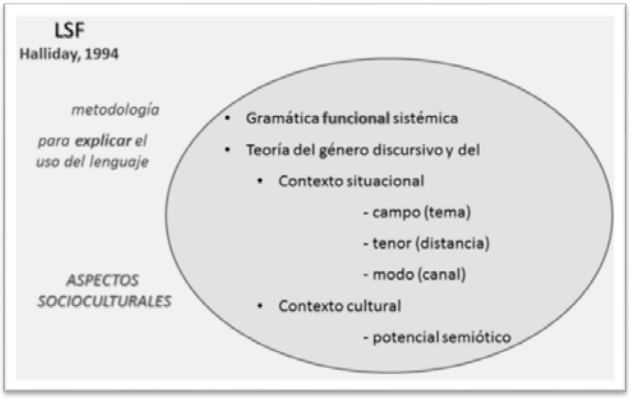


Fig. 3- Esquema de las dimenciones de la Lingüística Sistémico Funcional de Halliday

Es esperable que los análisis de los textos instruccionales de los profesores, desde un enfoque funcionalista como el anterior u otros, permita ver cuáles son y cuánto inciden las funciones que predominan en su discurso didáctico en los procesos de construcción de conocimiento en las aulas de matemática.

Es el profesor quien condiciona las actividades de sus cursos con sus enunciados, un análisis descriptivo del sentido y función de los mismos permitirá visualizar cómo impactan y reflexionar sobre los modos de mejorar su diseño, implementación y circulación institucional en todas sus variantes (textos escritos, orales, actitudinales, etc.).

Referencias bibliográficas

Bajtín, M. (2011). *Las fronteras del discurso*. Buenos Aires: Las cuarenta.

Barbara, L. y Moyano, E. (2011). *Textos y lenguaje académico. Exploraciones sistémico-funcionales en portugués y español*. Buenos Aires: Universidad Nacional de Gral. Sarmiento.

Cazden, C. (1991). *El discurso en el aula: El lenguaje de la enseñanza y del aprendizaje.* Buenos Aires: Paidós.

Constantino, G., Pardo, M. y Riestra, D. (2006). *Discurso didáctico: perspectivas de análisis para entornos presenciales y virtuales*. Buenos Aires: La isla de la luna.

Denzin, N. (1999). Cybertalk and the method of instances. En Jones, S. (Ed.), *Doing internet research: critical issues and methods for examining the net.* (p.110). CA: Sage Thousand Oaks.

Flanders, N. (1977). *Análisis de la interacción didáctica*. Anaya: Madrid.

Ghio, E. (1997). *Decir, hacer, enseñar.* Semiótica y Pragmática Discursiva. Santa Fe: UNL-

Greimas, A. (1966). *Sémantique structurale*. París: Larousse.

Grice, H. (1975). Logic and conversation. In P. Cole and J. Morgan (Eds.). *Syntax and semantics 3,* New York: Academic Press.

Gvirtz, Silvina, S. Larripa y A. Oría (2009). *Prácticas discursivas pedagógicas,didácticas y escolares: algunas categorías para repensar la relación entre el saber y la escuela*. Buenos Aires: Universidad de San Andrés.

Halliday, M. (1978). *Language as social semiotic: The social interpretation of language and meaning.* Maryland: University Park Press.

Halliday, M. (1994). *An introduction to Funcional Grammar*. Londres: Arnold.

Klein, Irene (2005). *Propuesta de Escritura. Leer como escritor*. Buenos Aires: AZ Editorial.

Lavandera, B. (1988). *Lenguaje en contexto*. Buenos Aires: Visor.

Psathas, G. (1995). *Conversation analysis*. CA: Sage Thousand Oaks.

Raiter, A. (1999). *Discurso y Ciencia Social.* Buenos Aires: eudeba.

Riestra, D. (2008). Las consignas de enseñanza la lengua. Un análisis desde el interaccionismo socio-discursivo. Buenos Aires: Miño y Dávila.

Sánchez Corral, L. (2003). La semiótica de Greimas, propuesta de análisis para el acto didáctico. En *Cauce. Revista de Filología y su Didáctica 26*, pp.469-490.

Scheinsohn, D. (2011). *El poder y la acción a través de la comunicación estratégica*. Buenos Aires: Granica.

Silvestri, Adriana (1995). *Discurso Instruccional*. Buenos Aires: CBC-UBA.

Sperber, D., Wilson, D. (2008). *Relevance: Communication and cognition*. Cambridge: MIT Press.

Strauss, A. y Corbin, J. (2002). *Bases de la investigación cualitativa. Técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada*. Colombia: Universidad de Antioquia.

Werlich, E. (1975). *Typologie der texte*. München: Fink.

TEXTOS INSTRUCCIONALES EN LA FORMACIÓN INICIAL DE LOS PROFESORES DE MATEMÁTICAS; SU DECONSTRUCCIÓN PARA UNA COMUNICACIÓN EFECTIVA ENTRE DOCENTES Y ALUMNOS

Nora Inés Lerman, Cecilia Crespo Crespo y Javier Francisco Lezama Andalón
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González" Argentina
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. IPN. México
nlerman@outlook.com, crccrespo@gmail.com, jlezamaipn@gmail.com

Resumen. Se reportan avances de investigación sobre algunos tipos de textos instruccionales que circulan en la formación inicial de profesores de matemáticas. Se intenta deconstruir sistémicamente su naturaleza, usos y alcances para efectivizar la comunicación docente-alumnos. El conocimiento pormenorizado de sus enunciados repercutiría favorablemente en la convivencia institucional y en el rendimiento académico de los alumnos, dos evidencias de la problemática abordada. Desde la construcción social del conocimiento y la socioepistemología, la lingüística sistémico-funcional es la metodología elegida para analizar el discurso didáctico del profesor en el aula que es una dimensión constitutiva del discurso matemático escolar donde encarna sus intenciones pedagógicas.
Palabras clave: textualización del saber matemático, socioepistemología
Abstract. Progress regarding the research of certain types of instructional texts, which are circulating in the inicial training stages of mathematic teachers, are shown in this paper. It tries to systemically deconstruct their nature, scope and uses to improve the communication between a teacher and his students. The detailed knowledge of teacher statements would have favorable repercussions in institutional coexistence and academic performance of students, which are two pieces of evidence of the problems addressed on this paper. From the social construction of knowledge and socioepistemology, systemic functional linguistics is the chosen methodology to analyze the didactic discourse of the teacher in the classroom which is a dimension of mathematical discourse in schools where are embodied the teacher's pedagogical intentions.
Key words: textualization of mathematical knowledge, socioepistemology

Introducción

En el presente documento se reportan avances de la investigación sobre *textos instruccionales* característicos de la formación inicial de profesores de matemáticas que circulan actualmente en las aulas. Se intenta deconstruir sistémicamente su naturaleza, usos y alcances para efectivizar la comunicación entre los docentes y sus alumnos.

Como el estudio está en consonancia con la construcción social del conocimiento y basado en la Socioepistemología como marco teórico, se elige a la Lingüística Sistémico-Funcional (LSF) por su doble función, como marco conceptual y también como metodología apropiada para analizar el discurso didáctico del profesor (DDP) en el aula, uno de los niveles o dimensiones del discurso matemático escolar (DME) donde el profesor materializa sus intenciones pedagógicas. Se podrá inferir que el conocimiento pormenorizado de los enunciados típicos de los profesores formadores por parte de ellos mismos incidiría favorablemente en la convivencia institucional y en el rendimiento académico de los estudiantes que pasan por sus aulas-

Problemática y objetivos de la investigación

La institución de formación inicial de profesores de matemática donde se sitúa esta investigación (Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González", Buenos Aires) evidencia reclamos por parte de alumnos, docentes y tutores: muchos alumnos manifiestan, mediante comentarios orales y cartas presentadas a las autoridades de la carrera, que no entienden las explicaciones de clase o las guías teóricas de algunos profesores, que no comprenden algunas consignas en ejercitaciones o evaluaciones parciales y finales. En paralelo, los docentes se quejan de un bajo nivel de comprensión y participación de algunos alumnos en las clases, de la baja calidad de los trabajos prácticos que les entregan o de las magras calificaciones obtenidas en los exámenes.

Los tutores, coordinadores y directores de departamento son los que reciben esas quejas, presentan estadísticas de abandono de materias, cambios de comisiones o deserción/desgranamiento y recomiendan apoyos o refuerzos educativos cuando convocan a reuniones para mediar en la resolución de conflictos que declaran, tanto alumnos como profesores, sobre fallas en la efectividad de la comunicación didáctica.

Es en los cursos iniciales donde se constata una mayor cantidad de abandono de la carrera, presentación de solicitudes de cambio de cátedra o de certificados de materias aprobadas para tramitar equivalencias con el objetivo de proseguir estudios en otras instituciones. Estos fenómenos conforman un círculo vicioso entre docentes-alumnos-tutores (que se amplía también con alumnos provenientes de otras instituciones que presentan los mismos signos) que merece atención y describen de modo claro, la problemática que moviliza la investigación en curso.

La problemática detectada remite a objetos concretos: los enunciados del profesor, los textos que se ponen en acto al momento de llevar a cabo las actividades de enseñanza. Esos enunciados del profesor corresponden a un formato textual específico y se configuran como un recurso didáctico concreto que acompaña al estudiante durante todos los niveles de enseñanza. Como manifiesta Riestra (2008), aunque sean generalmente poco extensos, no por ello son siempre directos o claros pues es evidente que traen aparejados problemas de comprensión.

En la observación de las clases y materiales de algunos colegas en ejercicio, la producción de los mismos se limita a la copia o adaptación de materiales en circulación de otros profesionales, una cuasi transcripción generalmente automática de fuentes (apuntes, libros, etc.) que adolece de una reflexión previa sobre su estructura, función, alcances y posibilidades en la mejora de su comunicación. Y es por todo lo anterior que son el foco de interés para el trabajo de investigación en progreso.

El objetivo es develar las prácticas que norman la elaboración y uso de los textos instruccionales de la comunidad profesional que conforman los docentes formadores de profesores de matemática con el fin de lograr una mejora en las dinámicas de enseñanza y en los procesos de construcción de conocimiento matemático por parte de los alumnos que transitan el nivel superior del sistema educativo.

Para ello, de manera interdisciplinar con la Lingüística, se está analizando abundante y significativa evidencia empírica en casos concretos donde los textos instruccionales, como instrumentos mediadores, intervienen en el proceso de difusión del conocimiento matemático. La intención de comprenderlos y reconfigurar su estructura comunicativa según criterios pragmático-funcionales.

La pregunta de investigación se ha formulado en los siguientes términos:

¿Cuáles son las razones por las que los alumnos de la carrera de profesorado de matemática manifiestan dificultades en la comprensión de los textos instruccionales (verbales y no verbales) propios del discurso didáctico de sus profesores formadores?

Una hipótesis que se sostiene en este trabajo acerca de los textos instruccionales en circulación es que: en vez de ser considerados por los docentes formadores como instrumentos didácticos –o sea, *artefactos*+*esquemas* de uso, sentido en que Rabardel (1995) los define-; son percibidos y manipulados como sólo *artefactos* es decir, sin comprenderse su naturaleza o las formas más adecuadas de diseño en función del conjunto de ideas sobre cómo usarlos/implementarlos de manera eficaz.

Un factor que influye en las formas de producción y uso de estos objetos textuales observados está explicado en Lerman y Crespo Crespo (2013) y es evidente la contradicción entre el tipo de formación, mayormente instructivista o tradicional que aún reciben los futuros profesores en su carrera de grado (formación cognitivista donde el profesor explica o entrega información internalizable por el alumno y donde este último sólo se limita a realizar su análisis, una reorganización y la exposición posterior), y las exigencias de corte constructivista contenidas en las recomendaciones didácticas de los diseños curriculares oficiales que deben conocer/implementar en sus prácticas pedagógicas en el nivel educativo donde ejercerán una vez graduados.

A lo anterior se suma aquello que Gvirtz, Larripa y Oría (2009) afirman: que las *prácticas discursivas escolares* norman la vida en las instituciones educativas, que plasman al propio discurso pedagógico en productos inherentes a la vida escolar, en objetos que le dan sentido (p. e.: reglamentos, explicaciones, pizarrones, programas, proyectos, carpetas, materiales didácticos y exámenes con sus posteriores correcciones por parte de los profesores) aquí denominados como *textos*

instruccionales. Habrá de tenerse en cuenta que también es texto instruccional cualquier mensaje intencional que se emita de manera verbal o no, de manera escrita u oral con fines didácticos (no sólo comprende a los libros de texto, sino también a las explicaciones y los materiales didácticos de los profesores, como por ejemplo: los trabajos prácticos digitales o impresos, los exámenes, apuntes teóricos, podcasts, posteos en foros virtuales de discusión, diálogos de clase, videos con explicaciones, etc.).

Se trata de dar evidencias de la práctica social que norma la producción y puesta en acto del discurso didáctico del docente en las instituciones de formación de profesores de matemática por medio de la deconstrucción de los textos instruccionales que se generan y utilizan en ellas.

Abordaje teórico, conceptual y metodológico

El Análisis del discurso como herramienta investigativa, debiera estar en consonancia con los basamentos del marco teórico y conceptual elegidos (Socioepistemología y Lingüística Sistémico Funcional, respectivamente). En este caso, deberá posicionarse desde un paradigma funcional y teniendo en cuenta de que el objeto estudiado conforma o se corresponde con un género discursivo.

Según Constantino, Pardo y Riestra (2006), un paradigma funcional se caracteriza por ser dinámico, inter/transdisciplinario, pragmático e interesado en procesos cognitivos. Un paradigma de esta naturaleza prioriza el análisis del uso del lenguaje por sobre el análisis del código empleado, aunque ambos, en franca relación dialéctica. Quiere significar que todos los textos se consideran ligados a contextos de uso y a las intenciones de los usuarios, se deben a necesidades comunicativas de los interlocutores y se explican como un acto de interacción social.

Con respecto a considerar que el objeto de estudio (texto instruccional) se corresponde con un género discursivo, habrá de justificarse por las siguientes razones: un paradigma de este tipo se centra en prácticas sociales determinadas (situaciones típicas de comunicación), los enunciados se integran en una actividad específica, tienen características comunes o estables en cuanto a forma y estilo y en cuanto a los procedimientos y concepción del destinatario; en consecuencia, todo ello induce a una regularidad en la comunicación. Es así que las personas puedan identifican con facilidad los enunciados propios de la vida escolar, médica, militar, periodística, política, etc. En síntesis, y siguiendo a Bajtín (1980), la producción de enunciados implica necesariamente, la invocación de un género discursivo.

Un breve recorrido por las perspectivas más significativas en Análisis del Discurso Didáctico

En líneas generales, el abordaje metodológico del discurso didáctico se ha centrado, en sus primeras etapas, en el análisis del discurso de aula presencial, en la explicación del profesor y considerando dinámicas de *Iniciación/Respuesta/Evaluación* (IRE), estructura triádica desarrollada por Cazden (1991). Hoy en día, se enfoca en la *situación comunicativa* concreta de todo tipo (oral/escrita, mediada o no por las TIC, etc.) y la tendencia general está llevando a los investigadores a centrarse en la *interacción verbal* y su rol principal en el desarrollo del pensamiento. En esta investigación se ampliará ese foco (interacción verbal) a la *mediación textual* que realiza el profesor en su comunicación del saber e intervención didáctica. Entendiendo por texto, no solamente al texto escrito.

Una síntesis de las perspectivas por las cuales se evolucionó en este campo han sido las siguientes:

- Cuantitativa (Flanders, 1970): no se ocupa de la conversación como expresión/negociación de significados o se identifican mutuamente, sino solamente como intercambio de información que no afecta las relaciones diálogo/conocimiento ni diálogo/identidad. Configura el diálogo/la conversación como transmisión y no, como comunicación.
- Sociolingüística (Cazden, 1991)
- Sociopolítica (Bernstein, 1998)
- Lingüística Sistémico Funcional (Halliday, 1978)
- Espacios de aprendizaje (Martin, 1993)

Lingüística Sistémico Funcional

La perspectiva para el análisis del discurso didáctico que ha llamado la atención en este estudio, por su ajuste al marco teórico elegido, es la impulsada por Halliday (1978), se trata de la Lingüística Sistémico Funcional (LSF) que define la lengua como sistemas de capas sucesivas donde operan las tres funciones semánticas fundamentales (o metafunciones): *experiencial, interpersonal* y *textual*.

Halliday (1978) propone una *gramática funcional sistémica* y una *teoría del género y del contexto*, diseñadas para explicar el uso del lenguaje. Por ser un enfoque funcionalista, los aspectos socioculturales son dimensiones que explican la teoría y se dan a continuación:

- *Contexto de situación*: conformado por las variables de campo (contenido experiencial)

- *Tenor y Modo*: relación entre los participantes y el papel de la lengua en la comunicación, respectivamente (interpersonal)
- Contexto cultural, con todo su potencial semiótico (textual)

Los estratos propuestos en esta teoría se esquematizan como un sistema de capas sucesivas, a saber: fonología/grafología, léxico-gramática, semántica, el contexto de situación, el contexto de cultura y por último, como capa mayor, la ideología. Cada capa es una red de sistemas en el que operan las funciones semánticas fundamentales: la experiencial/ideacional, la interpersonal y la textual (Fig. 1).

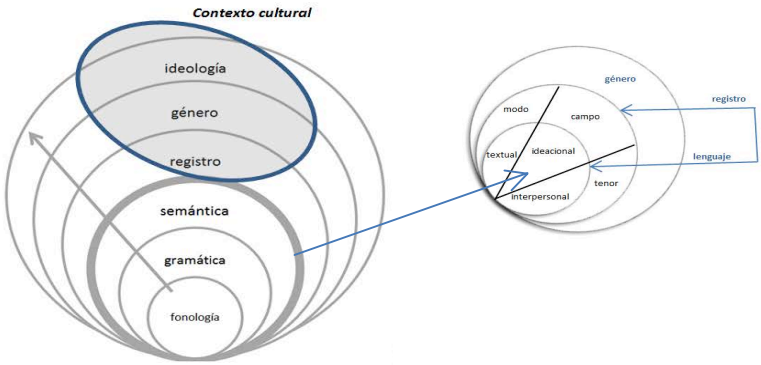


Fig. 1 – Metafunciones del lenguaje y contexto (adaptado de Martin, 1993)

Cuáles han sido los avances realizados en la investigación hasta ahora

- Se detectó una problemática, las dificultades de comprensión del discurso didáctico del profesor (sus enunciados/textos instruccionales en todas las variantes en las que aparecen y se usan) y en acuerdo con los cuatro principios de la Socioepistemología y sus características se intentó justificar y encontrar evidencia de la *práctica social* a la que remiten las actividades del profesor al enseñar en la cual se podría hallar las causas de esa problemática.
- Se encontró y reconoció y dio nombre a esa práctica como práctica de *textualización del saber matemático* por parte de los profesores formadores en los productos que le dan sentido a sus prácticas discursivas es decir, en sus textos instruccionales.
- Estos textos forman parte de un *género discursivo* mediador más abarcador y con ciertas regularidades. Como todo discurso, hace posible la construcción de conocimiento matemático.

- El macro-género discursivo que norma sus prácticas de textualización, en el cual está inmerso el discurso didáctico del profesor de matemática, es el Discurso Matemático Escolar.
- La textualización del saber matemático que realiza el profesor va más allá de una mera consideración lingüística de tipo estructural, se debe incursionar en su uso, porque denota las maneras en que se decide qué saberes circulan, cuál es su jerarquía, de qué modo se generan y comunican los mismos en las instituciones.
- Aunque este discurso es normativo de las prácticas de los profesores, una deconstrucción de los textos instruccionales y su análisis permitirían su reformulación y mejora.
- Los textos instruccionales son elementos de interacción social, por lo tanto, deben analizarse a la luz de su función comunicativa situacional (de cada institución/grupo) específica.
- De los enfoques funcionales en Análisis del Discurso se optó y justificó esa elección en consonancia con los principios de la Socioepistemología tratando de profundizar en aquellos que puedan ser útiles en Matemática Educativa.
- De entre esos enfoques se ha elegido a la Lingüística Sistémico Funcional, a partir de las razones del ítem anterior.
- Se han estado analizando las consignas de los exámenes de profesores a la luz de las características de los textos instruccionales (pueden consultarse en un trabajo previo: Lerman y Crespo Crespo, 2013).
- Se han obtenido algunos resultados interesantes de una experiencia con alumnos de segundo año de la carrera de profesorado de matemática donde debieron resolver un examen que incluía problemas/ejercicios de análisis matemático y geometría. En ellos se reveló la importancia del cotexto, por ejemplo. Pero hay que terminar ese análisis a la luz de los conceptos teóricos de la LSF e informarlo de manera adecuada, por lo tanto aún está en progreso.
- También se ha comenzado a analizar guías impresas de los trabajos prácticos impresos de varias materias y distintos profesores (Álgebra, Análisis, etc.), aún no se ha finalizado.

Cómo continuar con la investigación

- Se volverá sobre la información obtenida para afinar el análisis de los datos y hallar explicaciones que ayuden a superar problemática planteada.

- Un cambio en los textos instruccionales provocaría un cambio significativo en las prácticas discursivas.
- Se podrán realizar propuestas para innovar con elementos diferenciales según los variados escenarios, estilos de aprendizaje (no todos los alumnos aprenden del mismo modo) y modelos de enseñanza.

A modo de conclusión, se pueden remarcar dos aspectos importantes:

Participar en una interacción discursiva siempre significa coerción y organización, por lo tanto ha de correrse el velo y entender su dinámica.

Poner el foco de atención es el discurso didáctico del profesor y desentrañar sus productos permitiría mejorar los problemas que se suscitan a diario que preocupan y comprometen el accionar de un gran número de instituciones educativas formadoras profesores de matemática.

Referencias bibliográficas

Bajtín, M. (1980). La costruzione dell'enunciazione. En *Il linguaggio come pratica sociale*. Bari, Dédalo.

Bajtín, M. (2011). *Las fronteras del discurso*. Buenos Aires: Las cuarenta.

Bernstein, B. (1998). *Pedagogía, control simbólico e identidad.* Madrid: Morata/Paideia.

Cazden, C. (1991). *El discurso en el aula: El lenguaje de la enseñanza y del aprendizaje.* Buenos Aires: Paidós

Constantino, G., Pardo, M. y Riestra, D. (2006). *Discurso didáctico: perspectivas de análisis para entornos presenciales y virtuales*. Buenos Aires: La isla de la luna.

Flanders, N. (1970). *Análisis de la interacción didáctica.* Madrid: Anaya.

Ghio, E. (1997). *Decir, hacer, enseñar.* Semiótica y Pragmática Discursiva. Santa Fe: UNL.

Gvirtz, Silvina, S. Larripa y A. Oría (2009). *Prácticas discursivas pedagógicas,didácticas y escolares: algunas categorías para repensar la relación entre el saber y la escuela*. Buenos Aires: Universidad de San Andrés.

Halliday, M. (1978). *Language as social semiotic: The social interpretation of language and meaning.* Maryland: University Park Press.

Lerman, N. y Crespo Crespo, C. (2013). Textos instruccionales: su naturaleza, función e implicancias en la formación efectiva de profesores de Matemática. En R. Flores (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26*, 1759-1768. México.

DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de

Matemática Educativa A. C.

Martin, J. (1993). A contextual theory of language. In Cope, Bill & Mary Kalantzis (Eds.). *The Powers of Literacy: a genre approach to teaching writing . London: Falmer Press.*

Raiter, A. (1999). *Discurso y Ciencia Social.* Buenos Aires: eudeba.

Riestra, D. (2008). *Las consignas de enseñanza la lengua. Un análisis desde el interaccionismo socio-discursivo*. Buenos Aires: Miño y Dávila.

EL ROL DE LAS PUBLICACIONES EN LA CONSTRUCCIÓN DE LA PROFESIONALIZACIÓN DOCENTE

Patricia Lestón
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González" Argentina
patricialeston@gmail.com

Resumen. En este trabajo se describen los cambios que produjeron los nuevos planes de estudio de los Institutos de Formación Docente en Argentina y se muestra la manera en que estos diseños curriculares facilitaron espacios de construcción teórica de la profesión de la docencia. En esta oportunidad, el análisis está centrado en el papel que juegan en esos espacios las publicaciones de la comunidad de matemáticos educativos y las potencialidades que permiten desarrollar las discusiones de los escritos de los colegas de Latinoamérica. El objetivo final de esta presentación es la de convocar a la comunidad a ampliar sus aportes y a pensar en el lector de sus producciones y en el mensaje que debemos transmitir a los futuros docentes

Palabras clave: socioepistemología, identidad docente, construcción profesional

Abstract. The new curricula of teacher training institutes in Argentina are described in this paper to show how these curricula integrated spaces for theoretical construction of the profession of teaching. In this opportunity, the analysis is focused on the role of publications from educational mathematicians in those areas of teaching training and the potentiality that they help to develop in the discussions of the writing of Latin American colleagues. The ultimate goal of this presentation is to invite the community to expand their contributions and to think about the reader of their productions and the message we must convey to future teachers.

Key words: socioepistemology, teaching identity, professional construction

Introducción

Un poco de historia sobre la formación docente

Hasta hace 10 años, los Institutos de Formación Docente (IFD) de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires (Argentina) respondían a una estructura clásica de la formación docente: lo que alguien necesita para poder enseñar es el conocimiento de la disciplina científica que va a dictar y elementos básicos de ciencias de la educación que le permitan reconocer dificultades propias de aquellos a quienes se enseña (Gascón, 1998). Esta idea, que aún hoy se encuentra de manifiesto en el discurso de muchos docentes y en los Diseños Curriculares de varios IFD se fundamentaba sobre una idea que planteaba que la tarea del docente era similar a la de un artesano: moldear las mentes de sus estudiantes de acuerdo a las necesidades que un discurso escolar marcaba. Se pensaba en algo de vocación, algo de artesanía, y hasta algo de magia.

La organización de las carreras, divididas en dos conjuntos disjuntos, mantenía a las materias disciplinares por un lado, y a las materias de formación común de docentes por el otro. No existían espacios de integración para la reflexión sobre el campo propio de acción, la matemática educativa o didáctica de la matemática. Simplemente se proveía a los egresados de la materia prima

(la matemática) y las herramientas (teorías de la educación) para que ellos, como buenos artesanos, lograran una obra de calidad en sus aulas. Los únicos elementos que permitían la mejora del profesor de matemática eran sus habilidades innatas, o en el mejor de los casos, su permanencia (o supervivencia) en los cargos: la experiencia.

En esos Diseños Curriculares aparecían dos espacios en los cuales se daban herramientas prácticas para el desempeño de la tarea docente: en el caso del Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González" esos espacios eran Metodología de la Enseñanza I (ME I) y Metodología de la Enseñanza II y Residencia (ME II). Ubicados en los últimos dos años de la formación docente (de un total de 4), esos espacios proveían a los futuros profesores de elementos para pensar su práctica escolar.

En el caso de ME I, la materia se sostenía desde la revisión de propuestas didácticas, ya fuera desde el análisis de los libros de texto escolares, como de las producciones de los grupos didácticos que en la década del 90 y principios de siglo XXI desarrollaban sugerencias para la enseñanza (Grupo Arzaquiel, 2001; Corbalán, 1998; Segarra, 2001; De Guzmán, 1997). Estos textos, si bien de lectura entretenida para quien fuera a dedicarse a la docencia, carecían de elementos teóricos. Y desde los espacios curriculares no existían tampoco aportes teóricos, más allá de alguna lectura relacionada con la Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau, 1986). El planteo que se hacía para el análisis de los textos tenía que ver con cuestiones del sentido común: creatividad, cantidad de problemas, estética, novedad, tipo de explicación que se sugería.

En el caso de ME II la materia giraba en torno a las primeras prácticas docentes, en las cuales el futuro profesor producía una planificación asociada a algún tema de escuela media, y la llevaba a cabo en una escuela designada por el profesor de prácticas. La planificación se sustentaba en los mismos elementos de análisis que se planteaban en ME I y la evaluación de las clases se basaba en cuestiones operativas: se valoraban el tono de voz, el orden en el pizarrón, el manejo del tiempo, el vínculo que se lograba con los alumnos, y por sobre todo, el conocimiento matemático.

Estas materias llevaban a creer a los egresados que bastaba con saber matemática, proponer muchos ejemplos y manejar los tiempos de una clase para lograr que alguien aprendiera. El reclamo de quienes fuimos formados bajo este modelo era que en la realidad de las aulas con que nos enfrentábamos esto no alcanzaba. Seguíamos sabiendo matemática, habíamos logrado mantener la voz y el manejo del tiempo, lográbamos empatía con los estudiantes, y sin embargo, los resultados eran deficientes: nuestros alumnos no aprendían como esperábamos. La falta de elementos para analizar lo que ocurría, comprenderlo y poder modificarlo sólo generaba frustración.

Los nuevos modelos de los IFD

Gracias al trabajo de un equipo de profesionales de la educación, que ya se habían acercado al campo de la matemática educativa, los nuevos Diseños Curriculares reconocieron la necesidad de incorporar a la formación de docentes espacios curriculares de interacción entre el campo de conocimiento específico y las teorías de la educación: surgen de estos nuevos diseños áreas donde los futuros profesores reconocen la disciplina científica que los cobija, de la cual son parte y en la cual pueden mejorar su práctica profesional. Los Trabajos de Campo, espacios distribuidos uno por cada año de formación, incorporan a la currícula de la carrera elementos teóricos de formación de profesionales de la educación. El objetivo más general de este eje es permitir a los futuros docentes el análisis de la realidad de las aulas bajo un marco teórico que les permita mejorar lo que ocurre en las clases.

> El 13% de las publicaciones de los últimos tres años en Relime se ocupan del tema de la profesionalización docente en matemáticas. […] Esto es un campo de oportunidad para favorecer la emergencia de una línea de investigación que logre contribuir al mejor entendimiento del papel del docente en los logros del aprendizaje entre sus estudiantes. (Cantoral, 2013, p. 12)

Los Trabajos de Campo entonces plantean el reconocimiento de la práctica docente como una profesión, en la cual la reflexión, mirada crítica y la posibilidad de cambio se sustenta en un campo de conocimiento, que es el que llega a las aulas a partir de las publicaciones con el objetivo de nutrir a los futuros docentes de elementos teóricos de análisis. Ese campo de conocimiento retoma las ciencias de la educación (Psicología, Pedagogía, Didáctica General, entre otras) y agrega el propio conocimiento de la matemática educativa. De este modo, la comunidad de docentes e investigadores que con sus producciones nutren a la disciplina se revelan como modelos que emergen del propio dominio de la educación para ayudar a los futuros educadores.

> Lo que subyace y le da sentido a todo este quehacer es la constitución de esa comunidad académica, con una sensibilidad científica latinoamericanista, que ha convertido la información y datos obtenidos de sus investigaciones en conocimiento científico, el cual busca atender las demandas educativas de nuestra región. (Cordero y Silva, 2012, p. 314)

De esta manera, hablamos de referentes teóricos, en lugar de autores, ya que no nos interesa quedarnos con las personas sino con sus conceptualizaciones teóricas acerca de la realidad de las aulas de matemática educativa. Y son esos referentes los que surgen en las producciones de los futuros docentes.

Los referentes teóricos y sus aportes

Una de las consignas que desde el primer año de formación se hace a los futuros docentes es que la mirada que ellos vuelcan sobre las aulas, debe estar sostenida desde un referente teórico. No es válido un análisis de una clase, un libro de texto o una entrevista que se sustente sobre opiniones o experiencias personales. Éste resulta ser uno de los cambios más difíciles para nuestros alumnos: están convencidos que la docencia es vocación, llamado… Y desde ese lugar creen que deben actuar: movidos por una intuición con la cual quienes nos dedicamos a esto hemos nacido. Resulta extraño que reconozcan y defiendan la rigurosidad de la matemática; pero que no puedan ver la necesidad de ese rigor en el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje. Desde la cátedra que integro, el planteo siempre se presenta desde la lectura de algunos textos especialmente seleccionados a tal fin: mostrarles que en lo que los investigadores escriben hay aulas, hay realidades, hay problemáticas fácilmente reconocibles desde lo que ellos han vivenciado. Sin embargo, no es sencillo lograr que se incorporen al propio discurso elementos discursivos que les permitirán a ellos analizar sus experiencias tal y como lo ven en las publicaciones.

Una de las estrategias que seguimos para que los estudiantes puedan entender la importancia de la teoría, es mostrarles que la teoría no es conocimiento revelado ni es sólo producción filosófica: el reconocimiento de la teoría surgida del análisis de la práctica es lo que le da fuerza a la propuesta de construir un bagaje teórico que asista a sus clases, cuando las tengan a su cargo.

> Si se revisan los trabajos de volúmenes sucesivos del Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, es posible analizar la manera en la que esta visión ha ido evolucionando y solidificándose a través de investigaciones en las que se profundizan sus elementos y que permiten comprender cómo una disciplina científica en formación crece y se nutre de pensamientos que aunque de orígenes diversos son compartidos en una comunidad que piensa, difunde y discute resultados de sus investigaciones. (Crespo Crespo, 2010, p. 826)

Les mostramos entonces que esos referentes teóricos, que lo que les aportan son elementos discursivos, escriben sobre distintas cuestiones y de distintas maneras. A modo sólo de clasificación de estilo, hablamos de escritos que pueden aportar elementos para:

- Mirar la escuela como institución donde la matemática vive y se construye
- Mirar la educación como un proceso de construcción social de conocimiento
- Mirar la matemática, cuestionándola como conocimiento válido o no dentro de una institución educativa o de una comunidad de prácticas

- Mirar cómo se diseña y evalúa una propuesta de intervención didáctica
- Mirar cómo se continúa con la formación de la identidad docente y la conformación de una profesión
- Mirar cómo los elementos teóricos surgen como necesarios en el contexto de una investigación

En general, lo que se intenta es que los futuros docentes comprendan que la tarea del profesor excede el "dar clases"; que lo que se hace en la escuela tiene consecuencias, que lo que ellos hagan será su responsabilidad y que la manera en que se sustenten y nutran en un campo disciplinar les ayudará a mejorar su propia práctica.

Nociones teóricas y marcos teóricos: la socioepistemología

A lo largo de los últimos 10 años, en los que se ha introducido a la matemática educativa en la formación de docentes, podemos observar que ha habido un cambio: empiezan a aparecer en las producciones de los estudiantes para distintas asignaturas, elementos o nociones teóricas que ellos incorporan al discurso. Y esos elementos teóricos empiezan a ser parte de su propio discurso. Como se observa en la figura 1, los elementos teóricos que ellos incorporan surgen de marcos teóricos diversos (Abric, 2001; Cantoral y Montiel, 2001; Cordero, 2008; Cordero, Cen Che y Suárez, 2010; Crespo Crespo, 2009, 2010; D'Amore, 2005; Brousseau, 1986; Fischbein, 1989; Gascón, 1998; Suárez, 2008; Tsamir y Tirosh, 1999). La pluralidad es una de las líneas que se elige seguir: no se imponen elecciones en relación a la lectura, se les ofrecen fuentes de consulta y se los acompaña en la elección que ellos hagan.

Figura 1. Nociones teóricas de uso discursivo por los futuros docentes

Sin embargo, y a pesar de la oferta pluralista, se pueden encontrar en las producciones de los estudiantes una gran cantidad de nociones propias de la socioepistemología. Sería ingenuo pensar que el propio discurso de muchos de sus docentes no tiene influencia en esa elección: varios de sus profesores hacen investigación desde esta teoría y esa tal vez sea una de las razones de la relevancia del marco. Sin embargo, en las nociones que ellos emplean, hay algunas que más se

destacan, y que no siempre son las que sus docentes más aplican en sus trabajos. En la figura 2 aparecen sin ningún criterio de ordenación algunas de esas nociones simplemente con el objetivo de dar evidencias de aquellas ideas que resultan más cercanas o comprensibles para los estudiantes, aún cuando algunas de ellas son complejas en sí mismas (Cantoral, 2013; Cantoral y Montiel, 2001; Cantoral y Reyes, 2012; Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez Sierra, 2006; Cordero y Silva, 2012; Cordero, 2008; Crespo Crespo, 2009, 2010; Espinoza, 2009; Reyes, 2011)

Figura 2. Elementos discursivos de la socioepistemología.

Una de las hipótesis que sostenemos en relación a la elección de la socioepistemología y de sus producciones como fuente de consulta tiene que ver, creemos, con algo muy asociado a la idiosincrasia latinoamericana, y argentina en particular, que en las últimas décadas ha ido modificándose. La aproximación socioepistemológica reconoce lo local como relevante: se posiciona en un análisis sistémico y situado de la construcción del conocimiento matemático, destacando el lugar del escenario sociocultural sobre el cual se produjo dicha construcción (Cantoral, 2001; Crespo Crespo, 2007). Durante décadas los argentinos fuimos educados creyendo que lo que venía de otro lado, de Europa en particular, era mejor. Nuestras principales ciudades se parecen en su diseño a aquellas del viejo continente, nuestras iglesias intentan parecerse a las más conocidas del mundo, y nuestras principales avenidas pretenden ser madrileñas (figura 3).

Figura 3. Imágenes de una cultura basada en la pretensión de ser europea.

A pesar de eso, y como se mencionaba anteriormente, este sensación que lo que otros hacen es mejor que lo que nosotros mismos podemos hacer, se ha ido perdiendo y comienza a surgir un sentimiento algo más nacionalista, que busca identificarse con una cultura local y propia; que aún cuando reconoce sus raíces mayoritariamente europeas, también reconoce sus diferencias con ésta. Y en ese lugar, la socioepistemología acompaña. No se plantean desde este marco soluciones armadas para que el docente lleve a su clase, armadas, diseñadas y pensadas por otros, sino que se llama a los docentes a convertirse en actores de sus propias prácticas, en protagonistas de sus cambios.

El reconocimiento de lo local y el impacto en los futuros docentes

Se habla desde el seno de la socioepistemología de la necesidad de rediseñar el discurso matemático escolar, pero no desde una propuesta cerrada y acabada sino del análisis de las propias necesidades de una comunidad que debe mejorar sus aulas, con el objetivo de lograr una visión más científica del mundo.

> La forma para lograr que Latinoamérica avance en el desarrollo disciplinar no pasa por continuar reproduciendo marcos teóricos ajenos, que incluso pueden ser cuestionados por su incapacidad para solucionar los problemas de su propia región; se trata de crear un quehacer y una visión teórica propia para desarrollar un proyecto científico endógeno que revierta el desarrollo cultural de la matemática en la sociedad latinoamericana. (Cordero y Silva, 2012, p. 314)

Este tipo de pensamiento y expresión de la necesidad de las teorías y producciones de la comunidad latinoamericana impactan de manera intempestiva en los estudiantes: entender que la tarea del docente también es pensar en el desarrollo científico de una comunidad los deja pensando en la importancia del rol que van a tener en el futuro, no sólo como educadores, sino como responsables de la mejora de su propia realidad cotidiana. Ese es el lugar que les interesa ocupar: la docencia es una profesión que ha perdido el reconocimiento social que tuvo en otros tiempos, pero pensarse y reconocerse como hacedores de una mejora en su país, en su pueblo, los tienta, los entusiasma, los hace querer acercarse a ese mundo de construcción y discusión teórica donde se piensa que lo que uno hace todos los días durante 6 u 8 horas en una escuela es mucho más que dar clase.

Conclusiones

Alguna vez dijimos que si lo que hacemos en las aulas no sirve para la vida, no sale en las manos y mentes de los alumnos; entonces no tiene sentido (Lestón, 2008). Lo mismo nos planteamos ahora pero desde otro lugar: si lo que escribimos, discutimos y producimos no llega a las aulas en las

mentes de los docentes y se ve en sus acciones, entonces mejor no escribamos. Entendemos que las publicaciones hacen no sólo a la difusión de las ideas sino a la construcción de una comunidad de la cual quien lee se reconoce parte, pero debemos provocar que lo que escribimos sea leído. Debemos invitar a los docentes, y en particular a los futuros docentes y sus formadores a ser parte de esta comunidad. Es obligación de quienes somos parte de este movimiento científico acercar las producciones a quienes aún no son parte, pero también es obligación de quienes escriben pensar en quiénes los leen. Así como reconocemos que lo que uno hace en el aula estará determinado por las personas que hay en esa aula, que las propuestas didácticas no se reproducen igual de un escenario escolar a otro; lo mismo pasa con lo que comunicamos. Lo que decimos no llega igual a todos; y es un ejercicio el pensar para quién estamos escribiendo…

> Es por esto, que en este editorial, queremos hacer un llamado a la comunidad: si bien está documentada la marcada tendencia en la cultura científica local de citar bibliografía anglosajona o francesa, al tiempo que no nos leemos entre nosotros, ni mucho menos nos citamos en nuestra propia lengua, ¿cómo lograr que las nuevas generaciones de investigadores en el campo se lean, se debatan, se citen en su propia lengua? Nuestra única respuesta es generando tradición, ojalá y tengamos tiempo (Cantoral y Reyes, 2012, p. 134).

Si queremos que nos lean, queremos que nos citen, queremos que sean parte de esto en lo que creemos; entonces hagamos que lo sean. Publiquemos aquello que sabemos necesario, miremos las aulas como realidades y no como fuentes de inspiración, y retomemos eso que tienta a los futuros docentes: ser parte de algo más grande que un aula, una escuela, una clase.

Referencias bibliográficas

Abric, J. (2001). Las representaciones sociales: aspectos teóricos. En J. Abric (Ed.), *Prácticas sociales y representaciones*. (pp. 11-32). México: Ediciones Coyoacán.

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. *Recherches en Didactique des Mathématiques 7 (2),* 33-115

Cantoral, R. (2013). Editorial Tendencias: Los métodos de investigación para profesionalización docente en matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 16 (1)*, 1-12.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001). *Funciones: Visualización y Pensamiento Matemático*. México: Pearson Education.

Cantoral, R. y Reyes, D. (2012). Editorial 0.167. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 15 (2)*, 131-135.

Cantoral, R., Farfán, R.; Lezama, J. y Martínez Sierra, G. (2006). Sociología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Número especial*, 83-102.

Corbalán, F. (1998). *La matemática aplicada a la vida cotidiana.* Madrid: Grao.

Cordero Osorio, F. y Silva-Crocci, H. (2012). Matemática Educativa, identidad y Latinoamérica: El quehacer y la usanza del conocimiento disciplinar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 15 (3)*, 295-318

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (pp. 265-286). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa – Díaz de Santos

Cordero, F., Cen Che, C. y Suárez Tellez, L. (2010). Los funcionamientos y las formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 13 (2),* 187-214

Crespo Crespo, C. (2009). El aula de matemática, hoy: una mirada desde la docencia y la investigación en Matemática Educativa. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22*, 1145-1153. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Crespo Crespo, C. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología.* Tesis de Doctorado no publicada. CICATA del IPN, México.

Crespo Crespo, C. (2010). Introducción al Capítulo 3: Aspectos socioepistemológicos en el análisis y el rediseño del discurso matemático escolar. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 23*, 825-827. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

D'Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática.* México DF: Editorial Reverté.

De Guzmán, M. (1997). *El rincón de la pizarra*. Madrid: Pirámide.

Espinoza Ramírez, L. (2009). *Una evolución de la analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un estudio socioepistemológico*. Tesis de maestría no publicada. CINVESTAV del IPN, México.

Fischbein, E. (1989). Tacit Models and Mathematical Reasoning. *For the learning of Mathematics 9 (2)*, 9 – 14

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. Recherches en Didactique des Mathématiques 18 (1), 7-34.

Grupo Arzaquiel (2001). *Matemáticas: cultura y aprendizaje. Ideas y actividades para enseñar álgebra.* Madrid: Editorial Síntesis.

Lestón, P. (2008). *Ideas previas a la construcción del infinito de escenarios no escolares*. Tesis de Maestría no publicada. CICATA del IPN, México.

Reyes, D. (2011). *Empoderamiento docente desde una visión Socioepistemológica: Estudio de los factores de cambio en las prácticas del profesor de matemáticas*. Tesis de maestría no publicada, Cinvestav-IPN, México.

Segarra, L. (2001). *Problemates*. Madrid: Grao.

Suárez, L. (2008). *Modelación-graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológica*. Tesis de doctorado no publicada. Cinvestav del IPN. México

Tsamir, P. y Tirosh, D. (1999). Consistency and representations: The case of actual infinity. *Journal for Research in Mathematics Education 30 (2)*, 213-219.

CAPÍTULO 5

USO DE RECURSOS TECNOLÓGICOS EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Introducción al Capítulo de Uso de Recursos Tecnológicos en el Proceso de Aprendizaje de las Matemáticas

Daniela Cecilia Veiga

Miembro del Comité Organizador Nacional – Relme 27. (Argentina)

veigadaniela@yahoo.com.ar

Los recursos tecnológicos han invadido nuestras clases de matemática. En los últimos años, se han desarrollado celulares que admiten la descarga de graficadores, software de acceso libre y gratuito, programas gubernamentales que promueven la inclusión de los recursos tecnológicos en las escuelas…

Desde 1988, año en que se inicia el Programa Nacional de Informática Educativa en Costa Rica, varios países de Latinoamérica han desarrollado diversas políticas públicas de educación con la finalidad de incorporar las TIC en la enseñanza. Los programas de Uruguay, Chile, Colombia, México, Panamá y Argentina son sólo algunos ejemplos que dan cuenta de la importancia que reviste a la aplicación de la tecnología en la educación latinoamericana.

Al respecto, Sunkel y Trucco (2012) sostienen que estos programas constituyen acciones importantes y necesarias que conducen a un cambio prometedor; sin embargo, aún queda mucho por hacer en sistemas educativos que permanecieron "rígidos" durante décadas, docentes aferrados a modelos de enseñanza tradicionales, docentes que esperan encontrar respuestas a sus demandas frente a la incertidumbre de "qué hacer con la computadora en el aula"… Docentes que están convencidos de que el uso de herramientas informáticas no promueve la construcción del conocimiento y, la falta de ejemplos que evidencien esto, hace que cada vez estemos más lejos de lograr cambios radicales en cuanto a la inclusión de las TIC en nuestras clases.

Por su parte, Gamboa Araya (2007) es terminante en sus palabras: "Que el estudiante logre construir su propio conocimiento con ayuda de la tecnología o que, por el contrario, "atrofie" habilidades ya adquiridas depende del profesor, pues es él quien toma de decisión de utilizarla, dónde, cómo y cuándo." (p. 41). Cabe preguntarse qué tan capacitados estamos los docentes para tomar este tipo de decisiones que pueden resultar claves a la hora de desarrollar una clase sustentada en recursos tecnológicos.

Sin duda alguna, RELME constituye un punto de encuentro en el que confluyen las más diversas realidades de Latinoamérica. En la última década, se expusieron numerosos trabajos de

investigación y propuestas didácticas que intentan acercar ideas novedosas e innovadoras para implementar en las clases de matemática de distintos niveles educativos.

A continuación, se invita al lector a compartir algunos de los trabajos que se expusieron en RELME 27 y que se establecen un claro ejemplo de los constantes esfuerzos que realizan colegas de distintos países interesados en buscar y proponer estrategias que mejoren la calidad educativa de nuestros alumnos.

Referencias bibliográficas

Gamboa Araya, R. (2007). Uso de las Tecnología en la Enseñanza de las Matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática 2 (3)*, 11-44

Sunkel, G. y Trucco, D. (2012). *Las tecnologías digitales frente a los desafíos de una educación inclusiva en América Latina. Algunos casos de buenas prácticas.* Santiago de Chile: CEPAL & @LIS

CONSTRUÇÃO DOS SÓLIDOS PLATÔNICOS NA SUPERFÍCIE ESFÉRICA: UMA INTRODUÇÃO AOS CONCEITOS DE GEOMETRIA ESFÉRICA ATRAVÉS DO *SOFTWARE SPHERICAL EASEL*

Viviane Beatriz Hummes y Adriana Breda
UFRGS, PUC/RS. Brasil
vivihummes@gmail.com, adriana.breda@gmail.com

Resumen. Este trabalho tem como objetivo apresentar uma proposta de atividade, no terceiro ano do Ensino Médio, a fim de introduzir o estudo da Geometria Esférica por meio da construção dos sólidos platônicos na superfície esférica, através do *software* de geometria dinâmica *Spherical Easel*. Por meio desta, esperamos a interação dos alunos, de modo que conceitos da Geometria Euclidiana possam ser resgatados e comparados com os da Geometria Esférica.
Palabras clave: Geometria Esférica, Sólidos Platônicos; Spherical Easel
Abstract. This work aims to present an activity proposal to be applied in the third grade of high school, in order to introduce the study of Spherical Geometry, through the construction of platonic solids on spherical surface, using the dynamic geometry Spherical Easel software. Through this activity, we expect students to interact, so that concepts of Euclidean Geometry may be recovered and compared with the Spherical Geometry.
Key words: Spherical Geometry, Platonic Solids; Spherical Easel

Introducción

Este trabalho pretende apresentar uma sequência de atividades que tem como objetivo introduzir a aprendizagem de conceitos básicos de Geometria Esférica, estabelecendo conexões com conceitos da Geometria Euclidiana. A partir da tesselação das faces dos sólidos platônicos na superfície esférica, por meio do *software* de Geometria Dinâmica, denominado *Spherical Easel*, pretende-se fomentar, no terceiro ano do Ensino Médio, a construção de um pensamento geométrico capaz de apontar diferenças e semelhanças entre alguns conceitos da Geometria Esférica com alguns da Geometria Euclidiana.

Na escola básica, ensinamos e aprendemos que a Geometria Euclidiana soluciona satisfatoriamente problemas em superfícies planas. Contudo, o universo ao nosso redor não é perfeitamente plano e, assim, percebemos que há um vasto número de problemas que, para serem resolvidos, demandam a utilização de ferramentas que a geometria de Euclides não disponibiliza. Existem muitas situações em que as superfícies curvas requerem atenção. Talvez uma das mais eminentes seja a prática da navegação, onde obviamente a curvatura da Terra não pode ser desprezada. Em muitas ilustrações, temos a impressão de que um navio percorre linhas retas quando imaginamos um percurso entre dois pontos no mar. No entanto, levando em conta a realidade, verificamos (devido ao fato do navio acompanhar a curvatura da Terra) que o trajeto descrito é um arco, o que, contradizendo a Geometria Euclidiana, evidencia que a menor distância entre dois pontos nem sempre é uma linha reta.

Conteúdos relacionados às Geometrias Não-Euclidianas encontram-se praticamente ausente dos

livros didáticos e, tradicionalmente, não têm sido abordados nas aulas, tanto nas aulas da educação básica como nas de nível superior. Este assunto é, certamente, pouco conhecido entre professores do Ensino Médio. Acreditamos que isso se deve, entre outras coisas, à complexidade matemática que o tema exige, fazendo do mesmo, uma área bastante técnica, até mesmo no meio acadêmico. Além disso, existem poucos trabalhos acadêmicos que investigam o ensino de Geometrias Não-Euclidianas no Ensino Médio e, nesse sentido, faltam subsídios para auxiliar os professores da Educação Básica.

Mesmo diante desse cenário, esperamos, com esta proposta de trabalho em sala de aula, fornecer um possível caminho aos professores de matemática para que as Geometrias Não-Euclidianas, vinculadas ao apoio da tecnologia, possam ser abordadas no Ensino Médio, de forma que, a partir da prática profissional, este assunto passe a integrar o currículo de matemática escolar.

Fundamentação teórica

Algumas pesquisas vêm sendo desenvolvidas abordando o estudo de Geometrias Não-Euclidianas. Um exemplo é a dissertação de mestrado de (Souza, 1998) que, numa pesquisa de cunho qualitativo, analisou o 5º postulado de Euclides sob três aspectos: o matemático, o histórico e o qualitativo. Seu estudo teve como foco o conhecimento dos professores sobre a problemática gerada por este postulado, a influência dos livros-didáticos no ensino da Geometria, e a importância das Geometrias Não-Euclidianas para a atualidade. Apoiada na história da matemática, a investigação foi realizada com 35 alunos de graduação e 30 professores de matemática. Este estudo evidenciou que a autora procurou destacar a importância dos professores abordarem o ensino das noções de Geometria desde as séries iniciais até as séries mais avançadas do ensino básico. Neste sentido, (Souza,1998) cita inúmeros exemplos para o ensino e a utilização das Geometrias Não-Euclidianas nas escolas, tanto para o nível médio, quanto para o nível superior.

Outro exemplo é pesquisa de (Bonete, 1999), que em sua dissertação de mestrado apresenta uma pesquisa que teve por objetivo refletir e discutir o ensino das Geometrias Não - Euclidianas nos cursos de Licenciatura em Matemática. Sua investigação envolveu a realização de três experiências com alunos de um curso de Licenciatura em Matemática, para os quais desenvolveu uma proposta didática para o estudo dessas geometrias, visando capacitar futuros professores para seu ensino na escola. A autora considera que o estudo das Geometrias não Euclidianas deve partir da exploração dos conceitos da Geometria de Euclides, tendo em vista que o desenvolvimento dessas geometrias ocorreu mediante as especulações em torno do Quinto Postulado euclidiano. A autora elaborou a pesquisa a partir de uma pesquisa de cunho documental sobre o desenvolvimento da Geometria Euclidiana e das Geometrias não Euclidianas, visando identificar suas diferenças e semelhanças.

Justificamos nossa forma de trabalho, em sala de aula, apoiando-nos nas ideias de (Gravina, 1998), que aponta que a aprendizagem é um processo construtivo, que depende fundamentalmente das ações do sujeito e de suas reflexões sobre estas ações, onde todo conhecimento está voltado à ação. Isto ocorre desde o mais básico nível sensório motor ao mais sofisticado patamar de operações lógico-matemáticas, (Piaget, 1967).

As teorizações piagetianas apontam que a partir dos doze anos de idade, inicia-se um novo estágio na vida do aprendiz: a fase das operações formais. Cognitivamente, é o início da fase adulta. Nesse momento, o adolescente apresenta certo domínio do pensamento dedutivo e lógico, sendo capaz de relacionar conceitos com determinado grau de abstração e raciocinar sobre possíveis hipóteses e comparações mais complexas.

Pensando nesse processo, compreendemos que é possível propor uma atividade sobre geometria Não-Euclidiana no final da escola básica, mais especificamente, no final do Ensino Médio. Pois, mesmo que o conteúdo envolva certo domínio de abstração cognitiva, entendemos que, desde que se tenham trabalhados os estágios pré-operacionais e os estágios das operações concretas, previstos em Piaget, é possível avançar no estágio formal, de forma que o aluno possa comparar conceitos, criar hipóteses sobre os mesmos e chegar às suas próprias conclusões sobre o conteúdo proposto.

Contudo, mesmo que o estágio das operações formais trate de uma abstração mental, onde o aluno apresenta capacidade de operar lógico-dedutivamente, compreendemos que a utilização de uma ferramenta de apoio, que promova a construção e a visualização é deveras importante para a efetivação do trabalho.

A ideia de utilizar a tecnologia associada ao estudo de Geometria Esférica na educação básica está diretamente associada com concepção de (Borba, 2010) sobre o papel que *softwares* podem assumir em sala de aula. Para este autor, a interação entre alunos, professor e mídia vai além da amostragem visual, pois o *software* configura-se como parte integrante do processo de fazer matemática. O uso desse instrumento nas aulas propicia uma postura investigativa que possibilita um envolvimento maior dos estudantes com o conteúdo e encaminha-os a evoluírem suas ideias a ponto de criarem conjecturas, torná-las válidas e criar subsídios para a elaboração de uma demonstração matemática.

A partir dessa esteira, apresentamos uma proposta de como trabalhar Geometria Esférica no final da educação básica, demonstrando, a partir da construção de sólidos esféricos feitos pelos alunos, alguns conceitos e conjecturas que possam ser elaborados a fim sejam comparados com os da Geometria Euclidiana.

Metodologia de trabalho em sala de aula

Neste trabalho, apresentamos uma sugestão de como abordar o estudo das Geometrias Não-Euclidianas, especificamente a Geometria Esférica, no terceiro ano do Ensino Médio, estabelecendo conexões com conceitos da Geometria Euclidiana. Para tanto, propomos a construção dos cinco sólidos de Platão na superfície esférica, através do *software* de Geometria Dinâmica *Spherical Easel*, como atividade introdutória ao estudo de conceitos da Geometria Esférica.

São cinco os Sólidos Platônicos Esféricos, resultantes da tesselação das faces dos Sólidos Regulares de Platão na superfície esférica. A base de todas as construções das faces dos sólidos platônicos na esfera é o octaedro. Além de ele ser a geratriz de todos os outros sólidos, as suas faces são mais fáceis de representar na superfície esférica. Desta forma, sugerimos que o primeiro sólido de Platão a ser construído seja o Octaedro Esférico.

Desenhando-se três círculos máximos, onde cada um é perpendicular aos outros dois, forma-se o Octaedro Esférico. Ao produzi-lo, formam-se oito triângulos esféricos como mostra a Figura 1.

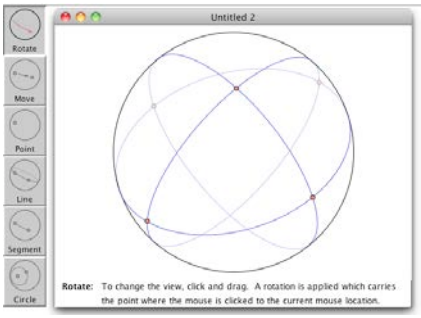


Figura 1. Octaedro Esférico construído no *software Spherical Easel.*

Após os alunos realizarem a construção do Octaedro Esférico existe a possibilidade de que os estudantes questionem o fato dos triângulos serem arredondados e, desta forma, acreditamos que, a partir daí, se possa introduzir a noção de triângulo esférico. Através de uma diálogo coletivo, a idéia é que se promova uma discussão de que a imagem gerada pelo computador leva à suposição de que a soma dos ângulos internos do triângulo esférico é maior que 180º e por conseqüência, possa-se criar a percepção de que temos outro tipo de triângulo, diferente do triângulo euclidiano.

Dando sequência à atividade, indicamos os passos para a construção dos demais sólidos de Platão, no *software Spherical Easel*: Hexaedro Esférico, Tetraedro Esférico, Dodecaedro Esférico e Icosaedro Esférico.

Para a construção do Hexaedro Esférico as etapas são: construir o baricentro (ponto de intersecção das medianas do triângulo esférico) de cada um dos triângulos do octaedro esférico;

unir cada baricentro com os baricentros adjacentes e eliminar as arestas do octaedro esférico. Com isso, formam-se seis quadrados esféricos como mostra a Figura 2.

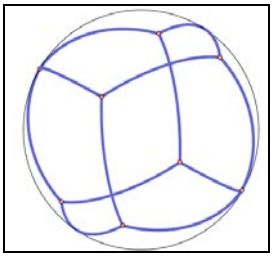


Figura 2. Hexaedro Esférico no *software Spherical Easel*.

Acreditamos que essa construção possibilita que os alunos revisem conceitos da Geometria Plana e, ao mesmo tempo, comparem estes conceitos com os da Geometria Esférica. Um exemplo é o quadrado esférico, que é diferente do quadrado plano, pois apresenta os quatro lados e quatro ângulos congruentes, contudo estes ângulos não são retos.

A seguir, sugerimos que seja realizada a construção do Tetraedro Esférico. Seguindo os passos: selecionar uma face do cubo esférico e traçar uma diagonal nesta face; traçar diagonais em todas as faces restantes, de modo que, no vértice da face que termina uma diagonal, tenha início a diagonal da outra face; eliminar as arestas do cubo esférico, terminado, desta maneira, o tetraedro esférico.

Assim, forma-se quatro triângulos esféricos como mostra a Figura 3.

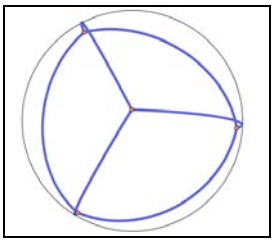


Figura 3. Tetraedro Esférico no *software Spherical Easel*.

A partir da construção, salientamos ser interessante uma discussão sobre a possível nomenclatura da figura, denominada Tetraedro Esférico. Com esta construção, os alunos podem revisar o conceito de diagonal da Geometria Plana e refletir qual o significado deste na Geometria Esférica.

Continuamos com a construção do Dodecaedro Esférico: fazer uma circunferência cujo raio tenha a medida da aresta da face do hexaedro esférica, construída anteriormente; cobrir a superfície esférica com triângulos equiláteros, cujos lados tenham a medida desta aresta, Figura 4.

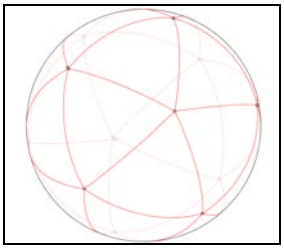


Figura 4. Etapa da construção do Dodecaedro Esférico.

Concluindo a tesselação do Dodecaedro esférico seguindo os seguintes passos: construir o baricentro de cada um desses triângulos; unir os vértices desses triângulos ao baricentro; tendo em vista que a distância do vértice do triângulo ao baricentro é a aresta do pentágono e que a soma dos ângulos da união resultante do item 3 é 360° (cada ângulo mede 120°), terminar a construção do dodecaedro esférico.

Desta maneira, formam-se doze pentágonos esféricos como mostra a Figura 5.

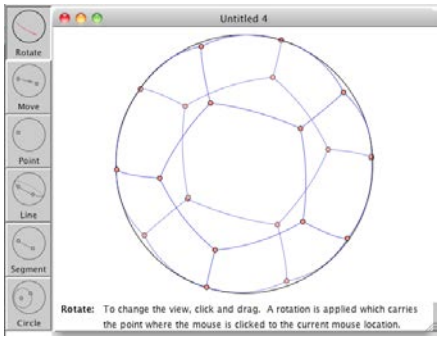


Figura 5. Dodecaedro Esférico no *software Spherical Easel*.

Por fim, terminamos a atividade com os passos para a construção do Icosaedro Esférico: selecionar uma face do dodecaedro esférico e construir a mediatriz de cada uma de suas arestas (fazer o mesmo com todas as outras faces); unir o circuncentro de cada uma dessas faces, por intermédio dessas mediatrizes; eliminar as arestas do dodecaedro e o icosaedro esférico está pronto.Desta maneira, formam-se vinte triângulos esféricos como mostra a Figura 6

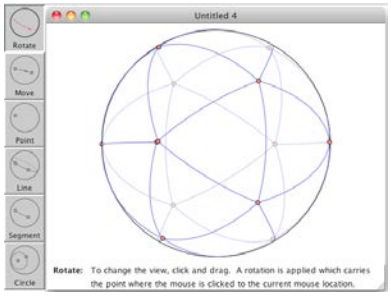


Figura 6. Icosaedro Esférico no *software Spherical Easel*.

Com este trabalho propomos uma sequência de atividades, que consiste na tesselação das faces dos sólidos platônicos na superfície esférica, com a intenção de contribuir para o ensino-

aprendizagem de conceitos básicos da Geometria Esférica, revisitando e consolidando conceitos da Geometria Euclidiana.

Nesse sentido, acreditamos que o computador potencializa a aprendizagem dos alunos devido às condições de interatividade que ele permite e pela possibilidade de manipulação rápida das figuras, permitindo visualizar as figuras geométricas de vários ângulos e efetuar diversas construções em tempo real.

Aspectos Finais

Acreditamos que a construção dos sólidos platônicos na superfície esférica possibilita que os alunos revisem conceitos da Geometria Plana e, ao mesmo tempo, comparem estes conceitos com os da Geometria Esférica, ressignificando-os.

Com a construção do Octaedro Esférico, por exemplo, é possível que os alunos questionem o fato dos triângulos serem arredondados, a partir da observação da imagem gerada no programa *Spherical Easel*. Em contrapartida, ao realizarem a construção do Tetraedro Esférico, os alunos podem revisar o conceito de diagonal da Geometria Plana e criar conjecturas para tal conceito na Geometria Esférica.

Refletindo sobre as ideias de (Borba, 2010), entendemos que o uso do *software Spherical Easel* possa abrir possibilidades para que os alunos façam conjecturas, pois a construção e tesselação da esfera no computador é bastante acessível. Dessa forma, esperamos que o computador altere o processo de conhecimento, modificando e reorganizando a maneira de pensar dos alunos.

Salientamos que este trabalho é apenas uma proposta para trabalhar Geometria Esférica na educação básica e a entendemos como um instrumento maleável, de forma que cada professor, em seu contexto social, econômico, cultural, possa fazer adaptações à sua realidade, enfocando nos aspectos que possam auxiliar a aprendizagem de seus alunos.

Referências bibliográficas

Bonete, I. P. (1999). *As Geometrias Não-Euclidianas: uma perspectiva para seu ensino*. Dissertação de Mestrado em Educação, Universidade Estadual de Campinas e Universidade Estadual do Centro Oeste, Guarapuava, PR, Brasil.

Borba, M. C. (2010, julho). Softwares e Internet na Sala de Aula de Matemática. In: Educação Matemática, Cultura e Diversidade. *Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática*, Salvador, BA, Brasil.

Gravina. M. A.; Santarosa, L. M. (1998). A Aprendizagem da Matemática em Ambientes

Informatizados. *Anais do IV Congresso RIBIE,* Brasília, GO, Brasil.

Piaget, J. (1967). *Biologie et Connaissance*. Paris: Gallimard.

Souza, M. C. G. (1998). *O 5º Postulado de Euclides: A Fagulha que Desencadeou uma Revolução no Pensamento Geométrico*. Dissertação de Mestrado em Ciências, Universidade do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

TECNOLOGÍAS QUE JUSTIFICAN TÉCNICAS

Alberto Camacho Ríos
Instituto Tecnológico de Chihuahua II. México
camachoalberto@hotmail.com

Resumen. El escrito se desarrolla sobre una de las grandes etapas de la Teoría Antropológica de lo Didáctico cual es la introducción en las praxeologías matemáticas de saberes que se corresponden con disciplinas ajenas a la matemática y su enseñanza. En el documento se ha provocado una inmersión transpositiva de conocimientos externos a una praxeología matemática durante el *trabajo de la técnica*: actividad con la que se pretende mejorar la técnica matemática y fortalecer de esa manera el dominio de la tecnología. En ese episodio una confrontación de conocimientos prácticos y teóricos ocurre al intentar legitimar las diferentes técnicas que se desprenden de tecnologías externas. De esa confrontación resultan ambigüedades y rupturas, puesto que la tecnología dominante deja de tener control de las técnicas externas al modelo praxeológico.

Palabras clave: práctica social, técnica, tecnología, funciones tecnológicas, Institución

Abstract. The paper is developed on one of the main stages of the Anthropological Theory of Didactics which is the introduction into mathematical knowledge praxeology´s corresponding to disciplines outside of mathematics and its teaching. The document has caused a dip trans-positive of knowledge external to a mathematical praxeology for artwork: An activity that aims to improve the mathematical technique and thereby strengthen the technology domain. In this episode a confrontation occurs skills and knowledge to try to legitimize the different techniques that flow from external technologies. Those confrontations are ambiguities and ruptures, as the dominant technology ceases to have control of external techniques to praxeological model

Introducción

El escrito se desarrolla sobre una de las grandes etapas de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) cual es la introducción en las praxeologías matemáticas de saberes que se corresponden con disciplinas ajenas a la matemática y su enseñanza. Una irrupción transpositiva de conocimientos prácticos que se desprenden de técnicas alternativas posibles, y que pertenecen a Instituciones ajenas a las praxeologías, se presentan en la (TAD) a través de dos rutas de acceso, la primera ocurre durante el *episodio de trabajo de la técnica*: etapas exploratorias que provocan un desarrollo progresivo de la técnica, que a su vez generan técnicas relativamente nuevas en el contexto de la enseñanza y, la segunda, en la dinamización de actividades que se realizan previamente a los *momentos de estudio* en las organizaciones didácticas (OD), también conocidas como praxeologías didácticas, es decir: etapas organizadas que llevan a los estudiantes a la institucionalización del conocimiento. En ambos casos la irrupción desemboca principalmente en el bloque tecnológico teórico [θ, Θ] trastocando su parte interna. La parte que se trastoca tiene que ver con uno de los objetivos de la tecnología matemática, como es la de justificar "racionalmente" la técnica (Chevallard, 1999, p. 3). La justificación de la técnica —a través del discurso tecnológico

que se desprende de la tecnología— se presenta entonces *ambigua*, debido a los *estilos de racionalidad* que habitan en los espacios institucionales que se ponen a interactuar:

> El estilo de racionalidad puesto en juego varía, ello es obvio, en el espacio institucional, y, en una institución dada, al filo de la historia de esta institución, de suerte que una racionalidad institucional dada pueda aparecer... poco racional desde la otra institución. (Ibíd. p. 3).

Lo "poco racional" de los discursos institucionales puestos en juego se distingue por su nivel de matematización.

Para ofrecer un mejor punto de vista alrededor de este fenómeno, se muestra enseguida un breve recorrido de la propuesta de Chevallard para el *trabajo de la técnica*. Posteriormente se plantea un modelo praxeológico en el que se han introducido conocimientos que surgen de Instituciones *P* ajenas a las tecnologías teóricas y a las propias Instituciones usuarias dedicadas a la enseñanza de la matemática. El objetivo es determinar la derivada de una función de grado racional, utilizando el método de derivación por incrementos: La idea central es la de contrastar una técnica externa al modelo praxeológico con la técnica matemática dominante y *desarrollar el trabajo de la técnica,* de manera que se amplíe la derivación para diferentes funciones como la comentada anteriormente. En ese contraste se podrán apreciar rupturas epistemológicas al centro de la teoría matemática que sujeta a las organizaciones matemáticas (OM) y que dejan con incongruencias a las justificaciones de la técnica que se desprenden del bloque tecnológico-teórico [θ, Θ].

Revisión bibliográfica

Según Chevallard (2007, p. 714), una (OM), como la que se describe en el Esquema 1, se compone de los bloques práctico y técnico: 1) El saber-hacer o la *praxis* [T, τ], y 2) El saber o *logos* [θ, Θ].

$$[T, \tau, \theta, \Theta]$$

Esquema 1. Modelo praxeológico de Chevallard

En el hábitat de una institución usuaria, la actividad escolar T representa las tareas, τ la técnica o conjunto de realizaciones y procedimientos que permiten abordarlas, θ la tecnología: objetos matemáticos legitimados para el curso, como son los teoremas, axiomas y definiciones, que además justifican y hacen inteligible a la técnica, y Θ la teoría que, a su vez, justifica a la tecnología. La tecnología se refiere no sólo al estudio de las técnicas que contiene, sino a la manera en que de estas últimas se desprenden.

Las praxeologías fundamentales son concebidas como Organizaciones Matemáticas Puntuales (OMP) [$T/\tau/\theta/\Theta$]. Este tipo de organizaciones son comunes y tienen la característica de *recrear*

en el salón de clase una técnica por demás conocida, previamente reconocido su origen, su proceso de construcción social y su colocación en el ambiente escolar. El bagaje de conocimientos matemáticos teóricos que las integran se aprecian en los manuales escolares y en la producción de los encargados de hacer matemática, en ambos casos media la transposición institucional de conocimientos. Por su lado, las organizaciones praxeológicas locales (OML) son aquellas que agrupan a una buena cantidad de (OMP) constituidas cada una alrededor de un único tipo de tareas T_i.

Al centro del modelo praxeológico, Castela (2008) y Castela y Romo Vázquez (2011) han distinguido seis funciones posibles de la tecnología θ que justifican las técnicas que de ella se desprenden: *describir, facilitar, motivar, evaluar, validar y explicar*. Según las autoras, entre los saberes que se contemplan en las seis funciones algunos se determinan en el marco de una teoría matemática y otros surgen de la práctica matemática, quien provee su validación en un contexto empírico. La validación de las funciones citadas debe ir acorde a la situación de la teoría matemática que cobija a la tecnología, y fincarse en forma de hipótesis que surgen de los teoremas que resultan de la propia tecnología: al analizar el modelo praxeológico que involucra la solución de ecuaciones diferenciales lineales a través de la Transformada de Laplace, en el contexto de la enseñanza de la Ingeniería —en Francia— principalmente en el curso AU2 de Automática, encontraron que ciertos elementos de saberes que corresponden a la tecnología θ^{th} desembocan de procesos no teóricos. Estos procesos son determinados y validados por las instituciones usuarias I_u de la matemática que no se pueden disociar de los modelos praxeológicos por su estatus en la enseñanza de la matemática. Particularmente, el discurso en el cual la integral de la función impulso Delta de Dirac vale uno en $f'(0)$, la validación que aparece en el Anexo del curso AU2, es vista como una *explicación* necesaria al centro de las argumentaciones formales, más no conforme con las normas de la teoría matemática y si, en los más de los casos, al contexto fenomenológico de la física. La explicación se refiere al estado en que se encuentra la validación de las argumentaciones en su proceso de matematización. La situación es incómoda puesto que la tecnología θ^{th} que valida las técnicas en el juego de la praxeología matemática, deviene ambigua, poco tolerante, y con desviaciones hacia la justificación de conocimientos prácticos que emergen de la fenomenología física.

Ante la pérdida de dominio por parte de la tecnología teórica en la legitimación de las funciones de la técnica, estas últimas deben ser incluidas en una tecnología práctica θ^{p} que las justifique, toda vez que validadas por la institución usuaria I_u.

La brecha que se abre entre los conocimientos contenidos en θ^{p} y θ^{th}, en el modelo extendido

propuesto en el Esquema 2, hace que la posición de θ^p sea incierta por la teoría matemática en la que se encuentra ubicada la praxeología. Ante esto último, Castela y Romo Vázquez (2011) proponen un intento de justificación de los conocimientos prácticos: "(…) una *épure* praxeológica (…) donde el nivel práctico debe ser forjado por la institución usuaria, tomando apoyo sobre la diversidad de temas que en esa institución pondrán en práctica la técnica" (p. 17). Una *épure* praxeológica es una (OM) que se encuentra en proceso de legitimación debido a que contiene conocimientos prácticos. Un modelo praxeológico *extendido* que incluye ambas tecnologías es propuesto en el Esquema 2.

$$\left[T,\tau,\theta^p,\Theta\right] \leftarrow I_u \;\; ; \quad \left[\begin{array}{cccc} T, & \tau, & \begin{array}{c}\theta^{th}\\ \theta^p\end{array} & \Theta \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow P(M) \\ \leftarrow I_u \end{array}$$

Esquema 2. A la izquierda, *épure* determinada por I_u. A la derecha, Modelo praxeológico *extendido* propuesto por Castela y Romo Vázquez (2011), en el que se incluye una tecnología teórica θ^{th}.

Sin embargo, en el caso donde la tecnología práctica se determina a partir de actividades ajenas a las (OM), como sucede con aquellas contenidas en las prácticas sociales que habitan en Instituciones *P,* la brecha que se abre entre las tecnologías θ^p y θ^{th} es semejante a los procesos de construcción de conocimiento matemático que han ocurrido a lo largo de la historia, incluso en ciertos casos extremos θ^{th} se puede ver como el límite al que tiende θ^p. Bajo esas circunstancias, las técnicas son rescatadas de las tecnologías prácticas θ^p y su legitimación al centro del modelo praxeológico ocurre desde la Institución *P,* ajena a las cuestiones de enseñanza del conocimiento, cuyo nivel de matematización suele estar alejado de la propia legitimación de las técnicas que se desprenden de θ^{th}, presentándose la ambigüedad ya citada.

El *trabajo de la técnica*

En Chevallard (2007) la tecnología teórica es: "(…) quien, en una institución o persona, reemplaza la *función* tecnológica: justifica y esclarece la técnica τ relacionada con un tipo de tareas *T,* permitiendo reconstruirla cuando ella es *dada*" (p. 714). La reconstrucción se refiere a la necesidad de *retocar* la praxeología cuando algún episodio de la técnica lo haga necesario:

> (…) un episodio de trabajo de la técnica puede conducir a retocar la organización matemática, y eventualmente vivir un nuevo episodio tecnológico –teórico– y en todo caso realizar, aun cuando fuera brevemente, otro episodio de institucionalización. (Ibíd. p. 730).

Los *episodios de trabajo de la técnica* que llevan a retocar la tecnología, se refieren a la etapa de definir al modelo teórico-matemático de la praxeología. El retoque se realiza durante su

organización matemática, y en particular durante el *trabajo de la técnica*. El objetivo en esta etapa es mejorar la técnica y dejarla lo más eficaz y confiable posible, incorporando a esta última técnicas alternativas. Con ello se exigen modificaciones a la tecnología que la llevan a acrecentar el dominio y control con los que cuenta.

El ejemplo de una obra *O* de la que se rescata una técnica τ_j y la tecnología θ_j de la que se desprende, para calcular el valor de *x* con el cual el *perímetro* 2*p* de un rectángulo deviene máximo, se muestra en (Chevallard, 1999) de la siguiente manera:

La tecnología es recuperada del origen mismo de cálculo infinitesimal en los siguientes términos: "Si $x_1, x_2, ..., x_n$ son reales > 0, siendo la suma constante, igual a *a*, entonces el producto $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n$ es máximo luego que $x_1 = x_2 = ... = x_n = a/n$." (p. 14)

Con la irrupción en la praxeología de la técnica y la tecnología, así recuperadas, ocurre un movimiento transpositivo de nuevos objetos de conocimiento que *nutren* a la tecnología original y la transforman en una tecnología mixta. Se trabaja en esa etapa con *embriones* del conocimiento (Ibíd. p. 3), desarrollados y utilizados a lo largo de varios siglos que toman la forma de (OMP), y que se constituyen alrededor de un único tipo de tarea. Al menos para el caso citado, Chevallard no aclara la justificación de la irrupción de nuevo conocimiento, ni cómo es el resultado de la nueva tecnología mixta, tampoco asume el control de las rupturas epistemológicas que se producen.

La *obra O* que refiere Chevallard son documentos históricos, originalmente de naturaleza matemática, de los cuales se rescatan tecnologías externas y con las que se pueden *reproducir* aquellas técnicas desarrolladas circunstancialmente. Por la naturaleza de los documentos donde se rescatan las técnicas no hay afectación en las decisiones matemáticas y de práctica matemática a que da lugar la tecnología dominante para operar, accionar y legitimar sus propias funciones.

Irrupción transpositiva de una técnica externa a la praxeología dominante

Se presenta enseguida el caso de una actividad comprendida en una (OMP), en la que se propone el uso de la técnica matemática τ_m de derivación por incrementos, también conocida como regla de los cuatro pasos, para derivar funciones con exponentes fraccionarios de la forma: $f(x) = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}$, para *n* entero natural. Importa confrontar conocimientos externos al modelo praxeológico dominante, debido a que, como se verá, este último es una (OM) *incompleta* (Fonseca, Boch y Gascón, 2007) que hace necesario el trabajo de la técnica. En ese episodio se recupera un ostensivo que integra una técnica ajena la cual se complementa bien con la técnica matemática, más su inclusión y, sobre todo, los elementos que la configuran, no se corresponden con las

normas de la tecnología teórica dominante.

La praxeología para la derivación de funciones a partir de la definición de derivada —al menos en el sistema de enseñanza superior mexicano— toma estructura como:

Organización Matemática Dominante

- Tipo de tareas *T*: Derivar por incrementos la función $f(x)=\frac{1}{\sqrt[n]{x}}$, para *n* entero positivo, aplicando la definición de derivada.
- Técnica τ_m: Derivación por incrementos:
- Procedimiento: Regla de los cuatro pasos:

  τ_1: Se incrementa $f(x)\rightarrow f(x+\Delta x)$

  τ_2: Se establece la diferencia: $f(x+\Delta x)-f(x)$

  τ_3: Se dividen ambos miembros por Δx

  τ_4: Se aplica $\lim\limits_{\Delta x\rightarrow 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

  Siendo: $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\rightarrow 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

- Tecnología θ: La definición de la tecnología son los cuatro pasos enunciados y resumidos en la expresión: $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\rightarrow 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, si este límite existe.
- Teoría Θ: Los elementos teóricos que justifican θ son aquellos de la razón de cambio, así como los que definen la derivada de una función en el marco del análisis matemático.

Al analizar en los textos de cálculo diferencial los tipos de funciones cuya derivada se determina con la regla de los cuatro pasos, se verá que la mayoría están preparadas para funciones polinómicas elementales —en algunos casos con radicales— que no sobrepasan el grado dos o tres. De esa manera se logra que la técnica matemática domine las tareas propuestas, sin que a la par ocurra un cuestionamiento tecnológico dada la propia limitación de la técnica y debido a la comodidad de su uso con las funciones mencionadas. En este caso la tecnología dominante incide directamente sobre la técnica matemática, disminuyendo su potencial algorítmico y algebraico.

La técnica matemática τ_m que se relaciona con la praxeología, y que se desprende de la definición de derivada (1) incorporada en θ^{th}

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (1)$$

es por sí misma ineficaz para resolver la tarea *T* por los procedimientos algebraicos que involucra y debido a lo exagerado de los índices de los radicales que surgen en el proceso de cálculo de la derivada. Si por ejemplo, en un caso extremo, se supone *n*=5 para $f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x}}$, la diferencia: $f(x+\Delta x) - f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x+\Delta x}} - \frac{1}{\sqrt[5]{x}}$, y en consecuencia el procedimiento algebraico para el paso al límite, quedan por demás incomodos.

Para *desarrollar el trabajo de la técnica* en la praxeología dominante, pudiera pensarse en utilizar otra técnica alternativa τ_p como el teorema del binomio de Newton: esta última fue comúnmente utilizada para matematizar problemas de variación en la física, así como cuestiones de geometrización por los ingenieros geógrafos, topógrafos, astrónomos, etc., a lo largo del siglo XVIII y hasta principios del siglo XX, y fundamentalmente en la enseñanza de ese concepto. Una expresión algebraica y variacional del teorema se presenta en (2):

$$f(x+h) = f(x) + Ah + Bh^2 + Ch^3 + etc. \qquad \text{(2) Donde: } h = \Delta x.$$

La serie fue legitimada por Abel en 1826 desarrollando para ello una demostración rigurosa que aparece en *Le Journal de Crelle*. Por su lado, Lagrange, en la *Théorie des fonctions analytiques*, sugiere la expresión (2) como: $f(x+i) = fx + pi + qi^2 + etc.,$ donde *p, q, r,* etc., representan las funciones *derivadas* de *fx*. Esa última serie fue fundamental para la construcción del análisis algebraico que permeo los siglos XVIII y XIX.

El teorema ha sido estudiado a partir de su utilidad en diferentes prácticas sociales de amplio uso y descubrimiento de nuevos argumentos de la ciencia, por Camacho y Sánchez (2010), así como por Engler y Camacho (2012). Por si mismo tiene condiciones suficientes para mejorar la derivación por incrementos de funciones que no es posible atender con la técnica matemática dominante.

De (2) se determina la derivada para el caso de funciones analíticas como se aprecia en (3), la cual es una representación de la tecnología externa θ_p:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) + A\Delta x + B(\Delta x)^2 + \ldots - f(x)}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x), \text{ Donde } \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0 \qquad (3)$$

Utilizando el procedimiento de los cuatro pasos y la técnica τ_p del teorema del binomio citada en (2), se puede determinar la derivada de la función analítica propuesta inicialmente, es decir:

τ_1: Se incrementa $f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^{-\frac{1}{n}} = x^{-\frac{1}{n}} - \frac{1}{n} x^{-\frac{1}{n}-1} \Delta x + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+1\right) x^{-\frac{1}{n}-2} (\Delta x)^2}{2} + \ldots$

τ_2: Se establece la diferencia: $f(x+\Delta x)-f(x)=x^{-\frac{1}{n}}-\frac{1}{n}x^{-\frac{1}{n}-1}\Delta x+\frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+1\right)x^{-\frac{1}{n}-2}(\Delta x)^2}{2}+\ldots-x^{-\frac{1}{n}}$

τ_3: Se dividen ambos miembros por Δx:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=-\frac{1}{n}x^{-\frac{1}{n}-1}+\varepsilon(\Delta x)$$

Donde: $\varepsilon(\Delta x)=\frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+1\right)x^{-\frac{1}{n}-2}\Delta x}{2}+\ldots$

τ_4: Se aplica (3) como: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varepsilon(\Delta x)$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=-\frac{1}{n}x^{-\frac{1}{n}-1}+\frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+1\right)x^{-\frac{1}{n}-2}\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x)}{2}+\lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon(\Delta x)$$

Siendo: $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varepsilon(x)$:

$$f'(x)=-\frac{1}{n}x^{-\frac{1}{n}-1}$$

La función tecnológica que justifica la técnica τ_p empleada, se despliega directamente de la expresión (3) —es decir de la tecnología externa θ^p—. La validación de la técnica se puede fincar en una etapa de búsqueda de precisión del concepto de derivada, como:

> Dado cualquier número *x* para el cual este límite exista, asignamos a *x* el número $f'(x)$. De modo que podamos considerar $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varepsilon(\Delta x)$ como una nueva función, llamada derivada de *f* y definida por medio de la ecuación anterior.

Algunos resultados

En el caso citado no se puede hablar de una tecnología práctica θ^p que *nutra* a la tecnología teórica (1) y se determine así una tecnología mixta, debido al rigor de la teoría matemática que justifica la praxeología dominante. La irrupción de conocimientos jerarquizada por la Institución *P* en la praxeología, se aprecia en el Esquema 3.

$$\left[\theta^p\right]\leftarrow P$$

$$\downarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc} T, & \begin{array}{c}\tau_p\rightarrow\\ \tau_{th}\leftarrow\end{array} & \theta^{th},\ \ \Theta \end{array}\right]\leftarrow I_u$$

Esquema 3. La tecnología externa θ^p surge de la Institución *P* y provee de técnicas τ_p para desarrollar el episodio del *trabajo de la técnica* en la praxeología dominante.

Sin embargo, la técnica τ_p del teorema del binomio dinamiza los procedimientos de orden algebraico contenidos en la técnica matemática τ_m que se desprende de la tecnología teórica θ^{th} y ayuda a resolver los problemas como el que se puso en evidencia, donde los índices de los radicales son difíciles de manipular con los procedimientos algebraicos tradicionales, ampliando así el campo de tareas T_i que se pueden resolver. No obstante las diferencias entre ambas, la técnica τ_p se impone sobre la técnica matemática, resultando así una técnica *híbrida* que contiene conocimientos *aproximados*, alterando así el bloque técnico-práctico [T, τ] y, en consecuencia, al bloque tecnológico teórico [θ, Θ]. Esa aproximación del conocimiento que resulta, acredita un dominio más amplio de la praxeología que da para ponerlo a prueba en el salón de clases, más, ante ello, los modos de validación de los conceptos aproximados son por demás exigentes.

Conclusiones

En el caso de las praxeologías que atendieron Castela y Romo Vázquez (2011), la tecnología práctica surge de la práctica matemática que se asocia a la fenomenología física. Esta posición mixta que incorpora ambas tecnologías, establece una *épure* praxeológica de la que habría que eliminar las coyunturas de la práctica matemática en un contexto donde la comunidad de expertos $P(M)$ que se dedican a hacer matemática, lleven los conocimientos prácticos a una posición más avanzada de matematización, principalmente al nivel de la teoría matemática en la que se circunscribe la praxeología matemática.

En la situación donde la tecnología práctica θ^p surge de actividades ajenas a una teoría matemática y a la práctica matemática misma, la actividad deja a θ^p completamente alejada de la tecnología teórica límite que le sirve de referencia. En esos casos, la *épure* que se determina establece una amplia brecha epistemológica con la inmersión de conocimientos, como resulta ser en el caso presentado. En ese punto, la justificación de las técnicas se fincan a partir de definiciones alejadas todavía de la teoría matemática, y son vistas como *vestigios* de las técnicas dominantes (Chevallard, 1999. p. 3).

La influencia de la Institución P sobre la praxeología dominante se muestra con amplitud en el caso estudiado. La técnica matemática es rebasada e incorporada en la técnica del teorema del binomio, cuyos elementos aumentan la armonía de la primera y la coordinación en la resolución de tareas *incómodas* e, incluso, de aquellas tareas que comúnmente se resuelven con ésta última. Otras cuestiones importantes quedan pendientes: ¿Qué sucederá con el proceso de institucionalización previsto en la organización didáctica, si es que se lleva al salón de clases la técnica del teorema del binomio? ¿Qué con el fenómeno de inmersión de conocimientos prácticos por parte de la Institución usuaria? ¿Se puede prever esto último?

El cuestionamiento tecnológico (Fonseca, et. al, 2007) puesto en evidencia, da lugar para repensar la visión de la (TAD) hacia la institucionalización de los objetos matemáticos, en la búsqueda de reconocer y legitimar los procesos y realizaciones con los que a éstos se llega.

Referencias bibliográficas

Camacho A. y Sánchez, B. I. (2010). Análisis sociocultural de la noción de variabilidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* (*13*) 4, 29-52.

Castela C. (2008). La noción de praxeología: un instrumento de la Teoría Antropológica de lo Didáctico posiblemente útil para la Socioepistemología? En: P. Lestón (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* Vol. 22 (pp. 1195–1206). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. http://clame.org.mx/documentos/alme22.pdf

Castela C. y Vázquez Romo A. (2011). Des mathématiques a l´Automatique: Etude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* (*31*), 1, 79-130.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. Consultado el 20 de mayo de 2013, En: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Analyse_des_pratiques_enseignantes.pdf

Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la Théorie Anthropologique du Didactique. En Ruíz-Higueras, L. Estepa, A García, F. J (Eds.). Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones a la Teoría Antropológica de lo Didáctico, 705-746. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén. Impreso en España.

Chevallard, Y. (2011). Les problématiques de la recherche en didactique à la lumière de la TAD. Consultado el 20 de mayo de 2013, En: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=208

Engler A. y Camacho A. (2012). *Construcción de la derivada. Dinamización de la regla de los cuatro pasos.* Berlín: Editorial Académica Española. LAMBERT Academic Publishing. GmbH & Co. KG.

Fonseca, C, Boch, M y Gascón J. (2007). El momento del trabajo de la técnica en la completación de organizaciones matemáticas: el caso de la "Regla de Ruffini". En Ruíz-Higueras, L. Estepa, A García, F. J (Eds.). Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones a la Teoría Antropológica de lo Didáctico, 139-157. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén. Impreso en España.

DERIVADA Y APLICACIONES: LA TECNOLOGÍA EN EL AULA

María Elena Schivo, Natalia Sgreccia y Marta Caligaris
Universidad Tecnológica Nacional Argentina
Universidad Nacional de Rosario
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas.
meschivo@arnet.com.ar, sgreccia@fceia.unr.edu.ar, mcaligaris@frsn.utn.edu.ar

Resumen. Este trabajo forma parte de una tesis de Maestría en Docencia Universitaria en la que se ha propuesto realizar un estudio de caso inscripto en la enseñanza y el aprendizaje de Análisis Matemático I en dos especialidades de Ingeniería de la Facultad Regional San Nicolás dependiente de la Universidad Tecnológica Nacional, Argentina: Ingeniería Electrónica e Ingeniería Mecánica. Se analiza si incide favorablemente en el aprendizaje de dicha asignatura la incorporación de la tecnología para una adecuada visualización de los contenidos involucrados. Para ello se han confeccionado 24 pantallas interactivas con el software GeoGebra para ser utilizadas en las clases teóricas correspondientes a la unidad didáctica de "Derivada y aplicaciones". Se investiga, además, si dicha incorporación modifica en los alumnos ciertas actitudes con respecto a la materia. En este reporte se presentan las conclusiones a las que se ha arribado con respecto a la visualización

Palabras clave: Derivada – Visualización – Tecnología – GeoGebra

Abstract. This work is part of a Master's thesis in University Teaching in which a case study in the teaching and learning in a first course of Calculus is proposed. Students of Mechanical and Electronic Engineering at Facultad Regional San Nicolás from the Universidad Tecnológica Nacional of Argentina were involved in the study. The impact on learning of this subject with the incorporation of technology, for a proper visualization of the involved contents, is analyzed. For this purpose 24 interactive interfaces were design with GeoGebra, to be used in lectures relating to the unit "Derivative and applications". Possible changes in students' attitudes, regarding the subject, are also investigated. This report presents the conclusions regarding visualization that have been reached

Key words: Derivative - Visualization - Technology - GeoGebra

Introducción

Este trabajo forma parte de una tesis de Maestría en Docencia Universitaria en la que se ha propuesto realizar un estudio de caso inscripto en la enseñanza y el aprendizaje de Análisis Matemático I en dos especialidades de Ingeniería de la Facultad Regional San Nicolás. Se analiza si incide favorablemente en el aprendizaje de dicha asignatura la incorporación de la tecnología para una adecuada visualización de los contenidos involucrados. Se investiga, además, si dicha incorporación modifica en los alumnos ciertas actitudes con respecto a la materia.

Se ha elegido Análisis Matemático I, asignatura en la que se enseña el Cálculo de una variable, como espacio curricular objeto de la investigación porque, desde la práctica docente, se puede observar que a los alumnos que la cursan les resulta diferente a las matemáticas estudiadas hasta el momento, porque es dinámico: estudia el cambio y el movimiento; trata cantidades que se aproximan a otras cantidades. Esto hace que su enseñanza y su aprendizaje se dificulten si sólo se utilizan imágenes estáticas por mejores que éstas sean. Sin embargo, en las prácticas educativas de

esta asignatura pareciera notarse una discrepancia importante entre el potencial que tiene la tecnología informática para contribuir en el aprendizaje significativo, en la generación de actitudes positivas de los estudiantes y en la facilitación de aprendizajes activos, y la utilización que se hace de dicho recurso en las clases habituales.

Por el motivo antes expuesto, en esta tesis se propone una revisión de procedimientos de enseñanza utilizando recursos didácticos diferentes a los tradicionalmente vigentes. Específicamente, se trata de la realización de una experiencia en la segunda unidad didáctica de la materia correspondiente a "Derivada y aplicaciones". En el curso de Ingeniería Electrónica (grupo testigo) sus contenidos son desarrollados utilizando material didáctico interactivo de diseño propio, confeccionado con el software libre GeoGebra, disponible en español. En la especialidad Mecánica (grupo de control) se desarrollan estos contenidos en forma tradicional (sin uso de software).

En este trabajo se presentan parte de las conclusiones a las que se ha arribado.

Marco teórico

La concepción que orienta esta tesis con respecto a los procesos de enseñanza y de aprendizaje en general se apoya en la Teoría del Aprendizaje Significativo de Ausubel (1976, 2002), que entiende al aprendizaje como el proceso que se genera en la mente humana cuando subsume nuevas informaciones de manera no arbitraria y sustantiva. Requiere como condiciones la predisposición del alumno para aprender y que el material que se le presente sea potencialmente significativo. Esto implica significatividad lógica de dicho material y la presencia de ideas de anclaje en la estructura cognitiva del que aprende.

Según Duval (1999), el aprendizaje de la Matemática constituye un campo de estudio privilegiado para el análisis de actividades cognitivas fundamentales como la conceptualización, el razonamiento y la resolución de problemas. Su particularidad reside en que estas actividades requieren de sistemas de expresión y de representación, distintos a los del lenguaje natural, como el lenguaje simbólico y el gráfico. Sostiene que es esencial la utilización de estas formas de representación, que denomina sistemas de representación semiótica. Según el autor, para la comprensión de conceptos matemáticos no basta trabajar las actividades dentro de un solo registro, sino que se deben realizar también las tareas de conversión de uno a otro, pues éstas son las que propician la construcción de los conceptos matemáticos.

Con respecto al registro gráfico, trabajos como el de Zimmermann y Cunningham (1991), por ejemplo, llamaron la atención de la comunidad matemática sobre aspectos diversos de la utilización de diagramas visuales. Estos autores definen a la visualización en Matemática como el proceso

de formar imágenes mentales -con lápiz y papel, o con la ayuda de la tecnología- y usar esas imágenes efectivamente para el descubrimiento y entendimiento matemático.

Cantoral y Montiel (2003) definen a la visualización como la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y el lenguaje del que aprende.

Según Hitt (2003), uno de los problemas para el entendimiento de los conceptos del Cálculo es la falta de un acercamiento visual. En este sentido, Eisenberg y Dreyfus (1990, c.p. Hitt, 2003) manifiestan que, por lo general, se utilizan representaciones no visuales para comunicar ideas matemáticas. "Esta tendencia se fundamenta en la creencia de matemáticos, maestros y estudiantes que las matemáticas no son visuales" (p. 30).

Zimmermann (1990, c.p. Hitt, 2003) sostiene que conceptualmente, el papel del pensamiento visual es tan fundamental para el aprendizaje del Cálculo que es difícil imaginar un curso exitoso de cálculo que no enfatice los elementos visuales del tema.

Para Artigue (2003), las tecnologías informáticas, si se usan apropiadamente, juegan un papel crucial en la promoción de conexiones flexibles entre representaciones semióticas y ayudan a las representaciones gráficas a convertirse en herramientas efectivas del trabajo matemático. La investigación también muestra que el uso efectivo de las tecnologías informáticas en la Universidad requiere del desarrollo de un conocimiento matemático específico, que no es un requisito fácilmente aceptado por la institución educativa, cuyos valores han sido tradicionalmente definidos con respecto a entornos de lápiz y papel.

En la actualidad se dispone de un instrumento extraordinariamente potente, la computadora, cuya influencia sobre el quehacer matemático se va haciendo sentir en muchos aspectos y uno de ellos es la visualización.

Dávila Araiza (2010), quien realiza una propuesta metodológica para la enseñanza y el aprendizaje de problemas de optimización en un curso de Ingeniería expone las ventajas de trabajar con el software libre GeoGebra. En la unidad didáctica en la que se realiza la experiencia abundan las definiciones y teoremas que requieren de una representación dinámica para lograr una adecuada visualización. Por este motivo, para llevar adelante el trabajo de campo, se confeccionan pantallas dinámicas para enseñar los objetos que intervienen. Se pretende analizar si, con su presentación en el grupo testigo -usando como recurso didáctico la computadora, un cañón proyector y el software GeoGebra-, se pueden apreciar diferencias con respecto al grupo de control, tanto en ciertas actitudes como en el desempeño y la visualización de los conceptos por parte de los

estudiantes.

Metodología

Con respecto a la metodología, esta investigación se lleva adelante con un enfoque mixto, combinando, sin predominio de ninguno, de los dos tipos: cuantitativo y cualitativo. Es de alcance correlacional entre las variables y posee un diseño cuasi-experimental con pre-prueba, pos-prueba y grupo de control (Hernández Sampieri, Fernández Collado y Baptista Lucio, 2003).

Como material didáctico se utilizan 24 pantallas interactivas realizadas con el software libre GeoGebra. A modo de ejemplo, se presenta en la Figura 1 la confeccionada para favorecer la visualización de la aproximación que permite el polinomio de Taylor. Esta pantalla muestra la aproximación local por medio de un polinomio de Taylor para la función exponencial $y = e^x$ alrededor de $x = 1$. La representación gráfica de los polinomios de distintos grados se logra mediante un deslizador que simboliza el grado del polinomio y la expresión algebraica correspondiente se obtiene a través de un texto dinámico. En la figura se exhibe dicha aproximación para un polinomio de grado 2.

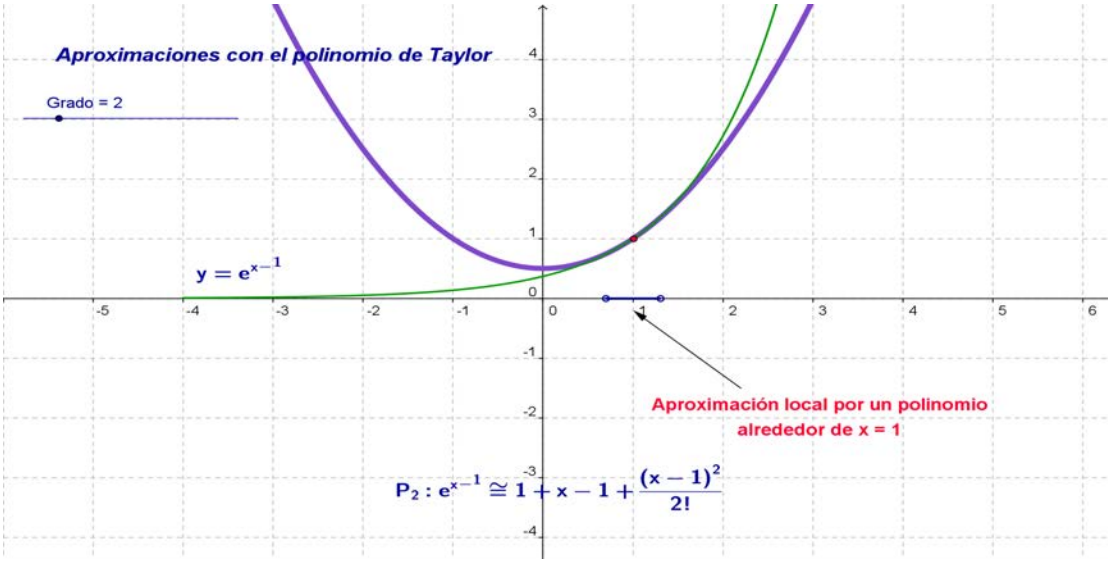


Figura 1. Aproximaciones con el polinomio de Taylor.

Para mostrar gráficamente las causas por las cuales una función continua en un punto puede no ser derivable en el mismo, se confecciona una ventana interactiva que se presenta en la Figura 2. En esta pantalla se muestra animadamente el caso de un punto anguloso con recta tangente vertical, otro que no admite recta tangente y un punto de inflexión con tangente vertical. Los tres casos se eligen mediante casillas de control que permiten seleccionar de a una por vez. La animación se logra mediante un deslizador que, en todos los casos, representa el incremento de la variable

tendiendo a cero por ambos lados.

Para mostrar la gráfica de la función derivada primera y segunda, luego de definir derivada de diversos órdenes, se prepara una pantalla interactiva que permite ver una función y cómo se van generando sus correspondientes funciones derivadas primera y segunda, que se seleccionan mediante dos casilleros de control según se quiera exponer una u otra. Al elegir el casillero correspondiente a la derivada primera, aparece en la pantalla la función y = f(x) y un deslizador que representa los distintos puntos x_0 de un intervalo. Al mover este deslizador, se dibuja la recta tangente en x_0, la función derivada primera hasta el x_0 y también se van marcando los intervalos donde la derivada es positiva, negativa o nula. Al seleccionar el casillero correspondiente a la derivada segunda, aparece nuevamente el deslizador que representa a los distintos puntos x_0 del intervalo. Al mover este deslizador, se produce la representación gráfica de la función derivada primera y segunda hasta el x_0 y además se van resaltando los intervalos en los que la derivada segunda es positiva, negativa o nula. En la Figura 3 se muestra esta opción para el valor final del deslizador.

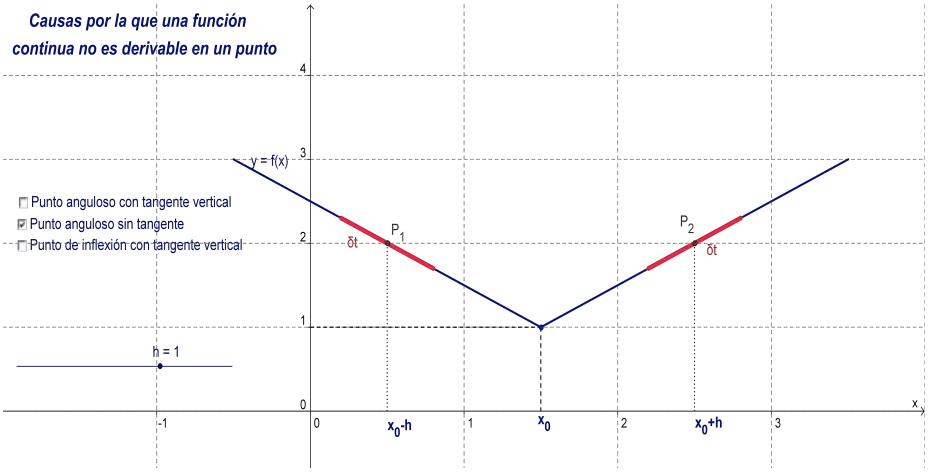


Figura 2. Causas por las que una función continua no es derivable en un punto.

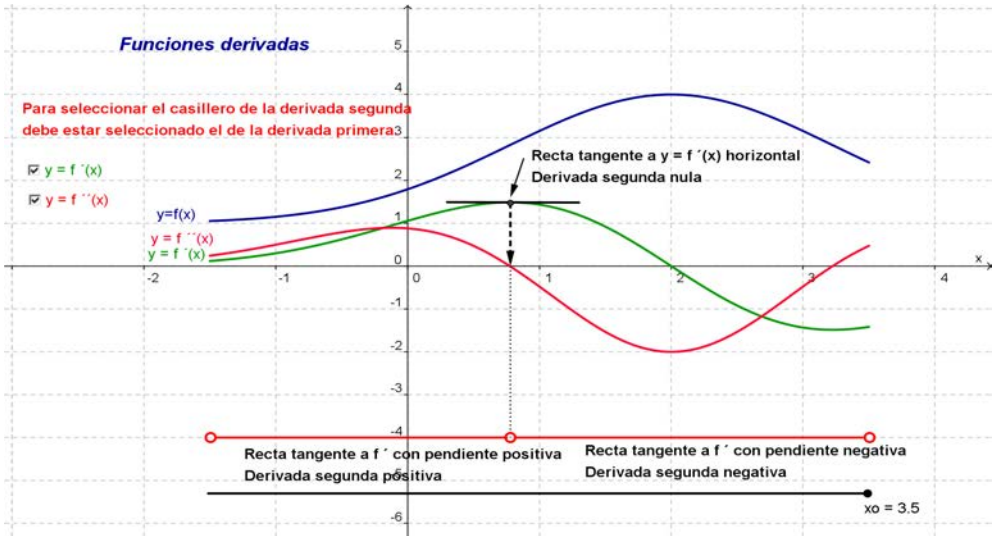


Figura 3. Funciones derivadas primera y segunda.

Los datos de los desempeños estudiantiles son recabados mediante dos parciales y dos trabajos prácticos. El primer parcial corresponde a la etapa de pre-prueba y el segundo a la de pos-prueba. En cuanto a los trabajos prácticos, uno se lleva a cabo durante el desarrollo de la experiencia y el otro al finalizar la misma. Éstos últimos constan de 10 ítems que involucran la visualización de los conceptos desarrollados. Se consideran aprobados los alumnos que responden correctamente a seis de los 10 ítems.

En el primer examen parcial, para las dos especialidades se consideran tres ítems relacionados -a través del registro gráfico- con la visualización de los conceptos de la unidad correspondiente a "Funciones, límite y continuidad". El segundo parcial consta de cuatro consignas que sirven para evaluar aspectos clásicos de operatoria y una quinta consigna con cinco ítems (idéntica para las dos especialidades) con los que se pretende indagar qué diferencias en el aprendizaje y desempeño de los alumnos de cada uno de los grupos en estudio se pueden identificar, fundamentalmente en lo referido a los procesos de visualización involucrados.

Resultados

Con respecto a los resultados obtenidos, en la etapa de pre-prueba se llega a la conclusión que el desempeño de los dos grupos es similar. Esto, entre otros indicadores, les da el atributo de grupos comparables entre sí.

Durante la experiencia se evalúa a los alumnos mediante el trabajo práctico N°3 que involucra la visualización de los conceptos de la primera parte de la unidad donde el tema central es el de derivada de una función en un punto, su interpretación geométrica y función derivada.

En la Tabla 1 se muestra, para las dos especialidades, una síntesis de la cantidad de alumnos

aprobados, desaprobados y ausentes así como los porcentajes respectivos. La cantidad de alumnos aprobados se subdivide según la cantidad de ítems (N) que responden correctamente.

Con los ítems del trabajo práctico N°4 se evalúan los contenidos que involucran la visualización de los conceptos de la segunda parte de la unidad didáctica donde el tema central es el de teoremas de Rolle, Lagrange y relación entre el signo de las derivadas sucesivas y la variación de las funciones. En la Tabla 2 se muestra, para las dos especialidades, una síntesis de la cantidad de estudiantes aprobados, desaprobados y ausentes, así como los porcentajes respectivos. La cantidad de alumnos aprobados se subdivide según la cantidad de ítems (N) que responden correctamente.

Tabla 1. Niveles de aprobación por parte de los estudiantes del trabajo práctico N°3 de la unidad didáctica de "Derivadas y aplicaciones"

		Ingeniería Electrónica		Ingeniería Mecánica	
	Cantidad de ítems	Cantidad de alumnos	Porcentaje respectivo	Cantidad de alumnos	Porcentaje respectivo
Aprobados	10 ≤ N ≤ 8	11	39,29%	8	21,63%
	7 ≤ N ≤ 6	9	32,14%	12	32,43%
Desaprobados		3	10,71%	16	43,24%
Ausentes		5	17,86%	1	2,70%
Totales		28	100%	37	100%

Tabla 2. Niveles de aprobación por parte de los estudiantes del trabajo práctico N°4 de la unidad didáctica "Derivadas y aplicaciones"

		Ingeniería Electrónica		Ingeniería Mecánica	
	Cantidad de ítems	Cantidad de alumnos	Porcentaje respectivo	Cantidad de alumnos	Porcentaje respectivo
Aprobados	10 ≤ N ≤ 8	12	42,85%	3	8,11%
	7 ≤ N ≤ 6	8	28,57%	5	13,51%
Desaprobados		4	14,29%	24	64,87%
Ausentes		4	14,29%	5	13,51%
Totales		28	100%	37	100%

En ambos trabajos prácticos se realiza además un análisis cualitativo de las respuestas de los alumnos que arroja diferencias notorias entre los dos grupos, en cuanto a la visualización de los distintos conceptos evaluados, a favor del grupo testigo.

En el examen parcial correspondiente a la etapa de pos-prueba se evalúan, mediante cuatro consignas, aspectos clásicos de operatoria de los contenidos de la unidad didáctica de "Derivada y aplicaciones". Además hay una quinta consigna con cinco ítems para evaluar la visualización de los distintos conceptos.

El desempeño de los alumnos en este parcial es similar en las dos especialidades, con una leve diferencia a favor de Electrónica. El 75% de los alumnos de Ingeniería Electrónica y el 70,26% de los estudiantes de Ingeniería Mecánica aprueban el segundo parcial. La diferencia a favor de la especialidad Electrónica se observa en el rango de notas entre 7 y 10 puntos, y no en el rango entre 4 y 7 puntos. Además se puede observar que hay una gran diferencia a favor de Ingeniería Electrónica en los porcentajes de alumnos que obtienen desempeños satisfactorios en los ítems relacionados con la visualización de los conceptos. De acuerdo con los porcentajes obtenidos, menos del 20% de los alumnos de Electrónica obtiene un puntaje no satisfactorio mientras que en la especialidad Mecánica este porcentaje supera el 50%.

Conclusiones

En todas las evaluaciones realizadas durante la experiencia y la pos-prueba referidas a la visualización, el desempeño de Electrónica (grupo testigo) es superior al de Mecánica (grupo de control). En cuanto a los trabajos prácticos, la mayoría de los estudiantes de esta última especialidad demuestra tener problemas en el reconocimiento de la gráfica de la derivada primera o segunda dada la gráfica de la función y en la visualización del concepto de punto crítico, del signo de la derivada primera según el crecimiento o decrecimiento y del signo de la derivada segunda según la concavidad o convexidad de la función.

Estos hallazgos reafirman la idea de Zimmermann y Cunningham (1991) sobre los beneficios de favorecer la visualización a fin de conseguir una mayor comprensión. También se condicen con Hitt (2003), quien sostiene que el desarrollo de habilidades ligadas a la visualización matemática favorece en los estudiantes una comprensión más amplia de los objetos del Cálculo. En cambio, la disminución en el desempeño de los alumnos de Mecánica puede deberse a la falta de un acercamiento visual adecuado.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (2003). ¿Qué se puede aprender de la investigación educativa en el nivel universitario? *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, *10*(2), 117-134. Recuperado el 15 de octubre de 2010 de http://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol10/artigue.pdf.

Ausubel, D.P. (1976). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas.

Ausubel, D.P. (2002). *Adquisición y retención del conocimiento. Una perspectiva cognitiva*. Barcelona: Paidós.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2003). Visualización y pensamiento matemático. *Acta Latinoamericana de*

Matemática Educativa, *16*(2), 694-701. Recuperado el 7 de mayo de 2011 de http://www.clame.org.mx/documentos/alme%2016_2.pdf.

Dávila Araiza, M. (2010). *La derivada a partir de problemas de optimización en ambientes dinámicos creados con GeoGebra.* Tesis de Maestría no publicada, Departamento de Matemáticas de la División de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Sonora. Hermosillo, México. Recuperado el 18 de noviembre de 2011 de https://docs.google.com/file/d/0B9mJWnHPjDPwMWEyMWMzYjQtN2FhNi00ZWIxLTljNWEtMGFmNTc1Y2RmZTM y/edit?hl=en&pli=1.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali: Universidad del Valle.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, P. (2003). *Metodología de la investigación* (3° ed.). México: Mc Graw Hill.

Hitt, F. (2003). *Dificultades en el aprendizaje del cálculo*. Décimo primer Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior. Morelia. Recuperado: 20/11/2011 de http://biblioteca.cinvestav.mx/indicadores/texto_completo/cinvestav/2005/133188_1.pdf.

Zimmerman, W. y Cunningham, S. (1991). Editors introduction: What is mathematical visualization? Visualization in Teaching and Learning Mathematics. En W. Zimmerman y S. Cunningham (Eds.). *Notes and Reports Series, 19*. Washington: The Mathematical Association of America.

SIGNIFICADOS DE POLINOMIOS Y SUS RAÍCES EN UN AMBIENTE DE EVALUACIÓN EN LÍNEA

Maximino Dórame Velásquez y Ana Guadalupe Del Castillo Bojórquez
Universidad de Sonora. México
mdorame@ciencias.uson.mx, acastillo@gauss.mat.uson.mx

Resumen. El propósito de este trabajo es presentar los avances de un proyecto de investigación cuyo objetivo es describir los *significados institucionales* y *personales* de polinomios y sus raíces en un curso de Álgebra del primer semestre de ingeniería, al utilizar el sistema Maple T.A. Para describir los significados institucionales y personales se llevó a cabo un *análisis de texto*, donde la información proviene de los reactivos en el ambiente Maple T.A., de las respuestas de los estudiantes registradas en dicho sistema y de los procesos asociados documentados en hojas de trabajo. El análisis está basado en el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática y se denomina *Análisis Ontológico-Semiótico*. Consideramos que la descripción, así como el contraste, de los significados institucionales y personales de polinomios, y la determinación de conflictos semióticos aportarán elementos para entender los procesos de enseñanza y aprendizaje de polinomios y raíces al usarse el sistema Maple T.A
Palabras clave: Raíz de polinomio, significados, Maple T.A.

Abstract. The aim of this paper is to present the progress of a research project which has by objective to describe the *institutional* and *personal meanings* of polynomials and their roots in an Algebra course of the first semester of engineering, using the system Maple T.A. In order to describe the institutional and personal meanings, a text analysis was held. The information comes from the questions in the Maple T.A. environment, the responses of students recorded in the system and associated processes documented in worksheets. The analysis is based on the Onto-semiotic Approach of Mathematical Cognition and Instruction and it is called Ontological Semiotic Analysis. We consider both the description and the contrast between the institutional and personal meanings of polynomials, and determination of semiotic conflicts as well, provide elements to understand the teaching and learning of polynomials and roots at the Maple T.A. system
Key words: Polynomial root, Meanings, Maple T.A.

Introducción

Desde el año 2006, en la Universidad de Sonora se han estado implementando tareas y exámenes en línea (Del Castillo, Flores, 2012) para los cursos de Álgebra de primer semestre de los programas de ingeniería utilizando el sistema Maple T.A. (MapleSoft, 2013). El propósito de este trabajo es presentar los avances de un proyecto de investigación cuyo objetivo es describir los *significados institucionales* y *personales* (Godino, Batanero, 1994) sobre el tema de polinomios y sus raíces que se ponen en juego al utilizar el mencionado sistema. El trabajo se ha estructurado de la siguiente manera: se presenta el problema de investigación y su justificación, los elementos del marco teórico en los que se sustenta el trabajo, la metodología de investigación implementada para cumplir con el objetivo, y se finaliza con algunos análisis y resultados.

Problema de Investigación

Una gran cantidad de alumnos de primer semestre de ingeniería de la Universidad de Sonora, presentan notables deficiencias en el aprendizaje de ecuaciones polinomiales. El tiempo establecido para cubrir este tema en los planes y programas de estudio es reducido. Por tal motivo algunos

profesores están implementando tareas y exámenes a través del sistema Maple T.A. para promover el trabajo extraclase y la retroalimentación inmediata del mismo. Estas tareas y exámenes en línea se han estado implementando por varios años. Dado que los estudiantes registran en el sistema sólo las respuestas a las situaciones que se les presentan, se hace necesaria una investigación bien fundamentada que caracterice las prácticas y procesos llevados a cabo por los estudiantes en ese ambiente. Así, el presente trabajo tiene como objetivo caracterizar los significados institucionales y personales de polinomios y sus raíces. La investigación se lleva a cabo en un curso de Álgebra del primer semestre de ingeniería que utiliza sistemáticamente el software mencionado. Una investigación semejante se llevó a cabo considerando el tema de números complejos (Ibarra, Del Castillo, 2012). Consideramos que, tanto la descripción, así como el contraste, entre los significados institucionales y personales de polinomios y sus raíces, y la determinación de conflictos semióticos, aportarán elementos para entender los procesos de enseñanza y aprendizaje asociados al usarse dicho sistema.

Elementos Teóricos

Para este trabajo se consideran, como fundamentación teórica, algunos elementos del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (Godino, J. D., 2002). Entre los elementos a considerar, podemos mencionar los sistemas de prácticas, los objetos matemáticos personales e institucionales, sus significados sistémicos, los elementos básicos del significado y las relaciones que se establecen entre ellos (funciones semióticas y conflictos semióticos).

En este enfoque teórico (referido como EOS) se considera *práctica matemática* a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas. Asimismo, se declara que el significado de un objeto matemático es el sistema de prácticas que manifiesta una institución o un individuo sobre dicho objeto matemático, calificándose como institucional o personal (Godino, Batanero, 1994), respectivamente. Tanto el *significado institucional* como el *significado personal* tienen una tipología. El significado institucional puede ser de *referencia*, *pretendido*, *implementado* o *evaluado*; el significado personal puede ser *global*, *declarado* o *logrado*. Asimismo, los elementos básicos del significado son: *Situaciones-problema, Lenguaje, Conceptos-definición, Procedimientos, Proposiciones* y *Argumentos,* conocidos también como objetos matemáticos primarios. Todos estos elementos son herramientas útiles para caracterizar el conocimiento de los estudiantes y contrastarlo con lo que institucionalmente se pretende.

Metodología de Investigación

Con el propósito de cumplir con el objetivo planteado en esta investigación, se implementa una

técnica analítica, basada en el EOS, que nos permite determinar o caracterizar dichos significados. Ésta consiste en realizar un análisis sistemático de los objetos matemáticos y funciones semióticas que se ponen en juego en un segmento de actividad matemática; dicho análisis es llamado *análisis ontológico-semiótico* y se realiza siguiendo varias fases o etapas.

En una primera fase se determina el significado institucional de referencia. Para tal efecto, se identifican los objetos matemáticos y el sistema de prácticas que se promueven en el programa oficial de la asignatura, así como en textos referidos por profesores que imparten la materia. Posteriormente, en una segunda fase, se describe el significado institucional pretendido y el significado institucional implementado, mediante el uso del software Maple T.A. Para ello se determinan los objetos matemáticos y los sistemas de prácticas que se promueven utilizando el sistema Maple T.A. En este caso, para llevar a cabo el análisis semiótico se toma cada tarea del sistema como una unidad de análisis. La tercera etapa consiste en describir el significado institucional evaluado, lo que se logra mediante la determinación de los objetos matemáticos y los sistemas de prácticas que se consideraron pertinentes para ser incluidos en la evaluación en línea. Cada reactivo incluido en el examen se considera una unidad de análisis. En la última etapa se describen los significados personales declarado y logrado, así como conflictos semióticos, por lo que se analiza la actividad realizada por estudiantes de dos grupos distintos de Álgebra, tanto en el sistema Maple T.A. como en hojas de trabajo: se realiza un estudio de casos documentando el trabajo de tres alumnos representativos de cada grupo, haciendo una selección estratificada en términos de su desempeño.

En las secciones posteriores, se presentan algunos análisis y resultados, siguiendo el orden de las etapas de la metodología de investigación planteada.

Significado Institucional de Referencia

Situaciones-problemas: Se identifican aquellas que giran en torno a la descripción y determinación de raíces de polinomios de grado *n* en una variable, tales como evaluación, división y factorización de polinomios; articulación de representaciones gráficas y algebraicas; determinación de relaciones entre coeficientes y raíces de polinomios; estimación de raíces irracionales. Todas las situaciones son de carácter intra matemático.

Lenguaje: Comprenden las representaciones de polinomios y sus raíces en forma algebraica, gráfica, numérica y en menor medida tabular. La representación algebraica es la que se presenta en mayor medida y, una de las prácticas principales consiste en articular la representación algebraica y gráfica de un polinomio, haciendo énfasis en la noción de raíz.

Conceptos-definiciones: Polinomio, raíces de polinomios, números complejos, multiplicidad de raíces, grado de un polinomio.

Proposiciones: Teorema del algoritmo de la división, Teorema del residuo, teorema de la raíz y del factor, teorema de las raíces racionales, teorema de las raíces conjugadas, Teorema Fundamental del Álgebra.

Argumentaciones: Pruebas de las proposiciones. Asimismo, estas proposiciones son útiles para avalar los procedimientos que sirven para la determinación y clasificación de las raíces de polinomios.

Procedimientos: División de polinomios, evaluación de polinomios, factorización de polinomios, construcción de polinomios y ecuaciones polinomiales, articulación entre la representación gráfica y la algebraica de un polinomio, método de bisección para aproximar raíces irracionales.

La práctica *procedimientos* es la que más se promueve, por lo que se puede afirmar que el *significado institucional de referencia* de polinomios y sus raíces tiene una fuerte carga de la práctica procedimental.

Significado Institucional Pretendido e Implementado

Para determinar el significado institucional pretendido, se analizan las tareas diseñadas mediante el software Maple T.A. Una vez que las tareas se han realizado por los estudiantes y, éstas pasan a ser una fuente para la determinación del significado institucional implementado. El sistema cuenta con nueve tareas, cada una con un número variado de reactivos. Enseguida se presenta un resumen del significado institucional pretendido.

Situaciones-problemas: giran en torno a la determinación y clasificación de raíces de polinomios de grado *n* en una variable, tanto en forma algebraica como en la gráfica. Algunas de ellas son: evaluación, división y factorización de polinomios; articulación de las representaciones gráficas y algebraicas de polinomios; determinación de relaciones entre coeficientes y raíces de polinomios, entre otras situaciones, todas de carácter intra matemático.

Lenguaje: verbal, algebraico, gráfico y numérico. Una de las representaciones simbólicas importantes promovidas a través de este sistema es la sintaxis propia del software.

Conceptos-definiciones: Se promueven y se utilizan los que son necesarios para la determinación y clasificación de las raíces de polinomios: polinomio, raíz, grado de un polinomio, multiplicidad de una raíz, raíz compleja, raíz compleja conjugada, raíz racional, factor lineal de un polinomio, entre otras.

P*roposiciones*: se promueven o son necesarias las que giran en torno a la determinación y clasificación de raíces de polinomios. Tales como: Teorema Fundamental del Álgebra, teorema de factor, teorema del residuo, teorema del factor y de la raíz, entre otros.

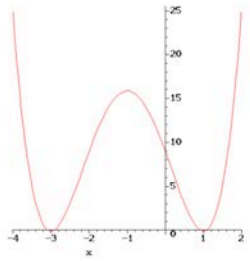
P*rocedimientos*: División de polinomios, evaluación de polinomios, factorización de polinomios, construcción de polinomios y ecuaciones polinomiales, articulación entre la representación gráfica y la algebraica de un polinomio. El método de bisección no se incluye en las tareas diseñadas con el software, por dificultades en su automatización.

Argumentación: No es explícita a través del software, debido a que no resulta práctica su automatización en el sistema.

Significado Institucional Evaluado

El examen implementado a través del Maple T.A. se forma con la mayoría de los reactivos que han sido incluidos en las tareas, por lo tanto, la mayoría de las prácticas que se promueven en las tareas forman parte del significado institucional evaluado. A continuación se muestra el análisis de uno de los reactivos tomado de un examen.

Seleccione la expresión algebraica que corresponde al polinomio representado en la siguiente gráfica



- $(x+3)^2(x-1)^2$
- $(x+3)^2(x-1)$
- $-(x+3)^2(x-1)^2$
- $(x+3)^3(x-1)^2$
- $-(x+3)^3(x-1)^2$
- No se

Situaciones y prácticas matemáticas

Situaciones:

- Seleccionar la expresión algebraica que corresponde al polinomio representado gráficamente.
- Determinar el grado del polinomio dado.

Prácticas matemáticas

- Identificación de raíces y sus multiplicidades de un polinomio dado algebraicamente.
- Identificación de raíces y sus multiplicidades de un polinomio representado gráficamente.
- Articulación entre la forma gráfica y algebraica de un polinomio.

Elementos básicos del significado

- Situaciones problemas: seleccionar la expresión algebraica que corresponde al polinomio representado gráficamente y determinar su grado.
- Lenguaje: verbal, algebraico y gráfico.
- Conceptos: polinomio, gráfica y grado de un polinomio, raíz, raíces múltiples, factores.
- Procedimiento: articulación entre la expresión gráfica de un polinomio y su representación algebraica y, suma de las multiplicidades de las raíces del polinomio dado algebraicamente, suma de los exponentes de los factores lineales.
- Proposiciones: el teorema que ayuda a discriminar entre una raíz de grado par o una impar en la representación gráfica, el teorema que describe la forma de la gráfica de un polinomio de grado par y de uno impar.

Funciones semióticas

FS1: Asociar las intersecciones que se dan entre la gráfica y el eje *x,* con las raíces del polinomio.

FS2: Asociar la forma de las intersecciones entre la gráfica y el eje *x*, con la multiplicidad de las raíces.

FS3: Asociar al polinomio representado por la gráfica, el grado que le corresponde.

FS4: Asociar a la expresión $(x+3)^2(x-1)^2$ con las raíces -3 y 1.

FS5: Relacionar los exponentes en la expresión algebraica $(x+3)^2(x-1)^2$ con la multiplicidad de sus raíces.

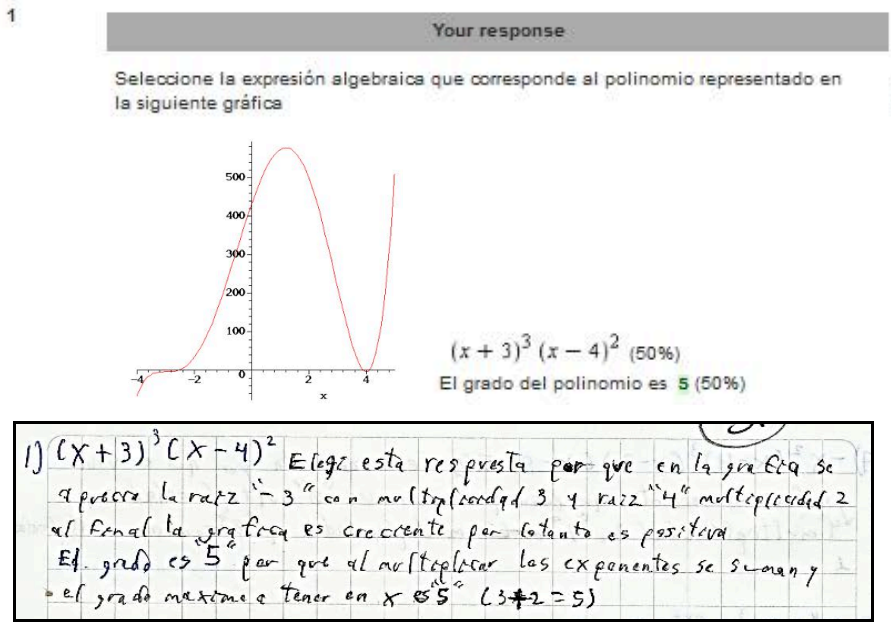
FS6: Asociar el grado del polinomio representado por $(x+3)^2(x-1)^2$ con la suma de sus exponentes (Asociar el grado del polinomio representado por $(x+3)^2(x-1)^2$ con la suma de las multiplicidades de sus raíces).

FS7: Asociar la gráfica dada con la expresión $(x+3)^2(x-1)^2$.

Significados Personales

Se realizó el análisis de la actividad reportada por seis estudiantes provenientes de dos grupos distintos (tres de cada grupo). Por cuestiones de espacio, a continuación se muestra el análisis de un reactivo del estudiante Caso 1, y se muestra el resumen del significado personal identificado de dicho caso.

Caso 1: Reactivo 1 (unidad de análisis U_1).



Situaciones:

- Seleccionar la expresión algebraica que corresponde al polinomio representado gráficamente.
- Determinar el grado del polinomio dado.

Prácticas matemáticas:

- Determina las raíces del polinomio representado gráficamente y sus correspondientes multiplicidades.
- Analiza la forma de la gráfica para escoger una de dos expresiones de signo contrario.
- Selecciona correctamente la expresión algebraica que corresponde al polinomio representado por la gráfica dada y justifica dicha selección.
- Determina correctamente el grado del polinomio y lo justifica.

Objetos matemáticos:

- Lenguaje: Verbal, algebraico y numérico.
- Conceptos: Polinomio, grado de polinomio, raíz de polinomio, multiplicidad de raíz de polinomio y gráfica creciente.
- Procedimiento: Articulación entre la forma gráfica y algebraica del polinomio, y suma de los exponentes de los factores con el fin de obtener el grado del polinomio.

- Argumentación: Argumenta la elección de la representación algebraica y el grado del polinomio.

Funciones semióticas:

FSE1: Asocia las intersecciones de la gráfica con el eje *x* con el concepto de raíz de polinomio.

FSE2: Asocia la forma de la intersección de la gráfica con el eje *x* con el concepto de multiplicidad de raíz de polinomio.

FSE3: Asocia la elección de una de dos expresiones algebraicas de signo contrario con el trazo final de la gráfica dada.

FSE4: Asocia la suma de los exponentes de los factores lineales de la expresión algebraica con el grado del polinomio.

Significado Personal Logrado

Determina las raíces y sus correspondientes multiplicidades del polinomio dado gráficamente. Articula las expresiones gráfica y algebraica de un polinomio, y determina el grado de dicho polinomio considerando su expresión algebraica.

Conflicto semiótico:

Se presenta un conflicto semiótico cuando el estudiante, en su discurso, califica una gráfica como "positiva", sin aclarar qué objeto debe recibir este calificativo. Este conflicto semiótico no fue detectado por el sistema, ya que el estudiante registró en el sistema respuestas correctas.

Resumen del significado personal:

Del análisis de todos los reactivos del examen correspondiente se puede afirmar lo siguiente: El estudiante es capaz de determinar las raíces y sus correspondientes multiplicidades de polinomios representados de forma gráfica o algebraica, así como articular dichas representaciones. Factoriza expresiones polinomiales cuadráticas, y de mayor grado dada una de sus raíces. Aunque, no tiene éxito cuando se le solicita directamente encontrar las raíces exactas de una ecuación de segundo grado. Conoce las relaciones entre las raíces de $p(x)$, $-p(x)$ y $p(-x)$ y las utiliza para determinar las raíces de $-p(x)$ y $p(-x)$, dadas las de $p(x)$. También, conoce y usa las relaciones entre las raíces y los coeficientes de un polinomio dadas por las Fórmulas de Vieta, con la excepción de las establecidas entre los coeficientes y la suma de las raíces de polinomios no mónicos.

Se identifican algunas inconsistencias entre los significados declarados del estudiante, debido a que, determina con éxito las raíces de un polinomio de segundo grado con el fin de determinar las

raíces de un polinomio de grado mayor a dos, pero cuando se le presenta la tarea que consiste únicamente en resolver ecuaciones de segundo grado no lo logra.

Consideraciones finales

De los análisis llevados a cabo se puede afirmar que las prácticas matemáticas que forman el significado institucional evaluado son un subconjunto de las prácticas que forman los significados pretendido e implementado, y éstos a su vez, son un subconjunto de las que forman el significado institucional de referencia. Las diferencias entre estos conjuntos, en este caso, se deben a las dificultades en el proceso de automatización en el sistema Maple T.A. En cuanto a la determinación de los significados personales, se vuelve acertada la decisión de solicitar y analizar la actividad de los estudiantes en las hojas de trabajo. A través de las hojas de trabajo fue posible detectar conflictos semióticos que no fueron detectados en las respuestas registradas en el sistema.

Referencias

Del Castillo, A. G., Flores, B. E. (2012). Evaluación y Autoevaluación en Línea con Maple T.A.: Un Estudio con Números Complejos. En Ulloa, R. (Ed.), *Colección Uso de Tecnología en Educación Matemática. Investigaciones y Propuestas 2012* (pp. 170-183). México: AMIUTEM, A.C.

Godino, J., Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol. 14, No. 3. pp. 325-355.

Godino, J. D. (2002). Un Enfoque Ontológico y Semiótico de la Cognición Matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22 (2-3), 237-284.

Ibarra, S., Del Castillo, A. (2012). Significados Personales Logrados y Evaluados de Estudiantes de Álgebra en el Ambiente Maple T.A. En Ulloa, R. (Ed.), *Colección Uso de Tecnología en Educación Matemática. Investigaciones y Propuestas 2012* (pp. 161-169). México: AMIUTEM, A.C.

MapleSoft (2013) Maple T.A. (Software) Disponible en: http://www.maplesoft.com/products/mapleta/

USO DE RECURSOS TECNOLÓGICOS EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA

Agustín Carrillo, Liliana Milevicich, Eugenio Rodriguez y Agustín de la Villa
Universidad Tecnológica Nacional — Argentina
Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría — Cuba
Universidad de Córdoba — España
Universidad Pontificia Comillas. Escuela Técnica Superior de Ingeniería ICAI
agustincarrillo@acta.es, liliana_milevicich@yahoo.com.ar, ecarlos@tesla.cujae.edu.cu, avilla@dmc.icai.upcomillas.es

Resumen. Se pretende analizar la importancia del uso de recursos tecnológicos en cuanto a su potencialidad de favorecer la transformación de los sistemas educativos, esto es: las herramientas tecnológicas como componente decisivo para el cambio educativo y para el desarrollo de nuevos roles tanto para los alumnos como para los profesores.
En primer lugar, se analiza lo que ha supuesto la incorporación de las TICs a las escuelas a través de proyectos y su evolución hasta la actualidad. En segundo lugar, se presenta una investigación sobre uso de las tecnologías en el proceso de enseñanza aprendizaje y la capacidad de enfrentarse a ideas matemáticas en ambientes más realistas. Finamente, se examina las prestaciones de los Sistemas Algebraicos Computacionales, los gestores de contenido y su incidencia en la enseñanza de la Matemática.
Palabras clave: Recursos tecnológicos – Incorporación de TIC – Sistemas Algebraicos Computacionales
Abstract. Our purpose is to analyze the importance of the use of technological resources regarding their potential to promote the transformation of education systems, ie: technological tools as a critical component for educational change and the development of new roles for, both, students and for the teachers.
Prof. Carrillo analyzes what has led to the incorporation of ICT in schools through projects and its evolution to the present. Dr. Rodriguez presents research on use of technology in the teaching-learning process and the ability to deal with mathematical ideas in more realistic environments. Dr. de la Villa makes a review on the performance of Computational Algebraic Systems, content management systems and their impact on the teaching of mathematics
Key words: Technology Resources - Embedding ICT - Computer Algebraic Systems

Introducción

Las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC) se utilizan cada vez más para facilitar la presentación de información, simular un fenómeno o proceso, desarrollar un determinado tema, profundizar un contenido o evaluar al estudiante. Particularmente, en la enseñanza de la Matemática, ha resultado decisiva la incorporación de diferentes herramientas computacionales como elementos de visualización y facilitadores en los procesos de cálculo.

Sustentado en las presentaciones realizadas en la mesa redonda denominada *Uso de recursos tecnológicos en el proceso de aprendizaje de la Matemática,* pretendemos analizar la importancia del uso de tales recursos tecnológicos en cuanto a su potencialidad de favorecer la transformación de los sistemas educativos, esto es: las herramientas tecnológicas como componente decisivo para el cambio educativo y para el desarrollo de nuevos roles tanto para los alumnos como para los profesores.

Desarrollo

En primer lugar, el Profesor Carrillo analiza lo que ha supuesto la incorporación de las TICs a las escuelas a través de proyectos y su evolución hasta la actualidad.

A pesar de todos los esfuerzos institucionales que se están realizando para la incorporación de las TICs a los ámbitos educativos a través de distintos planes como ocurre en España con los proyectos Escuela 2.0, cuyos orígenes se remontan a 2002, o en los distintos países de Ibero América, por los que se están distribuyendo computadores entre el alumnado y también entre el profesorado con el gasto que supone, los resultados no están siendo todo lo bueno que era de esperar ante las expectativas que en todo momento ha despertado la incorporación de estos recursos.

A pesar del interés del profesorado y de contar con la motivación del alumnado la integración real de las TICs y el aprovechamiento de todas las posibilidades que ofrecen no se está consiguiendo o está siendo demasiado lento y pueden quedar frenados, como ocurrirá en España, por la situación de crisis económica por la que se ha suspendido la entrega de computadores a alumnos y profesores.

El computador con el que llevamos compartiendo horas de trabajo en la casa, no le dedicamos la atención que requiere en el aula, lo que supone no aprovechar las posibilidades que ofrece para alcanzar una mejora en los procesos de enseñanza y aprendizaje de nuestros alumnos.

En general, todo está a favor del cambio para incorporar las TICs al mundo educativo para rentabilizar el esfuerzo económico, de manera que sea posible mejorar la escuela con nuevos recursos, acordes con la época actual, aunque como docentes debemos reconocer que cualquier cambio nos cuesta y por tanto se produce lentamente.

Si no queremos una escuela anticuada y estática, será necesario incorporar nuevos métodos y procesos, así como nuevos recursos entre los que se encuentran las TICs, sobre todo una vez que las escuelas cuentan con material suficiente para facilitar el acceso del alumnado a los computadores y en la mayoría de los casos, también a Internet.

Siempre es conveniente recordar alguna referencia sobre la importancia que los expertos en didáctica conceden a las TICs, como ocurre al leer los *Principios y estándares para la educación matemática* (Nacional Council of Teachers of Mathematics, 1991), que entre los seis principios para las matemáticas escolares que proponen, encontramos el *Principio de la tecnología* que considera la tecnología fundamental en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y que influye en las matemáticas que se enseñan y enriquece su aprendizaje, indicando que *la existencia,*

versatilidad y potencia de la tecnología hacen posible y necesario reexaminar qué matemáticas deberían aprender los alumnos, además de cómo aprenderlas mejor.

Por tanto, queda claro que si las TICs no constituyen un recurso más en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, sobre todo en los centros que cuentan con recursos suficientes, las razones tenemos que buscarlas en nosotros mismos, en el propio profesorado y en el tiempo y esfuerzo que nos cuesta afrontar cualquier cambio.

A pesar de las continuas referencias que podemos encontrar en los Diseños curriculares de los distintos países sobre el uso de las TICs o con recomendaciones para promover su incorporación en el aula, algo está ocurriendo para que la convivencia entre TIC y educación no sea del todo llevadera. Demasiadas son las razones que impiden la utilización y por supuesto, la generalización de las TICs en el aula, aunque en este caso, cada vez son menos las de índole material.

Como razones podemos citar dos que consideramos quizás las más importantes: la excesiva dependencia del libro de texto y la formación del profesorado sobre todo en cuestiones didácticas que faciliten el uso de las TICs como recursos para favorecer el aprendizaje del alumnado.

La excesiva dependencia del libro de texto no favorece el cambio de metodología necesaria para incorporar las TICs, por lo que a pesar de los cambios en el currículum y en las ediciones de nuevos libros, el profesorado sigue manteniendo una enseñanza y una metodología tradicional por lo que resulta difícil incorporar nuevos elementos o cambiar determinados aspectos en el trabajo del día a día.

En cuanto a la formación del profesorado no basta con la formación técnica imprescindible para que domine un nuevo recurso o software, es necesaria una formación didáctica que favorezca su utilización y sobre todo que proporcione ideas para permitir que el alumnado aprenda con los nuevos recursos.

Quizás no estemos convencidos de las ventajas que aportan a la enseñanza, quizás a pesar de la variada oferta de formación aún consideramos que necesitamos más cursos o a lo mejor es que nos cuesta demasiado afrontar cualquier cambio en las tareas que día a día realizamos. Si creemos en la tecnología y la usamos a diario para otras tareas, no cabe más que perder el miedo para llevarla también al aula.

En segundo lugar, el Dr. Rodríguez presenta una investigación sobre uso de las tecnologías en el proceso de enseñanza aprendizaje y la capacidad de enfrentarse a ideas matemáticas en ambientes más realistas.

Introducción

La propuesta que se presenta es parte del Proyecto de Investigación: "El currículo de Matemática con tecnología en carreras de Ingeniería". En este proyecto se plantean las ventajas que tiene el uso de las tecnologías en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática, fundamentalmente las relacionadas con el incremento en los estudiantes de la calidad de sus investigaciones matemáticas y la capacidad de enfrentarse a ideas matemáticas en ambientes más realistas. Estos resultados no siempre se alcanzan. Entre los obstáculos que impiden el logro de estos propósitos está el diseño de los currículos de Matemática, que no siempre poseen la coherencia necesaria para lograr desarrollar habilidades en el uso de las potencialidades que brindan las tecnologías.

Diagnóstico del estado en que se encuentra el uso de asistentes matemáticos en la enseñanza del tema "Derivadas y sus aplicaciones"

En el análisis del currículo de Matemática en la carrera de Ingeniería Industrial de la Cujae, específicamente para la asignatura Matemática I, se encuentra que,

- En la concepción del Programa de la asignatura no se declara explícitamente el uso de asistentes matemáticos en el tema, por lo que su empleo queda a la espontaneidad de los profesores.
- No existen orientaciones metodológicas en el Programa de la asignatura acerca de cómo emplear en las clases los asistentes matemáticos en el tema, que sirva de guía a los profesores que no están capacitados en el uso de estas herramientas.
- El número de clases en los laboratorios es muy reducido, por lo que no permite que los estudiantes desarrollen las habilidades necesarias para la realización de los ejercicios, no pueden aprovecharse las potencialidades de los asistentes matemáticos.
- No se conciben formas de evaluación de la asignatura con el uso de asistentes matemáticos, lo que desmotiva a los estudiantes a su utilización.

En el Programa de la signatura se plantea el objetivo educativo siguiente: Contribuir a la formación computacional de los estudiantes mediante el uso de asistentes matemáticos y técnicas de computación.

Y se plantea un Sistema de Habilidades donde no se menciona el uso de asistentes matemáticos lo que constata que no existe correspondencia entre lo planteado en uno de los objetivos educativos, referido a la formación computacional de los estudiantes mediante el uso de asistentes matemáticos y técnicas de computación, y las habilidades básicas a dominar, ya que para el logro

de estas habilidades, el uso que se hace de los asistentes matemáticos en el tema, es insuficiente.

En el diagnóstico se realizaron encuestas a estudiantes y profesores.

En las encuestas a los estudiantes resultó que el 53 % de los encuestados utilizan el asistente matemático sólo para graficar funciones, el 51 % para realizar cálculos engorrosos, el 15 % para realizar interpretaciones geométricas. Y el 92 % de los manifestó que en la evaluación de la asignatura no fue empleado ningún asistente matemático.

En las encuestas a los profesores el 100 % refiere que no existen orientaciones metodológicas acerca del empleo de los asistentes matemáticos en las clases, ni sobre las habilidades a desarrollar por parte de los estudiantes al utilizar los asistentes matemáticos en las clases. No existen orientaciones en el programa relacionadas con el empleo de los asistentes matemáticos en el proceso de evaluación de la asignatura. Y por último que sólo utilizan los asistentes matemáticos para graficar funciones y para realizar cálculos engorrosos.

La propuesta

A partir del análisis anterior se elaboró una propuesta que incluye el Sistema de Habilidades siguiente:

- Caracterizar e interpretar los conceptos de derivada y derivada lateral de una función en un punto y aplicarlos en la solución de problemas, utilizando un asistente matemático.
- Interpretar geométricamente y físicamente la derivada de una función en un punto utilizando un asistente matemático.
- Calcular derivadas de primer orden, de orden superior y diferenciales de funciones sencillas, aplicando las reglas de derivación y las definiciones cuando sea necesario y calcular estas derivadas, utilizando un asistente matemático, en el caso de funciones más complejas.
- Obtener la aproximación lineal o aproximación por la recta tangente de la función cuando x está cerca del punto de tangencia y visualizar la aproximación utilizando un asistente matemático.
- A partir del gráfico de una función de una variable real analizar su comportamiento analizando su dominio, hallando los interceptos con los ejes coordenados, la monotonía, la existencia o no de extremos, puntos de inflexión y asíntotas, así como el análisis de la concavidad con la ayuda de un asistente matemático.

El Sistema de Evaluación propuesto incluye la realización de evaluaciones parciales y finales utilizando la computadora.

Por último se elaboró un conjunto de indicaciones metodológicas para los profesores, tanto para Conferencias como para Clases Prácticas y Clases Prácticas en Laboratorios, que orienta indicaciones precisas de cómo presentar el tema de la clase y cada aspecto particular, se sugieren ejercicios y ejemplos del libro de texto, cómo utilizar el asistente matemático para lograr mejores resultados en el aprendizaje.

Consideraciones finales

1. La propuesta debe contribuir al desarrollo de habilidades para aprovechar las potencialidades de la utilización de la tecnología, logrando en los estudiantes modos de actividad mental superiores, la posibilidad de enfrentarse a ideas matemáticas en ambientes más realistas, y poder alcanzar categorías de aprendizaje de orden superior, tales como reflexión, razonamiento, planteamiento de problemas, solución de problemas y toma de decisiones.
2. Se debe, además, diseñar los materiales didácticos que complementen los sistemas de objetivos, conocimientos y habilidades diseñados.
3. Así como, diseñar un sistema de acciones de capacitación para profesores de Matemática que los prepare en el uso de esta herramientas tecnológica.

En tercer lugar, el Dr. de la Villa examina las prestaciones de los Sistemas Algebraicos Computacionales, los gestores de contenido y su incidencia en la enseñanza de la Matemática.

La irrupción de las TICs en al enseñanza, al menos en la universitaria, está suponiendo una revolución, a la que se deben adecuar paulatinamente profesores y alumnos.

Dentro de las múltiples perspectivas del uso de las TICs me detendré en dos aspectos:

El uso de los paquetes de Cálculo simbólico (CAS) y las plataformas gestoras de contenidos.

El uso de los CAS

La historia del uso de los CAS desde el punto de vista docente puede restringirse a los últimos 25 años.

Podemos situar al final de la década de los 80 la introducción de los CAS como una herramienta docente.

En sus inicios era una herramienta fundamentalmente de cálculo aunque las prestaciones de los CAS pueden clasificarse principalmente en numéricas, simbólicas y gráficas.

La evolución de los CAS ha ido unida a las capacidades de los ordenadores: interfaz cada vez más amigable, mayor potencia de cálculo y mayores prestaciones de carácter gráfico

fundamentalmente.

Por ello el uso de los CAS ha ido en aumento a lo largo de estos años y hoy en día no es concebible una asignatura de matemáticas en una Escuela de Ingeniería sin que tenga un Laboratorio de Matemáticas (una serie de prácticas realizadas con un CAS) o bien que un CAS esté integrado en la docencia al mismo nivel que otros instrumentos de enseñanza.

Por otra parte a lo largo de estos años es necesario recalcar que la enseñanza de las matemáticas usando un CAS se puede y debe abordar con otra metodología docente. En pocas palabras se debería insistir en los conceptos y una vez entendidos permitir el uso del CAS para realizar cálculos, simulaciones, experimentar, etc.

Después de la primera fase de uso de los CAS aparece una primera reflexión sobre posibilidades, ventajas tales como liberar del trabajo rutinario y de cálculo, posibilidad de visualización, implementación de algoritmos y el modelado de problemas físicos, económicos, técnicos o simplemente de la vida real, posibilidades de simulación y fomento del espíritu crítico e inconvenientes, tales como la percepción de que los CAS son cajas negras y que apretar una tecla sea la solución de nuestro problema, la posible pérdida de habilidad y destreza y la falta de sentido crítico por la fe ciega que el estudiante tiene en el ordenador.

Citamos unas referencias de nuestra experiencia en el uso de los CAS. En Alonso et al., (2001) se analizan resultados inesperados que pueden hacer reflexionar al alumno sobre el uso indiscriminado de los CAS. En García, García, Hoya, Rodríguez y Villa (2002) y García, García, Rodríguez y Villa (2004) proponemos un curso de Cálculo en varias variables y de Ecuaciones diferenciales usando diferentes CAS. En Rodríguez y Villa (2005) enunciamos posibilidades sobre nuevas estrategias de aprendizaje usando CAS. En García, García, Rodríguez y Villa (2009) introducimos la teoría de la caja de herramientas para ser diseñada por cada alumno y en García, García, Rodríguez y Villa (2011a) sacamos en conclusión que el cambio de software no es esencial siempre que la estrategia docente sea la misma. En García, García, Rodríguez y Villa (2011b) y Díaz, García, y Villa (2011) proponemos algunas actividades en el uso de los CAS para una enseñanza adaptada al Espacio Europeo de Educación Superior, que está basada en competencias.

Los gestores de contenidos

Los gestores de contenidos permiten por una parte ofrecer de forma ordenada material del curso así como la posibilidad de chats, foros, etc.

Los gestores de contenidos, de los cuales el más usado es MOODLE, se han convertido en los cauces naturales de suministrar información. Las posibilidades que ofrecen son muy amplias

permitiendo dar una información detallada y ordenada de contenidos, material, hojas de ejercicios, material suplementario, etc.

Otro posible uso puede ser el de gestores para compartir información a través de chats, foros, correos electrónicos, mensajes, notas, agenda, etc.

Cada vez son más usados como complemento o parte esencial en el proceso de evaluación, ya que las posibilidades de una evaluación individualizada, con corrección automática y con información de la solución al alumno si se considera oportuno aumentan con los programas como STACK (http://www.stack.bham.ac.uk/) que permiten diseño de cuestiones que cumplan los requerimientos anteriores.

Creemos que un uso apropiado de los gestores de contenidos con una información adecuada, detallada y precisa, con una participación, en foros y chats por ejemplo, promovida por el instructor y que sea seguida mayoritariamente por los estudiantes puede redundar en una mejora de la calidad de la enseñanza.

Conclusiones

Creemos que el uso de las TICs puede ser de gran ayuda para lograr algunos de los objetivos que pueden resultar comunes a cualquier Diseño Curricular, tales como:

- Promover el trabajo autónomo de los alumnos.
- Estimular el establecimiento, comprobación y validación de hipótesis por parte de los alumnos, mediante el uso de las herramientas matemáticas pertinentes.
- Promover el trabajo personal y grupal, valorando los aportes individuales y colectivos para la construcción del conocimiento matemático.

A los docentes e investigadores en Matemática Educativa se les plantea el problema de encontrar vías que garanticen un adecuado aprendizaje de las matemáticas en este nuevo contexto. Para ello resulta necesario un mayor número de estudios e investigaciones que garanticen el desarrollo de las funciones pedagógicas y didácticas a través de la introducción de los recursos tecnológicos más adecuados en cada caso.

Referencias bibliográficas

Alonso, F., García, A., García, F., Hoya, S., Rodríguez, G., de la Villa, A. (2001). Some unexpected results using computer algebra systems. *International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, 8 (3), 239-252.

Díaz, A., García, A., de la Villa, A. (2011). An example of learning based on competences: Use of

Maxima in Linear Algebra for Engineers. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, (18) 4, 177-181.

García, A., García, F., Hoya, S., Rodríguez, G. & de la Villa, A. (2002) Differential Calculus of several variables with Mathematica and Maple. *Second International Conference of Mathematics.* Julio de 2002, Creta, Grecia.

García, A., García, F., Rodríguez, G. & de la Villa, A. (2004). A course of ODE with a CAS. Proceedings of Congress: *Technology and its Integration in Mathematics Education. TIME-2004*. Montreal, Canadá.

García, A., García, F., Rodríguez, G. & de la Villa, A. (2009). Toolboxes with DERIVE. *Derive Newsletter*, 76, 5-13.

García, A., García, F., Rodríguez, G. & de la Villa, A. (2011a). Could it be possible to replace DERIVE with MAXIMA. *The International Journal for Technology in Mathematics Education*, (18) 3, 137-142.

García, A., García, F., Rodríguez, G. & de la Villa, A. (2011b). Small projects: A method for improving learning. *Proceedings of 3rd International Research Symposium on Problem-Based Learning*, pp. 460-471.

Rodríguez, G. & de la Villa, A. (2005). Could the computers change the trends in Mathematics learning?. A Spanish overview. *Proceedings of Applimat 2005*. Febrero de 2005. Bratislava, Eslovaquia.

The National Council of Teachers of Mathematics (1991) Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematic. *Journal for Research in Mathematics Education*. Estados Unidos de América.

FORTALEZAS Y DEBILIDADES EN EL USO DE LA COMPUTADORA EN EL AULA DE MATEMÁTICA DE LA UNIVERSIDAD

Betina Williner
Universidad Nacional de La Matanza Argentina
bwilliner@yahoo.com.ar

Resumen. En una investigación sobre la incorporación de la computadora en la clase de Matemática en el primer año universitario bajo el contexto de una tesis de Maestría, utilizamos como metodología la de Test Inicial, Test Final y grupo control. El grupo experimental usó software Mathematica y el grupo control, lápiz y papel. Además de los aspectos teóricos referidos a los objetivos específicos de la Tesis mencionada, pudimos recopilar fortalezas y debilidades del uso de tecnología en la clase de Matemática. Presentamos el marco teórico que nos permitió realizar las observaciones en nuestro estudio y las conclusiones a las que arribamos.

Palabras clave: software-cálculo diferencial- fortalezas-debilidades

Abstract. In an investigation of the incorporation of the computer in mathematics class in the first year of college under the context of a Master's thesis, methodology used was Initial Test, Final Test and control group. The experimental group used Mathematica software and the control group, pencil and paper. In addition to the theoretical aspects related to the specific objectives of the mentioned thesis, we gather strengths and weaknesses of using technology in math class. We present the theoretical framework that allowed us to make observations in our study and the conclusions we arrived.

Key words: software-calculus-advantages-disadvantages

Introducción

Con el sorprendente avance de la tecnología ya no nos podemos cuestionar, como docentes, la incorporación o no de la computadora en nuestras clases. Es una realidad que llegó para quedarse, a la cual nos tenemos que adaptar sin perder de vista el objetivo de mejorar nuestras prácticas y lograr aprendizajes significativos en nuestros alumnos.

Es así que sobre la incorporación de la computadora en la clase de Matemática universitaria realizamos una investigación en el primer año de carreras de Ingeniería bajo el contexto de una tesis de Maestría, en la cual utilizamos como metodología la de Test Inicial, Test Final y grupo control. Para lograr los objetivos planteados y corroborar o no la hipótesis de investigación, el grupo experimental desarrolló su actividad con software Mathematica y el grupo control lo hizo en entorno de lápiz y papel. Además de los aspectos teóricos referidos a los objetivos específicos de la Tesis mencionada, pudimos recopilar desde el estado del arte una serie de fortalezas y debilidades del uso de tecnología en la clase de Matemática y, una vez realizada la experiencia propia, reflexionar sobre este aspecto indagado.

Presentamos el marco teórico que nos permitió luego realizar un paralelo con las observaciones efectuadas en nuestro estudio y las conclusiones a las que arribamos.

Marco Teórico

Dentro de las fortalezas detectadas con la utilización de la computadora cargada de programas conocidos como Sistemas Algebraicos de Computación (CAS), como por ejemplo Derive, Matlab, Mathematica, etc., seleccionamos:

- *Visualización y experimentación*

En este aspecto, Torroba, Etcheverry y Reid (2009) afirman que cuando se trabaja haciendo uso de tecnología se favorecen dos procesos en el aprendizaje de la Matemática: la visualización y la experimentación. "La visualización es el proceso de formar imágenes, ya sea mentalmente, con lápiz y papel o con la ayuda de la tecnología" (Zimmermann y Cunninghan, 1991, citado por Torroba et al., 2009, p.1). Estas imágenes o diagramas no sólo sirven para representar un concepto o problema, sino que ayudan a entender ese concepto o problema.

La experimentación facilita la elaboración de conjeturas cuya validez o no puede ser verificada con la tecnología. Al permitir el estudio de diferentes casos y el ensayo de distintas situaciones, promueve luego la justificación teórica de lo que se está evidenciando. El entorno tecnológico motiva la búsqueda de soluciones teóricas (Laborde, 2000).

Juan y Bautista (2001) coinciden con esta idea diciendo que el uso de tecnología permite al profesor explicar conceptos que de otra forma quedarían en un nivel de abstracción difícil de entender por varios alumnos y resultados teóricos que pueden comprobarse empíricamente. Agregan que posibilitan una participación del alumno más activa y creativa, ya que puede conjeturar, experimentar y extraer conclusiones.

- *Cambio de roles del alumno y del docente.*

Torroba, Reid, Etcheverry y Villareal (2006) aclaran que la resolución de problemas con uso de tecnología cambia los roles tradicionales de alumno y docente. El primero se convierte en protagonista y adquiere una actitud más autónoma e independiente. En tanto que el segundo se transforma en mediador entre el conocimiento y el estudiante, guiando también en el uso del recurso tecnológico. Se tiene más tiempo para interactuar con el alumno (Fernández, 2000) y con los grupos de trabajo, pudiendo utilizar distintas estrategias didácticas de acuerdo a las necesidades detectadas en los estudiantes.

- *Individualización del proceso de enseñanza y aprendizaje.*

El uso de CAS se convierte en el complemento perfecto del profesor y de los materiales: cada alumno puede reforzar, con ayuda de estos de programas, aquellos puntos conceptuales que le resulten más difíciles de comprender, puede verificar resultados de ejercicios, realizar gráficos que

lo ayuden a clarificar diferentes situaciones (Juan y Bautista, 2001). Además cada sujeto aprende a su propio ritmo (Fernández, 2000), logrando una personalización del proceso de enseñanza y aprendizaje.

- *Motivación*

La computadora es un elemento importante en la motivación del estudiante, tanto por lo anteriormente explicado como por el dinamismo y la interactividad que se consigue en el proceso de aprendizaje (Juan y Bautista, 2001). Fernández y Muñoz (2007) aclaran que para mantener la atracción de los alumnos hay que tratar de no abusar de esta herramienta, de lo contrario se puede perder el interés. Tampoco es necesario usarla todo el tiempo, el alumno puede alternar entre "lápiz y papel" y tecnología, de acuerdo a cómo esté más seguro para controlar los resultados que va obteniendo. Estos autores han comprobado que alumnos que son pasivos en clase cambian su actitud ante el ordenador y pueden trabajar de acuerdo a sus capacidades.

- *Adquisición de otros conocimientos*

Usar tecnología requiere dos tipos de conocimiento: un conocimiento técnico (manejo de la computadora, de un software específico o de un programa), y un conocimiento matemático para utilizar el entorno e interpretar el feedback (Laborde, 2000). Se fomenta un espíritu crítico, ya que no siempre la respuesta del programa es "la correcta". Se pueden aprovechar esos errores o resultados inesperados para reforzar el aprendizaje (Galán et al., 2009).

- *Interacción*

El uso de nuevas tecnologías favorece la interacción y la interactividad. Al respecto Ferreiro (2002) citado por Macías Ferrer (2007) aclara que la interacción se produce en estos nuevos ambientes de aprendizaje cuando el sujeto se involucra activamente teniendo contacto con pares. En tanto que la interactividad se produce cuando existe confrontación directa del alumno con el contenido de enseñanza, lográndose el "aprender haciendo". En este caso la acción recíproca se da entre dos agentes: una material y el sujeto que aprende.

- *Centrar la actividad en el concepto*

Cuicas, Debel, Casadei y Alvarez (2007) afirman que tomando a la computadora como herramienta cognitiva, ésta se encarga del trabajo más rutinario (como cálculos) que no aportan significativamente a la tarea educativa, dándole más tiempo al alumno para centrarse en conceptos esenciales. El uso del ordenador favorece la concentración en la calidad de la idea, ya que con éste se pueden realizar operaciones permitiendo organizarlas más fácilmente, apoyando el proceso de aprender. Camacho Machín (2005) considera que el uso del software proporciona un instrumento

significativo para que los alumnos eviten memorizar fórmulas o procedimientos de cálculo, aunque también necesitan un tiempo para madurar y desarrollar una comprensión conceptual firme y segura de los conceptos.

En cuanto a las debilidades o desventajas en el uso de la computadora en las clases de Matemática podemos citar:

- *No favorece la adquisición de conceptos*

En contraposición a la postura que sostiene que el uso del software en el aprendizaje de la Matemática favorece la concentración en el concepto a estudiar; autores como Contreras de la Fuente et al (2005) exponen resultados de una investigación en la cual el mayor porcentaje de error que cometen los estudiantes se centra en errores conceptuales. Estos autores sostienen que el uso de entornos informáticos como Mathematica, no garantiza resultados satisfactorios en la enseñanza y aprendizaje de límite, continuidad y derivada.

- *Delegación de la responsabilidad en la construcción del conocimiento por parte del profesor o del alumno*

Fernández (2000) señala que el profesor puede correr el riesgo de "delegar" su tarea a la computadora, dejando que el alumno se valga por sus propios medios y no efectuando su papel de guía en el aprendizaje. A su vez el estudiante puede "distenderse" en el aprendizaje de algoritmos o reglas que realiza el ordenador.

- *La computdora como "caja negra"*

Tall (2000) explica que en ciertas ocasiones, la persona que usa un software no conoce los mecanismos internos que éste efectúa en diferentes situaciones y los cuales pueden enriquecer su aprendizaje. Pone como ejemplo el cálculo de $\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}$, ante el cual la computadora devolverá el valor 1, pero el alumno no evidencia que puede justificarse con argumentos geométricos o mediante la regla de L'Hopital.

Fernández (2000) dice al respecto que la computadora puede convertirse en una "caja negra" donde el alumno aprieta botones o introduce sentencias en forma memorística sin saber lo que está haciendo.

Cuevas (s.f.) señala que una de las mayores dificultades al usar los manipuladores simbólicos como Mathematica para resolver un determinado problema en clase es que el proceso de solución permanece oculto, y en varias ocasiones el rescatar este proceso es una parte fundamental de los objetivos del curso.

- *La computadora como "entretenimiento"*

Como los alumnos están altamente motivados ante el uso de la computadora corremos el riesgo de utilizarla como entretenimiento, sin un fin específico. Fernández et al. (2007) proponen, para poder sacar verdaderamente un beneficio didáctico de estos recursos, completar las actividades con una serie de pruebas o tests donde se reflejen los conocimientos adquiridos con el uso del mismo.

- *Tiempo académico.*

Oteiza, Silva y el Equipo Comenius (2001) señalan como barrera para la incorporación de tecnología en las clases de Matemática el "tiempo del docente", el calendario escolar y la carga horaria destinada. Agregamos que, en la enseñanza superior, los programas de las materias en general son extensos y el tiempo académico es corto. Las actividades realizadas con computadora requieren más tiempo que una clase expositiva tradicional (más aun teniendo en cuenta que el alumno debe también aprender la sintaxis específica del programa que usa), razón por la cual muchos docentes prefieren cumplir con el cronograma establecido por la cátedra en desmedro de la incorporación de tecnología en sus prácticas.

Análisis de nuestra experiencia

En la investigación mencionada cuyo contexto fue la cátedra de Análisis Matemático I de carreras de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Matanza, realizamos seis sesiones de trabajo con los dos grupos establecidos: uno que usó la computadora cargada con software Mathematica (Grupo 1), y el otro que lo hizo en entorno de lápiz y papel (Grupo 2). Cada una de estas seis actividades constaba de cuatro o cinco ejercicios que los alumnos debían resolver bajo modalidad taller. Se formaron entre diez y doce equipos de dos personas cada uno, en los dos grupos, durante toda la experiencia. Analizamos (a la luz de los objetivos establecidos en la tesis mencionada) las producciones de todos los equipos durante todas las actividades. En particular, para el grupo que trabajó con tecnología, esas producciones estaban plasmadas en archivos de software Mathematica. Desde este estudio exhaustivo y desde el diario de clase efectuado por la docente a cargo de ese grupo, pudimos reflexionar sobre las fortalezas y debilidades en el uso de la tecnología en la clase de Matemática encontradas en el marco teórico y hacer un paralelo con la experiencia propia.

Con respecto a las ventajas del uso de la computadora en la enseñanza y aprendizaje de la Matemática:

- *Visualización y experimentación*

Estos dos procesos, si bien son favorecidos por el uso de la computadora dado la facilidad que ésta nos brinda a la hora de graficar o de probar con distintos parámetros o casos, creemos que, de acuerdo a nuestra experiencia, en varias oportunidades se necesita de la intervención docente o de una guía explícita para que se produzca una visualización (entendida como entender el problema a través de una imagen), o la elaboración de una conjetura. A lo largo de nuestra experiencia tuvimos ocasiones en que los alumnos graficaron con el software pero no pudieron visualizar conceptos o propiedades en el gráfico por sí solos. Por otro lado, a pesar de tener la computadora, no aprovecharon su potencial de cálculo, por ejemplo a la hora de predecir un límite o de probar con diferentes casos en un determinado problema. Entonces, si bien coincidimos con los autores mencionados que la computadora es una buena herramienta para fomentar estos dos procesos, agregamos que, al menos en el comienzo de su utilización, es necesaria la orientación del docente o la guía desde el diseño de la tarea.

- *Cambio de roles del alumno y del docente.*

Durante la experiencia observamos que la mayoría de los alumnos dejó su posición pasiva de la clase expositiva tradicional para pasar a ser protagonista de su propio aprendizaje, siendo el docente mediador entre el conocimiento y el estudiante. Este cambio de actitud llevó tiempo. En las primeras actividades los alumnos dependían mucho de la opinión del docente en cuanto a las acciones a emprender en contraposición de las últimas sesiones en las que percibimos un comportamiento autónomo e independiente del profesor.

- *Individualización del proceso de enseñanza y aprendizaje*

Debido a que es el propio alumno que resuelve las tareas, depende de su interés y necesidad la posibilidad de reforzar conceptos a través de gráficos, de estudio de diferentes casos, etc. Durante la experiencia notamos que algunos equipos ampliaban las tareas pedidas con ayuda de la computadora y otros materiales como los apuntes de clase, y otros equipos sólo contestaban lo solicitado.

- *Motivación*

Percibimos que la mayoría de los alumnos se sintieron cómodos en el entorno computacional, sobre todo aquellos que estudian Ingeniería en Informática. Muchos se desinhibieron, probaron e "hicieron", acciones que muchas veces están ausentes en las clases tradicionales. Esto se vio reflejado también en el resultado de una encuesta efectuada a este grupo, en la que la mayoría de los alumnos (75%) reflejó una actitud positiva hacia el uso del software.

- *Adquisición de otros conocimientos*

El alumno que trabajó con tecnología pudo adquirir dos tipos de conocimientos: uno matemático y otro técnico referido al programa que está utilizando, en nuestro caso, el Mathematica. Justamente uno de los objetivos de la incorporación de tecnología es brindarle al alumno una herramienta más que puede serle de gran utilidad en otras materias de su carrera y en su vida profesional como ingeniero.

- *Interacción*

Al ser un trabajo tipo taller, en el que se comparte la computadora con uno o dos compañeros, se favoreció la interacción entre pares no sólo del mismo equipo sino de otros. Fue usual observar cómo los equipos se ayudaban entre sí a lo largo de la experiencia.

- *Centrar la actividad en el concepto*

Según nuestro marco teórico, dado que el ordenador se encarga de las tareas más rutinarias como el trabajo algebraico o cálculos, el alumno tiene la posibilidad de concentrarse en su comprensión conceptual. En nuestro caso observamos que el grupo que trabajó en el entorno computacional tuvo mejor desempeño en los ejercicios que solicitaban argumentar o fundamentar lo realizado con resultados teóricos, que el que lo hizo en entorno de lápiz y papel, Suponemos que al ser la computadora la que efectuaba el cálculo de raíces o de límites o derivadas, los estudiantes contaban con más tiempo para reflexionar sobre conceptos y propiedades. Inclusive varios equipos de este grupo trabajaron con la carpeta de clase para dar las respuestas lo más completas posibles.

En cuanto a las desventajas que observamos en el uso de la computadora, citadas en el marco teórico, percibimos:

- *La computadora como "caja negra"*

Si bien hay ciertos procesos que quedan ocultos cuando se utiliza la computadora, como por ejemplo las reglas de derivación, el cálculo de límites o la resolución de ecuaciones, en nuestra experiencia en particular fuimos alternando el entorno computacional con el de lápiz y papel en las clases teóricas y algunas prácticas. De esta manera los alumnos que trabajaron con tecnología no descuidaron sus habilidades algebraicas o de cálculo de límites o derivadas.

- *Tiempo académico*

Establecer actividades con modalidad taller como las llevadas a cabo en nuestra investigación exige reorganizar el cronograma usual de la materia debido al tiempo que éstas demandan. Esto ocasiona discernir y "perder" el desarrollo de algunas demostraciones o la resolución de algunos ejercicios.

Igualmente consideramos que esta pérdida de tiempo académico no se debió específicamente al uso del software sino a la modalidad de taller empleada.

Podemos agregar también:

- *Costos, disponibilidad y preparación docente*

Actualizar una institución educativa con computadoras dotadas de software específico tiene altos costos que, en países subdesarrollados o en vías de desarrollo, constituye un verdadero problema. A esto se le suma la falta de capacitación por parte de los docentes, que muchas veces no implementan esta herramienta por no tener conocimiento del software disponible o porque su uso requiere tiempo extra para la preparación de actividades y secuencias didácticas.

- *Diseño de las actividades.*

El uso de programas o software específico en las clases, no sólo requiere de una capacitación docente, sino también la elaboración de actividades y tareas a ser realizadas por los alumnos. Varias son las causas de que muchos docentes se opongan a esto: tiempo demandado, profesores que no quieren emplear tiempo extra y prefieren continuar con su rutina, resistencia al cambio por desconocer los beneficios de esta forma de trabajo, entre otros.

Reflexión final

Las observaciones expuestas y otros resultados obtenidos en la investigación mencionada que no son explícitos en este artículo, nos permiten vislumbrar que con la computadora cargada con software tipo CAS podemos favorecer procesos como los de experimentación, elaboración de conjeturas, visualización, control de resultados, de una manera más simple que en entornos de lápiz y papel, en forma progresiva y con una orientación adecuada del docente o desde el diseño de la tarea. Hay que tener en cuenta que al alumno le lleva tiempo incorporar el software como un instrumento de trabajo, pero en general está altamente motivado para hacerlo. Además el estudiante adquiere dos tipos de conocimientos: uno matemático y otro técnico relativo al software que está usando, el que puede emplear luego en otras asignaturas o en su vida profesional.

No tenemos que perder de vista que la incorporación de estos recursos no se hace en forma improvisada, requiere una organización por parte del docente, ya sea de los objetivos perseguidos, de los tiempos académicos, del material didáctico con el que se trabajará y de la orientación que se le brindará al alumno. Cabe agregar también que es importante lograr un equilibrio adecuado entre los dos entornos mencionados (computacional y lápiz y papel). De esta manera no perdemos la motivación que suscita en el alumno el uso de la computadora y además podemos

hacer hincapié en procesos que ésta no hace explícitos, como ser reglas de derivación, cálculo de límites, entre otros.

Referencias bibliográficas

Camacho Machín, M. (2005). La enseñanza y aprendizaje del análisis matemático haciendo uso de CAS (Computer Algebra System). En A. Maz Machado, B. Gómez Alfonso y M. Torralba Rodríguez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática: Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM* (pp. 97-110). España: SEIEM y Servicio de publicaciones de la Universidad de Córdoba.

Contreras de la Fuente, A., Font, V., García, M., Luque , L., Marcolini, M., Ordoñez, L., Ortega, M. y Sánchez, C. (2005). Aplicación del programa Mathematica a las prácticas de cálculo en el primer año universitario. En A. Maz Machado, B. Gómez Alfonso y M. Torralba Rodríguez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática: Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM* (pp. 271-282). España: SEIEM y Servicio de publicaciones de la Universidad de Córdoba.

Cuevas, C. (s.f.) *¿Qué es software educativo o software para la enseñanza?* Recuperado el 5 de octubre de 2009, de http://www.matedu.cinvestav.mx/~ccuevas/SoftwareEducativo.htm

Cuicas, M., Debel, E., Casadei, L. y Álvarez, Z. (2007). El software matemático como herramienta para el desarrollo de habilidades del pensamiento y mejoramiento del aprendizaje de las matemáticas. *Actualidades Investigativas en Educación*, 7 (2), 1-34. Recuperado el 16 de junio de 2009 de http://revista.inie.ucr.ac.cr

Fernández, J. y Muñoz, J. (2007). Las TIC como herramientas educativa en matemática. *Revista UNION. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 9*, 119-147. Recuperado el 7 de marzo de 2008, de http://www.fisem.org/web/union/revistas/9/Union_009_013.pdf

Fernández, M. (2000). Perfeccionamiento de la enseñanza-aprendizaje del tema límite de funciones con el uso de un asistente matemático. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 3* (2), 171-187.

Galán, J. L., Galán, M. A., Gálvez, A., Jiménez, A. J., Padilla, Y. y Rodríguez, P. (2009). *Desde la calculadora hasta el software especializado: un estudio de la evolución en el uso de las TIC's en la enseñanza de la matemática en Ingeniería*. Recuperado el 21 de enero de 2010, de http://www.bvs.hn/cu-2007/ponencias/EDU/EDU109.pdf

Juan, A. y Bautista, G. (2001). *Didáctica de las matemáticas en la enseñanza superior: la utilización de*

software especializado. Recuperado el 15 de julio de 2009, de http://www.uoc.edu/web/esp/art/uoc/0107030/mates.html

Laborde, C. (2000). *Why technology is indispensable today in the teaching and learning of mathematics?* Recuperado el 4 de febrero de 2010 de http://www.math.osu.edu/~waitsb/posticme2000/laborde.pdf

Macías Ferrer, D. (2007). Las nuevas tecnologías y el aprendizaje de las matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación, 42* (4). Recuperado el 21 de enero de 2010 de http://www.rieoei.org/boletin42_4.htm

Oteiza, F., Silva, J. y Equipo Comenius (2001). *Computadores y comunicaciones en el currículo matemático.* Recuperado el 5 de enero de 2010 de http://www.eduteka.org/pdfdir/SilvaMatematicas.pdf

Tall, D. (2000). Biological brain, mathematical think, and computational computers. En Wei-Chi Yang, Sung-Chi Chu, Jen-Chung Chuan (Eds), *Proceedings of the Fifth Asian Technology Conference in Mathematics Chiang Mai, Thailand* (pp. 3–20). Blackwood (VA): ATCM.

Torroba, E., Etcheverry, N y Reid, M. (2009). Explorando el rol de la visualización en experiencias de cátedra. *TE&ET. Revista Iberoamericana de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología, 3*. Recuperado el 13 de enero de 2010 de http://teyet-revista.info.unlp.edu.ar/nuevo/files/No3/TEYET3-art01.pdf

Torroba, E., Reid, M., Etcheverry, N. y Villareal, M. (2006). Los estudiantes proponen un problema: una posibilidad favorecida por los ambientes computacionales informatizados. *Revista UNION. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 7*, 39-51. Recuperado el 8 de marzo de 2008 de http://www.fisem.org/web/union/revistas/7/Union_007_005.pdf

¿PAPEL O COMPUTADORA? ¡DA IGUAL!

Mabel Alicia Slavin, Ana Paula Krompiewski, Matías Samartino, Mónica Torre y Andrés Elizalde, Carla Cocirio
Grupo *CHyM*. Instituto Superior de Formación Técnica Nº 75. Tandil. Argentina
mabelslavin@hotmail.com, anapaula_k@hotmail.com, matiassamartino@hotmail.com, mositor@hotmail.com, elizalde.andres@gmail.com, carla_cocirio@hotmail.com.ar

Resumen. La función del docente no puede remitirse a la pasividad, debe ser un sujeto activo en su labor de educador, es por esto que este taller pretende acercarles una manera diferente de brindar la información basada en una colección de juegos que se pueden realizar con simple material elaborado por ellos mismos y que se encuentra al alcance de cualquier alumno.
Un simple trozo de papel, o un programa que esté en la computadora presentarán las ocasiones necesarias para reflexionar, para pensar; favoreciendo el desarrollo de una actitud crítica, analítica. Esto será un reto a la creatividad, a la inteligencia.
Palabras clave: Triángulo equilátero, papel, programa, jugar
Abstract. The teacher's role can not be referred to passivity, he must be an active subject in his work as an educator, which is why this workshop aims to approach them a different way to provide information based on a collection of games that can be manufactured by them with everyday stuff available to any student.
A simple piece of paper, or computer software, will present opportunities to reflect, to think, favoring the development of a critical and analytical attitude. This will be a challenge to creativity, intelligence
Key words: Equilateral triangle, paper, software, play

Introducción

La geometría como ciencia pura, es permanentemente estimulante del razonamiento. Como ciencia aplicada, forma parte de las diversas actividades del hombre, se asocia a la técnica, al arte y a diversos campos científicos. La geometría, por lo tanto, constituye una elección pedagógica ineludible.

Aproximar a los alumnos al fantástico mundo de la geometría desde el nivel pre-escolar es una tarea nada ajena a sus intereses, su aprendizaje puede ser eficaz y sumamente entretenido, si en él comprometemos el uso del propio cuerpo y se parte del empleo de materiales que permitan jugar, experimentar, tocar, transformar, intuir, anticipar y comprobar. La abstracción y formalización de los conocimientos así adquiridos sólo podrá lograrse en las etapas que corresponden a los niveles medio y superior.

Las primeras construcciones del saber en el campo de la geometría partirán siempre de una exploración del espacio basada en el hacer y en lo intuitivo.

Por esto, la intención de este taller es la de ofrecer a los docentes o futuros docentes una colección de juegos que se pueden realizar en el aula a partir de material concreto.

Desde una visión integradora, todo niño/adulto presenta una tendencia lúdica que con formatos disímiles característicos de la edad, acompañan las variaciones de las estructuras intelectuales en

su desarrollo (Aizencang, 2005). Esto agrega al juego la importancia de ser una actividad que posibilita el reconocimiento de la estructura intelectual con la que opera un sujeto y la posibilidad de promover la construcción de nuevas estructuras mentales.

Además, el juego fomenta la vida social y constructiva de un sujeto, lo que posibilita la constante confrontación de diferentes puntos de vista. Esta confrontación es indispensable para llegar a la elaboración de un pensamiento lógico adaptable a la realidad.

Los juegos reglados, como los que este taller propone, invitan a los alumnos a hacer y actuar, ensayar alternativas, reconocer y resolver problemas y evitar la repetición de discursos sostenidos por otros, generalmente por el docente.

El poder motivador del juego no estriba en la simple competencia, sino en poder conciliar con sus compañeros (oponentes) los comportamientos que, en el uso de las reglas, les permitan ganar. El juego promueve la cooperación como valor social y la toma como modalidad de aprendizaje para facilitar las condiciones de negociación que permitan la aceptación de las reglas por el grupo. Así la "verdad" proviene del propio grupo, lo que favorece la autonomía de los alumnos que no esperan la orden del docente como única voz valedera.

Desde esta mirada juego y trabajo no resultan instancias separadas; ya que cada jugador supervisa la actuación de sus compañeros y debe responder a sus posibles errores de forma inmediata, viéndose en la necesidad de argumentar sus procedimientos para contraargumentar otros. Todo juego supone aprendizaje y trabajo en su realización, ya que permite la transferencia de hábitos y saberes a nuevas situaciones sociales.

Este taller sólo pretende presentar sugerencias mínimas a partir de las cuales docentes y alumnos pueden generar una gran diversidad de situaciones creativas.

Desarrollo

Partiendo de la concepción de la geometría como una manera de pensar, contemplando la posibilidad de lograr un crecimiento de la aptitud para conjeturar, de la capacidad para reorganizar o crear, de la facultad de imaginar y despertar el interés por buscar las causas, la primera sesión del taller traerá al aula el uso del papel y la exploración partirá de un papel con forma circular. El desafío será la obtención de un triángulo equilátero inscripto en la circunferencia que limita el papel con la sola utilización de plegado. Vale recordar que la visualización no es una mera impresión visual sino un proceso activo de construcción individual. Es decir que cada sujeto construye sus propias visualizaciones individuales partiendo del conocimiento que ya posee y modificando contenidos con lo que él percibe.

Aquí habrá que hacer uso de un manejo ajustado y preciso del lenguaje que permita analizar la situación, observar, describir y justificar. Se tratará de usar los modelos concretos con mesura y prudencia armonizando con una constante presencia de la reflexión y el razonamiento que conduzcan como un último desafío a la demostración de que el triángulo obtenido es equilátero.

Recordando que los materiales concretos utilizados para el aprendizaje de la matemática son objetos reales que permiten pintarlos, rayarlos, cambiarlos de lugar o superponerlos, se partirá el triángulo obtenido en tercios para trabajar con el color. Se obtienen así las once piezas que constituirán el material indispensable para conformar el llamado *Tri-mino.*

Se pretende tener un recurso didáctico más intuitivo con el fin de visualizar los objetos geométricos y/o algunas propiedades con rapidez, sin usar ningún instrumento geométrico.

No se pretende suprimir el uso de los instrumentos geométricos, por el contrario, se quiere ofrecer la posibilidad de que se llegue a comprender profundamente "qué, cómo y para qué" se hace lo que se hace, cuando se usa alguno de esos instrumentos.

Con ayuda de los plegados se pueden llegar a comprender propiedades geométricas sin necesidad de una gran cantidad de conocimientos previos; el ir y venir con las propias construcciones da la oportunidad de facilitar la toma de conciencia de los propios procesos (Fones, 1997). Al doblar el papel con miras a la producción de una figura elegida, se debe seguir un conjunto específico de secuencias con un cierto orden para lograr el resultado; la observación detallada de los pasos, la coordinación de los movimientos son vitales en el desarrollo del pensamiento intuitivo y en la representación mental del espacio.

Con un trozo de papel y las propias manos se está en el umbral de un mundo misterioso, (Ricotti, 2012) en el que con un mínimo se pueden lograr maravillas, con cada forma descubrir un puente hacia el interior que se ofrece a la creatividad con casi nada: es el poder de lo simple.

No obstante es necesaria la justificación de las respuestas, la opinión fundamentada. A través de estas actividades el alumno puede y debe ser estimulado para que opine con libertad, pero con fundamento, para que escuche y critique los fundamentos que presentan los demás, pero respetando a la otra persona, aún en el caso en que esté equivocada. Mediante esta concepción de la matemática se estará dando lugar al desarrollo de los objetivos propios de la ética que llevarán a una proyección social del conocimiento (Palacios, 1996).

Los asistentes a este taller saben que los conocimientos con los que cuentan algunos alumnos sobre la matemática en general y sobre la geometría en particular, no siempre se ponen en práctica en el momento de resolver situaciones; otras veces, alumnos que no se destacan

aparentemente en estas áreas, pero que cuentan con aprendizajes logrados en vivencias cotidianas y con sentido común, pueden desempeñarse con destreza y fundamentar adecuadamente sorprendiendo a los más teóricos. Las actividades de resolución de problemas que priorizan la manipulación y la exploración con papeles, obligan a aprender poniendo los conceptos en acción. La cooperación, la comunicación, el trabajo compartido, la paciencia puesta en las propias construcciones, el reconocimiento de limitaciones o errores, el afán de enmienda y corrección, completarán los aspectos formativos.

Es por esto que, si se siguen los modelos con las necesarias interrupciones para dar lugar a los interrogantes, con paciencia y suficiente tiempo de maduración, seguramente cada docente generará ideas con posibilidades de enriquecer sus propias actividades motivadoras y responderá a cada caso particular de su realidad áulica.

La segunda sesión del taller presentará el uso de la computadora y, en particular, del programa GeoGebra.

Es sabido que los conocimientos de una época y el aprendizaje están íntimamente relacionados con los elementos disponibles en la sociedad: artefactos y datos. La escuela refleja la sociedad en la que está inmersa y perpetúa la cultura dominante, convirtiéndose en un instrumento social para trasmitir determinados valores y modos de actuación.

Una visión amplia y humanista de la escuela lleva a considerar que su función no es la de preparar mano de obra y usuarios, sino personas que, a lo largo de su vida, seguirán aprendiendo en forma autónoma en diversos momentos y lugares, por lo que necesitan apropiarse de herramientas y medios adecuados, desarrollar competencias comunicativas, de colaboración y de gestión de la información, habilidades cognitivas complejas y actitudes responsables.

Se torna necesario el desarrollo de nuevas competencias personales, sociales y profesionales, construidas sobre una vieja competencia fundamental: la comunicativa, teniendo en cuenta que se pueden considerar como actos fundamentales de la comunicación, la información, la argumentación y la recreación.

Por lo tanto el uso de sistemas informáticos facilita el abordaje de desafíos de mayor nivel de exigencia cognitiva, es posible trascender la verificación de resultados ya conocidos y explorar objetos y relaciones para plantear y/o contribuir a la verificación de conjeturas propias o propuestas por el docente.

Los medios de manipulación virtuales, entre los que se encuentra el software GeoGebra, son dinámicos y su configuración puede ser modificada por el usuario, ya sea arrastrando elementos

con el mouse, modificando dimensiones mediante diversos controles, diseñando objetos mediante la selección de otros, realizando movimientos en los objetos mediante un clic del mouse, etc.

La visualización del resultado de las propias acciones pasa a ser objeto de reflexión para establecer relaciones.

En los softwares de geometría dinámica como el GeoGebra, la representación de un objeto matemático toma características, tanto de las restricciones impuestas por la propia modelización, como de las propiedades de los medios semióticos utilizados. El sistema de geometría dinámica que se ofrece permite crear un micromundo, un espacio de exploración en el cual el alumno puede manipular objetos ya existentes, crear nuevos y ensayar los efectos que ejercen entre sí. La creación de nuevos objetos y relaciones va transformando el micromundo según el nivel de conocimiento del usuario.

El eje del micromundo pasa por la generación y prueba de hipótesis a las que sean sometidos.

Los talleristas propondrán la construcción de un triángulo equilátero mediante la utilización de GeoGebra y su partición en cuartos.

La manipulación directa que es posible realizar en el micromundo del entorno interactivo, (Azinian, 2009) posibilita la realización de un gran número de observaciones en instancias o casos particulares que pueden ser aprovechados para buscar patrones y elaborar conjeturas de índole general. Mediante el desplazamiento de los objetos, se ponen en evidencia los invariantes geométricos. El alumno está obligado a explicitar las propiedades necesarias y las relaciones geométricas. Su uso fuerza a los alumnos a ser precisos y a conocer la taxonomía y las definiciones, genera un conflicto entre su intuición y la construcción que aparece en la pantalla.

Estos sistemas ofrecen la posibilidad de guardar y recuperar secuencias de acciones, es decir que permiten obtener un registro del trabajo con mucha facilidad. La observación de lo construido permite al alumno, plantear argumentos válidos para sostener sus afirmaciones relacionando con las transformaciones interactivas que utilizó para construir.

Alumnos y docentes comparten los hechos que se visualizan en la pantalla- que pasa a ser un campo de experimentación común-. Pero no es suficiente lo visual para "ver" la matemática y ver no es lo mismo que comprender. Es necesario continuar explorando mediante otros modos de representación simbólica para encontrar la justificación de lo visualizado. El docente deberá orientar a los alumnos hacia el planteo de abstracciones que posibiliten la generalización. El paso de la exploración a la sistematización se puede estructurar mediante el descubrimiento guiado, con el docente proveyendo el "andamiaje" necesario para culminar el proceso de construcción del

conocimiento con la formalización (Azinian, 2009)

En este taller se tratará de apostar a un proyecto educativo que busque la realización de un sujeto autónomo, crítico, activo, solidario, cooperativo (Bixio, 2010). El problema no es el contenido a enseñar sino el sentido de qué se enseña, aquí entonces es donde debemos hacer y hacernos las preguntas ¿somos mediadores en el proceso educativo? ¿propiciamos experiencias que les permitan a nuestros alumnos apropiarse creativamente de los saberes construidos por la humanidad?

Metodología y material

Esta propuesta de taller está dirigida a docentes de Matemática de cualquier nivel y a alumnos del Profesorado de Matemática en cualquier estadio de la carrera. También puede asistir/participar cualquier persona de cualquier edad mayor a tres años a la que le guste *JUGAR*.

Los talleristas preveen un cupo mínimo de 10 personas y un máximo 30 personas. Esto permitirá la distribución de los mismos en grupos de 3(tres) a 6(seis) integrantes cada uno. La cantidad de personas en el grupo está determinada por el material que se va a construir durante los dos encuentros previstos.

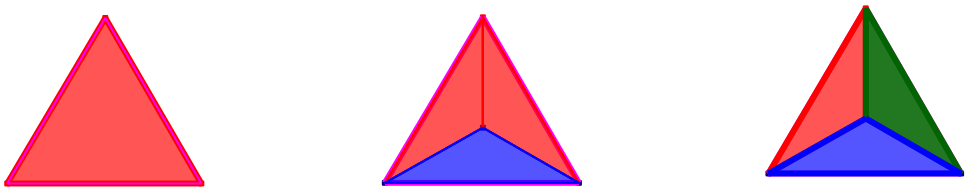
Para realizar la construcción del material de la segunda sesión del taller se requiere un manejo elemental del programa GeoGebra, esto no es excluyente ya que los talleristas brindarán una revisión de los comandos a utilizar.

Los participantes deberán contar con el siguiente material: Papeles con forma circular. Tijera. Cinta adhesiva. Pegamento. Los talleristas tienen prevista la entrega de una bolsa conteniendo estos elementos a cada equipo.

Para el desarrollo de las dos sesiones en las que se encuentra divido el taller se ha previsto la confección de las piezas que componen dos juegos.

En la primera sesión los participantes trabajarán con papel con forma circular para obtener un triángulo equilátero inscripto en la circunferencia que limita el papel. Esto lo realizarán utilizando la técnica de plegado, sin cortes. Durante el plegado se recordarán las propiedades que permiten realizar el mismo. Al finalizar, se solicitará a los participantes la demostración que permite asegurar que el triángulo obtenido es equilátero.

Luego de obtenido este triángulo, se construirán varios de diferentes colores. Se los cortará en tercios para combinar tres colores y con ellos se construirán las once piezas del juego llamado *Tri-mino:*



(4 piezas de diferente color) (6 piezas combinando 2 colores) (1 pieza)

El *Tri-mino* contiene una colección de cuatro juegos que propondrán los talleristas y recorren diferentes ítems del diseño curricular vigente en la provincia de Buenos Aires. Con las piezas obtenidas y utilizando el libro que acompaña al material se podrá jugar a:

a) ¡Qué lío! (Fracciones)

b) ¡Se agrandó! (Homotecia)

c) ¿Arbolitos? (Combinatoria)

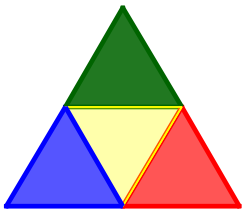
d) De cuatro lados (Cuadrángulos. Perímetro. Superficie)

Con un triángulo equilátero y una partición especial (indicada por los talleristas) se podrá obtener un rompecabezas que permitirá resolver:

Desafío (Triángulo equilátero-hexágono)

En la segunda sesión los participantes utilizarán el programa GeoGebra, con él construirán un triángulo equilátero y realizarán la partición del mismo en cuartos.

Mediante la separación por color de los cuatro triángulos equiláteros partidos en cuartos obtendrán las 16 piezas que constituyen el juego llamado *El país de los triángulos*



(Se deben construir 4 figuras completas para cortar las piezas)

Con estas 16 piezas y utilizando el libro que acompaña al material, se pueden realizar los siguientes juegos que permiten el trabajo de diferentes contenidos para distintos niveles de la matemática involucrada en el actual diseño curricular de la provincia de Buenos Aires.

Los juegos que se han pensado son:

a) Los números de las casas. (Sistema de numeración. Operaciones)

b) Triangulandia. (Triángulos y números)

c) Ayudemos al cartero (Vectores. Recorridos)

d) Acorralados (Hexágonos. Perímetro. Superficie)

e) Guarda con las guardas (Simetrías)

f) Diamantilandia (Proporcionalidad)

En las dos sesiones se hará hincapié en la posibilidad de realizar la construcción del material de los juegos de manera indistinta utilizando computadora o papel.

Evaluación

La evaluación es compleja porque sirve tanto para acreditar como para diagnosticar, retroalimentar, reflexionar, regular y mejorar los aprendizajes.

La evaluación, en este caso, será un monitoreo que permitirá a los talleristas reflexionar sobre la valoración que los participantes realicen sobre las propuestas del taller.

Con la intención de obtener información sobre lo desarrollado se propondrá un minitest de opciones múltiples que involucra las tres propuestas del taller:

a) Uso de papel

b) Uso de software: GEOGEBRA

c) Uso de juegos

Este test permitirá conocer las posibilidades de utilización de lo desarrollado en el taller en la diversidad que se plantea en términos de estilos de enseñanza-aprendizaje, intereses, culturas y prácticas de enseñanza.

También se solicitará a los participantes la elaboración de nuevas propuestas que completen los juegos ofrecidos en el taller.

Esto permitirá la retroalimentación, volviendo un paso atrás para plantearse cuestiones referidas al tipo de contenidos y a la articulación que se proponen en los juegos ofrecidos.

Conclusión

Si se reconoce que los alumnos difieren en su forma de acceder a los conocimientos, ya sea por sus intereses, sus estilos, o por sus historias de aprendizaje, es necesario atender al propósito de generar diversas puertas de entrada a los diferentes saberes que se proponen en las aulas, de forma tal que los alumnos puedan iniciarse y avanzar en sus procesos de aprendizaje.

La inclusión de juegos en las clases posibilitará recuperar, redefinir y potenciar conjuntos valiosos de saberes y habilidades que, se observa, se despliegan al jugar, en contraposición con otras prácticas que conducen a reiterados y sucesivos fracasos en el aprendizaje.

Viendo al juego como una situación privilegiada de interacción con otros, un escenario propicio para promover la creatividad y la reflexión, que facilita la atención de las diferencias existentes entre los alumnos y amplía las posibilidades de responder a las necesidades de todos, adquiere así significados y funciones múltiples, como instrumento y también como objeto de enseñanza, portando una visión más abarcadora de las potencialidades inherentes a cada sujeto.

La propuesta de trabajar con papel, usando colores y texturas se enmarca en la búsqueda de recursos sencillos fáciles y económicos que permitan modelizar situaciones, resolver problemas, mejorar la visión espacial y recuperar la destreza manual.

La propuesta es hacer de la clase de matemática un paréntesis creativo y audaz, donde siempre sea posible "aprender nuevas cosas" sin que sean "muchas cosas".

La propuesta es hacer frente al reto de recrear propuestas didácticas y de contenidos utilizando el desarrollo tecnológico puesto al alcance del alumno.

Este taller pretende brindar una colección de ideas y juegos para llevar al aula en diferentes niveles educativos a partir del uso de material que se encuentra al alcance de nuestros alumnos.

Porque, parafraseando a ***Alicia*** en el ***País de las Maravillas*** *"de qué sirve una clase si no tiene dibujos o plegados que me sirvan para soñar".*

Referencias bibliográficas

Aizencang, N. (2005). *"Jugar, aprender y enseñar".* Buenos Aires: Manantial

Azinian, H. (2009). *"Las tecnologías de la información y la comunicación en las prácticas pedagógicas".* Buenos Aires: Ediciones Novedades Educativas.

Bixio, C. (2010). *"Maestros del siglo XXI".* Rosario: Homo Sapiens

Fones, M. (1997). *"Geometría: el tesoro escondido"* Buenos Aires: GEEMA, Grupo Editor Multimedial S.R.L.

Palacios, A. (1996). *"Geometría de papel. El arte del bien plegar".* Buenos Aires: Magisterio del Río de La Plata.

Ricotti, S. (2012). "*Geometría y origami. Una fiesta de papeles para la clase de Matemática".* Rosario: Homo Sapiens.

EL ABP EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS COMO ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO CRÍTICO EN EL NIVEL MEDIO BÁSICO Y MODALIDAD TELESECUNDARIA

Laura Flores Torres, Elvira G. Rincón Flores y Leopoldo Zuñiga
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey México
flauris2009@hotmail.com, elvira.rincon@itesm.mx, lzs@itesm.mx

Resumen. En 1968 surge en México el modelo de telesecundarias enfocado a la acumulación de conocimientos, actualmente se establece la necesidad de preparar a los estudiantes hacia un aprendizaje autónomo. Ante esta problemática y con el objetivo de conocer en qué medida el ABP permite a los estudiantes formular procedimientos de manera autónoma en torno a las cuestiones matemáticas, la investigación se basó en este modelo y en la técnica didáctica del Aprendizaje Basado en Problemas, en la cual se observó que es el proceso el que facilita el aprendizaje de conceptos y contenidos propios de la asignatura de Matemáticas.

Palabras clave: Aprendizaje basado en problemas, aprendizaje autónomo

Abstract. In 1968 the model of the high school education via TV in Mexico emerged, it was focused in the accumulation of knowledge, today the necessity to prepare the students towards a self-sufficient learning is established. Under this problems and with the objective to know the range in where the ABP allows the students to formulate the procedures and the self-sufficient manner in lathe to the mathematical issues. The investigation was based on this model and the didactic technique of the Learning Based in Problems (ABM for its acronym in spanish), in which the process that facilitates the learning of concepts and contents during a Math Class was observed.

Key words: Learning Based in Problems, self-sufficient learning.

Introducción

En 1968 surge en México el modelo de telesecundarias como una alternativa para dar respuesta a la demanda de los jóvenes de zonas rurales y urbanas que no tenían acceso a la educación secundaria urbanizada. Los primeros materiales desarrollados para esta modalidad surgieron en torno a una teoría de enseñanza y aprendizaje enfocada en la transmisión y acumulación de conocimientos (Kalman y Carvajal 2007), donde el profesor imparte todas las materias de la currícula con ayuda de la red de educación satelital. Este modelo se ha renovado constantemente respondiendo a los diferentes paradigmas educativos debido a la necesidad de preparar estudiantes autónomos en su aprendizaje, capaces de utilizar distintos tipos de saberes que les permitan profundizar en la comprensión y la reflexión para apropiarse del lenguaje escrito, interpretando y creando sus propios conocimientos matemáticos (INEE, 2009).

La problemática investigada, involucra al modelo pedagógico renovado en Telesecundaria que pretende preparar a los estudiantes para producir y utilizar diversos tipos de conocimientos y herramientas, conceptuales-analíticas, que les permitan ser competentes en un medio complejo y dinámico (SEP, 2009). Se enfoca en determinar la relación que existe entre el desarrollo del

pensamiento crítico y la estrategia didáctica que se utiliza en la enseñanza de las Matemáticas en el nivel de telesecundaria. Para ello se consideró lo que en este sentido Saiz (2002) propone, la guía general de las habilidades del pensamiento crítico, denominada FRISCO, que se caracteriza por una serie de pasos a seguir para comprender el problema, elaborar un plan, aplicarlo y valorar los resultados, por tal motivo se aplicó la técnica didáctica Aprendizaje Basado en Problemas con la idea de valorar en qué medida desarrolla el pensamiento crítico en los estudiantes de la modalidad telesecundaria, particularmente en el aprendizaje del tema de ecuaciones lineales y proporcionalidad.

Marco teórico

Díaz (2006) se refiere al ABP como un enfoque centrado en el alumno, basado en actividades que fomentan la reflexión, el pensamiento complejo, la cooperación y la toma de decisiones. "La habilidad para resolver problemas está relacionada con otras habilidades, como el razonamiento crítico, la interacción social, la metacognición. Existe sinergia entre ellas. El desarrollo de la habilidad para resolver problemas debe hacerse simultáneamente con otras habilidades" (Restrepo, 2005, p.18), que faciliten la comprensión de conocimientos para lograr aprendizajes significativos. Hernández (2007) se refiere a las características del ABP como un método de trabajo activo, con la participación constante de los alumnos en la generación de conocimientos, orientado a la solución de problemas diseñados para el logro del aprendizaje de ciertos conocimientos, que tiene como objetivo, un aprendizaje centrado en los estudiantes, donde el docente se convierte en tutor o facilitador en el proceso de enseñanza. Un método que estimula el trabajo colaborativo al trabajar en grupos pequeños y que permite abrirse a diferentes disciplinas del conocimiento. En este sentido, Sánchez y Ramis (2004) enuncian que el ABP se caracteriza por ser un método de trabajo activo, por parte de los alumnos, en la adquisición de sus conocimientos. Orientado a la solución de problemas para lograr el aprendizaje significativo donde la función del docente es de guía o mediador, lo cual promueve el trabajo colaborativo en grupos pequeños.

El ABP es ideal para estudiantes con habilidades para autodirigirse, dispuestos a la flexibilidad y ambigüedad en las metas de aprendizaje, y un contexto de instrucción a través de la lectura y la discusión, participando en este proceso el pensamiento crítico a través de la revisión lógica y razonada de problemas reales, que les permita el incremento de habilidades de aprendizaje independiente y participación colaborativa (López, 2008).

La base teórica para esta técnica que proporciona la psicología cognitiva establece tres principios relacionados con el aprendizaje y los procesos cognitivos: el aprendizaje es un proceso constructivo y no receptivo, la metacognición afecta el aprendizaje y los factores sociales y

contextuales ejercen influencia en el aprendizaje (Morales y Landa, 2004). De acuerdo con Cataldi, Lage y Cabrero (2010), los estudiantes son los responsables de sus propios avances y su rol se orienta a sus propias necesidades y motivaciones, investigando, resolviendo, confrontando opiniones y tomando decisiones por propia iniciativa, donde los docentes juegan un rol de guía o tutor.

Por otro lado, el propósito de la educación en el siglo XXI, se enfoca a que los estudiantes desarrollen el llamado pensamiento crítico, con el propósito de que este sea un proceso de aprendizaje auténtico. Desde una perspectiva filosófica acerca de la comprensión del pensamiento crítico este tiene sus orígenes en figuras como Sócrates, Platón y Aristóteles, sin que en la actualidad exista una definición sana, reduciéndolo muy frecuentemente al razonamiento lógico. A partir de esta concepción surge la importancia del pensamiento crítico en el proceso de enseñanza aprendizaje, con el propósito de hacer frente a una civilización que exige una manera de pensar diferente, que enfatiza en que los estudiantes desarrollen el llamado pensamiento crítico, como Villarini (2003) plantea, para que este sea un proceso de aprendizaje auténtico, que sustituya al proceso de aprendizaje mecánico, automático y memorístico, conocido como pseudo-aprendizaje y transforme al alumno, de acuerdo a lo que Richard y Elder (2005) proponen, en un agente activo con intención de aprender, capaz de cuestionarse para adquirir el conocimiento de manera autónoma.

Metodología

Con el objetivo de conocer en qué medida el ABP permite a los estudiantes desarrollar el pensamiento crítico en torno a problemas matemáticos, se plantearon las categorías: certero, analítico, creativo, autónomo y argumentativo. La muestra fue representada por un grupo de 20 estudiantes cuyas edades oscilan entre los 11 y 14 años, que proceden, en su mayoría, de familias desintegradas de un nivel socioeconómico bajo. La investigación se desarrolló en un municipio del Estado de México.

El enfoque metodológico del estudio fue cualitativo y la recolección de datos se hizo a través de entrevistas semiestructuradas y la observación. La investigación consistió en la aplicación de dos PBL, los cuales se desarrollaron de forma colaborativa. Los contenidos didácticos que abordaron fueron la resolución de ecuaciones lineales y la proporcionalidad. Los estudiantes a partir del planteamiento de un escenario definieron un problema haciendo uso de los siete pasos considerados por la estrategia didáctica del ABP.

La investigación consistió en cinco fases, las cuales se muestran a continuación:

Tabla1. Fases del experimento e instrumentos empleados en cada etapa de la investigación

Fase	Actividades	Instrumentos
Fase 1	Se aplicó a los participantes el "*ABP piloto*" con la finalidad de que los sujetos de la investigación, conocieran la técnica y esto no resultara una limitación después.	ABP piloto
Fase 2	Se aplicó el "*ABP1*".	ABP 1, cuyo contenido didáctico fueron las ecuaciones de primer grado.
Fase 3	Recopilación de datos, proporcionados por cinco alumnos cuyos desempeños académicos son de distinto nivel (malo, regular, bueno)	Entrevista semiestructurada
Fase 4	Se aplicó el "*ABP 2*"con el propósito de que los participantes resolvieran un problema relacionado con la temática de la proporcionalidad y que a la vez involucra el tema de las fracciones.	ABP 2, mismo que abordó el tema de proporcionalidad
Fase 5	Se aplicó nuevamente la "*Entrevista semiestructurada*", a los mismos participantes de la fase 3, para precisar conceptos y obtener mayor información.	"Entrevista semiestructurada".

Las actividades realizadas en cada temática se desarrollaron a lo largo de 3 sesiones con una duración de 50 minutos cada una, las cuales se estructuraron de la siguiente manera:

En la primera sesión se planteó un problema a los alumnos, utilizando el ABP como detonador para la búsqueda de soluciones, con la intención de que los alumnos utilizaran sus propios recursos y conocimientos previos, para analizar y reflexionar acerca de los procedimientos matemáticos con los que pudieran resolver el problema planteado.

Los cuestionamientos se orientaron a facilitar en los estudiantes la comprensión del planteamiento, con la finalidad de estimular su razonamiento crítico y creativo, así como la posibilidad de comunicar sus ideas y conceptos a otros. Se incluyeron cuestionamientos que incitaban a controversias y que dieran lugar a distintos puntos de vista, para que de esta forma los integrantes del equipo participaran activamente en definir el procedimiento o secuencia de operaciones a llevar a cabo para resolver el problema de manera eficiente. La entrevista como medio para la obtención de datos no observables, basados generalmente en declaraciones verbales de los sujetos y la observación, durante el desarrollo o inducción, los cuales permitieron al investigador generar elementos susceptibles de analizarse.

En la segunda sesión los equipos dispusieron de 10 minutos cada uno para exponer al grupo: sus hallazgos, la forma en que realizaron el análisis, los instrumentos utilizados y la propuesta de solución al problema, lo anterior con el propósito de que se diera una discusión al comparar las distintas estrategias de solución propuestas, utilizando para ello diversos mecanismos de

comunicación y argumentación, tanto gráfica como oral y escrita, que les permitiera compartir la información acerca de los significados matemáticos localizados.

Al término de la participación de cada equipo, dio inicio la tercera sesión, para analizar las distintas interpretaciones del problema, con el propósito de formalizar los conocimientos matemáticos, que los estudiantes debían asimilar.

Resultados

Para analizar la categoría denominada *certeza*, se contempló el desarrollo de los dos primeros pasos de la técnica del ABP, para la temática de las ecuaciones lineales los resultados muestran que la interacción entre los estudiantes para la comprensión y la definición del problema fue muy limitada, en consecuencia, el segundo paso del ABP que corresponde a cómo resolverlo, se vio mermado ya que los estudiantes no lograron concretar una explicación del escenario y no lograron definir el problema. Las observaciones registradas revelan que aunque de manera general los equipos comenzaron con la lectura del planteamiento, existió poca integración y falta de interés de algunos de sus integrantes lo que generó diversos distractores, desviándose fácilmente del tema y restándole importancia al trabajo, lo que derivó en que la mayoría de los equipos no pudieran plasmar de manera congruente la problemática planteada.

Sin embargo para el tema de proporcionalidad los resultados mostraron que los estudiantes se apropiaron con mayor facilidad de los términos y características del texto, logrando ligar lo que leían con la construcción de un significado adecuado. Aunque cabe destacar que no lograron desarrollar los pasos, ni la manera de cómo iban a resolver el problema definido colaborativamente. La certeza que mostraron tres de los equipos se limitó a reconocer que la mejor forma de lograr una solución era "dividiendo y multiplicando", expresiones que mostraron una limitada comunicación formal matemática.

El desarrollo de los pasos tres y cuatro del ABP que realizaron los estudiantes, permitió investigar la *categoría creativo*, los resultados para la temática de las ecuaciones lineales mostraron un grado diverso de creatividad por parte de los equipos para resolver la problemática al enfrentarla de distintas formas, modificando o ampliando y enunciando lo que conocían de forma congruente. Con respecto a lo que desconocían hicieron inferencias acerca de la solución del problema sin plantear alguna ecuación previamente y a través de métodos no convencionales establecieron distintas posibles soluciones entre un equipo y otro.

No obstante que los estudiantes consiguieron identificar y registrar los datos principales del planteamiento, no lograron inferir correctamente lo que desconocían, en este sentido algo relevante, es la existencia de cierto grado de confusión entre los participantes. Situación que

limitó en buena medida la creatividad de los estudiantes en el primer acercamiento para producir alternativas de solución al problema.

En el tema de la proporcionalidad los resultados mostraron que los alumnos se aproximaron a la problemática de diversas formas, al plantear distintas opciones para encontrar una solución, acerca de lo que conocían y desconocían del problema. Aunque los equipos se mostraron muy creativos en las actividades abordadas en el tema de la proporcionalidad presentaron dificultades al momento de argumentar sus hallazgos. Aspecto en el que su creatividad se vio disminuida en términos de causa-efecto, al no lograr establecer conexiones adecuadas entre un conocimiento y otro, esto es, no mostraron capacidad creativa para descubrir los errores que surgieron en el momento de exponer los razonamientos ante el grupo.

Con el fin de analizar la categoría *analítico*, se examinaron los resultados del quinto paso de la técnica del ABP. Durante el desarrollo de la temática que abordó las ecuaciones lineales, los resultados revelaron que los alumnos no identificaron aspectos o características comunes que les permitieran seguir un proceso adecuado al momento de intentar una solución, en virtud de que sus escasos conocimientos previos acerca de las ecuaciones lineales, lo cual explica el comportamiento a la resistencia para establecerlas como la mejor manera de resolver el problema, proponiendo la utilización únicamente de operaciones básicas.

De igual manera en el tema de proporcionalidad mostraron una deficiente capacidad de análisis, limitándose a describir que la mejor forma de resolver el problema eran las multiplicaciones y las divisiones. La disposición para organizar, ordenar y contrastar la información, que permitiera a los estudiantes enunciar la mejor forma de resolver el problema, surgió de manera individual, ya que se observaron deficiencias notables, en el desempeño colaborativo de los estudiantes.

Para la categoría *autónomo* en ambas temáticas los resultados no muestran mecanismos de búsqueda y selección de información, reflejaron una deficiente toma de decisiones para definir y desarrollar un plan de acción racional. La apatía y el desinterés por el trabajo colaborativo no les permitió discutir, analizar, comparar y profundizar en el problema para plantear razonamientos diferentes y construir de manera compartida significados matemáticos.

Al momento en que los alumnos compartieron sus soluciones al resto del grupo para reportar la construcción de sus respuestas, se analizó la categoría *argumentativo*, evidenciando que la argumentación y comunicación para exteriorizar los procedimientos de resolución fue deficiente, sin criterios válidos al momento de enunciar sus respuestas y soluciones. Poca capacidad para construir criterios propios, procedimientos coherentes y estructurados, en cambio fue evidente el uso del lenguaje cotidiano, así como argumentos confusos.

En términos generales, la capacidad de argumentación por parte de los alumnos, careció de opiniones ordenadas, fundamentadas y lógicas, que evidenciaran la apropiación tanto del lenguaje como del pensamiento lógico-matemático, manifestando incapacidad para traducir el lenguaje habitual a las diferentes expresiones de los lenguajes formales, usados dentro de las matemáticas para expresar ecuaciones.

De forma global los resultados obtenidos denotan que, no obstante que los problemas diseñados para aplicar la estrategia didáctica del ABP se contextualizaron con entorno social de los alumnos y especialmente con situaciones conocidas por ellos, los educandos no mostraron interés por resolver los problemas, particularmente en el caso del ABP que cuyo escenario versó en las ecuaciones lineales, pues el conflicto cognitivo inicial no impactó adecuadamente provocando desinterés por parte de los estudiantes.

En la técnica del ABP, el aprendizaje surge de la colaboración y la cooperación entre los estudiantes, sin embargo, si los alumnos no poseen la habilidad para trabajar en equipo, en un ambiente en donde se privilegie el respeto, la tolerancia, la empatía y la asertividad, es muy probable que no se logren los objetivos propuestos. Por ejemplo, en la aplicación del segundo ABP se puso de manifiesto que si el alumno no está convencido de querer integrarse a un determinado equipo, su participación no va a ser la adecuada.

Con esta investigación se puede concluir que aunque no se obtuvieron los resultados esperados y que la aplicación de la estrategia didáctica del ABP no garantiza la resolución de problemas planteados, es en el proceso donde existe el caudal de oportunidades para desarrollar en los estudiantes las habilidades cognitivas, tales como: el pensamiento crítico y la capacidad de análisis y síntesis, que faciliten el aprendizaje de conceptos y contenidos propios de la asignatura de matemáticas, brindando la posibilidad a los estudiantes de adquirir herramientas útiles que les ayuden a reconocer, plantear y resolver problemas de la vida real de manera colaborativa. A la vez, utilizar el ABP como promotor del trabajo colaborativo es ofrecer, dentro del aula, oportunidades para que los alumnos desarrollen habilidades sociocognitivas tales como: el respeto, la tolerancia, la capacidad de escuchar y de comunicarse. Definitivamente, el ABP puede ser una estrategia valiosa siempre y cuando los escenarios sean diseñados de acuerdo al tipo de alumno que se tiene a cargo.

Referencias bibliográficas

Cataldi, Z., Lage, F., y Cabero J. (2010). La promoción de competencias en el trabajo grupal con base en tecnologías informáticas y sus implicancias didácticas. Revista de medios y educación (37), 209/224.

Díaz, F. (2006). Reseña de "Aprendizaje basado en problemas. De la teoría a la práctica" de Carlos Sola Ayape. *Perfiles Educativos*, *28*, (111) 124-127.

INEE. (2009) El aprendizaje en tercero de secundaria en México. *Informe sobre los resultados de EXCALE 09, aplicación 2008*(pp.92-113) Distrito Federal, México: INEE.

Kalman, J. y Carvajal, E.(2007) Hacia una contextualización de la enseñanza y el aprendizaje en las aulas de la Telesecundaria*, Revista Latinoamericana de Estudios Educativos,* 37*(3-4),* 69-106 .

López, M.A. (2008). El aprendizaje basado en problemas. Una propuesta en el contexto de la educación superior en México. *Tiempo de Educar,9* (18)194-232.

Hernández, R. (2007). *Propuesta de Mejora al proceso Enseñanza –Aprendizaje de la asignatura de Planeación y Control de la Producción en las Universidades Tecnológicas de México.* ITESM-Campus Monterrey.

Morales, P., y Landa, V. (2004). Aprendizaje basado en problemas. *theoria (13),*145-157.

Restrepo, B. (2005). Aprendizaje basado en problemas (ABP): una innovación didáctica para la enseñanza universitaria. *Educación y educadores*, *8(-)*9-19.

Richard, P., y Elder, L. (2005). *Estándares de competencias para el pensamientoEstándares, Principios, Desempeño Indicadores y Resultados Con una Rúbrica Maestra en el Pensamiento Crítico*. Dillon Beach, U.S.A: Fundación para el Pensamiento Crítico.

Saiz, C. (2002). Enseñar o aprender a pensar. *Escritos de Psicología*,(6), 53-72.

Sánchez, I.R., y Ramis, F.J. (2004). Aprendizaje significativo basado en problemas. *Horizontes Educacionales*, (9),101-111.

SEP.(2009). Modelo Educativo Para el Fortalecimiento de Telesecundaria. Consultado en

http://telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/formacion/Modelo_EFT2009.pdf

Villarini, A (2003). Teoría y pedagogía del pensamiento crítico. *Perspectivas psicológicas, 3*(4),53-72.

Wacquant, Loic. (2005). Pensamiento crítico y disolución de la Dóxa. *Distancia critica, 2*(4),28-30.

DISEÑO DE HIPERTEXTOS EN MATEMÁTICA PARA ESTUDIANTES DE INGENIERÍA

Favieri Adriana, Williner Betina, Scorzo Roxana y Falsetti Marcela
Universidad Nacional de la Matanza. Argentina
adriana.favieri@gmail.com, bwilliner@yahoo.com.ar, rscorzo@yahoo.com.ar, marcelacristinaf@yahoo.com.ar

Resumen. En el presente reporte de investigación sintetizamos algunas reflexiones relativas al diseño de hipertextos sobre temas de Matemática destinados a alumnos de primer año universitario, objeto de estudio de nuestra línea de investigación. Los puntos a analizar versan sobre la planificación de dos hipertextos, uno sobre Funciones Trascendentes y el otro sobre el Método de Newton Raphson para el cálculo de raíces. Como colofón del reporte presentamos algunas reflexiones sobre el diseño de hipertextos para nivel educativo superior, surgida del análisis realizado y de nuestra experiencia investigativa.
Palabras clave: Hipertextos, matemática, diseño, software, ingeniería
Abstract. In this research report we summarize some ideas concerning the hypertext design on the field of mathematics aimed at first-year university students, subject matter of our research. The points deal with the design and planning of two hypertexts, one on Transcendental Functions and the other on the Newton Raphson method for calculating roots. To conclude, we present some thoughts on the design of mathematical hypertext for higher-level education, arising from our analysis and research experience.
Key words: Hypertext, mathematics, design, software, engineering

Introducción

Desde el año 2010 nuestra investigación se ha centrado en el diseño y desarrollo de hipertextos y su relación con las habilidades matemáticas. Además de realizar una intensa indagación sobre este recurso tecnológico, sus usos para la enseñanza y en especial su vinculación con la enseñanza de la Matemática, hemos diseñado e implementado dos hipertextos sobre temas de Cálculo diferencial en una variable en una prueba piloto con estudiantes de ingeniería.

Según Nelson (1962, citado en Grau y Muelas, 2008) un hipertexto es un tipo de escritura no secuencial, un texto que se divide en varias opciones y permite que el lector elija, creándose diferentes itinerarios de acuerdo a las decisiones que tome. Este tipo de materiales son ideales para trabajar en un aula universitaria, ya que posibilitan que el alumno se convierta en un usuario activo y constructor de su conocimiento, pero cuenta con la desventaja de que escasean en el mercado hipertextos específicos sobre temas de Matemática a nivel superior. Entonces somos los docentes los que nos convertimos en creadores de hipertextos y por lo tanto debemos indagar cuestiones sobre el diseño de los mismos. De acuerdo a la experiencia propia en el diseño de hipertextos y a la luz del marco teórico, analizamos distintos aspectos que se deben tener en cuenta cuando queremos crear este tipo de materiales. Reportamos aquí las primeras conclusiones sobre el diseño de hipertextos obtenidas luego de nuestro recorrido teórico y de la prueba piloto realizada.

Sobre el hipertexto y su diseño, consideraciones generales

Barthles (citado en Grau y Muelas, 2008) describió lo que se conoce hoy como hipertexto electrónico: "un texto compuesto por bloques de palabras (o imágenes) electrónicamente unidos en múltiples trayectos, cadenas o recorridos en una textualidad abierta, inacabada pero no incompleta, y descripta con términos como nodo, red, trama y trayecto". Por su parte, Cabero Almerama (1995) sintetiza algunos aspectos significativos que los materiales hipertextuales en contextos educativos aportan tales como:

a) Posibilitan al usuario transformarse en una persona que procesa en forma activa su conocimiento.

b) Rompen con el modelo tradicional para el cual el saber lo posee el docente y lo transmite a sus alumnos.

c) Facilitan que el sujeto interaccione con la información y seleccione la que considera más oportuna de acuerdo a sus necesidades.

Para darle un sentido pragmático al diseño de hipertextos hemos considerado lo señalado por Burbules (2006) y las indicaciones de WebGuru-India (2008), recopilando que para planificar un buen diseño es preciso tener en claro aspectos como:

- *Propósito del hipertexto*. Este es el primer paso en la planificación ya que si no tenemos en claro el objetivo perseguido a través del hipertexto, éste no puede ser realizado.

- *Destinatarios del hipertexto*. Debe considerarse a quiénes va dirigido el material y el nivel educativo en el cual se usará, ya que estos aspectos influyen en la complejidad en cuanto al diseño y al contenido del hipertexto.

- *Contenidos del hipertexto*. Decisiones sobre los contenidos deben hacerse al momento de la planificación del diseño. Por ejemplo: la profundidad con la que se tratará el tema, los registros en los cuales se presentará, entre otros.

- *Compatibilidad del hipertexto*. Debe verificarse que el software en el que se realizará el hipertexto funcione correctamente, que esté disponible en las computadoras de la institución en la que se usará, o que pueda visualizarse en algún software libre

- *Esquema del hipertexto*. Es aconsejable realizar algún esquema gráfico que ayude en el diseño, estableciendo los enlaces entre las distintas páginas o bloques de información. Esto puede hacerse a través de grafos o, si es mucha la cantidad de nodos, trabajar los enlaces a través de matrices.

Metodología de trabajo y análisis de la prueba piloto

La investigación encarada es de tipo exploratoria con una fase indagatoria y otra de desarrollo y puesta a prueba. En la fase indagatoria hemos recabado información sobre experiencias iberoamericanas en relación con el diseño e implementación de hipermedios. En la fase de desarrollo, y a los fines de una prueba piloto, hemos creado para nuestros alumnos universitarios de Análisis Matemático I (cálculo diferencial e integral en una variable) dos hipertextos: uno sobre Funciones Trascendentes y el otro sobre el Método de Newton Raphson para el cálculo de raíces. Analizaremos los aspectos anteriormente detallados en estos dos materiales

Destinatarios

En los dos casos los destinatarios fueron alumnos ingresantes a carreras de Ingeniería, con escasez de métodos de estudio, poco acostumbrados a aprender temas en forma independiente y con un buen manejo de la computadora.

Objetivos y contenidos

Respecto al objetivo propuesto para el hipertexto de Funciones trascendentes postulamos que el alumno logre comprender las características principales de las funciones exponenciales, logarítmicas, trigonométricas (directas e inversas) e hiperbólicas (directas e inversas). Entre las características mencionadas tenemos dominio e imagen, ceros, paridad, biyectividad, periodicidad (si corresponde), asíntotas y relación con su función inversa. Es por esta razón que sus nodos principales son: Funciones trigonométricas, Funciones exponenciales y logarítmicas y Funciones hiperbólicas. Los demás nodos y las trayectorias tienen que ver con las características mencionadas.

El objetivo que nos propusimos con el hipertexto sobre el método de Newton Raphson es que el alumno, en forma independiente, pueda comprender un método numérico para el cálculo de raíces utilizando uno de los conceptos vistos en clase como es el de recta tangente a una curva en un punto. Los nodos principales de este hipertexto son: Deducción del algoritmo (por dos caminos), Ejercicios resueltos y Ejercicios para resolver. Los enlaces entre nodos tienen que ver con las deducciones teóricas, su relación con la ejercitación resuelta, otros métodos de cálculo de raíces y conocimientos previos que el alumno debía tener para abordar el tema

Compatibilidad

Con respecto a la compatibilidad de un hipertexto nos estamos refiriendo a los programas utilizados en su creación, y si es posible visualizarlos correctamente en todas las computadoras o si por el contrario, es necesario contar con algún software especial. Consideramos que los

hipertextos educativos no deberían tener restricciones en cuanto a los programas, y en el caso de tenerlas, que sean las menores posibles.

En el hipertexto de Newton Rapshon utilizamos dos software: Word y Mathematica, que estaban instalados en las computadoras de la Universidad. La razón de esta elección se debió a la necesidad de contar con algún software adecuado para el manejo de simbología matemática y de gráficos, además de un procesador de textos. Los problemas de compatibilidad se presentaron en la interacción entre los dos software; es decir, los enlaces que vinculaban documentos de Word con los de Mathematica y viceversa.

En el hipertexto de Funciones trascendentes usamos el software Mathematica para su creación y el Mathematica Player para la visualización por parte de los alumnos. En el mismo incorporamos interactividades, vinculadas a gráficos de funciones, en las cuales el alumno puede accionar unos botones y observar las consecuencias en el gráfico. Esas interactividades no podían verse con la versión del software instalada en la Universidad, por lo que fue necesario recurrir a una versión de prueba gratuita y limitada en el tiempo. Para que los alumnos pudieran ver y utilizar estas interactividades fue necesario usar el Mathematica Player que es de descarga gratuita.

Como vemos, en las dos oportunidades los problemas de compatibilidad estuvieron vinculadas a las versiones de los programas disponibles en la Universidad.

Esquema

Presentamos a continuación el esquema principal de cada uno de los hipertextos mencionados.

Figura 1. Esquema de hipertexto del método de Newton Raphson para el cálculo de raíces.

La Figura 1 nos muestra los principales nodos del hipertexto, cada uno relacionado con el contenido que en él se desarrolla:

- *Introducción:* presentamos el problema a resolver (solución de ecuaciones) y explicamos en

forma muy breve en qué consisten los diferentes métodos de resolución.

❖ *Conocimientos previos*: definición de ecuaciones algebraicas y trascendentes, ecuación de recta tangente a una curva en un punto, polinomio de Taylor y término complementario de una función en un punto dado.

❖ *Ejemplo introductorio*: búsqueda de la raíz de una ecuación determinada, usando software Mathematica y explicando en qué consiste el método de una manera intuitiva.

❖ *Obtención del algoritmo. Deducción a través de la recta tangente*: desarrollo del método a través del gráfico de la función y la recta tangente a la curva en un punto cercano a la raíz. Deducción de la fórmula y sistematización del algoritmo.

❖ *Obtención del algoritmo. Deducción a través de polinomios de Taylor*. Derivación del método mediante polinomios de Taylor y término complementario.

❖ *Ejercicios resueltos*: ejercicios resueltos usando software Mathematica.

❖ *Análisis del error*: definimos cómo calcular el error y lo aplicamos a diferentes ejercicios.

❖ *Ventajas y desventajas*: cuándo es conveniente aplicarlo y en qué casos falla.

❖ *Ejercicios para resolver*: para que el alumno pueda practicar lo estudiado. Estos ejercicios pueden servir luego para el docente como feedback o evaluación del uso que le dio el alumno al hipertexto.

❖ *Otros métodos para hallar raíces de ecuaciones*: brindamos direcciones de internet donde el alumno puede explorar otros métodos de búsqueda de raíces como el método de la secante, método de bisección, entre otros.

En el caso del hipertexto de Funciones trascendentes, el esquema inicial es el siguiente:

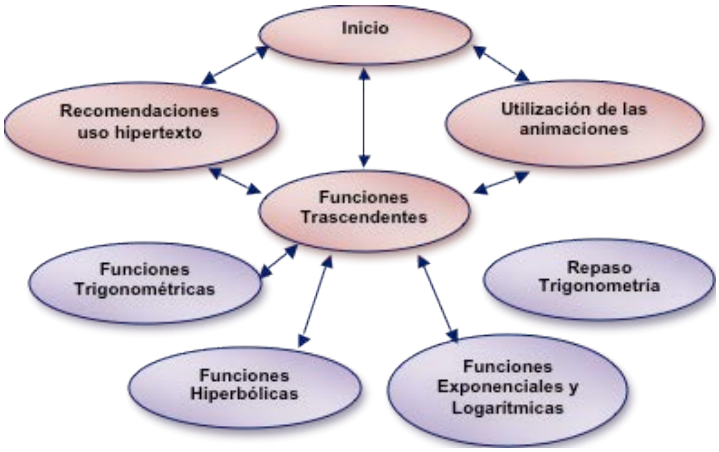


Figura 2. Esquema del hipertexto Funciones Trascendentes.

De acuerdo a la figura 2, los principales nodos del hipertexto de funciones trascendentes son:

- *Recomendaciones para el uso del hipertexto*: se presenta una breve descripción de los temas que se desarrollan y se describen los títulos que abarcan cada capítulo del mismo. Esta presentación está hecha a modo orientativo para que el alumno pueda tener un panorama general del material antes de comenzar a usarlo.

- *¿Cómo utilizar las animaciones?*: en este vínculo se presenta un breve tutorial para el uso correcto de las animaciones que contiene el material.

- *Comenzar*: que lleva a los nodos: funciones trigonométricas directas e inversas, funciones hiperbólicas directas e inversas, funciones exponenciales y logarítmicas, repaso de trigonometría y repaso de conceptos relacionados.

- *Funciones trigonométricas*: que lleva a los nodos: función seno, función coseno, función tangente, función arcoseno, función arcocoseno y función arcotangente.

- *Funciones hiperbólicas*: que lleva a los nodos: función seno hiperbólico, función coseno hiperbólico, función tangente hiperbólica, función argumento seno hiperbólico, función argumento coseno hiperbólico y función argumento tangente hiperbólica.

- *Funciones exponenciales y logarítmicas*: que lleva a los nodos: funciones exponenciales con base mayor que uno, funciones exponenciales con base menor que uno, funciones logarítmicas con base mayor que uno y funciones logarítmicas con base menor que uno.

- *Repaso de Trigonometría*: este vínculo ofrece un repaso de los conceptos de trigonometría que son los conocimientos previos necesarios para abordar el temario del hipertexto. Entre ellos encontramos: ángulo y sistema de medición, clasificación de ángulos de acuerdo a su medida, circunferencia trigonométrica, ángulos principales y su ubicación en la circunferencia trigonométrica, relaciones trigonométricas en un triángulo rectángulo, segmentos representativos de las funciones trigonométricas, signo de seno y coseno en los cuadrantes, valores de las funciones de los ángulos principales e identidades trigonométricas.

A continuación detallamos, a modo de ejemplo, el nodo Funciones Trigonométricas, que comparte la estructura con los nodos Funciones Hiperbólicas y Funciones Exponenciales y Logarítmicas

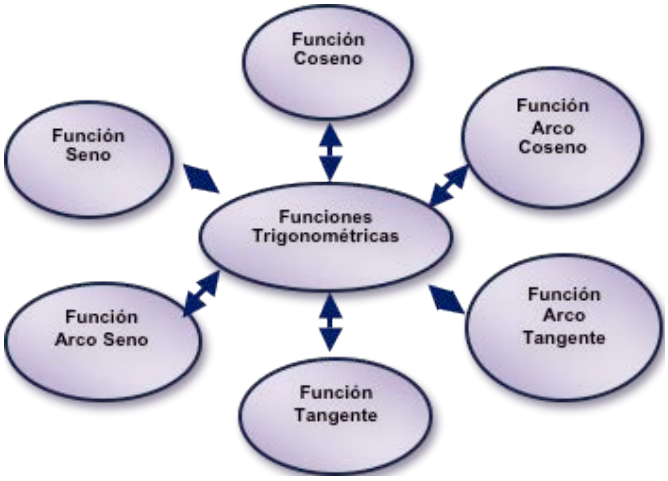


Figura 3. Ejemplo de nodo de Funciones Trigonométricas.

En cada uno de los nodos vinculados desde el nodo Funciones Trigonométricas, el alumno obtiene información sobre las características de la función como ser: dominio e imagen, ceros, periodicidad, paridad o no de la función, clasificación en biyectividad o sus opciones, intervalos de crecimiento y función inversa. Asimismo el alumno lector se encuentra con nodos vinculados al recuerdo de los conceptos relacionados con las características de las funciones que nombramos anteriormente.

Los nodos de las tres funciones directas tienen enlaces a los nodos "Deducción del gráfico a partir de la circunferencia trigonométrica", "Obtención de su inversa" y "Funciones Trigonométricas". El nodo "Deducción del gráfico a partir de la circunferencia trigonométrica" permite la interactividad ya que el alumno, a través de un botón deslizante puede visualizar el segmento correspondiente a la función seno en la circunferencia trigonométrica y cómo este segmento se traslada a un par de ejes cartesianos generándose así, en forma interactiva y manipulativa el gráfico de la función.

A modo de conclusión

Luego del análisis realizado, tanto teórico como de la actuación y producción de los estudiantes que abordaron los dos hipertextos, podemos establecer algunas consideraciones a tener en cuenta a la hora de diseñar este tipo de materiales. En principio debemos elegir:

- ❖ Programas que proporcionen una escritura y manipulación de simbología, fórmulas, gráficos y figuras acorde al contenido matemático seleccionado.
- ❖ Programas adecuados que permitan aumentar los niveles de compatibilidad del hipertexto, entendiéndose por compatibilidad la correcta interacción entre programas especializados en matemática y procesadores de texto.
- ❖ Cantidad apropiada de enlaces en la navegación del hipertexto, ya que si son pocos resulta

poco atractivo y si están en demasía puede provocar confusión en el alumno que puede desistir de continuar el estudio del tema mediante el recurso presentado.

Luego tenemos que tener en cuenta:

- La importancia de incluir un nodo relacionado con los conocimientos previos vinculados con el tema desarrollado en el hipertexto.
- La oportunidad de acceder a la información desde distintos tipos de representación: texto, símbolos, gráficos, imágenes y sonido de acuerdo a las necesidades del usuario.
- Los costos o la disponibilidad de software en las instituciones que estemos trabajando.

Referencias bibliográficas

Burbules, N. (2006). *Educación: Riesgos y promesas de las Nuevas Tecnologías de la información.* Buenos Aires: Ediciones Granica S.A.

Grau, J. y Muelas, E. (2008). *Módulo 5: sistemas hipermediales. Primera parte.* Material utilizado en el Seminario "Material Didáctico" correspondiente a la Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales de la UNCo.

WebGuru-India, I. (2008). *Design you imagination. Free web design e-book.* Obtenido de WebGuru Infosystems: http://www.webguru-india.com/free-webdesign-ebook.php

Cabero Almerama, J. (1995). *Navegando, construyendo: la utilización de los hipertextos en la enseñanza.* Recuperado el 24 de agosto de 2010, de http://www.lmi.ub.es/te/any95/cabero_hipertext/

APLICACIONES MULTIMEDIALES EN LA ARTICULACIÓN

Analía Elisabeth Almiron, Nori Esther Cheein de Auat, Pedro Daniel Leguiza, Liliana Graciela Zajac, Mariela Beatriz Sánchez, Stella, Maris Zalazar, Rosa Viviana Ruiz y Marina Bloeck
Universidad Nacional del Chaco Austral. Argentina
ana-almiron@hotmail.com

Resumen. Este trabajo presenta las acciones realizadas en el marco de un proyecto presentado por la Universidad Nacional del Chaco Austral y seleccionado por el Voluntariado Universitario, denominado "Alfabetización Digital en_m@t", cuyo objetivo es el de fortalecer la articulación entre el Nivel Medio y Superior, ofreciendo capacitación extracurricular en Matemática, a través de entornos virtuales. Para el desarrollo de la propuesta se llevó a cabo un trabajo conjunto con docentes y alumnos de ambos niveles, a través del diseño y la implementación de un Aula Virtual para el Curso de Nivelación, favoreciendo la adquisición de competencias cognitivas matemáticas en ambientes virtuales.

Palabras clave: articulación, entornos virtuales, modalidad b-learning, aprendizaje autónomo

Abstract. This paper presents the actions taken as part of a project submitted by the National University of the Chaco Austral and selected by the University Volunteers, called "Digital Literacy in_m @ t", whose aim is to strengthen the relationship between the Middle and Upper Level offering extracurricular training in mathematics, through virtual environments.
For the development of the proposal was carried out joint work with teachers and students from both levels, through the design and implementation of a Virtual Classroom for Leveling Course, favoring math cognitive skills in virtual environments.

Key words: virtual joint, surroundings, modality b-learning, independent learning

Introducción

La política educativa en la Argentina enfatiza la necesidad de un sistema educativo democrático que permita avanzar en la articulación interniveles respetando las múltiples perspectivas e intereses de cada uno de ellos.

Esta necesidad ha sido reconocida por la Universidad Nacional del Chaco Austral (UNCAUS) desde su política institucional, la cual propicia la implementación de acciones que apunten a la articulación entre el Nivel Secundario y Superior, con el objetivo de facilitar el acceso de los estudiantes al ámbito universitario y posibilitar la continuidad y finalización de sus estudios. También es un hecho conocido que en la enseñanza universitaria los mayores indicadores de deserción se registran en los años iniciales. Este fenómeno parece estar asociado a los índices de fracaso que se detectan en las asignaturas de las ciencias básicas, en particular en aquellas del área Matemática.

A partir de la problemática planteada, la UNCAUS considera que una línea de acción concreta es trabajar con los alumnos que culminan el Nivel Secundario y que aspiran a seguir estudios universitarios, a través de la implementación del Curso de Nivelación del área Matemática utilizando la modalidad b-learning.

La decisión de implementar esta modalidad se fundamenta en que actualmente se presentan

escenarios tecnológicos que nos enfrentan a nuevos desafíos y resulta necesario incentivar a los jóvenes hacia una formación tecnológica-matemática.

Muchos docentes han tratado de armonizar la enseñanza presencial con las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) creando escenarios mixtos de aprendizajes de donde surge el modelo b-learning (Blended Learning) que combina el aprendizaje a distancia con el aprendizaje presencial. En general, los entornos virtuales de aprendizaje son cualquier combinación a distancia y presencial de interacciones de aprendizaje que contengan algún nivel de virtualidad en el tiempo y el espacio, que permiten la interacción sincrónica y asincrónica entre el profesor y el alumno.

Para Salinas (2000) "…las TIC han venido por una parte a ampliar la oferta educativa para los estudiantes de manera que se les ofrecen nuevos modelos de enseñanza que van desde la presencial a la distancia, sin olvidarnos de las propuestas mixtas donde los alumnos pueden realizar parte de la actividad en el espacio del aula y parte en el ciberespacio".

Elena Barberá (2001) realiza un análisis minucioso de la interacción, considerándola como "elemento clave de los procesos de enseñanza y aprendizaje de contextos virtuales instruccionales".

En Ciencias Exactas el proceso de aprendizaje implica dedicación y tiempo fuera del aula y el modelo b-learning puede resultar un valioso recurso para consultas, fomentando la autonomía de trabajo, especialmente cuando se buscan diversos enfoques a la hora de abordar la resolución de problemas, el trabajo colaborativo y cooperativo.

Este trabajo describe la implementación del Curso de Nivelación del área Matemática, bajo la modalidad b-learning, con la implementación de un entorno virtual de aprendizaje basado en software libre, Moodle.

Sobre la modalidad blended learning (b-learning)

Blended learning, término inglés que se traduce como: formación combinada, aprendizaje combinado o escenarios múltiples, donde se combinan actividades presenciales, sincrónicas y de e-learning (aprendizaje electrónico) como una modalidad integrada de aprendizaje.

La incorporación de b-learning usando TIC, requiere aprovechar al máximo su potencial como instrumento cognitivo para interactuar y comunicarse, favoreciendo adquisición y práctica de cúmulos de información o contenidos curriculares estáticos de manera más eficiente.

La modalidad b-learning, es un desafío, demanda que los docentes se embarquen en nuevos modos de enseñar, que los alumnos aprendan a integrar diferentes espacios de formación y que las instituciones reestructuren sus tradicionales misiones de formación, investigación y extensión en

un contexto nuevo.

Dentro de los elementos subyancentes que se distinguen en el aprendizaje colaborativo, presentes en la modalidad mencionada, se encuentran los siguientes (Driscoll & Vergara, 1997, citados en Zañartu, 2003): responsabilidad individual, todos los miembros son responsables de su desempeño individual dentro del grupo; interdependencia positiva, los miembros del grupo deben depender los unos de los otros para lograr la meta común; habilidades de colaboración, necesarias para que el grupo funcione en forma efectiva, como el trabajo en equipo, liderazgo y solución de conflictos; interacción promotora, los miembros del grupo interactúan para desarrollar relaciones interpersonales y establecer estrategias efectivas de aprendizaje.

Sobre Moodle

Moodle fue creado por Martin Dougiamas con el propósito de proporcionar un Entorno virtual de enseñanza y aprendizaje para la creación y gestión de cursos online a partir de una distribución gratuita bajo licencia de open source. La plataforma Moodle, desde el punto de vista arquitectónico, es un sitio web implementado en PHP que gestiona bases de datos SQL de múltiples orígenes (MySQL, PostgreSQL) mediante una capa de abstracción que permite distribuir materiales de aprendizaje, crear y gestionar debates temáticos y tablones de anuncios, pasar cuestionarios a los estudiantes, evaluar tareas, integrar recursos de internet, crear glosarios y diccionarios, gestionar el tiempo a través de un calendario global de distintas asignaturas, ofrecer herramientas de comunicación entre los estudiantes, como la mensajería instantánea, permitir la tutoría electrónica en privado o en grupo, calcular estadísticas, gestionar las calificaciones, etc. (Molist, 2006).

Desde su concepción se basa en el paradigma de aprendizaje construccionista social, esto es, en el que la base del aprendizaje es la construcción de conocimiento para los demás de forma colaborativa, donde todos los miembros de una comunidad se benefician, al ser creadores y receptores del conocimiento, aumentando significativamente los beneficios de un enfoque construccionista puro.

Una de las características más interesantes de Moodle es que brinda herramientas que posibilitan al docente medir el nivel de asimilación de conocimientos y habilidades del estudiante mediante actividades como los cuestionarios, las tareas, los talleres y los foros. Algunas de estas actividades pueden diseñarse con el fin de que el estudiante pueda autoevaluarse.

Moodle se articula en torno a tres módulos: de comunicación, compuesto básicamente de tres elementos fundamentales e imprescindibles en cualquier entorno de formación totalmente a distancia o semipresencial, correo electrónico, foros de discusión y chats; de contenido de

materiales, tales como, editor de texto, etiquetas, recursos, archivos de imagen, archivos PDF, lecciones; de actividades, como cuestionarios y exámenes para comprobar el grado de adquisición de conocimientos.

Modalidad de trabajo

En este trabajo se muestran las acciones realizadas en el marco de un Proyecto de Voluntariado Universitario de la Universidad Nacional del Chaco Austral, cuya denominación es "Alfabetización Digital en_m@t", siendo su objetivo el de fortalecer la articulación e integración entre el Nivel Secundario y el Superior, ofreciendo capacitación extracurricular en Matemática, a través de entornos virtuales. Esta propuesta pretende construir un ámbito de reflexión conjunta entre la Universidad y las Instituciones de Nivel Secundario, por ello resulta necesario promover este Curso de Nivelación en el área Matemática a todos los interesados en formar parte de la comunidad universitaria de la UNCAUS.

El Curso se estructuró en cuatro Módulos con la siguiente distribución de contenidos:

MÓDULO 1: Conjuntos Numéricos; MÓDULO 2: Trigonometría; MÓDULO 3: Relaciones y Funciones; MÓDULO 4: Expresiones Algebraicas.

Para abordar los contenidos se diseñó un Material de Estudio, el cual ha sido preparado, de modo que el alumno pudiera comprender y estudiar los contenidos básicos del Curso, mediante definiciones y ejemplos resueltos, que les permitiera internalizar, de forma autónoma, cada tema propuesto. También se elaboró un Material de Actividades con ejercicios y problemas y con sugerencias para trabajar con el material de estudio.

Para el desarrollo de la propuesta se trabajó con la modalidad b-learning, que consistió en instancias presenciales y trabajo virtual. A continuación describiremos cada una de las instancias.

Instancia Presencial

En la Instancia Presencial se ofrecían tutorías presenciales, a cargo de Docentes y Alumnos del último año del Profesorado en Matemática, para aclarar dudas sobre los contenidos y sobre la utilización del Aula Virtual.

Los encuentros se realizaban quincenalmente, desde el mes de septiembre al mes de diciembre, en distintas localidades de la provincia del Chaco como ser: Tres Isletas, Hermoso Campo, Machagai, Avia Terai, Quitilipi, Presidencia de la Plaza, Villa Ángela, Charata y en Presidencia Roque Sáenz Peña. (Figura 1).

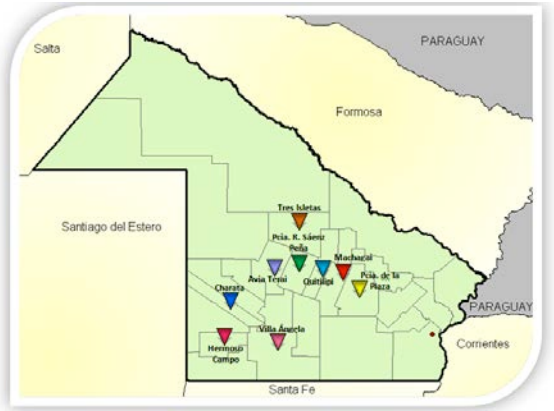


Figura 1. Imagen de la Provincia del Chaco en la cual se destacan las sedes de dictado del Curso de Nivelación

Como se puede observar en el mapa de la provincia del Chaco, se abarcó una gran zona de influencia de la UNCAUS, institución ubicada en la ciudad de Presidencia Roque Sáenz Peña, Chaco, Argentina.

Instancia Virtual

Para esta instancia se diseñó e implementó un Aula Virtual en la plataforma Moodle con el objeto de promover el trabajo intelectual autónomo y el auto-aprendizaje y favorecer la producción de contenidos y aplicaciones multimediales y el aprovechamiento de las TIC en el aula.

El Aula Virtual contaba con la siguiente estructura: Cronograma de Actividades (indicando días, horarios y metodología de trabajo para las tutorías presenciales); Contenidos; Foros; Chat; Mensajería Interna y Calificaciones.

El material de estudio estaba dispuesto en el Aula Virtual en forma secuenciada, pudiéndose observar la estructura de los mismos en la Figura 2.

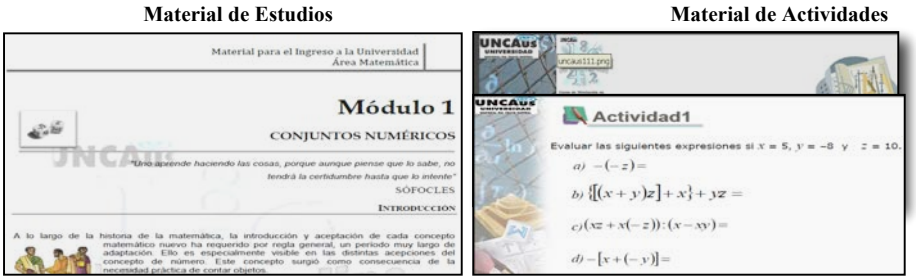


Figura 2. Materiales de Trabajo.

Como se indicó, en el Aula Virtual se disponía, entre otras herramientas, de foros y chats que sirvieron para lograr el acompañamiento y orientación de los alumnos para el abordaje de los

contenidos. En la Figura 3 se puede observar una intervención de un foro sobre consultas acerca de la resolución de actividades del Módulo 1.

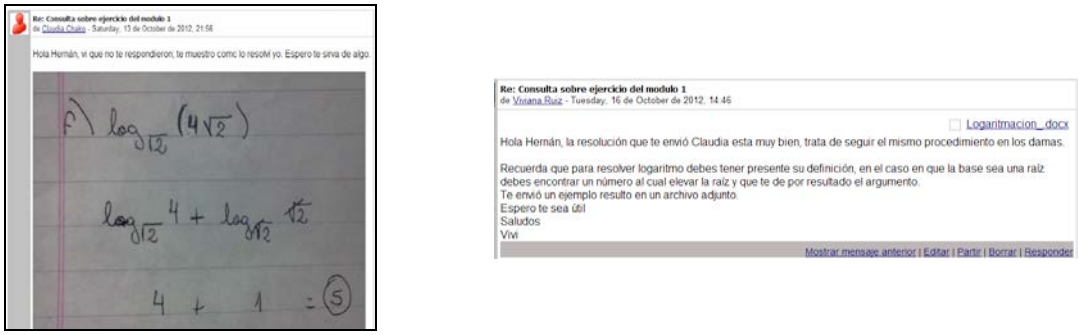


Figura 3. Ejemplos de intervención en los Foros.

Al finalizar cada módulo, y luego de la clase presencial, los alumnos debían resolver un Cuestionario con ejercicios de Aplicación (Actividad de entrega Obligatoria) diseñado con respuesta múltiple choice como muestra la Figura 4, el cual debía descargarlo del Aula Virtual para resolver e identificar la opción correcta y luego enviarlo a su Tutor para su corrección.

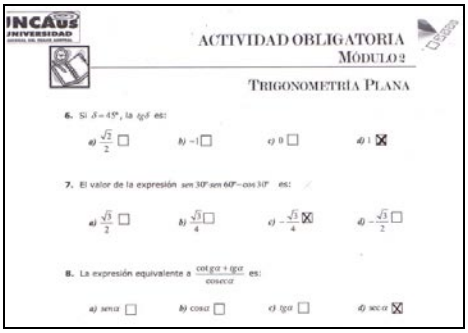


Figura 4. Cuestionario, Actividad de entrega Obligatoria, enviado por un alumno.

Resultados

Con el propósito de evaluar la implementación de la propuesta se aplicó una encuesta, anónima y voluntaria, a los alumnos que participaron en el Curso de Nivelación; y también se realizó un análisis de las intervenciones en los foros.

A continuación se presentan los resultados más destacados.

Resultados de la Encuesta

En la Encuesta se indagó sobre los motivos por el cual utilizó el Aula Virtual, los resultados se resumen en el Gráfico N°1.

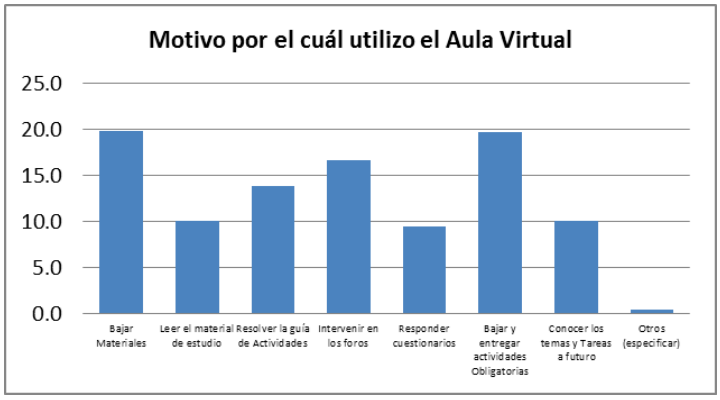


Gráfico 1. Resultados de la Encuesta implementada en el año 2012 a los aspirantes a ingresar a la Universidad.

Como se puede observar en la representación gráfica la mayoría de los alumnos utilizó el Aula Virtual para "bajar materiales o entregar Actividades Obligatorias", "intervenir en los foros" y "resolver guías de actividades".

También se solicitó a los alumnos que calificaran el dictado del Curso de Nivelación, cuyos resultados se muestran en la siguiente tabla.

Tabla 1. Opinión sobre el dictado del Curso de Nivelación

CATEGORÍAS	Porcentaje
Excelente	18 %
Muy buena	47 %
Buena	30 %
Regular	4 %
Mala	1 %
TOTAL	100 %

De la tabla anterior se observa que casi la totalidad de las respuestas fueron favorables a la modalidad y solo un 5% opinaban como regular o mala. Además, de seleccionar una de las categorías indicadas anteriormente, los alumnos debían fundamentar su elección. Entre las respuestas más relevantes se destacan:

> "Las clases de tutorías (presenciales), fueron muy personalizadas y bien explicadas"; "El dictado fue muy ordenado y resultó bueno…"; "Excelente profesores…";

Otra de las preguntas realizadas se refirió a los beneficios del dictado del Curso de Nivelación destacándose en este caso la disponibilidad de horarios para realizar las tareas y en la entrega de los trabajos. También valoraron la metodología aplicada en los materiales de estudio y de actividades destacando la accesibilidad del lenguaje. Además recalcaron la comunicación con los docentes tutores, quienes acompañaron a los alumnos en el dictado del curso tanto virtual como

personalmente.

Con respecto a la intervención en los foros, los alumnos argumentaron: "Fue positivo conocer la opinión de otros, para no quedar encerrado en lo que uno piensa", "conocer otras miradas", "ver otros puntos de vista para reformular mis conceptos".

Acerca de la opinión general de los alumnos sobre la implementación de la propuesta se destaca:

- Un 50% piensa que la disponibilidad de Información es excelente.
- El 64% opina que el aprendizaje de la disciplina es muy bueno.

Análisis de la intervención en los foros

Se analizó la participación de los alumnos y docentes en los foros lo que permitió concluir que: posibilitan diferentes niveles de interacción: estudiante-estudiante, estudiante-docente para la construcción del conocimiento; posibilitan la participación activa en proyectos colaborativos y la construcción colectiva de la solución de un problema o ejercicio; potencian la adquisición de habilidades y competencias de comunicación, específicamente la escritura.

Conclusiones

De los resultados obtenidos se puede afirmar que el dictado del Curso de Nivelación con la modalidad b-learning, utilizando plataforma Moodle, contribuyó a la adquisición de conocimientos de manera significativa, aprovechando los recursos de las Tecnologías de la Información y de la Comunicación.

La implementación de la propuesta fue muy bien recibida por los aspirantes a ingresar a la Universidad Nacional del Chaco Austral, permitiendo generar la adquisición de competencias cognitivas matemáticas en ambientes virtuales, logrando además:

- participación activa por parte de los alumnos en el uso de entornos virtuales de aprendizaje, propiciando la alfabetización digital;
- incorporar, ampliar o reafirmar conceptos matemáticos y a su vez adaptarse a una modalidad de enseñanza y aprendizaje basada en las TIC;
- fortalecer capacidades, aptitudes y saberes en el área Matemática para el acceso al Nivel Superior;
- implementar en la UNCAUS acciones pedagógicas en el desarrollo y en la producción de contenidos y aplicaciones multimediales.

Referencias bibliográficas

Molist, M. (2006) *Institutos y universidades apuestan por la plataforma libre de 'e-learning' Moodle*. EL PAÍS.

Barberá, E. y otros (2001): *Enseñar y aprender a distancia: ¿es posible?*, http://www.uoc.es/web/esp/art/uoc/0105018/ensapren.html (14/02/02).

Salinas, J. (2000) *¿Qué se entiende por una institución de educación superior flexible?*. en Cabero,J. Salinas, J. con otros (Coord.) (2000): Las Nuevas tecnologías para la mejora educativa. Kronos, Sevilla. ISBN: 84-85101-25-1, 451-466.

Zañartu, L. M.(2003). *Aprendizaje colaborativo: Una nueva forma de diálogo interpersonal y en red*. Revista Digital de Educación y Nuevas Tecnologías. http://contextoeducativo.com.ar/2003/4/nota-02.htm.

UNA PROPUESTA DE APRENDIZAJE PARA LA PENDIENTE CON EL USO DE GEOGEBRA

Antonio González y Ricardo Cantoral
Cinvestav-IPN. México
jgonzalezm@cinvestav.mx, rcantor@cinvestav.mx

Resumen. El tratamiento tradicional de la recta considera dos parámetros de variación en el cual uno de ellos, en la mayoría de los casos, resulta ambiguo al no ser observable directamente. Se propone una situación de aprendizaje para estudiar la noción de pendiente, en que el alumno visualice, manipule y emplee sus propias herramientas en el entorno del software (GeoGebra), tomando como referencia fenómenos físicos cotidianos. Partiendo de la hipótesis que para acceder al pensamiento y lenguaje variacional se requiere, entre otras cosas, del manejo de un universo de formas gráficas extensas y ricas en significados por parte del que aprende.
Palabras clave: secuencia didáctica, variación, visualización, GeoGebra
Abstract. Traditional treatment straight considers two variation parameters in which one of them, in most cases, not being ambiguous directly seen. We propose a learning situation to study the concept of slope, in which the student visualize, manipulate, and use its own tools in the software environment (GeoGebra), with everyday physical phenomena references. Assuming that thought and language access variation requires, among other things, the management of a large universe of graphic forms and rich meanings by the learner.
Key words: teachingsequence, variation, view, GeoGebra

Introducción

En estos tiempos es necesario estar completamente actualizado en términos tecnológicos, ya que la gran mayoría de los estudiantes se encuentran inmersos de manera natural y cotidiana con recursos de dicha índole, de modo que es importante asumir un papel que genere una devolución del conocimiento que sea para ellos de interés, y sobretodo haciendo que se involucren con situaciones amigables y cotidianas.

La visualización se propone como alternativa para el manejo de las propiedades gráficas de las funciones, y como medio para generar argumentos que permitan abandonar el paradigma estrictamente algebraico en la resolución de problemas matemáticos. Entendiendo por visualización a la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual (Cantoral, R. y Montiel, G., 2001).

Partiendo de la hipótesis que para acceder al pensamiento y lenguaje variacional se requiere, entre otras cosas, del manejo de un universo de formas gráficas extenso y rico en significados por parte del que aprende (Cantoral & Farfán, 1998). Lo anterior, en conjunto, permite aportar elementos para el diseño de situaciones de aprendizaje para las matemáticas de nivel básico, respondiendo a las necesidades de las recientes reformas, "considerando la relevancia, en la cuestión de integrar herramientas tecnológicas dentro de lo previsto en la educación matemática" (Lavizca, 2010,

p.106). Los recursos tecnológicos han llegado a los salones de clase, de modo que es de gran importancia hacer uso de ellos desarrollando situaciones de aprendizaje que fortalezcan y replanteen los contenidos y métodos de enseñanza.

A continuación se presenta un diseño didáctico, en el que se le permite interactuar al alumno de manera directa con un software libre que combina el algebra y la geometría de manera dinámica llamado GeoGebra, como material de apoyo y complemento de hojas de trabajo, en el que se pretende abordar el estudio de la pendiente de una recta, bajo un punto de vista socioepistemológico, la línea de investigación toma como objeto el estudio de la socioepistemología de los saberes matemáticos e incluye las situaciones primarias del alumno con el fin de rediseñar el discurso matemático escolar (Cantoral, 1998 en Mirón 2000).

En el presente trabajo se pretende dar una herramienta para abordar el tema de la pendiente de la recta, como una primera aproximación al estudio formal de la recta, en el discurso matemático escolar, a manera que el alumno pueda relacionar, clasificar y distinguir el papel que juega el parámetro en lo analítico de la ecuación de la recta, esto es a manera de una secuencia didáctica, donde el alumno realiza predicciónes, ensayos y pruebas dentro de un ambiente mas familiar para ellos en estos tiempos donde la tecnología cobra un papel funamental en la cotidianeidad de los alumnos.

Análisis preliminar

El análisis del diseño propuesto se elabora partiendo del llamado triángulo didáctico, unidad fundamental de análisis de la didáctica (D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I., 2002) y sobre los diferentes roles que juega el profesor en su intervención en el aula (Brousseau, 1994).En este apartado, se realiza un análisis previo desde los tres polos del triángulo didáctico, a saber, lo epistemológico, lo cognitivo y lo didáctico. Con ello se pretende fundamentar el diseño de la situación de aprendizaje que se plantea.

Componente epistemológica

La pendiente de una recta se ha definido como una razón, o inclinación que tiene la representación analítica dada por la ecuación $y=mx+b$, donde m representa dicha pendiente, que acierta forma los alumnos atreves del tiempo han podido desarrollar una manipulación algebraica adecuada para su cálculo, sin embargo se ha observado dificultad en la conceptualización de los procesos de representación de dicho concepto, de modo que la interpretación se relaciona a un cociente del incremento de la variable independiente, y no como una palabra cotidiana que se puede dar como pensar en un automóvil que baja por una cuesta pendiente abajo, o el esfuerzo que implica caminar

a la cima de una loma con una mayor pendiente.

Componente didáctica

En primera instancia se trata que el alumno se identifique en una situación en la que se encuentre familiarizado sin que pueda asociar un comportamiento que en ocasiones, pase desapercibido un concepto matemático dada esta situación por cierta cotidianidad, realizada esta asociación es posible hacer ver al alumno que note ciertos detalles de la situación, sin la necesidad de que la ejecute físicamente, se presentan ejemplos acompañados de preguntas guiadas, y experimentando en el software de Geogebra para contestar a las preguntas presentadas, bajo la intención de que asocie valores positivos y negativos a la inclinación de la recta, esperando que llegue a asociar un valor aproximado a la recta que finalmente se presenta, a manera de poder encontrar valores numéricos que asocien una inclinación.

Componente cognitiva

La investigación sobre cognición reporta dificultades para lograr la articulación de diversos registros de representación desde hace algunos años; en lo visual, por ejemplo, resulta complejo para muchos de los estudiantes y profesores (Ocampo, 1992 en Mirón, 2000). Si un concepto tiene diferentes representaciones origina dificultades para los alumnos, aún en escenarios que hacen uso de la tecnología. Es importante hacer que el alumno pueda asociar el comportamiento del parámetro de la pendiente dada por la ecuación $y=mx+b$ con el simple movimiento de la mano para representar dicha asociación, además de poder obtener el valor dado por el cociente; $y = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

Secuencia Didáctica

Actividad 1

En el dibujo que se muestra a continuación se puede ver a un ciclista recorriendo un camino ondulado, el recorrido que debe hacer para llegar al final del trayecto, tiene variaciones de rapidez:

a) Pinta de color rojo las secciones del camino en creas que el ciclista tiene mayor rapidez.

b) Pinta de azul la sección en que creas que tiene menor rapidez.

c) Pon una equis en el lugar o lugares, donde creas que sería el mejor lugar para descansar.

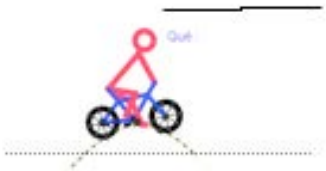
d) ¿Qué pa ilear, y dónde terminaría?

e) ¿Sería también un lugar para descansar y tomar fuerzas para continuar el recorrido?

f) ¿Crees que sea necesario aumentar o quitar equis en tus marcas iniciales? si es así, realizas en el siguiente dibujo.

Actividad 2

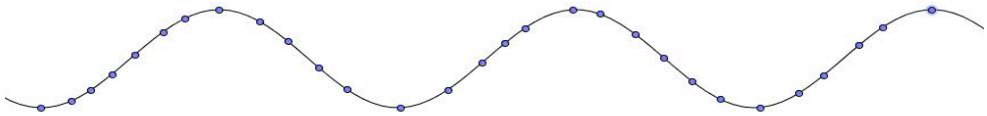
Imagina ahora que la vista del ciclista la pudieras dibujar con una línea recta, de modo que puedas indicar la dirección en la que está viendo cuando la bicicleta se encontrara justo sobre los puntos marcados en el camino ondulado.



a) Traza de color rojo la vista del ciclista en la que crees que realizará un menor esfuerzo en pedalear, si se encontrara sobre los puntos marcados

b) Traza de color azul la vista del ciclista en la que crees que realizara un mayor esfuerzo en pedalear, si se encontrara sobre los puntos marcados.

c) Traza de un color diferente la vista del ciclista en los lugares de descanso.



d) Si no tuvieras colores, como distinguirías las rectas en las que se representa un mayor esfuerzo, menor esfuerzo, y nada de esfuerzo.

Mayor esfuerzo_____. Menor esfuerzo_____. Nada de esfuerzo_____.

A la recta que se genera con la vista del ciclista la clasificaremos según su inclinación, a esta clasificación se le conoce con el nombre de *PENDIENTE*, y se representa con la letra *m*.

e) Abre el siguiente applet_Actividad_2, y toma el punto verde con el cursor del ratón para mover la bicicleta, observa ahora la rueda delantera de la bicicleta, de modo que ahora se genera la recta con el trayecto de esa rueda, toma nota de los valores que toma la *pendiente=m* en el recorrido del camino, y contesta los siguientes incisos:

a) Anota siete valores que va tomando la recta que se genera con la rueda del ciclista cuando tiene un menor esfuerzo.

b) ¿Cómo son estos valores?

c) ¿Qué inclinación tiene la recta en esos valores?

d) ¿Cómo son estas rectas?

e) Anota siete valores que va tomando la recta que se generan con la rueda del ciclista cuando tiene un mayor esfuerzo.

f) ¿Cómo son estos valores?

g) ¿Qué inclinación tiene la recta en esos valores?

h) ¿Cómo son estas rectas?

i) ¿Cómo son las rectas cuando la pendiente es cero?

j) ¿a qué crees que se deba?

Actividad 3

a) A continuación se muestran algunas rectas en diferente posición, clasifícalas utilizando los siguientes símbolos "+, -, 0" en los que creas que corresponda a la pendiente según su inclinación.

b) En el siguiente applet_Actividad_3, se ve la recta junto con los valores que va tomando la pendiente, comprueba la clasificación que realizaste, y pon una ☑ si coinciden con los que tiene el applet, y marca con una ☒ los que no coinciden.

c) Los valores que va tomando la pendiente en el applet son justamente calculados por el

software *Geogebra,* los cuales arroja cantidades exactas, que va tomando la recta al inclinarse, trata de buscar un patrón para clasificar de alguna manera los diferentes tipos de inclinación que puede tomar dicha recta, de modo que, puedas saber su inclinación sin antes verla.

d) ¿Cómo sería dicha clasificación?

Actividad 4

Abre el applet_Actividad_4

a) En este applet aparece la letra b, ¿Qué pasa cuando mueves el deslizador?

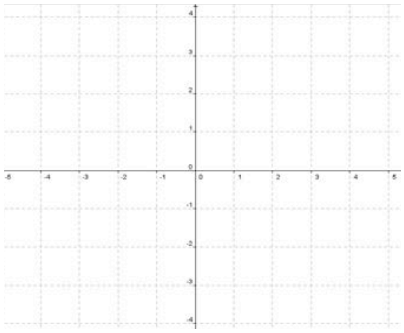
"b" es llamada ordenada al origen, e indica el lugar por donde pasa la recta en el eje vertical, también conocido como eje "*y*"

b) ¿Se altera b cuando mueves m, o viceversa?

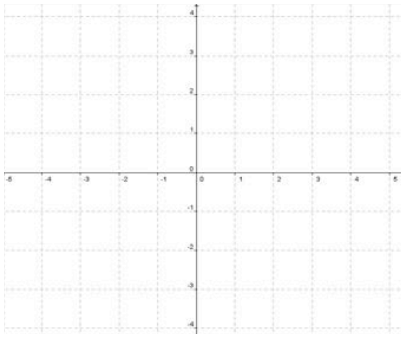
c) ¿podrías explicar porqué?

d) Según el razonamiento y clasificación que ya tenemos de la pendiente, y al conocer que pasa con la ordenada al origen *m* & *b,* respectivamente, realiza un bosquejo aproximadode las rectas sobre el eje coordenado, con la información que se te brinda

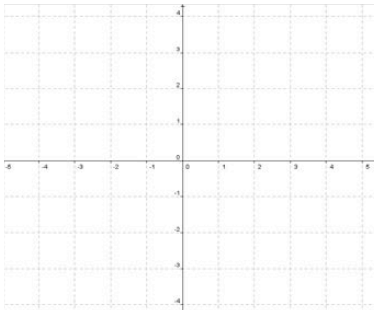
m=positiva & b= 2



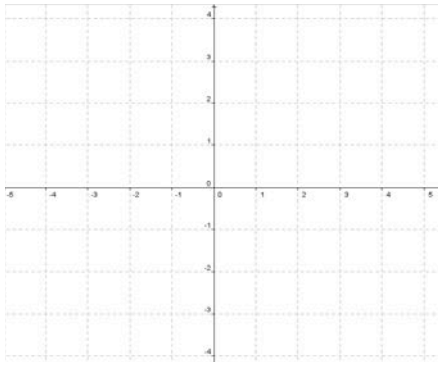
m=positiva & b= -3



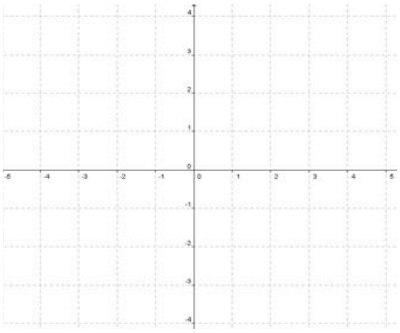
m=negativa & b= -1



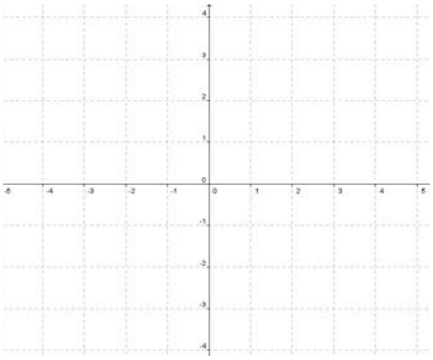
m=negativa & b= 0



m=0 & b= 3.5



m=0 & b= -0.5



Abre el applet_Actividad_5 y observa el comportamiento de las rectas, corrobora tus resultados, analizando el comportamiento de las gráficas de las rectas mostradas, moviendo los deslizadores, uno a la vez.

Análisis didáctico

En la Actividad 1 se pretende que el alumno pueda imaginarse sobre la gráfica en una acción en la que se pueda ver en la situación presentada como algo cotidiano de modo que pueda identificar las secciones que se piden sin mayor problema, aunque es posible que no marque la parte inferior de la gráfica, ya que tan solo es un momento en que puede pasar con cierta velocidad en la que le incomode detenerse para descansar.

Se puede verificar las respuestas al preguntar el ¿por qué? de su elección, de modo que se debe hacer hincapié en esa sección para reflexionar lo que harían si el recorrido comenzara en la parte baja de la gráfica.

En la Actividad 2 se trata de que el alumno asocie la recta en función de la posición en la que se encuentra la bicicleta, con el recurso de los colores es fácil diferenciar las rectas que se encuentran inclinadas a la derecha del eje *y*, o a su izquierda. Se espera que el alumno tome la parte superior de la gráfica como un lugar de descanso, en la que la pendiente es cero, pero es necesario hacer que identifique los lugares en que la gráfica es cóncava hacia abajo.

Dada la identificación se pasa al unto de representación, en la que se espera que asocie algún signo, valor o palabra que caractericen al grupo de rectas según su clasificación.

Se define el concepto pendiente, como una inclinación y se presenta el símbolo de se representación, para poder hacer uso del applet en el que ya aparece dicho símbolo para la familiarización.

En la Actividad 3 se presentan ya asociaciones a símbolos positivos, negativos y el cero, para que identifique y clasifique a las rectas con pendiente positiva como las que están inclinadas hacia la

derecha del eje *y*, las rectas inclinadas hacia la izquierda del eje *y* como negativa, y finalmente a la recta horizontal como la pendiente cero, los cuales puede verificar utilizando el applet ya manipulado por el solo.

En la actividad 4 se espera que el alumno pueda identificar la pendiente, sin importar el cuadrante en el que se presenta la gráfica, y se presenta el parámetro ordenada al origen, de modo que al presentar la forma analítica el alumno asocie a una inclinación el parámetro pendiente cuando la necesite encontrar con aluna expresión.

Referencias bibliográficas

Brousseau, G. (1994), "Los diferentes roles del maestro" en Parra, C., Saiz, I. (comp), *Didáctica de Matemáticas. Aportes y reflexiones*, Buenos Aires, Paidós Educador

Cantoral, R. (2014). Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa: México: Editorial Gedisa.

Cantoral, R. & Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. Revista Epsilon, 42, 14(3), 353 – 369.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001). Funciones: visualización y pensamiento matemático.,

México: Editorial Pearson Educación.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2002). *Un acercamiento analítico al "triángulo de la didáctica"*. Educación Matemática. México. 14, 1, 48-61.

Lavicza, Z. (2010). Integratingtechnologyintomathematicsteaching at theuniveritylevel, ZDM MathemeticsEducations, 42, 105-119

Mirón, H. (2000). *Naturaleza y posibilidades de aprendizaje en un ambiente tecnológico: Una exploración de las relaciones f f' en el bachillerato interactuando con calculadoras graficadoras*. Tesis Doctoral. Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV – IPN, México.

Ricardogame, (2012). *El ciclista funcional.* Recuperado de 4 de diciembre de 2012, http://www.geogebratube.org/material/show/id/7063

LA ENSEÑANZA APRENDIZAJE DEL NÚMERO EN PREESCOLAR Y EL USO DE LAS TIC´s

Evelia Reséndiz*, Sergio Correa*, Karla Y. Medina+, Carlos R. Nava+, Ramón J. Llanos*
*Universidad Autónoma de Tamaulipas México
+Secretaría de Educación de Tamaulipas
erbalderas@uat.edu.mx, scorrea@uat.edu.mx

Resumen. En esta investigación en proceso, se analiza la enseñanza aprendizaje de la noción de *número* por considerarlo pieza clave en la vida escolar. Para la investigación es importante analizar cómo se desarrolla la noción de número en el aula y cómo se desarrolla esta noción con el uso de herramientas digitales utilizadas en el centro de cómputo. Para esto, se retoma a Piaget, quien sostiene que los pequeños pasan a través de etapas específicas conforme su intelecto y capacidad para percibir las relaciones maduras. La investigación es de corte cualitativo.
Palabras clave: Noción de número, preescolar, enseñanza, aprendizaje, tecnología.
Abstract. The intention in this research in progress is to analyze the teaching-learning of the notion of *number* by considering it a key part of school life. It is essential to jointly address the processes of classification and sequence, using reason and those taught by the teacher. For research purposes it is important to analyze how the notion of number develops in the classroom along with the use of digital tools used in the computer lab. Piaget´s theory is considered for such. It states that children experiment through specific stages as their intellect and ability to perceive mature relationships. The research is qualitative
Key words: Notion of number, preschool, teaching, learning, technology.

Introducción

El Programa Sectorial de Educación (2007-2012) establece como uno de sus objetivos "impulsar el desarrollo y la utilización de tecnologías de la información y la comunicación en el sistema educativo para apoyar el aprendizaje de los estudiantes, ampliar sus competencias para la vida y favorecer su inserción en la sociedad del conocimiento" (p. 11). Para el logro de estos objetivos la Secretaría de Educación Pública recomienda en el Plan de Estudios 2011 del Nivel Preescolar, la utilización de las TIC´s como apoyo para el profesor en el desarrollo de su nueva práctica de enseñanza.

El Programa de Estudios 2011 del nivel preescolar (SEP, 2012), se organiza en seis campos formativos (lenguaje y comunicación, *pesamiento matemático*, exploración y conocimiento del mundo, desarrollo físico y salud, etc.) que constituyen el principio organizativo de aprendizajes más formales y específicos que los alumnos estarán en condiciones de construir conforme avanzan en su trayecto escolar, y que se relacionan con las disciplinas en que se organiza el trabajo en la educación primaria y secundaria. Los campos formativos le facilitan al educador tener interacciones educativas claras sobre qué competencias y aprendizajes pretende promover en sus alumnos.

El campo formativo del *Pensamiento Matemático* que se retoma en esta investigación se organiza en dos aspectos relacionados con la construcción de nociones matemáticas básicas que son el *número* y forma, y espacio y medida (siendo de particular interés para la presente investigación el número). Es importante observar este concepto debido a que los niños están en constante contacto con estos en diversidad de situaciones en la educación preescolar, las actividades de juego, la resolución de problemas que contribuyen al uso del conteo, así como el uso de los números en la vida cotidiana, lo cual llevará a entender que una serie de objetos no cambia solo por el hecho de dispersarlos. Para la investigación es importante analizar cómo se desarrolla la noción de número en el aula y cómo se desarrolla esta noción con el uso de herramientas digitales utilizadas en el centro de cómputo.

Planteamiento del problema

En esta investigación se pretende abordar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en preescolar y de particular interés el desarrollo de la competencia de utilización de *los números en situaciones variadas que implican poner en práctica los principios del conteo*. Al considerar el número como pieza clave en la vida escolar, también se hace imprescindible tratar de manera conjunta los procesos de clasificación y seriación, haciendo un análisis entre la enseñanza impartida dentro del aula y las herramientas digitales utilizadas en el centro de cómputo.

Desde el punto de vista didáctico han de conjugarse dos aspectos. De un lado, la propia estructura del concepto de número, con las nociones previas que han de asimilarse y, de otro, las propias limitaciones del individuo debidas a sus características psicológicas.

Construir este conocimiento matemático no es solo aprender reglas respecto a teorías o conceptos, los niños deben construir dicho conocimiento a través del contacto con situaciones cotidianas que representen un aprendizaje significativo.

La enseñanza en el nivel preescolar es una combinación de juego con los objetivos de aprendizaje, lo cual le va a permitir al niño y niña satisfacer sus necesidades de una forma más significativa, considerando que las matemáticas están implícitas en cualquier juego y/o actividad que realice.

A esta edad, el juego propicia el desarrollo de competencias sociales y autorreguladoras por las múltiples situaciones de interacción con otros niños y los adultos. Mediante éste, los niños y las niñas exploran y ejercitan sus competencias físicas e idean y reconstruyen situaciones de la vida social y familiar.

Para guiar la investigación se consideraron dos preguntas de investigación: ¿Qué estrategias se trabajan en el aula para lograr los aprendizajes esperados de la competencia que señala que el niño:

utiliza los números en situaciones variadas que implican poner en práctica los principios de conteo? ¿Cuál es el impacto de utilizar un software después de la actividad en el aula y en donde se trabaja la noción de número?

Marco Teórico

El niño aprende los primeros números desde muy chico y con frecuencia fuera de la escuela. Desde los dos o tres años sabe decir "uno" y "dos, donde el "dos" tiene la significación de "muchos".

La serie numérica hablada: "uno", "dos", "tres", "cuatro", etc., aumenta progresivamente cuando el niño crece. Llega a "cinco", "seis", o "siete" y para la mayoría de los niños de cinco años puede llegar a "diez" o más en algunos (Vergnaud, 2010).

Cuando el niño enuncia esa serie numérica, se puede situar en dos niveles diferentes (Vergnaud, 2010, pp. 101-102):

1. En el nivel de la simple recitación (de la "canción", como a veces se dice). El niño entonces se limita a recitar las palabras que sabe siguen en la secuencia. Frecuentemente le sucede, además, que se equivoca; pero incluso si no se equivoca y recitara la serie de los n primeros números no podríamos afirmar "que sabe contar hasta n", como a veces se dice erróneamente. En efecto, la actividad de conteo implica no solamente que el niño recite la serie numérica, sino que al mismo tiempo haga corresponder la recitación con la exploración de un conjunto de objetos.
2. En el nivel de conteo propiamente dicho. La recitación de la serie numérica se acompaña de gestos manuales y movimientos de los ojos, que muestran que el niño ejerce su actividad al establecer una correspondencia entre el conjunto de los objetos, por una parte, y la serie numérica hablada, por la otra.

Es fácil observar a un niño en su tendencia a contar los objetos saltándose unos y contando otros más de una vez. Ello pone de manifiesto que no siente la necesidad lógica de colocar los objetos en un orden para asegurarse de que su proceso es correcto.

Pero si la ordenación fuera la única acción que se realizara con los objetos no se podría cuantificar ya que el niño podría considerar uno cada vez, en vez de varios al mismo tiempo (Kamii, 2003). Para cuantificar, por tanto, tiene que establecer entre ellos una relación de inclusión jerárquica que le permita además identificar el todo y las partes.

Otra característica que también forma parte de la problemática es la ausencia de conservación como lo menciona (Kamii, 2003), cuando muchos niños de cuatro años son capaces de colocar

tantos trozos de poliuretano como los de ocho que el maestro ha puesto formando una fila. Sin embargo, cuando se extiende su conjunto, muchos de ellos creen que ahora tienen más ellos que el maestro.

Por otro lado, las computadoras se han convertido en una herramienta utilizable dentro de la enseñanza de las matemáticas, según Haugland (2000), una valiosa herramienta para el aprendizaje de los niños en edad preescolar, pero es necesario darles tiempo a los niños de explorar y experimentar. Todavía los niños necesitan sentir que el adulto, así sea el educador o sus padres, están disponibles para darles apoyo.

Las matemáticas enseñadas en los primeros niveles sientan unas bases firmes no sólo para el desarrollo del conocimiento matemático de los escolares, sino también para el desarrollo de capacidades cognitivas y actitudes que les permitirán desenvolverse adecuadamente en situaciones cotidianas (Carrillo, Enríquez, Bravo, Sánchez y Araya, 2009) y proporciona a los niños la oportunidad de construir el aprendizaje, ya que le posibilita la manipulación de su experiencia y la resolución de problemas en un ámbito de la realidad. El conocimiento matemático es una herramienta fundamental para el manejo y comprensión de la realidad y este conocimiento se verá fortalecido con la implementación de las TIC´s porque le permite al niño y niña experimentar y manipular de una manera real, además de ser una herramienta que cuenta con características virtuales que incentivan en el niño o niña la participación; tema importante para la presente investigación.

Para el análisis de las situaciones de clase (en aula y centro de cómputo) de esta investigación en proceso, nos apoyaremos en dos teorías: por un lado, la teoría de Piaget (1973), que sostiene que los pequeños pasan a través de etapas específicas conforme su intelecto y capacidad para percibir las relaciones maduras y, por otro lado, la teoría de Vygostky (1984), quien sostiene que los niños aprenden a través de la interacción social y adquieren habilidades cognoscitivas como parte de su inducción a una forma de vida. Las actividades compartidas ayudan a los niños a interiorizar las formas de pensamiento y conducta de su sociedad y apropiarse de ella.

Metodología

La investigación es de *tipo cualitativo*, ya que se harán grabaciones, recopilación de datos y observaciones, y se considera hacer la recogida de información dentro del aula y en el centro de cómputo. La población analizada son los niños de Preescolar 3, durante la clase de pensamiento matemático. Se tratará de analizar el impacto el uso del las TIC´s en la enseñanza aprendizaje de los niños.

La investigación será de corte etnográfico y abarcara seis etapas (Reséndiz, 2004): Recopilación de datos (observación en la situación de campo), elaboración de los registros de la observación (toma de notas y confección de toda clase de evidencia documental), análisis e interpretación de resultados, síntesis e interpretación global (reunión del material de cada aula investigada para establecer generalizaciones), integración de productos de la investigación (selección de los puntos clave que merecen destacarse), y redacción del informe correspondiente.

Análisis de datos

Sobre los momentos abordados, decidimos atender las situaciones que se repiten y que permiten inferir algunas reglas de la interacción en el aula, así como recoger y analizar otras de excepción. De esta manera se han encontrado, hasta el momento, las siguientes categorías de análisis:

- Identificando las monedas con su número, valor y forma.
- Los signos y su significado en el número
- Las cantidades de los billetes y la asociación de los números
- Las monedas y su valor

Cabe aclarar que los niños tomaban la clase en un salón y posteriormente se trasladaban a un centro de cómputo que atendía otra educadora.

Las cantidades de los billetes y la asociación de los números

Como entrada al tema de las cantidades que representan las monedas y los billetes, la maestra inicia con la identificación de las formas geométricas del dinero, tanto en su versión en papel como metálica. En esta actividad, todos los niños participan describiendo las formas geométricas del dinero, manifestando que los billetes son de forma rectángular y las monedas circulares. Como estrategia de refuerzo, la maestra dibuja en el pintarrón las formas geométricas que los niños le van diciendo. De esta manera podemos dar cuenta que los niños de manera muy sencilla pueden, además de conocer y saber para qué se utiliza el dinero, identificar algunas figuras geométricas.

Se comprueba lo que menciona Jean Piaget (1973) en una de las etapas de su teoría, donde sostiene que los niños con facilidad interactúan con su entorno y esto se ve reflejado en la facilidad que muestran para participar ante la maestra y con sus compañeros. Además se menciona que los niños utilizan más las palabras e imágenes mentales, demostrándolo cuando identifican de manera casi inmediata el dinero y su forma, esto debido a que la imagen ya la conocían.

Para identificar las cantidades que manejan los billetes la maestra dibuja en el pintarrón tres rectángulos poniéndoles el signo de pesos para posteriormente sentarse en el piso con los

alumnos en una media luna y cuestionarlos acerca de los números que tienen los billetes, en esta parte los alumnos ya empiezan a relacionar los números para tener cantidades de más de dos dígitos. A continuación vemos un extracto de una transcripción sobre el tema:

> Ms: Hay billetes de qué cantidad (Maestra detiene la clase para tranquilizar a los alumnos).
>
> Ao3: De 1 peso.
>
> Ao4: De 1000 pesos.
>
> Ms: (Los manda a sentar a los que se paran) ¡Siéntate, siéntate¡
>
> Ao5: De 800 pesos.
>
> Ms: Hay billetes de 20 pesos, quien sabe escribir el número 20.
>
> Ts: Yo, yo.
>
> Ms: (Pasa al pitaron) A ver Clara, vamos a dejar a Clara, en el de arriba mamá, escribe el número 20.
>
> Ao3: Maestra ya sé donde está la cámara.
>
> Ms: Ya guarda silencio.
>
> Ao4: No alcanza, no alcanza.
>
> Ms: Bueno en el de abajo mamá, hay, 20 pesos.
>
> Ao5: Un 20, un 2 y un.
>
> Ms: Muy bien, hay otro billete, hay otro billete que es de 50 pesos, cómo se escribe el 50.
>
> Ts: (Levantando la mano para participar) ¡Yo, yo¡
>
> Ms: A ver cómo se escribe, a ver Aa, Aa no ha pasado, cómo se escribe el 50
>
> Aa: Cincuenta y cero
>
> Ms: Un 5 y un 0 muy bien, en el de arriba mamá, a ver si alcanzas, un 5 y un 0 muy bien.
>
> Ms: Hay otro billete de 100 pesos.
>
> Ts: (Hablan a la vez, se intentan parar y levantan la mano) ¡Yo, yo!

Ms: No, no, a ver, primero me tienen que decir cómo se escribe el 100.

Ms: Desde tu lugar.

Ao4: Un 1 y un 0 y un 0.

La maestra les pregunta y permite que de uno por uno pasen al pintarrón a poner cantidades a los billetes, siempre y cuando antes de pasar al frente le digan cómo se forma para después apuntarlo, están aprendiendo las cantidades que manejan los billetes y la forma en cómo se forman los números de más de dos dígitos. La maestra trata de que los alumnos se sientan en confianza y se sienta en el piso con ellos.

Esta actividad requiere la participación de los niños ya que como lo menciona Lev Vygostky (1984), los niños aprenden a través de la interacción y de actividades compartidas, en este caso, las participaciones giran en torno a las cantidades que puede adquirir un billete.

En el *centro de cómputo* los niños asisten tres veces por semana (Lunes, Miércoles y Viernes), el grupo se divide en dos para tener un mejor manejo de los niños y proporcionarles una mejor atención a cada uno de ellos. En los módulos que van trabajando con el software Gateando con el Ratón, en la actividad (Los Primeros Números por Vía Visual Directa) se busca que los niños y niñas se formen imágenes de cada número con los instrumentos más usados en la escuela: los dedos de las manos, las regletas y los puntos del dado. En total hay 7 grupos de actividades distintas, para que los niños aprendan jugando.

Lo anterior es planificado por la titular del grupo, porque después de haber visto la actividad (La Tiendita), en el salón de clases, acude con la maestra del centro de cómputo y le comenta que se ha visto tal actividad, que necesita un ejercicio que pueda reforzar lo que se vio en el aula. Al entrar los niños al centro de cómputo toma cada quien una computadora las cuales ya están encendidas y en la actividad que le corresponde a esa sesión. La maestra empieza a dar la instrucción.

MC: Van a tomar la actividad de arriba que dice (1 al 4) y ahí comienzan a trabajar

Ao1: Aquí, maestra aquí.

MC: Sí ahí, si tienen alguna duda levantan su mano para preguntar, acuérdense que los deditos el dibujo que viene ahí nos va indicando la cantidad.

Los alumnos empiezan a manipular el software mediante la estrategia ensayo-error, debido a que el software lo pueden manipular tantas veces como sea necesario hasta llegar a la respuesta correcta y es en ese momento que se puede tener acceso al siguiente nivel. Los alumnos van completando las actividades poco a poco y cada vez es mejor su desenvolvimiento y las actividades se les hacen más fáciles, pero algunos alumnos tardan un poco más para aprender y es cuando acuden con la maestra encargada del centro de cómputo para preguntarle las dudas que tienen, la maestra los apoya resolviendo las dudas y facilitándoles el aprendizaje. En algunas ocasiones la maestra del centro de cómputo maneja la estrategia de poner dos niños por máquina para que enriquezcan el aprendizaje y se apoyen entre sí logrando un trabajo colaborativo y de actividades compartidas como lo señala Vygostky (1984).

Conclusiones

Las conclusiones preliminares, se refieren a las explicaciones de las maestras y a su construcción mediante la interacción. Observamos que este tipo de situaciones es muy frecuente en las clases, constantemente pide la participación de los alumnos, para posteriormente reforzar lo respondido por los niños repitiendo la misma palabra u oración y fortaleciendo con un resumen donde todos los niños participan haciéndoles que de alguna manera recuerden lo visto en la clase.

Cabe destacar que las sesiones del aula van más allá de solo enseñar la utilización de los números, es una actividad más compleja debido a que incluye que los niños sean más críticos, ya que además de representar la forma del dinero, interpretan que sin el signo de pesos el número no tiene ningún valor monetario, este conocimiento es previo ya que como se ha venido comentado es algo que se presenta con frecuencia en su diario vivir; el niño está aprendiendo números, símbolos, grafía.

En cuanto a las sesiones grabadas en el centro de cómputo pudimos dar cuenta de que efectivamente a los niños les causa gran interés la interacción con el software. La libertad de manipulación lo convierte en algo extraordinario y el hecho de saber que van avanzando de nivel es muy satisfactorio.

Aunque se debe mencionar que no existe una equivalencia entre ambas actividades (salón y centro de cómputo) debido a que en el salón se buscan aprendizajes más complejos mientras que el software se queda en algo más elemental (conteo y seriación).

La utilización de sonido, movimiento y figuras convierte al software en una herramienta que de alguna forma apoya el aprendizaje de los contenidos y refuerza lo visto en el salón de clase, haciéndolo una herramienta eficaz y necesaria, utilizándola de la forma correcta para propiciar en

el los niños su participación con algo que a ellos les gusta y que de alguna manera aprenden, pero siempre y cuando tenga correspondencia con lo visto en el aula.

Referencias bibliográficas

Carrillo, M., Enríquez, S., Bravo, A., Sánchez, M., y Araya, C. (2009). Concepciones en la enseñanza de las matemáticas en educación infantil. *Perfiles Educativos*, *31*(125), 62-73.

Haugland, S. (2000). *Computadoras y niños pequeños*. Recuperado el 30 de enero de 2013 en: http://ecap.crc.illinois.edu/eecearchive/digests/2000/haugland00s.pdf

Kamii, C. (2003). *El número en la educación preescolar*. Madrid: A. Machado Libros, S. A.

Piaget, J. (1973). *La representación del niño en el mundo*. Madrid: Morata.

Reséndiz, E. (2004). *La variación en las explicaciones de los profesores en situación escolar* (Tesis doctoral inédita). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Secretaría de Educación Pública (2007). *Programa Sectorial de Educación* (2007-2012). México: Autor. Recuperado de http://promep.sep.gob.mx/infgene/prog_sec.pdf

Secretaría de Educación Pública (2012). *Programa de Estudio 2011, Guía para la educadora. Bases para el trabajo en preescolar*. México: Autor.

Vergnaud, G. (2010). *El niño, las matemáticas y la realidad: Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. México: Trillas.

Vygotsky, L. (1984). Aprendizaje y desarrollo intelectual en edad escolar. *Revista de Infancia y Aprendizaje*, *27*(28), 70-92

GEOGEBRA Y LOS SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICOS

Ana Elena Gruszycki, Luis Oteiza, Patricia Maras, Liliana Gruszycki y Hugo Ballés
Universidad Nacional del Chaco Austral. Argentina
ana@uncaus.edu.ar

Resumen. El objetivo del presente trabajo, es diseñar y evaluar la efectividad de secuencias didácticas empleando el software dinámico GeoGebra, con el propósito de mejorar la aprehensión conceptual en Geometría Analítica, utilizando los distintos registros de representación semióticos propuestos por Raymond Duval, quien afirma que ningún tipo de proceso matemático puede ser ejecutado sin el uso de un sistema semiótico de representación, que son esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento. Se eligió GeoGebra, software libre y gratuito, ya que permite trabajar con diferentes registros de representación de un mismo objeto matemático a través de sus distintas vistas. Ésta combinación permitirá realizar intervenciones didácticas innovadoras.
Palabras clave: registros de representación, geometría analítica.
Abstract. The aim of this work is to design teaching sequences using the dynamic software GeoGebra, in order to improve the conceptual apprehension in analytic geometry, using the different semiotic registers of representation proposed by Raymond Duval, who claims that no mathematical process can be executed without the use of a semiotic system of representation, which are essential for the cognitive activity of thought. GeoGebra, a free and open software, was chosen as it allows working with different registers of representation of the same mathematical object through its different views. This combination will enable innovative teaching interventions
Key words: representation registers, analytic geometry

Introducción

El presente trabajo, se encuentra en el marco del proyecto de investigación: Diseño de Secuencias Didácticas con GeoGebra para Mejorar la Aprehensión Conceptual de los Alumnos de Ingeniería en Geometría Analítica, llevado a cabo en la Universidad Nacional del Chaco Austral.

Un gran número de alumnos que comienza una carrera universitaria no llega a terminarla, lo cual genera costos económicos y sociales. Dentro de ese grupo un porcentaje elevado corresponde a alumnos de primer año. Las Autoridades de la Universidad Nacional del Chaco Austral (UNCAUS) sugieren que esta situación puede hacerse menos preocupante si se logra aumentar la retención con la incorporación de diversas metodologías de enseñanza entre otras medidas.

A partir de las observaciones de clases teóricas y el trabajo con los estudiantes en las clases prácticas, se detectaron problemas que obstaculizan la comprensión de conceptos vinculados a geometría analítica, entre ellos la dificultad de identificar cónicas, realizar la interpretación gráfica y algebraica y por sobre todo la relación entre distintos registros.

La utilización de herramientas informáticas como apoyo a la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, da una amplia gama de aportes, no sólo por la forma de trabajo sino porque permite

además, acercarse a los conceptos a través de diferentes representaciones de los mismos.

Estos aspectos forman parte de la motivación inicial para la realización de la propuesta didáctica que se presenta, priorizando el uso de tecnología informática a través de aplicaciones realizadas con el software dinámico GeoGebra. Su uso en geometría analítica podría ayudar a los estudiantes a ver determinados conceptos desde una nueva perspectiva. La manipulación de un entorno dinámico como este, posiblemente ayude al estudiante a ampliar su experiencia permitiendo coordinar diferentes registros de representación. Es muy probable también, que a través de él, se puedan discriminar unidades significantes de una representación, posibilitando la aprehensión de un campo de variaciones posibles relacionadas a uno o varios registros, algo que es muy difícil de lograr sin la mediación de este tipo de software.

Marco Teórico

El marco teórico de este trabajo está basado en la teoría de registros de representación semiótica desarrollada por Raymond Duval, que permite explicar el nivel de conceptualización en base a los cambios entre los distintos registros de representación exigiendo el conocimiento, el tratamiento y la conversión de éstos, para ser utilizados en las distintas actividades planteadas. Afirma que ningún tipo de proceso matemático puede ser ejecutado sin usar un sistema semiótico de representación que es esencial para la actividad cognitiva del pensamiento.

Por representaciones se entiende, en el ámbito de las matemáticas, notaciones simbólicas o gráficas, o bien manifestaciones verbales, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos en esta disciplina así como sus características y propiedades más relevantes.

Estas representaciones se agrupan en diferentes registros de representación (Duval, 1998), según sean las características que posean; así, considerando por ejemplo la noción de función, existe un registro gráfico, uno algebraico o analítico y uno tabular, y aunque hay otros, estos han sido lo más usados en enseñanza hasta hoy. Siguiendo las ideas de este autor, dentro de estos registros se pueden llevar a cabo tratamientos, es decir, transformaciones de las representaciones en el mismo registro donde fueron creadas. El tratamiento es una acción sobre la representación interna a un registro. Asimismo, entre diferentes registros de representación se pueden realizar conversiones, que son transformaciones de una representación en otra que pertenece a otro registro diferente al de la primera. En el ejemplo de las funciones antes citado, una operación de conversión puede ser la de traducir información tabular sobre una función, en una gráfica.

Tradicionalmente, una clasificación inicial de representaciones consiste en dividirlas en externas e internas. Las primeras abarcan todas aquellas representaciones que son susceptibles de ser percibidas por los sentidos, mientras que las internas, son imágenes mentales que el sujeto tiene

de los objetos y relaciones que forman parte de su conocimiento. Pero ambos dominios, desde un punto de vista genético, no pueden verse como aislados entre sí, pues las representaciones mentales pueden desarrollarse, únicamente, según un proceso de interiorización de las representaciones externas (Duval, 1998). También es importante señalar que esta distinción no habla acerca de la naturaleza de las representaciones, que a menudo es la misma en ambos casos, sino de la manera de producirlas, del modo en el que son creadas. Las representaciones externas, como lo son los enunciados en el lenguaje natural, las fórmulas algebraicas, las gráficas, las figuras geométricas, entre otras muchas, son el medio por el que los individuos exteriorizan sus imágenes y representaciones mentales haciéndolas accesibles a los demás. Estas representaciones juegan, desde este punto de vista, una doble función:

1. Actúan como estímulo para los sentidos en los procesos de construcción de nuevas estructuras mentales.
2. Permiten la expresión de conceptos e ideas a los sujetos que las utilizan.

Dependiendo del tipo de símbolos, gráficos o notaciones con los que un estudiante interactúe en el proceso de aprendizaje de un concepto matemático, dará lugar a unos tipos determinados de representaciones internas del mismo. De igual manera, las vías que un sujeto utilice para representar externamente un concepto sirven para mostrar, generalmente, cómo es la información que posee sobre tal concepto.

A la aprehensión o a la producción de una representación semiótica, Duval la denomina "semiosis" y postula que para que un sistema semiótico pueda ser un registro de representación debe permitir las tres actividades cognoscitivas fundamentales ligadas a la semiosis, a saber:

- *Formación de una representación,* identificable como una representación de un registro dado.
- *Tratamiento de la representación* esto es, la transformación de la representación realizada en el mismo registro en que ha sido formulada. El tratamiento es una transformación interna a un registro.
- *Conversión de la representación*, es la transformación de la representación en una representación de otro registro, conservando la totalidad o una parte solamente del contenido de la representación inicial.

Dominar un concepto matemático requiere conocer y reconocer sus principales representaciones, para así convertirlas o traducirlas de un modo a otro.

Duval subraya la importancia que tiene la conversión de las representaciones, en la formación de

conceptos matemáticos:

> Para la actividad matemática es esencial poder movilizar varios registros de representación semiótica (figuras, gráficas, simbólica, lengua natural, etc.) en el transcurso de una misma tarea, ya sea escogiendo un registro más bien que otro. E independientemente de toda comodidad de tratamiento, este recurso a varios registros parecen una condición necesaria para que los objetos matemáticos no sean confundidos con sus representaciones y para que sean reconocidos en cada una de ellas. (Duval, 1998, p.5-6).

El aprendizaje de las matemáticas constituye un campo de estudio apropiado para el análisis de actividades cognitivas relacionadas a la conceptualización. Estas actividades requieren diferenciar un objeto de su representación.

> Toda confusión entre el objeto y su representación provoca, en un plazo más o menos amplio, una pérdida de la comprensión: los conocimientos adquiridos se hacen rápidamente inutilizables por fuera de su contexto de aprendizaje, sea por no recordarlos, o porque permanecen como representaciones "inertes" que no sugieren ningún tratamiento productor (Duval, 2004, p.14).

El manejo de diferentes sistemas de representación y la conversión entre unos y otros no es suficiente para obtener una comprensión integral. Es necesario crear condiciones donde sea posible establecer una coordinación entre los diferentes registros de representación.

> La coordinación entre las representaciones que provienen de sistemas semióticos diferentes no es espontánea. Su puesta en juego no resulta automáticamente de los aprendizajes clásicos demasiado directamente centrados en los contenidos de la enseñanza. Lo necesario para favorecer tal coordinación parece ser un trabajo de aprendizaje específico centrado en la diversidad de los sistemas de representación, en la utilización de sus posibilidades propias, en su comparación por la puesta en correspondencia y en sus "traducciones" mutuas. (Duval, 2004, p.17)

La realidad marca que actualmente los diferentes niveles de enseñanza no ponen mucho énfasis en la utilización de diferentes sistemas de representación, ni en la coordinación entre ellos, por el contrario, es más usual ver el predominio de algún sistema en particular, reduciendo el aprendizaje del alumno incluso a un mono-registro. Desde esta mirada y considerando que los objetos matemáticos son, por naturaleza, abstractos, accesibles sólo por medio de representaciones y que

su conceptualización pasa por la capacidad de identificar un mismo concepto en diferentes perspectivas, surge la necesidad de reconsiderar la forma en que se enseñan estos conceptos.

En este sentido, la utilización de herramientas informáticas como apoyo a la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, da una amplia gama de aportes, no sólo por la forma de trabajo sino porque permite además, acercarse a los conceptos a través de diferentes representaciones de los mismos y "no es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a la noción de representación" (Duval, 2004, p.25), y según Santos, (2000) el uso de la tecnología, permite establecer representaciones exactas de configuraciones geométricas y que estas pueden ayudar a los estudiantes en la visualización de relaciones matemáticas. Duval (1992), presenta un análisis cuidadoso de cómo la acción de graficar por parámetros es un recurso que permite la articulación de los registros gráficos y algebraicos mediante el establecimiento de relaciones entre variables algebraicas y lo que él denomina "variables visuales".

Para un proceso efectivo de aprendizaje los entornos de enseñanza- aprendizaje sustentados por la computadora deberían crear situaciones y ofrecer herramientas que permitan estimular a los alumnos y alcanzar así, el máximo potencial cognitivo. Esta nueva tendencia en el uso de la computadora en educación se caracteriza por una clara inclinación hacia sistemas que involucran herramientas puestas a disposición de los alumnos, con el rol de facilitadoras para la indagación y la adquisición de conocimiento, en ambientes de aprendizaje colaborativos e interactivos.

Resultados interesantes sobre cómo la tecnología puede mejorar el aprendizaje, enfocan su atención en softwares dinámicos. En este sentido se pueden citar investigaciones realizadas en Argentina como:

- Gatica, S.N. y Ares, O.E. (2012) quien indagó su estudio en la importancia de la visualización y la necesidad de conversiones entre registros. San Luis.
- Aznar, M.A., Distéfano M.L., Prieto G. y Moler, E. (2010) analizó los errores en la conversión de representaciones de números complejos del registro gráfico al algebraico .Mar del Plata.

En Latinoamérica investigadores como:

- Villarraga R., Fredy Saavedra D. y otros (2012) han indagado los procesos cognitivos de representación en conexión con los tipos de procesos y pensamiento matemático empleando 10 software libres, entre ellos GeoGebra. Colombia.
- Bernal, M., Rodríguez, M. y otros (2013) investigaron sobre la coordinación de los diferentes registros de representación en Geometría Analítica utilizando GeoGebra.

México.

En Argentina son insipientes las investigaciones sobre esta temática utilizando GeoGebra, de allí que la UNCAUS con el propósito de intervenir alrededor de los problemas de la educación matemática plantea abordarlos con ésta nueva línea de investigación.

Metodología

Se realiza utilizando el método experimental-puro-cuantitativo cuyo objetivo es diseñar y evaluar la efectividad de secuencias didácticas utilizando el software GeoGebra, con el propósito de mejorar la aprehensión conceptual en geometría analítica, a través de la coordinación entre los diferentes registros de representación de un mismo objeto matemático.

Para ello, de acuerdo a los objetivos del proyecto se definieron los instrumentos de evaluación y se elaboraron las secuencias didácticas orientadas a trabajar con distintos registros de representación semiótica, como así también ejercicios que requieren de tratamientos y conversiones utilizando GeoGebra, ya que permite trabajar de ésta manera, a través de sus distintas vistas.

A modo de ejemplo se presenta una secuencia didáctica específica utilizando los diferentes registros de representación que ofrece GeoGebra a través de sus vistas: algebraica, cálculo simbólico y gráfica.

Tema: Ecuación de segundo grado sin término rectangular.

Objetivo:

- Reconocer por medio de los distintos registros si la ecuación es del género de una elipse o de una hipérbola.

Consigna:

- Escribir una ecuación de segundo grado sin término rectangular de la forma $ax^2 + cy^2 + dx + ey + f = 0$, sin que a y c sean simultáneamente nulos.
- Asociar deslizadores a los coeficientes de los términos.
- Analizar las distintas posibilidades que se presentan cuando el producto de los términos cuadráticos es positivo, negativo o cero; y clasificar a la ecuación según corresponda al género de la elipse o de la hipérbola.
- Reescribir la ecuación anterior de la siguiente manera: $a(x-h)^2 + c(y-k)^2 = q$. Evaluar que ocurre cuando q es mayor, menor o igual a cero.

A modo de ejemplo, a continuación se da la respuesta cuando $a.c > 0$.

La ecuación es del género de la elipse se presentan las siguientes posibilidades:

$q > 0$

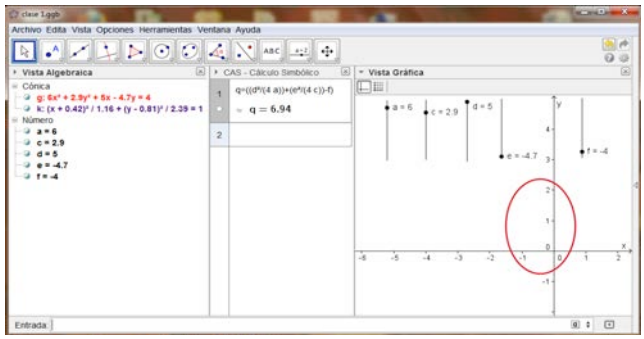


Figura 1. La gráfica es una elipse

$q > 0 \wedge a = c$

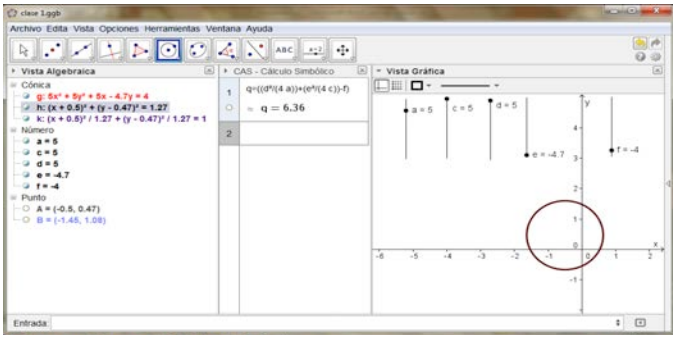


Figura 2. La gráfica es una circunferencia.

$q = 0$

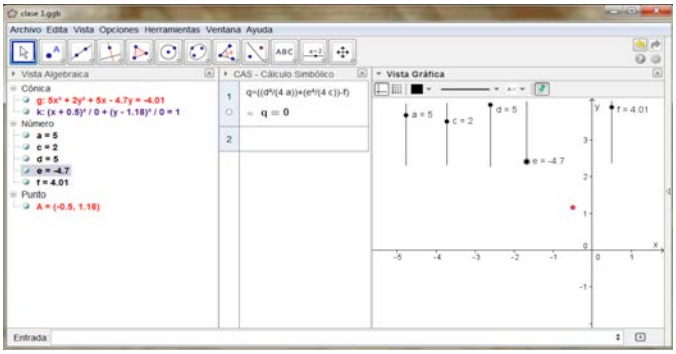


Figura 3. La gráfica se reduce a un punto de coordenadas (h,k).

$q < 0$

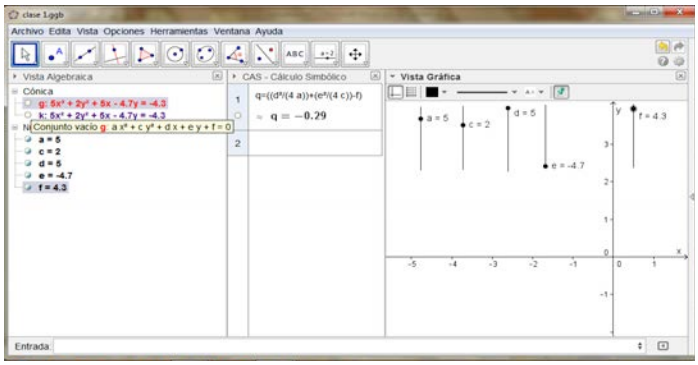


Figura 4. La gráfica es el conjunto vacío.

Conclusión

El presente trabajo está en ejecución, una vez concluido se espera que contribuya a:

- Profundizar sobre el conocimiento de actividades cognitivas ligadas a la semiosis del alumno de primer año de la UNCAUS.
- Reflexionar sobre la importancia de los sistemas semióticos de representación y de la utilización de software dinámicos en la didáctica de la Matemática.

De cumplirse con los objetivos propuestos, será un aporte científico para la Universidad Nacional del Chaco Austral.

Referencias bibliográficas

Duval R. (1998). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento.* En Investigaciones en Matemática Educativa II (Editor F. Hitt). Grupo Editorial Iberoamérica. Traducción de: Registres de représentation sémiotique et functionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, Vol. 5 (1993).

Duval, R., (1992), *Gráficas y Ecuaciones: la articulación de dos registros.* En E. Sanchez (Ed.), Antología en Educación Matemática, (pp. 125-139). México: Sección de Matemáticas Educativa del CINVESTAV-IPN.

Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano*. Traducción de título original: Sémiosis et Pensée Humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía. PeterLang. S.A. Santiago de Cali, Colombia. 2ª ed.

NCTM, (2000). *National Coucil of Teachers of Mathematics.* Principles and Standards of Mathematics 287-306.

Santos, M. (2000). *Students´ approaches to the use of technology in mathematical problem solving*. Paper presented at the working group Representation and Mathematics Visualization. PMENA, Tucson Arizona.

RESULTADOS DE LA IMPLEMENTACIÓN DE AUTOEVALUACIONES VIRTUALES EN MATEMATICA

Analía Mena, Graciela Abraham, Marta Golbach, María de los Ángeles Juárez, Mirta Jacobo y Dora Fernández
Universidad Nacional de Tucumán Argentina
menaanalia@gmail.com, gabrahamdejuarez@yahoo.com.ar, mgolbach@tucbbs.com.ar

Resumen. La evaluación, como parte integral del proceso educativo, no escapa a los cambios generados por el uso de las TIC, constituyéndose en una etapa fundamental para mejorarlo. Las autoevaluaciones virtuales, contribuyen a orientar el proceso de aprendizaje. Este trabajo tiene como objetivo mostrar los resultados logrados al implementar un sistema de autoevaluaciones virtuales a los alumnos de primer año que cursaron la asignatura Matemática I de las carreras de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de Tucumán (UNT) en el periodo lectivo 2012 y su efecto en el Rendimiento Académico. Los resultados obtenidos muestran que las prácticas realizadas constituyen una buena alternativa de aprendizaje.
Palabras clave: autoevaluaciones virtuales, aprendizaje, rendimiento académico
Abstract. The evaluation as a full part of the educational process is modified due to the changes generated because of the use of IT, becoming a vital step to improve it. Virtual self-evaluations help orient the learning process. This paper shows the results achieved thru the application of virtual self-evaluations to first year students in the subject "Mathematics I", part of the Economic Science syllabus of Universidad Nacional de Tucumán year 2012 and its effect on the student's academic performance. The results show that this system is a very effective alternative for learning.
Key words: virtual self-assessments, learning, academic performance

Introducción

La irrupción de las nuevas tecnologías están produciendo una serie de cambios en todos los ámbitos de la sociedad, y la Universidad debe situarse a la vanguardia de estas transformaciones para formar especialistas de alto nivel. La implementación de las TIC, en el campo educativo y las necesidades de formación a lo largo de la vida que la sociedad de la información requiere, han dado un impulso sin precedentes a la oferta de la educación a distancia en sus distintos niveles, formatos y modalidades.

Desde nuestra perspectiva, el proceso de enseñanza y de aprendizaje en educación debería tomar como centro de atención la actividad constructiva del estudiante, entendiéndose el desarrollo de esta actividad, como un sistema de interacciones en el que la mediación del profesor, los contenidos, los demás estudiantes y el propio contexto sociocultural en el que la actividad se produce, determinarían la calidad de dicho proceso. La evaluación, como parte integral del proceso educativo, no escapa a los cambios que se han generado por el uso de las tecnologías, constituyéndose en una de las etapas fundamentales para su mejoramiento continuo.

En la Facultad de Ciencias Económicas (FACE) de la UNT, se dictan carreras que son tradicionales y que cuentan con un gran número de inscriptos cada año (aproximadamente 1200 alumnos), lo que trae aparejado problemas como la masividad, altos índices de deserción y ausentismo y el bajo

rendimiento académico. La cátedra de Matemática I, en particular, se ve afectada por esta problemática, que es imprescindible solucionar.

Considerando que la autoevaluación le sirve al estudiante para reconocer sus fortalezas y debilidades, sus logros y dificultades a fin de desarrollar una actitud crítica y reflexiva, se elaboraron ejercicios de autoevaluación en el aula virtual del entorno MOODLE al finalizar cada unidad temática, de forma tal que el alumno pueda ir ejercitando las diferentes competencias a alcanzar en la asignatura. El propósito fue que los alumnos contaran con un instrumento que les permitiera determinar, de forma sencilla, el grado de aprendizaje alcanzado. El presente trabajo tiene como objetivos mostrar tanto el diseño de una herramienta didáctica, "Sistema Integral de Autoevaluaciones Electrónicas", que apoye la tarea áulica docente y contribuya al estudio independiente y trabajo autónomo de los alumnos, como los resultados logrados al implementarla en el periodo lectivo 2012.

Fundamentación teórica

La enseñanza debe favorecer que el alumno sea capaz de autoevaluar su propio proceso de aprendizaje, de ahí que sea conveniente propiciar las condiciones para que desarrolle acciones de control y valoración a través de la solución de las tareas. Cuando se logran desarrollar esas acciones y el alumno las interioriza, puede entonces operar en un plano mental siendo capaz de anticipar las formas correctas de la actividad, que le permitirán elaborar proyectos personales de autocorrección o de aprovechamiento óptimo de sus potencialidades (Ortiz Hernández, 2007). Es importante destacar además, que la práctica de autoevaluación es un aspecto fundamental del proceso de aprendizaje. La misma es un medio fundamental para que el alumno progrese en su propia autonomía y en la responsabilidad de sus actuaciones académicas (Castillo & Cabrerizo, 2003).

Tradicionalmente, los cuestionarios mediante entorno virtual se han venido usando como elemento de evaluación; sin embargo, recientemente se ha empezado a explorar su función formativa en el proceso de aprendizaje del alumno. Esto último se consigue si se trabaja tanto con cuestionarios de autoaprendizaje como del tipo autoevaluación y se acompañan de la correspondiente retroacción para que el alumno sea consciente de sus propios errores (Rallo, Sabater, 2007).

La evaluación continua mediante la utilización de entornos virtuales posee componentes formativos y sumativos, ya que contribuye con los siguientes elementos: proporciona alguna estructura al aprendizaje, descompone la carga de evaluación en partes manejables, es alentadora, motivadora, crea confianza, proporciona una fuente de diálogo favorable entre profesores y

alumnos y facilita a los alumnos una visión de sus progresos, incluyendo el desarrollo de su comprensión y dominio de competencias (Dorrego E, 2006). El uso de autoevaluaciones electrónicas contribuyen a orientar el proceso de aprendizaje de los alumnos, permiten personalizar el proceso a través de una retroalimentación argumentada e inmediata para que el alumno pueda conocer el nivel alcanzado y a la vez corregir y conocer las partes del contenido en las que debe centrar más su atención (García Beltrán, Martinez, Jaén, Tapia, 2006). De acuerdo a Ossandón (2003), al diseñarlas se debe incluir una retroalimentación en la respuesta a cada pregunta, por cuanto actúa como elemento motivador para el esfuerzo del alumno y le orienta eficazmente en sus actividades. Al respecto, Brito (2006) sostiene que el diseño de evaluaciones electrónicas requiere de planificación y análisis de los elementos que constituyen las preguntas del examen, así como de los momentos de aprendizaje en los que se aplicarán; dichas evaluaciones deben ser explícitas y claras, válidas y consistentes, flexibles, formativas y coherentes con los objetivos y el resto de la metodología docente a emplear. Como los resultados se generan de manera electrónica los estudiantes reciben además una realimentación inmediata. A los profesores, por su parte, les permite diseñar revisiones para cada objetivo o tema en particular, sin preocuparse de tener que encontrar tiempo y recursos para analizar los resultados (Perurena, William, 2003).

Material y Método

El estudio realizado es descriptivo, de corte transversal. La población bajo estudio estuvo compuesta por 1199 alumnos de primer año de la FACE de la UNT que cursaron la asignatura Matemática I en el periodo lectivo 2012. La información se recolectó a través de un Sistema de nueve Autoevaluaciones Electrónicas en la plataforma Moodle, que eran realizadas por los alumnos como complemento de las actividades efectuadas en las clases presenciales, al final de cada unidad temática. Contemplaban ejercicios del tipo selección de respuestas múltiples, verdadero / falso, de respuestas cortas, numéricas, de lectura de gráficas y para relacionar o emparejar. Cada estudiante tenía la posibilidad de realizar dos intentos en la ejecución de cada autoevaluación y podía acceder desde la página web de la Universidad con la condición de estar matriculados en la misma. Una vez que el alumno cerraba y enviaba el cuestionario, se le ofrecía la posibilidad de ver la nota obtenida y la respuesta correcta a las preguntas. Por lo tanto, en esta experiencia se proporcionó una retroalimentación automática, además de la puntuación final resultante del cálculo del promedio de notas obtenido en cada intento realizado. Se muestran a continuación algunos ejercicios de las mismas. En las dos primeras pantallas reproducidas, observamos ejercicios de verdadero o falso, y para emparejar.

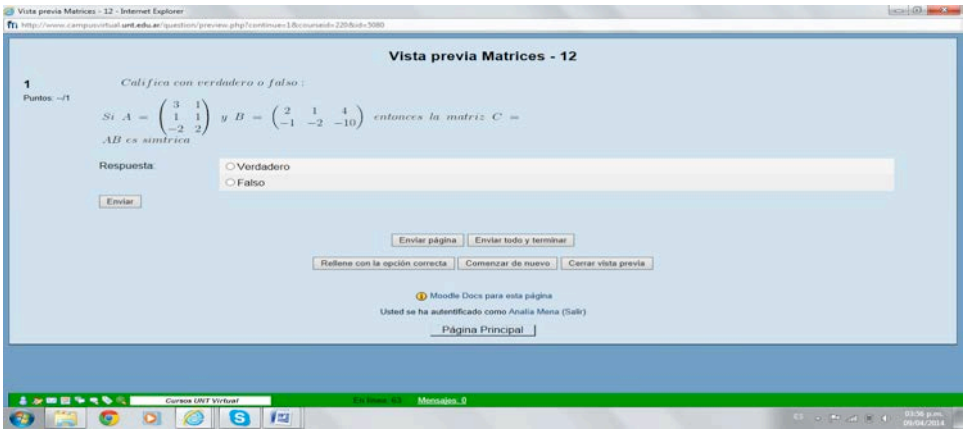


Gráfico 1. Pantalla correspondiente a una Autoevaluación del Aula Virtual de Matemática I. Año 2012

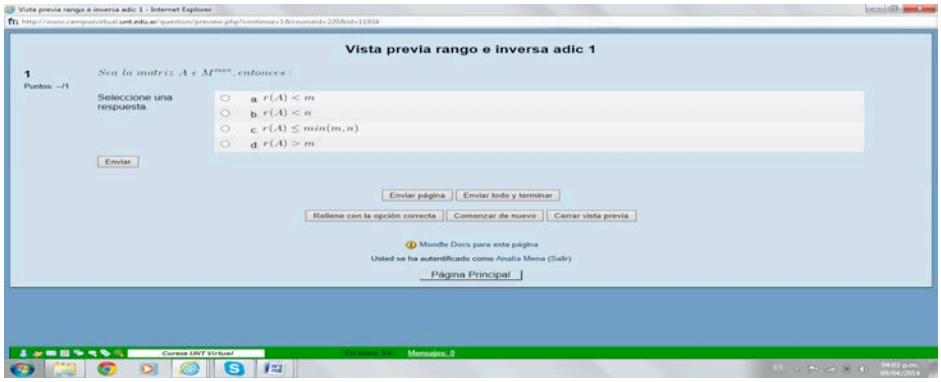


Gráfico 2. Pantalla correspondiente a una Autoevaluación del Aula Virtual de Matemática I. Año 2012.

La variable analizada fue el Rendimiento Académico y como indicador del mismo se consideraron las calificaciones obtenidas por los alumnos en las dos pruebas parciales y la realización de las nueve Autoevaluaciones Electrónicas. Estas calificaciones se midieron en una escala continua y de razón. Para el procesamiento de la información se utilizó planilla de Excel y software estadístico SPSS.

Resultados

En el Gráfico N° 3 se muestran los resultados obtenidos al indagar respecto del porcentaje de alumnos que rindieron el primer parcial, el segundo parcial y las nueve autoevaluaciones. Se observa que de un total de 1199 alumnos inscriptos en la asignatura, el 89% (1068) rindieron el primer parcial, 73,4% (881) el segundo parcial y a pesar de haberse inscripto en el aula virtual el 70% (842), la participación en las autoevaluaciones fue decreciendo notablemente desde un 61,8% (621) hasta un 14% (170).

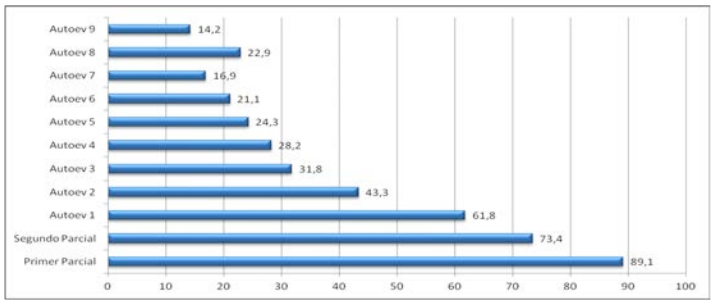


Gráfico 3. Distribución porcentual de 1199 alumnos según su participación el primer parcial, segundo parcial y en el Sistema de Cuestionarios de Autoevaluaciones de Matemática I. Año 2012.

Se definieron intervalos para distribuir los puntajes por categorías de notas, de [0,4) desaprobados, de [4, 6) regulares, de [6, 8) buenos y de [8,10] muy buenos.

El Gráfico N° 4 refleja en detalle como varía el rendimiento académico de los alumnos en cada uno de los parciales y en el Sistema de Autoevaluaciones.

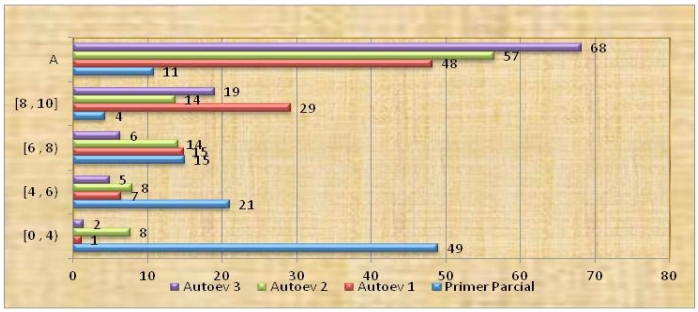


Gráfico 4. Distribución porcentual de 1199 alumnos según el Rendimiento Académico obtenido en el 1er Parcial de Matemática I y en las tres Autoevaluaciones correspondientes.

Se destaca, en la investigación, el alto porcentaje de alumnos desaprobados en el primer parcial y ausentes a las tres autoevaluaciones consideradas.

Se encontró, además, que sólo 352 alumnos rindieron el primer parcial y realizaron las Autoevaluaciones 1, 2, y 3 correspondientes. El comportamiento de estos alumnos se muestra en la Tabla N° 1.

		Rendimiento Académico - Primer Parcial %				Total %
		[0 , 4)	[4 , 6)	[6 , 8)	[8 , 10]	
Autoevaluación 1	[0 , 4)	70,0	28,6	1,4	0	100
	[4 , 6)	27,3	68,2	4,5	0	100
	[6 , 8)	7,4	22,3	46,8	23,4	100
	[8 , 10]	14,5	21,7	31,7	32,1	100
Autoevaluación 2	[0 , 4)	69,5	23,3	7,1	0	100
	[4 , 6)	37,5	47,7	11,5	3,3	100
	[6 , 8)	7,1	28,0	45,6	19,3	100
	[8 , 10]	11,5	14,6	33,8	40	100
Autoevaluación 3	[0 , 4)	68,8	31,3	0	0	100
	[4 , 6)	20,0	60,8	15,4	3,8	100
	[6 , 8)	10,6	31,9	53,2	4,3	100
	[8 , 10]	12,9	27,6	33,6	25,9	100

Tabla 1. Distribución porcentual de frecuencias de 352 alumnos según las variables Autoevaluación respecto del Rendimiento Académico en el 1er Parcial de Matemática I. Año2012.

Se observa que del total de alumnos que desaprobó la Autoevaluación 1, el 70% también desaprobó el primer parcial. Un porcentaje similar de alumnos que aprobaron la autoevaluación 1 con una nota inferior a 6 (seis), aprobaron el primer parcial con nota entre 4 (cuatro) y 8 (ocho). Además, se destaca que del total de alumnos que aprobaron la autoevaluación 1 con nota entre 8 (0cho) y 10 (diez), el 85,5% también aprobó el primer parcial. Al analizar el comportamiento de los alumnos que realizaron las autoevaluaciones 2 y 3 y que rindieron el primer parcial, se observa un comportamiento similar al caso anterior. El Gráfico N° 5 muestra los resultados obtenidos al analizar el Rendimiento Académico de los alumnos en el segundo parcial de Matemática I y en las seis Autoevaluaciones correspondientes.

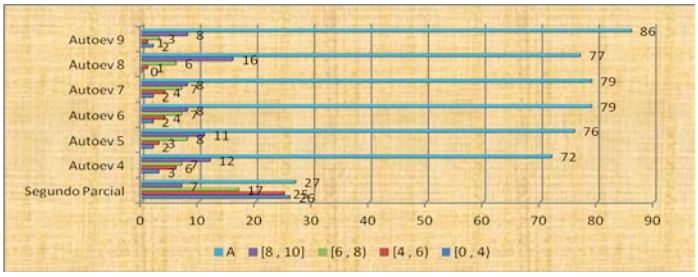


Gráfico 5. Distribución porcentual de frecuencias de la variable: Rendimiento Académico obtenido en el 2do Parcial de Matemática I y las Autoevaluaciones correspondientes. (n = 1199). Año 2012.

Se observó que el porcentaje de alumnos ausentes aumentó notablemente respecto del primer parcial. Además, se destaca el alto porcentaje de alumnos que no realizaron las autoevaluaciones virtuales. Se encontró que de un total de 1199 alumnos inscriptos en Matemática I, sólo un 14% (147) realizó las autoevaluaciones 4, 5, 6, 7, 8 y 9, lo que indica la necesidad de modificar los incentivos que se utilizaron para que los alumnos las realicen. Este motivo, condujo a la necesidad de averiguar respecto de cuál fue el desempeño de estos alumnos en las mencionadas autoevaluaciones y se llegó a la conclusión, como se observa en el Gráfico 6, que en general fue bueno.

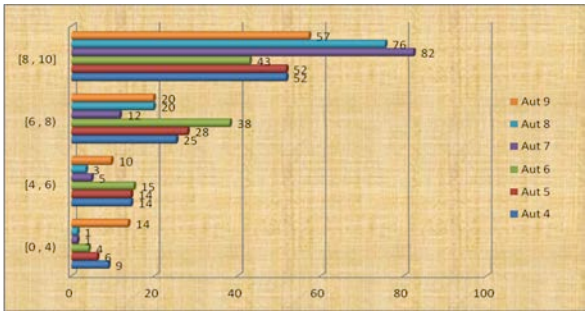


Gráfico 6. Distribución porcentual de frecuencias de las variables Rendimiento Académico en las Autoevaluaciones 4, 5, 6, 7, 8 y 9 correspondientes al segundo parcial de Matemática I (n = 147). Año 2012.

Cabe destacar, que los alumnos que hicieron las autoevaluaciones correspondientes al segundo

parcial, obtuvieron muy buenos resultados, ya que el 60% de ellos aprobó este parcial con una nota superior a 6 (seis). Esto posiblemente haya ocurrido por las características de estos estudiantes, ya que es posible que hayan estado más motivados; quizá, con o sin autoevaluaciones, hubiesen obtenido buenas calificaciones.Para comprobar si esto es así, se analizó el comportamiento de los alumnos que rindieron el segundo parcial de Matemática I y que realizaron las 6 (seis) autoevaluaciones correspondientes al mismo.

Tabla 2. Distribución porcentual de la variable Rendimiento Académico del segundo Parcial según su desempeño en las Autoevaluaciones 4 y 5 (n = 147). Año 2012.

Autoevaluación 4				
P 2	[0 , 4)	[4 , 6)	[6 , 8)	[8 , 10]
[0 , 4)	35,3	17,6	23,5	23,5
[4 , 6)	10	30	17,5	42,5
[6 , 8)	3,8	3,8	40,4	51,9
[8 , 10]	0	10,8	13,5	75,7

Autoevaluación 5				
P 2	[0 , 4)	[4 , 6)	[6 , 8)	[8 , 10]
[0 , 4)	23,5	17,6	23,5	35,3
[4 , 6)	7,5	25	22,5	45
[6 , 8)	3,8	9,6	34,6	51,9
[8 , 10]	0	5,4	27	67,6

A partir de estos resultados, que fueron similares a los obtenidos en el resto de las autoevaluaciones correspondientes al segundo parcial, se observó que un alto porcentaje de alumnos que aprobaron el segundo parcial también habían aprobado las autoevaluaciones. Un comportamiento análogo ocurre con los alumnos desaprobados: los que desaprobaron las autoevaluaciones también desaprobaron el segundo parcial. Es importante notar que los estudiantes con mayor nota en el parcial, son los que obtuvieron mayor nota en las autoevaluaciones. Sin embargo, consideramos que la relación Rendimiento Académico de los alumnos en el segundo parcial con respecto a las notas de las seis autoevaluaciones no es tan clara, ya que los alumnos considerados representan sólo el 14% de la población.

Conclusiones

El diseño de evaluaciones con autocorrección, aporta numerosos beneficios al proceso educativo: Los estudiantes cuentan con un instrumento que les permite determinar, de forma sencilla, el grado de aprendizaje alcanzado y los docentes pueden llevar un registro de las acciones docentes a mejorar. Un aspecto que sería importante mejorar es utilizar la evaluación en su modalidad formativa, en la que se ofrezca al estudiante información detallada de su actuación. Por lo tanto estas pruebas deben diseñarse de tal forma que cubran los objetivos formativos de la asignatura, que constituyan una evaluación formativa continua y que promueva la autorregulación del aprendizaje.

Otro aspecto importante es realizar un análisis de los resultados para que tanto los alumnos como el profesor sean conscientes del grado de adquisición de los conocimientos, para realizar los

ajustes necesarios del proceso de aprendizaje.

Si sólo cambiamos el hecho de que la evaluación sea automatizada (corrección y elaboración de informes al alumno), no se va a producir ningún cambio en el aprendizaje de los alumnos, dado que lo que realmente resulta eficaz es la calidad de la retroalimentación que proporcionan estas herramientas tecnológicas.

La investigación realizada indica que es necesario seguir trabajando en este sentido para lograr motivar a los alumnos, incentivándolos a participar en la realización de las autoevaluaciones, agregándole un peso a estas actividades de autoevaluación virtual.

Referencias bibliográficas

Brito, C. (2006). Fundamentos para el desarrollo de software preparación, generación aplicación y calificación de evaluaciones electrónicas. En EDUTEC (Ed), *IX Congreso Universitat de Rovira Virgeli.* (pp. 68 – 100). Venezuela: Universidad de Carabobo.

Castillo, S. y Cabrerizo, J. (2003). *Evaluación educativa y promoción escolar.* Madrid: Pearson Educación.

Dorrego, E. (2006). Educación a Distancia y Evaluación del Aprendizaje (versión electrónica). *Revista de Educación a Distancia,*VI.

García Beltrán, A.; Martinez, R.; Jaén, J. y Tapia, S. (2006). La autoevaluación como actividad docente en entornos virtuales de aprendizaje/enseñanza. (versión electrónica). *Revista de Educación a Distancia,*VI.

Rallo M., Sabater A. (2007). Cuestionarios de autoevaluación a través de intranets docentes: una herramienta para el aprendizaje. En CUIEET (Ed), *15° Congreso Universitario de Innovación Educativa en las Enseñanzas Técnicas* (pp. 56 – 71). Cadiz. España: Universidad de Cádiz.

Ortiz Hernández, E. (2007). La autoevaluación estudiantil. Una práctica olvidada. *Cuaderno de Investigación en la Educación, Investigaciones Educativas.* 22, 107-119.

Ossandón, Y.,Barrientos, V. (2003). Evaluación de los Aprendizajes en Ingeniería. *Revista Facultad de Ingeniería, 11*(1), 57-64

Perurena Cancio, L. Hernández, E. (2003). Sistema de herramientas para la construcción y administración de cursos multimedia. *Revista de Medios y Educación.* 21, 1-11.

UNA PROPUESTA DE TRABAJO COLABORATIVO CON LIBRE ELECCIÓN DE TIC EN EL AULA DE MATEMÁTICA

Patricia Có, Mónica del Sastre y Erica Panella
Universidad Nacional de Rosario. Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura. Argentina
co@fceia.unr.edu.ar, delsas@fceia.unr.edu.ar, panella@fceia.unr.edu.ar

Resumen. Asistimos a una auténtica revolución en relación al acceso a la tecnología y consecuentemente se nos impone una inminente reconceptualización de los diseños curriculares actuales. Los docentes universitarios enfrentamos el desafío de poder incorporar las Tecnologías de la Información y Comunicación como herramientas cognitivas promoviendo en nuestros alumnos un aprendizaje colaborativo que favorezca la construcción del conocimiento. De este modo decidimos llevar cabo una experiencia innovadora en un curso de Análisis Matemático II de la carrera de Ingeniería Mecánica (Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Argentina), en la que los estudiantes, para desarrollar las actividades propuestas, pudieron elegir cualquier recurso tecnológico disponible. En este trabajo describimos tal experiencia y reflexionamos sobre la misma desde un enfoque socioepistemológico con prospectiva al diseño de materiales didácticos y con base en la idea de propiciar un aprendizaje autónomo y colaborativo en entornos virtuales.

Palabras clave: Reconceptualización. Recursos informáticos. Aprendizaje colaborativo

Abstract. An authentic revolution is taking place in relation to technology's access and as a result an imminent re-conceptualization of the current curriculum designs is essential. University teachers face the challenge of being able to incorporate Information and Communication Technologies as cognitive tools promoting a collaborative learning that enables knowledge construction. We have carried on an innovative experience within a Calculus course in a Mechanical Engineering career (Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Argentina), in which the students could choose any available technological resources to deal with the proposed activities. In this work we describe this experience from a socio-epistemologic perspective with foresight to the didactic materials design. The experience was based on the idea of promoting autonomous and collaborative learning in virtual environments.

Key words: Re-conceptualization. Computer resources. Collaborative learning

Introducción .

Estamos asistiendo en nuestros días a una auténtica revolución en todo lo relativo al acceso a la tecnología. El hecho de estar conectados en cualquier lugar y a cualquier hora, ha posibilitado el desarrollo de muchísimas aplicaciones que ofrecen día a día más potencialidades, resultando cada vez más familiares términos como sincronización, portabilidad, nube, geolocalización. Muchas empresas optaron rápidamente por el cambio desarrollando sistemas operativos para todo tipo de dispositivos y nuevas plataformas para la búsqueda y descarga de todas esas aplicaciones. También se crean continuamente nuevos sitios que permiten, entre otras cosas, instalarlas y actualizarlas.

Esta cambiante perspectiva nos lleva a una inminente reconceptualización de los diseños curriculares actuales, implementados en su mayoría en un contexto de educación formal, presencial y fuertemente centrada en el aprendizaje de contenidos disciplinares. En este marco las instituciones educativas, particularmente las universidades, han mostrado un progresivo interés en

la incorporación de la tecnología al currículum.

Uno de los principales desafíos que enfrentamos los docentes de Matemática Básica en las Carreras de Ingeniería (en realidad de cualquier asignatura universitaria) está vinculado con las formas de incorporar a nuestras prácticas las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) como herramientas cognitivas, promoviendo en los alumnos un aprendizaje colaborativo que favorezca la construcción del conocimiento.

Desde hace algunos años integramos distintos grupos de investigación de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (UNR) y actualmente participamos del proyecto denominado: "Análisis Socioepistemológico de los contenidos del Cálculo en carreras de Ingeniería. Un puente entre la investigación y el aula", bajo la dirección de la Dra. Beatriz Introcaso. En todo este tiempo hemos llevado a cabo múltiples experiencias relacionadas con la implementación de las TIC en el aula, y en particular con el uso de software matemáticos (Có, del Sastre y Panella, 2009, 2011a, 2011b). Lamentablemente, salvo en casos aislados no se llegó a resultados totalmente satisfactorios. Algunos de los inconvenientes detectados estuvieron asociados a: insuficiencia de recursos, inadecuación de infraestructura, fallas en la conectividad y escasa participación e interés de los docentes.

Con la intención de superar tales inconvenientes e influenciadas por las afirmaciones de Coll (2004) repensamos la inclusión de las TIC en nuestras aulas, a sabiendas de que en educación las *recetas* no son adaptables a cualquier contexto. Todo por el contrario, consideramos que así como debemos planificar cuidadosamente nuestras prácticas intentando dotar de significatividad a las construcciones matemáticas que se llevan a cabo en el aula, también debemos hacerlo atendiendo al saber cultural de nuestros alumnos para lograr un rediseño efectivo de nuestras prácticas.

Así surgió la idea de realizar una experiencia innovadora en un curso de Análisis Matemático II de Ingeniería Mecánica, en la que los estudiantes, para desarrollar cada una de las actividades propuestas, pudiesen elegir cualquier recurso tecnológico disponible como por ejemplo: software matemático libre o propietario, plataforma educativa virtual, servicio de alojamiento de archivos en la nube, redes sociales, netbooks, tabletas, teléfonos celulares, proyector.

En este trabajo describimos tal experiencia y reflexionamos sobre la misma desde un enfoque socioepistemológico (Cantoral y Farfán, 2003) con prospectiva al diseño de materiales didácticos y con base en la idea de favorecer un aprendizaje tanto autónomo como colaborativo en entornos virtuales (Díaz Barriga y Morales Ramírez, 2009).

El aprendizaje colaborativo y los recursos informáticos

El aprendizaje colaborativo se basa en el enfoque constructivista que sostiene que el conocimiento es aprehendido por los propios sujetos para transformarlo en conceptos con los que ellos pueden relacionarse y reconstruirlo a medida que avanzan en nuevas experiencias. Más allá de esta instancia individual de análisis, conceptualización y apropiación, el aprendizaje es entendido como un proceso social de construcción del conocimiento, en el que se evidencia la necesidad de compartir conocimiento para lograr una meta que trascienda las posibilidades individuales. De este modo, una de las principales características del aprendizaje colaborativo es la *interacción*, ya que posibilita la construcción activa y conjunta de significados.

Vygotsky (1979), plantea que la génesis de todos los procesos mentales hay que buscarla en la interacción de los seres humanos con los demás, como lo expresa en su conocida ley de la doble formación en los procesos de desarrollo. Esto quiere decir que para este autor en el proceso de desarrollo cultural del individuo, toda función aparece dos veces, primero a nivel social y más tarde, a nivel individual; primero entre personas (interpsicológico) y después, en el interior del propio individuo (intrapsicológico).

Según Lakala, Rahikainen y Hakkarainen (2001, citado en Díaz Barriga y Morales Ramírez, 2009) el aprendizaje colaborativo se concibe como un proceso donde interactúan dos o más sujetos para construir aprendizaje, a través de la discusión, reflexión y toma de decisiones; los recursos informáticos actúan como mediadores psicológicos, eliminando las barreras espacio-tiempo. Se busca no sólo que los participantes compartan información, sino que trabajen con documentos conjuntos, participen en proyectos de interés común, y se facilite la solución de problemas y la toma de decisiones.

La Socioepistemología y el empoderamiento docente

Dentro de la Matemática Educativa (disciplina surgida en México en la década de los ´70s), se distinguen distintas corrientes de investigación cuya diferencia principal es la manera de entender y atender al conocimiento matemático según la posición epistemológica respecto a él. Una de esas corrientes es iniciada por el Dr. Ricardo Cantoral y se plasma como Teoría Socioepistemológica hacia fines de los ´80s. Esta teoría sostiene que la construcción del conocimiento se basa en las prácticas sociales y que el tipo de racionalidad con la cual un individuo o grupo -como miembro de una cultura- construye conocimiento quedará determinado por el contexto. Al ser significado y puesto en uso el conocimiento se afirma como un saber y su validez competerá al individuo o al grupo, ya que de ellos surgió su construcción y sus respectivas argumentaciones. Con el transcurrir de la vida del individuo o grupo y su interacción con diferentes contextos, se

resignificarán esos saberes enriqueciéndolos con nuevos significados.

En este marco, Reyes (2011) define al proceso de empoderamiento docente como aquél que le permite al docente adueñarse del saber que enseña, problematizándolo, favoreciéndose de este modo tanto la innovación a la hora de diseñar e implementar situaciones de aprendizaje como la generación de cuestionamientos, debates y reflexiones con sus alumnos que hagan emerger los distintos significados del saber matemático.

Creemos que el empoderamiento del docente induce empoderamiento de los estudiantes, resultando una relación dialéctica en la que ambos empoderamientos se afianzan y fortalecen mutuamente.

Los elementos fundamentales que permiten describir un proceso de empoderamiento, según Montero (2006) son la *participación,* referida a la acción desarrollada por los miembros de la comunidad en función de objetivos definidos colectivamente; la *conciencia,* que implica desarrollo de la crítica; la *autogestión,* expresada en la autonomía de las acciones y en la toma de decisiones concernientes a la comunidad, y el *compromiso,* que concierne al sentimiento ético de apego y obligación para con la comunidad, que lleva a involucrarse en acciones colectivas que pueden producir beneficios para todos. Se desarrolla entonces una identidad social, en este caso comunitaria.

El uso de la tecnología aparece hoy como una de las prácticas sociales inherentes a casi todas las actividades humanas, y es reconocido como fomentador de conductas participativas, de autogestión y de compromiso con actividades colectivas. Consideramos entonces a la experiencia descripta en este trabajo inmersa en un fenómeno didáctico de naturaleza social, en el cual los eslabones principales son el saber matemático puesto en juego y las interacciones efectuadas entre los actores del sistema didáctico en pos de un empoderamiento compartido. Por eso es que concebimos a la Socioepistemología como la disciplina desde la cual posicionarnos para llevar a cabo nuestra tarea.

Las TIC en el contexto educativo actual

La relevancia del uso de las TIC en la educación, y en particular en la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática es un tema ampliamente documentado. Las teorías psicológicas fundadas en las ideas de Vygotsky y sus continuadores, sostienen por ejemplo, que los procesos psicológicos superiores se caracterizan por la utilización de instrumentos de origen cultural adquiridos socialmente, particularmente instrumentos simbólicos como el lenguaje u otros sistemas de representación, los cuales facilitan su adaptación activa al medio. Desde esta perspectiva, las TIC constituyen un medio de representación y comunicación cuyo uso puede introducir modificaciones importantes en

determinados aspectos del funcionamiento psicológico de las personas, ya que crea, a partir de la integración de diversos sistemas semióticos (lenguaje oral y escrito, imagen audiovisual, representaciones gráficas, etc.) condiciones totalmente nuevas de tratamiento, transmisión, acceso y uso de la información (Coll, Mauri y Onrubia, 2008).

Si bien reconocemos que las TIC modifican esencialmente los entornos de enseñanza y de aprendizaje, sigue siendo un tema de permanente discusión la forma de llevar a cabo su adecuada integración al aula para transformarlas en instrumentos cognitivos.

En diversos estudios conducidos en el contexto de la educación mexicana e iberoamericana (ver al respecto Coll, 2007; Rueda, Quintana y Martínez, 2003, Soto y González, 2003, citados por Díaz Barriga y Morales Ramírez, 2009) los investigadores concluyen que los usos más frecuentes de las TIC en las aulas, tanto por profesores como por alumnos, tienen que ver más con la búsqueda y procesamiento de la información que con la construcción del conocimiento o la colaboración. El uso se enfoca habitualmente en el trabajo personal (búsquedas de información en Internet, utilización del procesador de textos, preparación de las clases y realización de tareas), menos frecuentemente en el apoyo a la labor docente en el aula (presentaciones, simulaciones, utilización de software educativo, etc.) y rara vez en la comunicación y el trabajo colaborativo entre los alumnos.

Resultados de experiencias propias a través de varios años de investigación sobre temas relacionados con las TIC y con el uso de software matemáticos, corroboran, en nuestro contexto educativo, las conclusiones arriba mencionadas. En Có et al. (2011b), exhibimos un análisis de las respuestas dadas por profesores a un cuestionario mixto (de acuerdo al tipo de preguntas que se plantean) elaborado para caracterizar la relación entre su valoración del impacto del uso de los software matemáticos en el aprendizaje y la implicancia en su práctica docente. El cuestionario fue dirigido a los docentes de las asignaturas de Matemática de las carreras de Ingeniería que se dictan en la FCEIA, y fue contestado por el 59% de los profesores que integran el Departamento de Matemática de la Escuela de Formación Básica. Los resultados se analizaron categorizando la valoración del impacto que los docentes hacen del uso de software matemáticos en relación a su formación, al aprendizaje de los estudiantes y a la práctica docente. En ese trabajo destacamos que los docentes expresaron una valoración positiva de este impacto y sin embargo, según pudimos verificar, en general esa valoración no se reflejaba en el diseño e implementación de propuestas didácticas pertinentes.

Nuestra propuesta

Como ya dijimos, al tratar de incorporar las TIC a nuestras clases encontramos numerosos

escollos. Tratando de superarlos y tomando como referente las premisas del abordaje socioepistemológico, pensamos una actividad de enseñanza dirigida a alumnos del primer año de la carrera Ingeniería Mecánica que se encontraban cursando Análisis Matemático II, asignatura correspondiente al segundo cuatrimestre.

La misma consistió en proponerles la realización de un trabajo grupal sobre un tema específico que consideramos relevante: *Aplicaciones de derivadas parciales en Ingeniería Mecánica*, alentando la utilización de cualquier recurso tecnológico.

Para asegurar la posibilidad de su implementación realizamos un relevamiento de la tecnología disponible en el aula, encontrando: cañón y notebook facilitados por la cátedra, conexión a Internet suministrada por la Facultad y recursos diversos (netbooks, notebooks, tabletas, teléfonos celulares y graficadoras) propios de los estudiantes.

Se buscó principalmente que la tarea a realizar fomentara la comprensión de problemas propios de la especialidad, tratados tradicionalmente en forma teórica y que alentara a los alumnos a buscar situaciones que les plantearan el reto de la incertidumbre o el conflicto.

También, al propiciar el uso libre de TIC, nos propusimos que:

- se constituyera en un complemento viable para la educación presencial.
- el aprendizaje se basara en el razonamiento y la discusión grupal, y no en la memorización y repetición.
- ese entorno de aprendizaje generara en los alumnos la necesidad de asumir un rol activo para seleccionar y organizar la información disponible, favoreciendo el desarrollo del espíritu crítico.
- los alumnos tuvieran diversidad de buenos recursos para interactuar con situaciones reales o representaciones de las mismas (por ejemplo simulaciones) optimizando la asimilación de conocimientos y la internalización de prácticas.
- el rol de expositor en la clase dejara de ser exclusividad del profesor para pasar a ser un lugar compartido por todos.
- cada alumno tuviese la oportunidad de autogestionar su aprendizaje transitando por una experiencia distinta (definida por sus elecciones) a la del resto de sus compañeros.

Durante aproximadamente quince días los alumnos trabajaron en el tema y prepararon su presentación grupal para ser exhibida en la última semana del ciclo lectivo. Utilizaron los recursos tecnológicos que les resultaron más familiares, más sencillos o más accesibles: plataforma virtual,

redes sociales, correo electrónico, software matemático en computadoras y/o celulares (Máxima, Matlab, Maple, Mathway, Calculus Tools, Mathlab Graphing Calculator, entre otros).

Algunas de sus producciones se refirieron a:

- *Ingeniería en Sonido. Aplicaciones de las derivadas en la acústica y electroacústica.*
- *Búsqueda del menor costo de maquinado por medio de la optimización de la duración del filo de herramientas con plaquitas de metal duro recubiertas.*
- *Estimación del divergente de fluido en un tanque de combustible de un automóvil.*
- *Condiciones para mejorar el número de Sommerfeld en el diseño de cojinetes de ejes.*
- *Resistencia aerodinámica. Conjunto ciclista-bicicleta.*
- *Cálculo de la variación aproximada del volumen de un gas necesario para producir la misma variación en la presión.*
- *Cálculo del incremento aproximado del volumen de un pistón cilíndrico circular recto cuando cambia su altura y su radio.*

A continuación narramos brevemente el desarrollo de la primera presentación:

Los alumnos comenzaron mostrando algunas aplicaciones de la Ingeniería en sonido (grabación y producción de música, medicina, seguridad industrial, estudio de materiales) y destacaron la importancia de la Matemática, particularmente de las derivadas, utilizada como recurso para plantear y resolver distintas cuestiones. Luego plantearon el problema de la captura de sonido, que varía según el principio físico que se utilice para transformarlo en ondas electromagnéticas. Se enfocaron en diferentes patrones de captura de sonido a través de micrófonos (cardiodes, supercardiodes, omnidireccionales) y mostraron la relación entre ellos y las sinusoides, a través de la comparación entre diagramas de los patrones y las gráficas en coordenadas polares de las funciones sinusoidales.

Posteriormente analizaron un problema típico de la Ingeniería en sonido y la Arquitectura, referente a las propiedades físicas del ambiente en el cual se realiza la grabación de un sonido determinado. Debido a una gran cantidad de fenómenos físicos complejos, como la reflexión, la interferencia y la reverberancia de ondas, resulta necesario conocer con qué intensidad se percibe un sonido de una frecuencia determinada a lo largo del tiempo en un lugar específico. Modelizaron matemáticamente la situación a través de una función en dos variables que relaciona la frecuencia de la onda sonora con el tiempo y la intensidad del sonido. Interesa el estudio de la gráfica de esta función y de sus curvas de nivel (que representan las frecuencias sonoras de igual intensidad en un

tiempo dado), como así también el vector gradiente que en este caso proporciona información de la dirección donde se manifiestan las mayores irregularidades en la percepción de los diversos sonidos.

Algunos de los recursos utilizados por este grupo de alumnos (citados textualmente de su informe):

- Páginas de Internet: http://hofa-akustik.de/pages/startseite_eng/messungen_eng.php (realiza gráficas que muestran las grabaciones de sonidos en ambientes con y sin acústica).

www.behringer.com, www.neumann.com, www.shure.com, www.charteroakacoustics.com (brinda información sobre los patrones de captura de distintos micrófonos). http://www.neumann.com/?lang=enyid=current_microphonesycid=u87_data,http://www.neumann.com/zoom.php?zoomimg=./assets/diagrams/u87ai_diagrams.htmyzoomlabel=Diagramyw=878yh=295 (ficha técnica de micrófono Neumann y sus patrones de captura). http://www.presonus.com/products/Virtual-StudioLive/Smaart-M (mediciones de acústica).

- Graficador online: footplot (www.fooplot.com), software matemático: Maple.
- Edición de imágenes: Paint y Photoshop 6.0.
- Libros: Modern Recording Techniques, séptima edición, de Miles, H. y Runstein, R. Recording Tips for Engineers", de Tim Crich.
- Correo electrónico y Facebook para comunicarse con los docentes y con sus compañeros de grupo. Cañón para la presentación del trabajo.

Reflexiones finales

Esta experiencia nos brindó la posibilidad de reconsiderar el rol de las propuestas de enseñanza para fundamentar el diseño de materiales teniendo en cuenta un aprendizaje autónomo y colaborativo con miras a construir conocimiento apoyándonos en la tecnología.

Pudimos observar que actividades como ésta, en la que se propicia el uso recursos tecnológicos, produce un "empoderamiento del alumno" en una dimensión tecnológica conocida más por ellos que por nosotros los profesores. Precisamente se trata de aprovechar esta situación concebida como un proceso comunitario en el cual es el empoderamiento de los estudiantes el que induce el empoderamiento de los docentes.

Creemos que en el futuro las propuestas de enseñanza deben promover ambientes de aprendizaje flexibles, fomentando la participación activa de todos los actores involucrados, favoreciendo el cambio de roles e identidades mediados por la tecnología.

Consideramos que nuestra propuesta se ajustó a estos requerimientos en el sentido de haber propiciado un entorno de aprendizaje en el que el uso de TIC ayudó a complementar la educación presencial en el escenario y las condiciones institucionales actuales. Más aún, no sólo vimos a un alumno usando y haciendo matemática con TIC, sino también gestionando su propio aprendizaje, interactuando con situaciones reales o simuladas y comprometido en la adquisición de saberes y habilidades propios de la comunidad profesional a la que se pretende integrar.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*. *16*. 27-40.

Có, P., del Sastre, M. y Panella, E. (2009). Visualización y TIC en la enseñanza universitaria de la Geometría Analítica. En *XV Encuentro Nacional y VII Internacional de Educación Matemática en carreras de Ingeniería*. Tucumán, Argentina

Có, P.; del Sastre, M. y Panella, E. (2011a). *Representaciones con CAS. Un puente hacia la aprehensión conceptual*. Ponencia presentada en International Program Committee of XIII Inter American Conference on Mathematics, Recife, Brasil. Recuperado de http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/files/conferences/1/schedConfs/1/papers/669/supp/669-760-1-SP.pdf.

Có, P., del Sastre, M., Panella, E. y Sadagorsky, A. (2011b). Valoración del impacto de los software matemáticos en el aprendizaje y la enseñanza de la matemática básica en carreras de Ingeniería. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa. 24*. 1134-1141.

Coll, C. (2004). Psicología de la educación y prácticas educativas mediadas por las tecnologías de la información y la comunicación: una mirada constructivista. *Sinéctica. 25*. 1-24.

Coll, C., Mauri, T. y Onrubia, J. (2008). Análisis de los usos reales de las TIC en contextos educativos formales: una aproximación sociocultural. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 10 (1). Recuperado de http://redie.uabc.mx/vol10no1/contenido-coll2.html.

Díaz Barriga, F. y Morales Ramírez, L. (2009). Aprendizaje colaborativo en entornos virtuales: un modelo de diseño instruccional para la formación profesional continua. *Tecnología y Comunicación Educativas, 22-23*(47-48), 4-25.

Montero, M. (2006). *Teoría y práctica de la psicología comunitaria. La tensión entre comunidad y sociedad* (3era ed.). Buenos Aires: Paidós.

Reyes, D. (2011). Empoderamiento docente desde una visión Socioepistemológica: Estudio de los

factores de cambio en las prácticas del profesor de matemáticas. *Tesis de Maestría,* Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México: www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/maestria/reyes_2011.pdf

Vygotsky, L. (1979). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Crítica.

EL APRENDIZAJE DE ESPACIOS VECTORIALES EN AMBIENTES COMPUTACIONALES

María Guadalupe Vera Soria, Eduardo Miranda Montoya
Universidad de Guadalajara. México
ITESO. México
guadalupe.vera@red.cucei.udg.mx, emiranda@iteso.mx

Resumen. Se presenta el avance de una tesis doctoral en la que se investiga cómo son los procesos en la comprensión de los conceptos de la teoría de espacios vectoriales en estudiantes universitarios del área de ciencias e ingenierías. Se trata de un estudio cualitativo e interpretativo que busca analizar y describir la cadena de inferencias que los participantes realizan, a partir de los lenguajes geométrico, simbólico y estructural. El marco teórico para fundamentar la investigación es el modelo de la comprensión en matemáticas de Anna Sierpinska (Sierpinska, 1994) y el modelo de la distinción epistemológica teórico-práctico de Sierpinska y colaboradores (Sierpinska, Nnadozie y Oktaç, 2002).
Palabras clave: Álgebra Lineal, Pensamiento Teórico, Interpretativo.
Abstract. This paper presents a doctorate research project advance, which aims to investigate the processes of understanding of vector spaces theory concepts in undergraduate science and engineering students. This is a qualitative and interpretive study that seeks to analyze and describe the chain of inferences that participants made, from the geometric, symbolic and structural languages. The theoretical framework for the research is Sierpinska´s model of understanding in mathematics (Sierpinska, 1994) and Sierpinska and colleagues epistemological model of the theoretical and practical distinction (Sierpinska, Nnadozie and Oktaç, 2002).
Key words: linear algebra, theoretical thinking, interpretative.

Introducción

La comprensión de las nociones como las que se abordan en los cursos de álgebra lineal, a diferencia de otras ramas como cálculo o estadística, no puede ser alcanzada a partir de problemas de aplicación o mediante el manejo operacional basado en ejercicios modelo (Harel, 2002; Sierpinska, Nnadozie y Oktaç, 2002; Oktaç y Trigueros, 2010). El motivo por el que se estudia sobre la comprensión de los conceptos de la teoría de espacios vectoriales responde a la necesidad de realizar investigaciones en relación con estos conceptos, de los cuales se han documentado varias dificultades atribuidas tanto a factores debido a la naturaleza del álgebra lineal y al tipo de pensamiento y lenguajes requeridos para su comprensión (Harel, 1997; Dorier y Sierpinska, 2001; Soto, 2003; Maracci, 2008).

Los conceptos del álgebra lineal resultan de la reflexión sobre las propiedades comunes de objetos matemáticos y los procedimientos algorítmicos, son sólo un elemento de análisis en la argumentación de las ideas. Por ejemplo, para entender el concepto de base de un espacio vectorial es necesario identificar una serie de relaciones entre vectores (combinación lineal) y entre otros conceptos (independencia lineal y conjunto generador), y en ese proceso varias experiencias marcan pasos significativos hacia la comprensión del sistema que los interrelaciona.

La comprensión de los conceptos matemáticos del álgebra lineal, supone para ellos que deban abstraerse en proceso que implica la realización un gran número inferencias sobre otros objetos de los cuales depende, y como señala Pozo (1994) "mientras los referentes de un concepto pueden determinarse por vía asociativa, por procesos de abstracción que conducen a un [..] concepto potencial, la adquisición de su significado o sentido sólo es posible por procesos de reestructuración o reorganización del sistema de conceptos" (p. 204).

Si bien los estudios asociados a la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos del álgebra lineal en la universidad se han venido documentando desde hace dos décadas, generalmente a través de investigaciones que relacionan el uso de determinadas estrategias de intervención con los resultados de aprendizaje de los conceptos (Dorier, J. L., Robert, A., Robinet, J. y Rogalski, M.,1999; Harel, 1999 y Stewart y Thomas, 2010), o que analizan las fuentes de dificultad en el uso de los lenguajes y registros de representación (Hillel, 2002; Alves Dias y Pavlopoulou citadas por Artigue, Chartier y Dorier, 2002; Sierpinska, 2002 y Dogan-Dunlap, 2010), se detecta en gran medida que la comprensión de los conceptos siendo tema de preocupación educativa: "el aprendizaje del álgebra lineal requiere de un gran esfuerzo" (Oktaç y Trigueros, 2010, p. 383) y es necesario "realizar investigaciones de fondo en relación con los conceptos […], puesto que, […] varias dificultades de los estudiantes están relacionadas con la comprensión de estos conceptos" (Kú, Trigueros, y Oktaç, 2008, p. 87).

No obstante, estos trabajos aportan indicios sobre los actos de comprensión que forman parte del fenómeno integral de los procesos en la comprensión de los conceptos, es a partir de las características epistemológicas otorgadas a los conceptos del álgebra lineal que se elige llevar a cabo un estudio cualitativo desde la perspectiva teórica de Anna Sierpinska (Sierpinska, 1994 y Sierpinska et al., 2002), quien considera que la comprensión de los conceptos se deriva de preconcepciones que pueden actuar como obstáculos a ser superados al analizar dichas creencias desde un punto de vista alternativo.

Dicho análisis requiere que el estudiante identifique y discrimine los objetos asociados a los conceptos, generalice el sistema conceptual y que sintetice la relación entre las propiedades los conceptos en el sistema para organizarlos en un todo consistente.

La pregunta que guía la investigación es ¿cómo son los procesos en la comprensión del concepto de base de un espacio vectorial en estudiantes universitarios, a partir de los lenguajes de representación geométrico, simbólico y estructural?, y para responderla se pretende examinar la cadena de inferencias a propósito de los conceptos que estudiantes universitarios manifiestan mientras realizan actividades de aprendizaje a partir de los lenguajes geométrico, simbólico y

estructural, y con el análisis de la evidencia empírica, se pretende explicar las transformaciones en el transcurso progresivo a la comprensión de las relaciones entre los conceptos que ellos efectúan.

La principal contribución de la investigación en curso reside específicamente en esa forma de abordar la comprensión de los conceptos desde la dimensión sobre las componentes en la comprensión y la dimensión sobre las categorías teórico-práctico en la comprensión, por lo que también se puede señalar que en esta investigación se indaga sobre los procesos en la comprensión de los conceptos del álgebra lineal que los alumnos desarrollan con base en las representaciones producidas en ambientes computacionales o mejor dicho, las condiciones en la identificación, discriminación, generalización y síntesis que a propósito de los conceptos y con base en las representaciones en ambientes computacionales se haga.

Marco Teórico

Sierpinska (1994) postula que los procesos de comprensión en matemáticas, pueden considerarse como un "entramado de actos de comprensión ligados por razonamientos" (p. 72). De esta forma, al hablar de un acto de comprensión será preciso determinar a qué nos referimos para evitar ambigüedad y en el caso de los conceptos matemáticos, existen dos diferentes tipos de conceptos. Primero, si el concepto es considerado como un cierto objeto ya hecho, definido y descrito en cierta manera y que puede ser interpretado de distintas formas, entonces un acto de comprensión consistiría en analizar su definición y descripción para reconocer o encontrar qué hay detrás de dicho concepto. Pero, por otro lado, comprender un "concepto X" (p. 4) puede implicar conocer en base a qué, X será entendido. En este caso el concepto podrá formarse en el acto o el proceso de comprender una situación y esta segunda forma de comprensión consecuentemente, es la referida para los propósitos de este trabajo.

Para precisar lo que un acto de comprensión implica, la autora refiere la definición propuesta por Ajdukiewicz (citado por Sierpinska, 1994), para quien la comprensión es un acto mental por el que un *objeto de comprensión* se relaciona con otro objeto que funge como *base de la comprensión* del primero. Así por ejemplo, en un caso ordinario "se puede decir que una persona ha comprendido una expresión cuando al escucharla dirige su pensamiento a un objeto distinto del mencionado originalmente" (Sierpinska, 1994, p. 28). También añade, que más allá de abordar la comprensión de expresiones con base en una determinada representación mental, generalmente los objetos de comprensión en matemáticas no pueden ser comunicados de manera ostensiva y por lo tanto, su comprensión en principio podría no ser clara: "los objetos matemáticos…introducidos en un sistema de necesidades y consecuencias lógicas por sus relaciones con otros objetos matemáticos, podrían tener propiedades que resultan difíciles de descubrir o de probar o desacreditar"

(Sierpinska, 1994, p. 30).

Y continuando con su discusión, Sierpinska (1994) destaca el papel de cada una de las componentes que conforman un acto de comprensión:

> …el 'sujeto de comprensión' (P) – la persona que comprende,[…] lo que P intenta comprender –'el objeto de comprensión' (X)[,…] y a lo que el pensamiento de P se dirige (o se intenta dirigir) en el acto de comprensión: 'la base de la comprensión' (Y). Y [además], la operación mental que conecta el objeto de comprensión con su base (Sierpinska, 1994, p. 29).

En un acto de comprensión, los objetos matemáticos encuentran sentido en varias otras cosas, a éstas se les considera como *base de la comprensión* del objeto y podrían ser una explicación, o una representación, una habilidad procedimental, una opinión, una justificación, etc. "En un acto de comprensión basado en la representación de un objeto, el sujeto no toma ninguna posición hacia el objeto, es decir, no lo juzga o lo evalúa, [sino que] el objeto de comprensión se corresponde con una imagen mental o descripción" (Sierpinska, 1994, p.49), por este motivo es muy importante tomar en cuenta los avances en las investigaciones sobre el uso de las representaciones en la comprensión de los conceptos (Hillel, 2002; Pavlopoulou y Alves Dias citadas por Artigue et al., 2002), al igual que los aportes sobre los mecanismos y construcciones mentales en el aprendizaje conceptual en álgebra lineal (Kú, Trigueros y Oktaç, 2008; Parraguez, 2009; Kú, Oktaç y Trigueros, 2009; Roa-Fuentes y Oktaç, 2010; Oktaç y Trigueros, 2010).

Además en cuanto a las operaciones mentales, se puede decir que para que un concepto matemático sea entendido, éste supone ser identificado, discriminado, generalizado y sintetizado. Además, Sierpinska (1994) aclara que la abstracción es una operación involucrada en todas y cada una de las cuatro operaciones antes mencionadas, debido a que por medio de ella se destacan las características de los objetos matemáticos.

Identificar un objeto de comprensión implica un sentimiento de descubrimiento o reconocimiento, "involucra primero que algo es revelado, es decir, que se ha aislado y escogido del 'fondo del campo de la conciencia' donde estaba […] escondido y segundo, que se ha reconocido como algo que se intenta entender" (Sierpinska, 1994, p. 56). Habiendo sido aislado y reconocido el objeto de conocimiento, podría o no ser nombrado de alguna manera.

Al ser identificado, ese objeto matemático se clasifica y se posiciona junto a otros objetos aun y cuando no se sabe nada de él excepto que se intenta estudiar. Esta clasificación no significa que sea haya realizado una categorización, es decir, el objeto se incluye como un elemento más en una

clase de objetos y no como un caso particular de esa clase.

Sierpinska (1994), afirma que un proceso de comprensión está determinado por la relación cercana de los objetos en los actos por los cuales se compone, como en los conceptos de la teoría de espacios vectoriales, y sigue:

En un proceso de comprensión, los actos de comprensión siempre están ligados por un razonamiento de forma tal que los actos de comprensión y los razonamientos construyen "una densa red" (Sierpinska, 1994, p. 73), y en esta red puede haber diferentes bases de la comprensión. "Uno puede incluso decir que el proceso de comprender algo consiste en una serie de transformaciones de algunas bases iniciales de comprensión" (p.73) y es por esto que se ha afirmado que en esta investigación se indaga sobre la comprensión de los alumnos que se desarrolla con base en las representaciones.

Los razonamientos mencionados en la definición de procesos de comprensión "es toda inferencia o deducción así como 'los procesos de solución mental llevados a cabo con el uso de inferencias y/o deducciones'" (Sierpinska, 1994, p. 73) y en estos razonamientos, la inferencia y la deducción son diferentes: al realizar inferencias se parte de premisas que llevan a probables conclusiones y en cambio, al realizar deducciones se orienta a partir de razones válidas a consecuencias implicadas por esas razones y en este sentido, la deducción es un razonamiento más formal que la inferencia.

En esta investigación se conjetura que el tipo de razonamientos que los participantes realicen a partir de las transformaciones generadas con base en las representaciones convencionales del álgebra lineal en ambientes computacionales así como las condiciones en la comprensión que se cumplan, serán decisivos en cuanto a las operaciones mentales que se desarrollen y los actos de comprensión de los conceptos que se logren. Asimismo, las actividades a utilizar durante las sesiones experimentales, deben sustentarse en los constructos teóricos que nos permitan dilucidar bajo qué condiciones se propicia la comprensión de los conceptos.

Por otra parte, Sierpinska, Nnadozie y Oktaç (2002) a partir de la interpretación de la obra de Vygotsky sobre los conceptos científicos y cotidianos, elaboran un modelo en el que se argumenta sobre la existencia de dos planos diferentes de construcción del conocimiento matemático: el pensamiento práctico y el pensamiento teórico.

> La comprensión de las teorías matemáticas requiere de ambos, el pensamiento práctico y el pensamiento teórico. El pensamiento práctico es la base en contra de la cual el pensamiento teórico adquiere razón de ser y sin la cual pierde su significado epistemológico y, en este sentido, el pensamiento práctico es un *obstáculo epistemológico*. Esto es, un fenómeno cognitivo y cultural que en cierta forma impide el desarrollo

> matemático pero que al mismo tiempo, es componente indispensable en la construcción del conocimiento matemático (Sierpinska, 1990, 1992 y 1994, citada por Sierpinska et al., 2002, p. 14).

Otte (citado por Sierpinska, 2005) señala que la distinción de las categorías de pensamiento teórico y práctico, es de naturaleza epistemológica y no ontológica, ya que ellas representan una forma simplificada de conocimiento de la actividad cognitiva humana en matemáticas y no son en sí tipos de actividad cognitiva humana, es decir, las categorías teórico–práctico pueden ser consideradas separadamente solo en teoría, pues el pensamiento se desarrolla simultáneamente en diferentes planos de acción.

Para explicar la relación de complementariedad de las categorías concomitantes de pensamiento teórico–práctico en la actividad cognitiva en matemáticas, Sierpinska (2005) apunta que estas categorías pueden ser vistas como pares de obstáculos epistemológicos, es decir que el pensamiento no es ni teórico ni práctico, pero que surge de la tensión entre ambos.

Vygostky (1995) afirma que "la fortaleza de los conceptos científicos radica en su carácter consciente y deliberado" (p. 184), por lo que se asume que el pensamiento teórico es caracterizado por "la reflexión consciente sobre los significados de las representaciones semióticas del conocimiento, así como de sistemas de conceptos y no solo de acumulación de ideas" (Sierpinska, 2002, pp. 211). También señala la importancia, para el desarrollo del pensamiento teórico, de la participación independiente y crítica del aprendiz en la construcción del conocimiento.

Para dar más detalle al respecto de la inclinación a pensar teóricamente, Sierpinska y colaboradores (Sierpinska et al., 2002) explican que el pensamiento teórico es contrario al pensamiento práctico en sus objetivos, en su objeto y en sus principales intereses y resultados.

El objetivo en el pensamiento práctico es realizar acciones para hacer que algo pase, pero en el pensamiento teórico el objetivo es entender una experiencia y reflexionar sus posibles consecuencias. Además, en tanto que el objeto del pensamiento práctico son fenómenos aislados, en el pensamiento teórico son sistemas de conceptos y, aunque el pensamiento práctico se interesa por dar significado a las acciones, el interés principal del pensamiento teórico es el significado de los conceptos, sus referencias, connotaciones y las posibles consecuencias de ese significado para el significado de otros conceptos relacionados (Sierpinska et al., 2002).

De manera más específica, Sierpinska et al. (2002) describen al pensamiento teórico mediante tres categorías principales: el pensamiento teórico es reflexivo, sistémico y analítico:

El pensamiento reflexivo se refiere al razonamiento realizado de forma voluntaria con el propósito de adquirir una mejor comprensión de las ideas. Mientras que el pensamiento sistémico consiste en pensar acerca de sistemas de conceptos donde el significado de un concepto está basado en sus relaciones con otros conceptos (Sierpinska et al., 2002).

En cuanto al pensamiento analítico, se refiere a la actividad cognitiva realizada de forma consciente para advertir el carácter arbitrario y convencional de los signos y su relación con los objetos que representan (Sierpinska et al., 2002). En este sentido, la distinción teórico–práctico propuesta en el modelo de Sierpinska (2005), no se refiere precisamente al pensamiento como tal, sino a la relación entre el pensamiento y el objeto por asimilar, que en el caso del pensamiento teórico es mediado por sistemas de signos.

El pensamiento práctico opera siempre a nivel de acción, externo al pensamiento en sí mismo, mientras que el pensamiento teórico piensa sobre los conceptos y sobre su razón de ser: se preocupa por las notaciones simbólicas y formas de representación, pero también sobre las reglas y principios que les dan razón y validan su uso (Sierpinska et al., 2002).

Planteamiento Metodológico

En la presente investigación se busca analizar y describir los procesos en la comprensión de un concepto matemático en estudiantes universitarios, por lo que se plantea necesario estudiar dicho fenómeno desde su contexto para entender cómo es que los participantes dan sentido a su experiencia.

De acuerdo con Merriam (2002), un estudio hermenéutico/interpretativo procura precisamente comprender el significado que las personas han construido acerca de su mundo. Este significado, es mediado por el investigador como principal instrumento en el proceso inductivo por el cual se recolectan y analizan los datos para obtener los hallazgos que se presentan en forma ampliamente descriptiva.

El término "hermenéutica" proviene del verbo griego *hermeneuein* que quiere decir interpretar (Martínez, 2006), y en realidad en toda investigación, la elección del enfoque y la metodología, el tipo de preguntas que se formulan, la recolección y análisis de datos, implican esta actividad interpretativa, pero lo que distingue al método interpretativo es el *énfasis en la interpretación dialéctica del asunto en estudio*.

"La comprensión es participativa, conversacional y dialógica,[…] es algo producido en el diálogo y no algo meramente reproducido por un intérprete a través del análisis de eso que busca comprender" (Denzin y Lincoln, 2000, p. 195).

A diferencia del método denominado explícitamente como "interpretativo", otros diseños en la investigación cualitativa persiguen además propósitos adicionales (Merriam, 2002), por ejemplo, la teoría fundamentada además de comprender pretende construir una teoría sustantiva sobre el fenómeno de interés, la etnografía busca entender la interacción entre individuos no solo con otros, sino con la cultura de la sociedad en la cual viven. Los estudios de caso, también interesados en describir un fenómeno a fondo, se distinguen por analizar un sistema definido (un caso), elegido porque es único, típico, altamente exitoso, etc.

Además, los estudios fenomenológicos buscan comprender realidades vivenciales de otras personas aunque a diferencia de éstos, el método hermenéutico/interpretativo trata de entender un fenómeno que no necesariamente es totalmente consciente para el participante en el momento en que se produce la expresión. Schleiermacher (citado por Martínez, 2006) afirma que el fin de la hermenéutica es comprender a un autor mejor de lo que él mismo se entiende.

Así, que es a través del diálogo exploratorio con los participantes y, sobre todo, de la observación de lo que sucede y el estudio sistemático posterior (grabaciones y notas de campo), que la información recolectada en el estudio interpretativo lleva al investigador a realizar una visión de conjunto (la interpretación) que integra los hallazgos en una estructura inteligible y coherente.

Se pretende llevar a cabo el estudio con seis estudiantes de segundo semestre (de entre 18 y 20 años) que cursan la materia de álgebra lineal en el Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías (CUCEI) de la Universidad de Guadalajara. La materia de álgebra lineal forma parte del área de formación básica común a toda la oferta académica del CUCEI, motivo por el cual los alumnos pertenecen a diferentes carreras: ingenierías, licenciatura en matemáticas, en física o química.

Referencias bibliográficas

Artigue, M, Chartier, G y Dorier, J. L., (2002). Presentation of other Research Works. En M. James (Ed.), *Mathematics Education Library Series: Vol. 23. On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 247-264). doi: 10.1007/0-306-47224-4_9

Dorier, J. L. y Sierpinska, A. (2002). Research into the Teaching and Learning of Linear Algebra. En D. Holton, M. Artigue, U. Kirchgraber, J. Hillel, M. Niss y A. Schoenfeld (Eds.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: New ICMI Study Series, 7,* 255-273. doi: 10.1007/0-306-47231-7_24

Harel, G. (1997). The Linear Algebra Curriculum Study Group Recommendations: Moving Beyond Concept Definition. *Resources for Teaching Linear Algebra*. MAA notes (42), 107-126.

Hillel, J. (2002). Modes of Description and the Problem of Representation in Linear Algebra. En J. L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra in Question, 23*, 191-207. doi: 10.1007/0-306-47224-4_7

Maracci, M. (2008). Combining different theoretical perspectives for analyzing student´s difficulties in vector spaces theory. *ZDM Mathematics Education* 40, 265-276. DOI: 10.1007/s11858-008-0078-z

Oktaç, A. y Trigueros, M. (2010). ¿Cómo se aprenden los conceptos de álgebra lineal?. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa (13)* 4-II, 373-385. Recuperado de http://www.clame.org.mx/relime/201021d.pdf

Parraguez, M. (2009). *Evolución Cognitiva del Concepto Espacio Vectorial.* (Tesis doctoral). Instituto Politécnico Nacional. México. Recuperado de http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/doctorado/parraguez_2009.pdf

Pozo, J. I. (1994). *Teorías cognitivas del aprendizaje*. Tercera edición. España: Morata.

Roa-Fuentes, S. y Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto de transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, *13* (1), 89-112.

Kú, D., Trigueros, M., Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Educación Matemática*, (20) 2, 65-89.

Sierpinska, A. (1994). Understandin and meaning. En *Undestanding in Mathematics* (pp. 1-26). London: Falmer Press.

Sierpinska, A. (2005). On Practical and Theoretical Thinking and other False Dichotomies in Mathematics Education. En M. H. G. Hoffmann, J. Lenhard and F. Seeger (Eds.), *Activity and Sign: Grounding Mathematics Education*, (pp. 117-135). doi: 10.1007/0-387-24270-8_11

Sierpinska, A., Nnadozie, A. y Oktaç, A. (2002). *A study of relationships between theoretical thinking and high achievement in linear algebra.* Reporte de Investigación. Montreal, Canadá: Concordia University.

Vygotsky, L. S. (1995). *Pensamiento y lenguaje*. Nueva edición a cargo de Alex Kozulin. Cognición y desarrollo humano. Barcelona, España: Paidós.

ENSEÑANZA DE LA INFERENCIA ESTADÍSTICA A PARTIR DE CLASES VIRTUALES

Terán Teresita y Córdoba Omar
Facultad de Ciencias Veterinarias. U.N.R. México
teresitateran@hotmail.com, odcordoba@hotmail.com

Resumen. Con el propósito de contribuir al conocimiento didáctico de temas de Inferencia Estadística para alumnos universitarios de la carrera de Médico Veterinario de la Facultad de Ciencias Veterinarias de Casilda se propone incorporar alternativas no presenciales para el dictado de algunos temas de Inferencia Estadística. Las clases virtuales como herramientas cognitivas en la enseñanza, reducen el impacto negativo de los viajes frecuentes de los alumnos ya que suelen estar radicados a varios kilómetros de la misma, permitiendo una mejor distribución de los tiempos y esfuerzos, poniendo a disposición de los alumnos todos los contenidos, problemas, explicaciones brindadas en la clase presencial.
Palabras clave: Planificación – NTIC – Clases Virtuales
Abstract. With the purpose of contributing to the didactic knowledge of topics related to Statistical Inference for university students of the career of Veterinary Doctor of the Faculty of Veterinary Sciences of the city of Casilda, we intend to incorporate alternative not-present classes for the teaching of some topics of Statistical Inference. Virtual classes, as cognitive tools in teaching, reduce the negative impact of the frequent trips that the students make since they usually reside several kilometers away from the institution, allowing a better distribution of time and efforts, putting at the students' disposal all the contents, problems and explanations given in the present-class.
Key words: Planning – NICT – Virtual Classes

Introducción

A partir del proyecto de investigación comenzado en el año 2010 titulado "La enseñanza y el aprendizaje de la Inferencia Estadística desde las aplicaciones de Estadística a Veterinaria" se propone incorporar alternativas no presenciales para el dictado de la asignatura Bioestadística, particularmente en algunos temas de Inferencia. El objetivo del proyecto se centra en contribuir al conocimiento didáctico en relación a temas de Inferencia Estadística de forma que éste pueda ser empleado en futuras propuestas de enseñanza para alumnos universitarios de la carrera de Medicina Veterinaria y de los trabajos realizados a partir de esta temática.

Tedesco (2007) sostiene que el principal factor productivo del futuro no serán ni los recursos naturales ni el capital, ni la tecnología, sino el conocimiento y la información a través de las llamadas nuevas tecnologías de la información y comunicación (NTIC).

El desarrollo alcanzado por las tecnologías digitales posibilita ampliar los entornos tradicionales de aprendizaje con un espacio virtual que, utilizado adecuadamente, permite adicionar o remplazar tiempo y espacio en los ámbitos presenciales de cursado.

Al respecto Torcal (2003) sostiene que el Campus Virtual es un espacio social que introduce numerosas innovaciones en la forma y manera de entender la formación académica.

Los docentes de los distintos niveles que componen la pirámide educativa, siempre están en la búsqueda de métodos y herramientas que permitan llegar a los alumnos con efectividad y eficiencia. En esta búsqueda permanente ha surgido Internet como un modo de incorporar al aula novedades, sistemas y elementos que permiten acceder a los contenidos de la clase evitando trasladarse o contar con costosos materiales didácticos, obteniéndose éstos de un modo virtual.

Internet ofrece una comunicación dinámica en la obtención de los contenidos de las diversas clases y temas.

La mayoría de las instituciones educativas han incorporado espacios virtuales diseñados para la enseñanza como un apoyo invaluable haciendo un uso educativo de la Internet. Estos espacios se denominan genéricamente "aulas virtuales" y cada sesión o tema abordado en una de ellas se conoce como "clase virtual". El aula virtual es un entorno educativo que intenta facilitar el aprendizaje cooperativo y colaborativo entre estudiantes y entre éstos y los profesores (Rabasco Pavón y Casanova Correa, 2007).

Para Vrasidas y McIsaac (2000) un curso virtual es aquel que se desarrolla completamente a través de la Red, o que realiza un número considerable de sesiones apoyado en este medio. Pueden desarrollarse algunos encuentros presenciales, pero se imparte la enseñanza en gran parte a través de la Red. Los cursos que simplemente publican el programa (contenidos, metodología, evaluaciones, bibliografía) en algún sitio de la Internet, pero sesionan regularmente en forma presencial, no son realmente virtuales.

Según Horton (2000) el aula virtual es el medio en Internet en el cual los educadores y educandos se encuentran para realizar actividades que conducen al aprendizaje.

Una de las ventajas principales de la enseñanza virtual es que no está sujeta a restricciones espaciales o temporales. Estas condiciones propician el aprendizaje autorregulado y la reflexión. Algunas aulas virtuales son sistemas cerrados, sin mucha interacción, en donde el alumno sólo accede a los contenidos preparados por los docentes. Otras permiten al estudiante incorporar contenidos o colaboraciones de su autoría, efectuar búsquedas dinámicas fuera del aula virtual, realizar consultas e interactuar con sus compañeros y docentes.

Las aulas y clases virtuales suelen utilizarse como complemento de una clase presencial, o para la educación a distancia.

En el caso de la educación a distancia, las clases virtuales se constituyen como el espacio donde se realiza el proceso de aprendizaje, por lo que se deben definir los objetivos y presentar las actividades tratando de obtener un aprendizaje significativo.

Según Scagnoli (2000) es importante precisar que para diseñar un escenario de enseñanza virtual no existen fórmulas o prescripciones; cada curso virtual es único, su estructura y funcionamiento depende de las metas, contenidos, audiencia, presupuesto, etc., aunque en su diseño y preparación debe considerarse:

1. Distribución de la información, es decir el educador debe presentar y el educando recibir los contenidos en un formato claro, fácil de distribuir y de acceder.
2. Intercambio de ideas y experiencias.
3. Aplicación y experimentación de lo aprendido, transferencia de los conocimientos e integración con otras disciplinas.
4. Evaluación de los conocimientos.
5. Seguridad y confiabilidad en el sistema.

Según Vrasidas y McIsaac (2000), entre los factores que deben orientar el diseño y desarrollo de un curso virtual se destacan:

- Justificación de esta modalidad: una razón importante es ofrecer oportunidades educativas a muchas personas que no tienen la posibilidad de participar en un programa presencial.
- Acceso de los alumnos a computadoras y a Internet.
- Diseño de sistemas informáticos amigables, de entorno comprensible y uso sencillo.
- Contenido: ciertos contenidos pueden ser más apropiados que otros, entre ellos los temas que admiten discusión, debates, e intercambio de ideas.

Muñoz (2010) sugiere que se pueden preparar clases virtuales con estructuras basadas en lo académico, técnico y de gestión, para mejorar los aprendizajes de los alumnos. Siguiendo estos lineamientos las tareas se deben organizar sobre la base de tres competencias:

- Académicas: para crear un escenario educativo virtual a partir de la propia práctica docente y de la formación pedagógica didáctica proponiendo actividades de aprendizaje con situaciones del campo de la Medicina Veterinaria.
- Técnicas: para aprovechar la tecnología disponible, no sólo a través del Campus Virtual, sino de las NTIC, y establecer una comunicación fluida entre docentes y alumnos para favorecer un aprendizaje significativo.
- Gestión: para planear, dirigir y realizar un seguimiento de las actividades de los alumnos, fomentando entre ellos el trabajo colaborativo y su autorregulación de los tiempos.

Las clases no presenciales incluyen algunos temas de Inferencia, articulándose de este modo clases presenciales y virtuales para el dictado de todos los contenidos de la materia. Siguiendo a Bernardez Vilaboa (2008) se destacan en las clases presenciales: la clase magistral, la clase práctica, las tutorías y los exámenes para evaluación; mientras que las virtuales incluyen: clases completas con contenidos teóricos, explicaciones y comentarios, los foros para proponer un trabajo complementario a la clase magistral, la presentación de casos a resolver en ese ambiente, las tutorías asíncronas y preguntas sobre el funcionamiento de la propia asignatura. El chat o e-mail se utilizan para tutorías puntuales simulando las presenciales.

La metodología que se propone tiende a disminuir los desajustes que se producen por las inasistencias a las clases o por falta de comprensión de los temas que en ellas se exponen, poniendo a disposición de los alumnos todos los contenidos, problemas, explicaciones que pueden brindarse en la clase presencial.

La evaluación de la conveniencia y eficacia del empleo de clases virtuales en el dictado de algunos temas de Inferencia de la asignatura Bioestadística, se realiza mediante la presentación de trabajos prácticos grupales y de exámenes parciales, encontrándose resultados satisfactorios en cuanto a la comprensión, entendimiento y aprehensión de dichos temas por parte de los alumnos.

Experiencia en Medicina Veterinaria

La Facultad de Ciencias Veterinarias dependiente de la Universidad Nacional de Rosario funciona en un predio ubicado en la Ciudad de Casilda, que se encuentra a unos 50 Km de la Ciudad de Rosario. Concurren a esta Facultad alumnos que residen en diferentes localidades de los alrededores, como así también en las Provincias de Córdoba, Entre Ríos, Buenos Aires y otras. Esta circunstancia los obliga a tener que trasladarse diariamente para el cursado de las diferentes materias que componen el currículo, lo que implica un gran costo tanto en lo económico como en el tiempo dedicado a los viajes.

Una alternativa de clases no presenciales o *blended learning* mediante la utilización de las NTIC como herramientas cognitivas en la enseñanza, reduce el impacto negativo de estos viajes frecuentes, permitiendo una mejor distribución de los tiempos y esfuerzos.

La aplicación de NTIC en el cursado de materias de carreras universitarias favorece el aprender a aprender y el aprender haciendo, elementos que la Comisión Internacional de Educación para el siglo XXI considera fundamentales en la educación de los individuos y de la sociedad. Su empleo posibilita que el alumno desempeñe un rol activo, desarrollando por sí mismo la construcción del conocimiento, mediante distintas actividades pautadas.

La U.N.R. cuenta con un Campus Virtual, una plataforma informática que utilizan los docentes y alumnos que proporciona un entorno virtual de aprendizaje como soporte a las clases presenciales y un medio de comunicación, interacción y colaboración para los estudiantes.

Tanto el Campus Virtual, como otras herramientas tecnológicas disponibles en forma libre, pueden ser utilizados de distintas maneras y en diferentes etapas del cursado, brindando nuevas potencialidades al proceso de enseñanza y aprendizaje.

Resulta de interés proponer, implementar y analizar los resultados de la inclusión de las NTIC como herramienta facilitadora en el proceso de enseñanza.

Algunas materias cuentan con contenidos amplios que no pueden ser explayados debido al poco tiempo que debe ser dedicado a cada uno para cumplir con los cronogramas establecidos, por lo que cualquier elemento que pueda incorporar nuevos espacios, tanto al dictado tradicional como a las clases de consulta e intercambios entre docentes y alumnos, resultará de importante ayuda en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Dentro del currículo de la carrera se encuentra la asignatura Bioestadística, que se dicta en el primer cuatrimestre del segundo año tradicionalmente de un modo presencial.

La experiencia de la cátedra indica que por los motivos expuestos les resulta muy difícil a los alumnos poder asistir a todas las clases, provocando un atraso o desajustes en el proceso de enseñanza, que lleva, inclusive, a que algunos abandonen la materia y deban recursarla.

Como elemento para corregir esta situación y darle a los alumnos alternativas más ventajosas para la aprehensión de la Inferencia Estadística, se decidió incorporar las NTIC a algunas clases aprovechando la disponibilidad del Campus Virtual de la Facultad.

Se analizaron diversas alternativas y metodologías y se decidió el empleo de tres alternativas: incorporación de clases virtuales, acceso a trabajos prácticos con resoluciones y autoevaluaciones, y foros de discusión.

Se consideraron cuáles serían los temas más convenientes para desarrollar en clases virtuales en una etapa inicial, haciéndose hincapié en aquellos menos extensos y de dificultad media, optándose finalmente por "Estimación por Intervalos de Confianza para el Promedio Poblacional" y "Test Chi cuadrado de Bondad de Ajuste".

Para el diseño de las clases virtuales se recurrió a los mismos elementos que para el dictado tradicional (gráficos, esquemas, explicaciones) levemente adaptados al nuevo medio. En una primera etapa el desarrollo se basó en una secuencia de diapositivas a las que se les agregó audio y

que luego se transformó en video. Este video fue subido al Campus Virtual desde donde los alumnos pudieron bajarlo o verlo en línea.

Los trabajos prácticos que se desarrollaron se basaron en los que la cátedra tradicionalmente venía utilizando; estos fueron revisados, ampliados y se les agregaron las soluciones correspondientes.

Además el Campus Virtual permite el empleo del correo interno como medio para que los alumnos envíen consultas que serán respondidas en forma escrita, mientras que el resto serían planteadas en las clases presenciales.

Evaluación de las experiencias en aula virtual

La evaluación de la incorporación de las NTIC como herramienta protagónica en el dictado de Bioestadística conforma una actividad dinámica y permanente, a fin de contar con elementos de juicio confiables y oportunos para poder orientar las actividades y así lograr un aprendizaje significativo. Esta evaluación aborda varias etapas y momentos: planificación de actividades, selección y empleo de las NTIC, proceso de seguimiento y receptividad y motivación mostradas por los alumnos ante las NTIC.

Planificación de las actividades

La planificación de las actividades consiste en delimitar cuales serán las cuestiones que se abordarán en clases virtuales. Si bien la intención máxima es lograr que la totalidad de los contenidos de Bioestadística puedan ser estudiados con el auxilio de las NTIC, este objetivo se alcanzará en fases, incorporando los temas en forma paulatina de manera que la propia experiencia se vaya volcando y aprovechando en etapas posteriores.

De la experiencia de los docentes de la cátedra y de la observación de desarrollos similares se decidió comenzar con aquellos temas que por extensión, dificultad, y ubicación dentro del programa de examen, permitirían una correcta intercalación entre las clases virtuales y las presenciales. Los temas seleccionados para incorporar a esta modalidad en la primera etapa fueron Intervalos de Confianza para el Promedio Poblacional y Test Chi cuadrado de Bondad de Ajuste.

Evaluación de las TIC's apropiadas.

El alcance de los objetivos depende, en gran medida, de las herramientas con las que se dispone y de aquellas que se seleccionen para el diseño y desarrollo de las actividades comprendidas en la metodología didáctica.

Estas herramientas deben ser de manejo flexible permitiendo la intercalación de gráficos, fórmulas,

esquemas, diagramas, texto, etc., y el producto resultante de fácil acceso por parte de los alumnos, generando archivos no demasiado extensos y que puedan ser leídos desde la mayoría de las computadoras, en lo posible, sin requerir la instalación de programas específicos.

Para ello, a la propia experiencia en el tema se sumó la consulta a expertos en informática educativa y a los responsables del Campus Virtual de la Facultad.

El proceso de selección de herramientas se hizo en sentido inverso, es decir que primero se planteó de qué manera se iba a distribuir el producto resultante y luego se seleccionaron las herramientas adecuadas.

Se definió que las clases virtuales se basarían en un video de un "pizarrón" sobre el que aparecerían sucesivamente las fórmulas, gráficos y esquemas necesarios, con la voz del docente explicando los significados y enlaces de los mismos. Se pensó en la utilización de herramientas sencillas disponibles en la Facultad, por lo que se creó en primera instancia una presentación de diapositivas sobre las que se grabó audio y luego se convirtió este archivo en video a través de un servidor online. Para garantizar el acceso de todos los alumnos a las clases virtuales, éstas se subieron tanto al Campus de la Facultad como a un servidor de videos online (YouTube). En este último caso, la clase virtual puede verse en:

http://www.youtube.com/watch?v=o10eLbG9K-w&feature=em-upload_owner

Proceso de seguimiento

La planificación de las actividades a incorporar en el dictado de una materia requiere, entre otros aspectos, la asignación de tiempos específicos a cada una de ellas y la especificación de cuál será la dinámica de cada clase, los temas a tocar y las prácticas a realizar. Cuando los alumnos realizan las actividades y tareas previas y posteriores al dictado de cada clase presencial, las actividades pueden desarrollarse en los términos previstos.

Toda estrategia que implique algún proceso de innovación educativa debe contar con un sistema bien definido de seguimiento, que permita retroalimentar la experiencia y llevarla a niveles de generalización para que otros docentes se puedan beneficiar de la misma.

En el caso del dictado de Bioestadística la estrategia adoptada consistió en que los alumnos accedan a las clases virtuales y a posteriori en las presenciales se repasarían los conceptos, se aclararían dudas y se realizaría la resolución de problemas. Por esto resultó necesaria la implementación de algún tipo de seguimiento referido al acceso y consulta que los estudiantes hacían de las clases virtuales.

Según Scagnoli (2000) este plan de seguimiento debe permitir que cada docente tenga presente los siguientes aspectos:

- Cumplimiento del cronograma de actividades planeado.
- Tipo de actividades desarrolladas hasta la fecha y los resultados de las mismas.
- Dificultades encontradas con el manejo de las herramientas de comunicación y el acceso al aula virtual.
- Comportamiento general de los estudiantes frente a la nueva modalidad de educación.
- Retos que le ha planteado, como docente, esta nueva forma de enseñanza.

Este plan de seguimiento se materializó en reuniones de cátedra, donde los docentes pudieron exponer su experiencia particular y se generaron consultas tanto entre los mismos profesores como ante los responsables del área de informática de la Facultad.

El Campus Virtual cuenta con un sistema de registro en donde se almacena la frecuencia de visitas y consultas que los alumnos hacen de cada ítem que allí se encuentra almacenado. Esta es una herramienta muy útil ya que suministra a los docentes una idea de la cantidad de alumnos que han visto la clase virtual, brindándoles así un basamento para iniciar la clase presencial y poder abordar los temas planteados en la planificación.

Además, finalizada la cursada, se brinda información sobre la frecuencia con que los alumnos consultaron las clases virtuales, no solamente para la posterior asistencia a la clase presencial, sino como ayuda para preparar exámenes parciales, recuperatorios y finales.

Receptividad y motivación de los alumnos

Las actuales generaciones de adolescentes y de adultos jóvenes han incorporado a su vida cotidiana elementos relacionados con la informática y la electrónica. Es por esto fundamentalmente que no les resulta extraño que estos elementos formen parte de su instrucción y educación. No deben superarse barreras psicológicas como sí ocurre en cursos de adultos mayores. El temor al uso de equipamiento informático no existe.

Se hizo evidente en la cotidianeidad del dictado de la materia la buena recepción y la motivación que generó entre los alumnos la implementación de clases virtuales. Esto se manifestó en el cumplimiento de tareas asignadas para realizar en casa que generaron preguntas, aclaraciones, e intercambio de opiniones en clase y posibilitaron la realización de todas las prácticas en forma presencial. Se incrementaron las respuestas ante las preguntas del docente y se generaron a partir de ellas nuevas consultas.

En reiteradas oportunidades los alumnos preguntaron si habría clases virtuales para otros temas que les resultaban dificultosos, convirtiéndose esta consulta en una invitación y un aliciente para que el grupo de docentes continúe con el desarrollo de esta metodología sobre otros temas.

Conclusiones

En carreras como Medicina Veterinaria la Estadística tiene un carácter instrumental, convirtiéndose muchas veces en un escollo de difícil superación por parte de los alumnos. Es por esto que no debe ahorrarse en cualquier esfuerzo que se realice en pos de lograr una cursada de calidad y un aprendizaje significativo.

Las características propias del dictado de la carrera en la Facultad de Ciencias Veterinarias de Casilda en cuanto a su localización física y a la movilidad diaria que requiere por parte de los alumnos, suma un motivo más que exige a los docentes la planificación de estrategias que aporten nuevas instancias y elementos que coadyuven en el aprendizaje de los contenidos.

La incorporación de clases virtuales en algunos contenidos de la asignatura Bioestadística, siguiendo las líneas de otras experiencias similares exitosas y la propia práctica docente de los integrantes de la cátedra se convirtió en una experiencia positiva, con alta recepción y motivación por parte del alumnado, mostrando una mayor participación fundamentalmente traducida en un aprendizaje significativo de los temas "Intervalos de Confianza para el Promedio Poblacional" y "Test Chi cuadrado de Bondad de Ajuste".

La experiencia vivida en el aula y la receptividad de los alumnos de las nuevas estrategias planteadas invitan a continuar profundizando esta metodología, incorporando nuevas prácticas docentes que motiven y ayuden a los alumnos en el aprendizaje de Bioestadística.

Referencias bibliográficas

Bernárdez Vilaboa, R. (2008). Cuando la clase presencial compite con la clase virtual. *IV Jornada Campus Virtual UCM: Experiencias en el Campus Virtual (Resultados)*. 3-7. Complutense.

Horton, W. (2000). *Designing web based training*. New York: Wiley Computer Publisher.

Muñoz, G. (2010). *Competencias técnicas, académicas y de gestión que debe desarrollar el tutor en el aula virtual*. Curso Campus Virtual 2010. Facultad de Ciencias Veterinarias – U.N.R. Casilda.

Rabasco Pavón, F y Casanova Correa, J. (2007). *Experiencias docentes apoyadas en aulas virtuales*. España: Universidad de Cádiz.

Scagnoli, N. (2000). *El aula virtual: usos y elementos que la componen*. Recuperado el 06 de Junio de 2013 de https://www.ideals.illinois.edu/bitstream/handle/2142/2326/?sequence=2

Tedesco, J. (2007). *Las TIC en la agenda de la política educativa*. TIC: del aula a la agenda política. IIPE-UNESCO, Sede Regional Buenos Aires. Recuperado el 4 de febrero de 2013 de http://www.oei.es/pdfs/las_tic_aula_agenda_politica.pdf

Torcal, R. (2003). *Campus Virtual: Otras vías de enseñanza universitaria*. Recuperado el 4 de febrero de 2013 de www.ucm.es/info/arqueoweb/word/5(1)/campusvirtualv3.doc

Vrasidas, Ch. y McIsaac, M. S. (2000). *Principles of Pedagogy and Evaluation for Web based Learning*. Education Media International, 37(2). 105-111.

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS EN INGENIERÍA: SOLUCIONES UTILIZANDO UN CAS

Agustín de la Villa, Alejandro Lois, Liliana Milevicich y Gerardo Rodríguez
Universidad Tecnológica Nacional Argentina
Universidad Pontificia Comillas España
Escuela Politécnica Superior de Zamora. Universidad de Salamanca
avilla@dmc.icai.upcomillas.es, alelois@hotmail.com, liliana_milevicich@yahoo.com.ar, gerardo@usal.es

Resumen. Este trabajo es el resumen del taller sobre el estudio de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias en una carrera de Ingeniería mediante el uso de un Sistema Algebraico Computacional (Computer Algebra System (CAS) en terminología inglesa), que se impartió en la RELME 27.
El objetivo primordial es poner de manifiesto cómo el uso de un CAS permite abordar, de manera diferente a la tradicional, el estudio de la mayoría de los tópicos que son objeto de un curso de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO), especialmente los referidos a soluciones numéricas y gráficas.
Los recursos computacionales constituyen herramientas poderosas en la enseñanza y en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales en diferentes aspectos: propician la interacción entre distintas representaciones del modelo matemático que describe el fenómeno de interés (contribuyendo con un aprendizaje significativo), permiten esbozar soluciones de ecuaciones diferenciales, en un contexto muy general, mediante técnicas cualitativas (gráficas y numéricas) y permiten inferir propiedades referidas al tipo de EDO en estudio.
Palabras clave: Nuevas tecnologías - Aprendizaje significativo - Ecuaciones diferenciales – Técnicas cualitativas
Abstract. This work is the resume of a Ordinary Differential Equations Workshop in an Engineering career by using Computer Algebra System (CAS), held in RELME 27.
The primary objective is to show how the use of a CAS will address, differently from the traditional, the study of most of the topics that are the subject of a course in Ordinary Differential Equations (ODE), especially those related to numerical and graphical solutions.
The computational resources are powerful tools in the teaching and learning of differential equations in different aspects: they enhance the interaction between differents representations of the mathematical model that describes the phenomenon of interest, (contributing a significant learning), allow to find, in a general context, solutions of differential equations, using qualitative techniques (mainly graphical and numerical) and they are able to infer properties relating to the type of ODE under study
Key words: New technologies - Meaningful learning - Differential Equations - Qualitative techniques

Antecedentes

Los centros de estudios superiores: Universidad Tecnológica Nacional (UTN) de Argentina y las universidades españolas Universidad Pontificia Comillas de Madrid, y Universidad de Salamanca, en el marco del Programa de investigación conjunta entre Argentina y España, y sustentado por sendos convenios firmados entre las mencionadas universidades, han venido desarrollando actividades conjuntas con el propósito de:

1. Evaluar la evolución sobre la incorporación de Tecnologías de Información y Comunicación (TICs) en la Educación Superior en América Latina y el Caribe, fundamentalmente en los últimos 10 años.

2. Favorecer la investigación en el uso de tecnologías educativas en la Educación Superior.
3. Contribuir a fomentar la investigación en el uso de tecnología educativa dentro y fuera del aula, divulgar sus resultados y aplicarlos para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática en el nivel superior.
4. Fomentar la interrelación entre las instituciones educativas, universidades, facultades, países y diferentes culturas para contribuir a una enseñanza en el nivel superior más acorde con los tiempos actuales

En respuesta a tales propósitos se han presentado propuestas en la modalidad de grupos de discusión, cursos y talleres en las Reuniones Latinoamericanas de Matemática Educativa de los años 2009, 2010 y 2012. A saber:

- Un grupo de discusión en la RELME XXIII en Santo Domingo, República Dominicana, referido a la *Perspectiva de las TICs en la Educación Superior en América Latina*. (Lois, Milevicich, Rodríguez, de la Villa, 2010)
- Un grupo de discusión en RELME XXIV en la Ciudad de Guatemala, Guatemala referido a la *Perspectiva de las TICs en la Educación Superior Iberoamérica*. (Lois, Milevicich, Rodríguez, de la Villa, 2011)
- Un taller en la RELME XXVI en Belo Horizonte, Brasil referido a *Enseñar matemática: un reto en el nuevo paradigma tecnológico.* (Lois, Milevicich, Rodríguez, de la Villa, 2013)
- Un curso corto, en el recién mencionado congreso, referido a *La revolución tecnológica en la enseñanza de las matemáticas. El nuevo paradigma. ¿Es una oportunidad de cambio o un simple engaño?* (Lois, Milevicich, Rodríguez, de la Villa, 2013)

Introducción

Ausubel (2001) propone que una de las primera tareas nuestras como profesores, es promover la predisposición del alumno para aprender. Para ello, es importante que el profesor trabaje, de acuerdo con los intereses, expectativas y necesidades de los alumnos. En este sentido, usando recursos computacionales, es posible presentar nuevas propuestas de actividades que tengan en cuenta las dificultades y la habitual desmotivación de los alumnos en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales, de modo que les ayude a superarlas y propiciar condiciones favorables para el aprendizaje significativo.

Los estudios indican que la metodología dominante en el contexto de enseñanza de ecuaciones diferenciales, fuertemente orientada hacia la solución analítica, generan un aprendizaje mecánico,

sin que el alumno perciba su potencial y su importancia como una herramienta matemática para resolver problemas prácticos. Los recursos computacionales disponibles en la actualidad permiten ir más allá de la mera aplicación de técnicas para resolución de las ecuaciones, eso puede ayudar a los alumnos a centrarse más en la interpretación de las ecuaciones diferenciales y sus soluciones en relación a los fenómenos que pretenden representar.

Este trabajo surge del dictado del taller sobre el estudio de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) en una carrera de Ingeniería mediante el uso de un Sistema Algebraico Computacional (CAS), concretamente *Mathematica*.

El propósito del taller fue:

1. En lo general, *proporcionar condiciones favorables para un aprendizaje significativo sobre las ecuaciones diferenciales.*
2. En lo particular, *poner de manifiesto cómo el uso de un CAS, permite abordar, de manera diferente a la tradicional, el estudio de la mayoría de los tópicos que son objeto de un curso de EDO, especialmente los referidos a soluciones numéricas y gráficas*

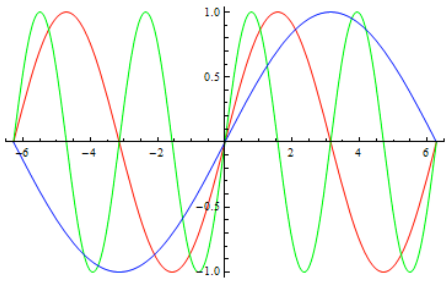
A la vista de la heterogeneidad de los participantes, en cuanto a su conocimiento sobre el CAS, se acordó dedicar la primera sesión a la introducción del paquete *Mathematica* y la segunda, al estudio de los principales conceptos de las EDO.

Desarrollo

A modo de introducción sobre el uso de *Mathematica*, se presentó la forma de escribir los comandos más comunes, diferentes formas de definir y trabajar con funciones y la implementación de procedimientos.

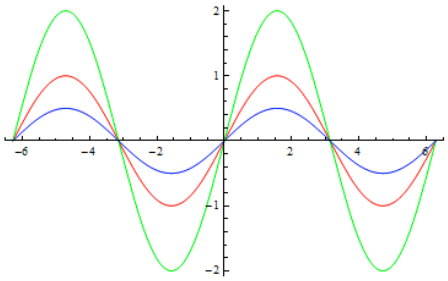
También se presentaron otras cuestiones referidas a las reglas de asignación y substitución, la simplificación, la aproximación numérica de resultados, la evaluación de instrucciones y el análisis de los mensajes de error.

```
Plot[{Sin[x], Sin[2 x], Sin[1 / 2 x]}, {x, -2 π, 2 π},
 PlotStyle → {{RGBColor[1, 0, 0]}, {RGBColor[0, 1, 0]},
 {RGBColor[0, 0, 1]}}]
```



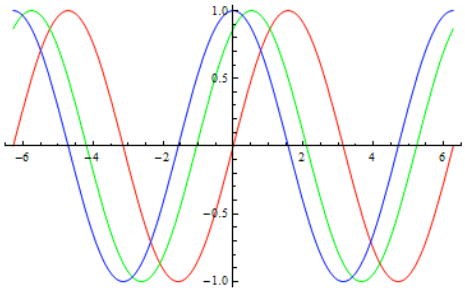
(a)

```
Plot[{Sin[x], 2 Sin[x], 1 / 2 Sin[x]}, {x, -2 π, 2 π},
 PlotStyle → {{RGBColor[1, 0, 0]}, {RGBColor[0, 1, 0]},
 {RGBColor[0, 0, 1]}}]
```



(b)

```
Plot[{Sin[x], Sin[x + π / 3], Sin[x + π / 2]}, {x, -2 π, 2 π},
 PlotStyle → {{RGBColor[1, 0, 0]}, {RGBColor[0, 1, 0]},
 {RGBColor[0, 0, 1]}}]
```



(c)

Gráfico 1. Comando de Mathematica y gráfica de sinusoides con diferentes (a) frecuencias, (b) amplitudes y (c) fases iniciales

Un aspecto importante es el uso del CAS como graficador, con el propósito de obtener la gráfica de una función y analizar diferentes aspectos, tales como imagen, asíntotas, intervalos de crecimiento, puntos críticos e intervalos de concavidad (Stewart, 2008).

A modo de ejemplo, presentamos el análisis de la sinusoide $y = A\,sen(wx + \varphi)$. En cada uno de los gráficos se reproducen diferentes imágenes referidas a la exploración variando los parámetros y las propiedades que se pueden inferir. En el gráfico 1(a) se exhibe el comando de Mathematica y la gráfica de sinusoides con diferentes valores para la velocidad angular, lo cual permite analizar el período y la frecuencia. Por su parte, en el gráfico 1(b) también se exhibe el comando de Mathematica y la gráfica de sinusoides con diferentes amplitudes. Finalmente, el gráfico 1(c) está relacionado con diferentes desfases iniciales.

```
ParametricPlot3D[{x, y, 1/(x^2 + y^2)}, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}, PlotRange → {{-3, 3}, {-3, 3}, {0, 3}}]
```

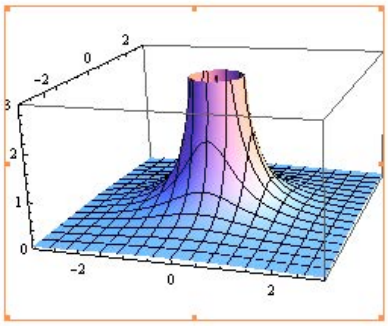


Gráfico 2. Comando de Mathematica y gráfica de una superficie discontinua en el origen.

Una ventaja muy valiosa que proporcionan los CAS, es la obtención de las gráficas de superficies. Cabe observar que la pantalla está acotada y, a menudo, puede dar una imagen incompleta o engañosa; de modo que es importante elegir el rectángulo de visualización más adecuado en

cada caso. En el ejemplo correspondiente a la función $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$, si se selecciona una ventana que no incluye el origen, no se advierte la discontinuidad en el punto (0,0) (ver gráfico 2).

Presentación de las ecuaciones diferenciales

En el ámbito de las Ciencias Naturales, muchos fenómenos pueden ser descritos a través del uso de relaciones matemáticas, que involucran tasas, según las cuales las cantidades estudiadas varían en el tiempo o en el espacio. Comúnmente estas relaciones son expresadas por ecuaciones diferenciales (ED) que contienen funciones de las variables involucradas, y tasas de variación relacionadas. Las ED son de gran importancia en varias áreas de conocimiento, como Física, Química, Economía, Ingeniería, Medicina; por la posibilidad de representar fenómenos mediante modelos matemáticos, a saber: crecimiento de poblaciones, decaimiento radiactivo, problemas de mezcla, régimen transitorio en circuitos eléctricos, análisis de mecanismos masa-resorte, estabilidad de sistemas en contextos muy generales, el estudio del equilibrio gravitacional de una estrella, entre otros.

Luego de una breve introducción sobre la clasificación y orden de las ED, el taller se centró en las EDO de primer y segundo orden.

En los cursos tradicionales se estudian los métodos para la determinación de una solución general, si ésta existe, mediante técnicas analíticas. Sin embargo, en la mayoría de los problemas del mundo real es muy difícil, cuando no imposible, encontrar una fórmula que represente la solución explícita. Es por ello que resulta necesario enfatizar el uso de nuevas técnicas que permitan conocer la solución en un punto, en determinados intervalos donde la solución sea creciente o en puntos donde la solución alcance un valor máximo o mínimo.

En ese sentido, los métodos cualitativos, gráficos y numéricos, permiten aproximar una solución particular de la EDO en un intervalo determinado.

Una técnica útil para graficar algunas soluciones particulares de una EDO de primer orden, consiste en bosquejar, mediante un CAS, el campo de direcciones de la ecuación.

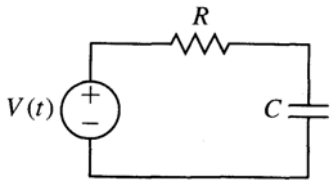


Figura 1. Diagrama de un circuito RC

La Figura 1 muestra el diagrama de un circuito eléctrico con capacitor *C*, resistencia *R* y fuente de tensión *V(t)*, al que habitualmente se denomina circuito RC (Stewart, 2008). El comportamiento del resistor es especificado por un parámetro positivo *R* (la resistencia), y el del capacitor es especificado por un parámetro positivo *C* (la capacitancia). La tensión de entrada, provista por la fuente de tensión, es denotada por *V(t)*. Esta fuente de tensión podría ser una fuente constante como una batería de corriente continua, o bien, una fuente variable con el tiempo de corriente alterna. En cualquier caso consideramos a *V(t)* como una función especificada por el diseñador del circuito.

De la teoría de circuitos eléctricos se sabe que la caída de tensión en el capacitor $v_c(t)$ satisface la ecuación diferencial $RC\frac{dv_c}{dt}+v_c=V(t)$.

Si la rescribimos de manera estándar $\frac{dv_c}{dt}=f(t,v_c)$, resulta $\frac{dv_c}{dt}=\frac{V(t)-v_c}{RC}$

Los campos de direcciones nos permiten visualizar soluciones para distintos tipos de fuentes de tensión *V(t)*.

El caso más sencillo de analizar es el que corresponde a entrada nula, es decir *V(t)* = 0, para todo *t*. En este caso la ecuación toma la forma $\frac{dv_c}{dt}=\frac{-v_c}{RC}$

En el gráfico 3(a) se muestra un campo de direcciones para una selección particular de *R* y *C*, lo cual permite inferir el comportamiento de las soluciones de la ecuación. Se puede observar que las soluciones decaen hacia v_c = 0 a medida que *t* aumenta, esto es: si no hay fuente de tensión, la tensión en el capacitor $v_c(t)$ decae a 0.

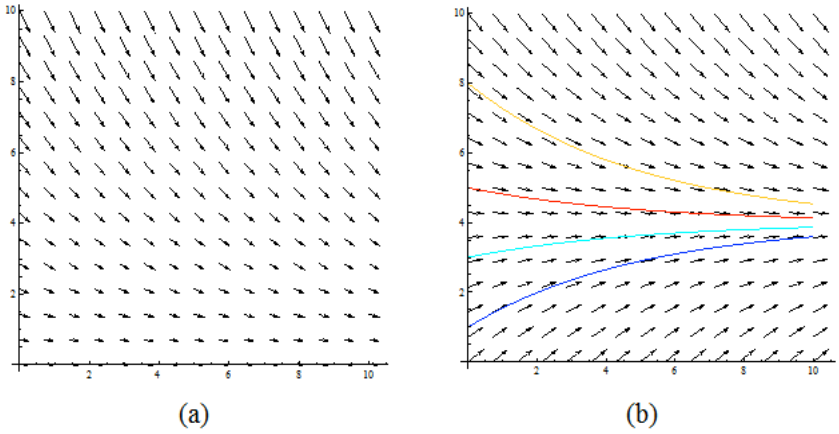


Gráfico 3. Campo de direcciones para *R*=0,5 Ω y *C*=10μF, (a) *V(t)*=0, y (b) *V(t)*=*V*=4

Una particularidad de esta ecuación diferencial $\frac{dv_c}{dt} = \frac{-v_c}{RC}$ tiene que ver con el segundo miembro, el cual solo depende de v_c. Este tipo de ecuaciones diferenciales se denominan autónomas y su importancia reside en que las pendientes no dependen del valor de la variable independiente.

La observación del campo de direcciones resulta muy útil dado que permite inferir una importante propiedad: *Las pendientes son idénticas a lo largo de rectas horizontales.*

A partir de esta propiedad, el campo de direcciones puede escribirse sobre la información de una única línea de pendientes. Esto significa que si se conoce una solución para una ecuación diferencial autónoma, se pueden obtener otras desplazando sólo la gráfica de la ecuación conocida a la derecha o a la izquierda.

Un segundo análisis es el corresponde a una entrada constante. Si $V(t)$ es una constante $V \neq 0$, la ecuación para la tensión en el capacitor es entonces $\frac{dv_c}{dt} = \frac{V - v_c}{RC}$.

Si observamos el segundo miembro de la ecuación anterior, vemos que esta ecuación también es autónoma. Tal como se observa en el gráfico 3(b), el campo de direcciones permite identificar la solución de equilibrio en $v_c(t) = V$ (se advierte que las soluciones particulares tienden a V a medida que transcurre el tiempo).

Retomando nuestro análisis inicial, centramos el estudio en la obtención de soluciones mediante la técnica de métodos numéricos. Éstos ofrecen información cuantitativa sobre las soluciones de una ecuación diferencial; son herramientas poderosas para esbozar soluciones de ecuaciones que presentan modelos poco sencillos o difíciles de resolver analíticamente. Por otra parte, se cuenta con la ventaja de que la mayor parte del trabajo de cálculo puede ser realizado por un CAS.

Algunos ejemplos pueden ser la ley de enfriamiento de Newton y ley de radiación de Stefan. En ambos casos resulta útil una aproximación numérica a la solución para un problema con valor inicial (Nagle, Saff y Snider, 2005). Los desarrollos, en los cuales se aplicó el Método de Euler, no se reproducen por razones de espacio.

La parte final del taller estuvo destinado a las EDO de segundo orden con coeficientes constantes, a partir del modelo que gobierna el movimiento de un oscilador masa-resorte amortiguado y tomando en cuenta las fuerzas que actúan sobre él debido a la elasticidad del resorte, la fricción o amortiguamiento y las posibles influencias externas (García, García, López, Rodríguez & de la Villa, 2006). En el caso de los sistemas forzados, la utilización de un CAS permite conjeturar acerca de la

solución estable. Particularmente nos focalizamos en la frecuencia de los forzamientos senoidales con el propósito de explicar el fenómeno de resonancia (Nagle, Saff y Snider, 2005).

Conclusiones

Los recursos computacionales constituyen herramientas poderosas en la enseñanza y en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales en diferentes aspectos:

1. Su uso propicia la interacción con una representación del modelo matemático que describe el fenómeno de interés y contribuye en un aprendizaje significativo. A través de esta interacción, el alumno dispone de la oportunidad de observar, explorar y conjeturar acerca de cómo se comportan las ecuaciones diferenciales involucradas en los modelos matemáticos en estudio.
2. Permiten esbozar soluciones de ecuaciones que presentan modelos poco sencillos y difíciles. En ese sentido las técnicas cualitativas (gráficas y numéricas) permiten obtener una solución aproximada a un problema de valor inicial.
3. Permiten inferir propiedades referidas al tipo de ecuación diferencial en estudio.

Referencias bibliográficas

Ausubel, David (2001). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas.

García, A., García, F., López, A., Rodríguez, G., de la Villa, A. (2006) *Ecuaciones diferenciales ordinarias*. Madrid: CLAGSA.

Lois, A., Milevicich, L., Rodríguez, G. & de la Villa, A. (2010). Perspectiva de las TIC'S en la Educación Superior en América Latina. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 23*, pp. 1331-1340. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Lois, A., Milevicich, L., Rodríguez, G. & de la Villa, A. (2011). Perspectiva de las TIC'S en la educación superior en Iberoamérica. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 24, pp. 1170-1178*. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Lois, A., Milevicich, L., Rodríguez, G. & de la Villa, A. (2013). La revolución tecnológica en la enseñanza de las matemáticas: el nuevo paradigma ¿es una oportunidad de cambio o un simple engaño? En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26, pp. 1867-1876*. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Lois, A., Milevicich, L., Rodríguez, G. & de la Villa, A. (2013). Enseñar Matemática: un reto en el nuevo paradigma tecnológico. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26, pp. 1859-1866*. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Nagle, K. Saff, E. y Snider, A. (2005). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valore en la frontera.* 4ta edición. México: Pearson Addison Wesley

Stewart, J (2008). *Trascendentes tempranas.* 6ª edición. Mexico: CENGAGE Learning.

GEOGEBRA, UNA HERRAMIENTA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS Y SIMULACIÓN DE FENÓMENOS

Noé Camacho Calderón, Margarito Godínez de Dios y Santiago Rámiro Velázquez Bustamante
Universidad Autónoma Latinoamericana Caribeña de Ciencias y Artes. México
noeilyn_21@hotmail.com, margodios@yahoo.com.mx, sramiro@prodigy.net.mx

Resumen. Hoy en día es de suma importancia relacionar los conocimientos adquiridos en el aula con la sociedad, el entorno, los fenómenos que observamos y los que acontecen en nuestra sociedad, esta labor es principalmente de los docentes, no obstante, en la mayoría de las veces no se dispone de ofertas de capacitado para construir las referidas herramientas y de esta manera llevar acabo esta relación, el objetivo del taller propuesto fue precisamente capacitar a estudiantes y profesores en la modelación y simulación de prácticas sociales por medio del GeoGebra en apoyo con el Tracker (sotfware educativos), las prácticas sociales simuladas fueron el Calentamiento de un líquido, la Ley de Ohm y Caída libre de un objeto.
Palabras clave: Simulación de fenómenos, Práctica social simulada, GeoGebra, Tracker
Abstract. Nowadays is very important to relate the knowledge acquired in the classroom with the society, the environment, the phenomenon that we observe and those that occur in our society, this tastk is mainly of teachers, however, most of the time there aren´t training offers to build the mentioned tools and this way carry out this link, the objective of the proposed workshop was precisely train students and teachers in the modeling and simulation of social practices through GeoGebra in support with Tracker (educational sotfware), social practices simulated were: heating a liquid, Ohm's Law and freefall of an object.
Key words: Simulation of phenomenon, Social practice simulated, GeoGebra, Tracker

Introducción

Hablar de matemáticas es hablar del monstruo más temible entre los estudiantes, ya que desde pequeño el estudiante va adquiriendo esta idea influenciado por supuesto, por los mismos padres y hermanos e incluso hasta de los mismos maestros. Uno de los factores que se involucran en esta idea mal cimentada por parte del estudiante hacia las matemáticas empieza con los dramas sociales, ejemplo de ello es cuando el estudiante le pide a sus padres el apoyo para realizar cierta tarea de matemáticas, es decir, el estudiante pide apoyo ya sea al padre o la madre, y una de las respuestas más frecuente es "hijo dile a tu mamá o a tu papá porque a mí nunca se me dieron, siempre reprobé", por lo que el niño piensa que si a su papá o a su mamá que son los héroes de la casa, los que lo saben todo, y no les gustan las matemáticas pues entonces no hay ningún problema si ellos rechazan la materia.

En la mayoría de los casos nunca existe una respuesta por parte de los padres en favor a las matemáticas como por ejemplo "que son divertidas", "que es fácil aprenderlas por medio de prácticas que realizamos en la vida diaria".

Problemática

Hoy en día es de suma importancia relacionar los conocimientos adquiridos en el aula con la sociedad, el entorno y los fenómenos que observamos y los que acontecen en nuestra sociedad

(una práctica social), la Reforma Integral de Educación Media Superior (RIEMS) propone que los estudiantes desarrollen competencias disciplinares y para la vida, de manera que estén preparados para enfrentarse al ámbito laboral yde esta manera ser buenos profesionistas.

El desarrollo de tales competencias depende principalmente, de los profesores, quienes juegan un papel importante durante el proceso de formación, ya que si el profesor no cuenta con las herramientas y los argumentos necesarios para desarrollar estas competencias, no se cumple el objetivo. En la práctica se constata que los profesores carecen de estas herramientas para desarrollar las competencias que la RIEMS propone para ser formadas por los estudiantes. Se supone que el profesor debe buscar la forma de cómo hacer que se cumplan tales competencias, a fin de diseñar situaciones de aprendizaje que aseguren al estudiante el desarrollo de las competencias requeridas, no obstante, en la mayoría de las veces no se dispone de ofertas de capacitado para construir las referidas herramientas.

Marco Teórico

Como se ha establecido, en la aproximación teórica Socioepistemologica, la práctica social confiere un viraje con respecto al objeto de estudio en la investigación, puesto que esta no se centra en las producciones de los estudiantes ni en las representaciones que estos realicen de los objetos matemáticos. En palabras de Cantoral y Farfán (2004), son las prácticas y no sus representaciones las que forman el saber matemático.

Desde la visión de la Socioepistemología el aprendizaje es una actividad humana, donde el sujeto interviene en el mundo desplegando sus capacidades, lo que siente, lo que racionaliza y sus sentimientos de forma integral y compleja. Las actividades de aprendizaje, se ejercen en un lugar, en un tiempo, en interacción con otros humanos, no son actividades separadas, son prácticas ejercidas en contextos sociales. El aprendizaje es una actividad inminentemente social, que destaca el papel de las interacciones con los demás y con el mundo, construyendo sus herramientas, su cognición y su realidad (Arrieta, 2003).

Por su parte Buendía (2004) señala que la socioepistemología nos habla ante todo del reconocimiento de las matemáticas como una construcción social en la que el individuo que estudia matemáticas tiene que ser percibido como parte de una comunidad en un sentido cultural, social e histórico y realizando intencionalmente prácticas alrededor de la construcción de su conocimiento. Esto nos habla de que el alumno aprende realizando o llevando a cabo prácticas acorde al contenido a trabajar.

Arrieta (2003), considera que las prácticas sociales pueden generar dicho conocimiento dentro del aula, por lo que compartimos esta idea, pero en las regiones rurales, indígenas o marginadaspor

lo general no es posible realizar una práctica social tal y como la ejercemos en las zonas urbanas. En esos lugares a veces no se dispone ni de un termómetro para registrar temperaturas,otro caso específico sería cuando se propone trabajar un circuito eléctrico,cuyos requerimientos sonun multímetro, un amperímetro o una fuente de poder.

Por lo que esta investigación se desarrolló desde la perspectiva de práctica social como generadora de conocimiento, tomando en cuenta las limitaciones antes mencionadas, para ser aplicadas en comunidades indígenas o marginadas.

Metodología

Para contribuir a la solución de esta problemática se desarrolla una experiencia con la participación de 30 profesores de matemáticas y ciencias de los diversos subsistemas del nivel medio superior. En la que se modelan situaciones y fenómenos, para después simularlas con ayuda del Software GeoGebra, construyendo así saberes de matemáticas y ciencias (las prácticas sociales simuladas fueron; el Calentamiento de un líquido, la Ley de Ohm y Caída libre de un objeto). De manera similar se utilizó el Tracker para contribuir a las prácticas de simulación, prescindiendo de sensores y otros instrumentos. Los resultados preliminares muestran la pertinencia de estas prácticas en la capacitación y formación de los docentes.

Programación y metodología de trabajo del Taller

El taller se diseñó en tres fases:

Fase I: Introducción a las prácticas sociales propuestas por el taller (Calentamiento de un líquido, la Ley de Ohm y Caída libre de un objeto)

Para trabajar esta fase se propuso lo siguiente:

- Datos propuestos para trabajar el calentamiento de un líquido y la Ley de Ohm (esto debido a que no se disponía de mucho tiempo), cabe mencionar que los datos propuestos son resultados de los experimentos realizados en el laboratorio escolar de nuestra universidad.
- Video de una pelota, para trabajar la Caída libre de un objeto con el programa Tracker, ya que este programa tiene la herramienta para tomar datos en tiempo real, prescindiendo así de sensores costosos para llevar acabo la toma de datos.

El Objetivo de esta fase I fue la interacción con el fenómeno, con la intensión de que los participantes se familiarizaran y observaran ciertas características del comportamiento de dichofenómeno.

Los resultados esperados fueron:

- Análisis de su comportamiento.
- Propuestas para el análisis de los datos.

Fase II: Modelando el comportamiento del fenómeno

En estafase se propuso el uso de las herramientas como; *Excel y un *Software graficador (Geogebra), para contribuir a la modelación del comportamiento del fenómeno.

El objetivo de esta fase II fueencontrar modelos algebraicos que resolvieran la situación, como por ejemplo, predecir el comportamiento del fenómeno en determinado tiempo.

Los resultados esperados fueron:

- Encontrar la Ecuación diferencial o algún método para modelar el comportamiento del fenómeno, a partir de los datos obtenidos del experimento.

Fase III: Modelando el fenómeno Virtualmente

En esta fase los participantes tenían la libertad de proponer una forma de como simular cada fenómeno para analizar su comportamiento, utilizando el Geogebra como herramienta para su construcción.

El objetivo de esta fase III era simular el fenómeno de forma virtual y de esta manera observar su comportamiento y la relación entre el modelo algebraico encontrado en la fase II y el comportamiento del fenómeno.

Los resultados esperados fueron:

- Propuestas de Simuladores.

En esta fase los participantes participaron en grupoproponiendo y argumentado cada paso de la estructura de la construcción de la simulación virtual del fenómeno.

En este mismo sentido se les planteo que podían solicitar el apoyo del instructor o instructores (en caso que se requiera).

Los simuladores construidos con sus respectivas herramientas utilizadas fueron, Calentamiento de un líquido (Figura 1), La Ley de Ohm tomado de Camacho y Padilla (2013) (Figura 2) y Caída libre de un objeto (Figura 3):

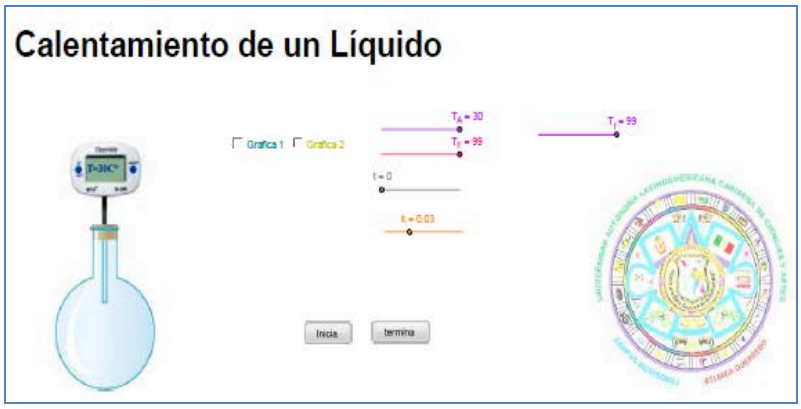


Figura 1. Las herramientas utilizadas para la construcción del Calentamiento de un líquido fueron (Imagen a).

N°	Nombre	Icono de Barra de Herramient...	Definición	Subtítulo
1	Número T_A			
2	Número T_F			
3	Número t			
4	Número k			
5	Número T_F			
6	Imagen imagen1			
7	Imagen imagen2			
8	Imagen imagen3			
9	Número kt		k t	
10	Texto texto1	ABC	"T=" + ((T_A - T_F) e^(-kt) + T_F) + "C°"	
11	Función f		f(x) = (T_A - T_F) e^(-k x) + T_F	
12	Valor Booleano a			Grafica 1
13	Valor Booleano b			Grafica 2
14	Botón botón1	OK		Inicia
15	Botón botón2	OK		termina
16	Función g		Función (T_A - T_F) e^(-k x) + T_F en el intervalo [0, 500]	

Imagen *a*.

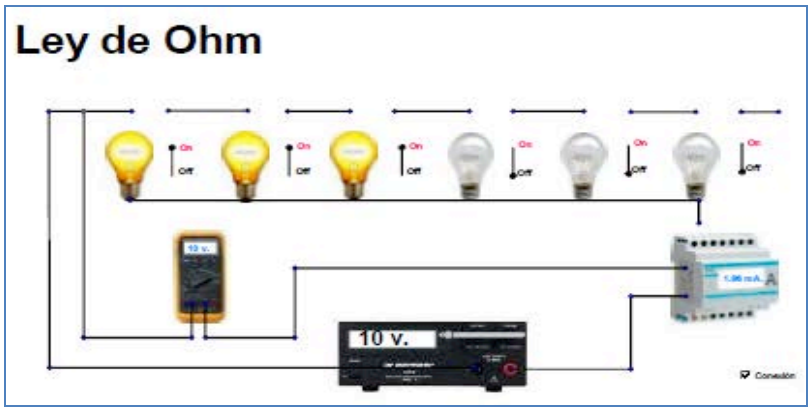


Figura 2.

Figura 3. Las herramientas utilizadas para la construcción del Calentamiento de un líquido fueron (Imagen b).

Nº	Nombre	Icono de Barra de Herramientas	Definición	Subtítulo
1	Número h	a=?		
2	Número t	a=?		
3	Imagen imagen1			
4	Texto texto1	ABC	"Altura=" + (h - 5t² - 5t - 2) + "m"	
5	Texto texto3	ABC	"Velocidad=" + (5t) + "m/s"	
6	Texto texto2	ABC	"Distancia recorrida=" + (5t² + 5t + 2) + "m"	
7	Botón botón1	OK		INICIA
8	Botón botón2	OK		TERMINA

Imagen *b*

Debido a la delimita extensión de este extenso los pasos utilizados para la construcción de estos simuladores no fueron anexados en este documento, si a algunos de nuestros colegas está interesado en visualizar la construcción puede solicitarlo alos correos electrónicos antes mencionados.

Referencias Bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis Doctoral. Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.

Buendía, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales.*Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.

Camacho, N. y Padilla, S. (2013). *Modelando la Ley de Ohm (inversamente proporcional) mediante un diseño de aprendizaje*. Tesis de maestría (en proceso) no publicada, LAVCIBAS, UAG, México.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2004). La sensibilité à la contradiction: logarithmes de nombres négatifs et origine de la variable complexe. Recherches en Didactique desMathématiques, 24 (2.3), 137 – 168.

Hohenwarter, M. (2009). *Documento de Ayuda de GeoGebra.* Recuperado el 11 de Marzo del 2013 de http://www.geogebra.org/ayuda/search.html.

OBJETOS VIRTUALES DE APRENDIZAJE PARA MATEMÁTICA ASISTIDOS CON MEDHIME 2.0

Américo Sirvente, Elisa Silvia Oliva y María Inés Ciancio
Universidad Nacional de San Juan. Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales. Argentina
miciancio@hotmail.com, elisaoliva65@gmail.com, americosirvente@gmail.com

Resumen. Se puede enseñar en forma presencial, como a distancia, la educación con Objeto Virtual de Aprendizaje (OVA, material de aprendizaje digital que tiene el potencial de ser reutilizado) el que hace uso de TIC's y tiene como objetivo la adquisición de competencias para aprender a aprender.

MeDHiME 2.0 es una Metodología para el Diseño Hipermedial de Materiales Educativos que surge de investigaciones realizadas en la Universidad Nac. de San Juan-Argentina-, y da como resultado un producto que permite a los docentes con ayuda de un Programador preparar en la web OVA, para ser utilizados por el docente autor, sus alumnos y otros colegas. El docente de Matemática puede implementar para sus clases de Matemática el uso de OVA ya construidos a los que les puede sumar nuevas actividades a implementar en el aula; o también puede realizar la construcción de su OVA; lo cual ayuda al docente a producir "salto tecnológico", por inclusión de las TIC's en educación

Palabras clave: MeDHIME 2.0 – Objetos Virtuales de Matemática

Abstract. Can be taught in person, as a distance education and Virtual learning object (OVA, digital learning which has the potential to be re-used) which makes use of ICT and aims at the acquisition of skills to learn how to learn.

MeDHiME 2.0 is a methodology for Hypermedial design of educational materials arising from research conducted in the University Nac. from San Juan-Argentina-, resulting in a product that enables teachers with the help of a programmer to prepare online OVA, to be used by the Faculty author, his students and colleagues. The teaching of mathematics can be for their math classes implement the use of OVA already built that can add new activities to be implemented in the classroom; or you can also perform the building of its OVA; which helps the teacher to produce "technological leap", by inclusion of ICT in education.

Key words: MeDHIME 2.0 – Virtual Mathematic Object

Justificación y Marco Teórico

Se puede enseñar tanto de forma presencial, como en educación a distancia, la educación digital es la educación presencial y a distancia, que hace uso de TIC's y tiene como objetivo la adquisición de competencias y habilidades para aprender a aprender. La actualización de los docentes del área Matemática en conocimientos sobre nuevas tecnologías contribuye a que adquieran un papel protagónico en nuestra sociedad, pues, haciendo uso de los recursos tecnológicos y su aplicación en el campo de la enseñanza de la matemática, permite a los docentes integrar las TICs en sus actividades de enseñanza y aprendizaje, a fin de mejorar el aprendizaje de los estudiantes y optimizar la realización de otras tareas profesionales" (UNESCO, 2008).

Una de las mayores dificultades para que los docentes-matemáticos, generen sitios web reside en que las metodologías para el desarrollo de software, son demasiado complejas, para personas con escaso conocimiento informático. La Metodología para el Diseño Hipermedial de Materiales

Educativos -MeDHiME 2.0-,surge de investigaciones realizadas en la Universidad Nac. de San Juan-UNSJ-, que da como resultado un producto que permite a los docentes con ayuda de un Programador preparar en la web OVA (Objetos Virtuales de Aprendizaje); para ser utilizados por el docente autor, sus alumnos y otros colegas (Ciancio, Oliva y Sirvente, 2012).

MeDHiME 2.0 es una metodología de sencilla factura que no solo genera material educativo hipermediado sino que además permite la construcción de OVA que satisfacen el estándar SCORM (Shareable Content Object Reference Management-Modelo de Referencia para el desarrollo y creación de OVA Reutilizables); que mejora la usabilidad y disponibilidad y los hace reutilizables.

MeDHiME 2.0 es una metodología sustentada en cuatro etapas fáciles de implementar por docentes con escasa o nula formación informática. Estas etapas son: I- Análisis del Dominio (Se construyen las bases para el desarrollo del material web, recabando información sobre las necesidades del docente usuario: sus objetivos, el público al que está dirigido, los contenidos a implementar, con que actividades y una autoevaluación para verificar el logro de los conocimientos); II- Diseño Conceptual (Es una tabla en la que el docente le indica al programador el orden del material a incluir en el sitio web y de donde será recopilado (apuntes, libros, etc)); III-Diseño Navegacional (Se diseñan las rutas que habilitará la navegación por el hipertexto, este diseño responde a cuando y como se quiere que se vean los temas, subtemas y contenidos); IV-Diseño Comunicacional (Se define la forma en que los materiales educativos se mostrarán en la pantalla, se especifican en plantillas de despliegue las características de los gráficos y animaciones y atributos del texto (tipo de letra, tamaño, palabras de enlace,etc).

Una herramienta educativa apoyada en el uso de las TIC's es el Objeto Virtual de Aprendizaje (OVA), que (Mason, Weller y Pegler, 2003) lo define como "una pieza digital de material de aprendizaje que direcciona a un tema claramente identificable o salida de aprendizaje y que tiene el potencial de ser reutilizado en diferentes contextos". Los OVA son paquetes de contenidos didácticos que puede combinarse de varias maneras para armar lecciones, unidades didácticas, cursos, cátedras.

El nuevo escenario del sistema educativo, debe mediar entre el estudiante y los contenidos y enseñar a hacer. De esta manera el profesor debe realizar: "mediación pedagógica" por medio de las tecnologías. Las TIC's pasan desde ser un medio para el aprendizaje a ser parte del aprendizaje, ya que su presencia cultural propicia otra manera de expresión, percepción, información y comunicación.

Objetivos de la propuesta

- Reconocer los OVA como recursos para la práctica docente, pues permiten infundir motivación en los alumnos, por la integración de contenidos de matemática y TIC's
- Seleccionar aquellos OVA que se ajusten a su currícula de matemática.
- Proponer nuevas actividades para implementar el uso de OVA ya construidos.
- Proponer contenidos con los que pudiera crear sus propios OVA

Guia Modelo para reutilizar un OVA de Matemática del Tema Proporcionalidad

En esta propuesta, se muestran OVA construidos con "Medhime 2.0", en el marco del Proyecto de Invest. 21/E-919 de la UNSJ, :"Aportes de la Ing. de software a los materiales educativos. navegables y evaluación entre pares : estrategias para asignar calidad y valor al proceso educativo"; como así también el desafío de buscar nuevas actividades para poner en práctica en el uso de objetos ya existentes. La capacitación en la construcción y reutilización de OVA de matemáticas; ayuda al docente a producir "salto tecnológico", mejorando la calidad de la educación a través de las TICs, que devuelva a los docentes su profesionalidad y a la escuela su capacidad de formar ciudadanos (Bacher, 2009).

Luego de haber realizado la navegación del sitio que corresponde al OVA denominado (www.portalhuarpe.com.ar/Medhime20/Talleres/TALLERES%20CUIM/JUEVES/ju09Proporcionalidad/Navegable/index.html) te invitamos a que completes las siguientes situaciones propuestas. Te sugerimos que tengas en cuenta todos los detalles, que a tu criterio son importantes para destacar en la apropiación de este tema.

A continuación,ofrecemos algunos planteos (Montoro, Ferrero y Ferrari, 2000).Tratamiento de ejercicios y problemas en que se pueden implementar e incorporar en la Práctica y apropiación de este OVA.

Tema 1: REGLA DE TRES

Resuelve los siguientes enunciados:

A)Una máquina embotelladora de gaseosas envasa 240 botellas en 20 minutos ¿Cuántas botellas del mismo tipo llenará en una hora y media?

B)Un camión que viaja a 60 Km/h tarda 40 minutos en cubrir cierto recorrido ¿Cuánto tardará un coche en realizar el mismo recorrido viajando a 120 Km/h?

C)Un corredor de maratón ha avanzado 2,4 Km en los 8 primeros minutos de su recorrido. Si

mantiene la velocidad y el ritmo de maratón. ¿Cuánto tardará en completar 42 Km de recorrido?

D)Un camión que carga 3 Tn necesita 15 viajes para transportar cierta cantidad de arena. ¿Cuántos viajes necesitará hacer, para transportar la misma cantidad de arena, en un camión que transporta 5 Tn?

E)Con 12 kilogramos de manzanas se obtienen 7 litros de sidra. ¿Cuántos litros se obtendrán con 48 kg de manzana de igual calidad?

F)Para armar la instalación eléctrica de las casa de un barrio, 12 electricistas debieron trabajar 60 días, ¿cuánto tardarán 3 electricistas, en realizar el mismo trabajo, y trabajando la misma cantidad de horas diarias que los otros operarios

Tema 2 : PORCENTAJE

1) Completa la tabla

Artículo	Precio anterior	Precio nuevo	% de descuento
Botas	675$	573$	
Tapado	1200$	900$	
Jean	350$	260$	
Cartera	**250$**	**235$**	

2) Un sondeo de opinión efectuado en un supermercado entre 1200 personas respecto a su preferencia por productos congelados o frescos, arrojó los siguientes resultados:

¿Prefiere Ud. productos congelados?

Prefiere	No prefiere	**No opina**
76%	**11%**	**13%**

Cuántos de los encuestados prefieren productos frescos?

Cuántos de Cuántos de los encuestados prefieren productos congelados?

los encuestados no opinaron?

Construye un diagrama circular para representar la información del sondeo.

2) Completa la línea de puntos.

a) El cálculo de porcentaje corresponde a proporcionalidad……

b) En la proporción: $\frac{10}{30} = \frac{4}{12}$ que porcentaje es “4” de “12”?

c) En la proporción : $\frac{10}{27} = \frac{40}{108}$ que porcentaje es "40" de "108"?

Tema 3: ESCALA

1) Observa el plano del Parque Lezama en la Capital Federal, está hecho en escala 1: 10000

a) Calcula la superficie aproximada ocupada por el parque en el plano.

b) Calcula la superficie aproximada ocupada por el parque en el terreno real.

2) Se quiere realizar una plaza octogonal regular con una fuente, también octogonal regular, en el centro. La razón entre los perímetros de la fuente y la plaza es $\frac{1}{5}$

¿Cuánto mide el lado de la plaza, en la realidad, si el lado de la fuente mide 3 mm en un plano en escala 1:1000 ?

Conclusiones

A continuación, se enuncian algunas observaciones realizadas por los docentes respecto a la reutilización de OVAS de Matemática.

"Utilizando OVA en nuestras clases de matemática; permite que se integre la tecnología al proceso de enseñanza aprendizaje y evaluación. Utiliza medios textuales, imágenes, videos, sitios de interés en la web, actividades interactivas, permitiendo al alumno adquirir habilidades para la resolución de problemas y manejo de herramientas para pensar y crear".

"Los OVA de Matemática que se pueden navegar en: www.portalhuarpe.com.ar presentan estrategias y contenidos matemáticos, los cuales permiten desarrollar en el alumno su máximo potencial para el aprendizaje, activar la inteligencia, ayudar en la comunicación, le permite producir conocimientos, otorga la propia libertad, contribuyen al desarrollo de la imaginación, enriquece el vocabulario, etc".

"MeDHiME es una metodología sencilla; que permite que los docentes que la utilicen y los informáticos que generen los Objetos Virtuales de Aprendizaje (OVA), puedan producir materiales siguiendo todas las recomendaciones y estándares internacionales y así utilizar las principales plataformas de administración de contenidos educativos existentes, almacenarlos en repositorios de OVA y reutilizándolos con el consiguiente ahorro de esfuerzos".

Referencias bibliográficas

Bacher,S. (2009). *Tatuados por los medios.* Buenos Aires: Paidós

Ciancio, M.; Oliva, E. y Sirvente, F. (2012). *Objeto de aprendizaje: herramientas de la web2.0 para algebra lineal*. Alemania: Editorial académica española.

Mason,R.; Weller, M. y Pegler,C. (2003).*Learning in the connected economy*. Londres: Open University.

Montoro, V.; Ferrero, M. y Ferrari, C. (2000).*Tratamiento de ejercicios y problemas en las clases de aritmética. Un trabajo exploratorio de la acción docente*. España. Revista EPSILON N°46-47.

UNESCO. (2008). *Estándares en competencias TIC para docentes*. Recuperado el 16 de marzo de 2009, de Portal Unesco: http://unesdoc.unesco.org/images/0016/001631/163149s.pdf.

MÉTODOS NUMÉRICOS Y TECNOLOGÍAS EN LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS: RELATO DE UNA EXPERIENCIA

María Eva Ascheri, Rubén A. Pizarro, María E. Culla y Mei Yi Lee
Universidad Nacional de La Pampa. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Argentina
mavacheri@exactas.unlpam.edu.ar, ruben@exactas.unlpam.edu.ar

Resumen. Considerando que la informática ocupa un lugar importante en nuestra sociedad y resulta útil en el campo educativo, y como una acción para enriquecer y fortalecer la formación de los estudiantes, les dictamos un Taller sobre "Introducción al cálculo numérico de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO's)", en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UNLPam, Argentina.
El objetivo es centrarse en actividades que favorezcan el conocimiento, desarrollo y valoración de las técnicas numéricas y herramientas tecnológicas que pueden emplearse para la resolución de problemas con EDO's.
Presentamos las características del Taller y un relato de la experiencia realizada.
Palabras clave: métodos numéricos, tecnologías, experiencia
Abstract. Whereas computer science has an important place in our society and is useful in education, and as a move to enrich and strengthen the training of students, they dictate a workshop on "Introduction to numerical calculation of ordinary differential equations (ODE's)", Faculty of Natural Sciences of UNLPam, Argentina.
The aim is to focus on activities that support the knowledge, development and evaluation of numerical techniques and technological tools that can be used for problem solving ODE's.
We present the characteristics of the Workshop and an account of the experience acquired.
Key words: numerical methods, technologies, experience

Introducción

Aprovechando las alternativas que ofrece la evolución tecnológica para propiciar cambios en el enfoque de enseñar y aprender matemática, teniendo en cuenta que la informática ocupa un lugar cada vez más importante en nuestra sociedad y resulta de gran utilidad en el campo educativo, y como una acción para enriquecer y fortalecer la formación de nuestros estudiantes, les dictamos un Taller sobre "Introducción al cálculo numérico de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO's)", en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de La Pampa, Argentina. Este Taller estuvo dirigido a aquellos estudiantes que cursaron o estuvieran cursando la asignatura Cálculo Numérico/Análisis Numérico. Su objetivo fue centrarse en actividades que favorecieran el conocimiento, desarrollo y valoración de las técnicas numéricas que pueden emplearse para la resolución de problemas relacionados con EDO's, conjuntamente con el uso de herramientas tecnológicas. Este tema no sólo es una de las partes más bellas de las matemáticas, sino que también es una herramienta esencial para modelar muchas situaciones físicas, demostrando su utilidad en ecología, ingeniería, entre otras ciencias.

Alemán de Sánchez (1999), sostiene que el uso de la computadora en sus diversas modalidades ofrece, sobre otros métodos de enseñanza, ventajas tales como:

- Participación activa del alumno en la construcción de su aprendizaje

- Interacción entre el alumno y la máquina
- La posibilidad de dar una atención individual al estudiante
- La posibilidad de crear micromundos que le permiten explorar y conjeturar
- Permite el desarrollo cognitivo del estudiante y el
- Control del tiempo y secuencia del aprendizaje por el alumno
- Con la retroalimentación inmediata y efectiva, el alumno puede aprender de sus errores.

Por ello, con el desarrollo de este Taller quisimos aportar aspectos numéricos relativos a este contenido, haciendo especial hincapié en mostrar y demostrar la necesidad de utilizar la computadora con un software adecuado a la problemática a resolver.

Marco Teórico

De acuerdo a Rivera Porto (1997), el uso de la computadora en la educación puede enfocarse a tres áreas de aprendizaje: a) aprender de, o desde, las computadoras, b) aprender con las computadoras, c) aprender sobre las computadoras.

El aprender desde las computadoras es el aprendizaje conocido como instrucción asistido por computadora. El aprendizaje desde las computadoras puede involucrar el uso de tutoriales, simuladores o alguna forma de interactividad.

Aprender con las computadoras significa usar a la computadora como una acompañante en las tareas o actividades escolares. Cuando se aprende "con" las computadoras, las funciones cotidianas de éstas se incorporan a la vida académica.

Aprender sobre las computadoras es conocer acerca del hardware y software de éstas. Este tipo de aprendizaje se puede convertir en una oportunidad para facilitar los procesos cognitivos del usuario, bajo un enfoque constructivista.

En este Taller, el uso de la computadora está enfocado al aprendizaje a través de, o desde la computadora.

Las formas o modalidades citadas por Rivera Porto (1997) de la enseñanza concreta asistida por computadora son entre otras tutorial, ejercitación y práctica, juegos y simulaciones.

Se utilizó la modalidad de ejercitación y práctica ya que se trata de que los participantes adquieran una habilidad sobre algo realizando un ejercicio únicamente, pues el contenido se conoce, se da en clase.

También se ha usado la modalidad de simulación según la cual se ensayan en la computadora

experimentos de laboratorio de física, química y otros, dando distintas hipótesis y obteniendo resultados, gráficas comparativas y demás.

Por último, se ha utilizado la modalidad de herramientas pre-programadas, íntimamente relacionada con el descubrimiento y la simulación. El objetivo de estas formas es facilitar la creatividad del participante, la capacidad de generación y de entender-haciendo, además de estimular el pensamiento crítico. Esto es, a través de la ejercitación y práctica, en conjunción con las simulaciones, herramientas y descubrimiento, se trata que el participante pueda deducir algunas cuestiones de algún fenómeno físico, químico, biológico, por ejemplo.

Más precisamente, con el desarrollo de esta experiencia de acuerdo a las modalidades antes citadas, se ha pretendido favorecer el conocimiento, desarrollo y valoración de las técnicas numéricas y herramientas tecnológicas que pueden emplearse para la resolución de problemas relacionados con ecuaciones diferenciales ordinarias.

Metodología

En este Taller, que lo dictamos en la modalidad semi-presencial, utilizamos como entorno de aprendizaje virtual la aplicación Moodle para complementar el aprendizaje presencial. Además permitió la disponibilidad del material para el desarrollo y seguimiento del Taller.

Se desarrollaron actividades individuales y grupales, las cuales fueron coordinadas y supervisadas por los docentes a cargo del Taller, autores de este trabajo. Los participantes contaron con un Cuaderno (Ascheri, Pizarro, Culla y Lee, 2012) sobre la temática a abordar en el Taller y un grupo de programas realizados en Octave, todo ello de edición propia.

El cupo para el Taller fue de 20 participantes y se realizó en noviembre y diciembre de 2012. La carga horaria fue de 40 horas reloj: 3 semanas de taller, 2 semanas para preparar un proyecto final, 1 semana para su presentación y exposición. Incluyeron 8 encuentros presenciales de 2 horas cada uno. Se planearon las siguientes instancias de evaluación:

- Participación en clase.
- Trabajo individual.
- Trabajo grupal.
- Presentación y exposición de un proyecto final.

Se dieron certificados de asistencia a los estudiantes que fueron al 80% de los encuentros presenciales y de aprobación a los que además, presentaron y expusieron un proyecto final.

Las herramientas informáticas y las técnicas numéricas que usamos son, respectivamente, la

computadora y el software Octave, y los métodos numéricos clásicos de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias (Chapra y Canale, 2007; Maron y López, 2006; Mathews y Fink, 2000).

Detallamos a continuación los objetivos que nos planteamos alcanzar cuando propusimos este Taller titulado "Introducción al cálculo numérico de las EDO's" y los bloques temáticos correspondientes (Ascheri *et al*, 2012; Chapra y Canale, 2007; Edwards y Penney, 1994; Maron y López, 2006; Mathews y Fink, 2000).

Objetivos

Objetivos generales

- Introducir a los estudiantes en el estudio de los métodos numéricos para resolver EDO's.
- Proporcionar las herramientas para la solución de problemas que se relacionan con las EDO's, y que a menudo son imposibles de resolver analíticamente.
- Promover la comprensión de la importancia de los métodos numéricos en la resolución de problemas que involucren EDO's, utilizando la computadora.
- Brindar herramientas teóricas y prácticas para la elaboración de un proyecto final que incluya las distintas técnicas numéricas analizadas en el Taller.

Objetivos particulares

- Conocer y comprender las fórmulas de los métodos numéricos para resolver EDO's.
- Comprender la diferencia entre los errores de truncamiento locales y globales y cómo estos errores influyen en la exactitud de los métodos.
- Conocer el orden y la dependencia de los tamaños de paso de los errores de truncamiento para todos los métodos analizados.
- Ser capaz de reducir una ecuación diferencial ordinaria de n-ésimo orden a un sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.
- Conocer la diferencia entre los métodos de pasos múltiples y de un solo paso.
- Aplicar los métodos numéricos a diversas situaciones problemáticas.

Bloques temáticos

- Problema de valor inicial en ecuaciones diferenciales ordinarias: Introducción. Interpretación geométrica. Constante de Lipschitz. Problemas.
- Métodos de un solo paso: Métodos de la serie de Taylor, de Euler, de Heun, de Runge-Kutta y

de Runge-Kutta-Felberg. Problemas.

- Sistemas de ecuaciones diferenciales: Métodos de Euler y de Runge-Kutta de orden cuatro. Problemas.
- Métodos de resolución de ecuaciones diferenciales de orden superior: Ecuaciones diferenciales de segundo orden y de orden superior. Problemas.
- Métodos de pasos múltiples: Métodos de Adams-Bashforth-Moulton, de Milne-Simpson y de Hamming. Problemas.

La estrategia utilizada para el análisis de cada uno de estos temas ha sido la de combinar la enseñanza tradicional y las técnicas grupales de aprendizaje activo, usando la computadora con el software pertinente como herramienta colaboradora de los trabajos a realizar, esto es, aprender desde la computadora (Rivera Porto, 1997).

Las actividades del Taller, de las cuales presentamos una de ellas en este trabajo, están centradas en la utilización de métodos numéricos y la computadora como una herramienta para abordar situaciones problemáticas contextualizadas en la realidad, brindando la posibilidad de encontrar nuevas formas de comprender y afianzar los conocimientos sobre EDO's. Pensamos que, de esta manera, se contribuye a lograr un aprendizaje más significativo y a resignificar los conceptos de esta temática en los estudiantes.

Actividad. Nos proponemos:

- Ilustrar el uso de los métodos de Euler y de Heun.
- Graficar y comparar las soluciones obtenidas.
- Probar y validar los programas disponibles.
- Comparar las aproximaciones obtenidas y formular una conclusión.

Trayectoria de una pelota. Supongamos que una pelota es lanzada directamente hacia arriba a partir del suelo con velocidad inicial $v_0 = 160 pies/s$.Si no hubiera resistencia del aire, podría llegar a una altura máxima de 400 pies en 5 segundos, entonces cae regresando al suelo en otros 5 segundos. Pero consideren, más real, que el efecto de la resistencia del aire acelera la pelota

$$\frac{dv}{dt} = -32 - (0.1)v$$

a) Utilizando los programas, determine las aproximaciones de Euler y de Heun (con h = 0.1) a la velocidad $v(t)$ y altura $s(t)$ de la pelota, a fin de responder:

1) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota?

2) ¿En qué tiempo *t* alcanza dicha altura?

3) ¿Cuánto tiempo le tomará a la pelota caer de su altura máxima de regreso al suelo, y con qué velocidad chocará en el mismo?

b) Para cada caso, dibuje su solución en una misma gráfica.

c) De acuerdo a los resultados obtenidos, formule una conclusión.

A continuación, mostramos parte de uno de los proyectos finales desarrollado por un grupo de estudiantes.

Proyecto final. Mediante el siguiente trabajo, se analizan las aplicaciones de los distintos métodos estudiados en el taller para la resolución de un problema con valor inicial, evaluando el error absoluto que se obtiene al aplicar cada método. La resolución se realiza analíticamente y con el software Octave con métodos numéricos diseñados para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias de un paso y de pasos múltiples.

Entre los métodos de un paso, se estudian los métodos de Euler, de Heun, de la Serie de Taylor, de Runge-Kutta y de Runge-Kutta-Felberg. Entre los métodos de pasos múltiples, se estudian los métodos de Adams-Blashforth-Moulton, Milne-Simpson y Hamming.

Problema de mezclas. En el instante $t = 0$, un tanque contiene Q_0 libras (lb) de sal disueltas en 100 galones (gal) de agua. Supóngase que al tanque está entrando agua que contiene ¼ lb de sal por galón, a razón de 3 gal/min, y que la solución bien revuelta está saliendo del tanque con la misma rapidez. Encontrar la expresión $Q(t)$ que hay en el tanque en el instante t y la concentración de sal en $t = 5\,\text{min}$.

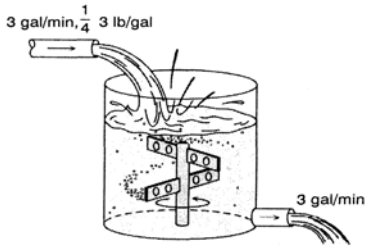


Figura 1. Tanque que contiene a una mezcla de sal y agua

Solución. La razón de cambio de la sal en el tanque en el instante *t*, *Q´*(*t*), debe ser igual a la razón a la que la sal entra al tanque menos la razón a la que sale. La razón a la que la sal entra es ¼ lb/gal multiplicado por 3 gal/min. La razón a la que la sal sale es *Q*(*t*)/100 lb/gal multiplicado por 3gal/min;

por lo tanto,

$$Q'(t) = \frac{3}{4} - \frac{3}{100}Q(t)$$

es la ecuación diferencial que rige este proceso, donde fueron omitidas las unidades de medida. Esta es lineal y su solución general es

$$Q(t) = 25 + ce^{-0.03t}$$

donde la constante arbitraria *c* queda determinada por la condición inicial

$$Q(0) = Q_0 = 7lb$$

Debe tomarse $c = Q_0 - 25$, de donde,

$$Q(t) = 25(1 - e^{-0.03t}) + 7e^{-0.03t}$$

El segundo término del segundo miembro de esta ecuación representa la porción de la sal original que resta en el tanque en el instante *t*. Este término se hace muy pequeño con el transcurso del tiempo, a medida que la solución original se extrae del tanque. El primer término del segundo miembro da la cantidad de sal que hay en el tanque en el instante *t* debido a la acción de los procesos de flujo. A medida que *t* crece, este término tiende al valor constante de 25 (lb). Físicamente, este es el valor límite de *Q*, a medida que la solución original en el tanque se reemplaza cada vez más por la que entra con una concentración de ¼ lb/gal. La ecuación que debemos analizar entonces, es la siguiente:

$$Q(t) = 25 - 18e^{-0.03t}$$

El valor exacto de la solución queda determinado por

$$Q(5) = 25 - 18e^{(-0.03)(5)} = \mathbf{9.507256424348960}$$

Los métodos numéricos de un solo paso calculan la solución en los puntos $t_k = t_k + hk$, *k*=1, 2, ... siendo *h* el tamaño de paso, que en este desarrollo se varía para comparar los niveles de exactitud. En general, los métodos de un paso responden al siguiente esquema:

*Valor actual = valor anterior + pendiente*tamaño del paso*

$$y_{k+1} = y_k + \Phi h$$

donde aproximamos el valor Φ de la pendiente mediante distintas estimaciones para extrapolar

hacia un valor y_{k+1} a partir de uno anterior y_k.

Los métodos de pasos múltiples se basan en la extrapolación a un próximo valor a partir de los anteriores en forma simultánea, que pueden hallarse inicialmente con métodos de un paso. El concepto en el que se basan estos métodos es que la curvatura de un conjunto de aproximaciones a la solución da un indicio de la trayectoria en general de la solución.

En cualquier caso, el error absoluto de cada aproximación queda determinado por la diferencia entre el resultado exacto y el aproximado.

Haremos los cálculos con tamaño de paso *h* = 0.5, 0.1. El valor exacto es 9.507256424348960.

En la Tabla 1, se muestran los resultados hallados con cada método para visualizar la exactitud alcanzada por cada uno:

Método	Paso *h*	Resultado	Error absoluto
Euler	0.5	9.524852	$\approx 1.7596\times10^{-2}$
	0.1	9.510749	$\approx 3.4926\times10^{-3}$
Heun	0.5	9.507168	$\approx 8.8424\times10^{-5}$
	0.1	9.507253	$\approx 3.4243\times10^{-6}$
Taylor	0.5	9.507256755095234	$\approx 3.3075\times10^{-7}$
	0.1	9.507256426969645	$\approx 2.9207\times10^{-9}$
Runge-Kutta 4	0.5	9.507256	$\approx 4.2435\times10^{-7}$
	0.1	9.507256	$\approx 4.2435\times10^{-7}$
Runge-Kutta-Felberg	0.5	9.507256424504551	$\approx 1.5559\times10^{-10}$
	0.1	9.507256424349201	$\approx 2.4158\times10^{-13}$
Adams-Blashforth-Moulton	0.5	9.507256132047823	$\approx 2.9230\times10^{-7}$
	0.1	10.055030176582473	≈ 0.5478
Milne-Simpson	0.5	9.507256067981595	$\approx 3.5637\times10^{-7}$
	0.1	9.855696587081075	≈ 0.3484
Hamming	0.5	9.507256145370317	$\approx 2.7898\times10^{-7}$
	0.1	10.036331485605468	≈ 0.5291

Tabla 1. Resultados obtenidos aplicando distintos métodos para resolver la EDO

De la Tabla 1, se observa que los métodos de un paso como Euler y Heun son más precisos cuando se aumenta el tamaño de paso; de manera similar que con el método de Taylor pero siendo éste más preciso. Para el método de Runge-Kutta de orden cuatro no se logró mayor precisión, pero brinda un resultado como el de Taylor. Estos últimos son más precisos con un error absoluto de varios órdenes menor que los dos primeros. El método más preciso entre los

de un paso es el de Runge-Kutta-Felberg y aun más con un tamaño de paso reducido, de 0.1, donde casi se obtuvo la solución exacta. Como complemento, se calcula la aproximación con paso 0.001 con este método, obteniéndose **9.507256424348958** con un error absoluto de 1.7764×10^{-15}. Sin lugar a dudas, la mejor aproximación que podemos obtener a la solución exacta, comparada con los demás métodos.

En cuanto a los métodos de pasos múltiples con un tamaño de paso 0.5 dan buenas aproximaciones, pero el error absoluto se dispara cuando se usa un paso menor de 0.1.

En conclusión, entre los métodos de un paso, el de Runge-Kutta-Felberg proporciona una buena aproximación con tamaño de paso pequeño; entre los métodos de pasos múltiples, los tres estudiados proporcionan buenas aproximaciones con tamaño de paso más bien grande.

Consideraciones finales

Según Vaquero y Fernández de Chamigo (1987), enseñar es mucho más que dejar aprender. La enseñanza a de crear los estímulos que activen y aceleren el aprendizaje. El problema radical de la enseñanza es acoplar la mente del estudiante a la materia objeto de aprendizaje. Esto implica una enseñanza individualizada de forma que, dada una materia a enseñar, lo ideal es encontrar para cada individuo el transformador adecuado a su nivel de entendimiento y formación, que hiciese el acoplo más adecuado. En este sentido, esperamos haber contribuido a que los estudiantes logren la retención, la comprensión y el uso activo del conocimiento del contenido aprendido, aplicándolo a actividades que los lleven a comprometerse activamente durante su desarrollo. De esta forma, obtendrán una comprensión profunda de este tema específico, incrementando la habilidad para usar eficazmente los procesos cognitivos básicos -observar, analizar, formular conclusiones- y favoreciendo el desarrollo de actitudes y disposiciones asociadas con la reflexión.

La utilización de moodle como aula virtual para las actividades no presenciales, facilitó y agilizó el intercambio de opiniones entre docentes y estudiantes, favoreciendo a la compresión de cuestiones teóricas y prácticas y a la elaboración del proyecto final.

La presentación y discusión de los proyectos finales permitió aclarar dudas, llevó a una puesta en común de los contenidos temáticos abordados y de los trabajos propuestos.

Realmente creemos que las computadoras, un software matemático y los métodos numéricos proporcionan una alternativa para cálculos complejos, y son herramientas poderosas para la solución de problemas científicos y tecnológicos. Pero como afirman Mena Marchan y Porras (1994) y Rivera Porto (1997), son los educadores los que deben ocuparse de crear con estas herramientas un ambiente de aprendizaje que colabore con las tareas que les son propias y que

favorezca el aprendizaje de los estudiantes.

Referencias bibliográficas

Alemán de Sánchez, A. (1999). *La enseñanza de la matemática asistida por computadora*. Universidad Tecnológica de Panamá. Recuperado el 09 de noviembre de 2011 de http://www.utp.ac.pa/articulos/enseñarmatematica.html

Ascheri, M. E., Pizarro, R. A. Culla, M. E. y Lee, M. Y. (2012). *Introducción al cálculo numérico de las ecuaciones diferenciales ordinarias*. Argentina: FCEyN.

Chapra, S, Canale, R. (2007). *Métodos Numéricos para Ingenieros*. México: Mc Graw Hill.

Edwards, C. H., JR y Penney, D. E. (1994). *Ecuaciones diferenciales elementales y problemas con condiciones en la frontera*. México: Prentice Hall Hispanoamericana.

Mathews, J. y Fink, K. (2000). *Métodos Numéricos con MATLAB*. España: Prentice Hall.

Maron, M. y López, R. (2006). *Análisis Numérico. Un enfoque Práctico*. México: Compañía Editorial Continental, S. A.

Mena Marchan, B. Y. y Porras, M. (1994). *Nuevas tecnologías para la Educación. Didáctica y metodología*. Madrid: De La Torre.

Rivera Porto, E. (1997). *Aprendizaje asistido por computadora, diseño y realización*. Puerto Rico: Publicaciones Puertorriqueñas. Recuperado el 15 de enero de 2012 de http://www.face.uc.edu.ve/~hrosario/CEM/AAC/index.html

Vaquero, A. y Fernández de Chamigo, C. (1987). *La informática aplicada a la enseñanza.* España: Eudema S.A.

TIPOS DE EJERCICIOS PARA EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA EN LÍNEA: EL CASO DE ACTIVIDADES REFERIDAS A `REDONDEO´

Cristina Ochoviet y Katharina Skutella
Instituto de Profesores Artigas — Uruguay
Bettermarks. — Alemania
cristinaochoviet@gmail.com, katharina.skutella@bettermarks.de

Resumen. bettermarks es una plataforma para el aprendizaje en línea de la matemática. Presentamos algunos resultados de un estudio de mayor escala en el que analizamos la variedad de los tipos de ejercicios que están presentes en el actual diseño a los efectos de redireccionar futuros desarrollados y/o reformular el diseño de las actividades matemáticas. En este trabajo nos centramos en algunos avances referidos al análisis de ejercicios que involucran redondeo.
Palabras clave: TIC – bettermarks – tipos de ejercicios – redondeo – Bruder
Abstract. bettermarks is a platform for online learning of mathematics. In the present work we present some preliminary results of a major study in which we analyze the variety in the types of exercises in the current design so as to redirect further development and/or reformulation of mathematical activities. In this document we will address the analysis of the exercises dealing with rounding.
Key words: ICT– bettermarks – types of exercises – rounding – Bruder

Introducción

bettermarks es una plataforma que provee más de 100 000 ejercicios y 300 libros de textos para aprender matemática en línea. En este trabajo presentamos algunos resultados preliminares de un estudio de mayor escala en el que nos proponemos utilizar el conjunto de actividades existentes como punto de partida para analizar el actual diseño desde la perspectiva de Bruder (2008), a los efectos de redireccionar futuros desarrollos así como para reformular las actividades matemáticas. Elegimos la perspectiva de esta autora porque, como veremos, sitúa su atención en la estructura de un ejercicio con la consiguiente sistematización a la que esto da lugar, sugiere una variación en el tipo de ejercicios a ofrecer a los estudiantes, de acuerdo a tres componentes que considera como elementos de análisis (situación inicial, método, situación final) y porque ha documentado el impacto que tiene en el aprendizaje tal variación de ejercicios (Bruder, 2008; Bruder, 2010; Büchter & Leuders, 2005). De acuerdo a los diferentes tipos de ejercicios que esta autora propone, prestaremos particular atención a la variedad presente en el diseño actual. En este documento nos focalizamos en el análisis de los ejercicios relativos a *redondeo* y nuestras reflexiones sobre ello.

Marco teórico

Bruder (2008) propone ocho tipos de ejercicios considerando tres componentes que, según su punto de vista, están presentes en todo ejercicio: la situación inicial (información que es dada,

condiciones, etc.), la situación final (conclusiones, resultados, lo que se pide hallar, etc.), y las transformaciones (métodos de resolución, modelos matemáticos, cadenas deductivas, etc.). La autora deduce ocho tipos diferentes de ejercicios dependiendo de que la información correspondiente a cada componente esté presente o no en la propuesta de un ejercicio. Cada tipo de ejercicio tiene funciones específicas en el proceso de aprendizaje y cuando todos los tipos son considerados en la planificación de una lección para enseñar un tópico en particular, estas funciones se complementan y promueven aprendizajes más duraderos.

Usando una tabla como la siguiente, Bruder (2008) organiza los diferentes componentes que pueden estar presentes en la formulación de una actividad y que dan lugar a los ocho tipos distintos de ejercicios:

Tipo de ejercicio	Ejercicio utilizado como ejemplo	Tarea básica	Ejercicio de justificación	Ejercicio problema	Situación abierta	Ejercicio invertido	Problema invertido	Búsqueda de una aplicación
Situación inicial, información dada	X	X	X	X	–	–	–	–
Camino a seguir, método, procedimiento	X	X	–	–	–	X	–	**X**
Situación final, meta, resultado, solución	**X**	**–**	**X**	**–**	**–**	**X**	**X**	**–**

Una (X) significa que el componente correspondiente está presente en la formulación del ejercicio y un (–) significa que no está presente. Bruder (2008) señala que una gran variedad de ejercicios ofrece a los estudiantes la posibilidad de lograr una comprensión más profunda de lo que se está enseñando.

Método

Como ya mencionamos, bettermarks es una plataforma que contiene más de 100 000 ejercicios matemáticos relacionados con temas que los estudiantes usualmente abordan entre el 4° año de la educación primaria y el 4° año de la educación media. Si bien los documentos curriculares varían en los distintos países, creemos que con la información anterior, referida a niveles educativos, es posible identificar un núcleo común de temas que pueden dar una idea de los tópicos a los cuales

refieren estos ejercicios.

En este estudio analizamos todos los ejercicios donde se presenta una tarea que involucra el redondeo (un tópico que los estudiantes abordan usualmente entre los 9 y 10 años de edad) a los efectos de clasificarlos de acuerdo a los ocho tipos de ejercicios presentados anteriormente.

Discusión

En este reporte mostraremos el análisis de uno o dos ejemplos de cada tipo de ejercicio en contextos de redondeo. De acuerdo con Bruder (2008), podemos dividir cada ejercicio en los tres componentes que ya mencionamos y la presencia o ausencia de estos componentes es crucial para identificar cada tipo.

Ejercicio 1a:

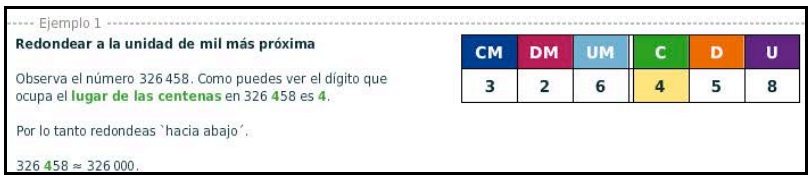


Figura 1. Ejercicio del tipo (XXX): "Ejemplo".

En este ejercicio la situación inicial es dada: el número 326 458. También el método "redondear a la unidad de mil más próxima". El resultado final, 326 000, también es dado. Este es un ejercicio utilizado como ejemplo, es el tipo (XXX). Un ejemplo se utiliza para ilustrar conceptos, para identificar elementos de una clase para facilitar el razonamiento inductivo, para mostrar una variación, para mostrar la aplicación de una técnica, etc. (Watson & Mason, 2002). De acuerdo con Skemp (1999) los estudiantes aprenderán por abstracción a partir de ejemplos y por lo tanto la elección de estos para una lección en particular juega un rol clave. El primer principio para el aprendizaje de la matemática planteado por este autor hace clara referencia al rol de los conceptos: "Los conceptos de un orden más elevado que aquellos que una persona ya tiene, no le pueden ser comunicados por una definición, sino solamente preparándola para enfrentarse a una colección adecuada de ejemplos" (Pág. 36). Por estas razones, los ejemplos tienen un rol muy importante en el diseño de los libros de texto.

Según Bruder (2008), se pueden generar variaciones de este tipo de ejercicio agregando preguntas a la tarea resuelta; por ejemplo: *¿Es esto verdadero?* O en el caso de un resultado incorrecto: *¿Dónde esta el error?* Esta variación se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejercicio 1b:

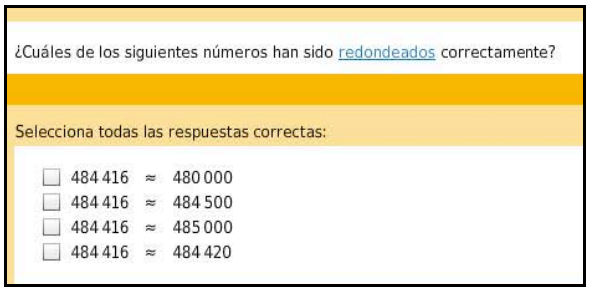


Figura 2. Variación de un ejercicio del tipo (XXX).

Ejercicio 2:

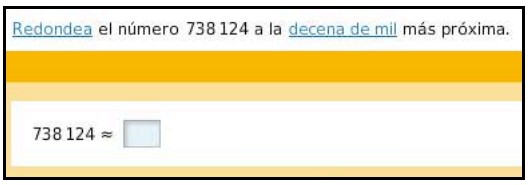


Figura 3. Ejercicio del tipo (XX-): "Tarea básica"

La situación inicial es el número 738 124. El método solicitado es redondear a la decena de mil más próxima. El resultado es el número redondeado, esto es, 740 000.

Bruder (2008) se refiere a este tipo de ejercicios como "tareas básicas" (XX-), ya que la situación inicial y el método son explícitamente dados. La meta consiste en hallar el número redondeado.

Tal como Bruder sugiere, la variación de este tipo de ejercicio clásico favorece una comprensión más profunda, un cambio de perspectiva y una mayor posibilidad de establecer conexiones entre conocimientos.

Ejercicio 3:

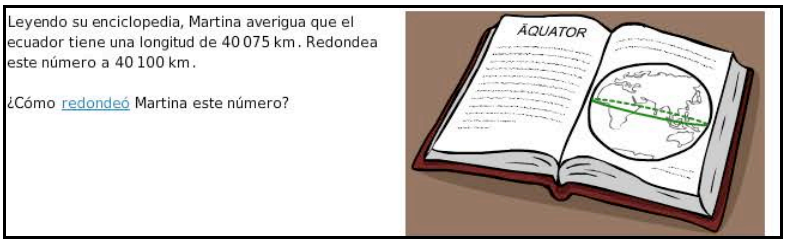


Figura 4. Ejercicio del tipo (X-X): "Ejercicio de justificación".

La situación inicial es la longitud del ecuador de 40 075 km. El resultado es el número redondeado, esto es 40 100.

El objetivo del ejercicio consiste en encontrar el método correcto, en este caso, redondear a la centena más próxima.

Bruder (2008) se refiere a este tipo de ejercicio como "Ejercicio de justificación" (X-X), ya que la situación inicial y el resultado son dados en forma explícita, mientras que la meta del ejercicio

consiste en encontrar el método.

Ejercicio 4:

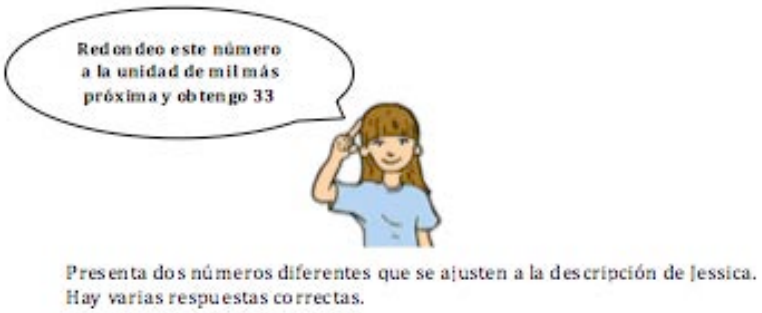


Figura 5. Ejercicio del tipo (-XX): "Ejercicio invertido".

El método es "redondear a la unidad de mil más próxima", el resultado es el número redondeado, esto es 33 000.

El objetivo del ejercicio consiste en determinar posibles situaciones iniciales, esto es, cualquier número que al ser redondeado a la unidad de mil más próxima, sea 33 000.

Bruder (2008) se refiere a este tipo de ejercicio como (-XX), ya que el método y el resultado están explícitamente dados mientras que la meta del ejercicio consiste en encontrar la situación inicial. Como Büchter & Leuders (2005) enfatizan, la técnica de invertir permite abrir el ejercicio y de esta manera facilitar una comprensión más profunda de los conceptos.

Ejercicio 5:

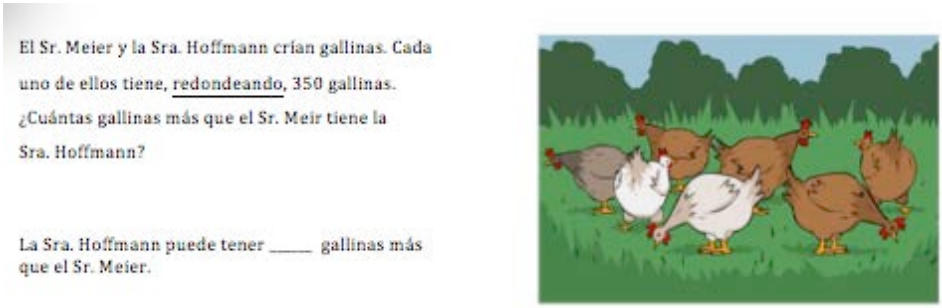


Figura 6. Ejercicio del tipo (--X): "Problema invertido"

En este ejercicio la situación final (número de gallinas redondeado en 350) es dada. Aunque el enunciado de la actividad dice que este número es redondeado, la estrategia de redondeo aplicada en forma directa no es suficiente para resolver el problema. Más que esto, el estudiante necesita determinar el mayor y el menor número que pueden ser redondeados a 350 y luego calcular la diferencia entre estos dos números para poder dar la respuesta. Como ni la estrategia ni la situación inicial (el número exacto de gallinas que tienen el Sr. Meier y la Sra. Hoffmann) son

dadas, consideramos que este ejercicio es del tipo (--X), esto es, un problema invertido.

Ejercicio 6a:

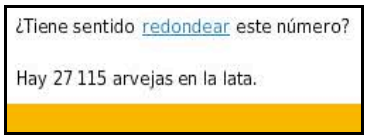


Figura 7. Ejercicio del tipo (-X-): "Búsqueda de aplicación".

Consideramos este ejercicio como "Búsqueda de aplicación", esto es, tipo (-X-) ya que el estudiante debe evaluar si la estrategia de redondeo es aplicable en la situación dada. Aunque una situación inicial es dada, el número conocido de arvejas no es la clave para resolver el problema. La respuesta reside en el contexto en que está propuesta la situación. Estrictamente hablando, el ejemplo anterior solo puede ser visto como una aproximación al tipo de ejercicio denominado "Búsqueda de aplicación" introducido por Bruder (2008), que por ejemplo podría decir:

Presenta un ejemplo en donde tenga sentido aplicar el redondeo.

o

Escribe una historia que incluya una aplicación útil del redondeo.

Esto se debe a que, en este momento, la evaluación de un ejercicio formulado en forma abierta es muy difícil de traducir a un ejercicio de aprendizaje en línea. El siguiente ejercicio también puede ser considerado una aproximación al tipo (-X-)

Ejercicio 6b:

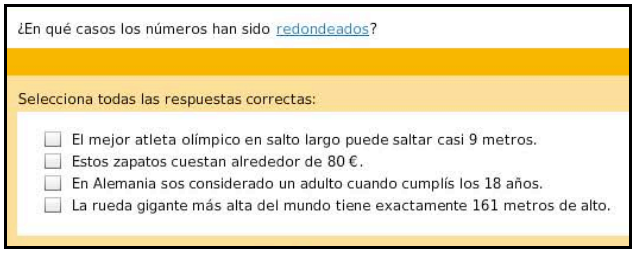


Figura 8. Variación de un ejercicio del tipo (-X-): "Búsqueda de aplicación".

Bruder (2008) recomienda incluir los ocho tipos de ejercicios para ofrecer a los estudiantes posibilidades de comprensión de los conceptos que vayan más allá de la reproducción y la mera aplicación. Analizando la variación del tipo de ejercicios que están presentes en la plataforma bettermarks en referencia al tópico de redondeo, fueron detectados seis de los ocho tipos. Las cifras son las siguientes: (XXX) Ejercicio utilizado como ejemplo: 4; (XX-) Tarea básica de redondeo: 17 (incluyendo aplicaciones y casos especiales); (X-X) Ejercicio de justificación: 6; (X--) Ejercicio problema: 0; (---) Situación abierta: 0; (-XX) Ejercicio invertido: 16 (incluye 8 ejercicios

abiertos y 8 cerrados); (--X) Problema invertido: 1; (-X-) Búsqueda de aplicación: 4. Solamente están ausentes los tipos "Ejercicio problema" y "Situación abierta", que en este momento no son realizables ya que el grado de libertad que demanda este tipo de ejercicio es difícil de traducir a un sistema automatizado como lo es bettermarks. También, en este momento, solo el "Problema invertido" puede ofrecerse como ejercicio abierto. Todos los otros tipos de ejercicios se ofrecen en la variante cerrada.

Conclusiones

El método de la variación de ejercicios introducido por Bruder (2008) resultó una herramienta útil para analizar el diseño de las actividades de aprendizaje de bettermarks. Esto nos permite, por un lado, introducir una herramienta teórica para el análisis didáctico del diseño actual y, por otro, nos ofrece retroalimentación para futuros desarrollos, en tanto pudimos vislumbrar un panorama claro acerca del tipo de ejercicios con los cuales contamos y también de los que nos faltaría introducir para que el diseño de actividades se adhiriera a la perspectiva de la variación propuesta por Bruder y los beneficios para el aprendizaje de la matemática que esto conlleva.

Concluimos que una variación de ejercicios ya está presente en el diseño actual, pero con el fin de enriquecerlo, deberíamos incluir más ejercicios abiertos, principalmente ejercicios de justificación, búsqueda de aplicación, ejercicios problema, problemas invertidos y situaciones abiertas. El diseño de ejercicios de los tipos "Ejercicio problema" y "Situación abierta" es una meta a alcanzar, pero debemos determinar en qué condiciones este tipo de ejercicio puede ser desarrollado en un sistema automatizado de esta naturaleza.

Referencias bibliográficas

Bruder, R. (2008). Vielseitig mit Aufgaben arbeiten – Mathematische Kompetenzen nachhaltig entwickeln und sichern. In R. Bruder, T. Leuders & A. Büchter (eds) *Mathematikunterricht entwickeln: Bausteine für kompetenzorientiertes Unterrichten*, 18-52. Cornelsen Verlag Scriptor: Berlin.

Bruder, R. (2010). *The Relationship Between Task Design and Sustained Competencies*. Recuperado el 29 de abril de 2014 en http://www.math-learning.com/files/10_PME_bruder.pdf

Bruder, R. (2012). *Eight target structure types of tasks as background for learning Sourroundings*. Recuperado el 29 de abril de 2014 en http://www.math-learning.com/files/120711_ICME12_TSG31_bruder.pdf

Büchter, A. & Leuders, T. (2005) Aufgabenmerkmale. In A. Büchter & T. Leuders (eds)

Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern – Leistung überprüfen, 73-113. Cornelsen Verlag Scriptor: Berlin.

Skemp. R. (1999). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Morata.

Watson, A. & Mason, J. (2002). Student-generated examples in the learning of mathematics. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 2*(2), 237-249.

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE CUESTIONARIOS EN MOODLE

Müller Daniela, Vrancken Silvia yEngler Adriana
Facultad de Ciencias Agrarias. Universidad Nacional del Litoral. Argentina
dmuller@fca.unl.edu.ar, svrancke@fca.unl.edu.ar, aengler@fca.unl.edu.ar

Resumen. Una de las posibilidades emergentes de la incorporación de las tecnologías de la información y de la comunicación a la docencia universitaria, es la creación de entornos virtuales de aprendizaje. Entre los distintos recursos, pueden contemplarse diversas actividades de evaluación.
Con el objetivo de fomentar en los alumnos la autoevaluación de su aprendizaje, se diseñaron e implementaron distintos cuestionarios en la plataforma Moodle de la Universidad.
En este trabajo se presentan los principales aspectos considerados en la elaboración de los cuestionarios, los primeros resultados de su implementación y la opinión de los alumnos que contribuyen a reflexionar sobre lo actuado
Palabras clave: entorno virtual, actividades, cuestionarios
Abstract. One of the emerging possibilities of incorporating technological resources to university teaching is the creation of virtual learning environments. Among the different resources, different activities can be evaluated.
In order to encourage students to self-assessment of their learning, we designed and implemented various Moodle questionnaires in the University.
In this paper, we present the main aspects considered in developing the questionnaires, the first results of its implementation and the opinion of the students which contribute to reflection on our actions
Key words: virtual environment, activities, questionnaires

Introducción

Muchos de los alumnos de primer año de Ingeniería Agronómica de la Facultad de Ciencias Agrarias presentan dificultades para abordar distintos tipos de textos, evidencian carencia de estrategias de aprendizaje que les permitan realizar análisis, establecer relaciones, comparaciones, interpretaciones, fundamentaciones, argumentaciones y ejemplificaciones, entre otras. Todo esto se refleja en resultados poco satisfactorios en evaluaciones parciales y finales que constituyen un aspecto negativo que, en muchos casos, los conduce a abandonar o a adoptar una actitud de mínimo esfuerzo o de rechazo hacia la matemática. Frente a estas cuestiones, comenzamos a pensar en distintas actividades que podíamos proponerles con el propósito de ayudarlos en la revisión y análisis de sus principales dificultades.

Por otra parte, la incorporación de las tecnologías de la información y de la comunicación a la docencia universitaria, es un proceso que ha avanzado de manera creciente en los últimos años. Una de las posibilidades emergentes de esto es la creación de entornos virtuales de aprendizaje. Coincidiendo con Bautista, Borges y Forés (2006), las innovaciones tecnológicas que favorecen este tipo de entornos tienen grandes posibilidades pedagógicas que los docentes pueden utilizar para realizar distintas propuestas didácticas.

De acuerdo a Sigalés (2004), integrar recursos virtuales a los procesos en los que las actividades

presenciales se mantienen de manera significativa, debería contribuir a una mejora de la calidad de la docencia, a través, entre otros aspectos, de un mejor acceso a los contenidos y a sus distintas representaciones, lo que puede complementarse con guías de estudio y diversas propuestas de actividades.

Barberà y Badía (2004) consideran que en los entornos virtuales de aprendizaje también deben contemplarse actividades de evaluación de diversos tipos, que activen conocimientos previos, desarrollen el trabajo del alumno, recapitulen y sinteticen lo tratado hasta ese momento, que potencien la lectura y la consulta activa, motiven y provoquen la reflexión, afiancen la seguridad en el aprendizaje y muestren ciertos progresos. Si estas actividades son de autoevaluación, el principal objetivo debe ser el de proporcionarle a los alumnos información tanto del proceso de aprendizaje que están siguiendo como de la calidad del conocimiento que están construyendo. Esta información debería serles útil para tomar decisiones, para reorientar su proceso de aprendizaje en el sentido que sea necesario, tanto en aspectos conceptuales, procedimentales o estratégicos.

Entre las distintas plataformas virtuales diseñadas para la gestión y creación de cursos, Moodle es una de las más utilizadas. En ella, los cuestionarios constituyen una herramienta potente y flexible que permite plantear estrategias de evaluación que serían en algunos casos difíciles de llevar a cabo en papel. Se pueden utilizar como instrumento de refuerzo o de repaso, para facilitar a los alumnos el seguimiento de su propio rendimiento. Si se utilizan como herramienta de aprendizaje, es posible tener una idea del nivel de competencia alcanzado por el alumno y, del informe que se obtiene de la resolución de un cuestionario, es posible determinar en qué fallan más los alumnos y de esta manera poder implementar a tiempo estrategias para corregirlas.

Lo expuesto anteriormente nos motivó a diseñar cuestionarios para los temas de Cálculo y Geometría Analítica utilizando la plataforma Moodle de la universidad. Los mismos se implementaron con todos los alumnos en el año 2012.

En este trabajo se presentan las principales características de los cuestionarios, de las preguntas que los componen y una valoración de los resultados más relevantes.

La propuesta

Desde hace algunos años, se implementó el uso de la plataforma Moodle de la universidad (entornovirtual.unl.edu.ar) para los alumnos de Matemática II de Ingeniería Agronómica de la Facultad de Ciencias Agrarias. Coincidiendo con Arenas, Domingo, Molleda, Ríos y Ruiz (2009), uno de los objetivos en la implementación en el uso del aula virtual, fue el de incorporar diversos elementos que se encuentran presentes en el aula presencial como, contenidos, actividades de evaluación, de comunicación tanto entre los alumnos como con el profesor. Decidimos utilizar

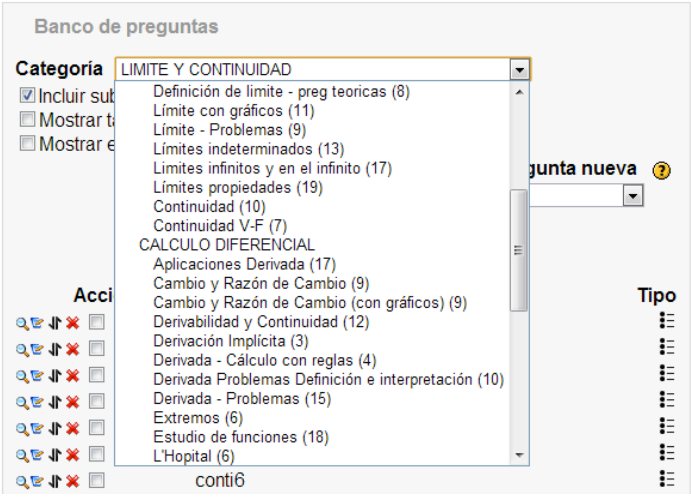
las tecnologías de la información y de la comunicación para el diseño de herramientas que ayuden y motiven a los alumnos en el aprendizaje de algunos temas. Se diseñaron distintas actividades y recursos que se utilizaron como complemento a las actividades del aula con el objetivo de propiciar la adquisición y construcción del conocimiento de manera flexible y autónoma. Es decir, posibilitando que para algunas actividades, el alumno seleccione la forma, el tiempo y lugar de su aprendizaje, teniendo la posibilidad de tomar decisiones sobre el mismo.

A partir de la experiencia adquirida en el desarrollo de las actividades propuestas, en el manejo del aula, junto con los datos generados de su implementación y las respuestas emitidas por los alumnos, consideramos relevante continuar utilizando ese escenario virtual como un complemento al trabajo en el aula de matemática. Realizamos distintas experiencias que avanzaron en la adaptación de los alumnos y de todos los integrantes de la cátedra, a este nuevo contexto.

Entre las distintas actividades propuestas en el aula virtual, hace dos años comenzamos a diseñar y confeccionar cuestionarios para cada uno de los bloques de temas de Matemática II. El objetivo de los mismos fue fomentar en los alumnos la autoevaluación de su aprendizaje, realizando actividades que le permitieran valorar el trabajo realizado y recibir las indicaciones necesarias para identificar procedimientos o conceptos que deberían reforzar o corregir.

Comenzamos organizando las distintas categorías en las que convenía agrupar las preguntas. Esto facilitaría la selección posterior de las mismas en el momento de confeccionar el cuestionario. Luego, entre los distintos tipos de preguntas que dispone la plataforma, decidimos comenzar confeccionando preguntas de opción múltiple y de verdadero o falso. En la elaboración de las mismas se tuvieron en cuenta las distintas representaciones y la conversión de unas en otras.

En la siguiente imagen se muestran algunas de las categorías consideradas para los bloques temáticos correspondientes a Límite y Continuidad y Cálculo Diferencial.



En Moodle, existe la posibilidad de asignarle puntaje a las respuestas correctas y también de decidir si se "mezclan" las opciones dentro de una misma pregunta. Esto último es importante pues si un alumno decide volver a responder el cuestionario en otra oportunidad, deberá releer todas las opciones y no tildar la que recuerda en una determinada posición.

Barberà y Badía (2004), consideran que las actividades de autoevaluación les deben proporcionar a los alumnos información tanto del proceso de aprendizaje que están siguiendo como de la calidad del conocimiento que están construyendo. Agregan que esta información debe serles útil para tomar decisiones, en caso de que resulte conveniente, para reorientar su proceso de aprendizaje en el sentido que sea necesario, tanto para aspectos conceptuales, procedimentales, estratégicos o metacognitivos.

Acordando con lo expresado por estos autores y para que los cuestionarios sean de tipo formativo, para cada opción que el alumno seleccione, se diseñó un mensaje de estímulo en el caso de que haya sido correcta, o el concepto o procedimiento que debería revisar, en caso de que la selección haya sido incorrecta. Todos los mensajes y los comentarios que constituyen la retroalimentación general de lo realizado, decidimos que se mostraran al finalizar la resolución completa del cuestionario.

En el caso de las preguntas de opción múltiple, para cada pregunta, se presentan tres opciones de las cuales solo una es verdadera. Las otras, corresponden a concepciones erróneas o procedimientos incorrectos que se detectaron en distintas instancias del dictado de Matemática II en años anteriores.

Las siguientes imágenes presentan algunos ejemplos de preguntas junto a las devoluciones, en distintos cuestionarios, que recibiría un alumno al seleccionar una opción incorrecta.

El punto P(**m**, 5) pertenece a la circunferencia $x^2 + (y - 1)^2 = 16$ si:

Seleccione una respuesta.

- a. m = 1
- b. m = -1 ✗
- c. m = 0

Retroalimentación:

El punto P pertenece a la circunferencia si sus coordenadas verifican la ecuación.
Revisa las operaciones que hiciste al reemplazar las coordenadas de P en al ecuación de la circunerencia.

La función $f(x) = \begin{cases} 2cx + 1 & si\ x < 1 \\ c^2x - 2 & si\ x \geqslant 1 \end{cases}$

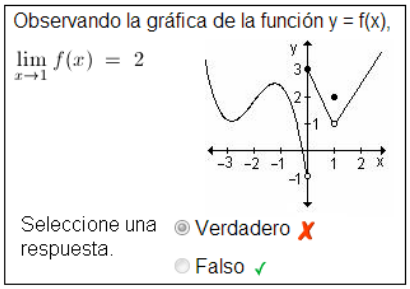
es continua si:

Seleccione una respuesta.

- a. c = -3 ✗
- b. c = 3 ó c = -1
- c. c = -1

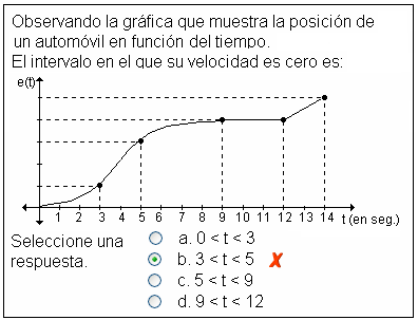
Retroalimentación:

Revisa los límites laterarles y las operaciones que realizaste al igualar los resultados.



Retroalimentación:

Vuelve a analizar la gráfica y observa a qué valor se aproxima la función cuando x está lo suficientemente cerca de 1 tomando valores menores y mayores a 1 ¿Cómo son estos valores de la función? ¿Coinciden? Si es así, ¿cuál es ese valor común?



Retroalimentación:

En este intervalo, la gráfica que representa la posición en función del tiempo es creciente y cambia de ser cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo.
Esto muestra que el automóvil avanza cada vez más rápido y luego comienza a disminuir su velocidad.

En total, se confeccionaron 398 preguntas. Las mismas se utilizaron en 4 cuestionarios que abarcaron los siguientes bloques de temas y cantidades:

Cuestionario	Geometría Analítica	Límite y Continuidad	Cálculo diferencial	Cálculo integral
Cantidad de preguntas	152	94	109	43

Junto a las otras actividades del aula virtual, como experiencia piloto, estos cuestionarios se implementaron en el segundo semestre de 2012. De manera coordinada con el dictado de la asignatura, se fueron habilitando una vez finalizado el desarrollo completo de cada tema.

Para resolverlos, los alumnos asistieron en grupos de 20 al gabinete de informática que dispone la facultad. Una vez finalizados, se les dio un tiempo extra para que analizaran detenidamente la retroalimentación recibida y para que planteasen las dudas que surgieran.

Decidimos dejar los cuestionarios disponibles para que los alumnos pudieran revisar en cualquier otro momento la retroalimentación presentada a todas sus respuestas, dándoles también la posibilidad de hacer otro intento, en caso de que así lo quisieran.

Cada cuestionario consta de 10 preguntas que son seleccionadas al azar, por la plataforma, de las distintas categorías creadas y según la cantidad que decidíamos incluir de cada categoría. De este modo, los cuestionarios generados en distintas oportunidades eran diferentes en la mayoría de las preguntas que lo conformaban.

Resultados y reflexiones

Una vez resuelto el cuestionario, es posible obtener desde la plataforma la información completa

en relación a la realización de los mismos. Para cada alumno, se presentan todos los intentos, la nota obtenida en cada uno, el tiempo utilizado en resolverlo, las respuestas correctas, incorrectas o en blanco.

Los cuestionarios fueron resueltos por la totalidad de los alumnos y se observaron algunos que los rehicieron, en especial en instancias próximas de evaluación parcial y final.

Para salvar el inconveniente que genera en algunos casos la limitada comunicación que se da entre el docente y los alumnos al realizar estos cuestionarios, una vez finalizados, hemos revisado la resolución completa de los mismos con los alumnos que así lo solicitaron. Este fue un momento muy valioso de trabajo con ellos, pues nos permitió tener una idea más clara y acertada de las concepciones de los alumnos sobre determinados temas o sobre procedimientos seguidos en la resolución.

Finalizado el dictado de la asignatura, se solicitó a los alumnos que opinaran sobre el uso del aula virtual y en especial sobre cada una de las actividades propuestas. Relativo a los cuestionarios, manifestaron la importancia de contar con la presencia inmediata de las correcciones de lo realizado, argumentando que ello les permitió detectar sus principales dificultades y autocorregir su trabajo.

Coincidiendo con Barberà (2006), consideramos que la mayor ventaja en el uso de estos cuestionarios se refleja en la inmediatez de la visualización de la respuesta correcta, muy importante para los alumnos, pero también para el docente ya que su acción de retroalimentación se encuentra en ella. Esta respuesta automática podría equipararse a la presencia del docente en la que valida el contenido de la respuesta dada por el alumno.

En relación a los beneficios concretos de los alumnos, a partir del análisis de los cuestionarios resueltos, se puede obtener información valiosa sobre cuáles son sus puntos fuertes y débiles en un tema en concreto. Por esto, consideramos que estos cuestionarios, correctamente dosificados en el tiempo, le permitirían hacer un seguimiento de su propia evolución en el proceso de su aprendizaje, así como también tener una idea más acertada sobre su nivel de logro que está alcanzando en la asignatura.

Las preguntas que se elaboraron para cada cuestionario forman parte de un banco de preguntas que puede ser reutilizada en otras instancias de evaluación o en al elaboración de otros cuestionarios. Esta es la principal ventaja en la confección de las preguntas, que son reutilizables en otras ediciones, del mismo curso y también dentro del mismo dictado, ya que pueden seleccionarse las que integren el cuestionario inicial, el de autoevaluación y luego el de evaluación final. En este sentido, es importante que el banco de preguntas cuente con un buen número de

preguntas de manera tal que pueda solicitarse la selección al azar de las mismas y que éstas puedan ser variadas.

Entre otros aspectos, la implementación de estos cuestionarios no sólo posibilita un ahorro importante de papel, sino que también un ahorro significativo de tiempo de corrección para los docentes. Por este motivo es muy importante que cuando los utilicemos de manera formativa, describamos con detenimiento cada uno de los mensajes que recibirá el alumno y que constituyen la retroalimentación del cuestionario.

A partir de la experiencia realizada y de la respuesta obtenida de los alumnos, se tiene previsto seguir utilizando el aula virtual y en particular los cuestionarios, analizando la factibilidad de incorporarlos a la evaluación formal de la cátedra. Se tiene previsto también diversificar más la tipología de preguntas utilizadas, tratando de contar con preguntas formuladas con otras alternativas posibles: apareamiento, opciones múltiple, numérica, respuesta breve, verdadero o falso, respuestas incrustadas, de ensayo, respuesta abierta.

La decisión de adoptar estos recursos será un gran aporte para la educación en la medida que los docentes nos cuestionemos cómo utilizarlos. En este sentido es importante planificar detalladamente todos los factores organizativos, personales y materiales, adecuados a las necesidades particulares de la institución, de los alumnos y de la asignatura.

De acuerdo a los resultados obtenidos de esta última experiencia, se considera que las actividades desarrolladas a través de la plataforma virtual y en especial los cuestionarios, han enriquecido las sesiones presenciales y han generado nuevos escenarios de intervención didáctica en el aula, logrando un conjunto de acciones y estrategias propias de las clases presenciales y también de otro espacio que permitió extender las actividades más allá de las paredes del aula.

Referencias Bibliográficas

Arenas, F., Domingo, M., Molleda, G., Ríos, M. y Ruiz, J. (2009). *Aprendizaje interactivo en la educación superior a través de sitios web. Un estudio empírico*. Píxel-Bit. Revista de Medios y Educación. n° 35, pp. 127-145. Recuperado el 13 de agosto de 2013 de http://www.sav.us.es/pixelbit

Barberà, E. y Badia, A. (2004). *Educar con aulas virtuales: Orientaciones para la innovación en el proceso de enseñanza y aprendizaje*. Madrid: A. Machado.

Barberà, E. (2006). *Aportaciones de la tecnología a la e-Evaluación.* Revista de Educación a Distancia, año V. Año 5, n° VI. Recuperado el 13 de agosto de 2013, de http://www.um.es/ead/red/M6/barbera.pdf

Bautista, G., Borges, F. y Forés, A. (2006). *Didáctica universitaria en entornos virtuales de enseñanza-aprendizaje.* Madrid: Narcea.

Sigalés, C. (2004). Formación universitaria y TIC: nuevos usos y nuevos roles. *Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento*. Vol. 1, nº 1. Recuperado el 20 de febrero de 2012, de http:// www.uoc.edu/rusc/dt/esp/sigales0704.pdf

RECURSO VIRTUAL QUE FAVORECE EL AUTOAPRENDIZAJE

María Rosa Rodríguez, Graciela Abraham y Eduardo López Ávila
Facultad Regional Tucumán, UTN. Argentina
marosarodriguez@arnet.com.ar, graju6@yahoo.com.ar, elavila@hotmail.com

Resumen. Las verdaderas transformaciones en la educación comienzan en las aulas y los propios docentes deben ser generadores de estrategias que construyan el conocimiento en la mente del estudiante. Un profesor que opera con este criterio crea un ambiente centrado en el estudiante y le ayuda a construir el conocimiento basado en sus habilidades y sus propios saberes.
Para optimizar el aprendizaje se diseñaron autoevaluaciones opcionales, que el alumno desarrolló en forma simultánea con el cursado de la asignatura, a través del Campus Virtual de la FRT de la UTN.
El objetivo de este trabajo es mostrar los resultados de su implementación y sus efectos en el rendimiento académico. Este mejoró para los alumnos que optaron por las autoevaluaciones y proponemos la obligatoriedad de su práctica
Palabras clave: tecnología, autoevaluaciones, rendimiento académico
Abstract. The real changes in education begin in classrooms and teachers themselves must be generators of strategies that build knowledge in the mind of the student. A teacher who works with this criterion creates a student-centered environment and helps build knowledge based on their skills and their own knowledge.
The optional self-assessment, which the student developed simultaneously with the course of the subject, via the Virtual Campus of the FRT of the UTN, it were designed to optimize learning.
The objective of this work is to show the results of its implementation and its effects on academic performance. This improved for students who opted for self-evaluations and it propose the obligatory nature of his practice
Key words: technology, self-assessments, academic performance

Introducción

En las carreras de Ingeniería es esencial poseer una base matemática sólida, dirigida a desarrollar el pensamiento lógico y creador. Esto se manifiesta en la necesidad del empleo correcto del lenguaje matemático y de los métodos para modelar los fenómenos, que constituyen el núcleo central alrededor del cual debe estructurarse la formación básica del futuro ingeniero.

Las ideas del constructivismo en Pedagogía señalan que el conocimiento se construye en la mente del estudiante en lugar de ser transmitido sin cambios a partir de libros o enseñanzas. Un profesor que opera desde este punto de vista crea un ambiente centrado en el estudiante, que le ayuda a construir el conocimiento basado en sus habilidades y sus propios saberes.

Actualmente existe en los estudiantes una sensación generalizada de que es más importante aprobar que aprender. Los que quieren estudiar llegan bastante ilusionados a la universidad, pero con el paso del tiempo se empiezan a desmotivar, especialmente durante el primer año en la facultad. Esto se traduce en apatía frente a los procesos de aprendizaje, con reducida asistencia a clase y a tasas elevadas de abandono y de fracaso.

Creemos que las verdaderas transformaciones en la educación comienzan en las aulas y que los propios docentes deben ser generadores de experiencias y conocimientos. Más aún, coincidimos

con lo que señala Guerrero "todas las tecnologías que participan en un proceso educativo pueden considerarse como sistemas de actuación (acción externa), pero también como fuente para la generación de nuevos modelos cognitivos o marcos de pensamiento (representación interna)." Este autor al referirse al entorno virtual de aprendizaje (EVA) no identifica ni describe ninguna herramienta o recurso, en particular. Su análisis va más allá de los instrumentos y pone de manifiesto que el aprendizaje no es ajeno al material que se utiliza, por el contrario, interactúa con o a través de ellos. (Guerrero, 2003).

La realimentación sobre el rendimiento es clave en un entorno de aprendizaje y la evaluación es una de las actividades más importantes en educación. Si la realimentación es lo suficientemente rápida, se transforma en una herramienta crítica para que los estudiantes monitoricen su propio rendimiento.

El alumno debe ser capaz de autoevaluar su propio proceso de aprendizaje, por ello hay que propiciar el desarrollo de acciones de control y valoración a través de la resolución de distintas actividades propuestas. Las autoevaluaciones electrónicas, si están bien planteadas y diseñadas, contribuyen a orientar el proceso de aprendizaje y permiten valorar sus progresos y reconocer sus dificultades.

Estas reflexiones y los resultados académicos poco satisfactorios obtenidos por los estudiantes en años anteriores, nos llevó a pensar en estrategias que fomenten el estudio independiente y optimicen sus resultados académicos.

En el intento de fomentar el desarrollo de hábitos de estudio en el alumnado, se diseñaron actividades basadas en herramientas TIC. Ellas les permitieron autoevaluarse y realizar correcciones en su matriz de aprendizaje de los temas de la asignatura Algebra y Geometría Analítica, materia correspondiente al primer año de las carreras de Ingeniería de la Facultad Regional Tucumán de la Universidad Tecnológica Nacional.

El presente trabajo tiene por finalidad mostrar algunos resultados obtenidos en la implementación de la autoevaluación virtual y sus efectos en el rendimiento académico de los alumnos.

Marco Teórico

Se identifican dos niveles de diseño de contextos de enseñanza - aprendizaje mediados; uno de ellos referido al *diseño tecnológico,* es decir la naturaleza y características del equipamiento y de los recursos tecnológicos puestos a disposición. El otro, íntimamente ligado al primero, se refiere al *diseño pedagógico o instruccional*, es decir a la propuesta explícita sobre los contenidos, objetivos y sugerencias acerca del uso de estas herramientas para el desarrollo de las actividades de

aprendizaje. Sus autores sostienen que ambos diseños están interrelacionados y conllevan cierto nivel de interdependencia, por lo cual proponen hablar de diseño *tecno-pedagógico o tecno-instruccional*, en donde se integrarían ambos niveles y señalan que es sólo un referente para el proceso formativo. Un mismo diseño tecno-pedagógico puede llevarnos a resultados diferentes, dependiendo de las interpretaciones, negociaciones, significados, niveles de motivación y roles que asuman los participantes del proceso (Coll, Mauri y Onrubia, 2008, 86).

Por lo tanto, se podría considerar que un entorno mediado de aprendizaje es un microcontexto que se conforma atendiendo a ciertas variables, que desde el diseño pedagógico se consideran críticas: el rol del profesor, el papel del alumno, la comunidad, las herramientas de comunicación, los aspectos organizativos, los contenidos, el tipo de actividades formativas, las estrategias didácticas, los modelos de evaluación; variables todas que en un contexto virtualizado se encuentran mediadas por herramientas tecnológicas. (Cabero, 2006).

Al mismo tiempo, cuando pensamos en la conformación de un microcontexto de enseñanza-aprendizaje mediado tendríamos que considerar dos niveles, el del diseño y el del uso efectivo. A nivel de diseño habría que atender simultáneamente las cuestiones tecnológicas y pedagógicas; las cuales se concretarán de modo similar, dependiendo de los usos efectivos que hagan los participantes, y de los significados y negociaciones que surjan entre ellos.

Los planteos de Onrubia, Colomina y Engel hacen referencia a que son cada vez más las instituciones educativas de nivel superior que implementan el uso de plataformas de enseñanza y aprendizaje o sistemas de gestión de aprendizaje – Learning Management System (LMS). Estos autores identifican y describen de manera explícita una serie de plataformas de uso comercial (WebCT, Blackboard) ó de desarrollo de software libre (Moodle, Claroline) señalando sus componentes para diseñar una instancia de enseñanza-aprendizaje. (Onrubia, Colomina y Engel, 2008).

Por ello, optamos por la articulación de la enseñanza presencial con modalidades asincrónicas de comunicación, ya que el uso de recursos didácticos virtuales optimiza el proceso educativo.

En los últimos tiempos ha surgido una concepción actual de *entorno*, que focaliza su atención en el proceso de autorregulación del aprendizaje, identificados como *PLE (Personal Learning Environment)* y son sistemas que ayudan a los estudiantes a tomar el control y gestión de su propio aprendizaje. La idea de un PLE, tiene sus sustentos teóricos en los planteos del conectivismo, conjunto de formulaciones que intentan explicar cómo se suceden los procesos de aprendizaje en la era digital, en donde la tecnología ha irrumpido en los modos en que vivimos, nos comunicamos y aprendemos. (Bossolasco, 2010).

La Universidad Tecnológica Nacional implementó la Plataforma Moodle y para el diseño del aula virtual se utilizaron los recursos que proporciona la plataforma. La portada (página principal) de un sitio Moodle incluye información acerca del sitio que puede ser personalizada. La estructura básica de Moodle está organizada alrededor de cursos, que son páginas o áreas donde los profesores pueden presentar sus recursos y actividades a los estudiantes. Por otro lado, el estudiante aprende a relacionarse de una forma no presencial y sin necesidad de un espacio físico de reuniones.

Una vez validado el ingreso al aula virtual, surge la siguiente imagen:

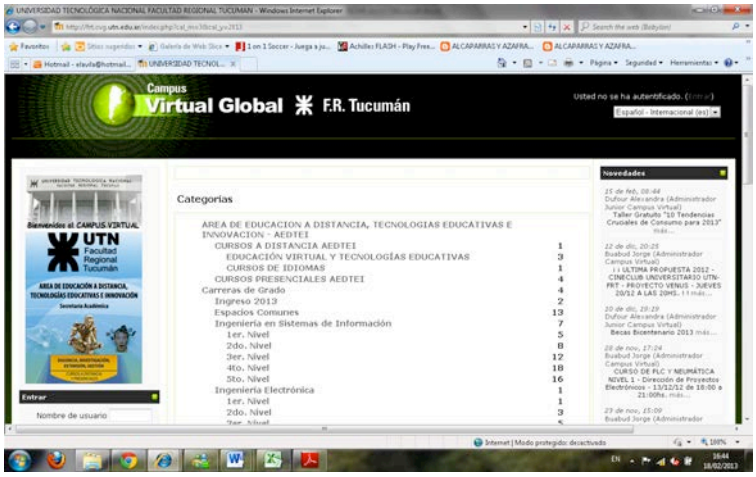


Figura 1. Aula Virtual de la Facultad Regional Tucumán – UTN.

Se sabe que la evaluación es una de las actividades más importantes en educación y como no se puede conocer lo que está ocurriendo en las cabezas de los estudiantes, es necesario obtener información que muestre lo que han comprendido. Una prueba bien diseñada proporciona esta información. También, mediante autoevaluaciones el alumno puede controlar su progreso y el dominio que va alcanzando de los temas tratados en la asignatura, con el fin de prepararse para los exámenes parciales o finales.

Haciendo uso de los recursos tecnológicos el profesor puede diseñar y aplicar cuestionarios, que consisten en una amplia variedad de tipos de preguntas, entre ellas, opción múltiple, verdadero/falso, respuestas cortas, etc. Además, permite a los estudiantes repetir intentos en el desarrollo de la autoevaluación y cada uno es registrado y calificado, obteniendo una puntuación final calculada automáticamente.

Con el propósito de lograr aprendizajes significativos y fomentar la autorregulación del aprendizaje en los estudiantes se diseñaron autoevaluaciones virtuales, que el alumno desarrolló en forma paralela al cursado de la materia Algebra y Geometría Analítica.

El aula virtual de la cátedra Álgebra y Geometría Analítica es la siguiente:

Figura 2. Aula Virtual de la asignatura Álgebra y Geometría Analítica – FRT – UTN.

Metodología

La metodología utilizada en esta investigación es la propia de un diseño exploratorio descriptivo y la investigación realizada es no experimental de corte transversal. La población bajo estudio estuvo conformada por los alumnos que cursaron la asignatura Algebra y Geometría Analítica en la Facultad Regional Tucumán de la UTN, en el periodo lectivo 2012. La realización de las autoevaluaciones fue opcional para los 204 alumnos de las cinco (5) comisiones seleccionadas al azar, sobre un total de 12.

Se diseñaron autoevaluaciones virtuales para que el alumno desarrolle en forma simultánea con el cursado de la asignatura y como complemento de las actividades efectuadas en las clases presenciales, al final de cada unidad temática. Estas autoevaluaciones permiten que el alumno registre su propio progreso y verifique el dominio de los nuevos conceptos adquiridos, logrando una mejor preparación para futuros exámenes. Un cuestionario planteado adecuadamente puede proporcionar una notable información sobre el aprendizaje alcanzado.

Las autoevaluaciones tienen una gran cantidad de opciones y herramientas que las hacen muy flexibles. Contemplan una amplia variedad de "Tipos de preguntas" generadas al azar; como ser opción múltiple, verdadero/falso, respuestas cortas, numéricas, de lectura de gráficas y para relacionar. Las preguntas son organizadas por categorías en un "Banco de Preguntas" y los cuestionarios pueden permitir múltiples intentos. Cada intento es registrado y calificado.

La experiencia consistió en el diseño de autoevaluaciones a través del Aula Virtual basada en la plataforma MOODLE de la asignatura Algebra y Geometría Analítica. Para la recolección de la información se utilizó un Sistema de tres Autoevaluaciones Electrónicas en la plataforma, antes del primer parcial.

Para este informe se consideraron y diseñaron tres (3) cuestionarios sobre el tema seleccionado "Cónicas con Centro: Circunferencia, Elipse e Hipérbola", correspondientes a cada una de las cónicas, permitiendo a los estudiantes que respondan cada uno dos veces y que obtengan una puntuación final calculada automáticamente.

Este instrumento les proporcionó un conocimiento del grado de aprendizaje alcanzado en el tema. También, fomentó el desarrollo de hábitos de estudio y les permitió realizar, personalmente, las correcciones necesarias en su matriz de aprendizaje.

Una vez que el alumno resolvió y envió cada autoevaluación, recibió online el puntaje obtenido y las respuestas incorrectas a las preguntas. El acceso a las correctas las obtuvo luego de efectuar el segundo intento y la calificación final es el promedio de notas logradas en cada intento.

La cuantificación del grado de aprendizaje viene dada, generalmente, por la calificación obtenida por los alumnos en el primer parcial, que corresponde a los temas evaluados electrónicamente. Para el procesamiento de la información se utilizó planilla Excel y software estadístico.

Resultados

En las clases presenciales se incentivó a los alumnos a participar de las autoevaluaciones porque implican estrategias de control de su grado de aprendizaje y les permite realizar los ajustes pertinentes. Pero, la participación no fue la esperada. Sólo el 40% (81) participó de las autoevaluaciones virtuales de una totalidad de 204 que rindieron el primer parcial.

Considerando las calificaciones obtenidas por los alumnos presentes en el primer parcial y que realizaron las tres autoevaluaciones, se definieron los siguientes intervalos de notas: [0,4) desaprobados, [4, 6) regulares, [6, 8) buenos y [8,10] muy buenos.

El siguiente gráfico refleja la variación del rendimiento académico de los alumnos en el primer parcial y en las tres autoevaluaciones: Circunferencia (A_1), Elipse (A_2) e Hipérbola (A_3); respectivamente.

Se observa el alto porcentaje de alumnos acumulados en la categoría desaprobados en el primer parcial en relación directa con los A (ausentes) a las autoevaluaciones. Además, coincide el porcentaje de alumnos que desaprobaron el primer parcial con los que no realizaron la primera autoevaluación. Incrementándose la inasistencia en las otras evaluaciones.

El gráfico refleja que el 40% (96) de la totalidad de alumnos aprobaron el parcial. Mientras que el 51% (104) aprobaron la primera autoevaluación, el 36% (73) la segunda y el 30% (61) la tercera.

Uno de los resultados más notable fue la similitud entre las calificaciones obtenidas por los

alumnos en el rango 6 a 8 en el parcial con los que participaron en las autoevaluaciones. Para los alumnos dentro del rango de notas 8 a 10 se observa un incremento en las calificaciones obtenidas en las autoevaluaciones.

Es importante notar que los estudiantes con mayor nota en el parcial, son los que obtuvieron mayor nota en las autoevaluaciones.

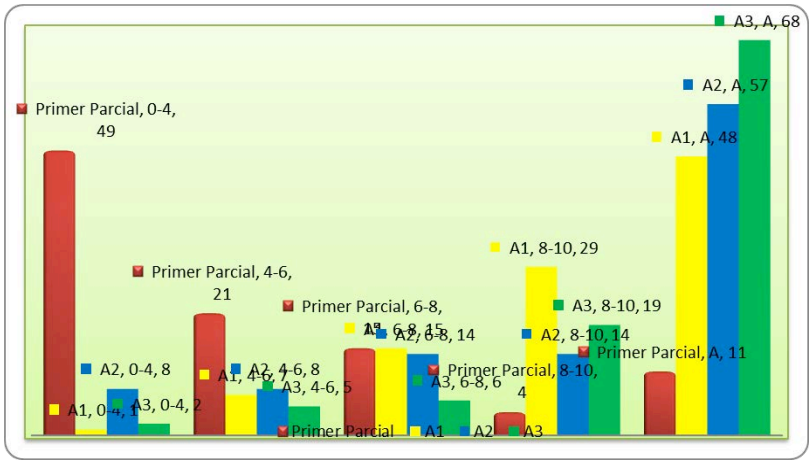


Figura 3. Distribución Porcentual de los 204 Alumnos según las Notas del 1er Parcial y de las tres Autoevaluaciones.

Conclusiones

El proceso educativo se enriqueció con la implementación y el uso de tecnología y se ha convertido en un recurso indispensable para la enseñanza.

El diseño de evaluaciones electrónicas aporta numerosos beneficios al proceso de enseñanza-aprendizaje. Si son frecuentes y periódicas logran reforzar los conceptos, aumentar la motivación y se transforman en herramientas críticas para que los estudiantes monitoricen su propio rendimiento. En los docentes son de gran utilidad para el ahorro y el aprovechamiento del tiempo. Por ello, optamos por la articulación de la enseñanza presencial con modalidades asincrónicas de comunicación, ya que el uso de recursos didácticos virtuales optimiza el proceso.

Es indispensable realizar un análisis exhaustivo de los resultados virtuales obtenidos para que los alumnos tomen conciencia de los saberes adquiridos y el profesor realice los ajustes necesarios para optimizar el proceso de enseñanza.

El análisis de los resultados de la experiencia muestra que el mayor porcentaje de los alumnos autoevaluados, con mejor rendimiento académico en el parcial, se presenta en los que realizaron con muy buena nota la primera autoevaluación; que fueron los alumnos con mayor interés en participar desde el primer momento.

Debido a este resultado proponemos la obligatoriedad en la realización de las autoevaluaciones, de todos los alumnos, para el periodo lectivo 2013 en la asignatura Álgebra y Geometría Analítica. Este sería un requisito que lo habilite para rendir los dos parciales reglamentados de la asignatura. También, sería conveniente que se consideren las notas obtenidas en las autoevaluaciones para la ponderación de las calificaciones que decidirían la regularidad de la materia.

Referencias bibliográficas

Bossolasco, M. L. (2010). *El Foro de Discusión – Entorno Mediado para la Mediación Cognitiva*. Mendoza: Editorial Virtual Argentina.

Cabero, J. (2006) Bases pedagógicas del e-learning. *Revista de Universidad y Sociedad de Conocimiento 3 (1),* 01-10.

Campus Virtual Global. Facultad Regional Tucumán. UTN. http://frt.cvg.utn.edu.ar/

Coll, C; Mauri, T. y Onrubia, J. (2008) La Utilización de las Tecnologías de la Información y la Comunicación en la Educación: Del diseño tecno-pedagógico a las prácticas de uso. En *Psicología de la Educación Virtual* (pp. 74-103). Madrid: Morata.

Guerrero, C. (2003) Los Entornos Virtuales de Aprendizaje como Instrumentos de Mediación. *Teoría de la Educación: Educación y Cultura en la Sociedad de la Información.* Vol. 4. Ed. Universidad de Salamanca. Recuperado el 19 de octubre de 2010 en http://campus.usal.es/~teoriaeducacion/rev_numero_04/n4_art_suarez.htm

Navarro, C. (2008). Motivar desde la Innovación en la Enseñanza Universitaria: El blog Qalidad. *Revista de Educación a Distancia (21),* 01-18.

Onrubia, J; R. Colomina y A. Engel (2008). Los Entornos de Aprendizaje basados en el Trabajo en Grupo y el Aprendizaje Colaborativo. En *Psicología de la Educación Virtual* (pp. 233-252). Madrid: Morata.

Pirttiniemi, E. y Rouvari, A. *Dimensión Didáctica del Entorno de Aprendizaje*. Recuperado el 19/10/2010 de http://www.cibernarium.tamk.fi/havainnollistaminen es/didactic enviroment.htm

Sigalés, C. (2004) Formación Universitaria y TIC: nuevos Usos y nuevos Roles. *Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento 1 (1),* 01-06.

PROPUESTA DE AULA: MODELACIÓN Y VISUALIZACIÓN DE LOS CONCEPTOS DEL CÁLCULO DIFERENCIAL, MEDIADOS CON LA HERRAMIENTA CABRI

Luís Albeiro Zabala Jaramillo y Marcela Parraguez González
Universidad De Medellín — Colombia
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. — Chile
lzabala@udem.edu.co, marcela.parraguez@ucv.cl

Resumen. El software Cabri fue inicialmente diseñado para la enseñanza de la geometría, sin embargo, por su directa incidencia en los conceptos del cálculo, presenta una amplia gama de aplicaciones y representaciones dinámicas en esta área. Basándonos en ella, diseñamos una propuesta de aula que contiene un tratamiento visual, dinámico e interactivo con Cabri en: Funciones de variable real, Límites, Continuidad; Derivadas y Aplicaciones (Pérez, 2006). La propuesta esencialmente resalta en su aplicación metodológica en aula, por tres elementos básicos: (1) Implementar el uso del Cabri en el aula de clase como herramienta básica, (2) Comprender los conceptos en forma ágil y coherente, a partir de la integración del concepto imagen –Visualización– y el concepto definición –definición que da el alumno al concepto– y (3) Modelar.

Palabras clave: Modelación, Visualización, Cabri, Dinámico, Cálculo

Abstract. IThe Cabri software was originally developed for the teaching of geometry, however, due to its direct impact on the concepts of calculus, it presents a wide range of applications and dynamic representations in this area. Based on it, we design a proposal to be developed in the classroom that contains a visual, dynamic and interactive use of Cabri in: Real Variable Functions, Limits, Continuity, Derivatives and Applications (Pérez, 2006). The proposal essentially highlights in its methodological application in the classroom with three basic elements: (1) Implement the use of Cabri in the classroom as a basic tool, (2) Understand the concepts in a quick and consistent, from the integration of image concept –Visualization– and concept definition –definition gives the student the concept– (3) Modeling

Key words: Modeling, Display, Cabri, Dynamic, Calculation

Introducción

Con base en la experiencia personal vivida como docente del curso inicial de CÁLCULO DIFERENCIAL, en diferentes centros universitarios de la ciudad de Medellín (EAFIT, UPB, Escuela de Ingenierías, U. de Medellín, entre otras) donde el índice de reprobación supera frecuentemente los umbrales del 30%, debido especialmente a la deficiencia matemáticas que los estudiantes traen del nivel secundario; por esta razón se proyectan continuamente estrategias académicas para superar esta insuficiencia en la educación secundaria y adelantar el programa sin mayores frustraciones por parte de los estudiantes. Sin embargo, en este proceso de nivelación se dedica mucho tiempo en horas extras para el desarrollo de los contenidos básicos, en desmedro, en gran parte, del tiempo que debe emplearse en el proceso de construcción conceptual, donde la tecnología tome un papel preponderante, facilitando la visualización y la modelación, y haciendo que el estudiante se vuelva protagonista de dicho proceso; no significa lo anterior que se enseñe de manera inadecuada, sino que no se invierte tiempo suficiente a elementos esenciales del proceso aprendizaje, lo cual le daría la posibilidad al estudiante de construir su pensamiento

matemático.

Teniendo en cuenta lo anterior y, sabiendo que la Universidad de Medellín no es ajena a esta problemática, se realizó la presente propuesta de investigación, la cual pretende acercarse a los niveles de comprensión y capacidades específicas que desarrolla un estudiante a través de la implementación del software Cabri como herramienta que facilita la modelación y visualización (interpretación) y a través de la construcción de los conceptos del Cálculo diferencial y el desarrollo de actividades dinámicas estudiantes-docente que serán socializadas y discutidas en el aula de clase.

La propuesta esencialmente resalta en su aplicación metodológica en aula, por tres elementos básicos:

1. Implementar el uso del Cabri en el aula de clase como herramienta básica, de tal forma que el estudiante sea un ente activo en su proceso de aprendizaje, orientado por el docente para socializar los conceptos a partir de los elementos previamente adquiridos por él.
2. Comprender los conceptos en forma ágil y coherente, a partir de la integración del concepto imagen –Visualización– y el concepto definición –definición que da el alumno al concepto–. En la propuesta esta interpretación se evidenciará en los estudiantes en la medida que elaboren conceptos matemáticos con ayuda del Cabri acorde a una situación problemática planteada.
3. Modelar: Se pretende que el estudiante con el software Cabri pase por el proceso completo que va desde enfrentarse a una situación problema hasta crear un modelo matemático (entendiendo Modelación como un proceso en el cual es muy importante lo que emerge, lo que ocurre, lo que los alumnos construyen, cómo argumentan, cómo validan, cómo consensuan para llegar a lo que quieren llegar y que no necesariamente es la expresión algebraica).

A través de un trabajo permanente y constructivo que los proponentes han realizado con alumnos de una universidad colombiana, con base al modelo de concepto imagen de (Tall y Vinner, 1981, p. 152): Estos autores postulan que "*el estudiante adquiere conceptos cuando construye una imagen del concepto*", logrando integrar el concepto imagen y el concepto definición.

Marco teórico

Esta investigación utiliza el concepto imagen-definición de Tall y Vinner (1981), para estudiar las nociones de concepto imagen y concepto definición, y así mostrar su importancia en los procesos

de construcción de pensamiento matemático, tanto en la detección de obstáculos de aprendizaje como en la superación de los mismos, y facilitar así la construcción de conceptos matemáticos.

Concepto Imagen y Concepto Definición

Vinner (1991) introduce los términos concepto imagen y concepto definición, para describir la forma en cómo trabaja la estructura conceptual de una persona y con los cuales es posible explicar algunos errores conceptuales. El término concepto imagen se usa para describir toda la estructura cognitiva asociada con un concepto, pueden ser representaciones visuales del concepto, cuadros mentales, colecciones de impresiones o experiencias, que son traducidas en formas verbales. El concepto definición es una forma de palabra usada para especificar algún concepto, en realidad son las palabras que usa un individuo para dar su propia explicación de su concepto imagen evocada. Así, el concepto definición personal de un individuo, difiere del concepto definición formal que es el aceptado por la comunidad matemática. El conflicto entre la imagen conceptual de un concepto y la definición de dicho concepto, significa en la práctica, la ausencia de una verdadera comprensión del concepto, Tall y Vinner (1981).

Objetivos

Propuestos Vs. Obtenidos

En la tabla 1 se observan los resultados del grupo experimental. Si bien es cierto no aparecen en la tablas datos del grupo control, no es menos cierto que en la tabla "ALGUNOS LOGROS ALCANZADOS EN EL GRUPO EXPERIMENTAL" se recogen directamente observaciones, implicaciones y conclusiones de dicho trabajo, y que adicionalmente le permite al lector de este documento, una mayor agilidad para identificar algunas de la metas trazadas al inicio del mismo.

Tabla 1. Algunos de los logros alcanzados en el grupo Experimental. (Fuente: Luz Ángela Castañeda Bejarano).

PROPUESTOS	ALGUNOS RESULTADOS OBTENIDOS (En el grupo Experimental)
1. Utilizar Cabri como herramienta mediadora del desarrollo de habilidades de razonamiento.	Por medio de la visualización, a través del Cabri, se pudo integrar el concepto imagen y el concepto definición al interactuar con los estudiantes, mostrando así la comprensión de los conceptos.
2. Interpretar los conceptos de cálculo diferencial a través de la modelación matemática.	Identificaron modelos matemáticos a través de los criterios de la primera y segunda derivada como consecuencia de las aplicaciones que hicieron de lecturas del Cabri.

3.	Identificar mediante la visualización los criterios y conceptos matemáticos en cálculo diferencial.	Lograron con ayuda de la visualización y la interacción docente-estudiante, integrar el concepto definición de los conceptos del Cálculo Diferencial, especialmente función, límite de una función, continuidad de una función y puntos críticos de una función.

Otros hallazgos

El docente detecta:

- Actitudes de aceptación y manejo de los conceptos matemáticos con una naturalidad adecuada al nivel del curso en el que están.
- Gusto por la temática de trabajo a través de consultas personales sobre problemas nuevos, que no se le han propuesto.
- Mayor seguridad en la participación activa en clase sobre los nuevos conceptos que se van presentando, así como de la importancia de la construcción de los conceptos, ya que potencia el desarrollo intelectual, en lugar de preocuparse de la transmisión de los contenidos.

De los anteriores objetivos propuestos vs obtenidos, así como de otros hallazgos, se vieron materializadas en la forma como los informantes adquirieron a partir del concepto-imagen y concepto definición (Tall y Vinner, 1981) la graficación desde su concepto básico (el manejo del lugar geométrico) y a la conceptualización, para la aplicación del objeto a dinamizar. En la figura 1, presentamos algunas de las graficas obtenidas como resultados de la aplicación de esta propuesta.

CONCEPTO DE LÍMITE

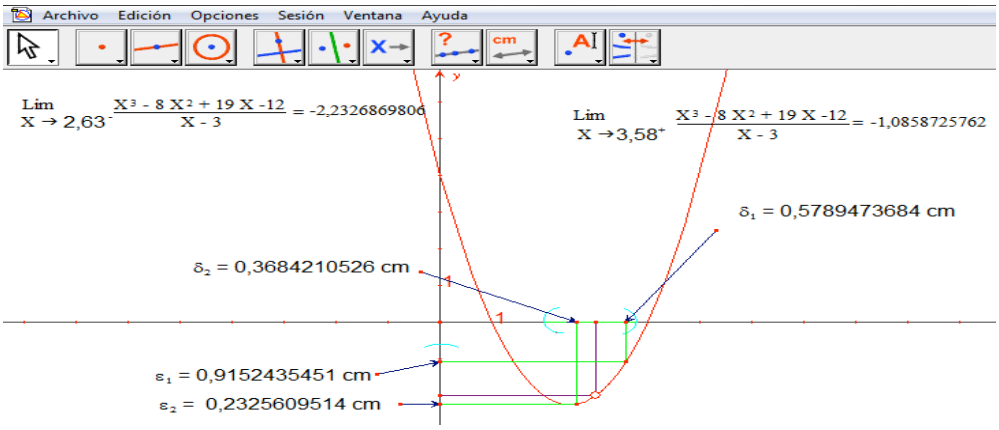


Figura 1. Algunas de las graficas obtenidas como resultados de la aplicación de esta propuesta.

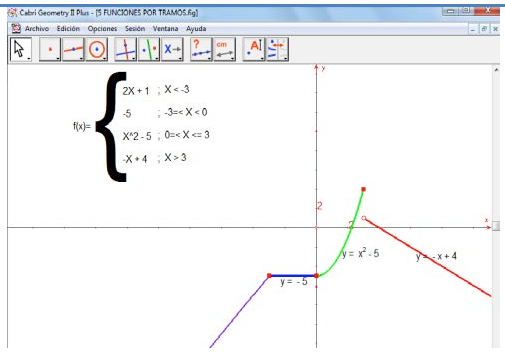
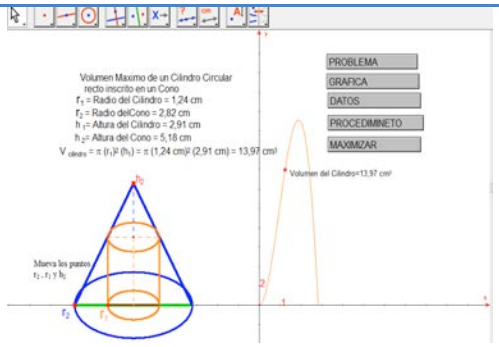
FUNCIÓN COMPUESTA	APLICACIÓN
	

***Figura 1*. Algunas de las graficas obtenidas como resultados de la aplicación de esta propuesta (Continuación).**

Análisis estadístico de la construcción de conceptos

El análisis estadístico que realizamos, muestra que el tratamiento de la estrategia didáctica en los grupos experimental y control, tomando diferentes test en ambos grupos, indica que si hay un mejoramiento en el aprendizaje.

Una gratísima experiencia, en estos instantes de la investigación, se recoge en la forma –espontánea en la mayoría de los casos– cómo los estudiantes se atreven a expresar en sus propias palabras los conceptos e ideas que van enfrentando, apoyados claro está, en la seguridad psicológica que aporta la visualización de las imágenes que antes eran sólo ideales y ahora las pueden manipular físicamente, generando entonces el puente entre el concepto imagen y el concepto definición. No se puede desconocer, que en un principio la elaboración gramatical de sus "nuevas ideas" presenta fallas en su redacción, pero de igual forma, tampoco se puede desconocer el amable avance en el proceso de aprendizaje

Prueba diagnóstica

Los siguientes análisis fueron realizados mediante la herramienta "Análisis de Datos" de Excel. Se procede a comparar las medias poblacionales del desempeño de los dos grupos respecto a los conceptos previos, pero antes se requiere saber si las varianzas son estadísticamente iguales o diferentes para determinar el tipo de prueba para la diferencia de medias, (Tabla 2)

Tabla 2. Prueba F para varianzas de dos muestra.

	Experimental	Control
Media	2,457142857	2,015789474
Varianza	1,644175824	0,90251462
Observaciones	14	19
Grados de libertad	13	18
P(F<=f) una cola	0,118122803	

En este caso la variabilidad de ambas pruebas diagnósticas es la misma, indicando que los dos grupos son homogéneos respecto al conocimiento de los conceptos previos, es decir, que no se advierten ventajas principales del rendimiento de un grupo respecto al otro y por lo tanto son aptos estadísticamente para la comparación. Sólo es necesario probar que ambos tienen la misma media en la prueba diagnóstica.

En efecto, las dos poblaciones tienen las mismas características alrededor de los conceptos, las dos poblaciones son homogéneas, ningún grupo domina al otro, por lo que se puede aplicar la metodología didáctica, se puede decir que la segunda prueba diagnóstica da mejor cuenta de los conceptos previos de los estudiantes y muestra que la elección de los dos grupos no está sesgada, (Tabla 3).

Tabla 3. Prueba t para dos muestras suponiendo varianzas iguales

	Experimental	Control
Media	2,45714286	2,01578947
Varianza	1,64417582	0,90251462
Observaciones	14	19
Varianza agrupada	1,21353383	
Diferencia hipotética de las medias	0	
Grados de libertad	31	
P(T<=t) una cola	0,1320264	
P(T<=t) dos colas	0,26405279	

Prueba final

Esta prueba rechaza significativamente la igualdad de varianzas en el rendimiento de la prueba final, desde los dos métodos de enseñanza. Más aún, la variabilidad de los resultados del examen final con el método tradicional duplica estadísticamente aquella obtenida con el método experimental. Esto indica que el método experimental tiene una mayor consistencia respecto a la media que el método tradicional, indicando que hay un mejor cubrimiento de la población, evitando como es usual en el método tradicional, que los estudiantes con calificaciones extremas altas o bajas expliquen su desempeño por cualidades particulares y no por el método. Se procede ahora a probar que no sólo la variabilidad está a favor del método experimental, sino que también la media del rendimiento en la prueba final sobrepasa estadísticamente al método tradicional, (Tabla 4).

Tabla 4. Prueba F para varianzas de dos muestras		
	Experimental	Control
Media	2,992857143	2,231578947
Varianza	0,31456044	0,824502924
Observaciones	14	19
Grados de libertad	13	18
P(F<=f) una cola	0,041092463	

Estadísticamente se advierte que hay una diferencia significativa amplia respecto al rendimiento según los dos métodos y a favor del método experimental. En conclusión el método didáctico implementado supera estadísticamente al tradicional, no sólo en rendimiento sino en consistencia,

Tabla 5. Prueba t para dos muestras suponiendo varianzas desiguales		
	Experimental	Control
Media	2,99285714	2,23157895
Varianza	0,31456044	0,82450292
Observaciones	14	19
Grados de libertad	0	
P(F<=f) una cola	30	

Conclusiones

- El CABRI como recurso didáctico, aporta al estudiante (usuario) una ampliación en imágenes y en apoyo, a los conceptos previos que tenía al enfrentar la nueva temática;
- El CABRI, entonces, no aporta conceptos nuevos sino que refuerza los que "precariamente" ya se tenían;
- Los "refuerzos" aludidos en el numeral anterior, son ampliaciones conceptuales que el estudiante comienza a interiorizar, pero siempre fundamentados en las bases previas con las que llega a enfrentar cada temática;
- La versatilidad del manejo de imágenes aportadas por el CABRI, es un imán amigable para todos los que se "recreen" con sus recursos, pero especialmente para estudiantes con prevenciones negativas hacia la asignatura, dado que ven en ello una opción grata de fácil aprendizaje de temas para los cuales ellos mismos se consideraban negados;

Referencias bibliográficas

Pérez C, P. (2006). *Matemática Asistida por Ordenador Cálculo Infinitesimal.* Valencia: Editorial de la Universidad Politécnica de Valencia, España.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). *Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity*. Educational Studies in Mathematics, 151-169.

Vinner, S. (1991). *The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics*. En D. O. Tall, *Advanced Mathematical Thinking*, pp. 65-79. Boston: Kluwer.

LAS CAPACIDADES DE LOS ALUMNOS PARA EL DISEÑO DE RECURSOS TECNOLÓGICOS A MEDIDA

Malva Alberto Toso, Marta Castellar y Constanza Quaglia
Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional Santa Fe. Argentina
mtoso@frsf.utn.edu.ar, mcastell@frsf.utn.edu.ar

Resumen. Este trabajo sintetiza el estado de la investigación que justifica la metodología utilizada, describe las actividades más significativas y reporta los aportes concretos realizados por grupos de alumnos que fueron parte del proyecto. Así, un grupo se centró en la generación de aplicaciones tecnológicas propias para resolver problemas planteados por cátedras de matemática. Otro grupo se desempeñó como tutores para que el uso de los laboratorios sea un espacio de formación experimental. Se describen las acciones implementadas para la integración de contenidos y se realizan nuevos aportes para que las experiencias tengan continuidad, puedan ser replicables y útiles como prácticas profesionalizantes en ingeniería
Palabras clave: Diseño, desarrollo, uso, aplicaciones tecnológicas.
Abstract. This paper summarizes the research stages that justifies the applied methodology, describes the most significant activities and lists the deliverables provided by the groups of students who were part of the project. Thus, one of the groups focused on the generation of their own technological applications to solve problems posed math-related subjects. Another group participated as tutors, aiming at turning IT laboratories into a place of experimental education. This also describes the actions taken towards the integration of content and portays new additions made so that this experience has continuity in time, can be replicated and serve as professionalizing practices in engineering.
Key words: Design, development, use, technological applications.

Introducción

Uno de los principales valores de los individuos en las sociedades actuales es el conocimiento, la capacidad de innovación, el emprendimiento y el espíritu de mejora continua, la solidaridad y la colaboración que dispongan y que están dispuestos a compartir. En épocas actuales, pretendemos que los futuros profesionales de la ingeniería renueven constantemente sus competencias como personas flexibles, capaces de continuar formándose y de actuar en distintos ambientes. Esto exige a quienes participan de su formación a redoblar esfuerzos para educar a estas nuevas juventudes y pensar espacios y ambientes donde realmente estas competencias académicas y sociales pueden ejercitarse y llevarse a cabo.

La posibilidad de aprender entre todos, docentes y alumnos, es un hecho innegable.

El trabajo gira en torno de las siguientes líneas de acción: por un lado se considera la acción del profesor de ciencias y tecnologías básicas y se describe una metodología de trabajo al contar con un equipo que lleva a la praxis educativa una enseñanza abierta, con capacidad de reflexión y diálogo, dispuesto a recibir comentarios y opiniones de otros, con capacidad de cambio y renovación. El marco metodológico elegido, para esta línea, es el de la investigación acción (Kember, 1992), ya que ésta implica una acción inmediata y correctiva con el propósito de mejorar

la práctica educativa áulica y atender al perfeccionamiento de quienes están verdaderamente comprometidos con este accionar. Sin embargo, el conocimiento práctico de una situación existente no es en sí mismo el objetivo de la investigación acción, sino, simplemente el comienzo para darse cuenta y concientizarse de la situación.

Por otro lado y paralelamente, se considera la figura del que aprende, con sus cargas motivacionales, el desarrollo de sus habilidades metacognitivas y el inicio de capacidades para el mejoramiento de los desempeños como futuro profesional. Esta mirada sobre el quehacer profesional de los futuros egresados se adecuó e incentivó desde el inicio de las acreditaciones de carreras de ingeniería, a partir de la última década.

Metodología

La metodología inicial de trabajo del equipo comenzó con un recorrido de la investigación teórica compartida por el grupo docente que llevó a cabo la lectura bibliográfica y el registro de las observaciones (Londoño, 2009; Tishman, et. al., 2001) sobre la comprensión de la actualidad existente en el aula y las relaciones sociales y académicas vinculadas a la gestión, uso e incidencia de tecnologías para el aprendizaje y el conocimiento (TACs). El camino se completó con el recorrido de las actividades más significativas y los conocimientos ya existentes.

En este contexto, bajo una mirada descriptiva exploratoria, se efectuó un diagnóstico de la situación de las cátedras de Ciencias y Tecnologías Básicas en la carrera de Ingeniería en Sistemas de Información, acerca de las características de la formación práctica, que se presentaba con buenas características para el análisis e implementación de casos.

La explicación de lo observado nos llevó a elaborar un guión sobre la situación y sus actores, relacionados con el contexto. Fue posible identificar y verificar actividades de formación experimental en algunas disciplinas, tal es el caso de Física y Química, mientras no quedaron claras qué actividades son de formación experimental en el caso de Matemática y Tecnologías Básicas.

El análisis acerca de la formación práctica en Física y Química, por ejemplo, permite afirmar que los temas que conllevan experimentos, muestras y análisis de resultados, en general están establecidos por las mismas disciplinas y sus didácticas específicas, es decir, están medianamente estandarizados; muchas actividades están incluidas, diseñadas, descriptas en textos y manuales disponibles como 'actividades a realizar por los alumnos', con sus consignas planteadas y secuencia de procedimientos; los alumnos en general no disponen en forma particular de los instrumentos e insumos necesarios para realizar las pruebas, por lo que es natural tener que asistir al 'laboratorio' como un espacio físico concreto; habitualmente los elementos de dichos laboratorios requieren del control de uso y 'administración gestionada' de recursos, infraestructura, equipamiento e

insumos, lo que hace necesaria la participación de los docentes y de los alumnos en la clase de laboratorio; la participación de los alumnos es generalmente grupal y la metodología permite valorar actitudes de liderazgo, capacidad para trabajar en equipo, sentido de responsabilidad y cuidado de los materiales y recursos, entre otros (Garza, et al, 2008); durante las actividades experimentales se enseñan también: normas de uso y cuidado (asociadas a los instrumentos y los insumos); buenas prácticas de trabajo y formas de documentación de los experimentos y de los análisis realizados, entre otros aprendizajes.

Pero cuando este análisis exploratorio se lleva a otros campos de las Ciencias Básicas, tal es el caso de la Matemática o a las Tecnologías Básicas, las definiciones se diluyen y el escenario cambia. En la carrera específica de Ingeniería en Sistemas de Información, ¿cómo y quiénes utilizan los laboratorios de informática?, ¿qué papel juegan en la formación experimental las Tecnologías Básicas? No es sencillo identificar qué actividades llevadas a cabo en los laboratorios de informática, donde el recurso disponible es mayoritariamente una computadora, son experiencias que contribuyan a la formación experimental. Podemos hacer una interpretación de lo que ocurre en estas disciplinas, diciendo que los instrumentos e insumos necesarios (una calculadora, una computadora, un software de soporte y datos) son de acceso familiar para los alumnos y están disponibles en el aula o en el hogar; estos recursos para calcular, aplicar procedimientos o validar un resultado son accesibles para los alumnos en forma individual, por lo que no se torna como 'exigencia' tener que asistir a un laboratorio como espacio físico; en los textos de matemática, mayoritariamente no están expresamente pautados los contenidos que los alumnos 'deben' experimentar, medir, constatar aunque las ediciones más recientes, tienen referencias a páginas web donde los alumnos encuentran distintas aplicaciones, simuladores que ejemplifican o hacen relaciones con aplicaciones clásicas o más modernas, entre otros; los procedimientos a seguir se pueden describir de manera simple mediando un lenguaje informático básico, y los alumnos, poseedores de instructivos de ejecución, pueden desarrollarlos en cualquier momento y por sí solos. El resultado de esta etapa de búsqueda y análisis nos orienta hacia la conclusión que 'no todo lo que se realiza mediante una computadora o en un laboratorio de informática, puede considerarse una actividad experimental'(Res Min N°786/2009).

Este proceso de investigación acción constituye un proceso continuo, en espiral, donde comienzan a aparecer momentos de problematización, diagnóstico, diseños de propuestas didácticas de cambios, aplicación de la propuesta y evaluación, desarrollo de cualidades para la escucha, la participación, el espíritu colaborativo y la flexibilización, para luego reiniciar el circuito con una nueva problematización.

Premisas para una propuesta de cambio; actores y actividades

Para las experiencias que describiremos, consideramos las siguientes premisas:

- En las Ciencias y Tecnologías Básicas hay aspectos que requieren experimentar, medir y analizar y buenas prácticas que enseñar. Las cátedras de Ciencias y Tecnologías Básicas involucradas son Álgebra y Geometría Analítica (AGA), Matemática Discreta (MAD),

Taller de Introducción a la Programación (TIP), Algoritmos y Estructuras de Datos (AED).

- El trabajo conjunto entre docentes y alumnos y entre alumnos es esencial para favorecer el descubrimiento y enriquecer el análisis.
- Las experiencias en estas temáticas requieren que los resultados obtenidos (confirmación o contraste), así como su análisis sean documentados y discutidos en conjunto.
- El cuerpo docente estimula y guía estas actividades y esto puede incluir, adoptar estrategias de enseñanza diferentes a las usadas tradicionalmente.
- Las variables de la experiencia no se aíslan, sino que se analiza todo el contexto; los procesos son interactivos y permiten correcciones inmediatas.
- Hay temas de matemática con cursada en el primer semestre del primer nivel de la carrera, que si bien pueden estudiarse y favorecer su comprensión y aplicación con ejercicios realizados sobre papel y con seguimiento manual, la posibilidad de contar con alguna herramienta (informática) de apoyo, estimula y facilita dichas actividades y constituye un medio de constatar resultados o analizar otras soluciones. Tal el caso de los problemas relacionados con 'Estructuras Algebraicas Finitas', 'Teoría de Grafos', 'Espacios Vectoriales', 'Transformaciones Lineales', por citar sólo éstos.
- Si bien se pueden encontrar herramientas TACs (y hasta acceder a ellas en forma libre o en línea), cuando se trata de asignaturas de primer año, hay algunos inconvenientes, relacionados con la terminología y notación empleadas en distintas bibliografías; el alcance de los temas en estudio (herramientas potentes de las cuales los alumnos están en condiciones de aplicar sólo un par de funciones); aspectos relativos a instalación y acceso a la herramienta.
- El aprendizaje de construcción de programas (algoritmos, estructuras de datos simples, un lenguaje de programación) se logra realmente cuando los alumnos 'desempeñan roles lo más similares posibles a las situaciones profesionales'; en particular, cuando la realización de los trabajos prácticos de laboratorio tiene metas concretas sobre aspectos conocidos,

con requerimientos precisos y si es posible, con conocimiento del perfil de los destinatarios.

Este proyecto de articulación e integración cuidadosamente planificado entre diferentes cátedras, es replicable y perfectible e involucra distintos grupos de alumnos que fueron parte del proyecto.

Un grupo se centró en la generación de aplicaciones tecnológicas propias para resolver problemas de aprendizaje y conocimiento (TACs) planteados por cátedras de matemática que se cursaban en paralelo o bien en articulación vertical mientras otro grupo se desempeñó como tutores de los jóvenes usuarios, para que el uso de los laboratorios de informática sea un espacio con verdaderos aportes a la formación experimental.

El equipo docente se insertó desde un rol de mediador y facilitador, como un puente entre las disciplinas involucradas, las prácticas y el propio alumno. Todos están entrelazados en una propuesta que potencia los procesos de comprensión, experimentación, análisis, construcción y reconstrucción del conocimiento. Inicialmente, la tarea del docente fue de selección de actividades y materiales, generación de los procedimientos que guíen las acciones de formación experimental, y continuó con actividades de intervención e interacción con los alumnos en los momentos de laboratorio y fuera de ellos, propiciando siempre el acercamiento y las consultas.

Síntesis de las experiencias sobre la gestión, diseño y uso de TACs a medida

Describimos tres de las secuencias, indicando cátedras intervinientes, desarrollo y resultados logrados:

Desde TIP para AGA: En el primer cuatrimestre del primer nivel de la carrera se incluyó una actividad integradora en TIP; la cátedra se cursa en paralelo con las asignaturas AGA y MAD. TIP tiene carácter motivador y nivelador y en su estructura curricular y metodológica se incorporaron secuencias didácticas con contenidos que permiten resolver problemas algorítmicos sencillos relacionados con AGA y MAD. En TIP se abordan contenidos básicos de algoritmos y programas, apoyados con un lenguaje de programación simple y de libre acceso con metodología teórico-práctica; sus clases en laboratorios incluyen la realización de trabajos prácticos consistentes en construir pequeñas y simples aplicaciones con un alcance concreto. En el contexto estrecho de las secuencias didácticas posibles para los primeros tres meses de la carrera, se diseñaron actividades que requieran del uso de condiciones lógicas, de manera que se empleen los conocimientos adquiridos en MAD y que a la vez se los resignifique. Por ejemplo, la lógica de predicados desde la perspectiva de generar condiciones que permitan la toma de decisiones. Para el trabajo integrador de TIP se seleccionó un problema de contenidos tratados en la asignatura paralela AGA, aunque de forma no exhaustiva, tal que se revise y aplique lo visto y se complete su comprensión. El

problema se basó en la obtención de una recta de regresión para un conjunto de puntos con ciertas condiciones, que el usuario ingresa por teclado. La aplicación debía controlar el ingreso, validar los datos ingresados, mostrar en una ventana de un diagrama cartesiano los puntos, generar la recta de regresión, mostrarla en la ventana y rotularla convenientemente. Optamos por aprovechar las facilidades gráficas que presenta el lenguaje utilizado, para que la aplicación genere una salida visual comprensible y atrayente. Así se agregó que la presentación de la aplicación se realice con una figura con movimientos oscilantes y cambio de color y que el ingreso de los puntos sea acompañado de un semáforo que indique su validez. Como resultados alcanzados, los alumnos completaron la comprensión del tema desarrollado en paralelo en AGA, tuvieron que revisar y contextualizar los temas matemáticos para poder plantear una solución. Esto retroalimentó los contenidos propuestos para TIP, porque además comprendieron la finalidad de la programación al encontrar soluciones a problemas apoyados por computadoras. Los trabajos fueron grupales y entregados como tareas cumplidas en el campus virtual. Finalizados, se publicaron los resultados más completos y mejor manejados, promoviendo así la comunicación y validación de la propia producción, el espíritu de mejora y el trabajo en equipo, valores y competencias que es indispensable fortalecer desde el comienzo de la vida universitaria.

*Desde AED para MAD: E*n el diseño de las instancias formativas superadoras, encontramos dificultades para atender al desafío planteado cuando trabajamos en actividades de los primeros niveles de formación universitaria. Hemos analizado diferentes fuentes que articulan las tecnologías con los procesos educativos. En García, et. al. (2009) encontramos en forma sintetizada y actualizada, algunas características referentes a la Tecnología en la Educación que sustentan nuestra experiencia, cuando expresa que resulta de gran interés la posibilidad de realizar nuestros propios materiales o software educativos ajustados con precisión a nuestros objetivos y necesidades curriculares. Esta experiencia lleva dos ciclos lectivos completos y se inicia cuando los alumnos de AED, cursando en segundo semestre del primer nivel, construyen modularmente aplicativos que puedan dar soporte a temas que se desarrollan en MAD. Ellos deben revisar y resignificar los contenidos de MAD para generar un instrumento (como trabajo integrador de AED) que sirva a sus pares (alumnos de MAD del año próximo, que es nuevo grupo de alumnos interviniente) para comprender y afianzar el aprendizaje de ciertos temas. Al tener un objetivo claro sobre los destinatarios y el uso de la aplicación a desarrollar, los alumnos son guiados sobre buenas prácticas, no sólo de los recursos básicos de programación, sino en otros aspectos como la interacción del usuario con la aplicación, los formatos de presentación y la documentación que acompaña. La construcción de partes de una herramienta permite reforzar cuestiones como legibilidad del programa, flexibilidad, modularidad. Los docentes acompañan, seleccionan y publican

la herramienta que más se adecua a los objetivos de la experiencia. Como resultado, la situación didáctica se sostiene, crece y se retroalimenta durante los siguientes años. Los alumnos de MAD del año siguiente emplean las herramientas desarrolladas por sus pares, en sesiones preparadas de laboratorio, de manera que les permitan no sólo constatar resultados de resoluciones manuales, sino también abordar soluciones de problemas con mayor extensión, más complejos o con mayores datos, comprobando que las nuevas tecnologías hacen aportes a la comprensión, aplicación, transferencia a nuevas situaciones con mayor precisión y rapidez. Por otra parte, el hecho de que dichos instrumentos hayan sido desarrollados por sus pares les permite una valorización diferente de los mismos y de los contenidos que desarrollarán en el próximo semestre en AED y se los insta a participar como usuarios comprometidos, ser hacedores de nuevos aportes y demandantes de otros requerimientos. Los alumnos de MAD suman 4 horas a la formación experimental. Actualmente MAD cuenta con una aplicación tecnológica MATDIS 2.0 que fue registrada como obra colectiva. MATDIS 2.0 tiene distintos módulos integrados para resolver problemas sobre Lógica, Teoría de Números, Estructuras Algebraicas Finitas, Álgebras de Boole, Grafos y Digrafos y Árboles.

Una aplicación TACs a medida como requerimiento de AGA: Un nuevo objetivo es trazado. Es el desarrollo de un recurso tecnológico que permite resolver tareas específicas en temas de álgebra lineal. La selección de la cátedra y el tema fue decisión de los estudiantes, en base a una revisión de los contenidos que más dificultades les ofrecieron en el momento de su cursado. En esta etapa, alumnos avanzados, que se desempeñan como becarios de investigación, están diseñando y desarrollando una herramienta de apoyo para que los estudiantes de AGA sean capaces de revisar y fortalecer lo aprendido o proponer nuevas situaciones prácticas para consolidar lo desarrollado en clases. Se trata de un recurso simple, disponible y portable, de costo nulo y eficiente para la validación de resultados. La herramienta no sólo permite incorporar una nueva tecnología en el aula, sino también fuera de ella. Las funcionalidades se iniciaron dando apoyo al tema cambio de base, que inmediatamente se fueron sumando subespacios vectoriales, conjunto de generadores, y más recientemente sistemas de ecuaciones lineales (Grossman, et.al., 2012) El uso incipiente de esta herramienta ha permitido observar que los alumnos usuarios adquieren hábitos de autonomía e independencia más tempranamente porque la aplicación puede ser empleada como medio de consulta y comprobación de resultados de los ejercicios planteados en las clases prácticas. La herramienta AGA, está siendo desarrollada con claros aportes a actividades de diseño y proyecto para los alumnos desarrolladores. Ellos definieron la metodología de trabajo, la determinación de requisitos no funcionales, la elección de las tecnologías a utilizar, los requerimientos funcionales, el diseño de interfaces, la implementación y prueba.

Conclusiones

Con buena disposición y flexibilidad podemos advertir que existen oportunidades para la acción en diversos contextos y en distintas cátedras y temas y que la incorporación de herramientas TACs, o de tecnologías para el aprendizaje y el conocimiento puede ser un medio para despertar el interés y la motivación, así como la participación activa de los estudiantes en la solución de estas necesidades.

El uso de los recursos tecnológicos con carácter experimental, racional y razonado contribuye a construir conceptos, validar y argumentar resultados en las aulas de matemática para ingeniería.

La efectiva producción y participación en estos trabajos favorece mejores desempeños para la futura práctica profesional (Reed, 2001).

Las cátedras que se sumaron a este desafío no sólo cuentan con el diseño e implementación de secuencias didácticas innovadoras, sino que están haciendo buenos aportes en cantidad de horas y experiencias a la formación experimental satisfaciendo requerimientos de los estándares de acreditación para la formación del Ingeniero.

Las acciones implementadas por los docentes para lograr la integración de contenidos entre distintas cátedras fue efectiva (Atkinson, et. al, 2002); se realizaron nuevos aportes para que aquellas experiencias tengan continuidad y sean significativamente útiles para mejorar las prácticas profesionalizantes de los alumnos de ingeniería.

La mirada en el quehacer profesional incentivó el desarrollo de herramientas tecnológicas propias, adecuadas a atender la problemática del conocimiento de los contenidos matemáticos curriculares (para los usuarios) y a favorecer el ejercicio de la formación experimental y resolución de problemas en ingeniería (para el grupo desarrollador). Otro aporte se hizo al currículum de las carreras de ingeniería como un elemento que comienza con la articulación de metas y valores, continuando con una prevención por la amplitud y selección de los contenidos de ciencias y tecnologías básicas para lograr un equilibrio entre las demandas del campo disciplinar, la construcción de guías de estudio adecuadas, el ofrecimiento de actividades de estudio independiente, el uso de recursos tecnológicos o aplicaciones para la resolución de problemas y validación de cálculos y finalmente la atención a los procesos de evaluación. El encuentro con colegas del área o departamento es un requisito que no es ajeno a esta articulación curricular. Finalmente, el proceso de evaluación de la tarea realizada, la retroalimentación, la medición de las tareas de aprendizaje, la validación, evaluación y difusión de las actividades realizadas son motivo de informes y comunicaciones a la comunidad. Las acciones socializadas de esta manera deben ser miradas como una tarea de semi divulgación ya que con las mismas sólo se pretende investigar y

difundir acciones realizadas en el aula de matemática que, para un determinado grupo de actores y en el marco de las carreras de ingeniería, coadyuvaron a la comprensión y mejora de la compleja tarea que implica el aprendizaje.

Referencias Bibliográficas

Atkinson, T. y Claxton, G. (eds) (2002): *El profesor intuitivo*. Barcelona: Ediciones Octaedro.

García, A. (2009): "*Herramientas tecnológicas para la mejora de la docencia universitaria*". En García Valcárcel, A. (Coord*). La incorporación de las TIC en la docencia universitaria: recursos para la formación del profesorado*. España: Davinci Continental, p.55-65.

Garza, G.; Ressia, J.; Vallés, E.; Schbid, S.; Bandoni, A. (2008): *Formación Experimental en alumnos de Ingeniería Química*. Trabajo presentado en el congreso V CAEDI 2008, Salta, Argentina.

Grossman, S; Flores, J. (2012): *Álgebra Lineal*. Séptima Edición. México: Mc Graw Hill/Interamericana Editores S.A.

Kember, D.; Gow, L. (1992): "*Action reserch as a form of staff development in Higher Education*". Higher Education. 23-297-310.

Londoño, F. W. (2009) *Una Apuesta de Formación Contemporánea desde las Formas de Representación con Tecnologías de la Información y la Comunicación*. Colombia: Artes Gráficas del Valle Editores Impresores Ltda.

Reed, D. (2001): *Developing Empirical Skills in an Introductory Computer Science Course*, Proceedings of the 34th Midwest Instruction.

Tishman, S.; Perkins, D.; Jay, E. (2001). *Un Aula para Pensar*. Buenos Aires: Aique

Documento

Res Min N°786/09. Argentina.

En http://www.confedi.org.ar/sites/files/privado/Acreditacion-InformaticaySistemas.pdf. Consulta en línea. Verificado 30/09/2013.

LA MODALIDAD VIRTUAL EN EL INGRESO A LA FACE-UNT

Marta Inés Cirilo y Marta Lía Molina
Universidad Nacional de Tucumán. Facultad de Ciencias Económicas. Argentina
martainescirilo@yahoo.com.ar, mliamolina@yahoo.com.ar

Resumen. Desde el año 2011, mediante el proyecto Camino hacia la Universidad se incorpora la modalidad virtual en el curso de ingreso a la Facultad de Ciencias Económicas (FACE), utilizándose el Campus Virtual de la Universidad Nacional de Tucumán (UNT) con el Entorno Virtual de Enseñanza-Aprendizaje (Moodle).
En este artículo compartimos la experiencia del curso virtual FACE-UNT en el área de Matemáticas. Mostramos algunas de las etapas llevadas a cabo como el diseño del curso, la producción de materiales, elaboración de cuestionarios de Moodle que son utilizados por los estudiantes como una auto-evaluación de su aprendizaje y la ejecución del curso.
La implementación del Curso de Ingreso Virtual de Matemática a la FACE representa una propuesta innovadora, pertinente y acorde con las nuevas tendencias educativas que además cubre las necesidades de los aspirantes al Ingreso del interior de la provincia y de ciudades aledañas del radio de influencia de la UNT
Palabras clave: EVA, e-learning, aprendizaje autónomo, ingreso a la universidad.
Abstract. Since 2011, and thanks to the Project 'On the way to Higher Education', alternatively a virtual course for entrance to Facultad de Ciencias Económicas (UNT) has been applied. The e-learning platform chosen by our Institution are Moodle.
In this paper we share the experience of virtual FACE-UNT course in the area of Mathematics. We show some of the steps performed as course design, materials production, processing Moodle questionnaires that are used by students as a self-assessment of their learning and course performance.
The implementation of the Math Virtual Course the FACE represents an innovative approach , relevant and coherent with the new educational trends and also meets the needs of applicants to Join the interior of the province and surrounding cities of the radius of influence UNT.
Key words: EVA, e-learning, independent learning, college entrance.

Introducción

En el año 2011 la Facultad de Ciencias Económicas (FACE) de la Universidad de Tucumán (UNT) aprobó el Proyecto Camino hacia la Universidad, sistema de Ingreso a la FACE. En su primera instancia, en el cuatrimestre anterior al año de ingreso, ofrece un Curso Extensivo que reúne dos módulos: Matemática Elemental y Vida Universitaria e incorpora como alternativa la Modalidad Virtual en el Entorno de Enseñanza-Aprendizaje Moodle. El curso se implementó en el 2do. Cuatrimestre 2011 para los aspirantes a ingresar a la Facultad en el año 2012. Esta experiencia estuvo a cargo de las autoras del presente trabajo.

El objetivo del mismo es presentar la experiencia del Curso de ingreso virtual a la FACE-UNT en el área de Matemática Elemental para el año 2012 y 2013.Mostramos en él algunas de las etapas llevadas a cabo como: el diseño del curso, la producción de materiales y la elaboración de cuestionarios en el Aula Moodle y la implementación del aula. Los cuestionarios se plantean para los alumnos como Auto-evaluación de su propio aprendizaje.

Marco Teórico

Entornos virtuales de aprendizaje

La utilización de las redes virtuales como soporte de variadas experiencias dentro del mundo educativo generó nuevos entornos virtuales de aprendizaje en los cuales las TIC participan ampliamente.

Los nuevos entornos de aprendizaje favorecen la interactividad, estimulan estrategias de comunicación y colaboración asincrónica y sincrónica, facilitan la comunicación a distancia, propician las tareas referidas a hacer más accesible, editable y publicable la información compartida. (Bello Díaz, 2005), (Prieto Castillo, D y Van de Pol, 2006, p. 144), (Barberá y Badía, 2005, p.7).

Tomamos como definición "e-Learning es la ampliación del entorno de aprendizaje más allá de sus tradicionales límites físicos, geográficos y temporales, a través del uso de tecnologías digitales en red." (Prieto Castillo, D y Van de Pol, 2006, p. 143).

Estos autores realizan, además, una categorización de los diferentes niveles que puede presentarse el e-learning en una institución educativa (p. 164).

Consideramos la Modalidad virtual como el nivel de e-learning que ofrece todas las prácticas de aprendizaje en forma online. Los estudiantes pueden participar en un currículo independientemente del lugar en que se encuentren y, en mayor medida, en el momento que deseen (de carácter obligatorio y con calificación).

Se necesita entonces que el docente plantee y lleve a cabo experiencias innovadoras que le permitan al estudiante de hoy (nativos digitales) recibir la información en constante evolución, procesarla y comunicarse con el docente y sus pares utilizando estas herramientas tecnológicas. Esto implica un gran desafío en términos educativos: formar a los estudiantes de esta generación y elegir los modelos pedagógicos y didácticos más adecuados. Por lo que para el modelo pedagógico del aula virtual se tuvo en cuenta, entre otros, los siguientes aspectos:

- Actividades que promuevan y favorezcan el estudio independiente.
- El acompañamiento y seguimiento de los docentes a través de las tutorías con el propósito de apoyar y promover el aprendizaje de los alumnos.
- Actividades de autoevaluación, con retroalimentación inmediata, que le permita al estudiante conocer el nivel de aprendizaje logrado.
- El Sistema de evaluación.

El alumno, desde el comienzo de la actividad virtual, debe conocer los aspectos de la planificación

de la actividad formativa, o sea los objetivos de aprendizaje, las tareas a realizar, los contenidos el curso, el material de lectura, la interacción esperada con el profesor y los otros estudiantes, y también los criterios de evaluación que van a utilizarse para valorar su aprendizaje.

Diseño de un Aula Virtual

Para el diseño del Aula se tuvo en cuenta el decálogo de buenas prácticas en el uso de TIC (Área Moreira, 2009, p. 49-50) que permiten la correcta implementación de las aulas virtuales. Entre ellos: crear espacios para que los estudiantes se comuniquen permanentemente (foro, chats, email), ofrecer un calendario detallado con las tareas del curso, incorporar guías y recursos para la realización autónoma de las actividades, estimular la motivación y participación del alumnado, incorporar documentos de consulta sobre el contenido en distintos formatos, mantener de forma periódica un tablón de noticias del profesor, establecer públicamente criterios de evaluación, y ofrecer tutorización y feedback continuo entre el profesor y cada alumno sobre consultas y resultados de la evaluación.

Existen un importante número de diseños, basados en las diferentes teorías que exponen los procesos cognitivos y sociales, que fundamentan los procesos de enseñanza y aprendizaje y que pueden adaptarse a las peculiaridades de la enseñanza virtual aplicable a jóvenes y adultos. (Cirilo y Molina, 2010, p. 3 - 5).

El diseño del Curso virtual de Matemática responde a la búsqueda permanente de innovaciones que nos permitan contar con un mecanismo más eficaz, que además de ayudar a los alumnos en la tarea de asumir su rol de estudiante activo (iniciarse en el aprendizaje autónomo), también le permita acceder a conocimientos e información útiles para el desarrollo de su actividad.

El diseño y la producción de materiales didácticos deben realizarse con una lógica diferente, ya que en su elaboración se pueden incorporar las diferentes herramientas tecnológicas que provee la Web.

Material didáctico

La tarea de diseñar un medio o material didáctico es ante todo un proceso de planificación y desarrollo de una propuesta empaquetada de una actividad de enseñanza. (Área Moreira, 2009, p. 34-35).

El conjunto de tareas y secuencias a desarrollar en el proceso de diseño de medios didácticos son las siguientes:

- Establecer los fines y naturaleza del material que se quiere elaborar.

- Seleccionar y organizar los contenidos.
- Analizar el proyecto curricular y explicitar el modelo de enseñanza en el que se inscribe el material.
- Identificar las características de los destinatarios.
- Determinar y analizar los atributos tecnológicos propios del material.
- Planificar los recursos humanos y técnicos necesarios.

El material debe organizarse y estructurarse teniendo presente los criterios de integración, coherencia, claridad, entre otros.

El proceso de Auto-evaluación

Un alto porcentaje de entornos virtuales de aprendizaje (EVA) incluyen un sistema de pruebas de respuesta objetiva, de tipo test o autoevaluación mediante un módulo de software con acceso a una base de datos.

La autoevaluación le sirve al estudiante para reconocer su progreso, sus fortalezas y debilidades, los logros y las dificultades. Es útil, además, para analizar sus ejecutorias individuales. (Ortiz Hernández, 2007, p.111). Es un elemento fundamental del proceso educativo dado que involucra el compromiso del alumno con su proceso de aprendizaje y con sus logros. De esta forma, la autoevaluación de los alumnos es esencial para fortalecer, revisar o reorientar sus metas y necesidades; desarrolla habilidades meta-cognitivas, los alumnos comprenden el proceso seguido y los efectos de sus decisiones, lo que los habilita para aprender a aprender en otras situaciones y contribuye al desarrollo del autoconocimiento y autoconfianza, necesarios para aprender.

García Beltrán, Martínez, Jaén, y Tapia (2006) plantean que las principales ventajas en la utilización de un entorno virtual para llevar a cabo un sistema de autoevaluación con pruebas de respuesta objetiva son:

- Posibilita un seguimiento individualizado del aprendizaje del alumno.
- Permite evaluar conocimientos y habilidades.
- Facilita el establecimiento de una evaluación continua durante el proceso de aprendizaje y reduce el tiempo de su diseño, distribución y desarrollo.
- Agrega una gran flexibilidad temporal y espacial permitiendo que el alumno pueda seguir su propio ritmo de aprendizaje.
- Proporciona respuesta inmediata (retroalimentación) de la resolución de los ejercicios.

- El almacenamiento de los resultados facilita la creación de informes y tratamiento de datos tanto a nivel de un alumno o de un grupo de alumnos como de las preguntas utilizadas.
- La base de datos de preguntas puede reutilizarse en otros cursos.

Justificación de la elección de la modalidad virtual para Matemática elemental

Para la formulación de la propuesta del curso virtual tuvimos en cuenta:

- Que el curso propuesto trata la revisión de temas de Matemática estudiados en el nivel medio lo que permite contar con la presencia de numerosos conocimientos e ideas previas que favorecen las interacciones docentes-alumnos las que, junto con las actividades seleccionadas adecuadamente en el entorno virtual, ayudan a alcanzar aprendizajes que resultan significativos en los alumnos.
- El pedido de un curso de carácter extensivo de modalidad virtual por parte de numerosos aspirantes del interior de la provincia y de provincias cercanas que asisten a la Facultad.

Para el diseño de la propuesta virtual, además de los puntos anteriores, realizamos un análisis general del curso en la modalidad presencial que incluyó la revisión de los objetivos y estructura del mismo; la edad promedio del alumnado al que va dirigido; la selección de la tecnología disponible en la plataforma que se ajuste a las necesidades del curso, el tiempo disponible para el mismo y el grado de interacción a utilizar.

Consideramos además:

- El problema de la comunicación en los foros de dudas y consultas ocasionado por el lenguaje simbólico propio de la matemática (Yáñez, Cirilo, Molina, 2008), como así también la deficiencia observada en el uso riguroso del lenguaje y del razonamiento matemático. Este problema fue identificado por las autoras en el transcurso de su práctica docente y tratado en extenso por Ortega y Ortega (2004).
- El uso de estrategias que favorezcan la motivación, la organización y la autorregulación de los estudiantes, a fin de que pudieran realizar el curso conjuntamente con el último año de sus estudios en la Escuela Media.
- Los puntos de contacto con el curso de modalidad presencial ya que debían respetarse los mismos contenidos y tiempos de ejecución por las evaluaciones presenciales propuestas en forma simultaneas para ambas modalidades.

Metodología

Este curso se implementó en el entorno virtual de aprendizaje Plataforma tecnológica Moodle que

promueve una pedagogía constructivista social "el conocimiento se construye en la mente del estudiante en lugar de ser transmitido sin cambios a partir de libros o enseñanzas y en el aprendizaje colaborativo". Tiene una interfaz de navegador de tecnología sencilla, ligera, y compatible.

La metodología utilizada en la Modalidad virtual se basó en estrategias propias de esta modalidad y en experiencias anteriores de las autoras con aulas virtuales en la modalidad B-learning. (Cirilo, Molina, 2011, p. 1445).

El curso se desarrolló entre los meses de setiembre a noviembre. Los aspirantes, en la semana anterior al inicio curso, mediante correos electrónicos, recibieron la contraseña de acceso al Aula y un Tutorial elaborado por las autoras para registrarse en el Campus Virtual.

Para que el aula virtual de Matemática Elemental promueva un aprendizaje eficaz y eficiente, priorizamos en el diseño de la misma la interacción con los materiales didácticos y con los distintos actores implicados en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Los materiales didácticos elaborados por las autoras, especialmente para esta modalidad fueron los siguientes:

- Materiales de Lectura Obligatoria, mediados pedagógicamente, en los que se encuentran los conceptos y resultados teóricos que se han estudiado en el nivel medio. En su presentación se combina el uso del lenguaje y rigor matemático, escasamente utilizados por los estudiantes en el nivel medio. De esta manera se intenta tender un puente entre la forma de trabajar la Matemática en el secundario y en la universidad, facilitando así al alumno su proceso de adaptación.
- Ejercicios resueltos de forma detallada con los que se procuró que los estudiantes aprendan los pasos a seguir en la resolución de problemas.
- Guía Práctica que contiene una serie de ejercicios y actividades para resolver semanalmente que tienen como objetivo que los estudiantes desarrollen sus habilidades.

Los materiales didácticos del curso se presentaron en formato PDF a fin de que el alumno pueda contar con ellos tanto en formato digital como en papel.

La organización del contenido del Curso se desarrolló en 9 Módulos de aprendizaje semanales a fin de que la periodicidad y regularidad ayuden al alumno a planificar su propio aprendizaje. La selección de los módulos temáticos y la profundidad con la que fueron tratados responden a los contenidos matemáticos básicos de la escuela media y las necesidades que de ellos tiene la FACE.

Además para garantizar la formación de habilidades y competencias requeridas en los estudiantes, se presentó un módulo por cada semana del curso que fue diseñado con los siguientes recursos y actividades:

- Videos de presentación del tema, que sirven como motivación inicial y además presentan los contenidos del Módulo con ejemplos desarrollados.
- Materiales de Lectura Obligatoria.
- Ejercicios resueltos.
- Guía Práctica.
- Auto-evaluaciones con las que el alumno podrá medir su grado de conocimiento de los temas de cada Módulo. Las Auto-evaluaciones consisten en un examen tipo test de preguntas de opción múltiple con una o varias respuestas correcta, Verdadero o Falso, de emparejamiento y respuesta corta.
- Foros utilizados para la comunicación asincrónica se usan para la aclaración de conceptos y dudas planteados por los alumnos.

La implementación del Aula virtual de Matemática Elemental en el Campus Virtual

Figura 1. Imagen del Inicio del Curso Virtual de Matemática.

En la Figura 1 mostramos la imagen del inicio del Curso Virtual de Matemática para el Ingreso implementado en el entorno virtual de aprendizaje Moodle.

En las columnas laterales izquierda y derecha se sitúan los bloques que consideramos más adecuados para la finalidad de este curso.

En la Columna Central se organiza el curso que en su Módulo Inicial contiene además del nombre del Curso, la presentación de los Docentes Responsables del Curso para establecer un primer acercamiento con los alumnos. Además se detallan una serie de iconos que aparecerán en los

módulos lo que le permitió al estudiante, en forma rápida, identificar cada uno de los elementos didácticos (videos, materiales didácticos, etc.) utilizados en cada Módulo de Aprendizaje.

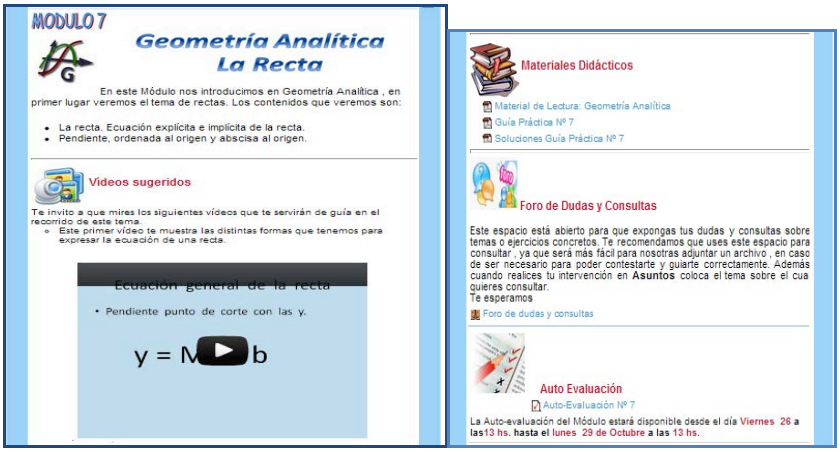


Figura 2. Imágenes del Módulo de aprendizaje N° 7

La Figura 2, muestra una imagen de un Módulo de aprendizaje que presenta las distintas secciones que lo conforman y están identificadas con el icono que representa el recurso o actividad a desarrollar.

Las Auto-evaluaciones en el Aula

A continuación se muestran algunos ejemplos de preguntas elaboradas en el curso.

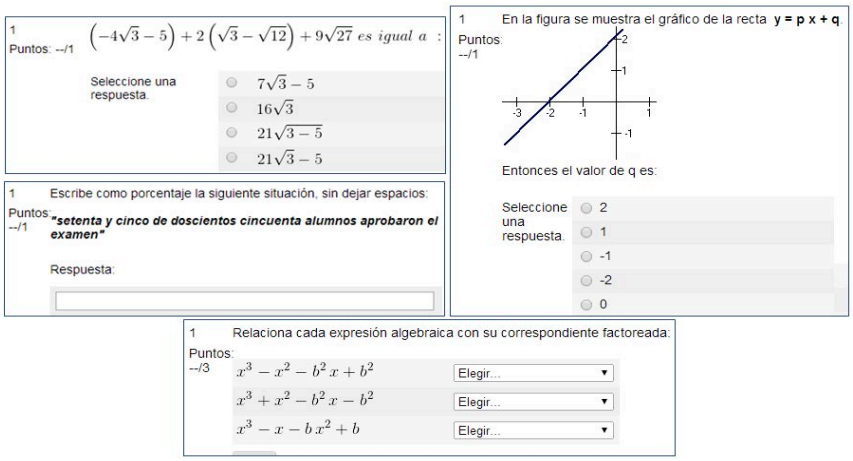


Figura 3: Vista parcial de algunas preguntas propuestas en las Auto-evaluaciones

Se pensó en la implementación de auto- evaluaciones semanales ya que el entorno virtual Moodle dispone del Módulo Cuestionario lo que permitió diseñar y definir una base de datos de preguntas que pueden ser reutilizadas.

Las expresiones matemáticas en las preguntas se escribieron con lenguaje Latex. Se eligieron preguntas aleatorias, de los siguientes tipos: calculadas, de respuestas incrustadas, de emparejamiento, preguntas objetivas, verdadero/ falso, todas ellas proporcionan una respuesta

inmediata (retroalimentación) de los resultados de los ejercicios.

Reflexiones finales

Este cambio de metodología unido a una revisión de contenidos, permite que los alumnos se involucren más en el aprendizaje de la matemática. El Modelo Pedagógico elegido fomenta el auto-aprendizaje en los estudiantes desde el comienzo de sus estudios universitarios.

El material elaborado y mediado pedagógicamente, o sea la manera de presentar los contenidos, y los ejemplos que caracterizan cada temalo hace fácil de comprender por los estudiantes.La realización de las autoevaluaciones en forma sistemática permite al alumno monitorear su propio aprendizaje.El foro de Dudas y Consultas permite una atención tutorial personalizada y favorece la comunicación multidireccional.

Reconocemos también en algunos estudiantes, que optaron por esta modalidad, la falta de hábitos de estudio que le permitiría lograr un aprendizaje autónomo.

La implementación del Curso de Ingreso Virtual de Matemática a la FACE usando el entorno de aprendizaje Moodle representa una propuesta innovadora, pertinente y acorde con las nuevas tendencias educativas, además de cubrir una necesidad requerida por los aspirantes al Ingreso del interior de la provincia y de ciudades de provincias aledañas que se encuentran en el radio de influencia de UNT.

Referencias Bibliográficas

Área Moreira, M. (2009). *Manual electrónico: Introducción a la Tecnología educativa.* España: Universidad La Laguna. Recuperado de http://manarea.webs.ull.es/wp-content/uploads/2010/06/ebookte.pdf

Barberá, E. y Antoni Badia, J. (2005): El uso educativo de las aulas virtuales emergentes en la educación superior. *Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento, 2*(2). Recuperado de http://www.uoc.edu/rusc/2/2/dt/esp/barbera.pdf.

Bello Díaz, R. (2005). Educación Virtual: Aulas sin Paredes. Recuperado de http://www.educar.org/articulos/educacionvirtual.asp

Cirilo, M. y Molina, M. (2010). El diseño del Aula virtual de Análisis Matemático en la FACE-UNT buscando la calidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje. En *X Coloquio Internacional sobre gestión universitaria de América del Sur.* Argentina: Universidad Nacional de Mar del Plata.

Cirilo, M. y Molina, M. (2012). Análisis de una experiencia en la modalidad B-Learning. En R. Flores (Ed.), Acta Latin*oamericana de Matemática Educativa* 25, 1445-1454. México: Comité

Latinoamericano de Matemática Educativa

Delgado Fernández, M., Solano González, A. (2009). Estrategias didácticas creativas en entornos virtuales para el aprendizaje. *Revista Electrónica Actualidades Investigativas en Educación*, *9*(2), 1-21. Recuperado de

http://revista.inie.ucr.ac.cr/uploads/tx_magazine/virtuales.pdf

García Beltrán, A.; Martínez, R.; Jaén, J. A. y Tapia, S. (2006). La autoevaluación como actividad docente en entornos virtuales de aprendizaje/enseñanza. *RED. Revista de Educación a Distancia*, *5*(6) (Número especial dedicado a la evaluación en entornos virtuales de aprendizaje). Recuperado de http://www.um.es/ead/red/M6

Ortega, J. y Ortega, J. (2004). Lenguaje Matemático: Una Experiencia en los Estudios de Economía de la UCLM. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 2004*(35), 74-87. España: Graó. Recuperado de http://dialnet.unirioja.es/servlet/listaarticulos?tipoDeBusqueda=ANUALIDAD&revistaDeBusqueda=2009&claveDeBusqueda=2004

Ortiz Hernández, E. (2007). La autoevaluación estudiantil. Una práctica olvidada. *Cuaderno de Investigación en la Educación. Centro de Investigaciones Educativas*, 22, 107-119. Puerto Rico: Universidad de Puerto Rico.

Prieto Castillo, D. y van de Pol, P. (2006). *e-Learning, comunicación y educación: el diálogo continúa en el ciberespacio.*. Costa Rica: Radio Nederland Training Centre. Recuperado de

http://recursostic.javeriana.edu.co/diplomado/e_learning_comunicacion_y_educacion.pdf

Yáñez, D.; Cirilo, M. I.; Molina, M. L. (2008).Una Primera aproximación en la Reflexión sobre la Problemática de la Comunicación Matemática. En *VI Jornadas de Economía y Sociedad del Noroeste Argentino*. Argentina: EDUNT

APRENDIZAJE DEL TEOREMA DE PITÁGORAS UTILIZANDO LA ESTRATEGIA DE MODELACIÓN A TRAVÉS DEL USO DE *APPLETS*

María del Rosario Arenas y Lorenza Illanes, Ruth Rodríguez
Tecnológico de Monterrey, Campus Monterrey México
rosarioarenas800@gmail.com, lillanes@itesm.mx, ruthrdz@itesm.mx

Resumen. Este trabajo está enfocado en el aprendizaje del teorema de Pitágoras utilizando la modelación matemática como estrategia de enseñanza; utilizando tres secciones de clase de tres horas cada una, en el periodo académico del mes de febrero de 2013 con alumnos de segundo de secundaria. El objeto del estudio es determinar si la modelación matemática como estrategia de enseñanza del Teorema de Pitágoras con el uso de *applets* geométricos mejora el aprendizaje en los alumnos de segundo de secundaria, dado quecrea un ambiente de aprendizaje favorable en el aula, evidenciando la comprensión en su forma más rigurosa del teorema de Pitágoras y la aplicabilidad que tiene en la cotidianidad, logrando contextualizar el conocimiento mediante situaciones reales, situando al alumno en relación directa con sus preferencias y el mundo que lo rodea, despertando el interés en las nociones básicas de la Geometría, poniendo en evidencia sus aplicaciones en el mundo contemporáneo.
Palabras clave: Pitágoras, modelación, tecnología, matemática educativa
Abstract. This work was focused on learning the Pythagorean theorem using the mathematical modelling as a teaching strategy; using three sections class of three hours each, in the academic period of the month of February 2013 high school students from the freshman year. The object of the study was determined if mathematical modeling and teaching strategy of the Pythagorean theorem with the use of geometric applets there were learning improves in students of a freshman high school year, since it creates a favorable learning environment in the classroom, demonstrating understanding in its stricter form of the Pythagorean theorem and applicability that has on everyday life achieving contextualized knowledge through real situations, placing the student in direct relation to their preferences and the world that surrounds him, arousing interest in the basics of geometry, highlighting their applications in the contemporary world.
Key words: Pythagoras, modeling, technology, educational mathematics

Introducción

En el presente estudio se desarrolla una investigación que tiene como objetivo investigar, si la modelación matemática mejora el aprendizaje del Teorema de Pitágoras, en los alumnos de una institución pública de zona rural de Colombia. Nuestro interés particular es incrementar la capacidad de reflexión, de conceptualización y de comprensión en los alumnos sobre problemas geométricos al tomar estos un papel más activo e independiente en su proceso de aprendizaje (Hitt, 1994). En un primer momento se presenta un resumen de los aspectos teóricos sobre el teorema de Pitágoras, la modelación matemática y la tecnología; en un segundo momento se tiene la metodología, donde se hace una descripción de la manera como se llevó a cabo la investigación; en un tercer momento tenemos el análisis de resultados, donde se ponen de manifiesto todos los hallazgos surgidos en todo el proceso de la investigación y por último se encuentran las conclusiones a las cuales se llegaron después de efectuado el estudio.

Marco teórico

Esta investigación está enmarcada en tres temas: El Teorema de Pitágoras, la modelación matemática y la tecnología, con respecto a este último, se tiene en cuenta uno de sus tres grupos,

los *applets* (Escudero, 1995).

El teorema de Pitágoras, es el legado más representativo de la tradición pitagórica, perteneciente a la base cultural de la humanidad. (González, 2008).Ha sido conocido por las primeras civilizaciones de la humanidad (Mesopotamia, Egipto, India, China), desde un punto de vista práctico. Allman (1976) atribuye su descubrimiento a los egipcios, en lo concerniente a la Geometría de áreas, y al método usado en la disección de las figuras, en el cual los egipcios eran famosos.

El Teorema de Pitágoras, es una relación matemática, de auténtica complejidad, que el estudiante aprende en la formación básica y que brinda, un considerable valor práctico, teórico y didáctico, tanto en su versión aritmético algebraica $a^2 + b^2 + c^2$; como en su versión geométrica (Martínez, 2000).

Burton (1991) sostiene que un diagrama en la Aritmética Clásica de China representa la más antigua demostración conocida del Teorema de Pitágoras, admirada por su simple elegancia, y más tarde expuesta en el Bija Ganita (Strachey, 1813) por el matemático hindú Bhascara Acharya (Strachey, 1813), el punto de partida es una demostración (ver figura 1), la cual reestructurada conduce al teorema de Pitágoras, el autor manifiesta la expresión, sin añadir otra palabra de explicación (Burton, 1991).

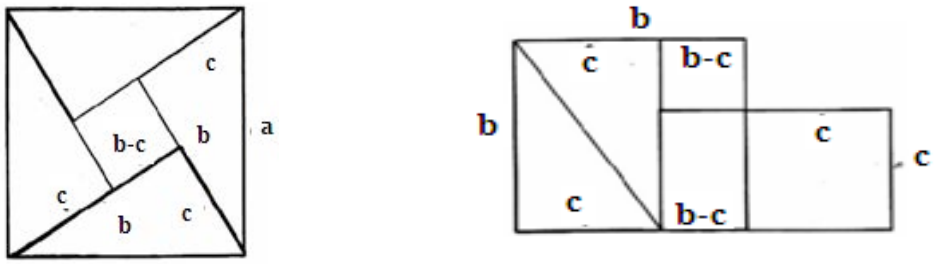


Figura 1. Punto de partida (izquierda) y reestructuración (derecha) de una demostración. Fuente: Burton, D. M. (1991). *The History of mathematics. An introduction*. Dubuque, U. S. A.: Wm.C. BrownPublishers.

La modelación es un proceso que tiene su génesis en la conceptualización de una situación real, utilizando las matemáticas como herramienta de modelación para otras ciencias; en el aula, los alumnos construyeron sus conocimientos, favoreciendo el desarrollo de una matemática funcional en el sistema educativo. La modelación es un puente entre las matemáticas y las experiencias de la vida real; por lo cual es un aprendizaje que contiene un grande apoyo cognitivo. La base de este estudio es una reducción del modelo, de Rodríguez (2007, 2010) a seis etapas de las ocho que consta el modelo quitando Modelo Físico y Resultado Físico.

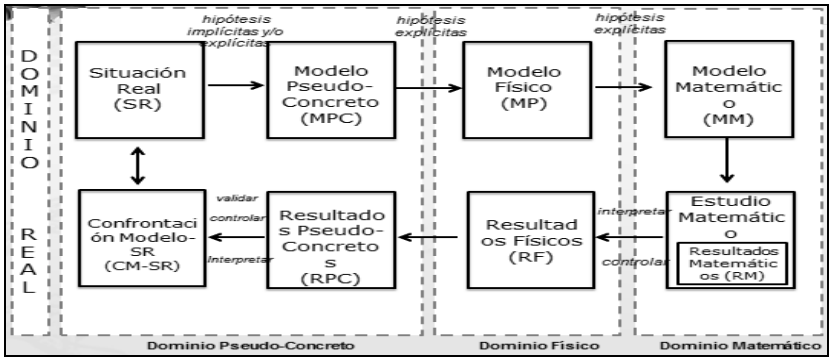


Figura 2. Modelo Matemático. Fuente: Rodríguez, R. (2010). Aprendizaje y Enseñanza de la Modelación: el caso de las ecuaciones diferenciales. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELIME), 13 (4-I), 191-210.

La tecnología es un actor esencial en el aula para trabajar con modelos matemáticos (Jacobini, 2007). Este estudio se centra concretamente en el uso del *applets* (Bishop, 1994) como elementos de las páginas *webs* (Bemers, 1989); su valor educativo es desarrollar un aprendizaje activo (Borromeo, 2006). Los *applets* (Bohigas, Jaén y Novell, 2003), secundan al alumno en el proceso de visualizar las figuras geométricas resultantes de la demostración de este teorema, a través de la modelación, de manera vivencial con el uso de la tecnología (Rodríguez, Quiroz e Illanes, 2013), haciendo participe al alumno se su propio aprendizaje, para darle forma a sus creencias y actitudes en la importancia del área para sí mismo y su comunidad.

Metodología

El estudio la Modelación Matemática (Rodríguez, 2010) como estrategia de enseñanza del teorema de Pitágoras mediante el uso de *applets*, se fundamenta en una investigación cualitativa, la cual se apoyó en el estudio de casos (Hernández, Fernández, y Baptista, 1994), como metodología de investigación, dado que la muestra es pequeña.

Para lograr el objetivo propuesto en la Modelación Matemática el teorema de Pitágoras, se emplearon tres actividades que comprenden seis de las ocho etapas de la Modelación Matemática (Rodríguez, 2010).Así mismo para la recolección de los datos se utilizó la observación participante e intencionada, dado que el investigador fue como otro miembro del grupo donde cumplió con el rol de facilitador durante todo el proceso, los datos observados se registraron en la bitácora. También se contó con un observador de clase para el grupo en general, empleando 10 aspectos relacionados con el comportamiento del grupo y del investigador, en el curso de la experimentación.

La prueba piloto por su parte se conformó por dos pruebas planteadas a través de dos problemas, uno el problema dentro de un *pretest*, cuyo objetivo era hacer un diagnóstico sobre los

conocimientos previos que el alumno posee sobre el tema del teorema de Pitágoras. El segundo problema fue dentro del *posttest*, su fin consistió en verificar los conocimientos adquiridos del teorema de Pitágoras. La experimentación se aplicó en tres secciones, cada una de ellas con una intensidad de tres horas.

Análisis de resultados

En la etapa inicial con la actividad 1 (ver figura 3), los alumnos presentan el más bajo rendimiento, demostrando dificultad para leer e interpretar, la situación planteada. El mejor rendimiento fue la del A5, en la actividad 1 la totalidad de los alumnos expresan interés por la geometría frente a su aplicación.

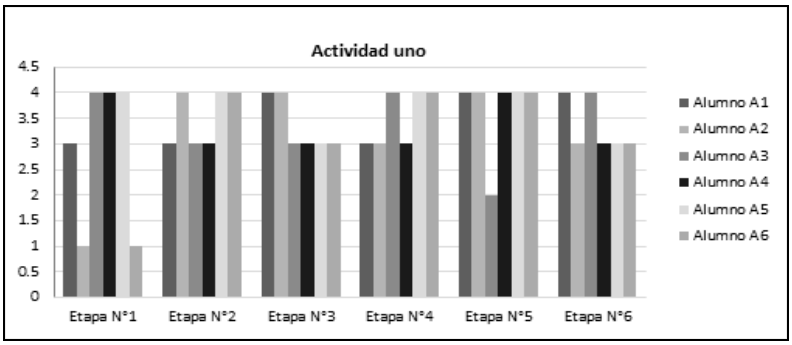


Figura 3. Actividad 1.

Se continúa con la problemática de la etapa 1 en la actividad 2 (ver figura 4); el mejor rendimiento que se estuvo en la etapa 2, en donde se demostró especial interés en la construcción del gráfico de la situación geométrica y se identificó sus partes.

En la actividad 3 (ver figura 5), se pone de manifiesto la superación de los logros, en especial en la etapa 1, donde se presentó mayor dificultad. Las etapas de mejor rendimiento fueron la cinco y la seis, en su mayoría los alumnos alcanzan a identificar los datos necesarios para darle solución a la situación matemática de triángulos rectángulos, aplicando el teorema de Pitágoras.

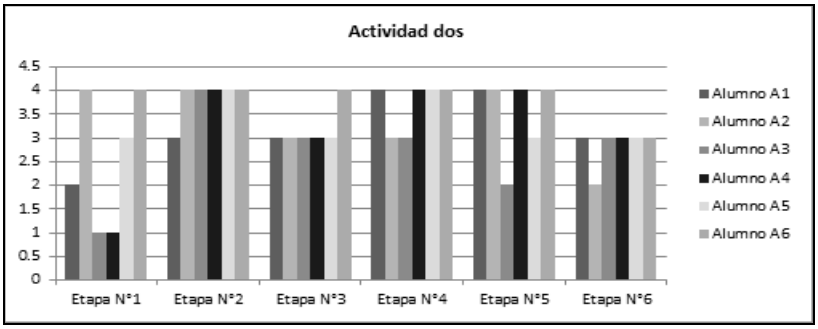


Figura 4. Actividad 2

En las tres actividades se refleja la habilidad de los alumnos en el uso de la tecnología, en la forma como manipulan los *applets* geométricos; además se observó que los alumnos no son hábiles cuando se le solicita escribir un procedimiento pero si en el momento de aplicarlo, obteniendo muy poco progreso en este aspecto durante todo el proceso.

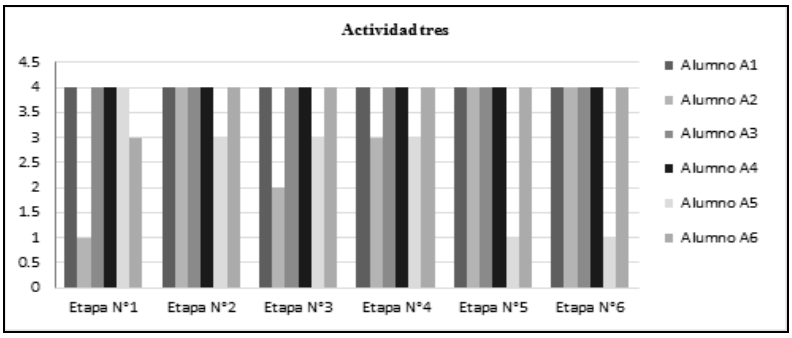


Figura 5. Actividad 3.

En la figura 6. Se hace una comparación de los rendimientos de los seis alumnos en los problemas pretest (diagnóstico) y postest (verificar los conocimientos). De acuerdo a las seis etapas de Modelación Matemática (Rodríguez, 2010).

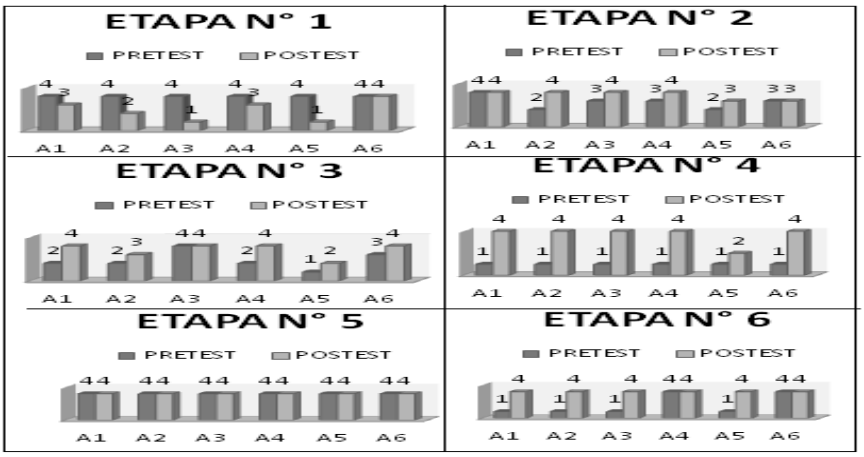


Figura 6. Análisis de los Problemas

En el gráfico (ver Figura 6), se contempla que en el problema *pre-test*, los alumnos presentaron un rendimiento muy bajo, pero en el *post-test*, aunque en la etapa uno obtiene el resultado más bajo, por la dificultad de comprender los datos de una situación cuando están expuestos de una forma implícita, en las etapas N°5 y N°6 subió notablemente su rendimiento siendo estas las etapas con un mejor resultado.

Número	Concepto
1	Dominio de los conocimientos previos
2	Comprenden instrucciones y utiliza apropiadamente los materiales

3	Motivación con los materiales y medios utilizados
4	Habilidad para trabajar en grupo
5	Receptividad para interactuar con los materiales, medios y el profesor
6	Trabajo autónomamente
7	Aprovechamiento de los materiales y medios utilizados
8	Expone estrategias para llegar a la solución de la tarea.
9	El docente explica los algoritmos convencionales
10	Se logró que por lo menos el 90% de los alumnos asimilan el contenido

Figura 7. Aspectos de la hoja de observador de clase

En la hoja del observador de clase (ver figura 7), se hizo una síntesis de las observaciones reseñadas en la bitácora, en los gráficos (ver figuras 8, 9 ,10) se visualizan la explicación de parte del docente sobre los algoritmos, aprovechamiento y receptividad para involucrarse con el material, además de la motivación que los alumnos sienten al interactuar con este, obteniendo su mayor puntaje en las tres actividades. También se ve que el trabajo autónomo fue uno de los aspectos que presento mayor progreso.

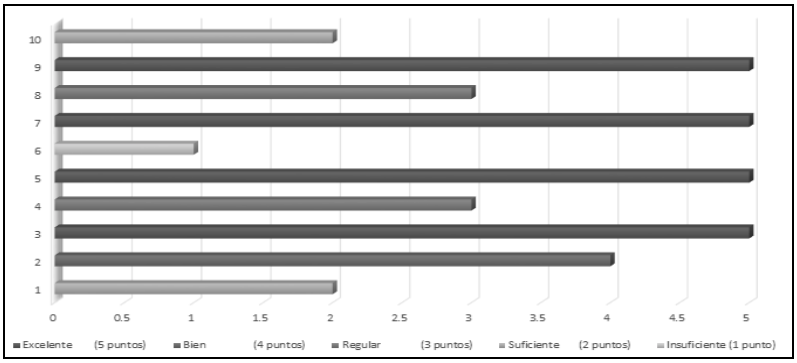


Figura 8. Hoja de observador de clase. Actividad 1.

Conclusiones

En la investigación se constató que la modelación (Rodríguez, 2007, 2010) además de ser un puente entre las matemáticas, y las experiencias de la vida cotidiana de los alumnos, proporciona un ambiente de aprendizaje provechoso en el aula.

Los alumnos desde el inicio de la experimentación manifestaron dominio y agrado al manipular los *applets* geométricos, así como en hacer las construcciones de las situaciones geométricas; aspecto que facilitó su desempeño en todas las actividades planteadas en la experimentación. Así mismo se percibió una gran habilidad en el momento de interactuar con la tecnología de *applets* geométricos; creando un ambiente de aprendizaje favorable en el aula. El estudio presenta evidencia de que los alumnos comprendieron en su forma más rigurosa el Teorema de Pitágoras y el uso que éste tiene en su cotidianidad, siendo una forma de lograr contextualizar el

conocimiento de situaciones sobre problema reales representados mediante modelos matemáticos, que se manifiestan cuando surge la necesidad de responder a preguntas específicas en situaciones reales.

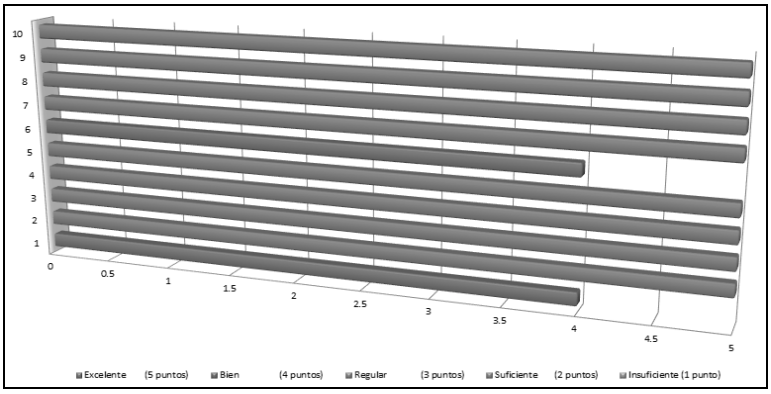


Figura 9. Hoja de observador de clase. Actividad 2

Si se desea replicar o extender este estudio es importante ver a la enseñanza de la Geometría como una resolución de problemas dinámicos más que estáticos propiciando enriquecer los conceptos y las imágenes conceptuales de los objetos geométricos que estudian. También es importante aplicar la modelación como estrategia de enseñanza en el aula de matemáticas, dado que tiende a desarrollar en los alumnos diferentes habilidades: de visualización, de dibujo, de comunicación, de razonamiento y de aplicación.

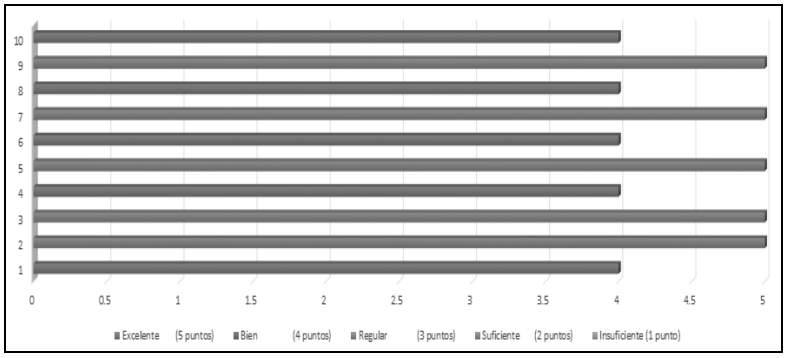


Figura 10. Hoja de observador de clase. Actividad 3.

En este escrito se estableció que la modelación matemática (Rodríguez, 2007, 2010) mejora el aprendizaje del Teorema de Pitágoras, en los alumnos de una institución pública de zona rural de Colombia

Referencias bibliográficas

Allman, G. J. (1976). *Greek Geometry from Thales to Euclid*. New York: Arno Press.

Bemers, L. (1989). Information Management: A Proposal. *Information Management: A Proposal*.

Recuperado el 30 de Enero de 2010 de http://cds.cern.ch/record/1405411/files/ARCH-WWW-4-010.pdf

Bishop, A. (1994). Implicaciones didácticas de la investigación matemática. *Antología en Educación Matemática* (Compiladores: Cambray R., Sánchez E. y Zubieta G.).

Bohigas, X., Jaén, J. y Novell, M. (2003). Applets en la enseñanza de la física. *Enseñanza de las Ciencias*: *Innovaciones Didácticas*, 21(3), 463-472. Madrid, España.

Borromeo, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *Zentralblattfür Didaktik der Mathematik* 38(2), 86-95

Burton, D. M. (1991). *The History of mathematics. An introduction*. Dubuque, U. S. A.: W. C. BrownPublishers.

González, P. (2008). El teorema llamado de Pitágoras. Una historia geométrica de 4.000 años. *Revista SIGMA*.32, 103-130

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, L. (2006). *Metodología de la investigación* (3a. ed.). México: McGraw Hill Interamericana.

Hitt, F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículo. *Educación matemática*. 10 (2), 23-45.

Jacobini, O. R. (2007). A modelagem matemática emsuadimensão crítica: novoscaminhos para conscientização e ação políticas. *V Conferência Nacional sobre Modelagem* e *Educação Matemática. Anais.* Ouro Preto, Brasil.

Martínez, A. (2000). Teorema de Pitágoras: originalidad de las demostraciones de E. García Quijano. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 3(2), 277–296, 05–08.

Rodríguez, R. (2007). *Les équations différentielles comme outil de modélisation en Classe de Physique et des Mathématiques au lycée : une étude de manuels et de processus de modélisation en Terminale S*. Tesis de doctorado. Escuela Doctoral de Matemáticas, Ciencias y Tecnologías de la Información. Universidad Joseph Fourier, Grenoble, Francia. Recuperado el 30 Enero de 2010 de:

http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/29/22/86/PDF/TheseRuthRdz.pdf

Rodríguez, R. (2010). Aprendizaje y Enseñanza de la Modelación: el caso de las ecuaciones diferenciales. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELIME), 13 (4-I), 191-210.

Rodríguez, R., Quiroz, S. e Illanes, L. (2013). Competencias de modelación y uso de tecnología en Ecuaciones Diferenciales. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (ALME 26).*

Belo Horizonte, Brasil: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Stracy, E. (1813). *Bija ganita or The algebra of the Hindus.* Londres: W.Glendinning

CONSTRUCCIÓN DE LA GRÁFICA CARTESIANA APOYADOS EN APLICACIONES MULTIMEDIA EN ESCUELAS SECUNDARIAS

Carlos Espinosa Marchán, Rolando Roa Vásquez y Celma Espinosa Marchán
Escuela Secundaria Técnica No. 213 "Bandera Nacional" de Iguala de la Independencia, Guerrero, Universidad Autónoma de Guerrero, México
carlanguix@hotmail.com roles.r@hotmail.com celmaem@hotmail.com

Resumen. El presente trabajo es parte de una investigación en curso que pretende dar cuenta de las primeras construcciones de gráficas cartesianas en niños de 12 y 13 años, así como elaborar materiales multimedia y diseño de aprendizaje para ello. Se desarrolla en el marco del proyecto de Laboratorios Virtuales de Ciencias que tiene la intención de incorporar las prácticas de modelación al sistema escolar, particularmente en las escuelas Secundarias y de Nivel Medio Superior del Estado de Guerrero, México. Se reporta la experiencia de un grupo de estudiantes que participan en un diseño de aprendizaje con la intención de construir el plano y la gráfica cartesiana utilizando software didáctico elaborado por nosotros.
Palabras clave: software didáctico, grafica cartesiana
Abstract. This paper is part of an ongoing research that intends to give an account of the first construction of Cartesian graphs with children 12 and 13 years old, and to develop multimedia materials and learning designs for it. It is developed in the framework of the virtual science laboratory that intends to incorporate modeling practices into the school systems, particularly in High school and middle school level education in the State of Guerrero, Mexico. The report details the experience of a group of students participating in a learning design tutorial with the intention of building the plane and Cartesian graphs, utilizing the didactic software developed by us.
Key words: didactic software, cartesian graphs

Introducción

El proyecto de Laboratorios Virtuales de Ciencias tiene la intención de incorporar las prácticas de modelación al sistema escolar, particularmente en las escuelas Secundarias y de Nivel Medio Superior del Estado de Guerrero, México. Una de las características específicas de este proyecto es que los estudiantes regularmente participan en puestas en escena de diseños de aprendizaje basados en prácticas de modelación, los estudiantes experimentan con diversos fenómenos y construyen modelos para predecirlos, comprenderlos, modificarlos, en suma, para intervenir en ellos.

En puestas en escena con estudiantes de 12 y 13 años de hace diez años, de 2002 (Méndez, 2008; Arrieta, 2003), grafican los datos con gráficas cartesianas, ahora los estudiantes lo hacen con gráfica de barras. Es decir, en menos de diez años la gráfica cartesiana ha sido desplazada por la gráfica de barras.

Una hipótesis es que este cambio en el procedimiento de los estudiantes para graficar se debe a los cambios propuestos en el currículo de la escuela secundaria (Educación Básica. Secundaria. Plan de estudios, 2006) donde proponen abordar la estadística de forma relevante.

Reportamos la experiencia con un grupo de estudiantes de primer año de la escuela secundaria mexicana que participa en la puesta en escena del diseño de aprendizaje. Antes de iniciar la puesta

en escena se pide a los alumnos que localicen puntos en el plano cartesiano cuando se les proporciona sus coordenadas, las respuestas son muy variadas y se percibe la influencia de las gráficas de barras.

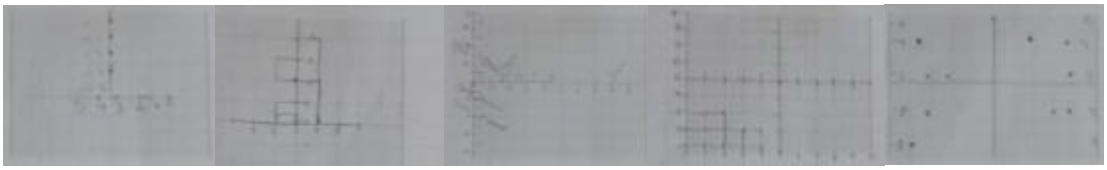


Figura 1. Resultados de alumnos de primer grado de secundaria al graficar en el plano cartesiano

Cuando participan en la puesta en escena del diseño e interactúan con el software los actores juegan y compiten entre ellos. Después de la interacción se les pide, de nuevo, localícenlos puntos en el plano y su respuesta es exitosa. En este reporte se muestran evidencia de ello.

Marco teórico

La perspectiva teórica que sostenemos es la Socioepistemología y la línea de investigación a la cual se adscribe el presente trabajo es la que discurre acerca de las prácticas sociales en relación a la construcción de los conocimientos matemáticos.

Metodología

La ingeniería didáctica se constituye como una ***metodología de investigación*** que se aplica tanto a los productos de enseñanza basados o derivados de ella, pero también como una metodología de investigación para guiar las experimentaciones en clase. Su sustento teórico proviene de la Teoría de situaciones didácticas (Brousseau, 1997) y la teoría de la transposición didáctica (Chevallard, 1991), que tienen una visión sistémica al considerar a la didáctica de la matemáticas como el estudio de las interacciones entre un saber, un sistema educativo y los alumnos, con objeto de optimizar los modos de apropiación de este saber por el sujeto (Brousseau, 1997).

El proceso experimental de la ingeniería didáctica consta de cuatro fases: Análisis preliminares, análisis a priori, experimentación y análisis a posteriori.

Resultados

Para elaborar tal diseño, es necesario distinguir los diferentes juegos de gráficas y las prácticas que los sustentan. Se ha reportado como se presenta confusión entre las trayectorias de un móvil y la gráfica cartesiana distancia-tiempo (Arrieta, 2003), de la misma manera se presentan confusiones entre la gráfica de barras y las gráficas cartesianas. Esta confusión solo es posible esclarecerla en el terreno de las prácticas que sustentan cada gráfica. Así es que las gráficas de barras están

sustentadas por la práctica de "levantar columnas de fichas", es decir de "hacer columnas de datos", la trayectoria en "el desplazamiento de un móvil en el plano", la gráfica de pastel "en el reparto de un solo pastel entre varios comensales" y la gráfica cartesiana en la co-variación, es decir, en la relación de dos variables.

Esta distinción es crucial para la elaboración del diseño, pues el diseño estaría basado en la práctica de relacionar dos variables en el plano. Una característica propia de este diseño es que utilizaría para su interacción aplicaciones multimedia apoyadas en juegos tradicionales que hagan del aprendizaje una actividad lúdica para los estudiantes.

Se ha elaborado un software atendiendo los requerimientos del diseño de aprendizaje, basado en prácticas de co-variación en el plano. Estas aplicaciones multimedia son "El Plano Cartesiano", "En busca del tesoro", "Buscando la Salida" y "Serpientes y Escaleras".

El primer software didáctico que presentamos es el del El Plano cartesiano el cual consiste en mover la mosca por el plano cartesiano, nos va indicando la posición y en donde se encuentra ubicada.

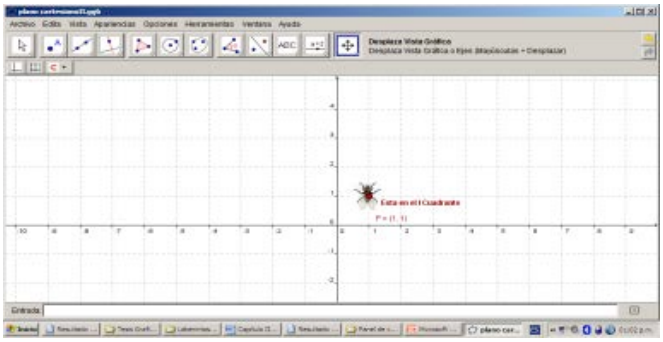
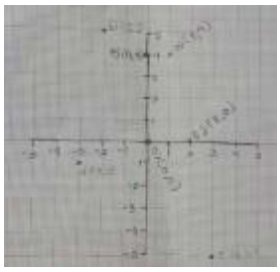
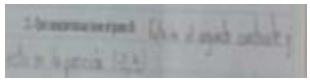
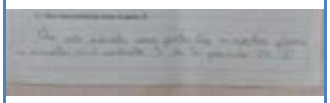


Figura 2. Simulador del plano cartesiano.

Actividades Propuestas	*Análisis A priori*	*Análisis A posteriori*	*Validación*
	Se espera que los alumnos no tengan ninguna dificultad al crear el plano cartesiano en el papel milimétrico y ubicar los puntos ya que al explorar el simulador observaron cómo está formado el plano cartesiano.		Como podemos observar coincide el análisis a priori con él a posteriori los alumnos contestan correctamente las preguntas de

	Se encuentra ubicado en el segundo cuadrante. El número de las abscisas es negativo y el de las ordenadas es positivo.		la primera puesta en escena.
	Se encuentra ubicado en el tercer cuadrante. Ambos números son negativos.		

Dentro de esta puesta en escena se puede rescatar que los alumnos en educación primaria el plano cartesiano lo veían en un solo cuadrante y ubicando cuadras como se muestra en la figura 3. Argumentando cual era la ruta más corta para llegar de la casa de Juanito a la casa de Pepe.

Figura 3 Ejemplo del plano cartesiano en primaria

Puesta en escena En busca del tesoro

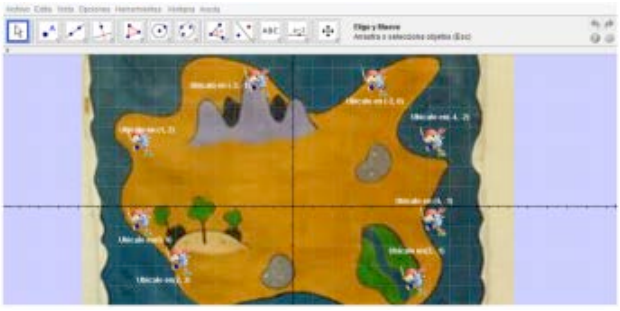
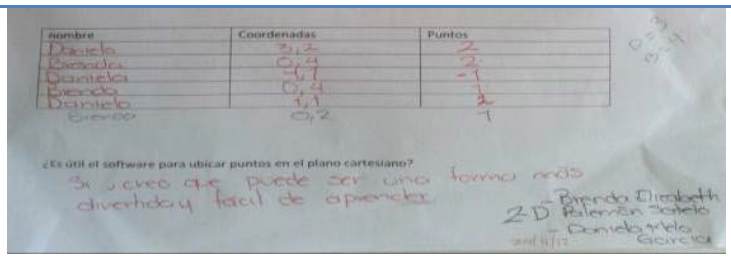


Figura 4. Pantalla inicial del software "Buscando el Tesoro"

Actividades Propuestas
Consiste en mover los piratas a la coordenada que le indica, si lo ubica mal se le descuenta medio punto, si encuentra un pirata se le descuenta un puntos, si aparece un mapa se le da un punto extra y si sale el tesoro se le dan dos puntos extras.
Análisis a priori
Se espera que los alumnos logren llevar al pirata a la coordenada que le corresponde y construyan su tabla para registrar cada uno de sus movimientos.
Análisis a posteriori



Validación

Los alumnos juegan, se divierten y logran ubicar los piratas en el lugar que les corresponde, construyen su tabla de datos suman sus puntos y para esta puesta en escena resulta ganadora Brenda. Al confrontar el análisis a priori con el análisis a posteriori coinciden y por lo tanto es válido este diseño de aprendizaje Buscando el Tesoro.

Nota: Cada vez que se abre el simulador las coordenadas de los piratas se generan aleatoriamente por lo tanto al aplicarlo en dos computadoras al mismo tiempo los puntos son diferentes y no pueden copiar los alumnos la ubicación de los pirata

Puesta en escena Buscando la salida:

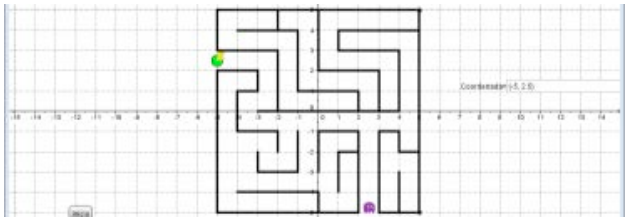


Figura 5. Pantalla inicial del software "Buscando la salida"

Actividades Propuestas

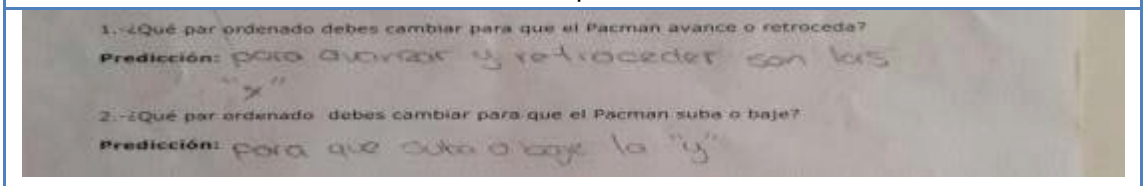
Consiste en llevar el pacman a donde se encuentra el fantasma, los alumnos aprenden a ubicar puntos en el plano cartesiano teniendo un mayor grado de dificultad, pueden colocar decimales, fracciones, raíces e identifican que deben mover para el pacman suba o baje, camine o retroceda.

Análisis a priori

1.-Predicción: *los actores escribirán que tienen que mover las abscisas o el eje x para que se mueva hacia adelante o hacia atrás.*

2.-Predicción: *se espera que los actores escriban que para que suba o baje necesitan mover las ordenadas o el eje y.*

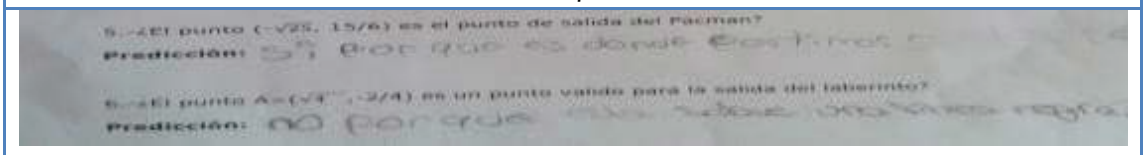
Análisis a posteriori



Análisis a priori

5.- Predicción: *Se espera que los actores realicen cálculos para determinar la raíz cuadrada de 25 y den como resultado 5, y convierta a decimal la fracción dando como resultado 2.5. y determinen que el punto es igual a(-5,2.5)*

6.- Predicción: *Se espera que los actores realicen cálculos para determinar la raíz cuadrada de 4*

y den como resultado 2, y convierta a decimal la fracción dando como resultado -0.5 que si es un punto valido en la resolución del laberinto.
Análisis a posteriori

Validación
Cumple el análisis a priori con él a posteriori, pero presenta mayor dificultad en el desarrollo de esta puesta en escena ya que ocupan el cálculo de raíces cuadradas, división o fracciones, en la pregunta 6 al dividir -2/4 colocan como resultado -2 y por eso argumentan que cae sobre una línea negra.

Puesta en escena Serpientes y Escaleras.

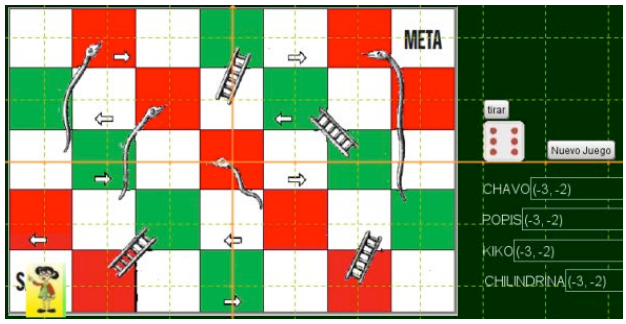


Figura 6. Pantalla inicial del software "Buscando el Tesoro"

Durante la puesta en escena de este software didáctico los alumnos no tienen ningún problema en ubicar los puntos y mover a sus personajes, ellos juegan, se divierten, hacen uso de las matemáticas, al final del juego gano uno de los alumnos que no son muy destacados en la clase, argumentando uno de los más destacados que no se valía porque había ganado el que menos sabia en este juego, los cuestione preguntándoles a que se debía eso y respondieron que era cuestión de azar por ser un juego, que si lo repetían no ganaría el mismo.

Conclusiones

Para comprobar el aprendizaje de los alumnos se desarrolló la práctica presencial con una lona del plano cartesiano y salimos al patio de la escuela para que los alumnos ubicaran los puntos en el plano cartesiano lanzando unos dados rosa y naranja para representar el eje de las ordenadas y el de las abscisas. Obteniendo los siguientes resultados.

Figura 7. Alumnos ubicando puntos en el plano cartesiano de manera presencial en una lona

Durante esta puesta en escena los alumnos comprenden bien la ubicación de puntos en el plano cartesiano, aprenden y se divierten entre ellos mismos, toman sus conclusiones, les gusto bastante la aplicación de esta práctica y reforzaron lo aprendido con las puestas en escena anterior.

Los estudiantes construyen el plano cartesiano y las gráficas cartesianas en interacción con sus compañeros, interactuando con las aplicaciones específicas que hemos desarrollado.

En términos generales el análisis a priori coincide con el análisis a posteriori. Se puede observar que las respuestas de los estudiantes coinciden con las predicciones o son muy aproximadas en lo establecido. Estamos convencidos que los estudiantes tienen mucho que aportar, seguir trabajando y poniendo en práctica la utilización del laboratorio virtual de ciencias, en donde experimenten, simulen y lo hagan presencial para comprobar y comprender mejor, tener una mejor argumentación y salir de las practicas tradicionalistas y formar alumnos críticos, analíticos y reflexivos que sean capaces de enfrentar y resolver problemas de la vida cotidiana que se les presenten.

Referencias bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Artigue, M. Et. Al. (1995). *Ingeniería Didáctica en educación Matemática: Un esquema para la investigación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (1998). Ingeniería didáctica. En Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (Eds). *Ingeniería didáctica en educación matemática*:88-96. Colombia: Una empresa docente.

Brousseau, G. (1994). Los diferentes roles del maestro. En Parra, C. et al. *Didáctica de Matemáticas. Aportes y reflexiones: 65- 95.* Argentina: Paidós Educador.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Kluwer Academic Publishers -Mathematics Educations Library, Vol. 19, Holanda.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica: Del saber sabio al saber enseñado*. Argentina: Editorial Aique.

López, C. (2010). *Las prácticas de modelación virtual, un estudio intercultural.* Tesis de Maestría no publicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero. México.

Méndez, M. (2008). *La experiencia como la evolución de las prácticas: La experiencia de modelar linealmente situaciones análogas.* Tesis de Maestría no publicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero. México.

Educación Básica Secundaria. *Plan de estudios, 2006*. Recuperado el 13 de enero de 2011 de http://telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/formacion/planestudios2006.pdf

Educación Básica Secundaria. *Plan de estudios, 2011*. Recuperado de http://basica.sep.gob.mx/reformasecundaria/

Espinosa, C. (2013). *Simulador del Plano Cartesiano.* Recuperado el 13 de junio del 2013 de https://www.dropbox.com/s/6vdydlx13kuwaxk/El_plano_cartesiano.html

Espinosa, C. (2013). *Simulador de en Busca del Tesoro.* Recuperado el 13 de junio del 2013 de https://www.dropbox.com/s/h8bvnxzml28yr5i/El_tesoro.html

Espinosa, C. (2013). *Simulador del Laberinto.* Recuperado el 13 de junio del 2013 de https://www.dropbox.com/s/e55s2334z9fzaqk/laberinto.html

Espinosa, C. (2013). *Simulador de Serpientes y Escaleras.* Recuperado el 13 de junio del 2013 de www.dropbox.com/s/zud1k4c5m3i7hl9/serpientes_y_escaleraschavo.html

CONTRASTE ENTRE EL "ESCENARIO DIDÁCTICO" Y EL ESCENARIO VIRTUAL: INTERACCIÓN ENTRE LA MATEMÁTICA EDUCATIVA Y LA COMPUTACIÓN

Eliza Minnelli Olguín Trejo y Marta Valdemoros Álvarez
CINVESTAV- IPN. México
minnelli_angel@yahoo.com.mx, mvaldemo@cinvestav.mx

Resumen. El trabajo interdisciplinario realizado a la par con Nuria y Luis, estudiantes de la Escuela Superior de Computación (ESCOM-IPN), propició que ellos recrearan en un ambiente computacional el escenario didáctico El Restaurante. Aplicarlos permitió realizar el contraste entre el "escenario didáctico" y el escenario virtual. Se trabajó con un grupo de cuarto grado de primaria en la ciudad de México. Las preguntas de investigación fueron: ¿En qué medida la intervención en la enseñanza-aprendizaje de las fracciones, en situaciones de reparto, a través del "escenario didáctico" y el escenario virtual, ayuda a la adquisición de nociones necesarias para la comprensión de la fracción?, ¿cómo evolucionaron las primeras ideas de identificación de todos discretos y continuos, el reparto, la relación parte-todo, la partición, ideas intuitivas de orden y equivalencia?.
Palabras clave: escenarios didácticos, escenarios virtuales, fracciones
Abstract. The interdisciplinary work performed jointly with Nuria and Luis, students from the School of Computing (ESCOM-IPN), led them in a Computational recreate the Restaurant educational scenario. What allowed for the contrast between the educational scenario and the virtual one. We worked with a group of fourth grade in Mexico City. The research questions are how much involvement in teaching and learning of fractions, and sharing situations through "learning scenarios" and the virtual, helps the acquisition of notions necessary for understanding of fraction?, how evolved the first ideas of identifying discrete and continuous wholes, sharing, the part-whole relationship, partition, intuitive ideas of order and equivalence?.
Key words: teaching scenarios, virtual scenarios, fractions

Introducción

El problema de investigación del presente reporte es el contraste entre el "escenario didáctico" El restaurante y el escenario virtual designado con el mismo nombre, producto de la interacción entre la matemática educativa y la computación. Para realizar el diseño del "escenario didáctico" partimos reconociendo las dificultades en la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones. De acuerdo con los datos obtenidos de los profesores, las principales dificultades de sus estudiantes fueron al resolver problemas donde abordaron la fracción, se debió a que no tuvieron claro el significado del numerador y el denominador y su relación, lo que propició que los estudiantes dieran respuestas numéricas incorrectas, sus estrategias de partición y reparto carecieron de equidad o exhaustividad y no comprendieron la equivalencia.

Al realizar la entrevista grupal a los profesores, advertimos que las dificultades que presentaron los niños son análogas a las que se observaron en los docentes. Lo anterior dio pauta para realizar el diseño del "escenario didáctico" El restaurante; a través del reparto se abordó la relación parte-todo, las estrategias de partición y la equivalencia entre fracciones, ya que son nociones necesarias para la comprensión de la fracción. El trabajo interdisciplinario realizado a la par con Nuria y Luis, estudiantes de la Escuela Superior de Computación (ESCOM-IPN), permitió que ellos recrearan en un ambiente computacional el escenario didáctico El Restaurante. Se decidió trabajar el escenario

virtual El restaurante (Ávila y Martínez, 2012), como una actividad complementaria, a modo de confrontarlo con el "escenario didáctico".

Las preguntas de investigación son: ¿En qué medida la intervención en la enseñanza-aprendizaje de las fracciones, en situaciones de reparto, a través del "escenario didáctico" y el escenario virtual, ayuda a la adquisición de nociones necesarias para la comprensión de la fracción?, ¿cómo evolucionaron las primeras ideas de identificación de todos discretos y continuos, el reparto, la relación parte-todo, la partición, ideas intuitivas de orden y equivalencia?

Marco teórico

La enseñanza de las matemáticas debe apegarse a la realidad de tal modo que el conocimiento sea significativo para el niño y basado en la solución de problemas del mundo real; por lo tanto, se deben diseñar situaciones concretas para que el estudiante elabore sus propios significados. La creación del modelo de una situación real permitiría que el alumno investigue la situación y lo llevaría a aplicar dicho modelo en la solución de otros problemas (Streefland, 1991, 1993, Goffree, 2000).

El rol del maestro es el de un guía y mediador entre el niño y la cultura, a la luz de los conocimientos previos que reelaboran y el nuevo que construyen los estudiantes en torno a los contenidos que se enseñan. (Streefland, 1993, Solé y Coll, 1999). El docente debe considerar cómo aprenden los alumnos y cómo llegan a comprender un contenido escolar, por lo tanto se espera que planeen la creación de un ambiente adecuado al pensamiento de sus estudiantes en el que haya confrontación de ideas entre los niños y se estimule la argumentación (Kamii,1994). Schwarz, Hershkowitz y Azmon (2006) señalan que el salón de clase tiene el potencial para practicar las propuestas argumentativas a través de las interacciones eventualmente dirigidas hacia la construcción del conocimiento.

Perera & Valdemoros (2007) mencionan que a través de los problemas de reparto, los estudiantes lograron manifestar expresiones simbólicas de fracción para nombrar la parte del todo repartido, lo que permitió establecer la relación de orden y equivalencia entre las partes fraccionarias obtenidas en dos repartos diferentes, reconociendo dicha relación mediante la percepción de patrones que los estudiantes construyeron, ejemplificándolos con diferentes fracciones para mostrar la misma cantidad.

En cuanto a la "enseñanza experimental", Perera & Valdemoros (2007, 2009a, 2009b) utilizaron un programa de enseñanza exploratorio, con un enfoque constructivista, en el cual se promovió el desarrollo intelectual de los niños, habilitándolos para que ellos mismos construyeran sus propios conocimientos con base en sus experiencias cotidianas. Las actividades fueron realizadas

fundamentalmente en torno a varios "escenarios didácticos" que representaban distintos espacios o ámbitos de aplicación de las fracciones, propiciando un ambiente de interacción entre compañeros donde hubo intercambio de ideas, discusión sobre sus puntos de vista, el reconocimiento de errores, lo que permitió el avance en sus conocimientos favorecidos por la reflexión de sus trabajos.

El aprendizaje puede estar apoyado con entornos virtuales, pues no se entiende cómo una mera traslación o transposición del contenido externo a la mente del alumno, sino como un proceso de (re)construcción personal de ese contenido. Es esencialmente, seguir de manera continuada el proceso de aprendizaje que el docente desarrolla y ofrecerle los apoyos y soportes que requiera cuando sean necesarios. La ayuda educativa ofrecida por el profesor es el elemento que debe tratar de facilitar esas formas óptimas de construcción. Algunas de sus implicaciones al utilizar entornos virtuales es que incluye restricciones y potencialidades tecnológicas determinadas, que impiden, dificultan, permiten o promueven –entre otras posibilidades– la realización de determinadas actuaciones y la adopción de ciertas formas de organización de la actividad conjunta y no de otras, por parte de sus usuarios. Por lo que los entornos virtuales permiten o promueven ciertas formas de enseñar y aprender (Onrubia, 2005).

Método

Escenario: El estudio se realizó en una escuela perteneciente al sistema público, localizada dentro del área urbana de la Ciudad de México.

Sujetos: La edades de los estudiantes oscilaban entre los 9 y 10 años y cursaban el cuarto grado de primaria.

Los instrumentos metodológicos:

- Entrevista grupal para maestros

Para indagar acerca de las dificultades que han tenido al diseñar y desarrollar una clase de fracciones. Además de puntualizar las dificultades que han observado en los alumnos al enfrentarse a actividades relacionadas con fracciones.

- Cuestionario para los niños

Que contuvo problemas de reparto donde se admiten una interpretación continua o discreta del todo. Con el propósito de conocer las ideas, nociones, conocimientos previos y estrategias empleadas por los niños en la resolución de problemas, en situaciones de reparto.

- Sesiones de enseñanza

Desarrollo del "escenario didáctico" El restaurante, a través del reparto, se abordó la relación parte-todo, las estrategias de partición y la equivalencia entre fracciones; ya que son nociones necesarias para la comprensión de la fracción. Los alumnos fueron protagonistas, se organizó el grupo en 5 mesas: a) mesa 1 para 2 personas, se repartió 1 pizza, b) mesa 2 de 8 personas, se les entregó 2 pizzas y después 2 más, c) mesa 3 de 6 personas, se repartió 2 pizzas y después 1 más, d) mesa 4 para 4 personas, se dividió 1 pizza, e) mesa 5 de 3 personas que compartirán 1 pizza.

El escenario virtual El restaurante (Ávila y Martínez, 2012), tuvo 3 actividades, en cada una se pidió resolver un problema de reparto. Los todos continuos a repartir ya estaban divididos en doceavos o en cuartos, suponemos que los creadores del sistema virtual pensaron que con ello se facilitaba el reparto y a ellos, la programación.

Los problemas fueron: A) Beto y Nancy invitaron a comer a la familia Franco [Sra. Laura, el Sr. Noé, sus hijos Paty y Javier] al restaurante, de postre repartieron en partes iguales una barra de chocolate y 18 galletas, ¿cuánto comió cada persona de las galletas? B) La familia Franco fue a comer a un restaurante. Al llegar sólo les pudieron dar dos mesas para 2 personas cada una, las cuales no podían mover. De postre les dieron una barra de chocolate por mesa. ¿Cuánto comió cada uno del chocolate? C) La familia Franco decidió ir a desayunar al restaurante, al llegar se encontraron con dos amigos Beto y Nancy. A la familia Franco los sentaron en una mesa para cuatro personas. Pidieron dos pasteles que compartieron en partes iguales. A los amigos los sentaron en una mesa para dos personas y pidieron un pastel para compartirlo entre los dos. ¿Quién comió más pastel, Paty o Nancy? Los problemas anteriores fueron tomados de la investigación realizada por Olguín (2009). En el monitor se observaron objetos que representaron cada situación de los problemas (Figura 1).

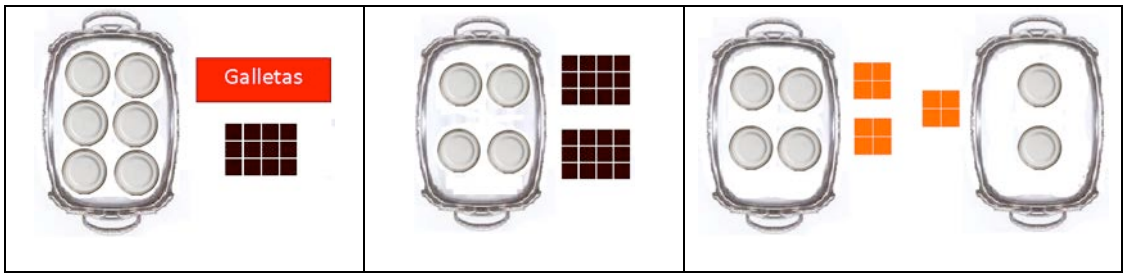


Figura 1. Imágenes que mostró el monitor en cada actividad del escenario virtual, a la izquierda la actividad 1, al centro la 2 y a la derecha la actividad 3.

Validación: se realizó la triangulación de métodos y de tareas para observar el contraste entre diferentes momentos del trabajo de campo de la investigación, con el objetivo de verificar las tendencias susceptibles de detección e incrementar la validez de los resultados del estudio. Lo anterior hace que la validación sea de carácter mixto.

Análisis de resultados

En la entrevista grupal que se les realizó a los maestros manifestaron que al trabajar con fracciones las dificultades de sus estudiantes se presentaron al dar la respuesta numérica, sus repartos y particiones carecieron de equidad o no fueron exhaustivos y no supieron identificar si las fracciones son mayores, menores o equivalentes entre sí.

Los docentes resolvieron algunos problemas; en uno de ellos tuvieron que identificar cuántas cuentas tenía un collar, el cual se rompió y quedó distribuido en varios lugares. Los profesores dieron dos respuestas diferentes, como se aprecia en la figura 2.

Suelo	$\frac{1}{6}$	=	5 perlas	Suelo	$\frac{1}{6}$	=	6 perlas
Lecho	$\frac{1}{5}$	=	6 perlas	Lecho	$\frac{1}{5}$	=	5 perlas
La joven	$\frac{1}{3}$	=	10 perlas	La joven	$\frac{1}{3}$	=	3 perlas
El amado	$\frac{1}{10}$	=	3 perlas	El amado	$\frac{1}{10}$	=	10 perlas
Cordón	6 perlas	=	$\frac{1}{5}$	Cordón			6 perlas
TOTAL			**30 perlas**	**TOTAL**			**30 perlas**

Figura 2. Respuestas basadas en las estrategias de solución empleadas por los profesores

La respuesta del lado izquierdo reveló que los profesores centrándose en el denominador, lo interpretaron como un natural y sólo sumaron denominadores entre sí. La respuesta de la derecha estuvo basada en una suma de fracciones. Se les cuestionó ¿qué fracción es más grande, 1/3 o 1/6?, entonces ¿por qué en la estrategia 1 hay más perlas en 1/6 que en 1/3? Los profesores argumentaron que de esas dos fracciones (1/6 y 1/3) a esta última le corresponde mayor cantidad de perlas.

Los resultados registrados en el cuestionario aplicado a los estudiantes son: a) Las estrategias carecieron de equidad a consecuencia de la estrategia de partición que emplearon, la cual fue dividir en medios; así obtuvieron para los tercios un medio y dos cuartos, para los sextos dos cuartos y cuatro octavos, b) sus respuestas numéricas no concordaron con su estrategia de partición, c) no lograron identificar dos estrategias de reparto para dar solución a un mismo problema; por lo tanto, no pudieron comparar las partes que se produjeron y observar la equivalencia.

En el "escenario didáctico" El restaurante, los alumnos se colocaron en la mesa que se les indicó y se repartieron pizzas. La dificultad observada se dio al dividir las pizzas en tercios y sextos, sin embargo, entre los integrantes de la mesa dieron diferentes estrategias de partición de modo que el reparto cumpliera con las restricciones semánticas referidas a la equidad y exhaustividad.

Algunas de las estrategias que utilizaron fueron: para dividir la pizza en sextos, partieron en medios y cada uno fue dividido en tres partes iguales, por medio de la estimación; al doblar el papel quedaron las partes yuxtapuestas, lo que les aseguró que las partes eran iguales. Para dividir la pizza en tercios trazaron una "Y" mediante la estimación, asegurándose que las partes fueran iguales.

Para comparar las partes que fueron asignadas a los integrantes de cada mesa, se escribió en el pizarrón el nombre de uno de ellos y la fracción de pizza que les dieron: Jaqueline 1/2, Aarón 2/4, 1/2 o 4/8, Fernanda 3/6, Mariana 2/4 y Ángel 1/3.

Para trabajar la equivalencia se les preguntó ¿quién comió menos pizza? Una respuesta fue "Jaqueline", presumiblemente el niño se dejó guiar por el denominador, como fue el más pequeño, creyó que la fracción era la menor de todas. En la lluvia de ideas que se generó argumentaron "un tercio es menos que un medio", para comprobarlo compararon Jaqueline y Ángel las partes que les tocó de la pizza y concluyeron que el equipo de Ángel comió menos. Cuando se les cuestionó ¿quién comió más? Argumentaron "todos comimos lo mismo, menos los de la mesa de Ángel", las demás fracciones son equivalentes a 1/2. A manera de corroborar su aseveración cada representante de las mesas se paró, mostró sus pedazos de pizza y entre ellos compararon la parte que les correspondió.

Por último, cada equipo redactó un problema; el texto de la mesa 3 fue: Primero fuimos a la pizzería Kevin, Andrea, Stefani, Lesly, Fernanda y Fernanda. Pedimos 2 pizzas y las repartimos en sextos, luego pedimos otra, de nuevo la repartimos en sextos y a todos les tocaron 3/6 a cada uno. Se observó que consideraron el nombre de cada alumno como participante del reparto (Streefland, 1991). La estrategia utilizada fue "Dividen cada unidad en el mismo número de personas" (Olguín, 2009). En el desarrollo del "escenario didáctico" se propició un ambiente de interacción entre compañeros, donde hubo intercambio de ideas, discusión, favoreciendo la reflexión en torno al trabajo que realizaron los alumnos (Perera & Valdemoros, 2009a, 2009b). Utilizaron argumentos para dar sus respuestas, en concordancia con lo planteado por Schwarz, Hershkowitz, y Azmon (2006).

En la primera actividad del escenario virtual, los alumnos tuvieron que repartir una barra de chocolate y 18 galletas a 6 personas. Como el sistema virtual no permitió realizar estrategias de partición, para resolver los problemas utilizaron algoritmos, dividieron las 12 partes –en las que ya estaba dividido el chocolate– entre las seis personas y las 18 galletas entre 6, así pusieron en cada plato dos pedazos de chocolate y tres galletas, dijeron que habían dado 1/6 de cada cosa. Para que dieran una fracción equivalente de la parte de chocolate que asignaron a cada plato, se les pidió la

respuesta con base en la división que ya tenía el chocolate y la forma en que repartieron, al identificar que el chocolate estaba dividido en doceavos indicaron que asignaron dos doceavos, por lo tanto, las fracciones 1/6 y 2/12 son equivalentes.

Para la actividad 2 repartieron dos barras de chocolate a 4 personas las cuales estaban sentadas en dos mesas diferentes, dos personas en cada una. Para realizar el reparto dividieron 12 entre 2, así asignaron 6 partes del chocolate en cada plato y comentaron que a cada uno le dieron 6/12, para argumentar que ese resultado es igual a 1/2 emplearon material concreto, el cual dividieron por la mitad y realizaron el reparto.

En la actividades 3 repartieron dos pasteles a 4 personas sentadas en una mesa y un pastel a 2 personas sentadas en otra mesa, con la finalidad de hacer una comparación entre los integrantes de cada reparto y las partes que les asignaron. Se les hizo la pregunta ¿quién comió más pastel, Paty o Nancy? Algunas respuestas fueron "comieron lo mismo", "porque aquí como nada más era un pastel, dos para ella y dos para él" "aquí eran dos pasteles, entonces dos para ella, dos para él, dos para ella y dos para él". Para cuestionar sus argumentos se les pidió que justificarán por qué comieron lo mismo si en una mesa se repartieron más pasteles, algunos cambiaron su respuesta y dijeron que Nancy comió más pastel, pero después reflexionaron y expresaron "no, entonces estaba bien, las dos comieron lo mismo, porque las dos comieron 2/4", "porque la familia Franco es el doble de los integrantes de los amigos", "puse 2/4 a cada plato o 1/2 porque también es una forma de representarlo".

Nos interesó hacer el contraste entre el "escenario didáctico" y el escenario virtual. Trabajar con el "escenario didáctico" favoreció que los alumnos emplearan diferentes estrategias de partición y reparto. El reparto generó que los alumnos le dieran sentido a la fracción, por lo que al comparar estrategias de reparto y partición, pudieron destacar entre varias fracciones si eran mayores, menores o equivalentes entre sí, además, justificaron sus respuestas dando argumentos (según el planteamiento de Schwarz et al., 2006).

El trabajar con el escenario virtual generó en los alumnos un reto porque no pudieron utilizar las estrategias que emplearon en el "escenario didáctico", dado que incluyó restricciones tecnológicas, como impedir la utilización sus propias estrategias de partición, lo que promovió la adopción de nuevas estrategias (Onrubia, 2005). Los alumnos utilizaron la división para favorecer la anticipación de la cantidad de partes que asignaron a cada personaje; utilizando el algoritmo con sentido y no de manera mecánica. Para verificar si su respuesta era adecuada emplearon otros recursos como trazos a lápiz y papel o manipulando material concreto.

Conclusiones

Los resultados obtenidos nos llevan a afirmar que la introducción del "escenario didáctico" y el escenario virtual, ayudó a la adquisición de nociones necesarias para la comprensión de la fracción. Los alumnos, al identificar si el todo era discreto o continuo, eligieron la estrategia de partición y la de reparto, las cuales tuvieron que cumplir con dos restricciones semánticas, la equidad y exhaustividad. Al comparar los resultados que obtuvieron en sus estrategias de reparto, los niños identificaron entre varias fracciones cuál era la mayor, menor o si eran equivalentes entre sí. Lo cual responde a las preguntas de investigación.

En ambos escenarios se propició la discusión, los estudiantes expresaron sus ideas y pensamientos a través de la negociación de significados, por ello, tienen el potencial para practicar las propuestas argumentativas a través de las interacciones eventualmente dirigidas hacia la construcción del conocimiento, lo que permitió que los alumnos superaran sus dificultades.

A través del análisis de las estrategias se constató que el uso del reparto y la correspondiente aplicación de las fracciones es un instrumento por medio del cual emergen ideas del todo y sus partes, de equidad y exhaustividad, además de diversas ideas intuitivas de orden y nociones de equivalencia; conceptos necesarios e indispensables para comprender el número fraccionario.

Referencias bibliográficas

Ávila, N. & Martínez, L. (2012). *Sistema virtual para la ayuda a la enseñanza de fracciones a nivel primaria*. Tesis de ingeniería no publicada, Escuela Superior de Cómputo del Instituto Politécnico Nacional. Distrito Federal, México.

Goffree, F. (2000). Principios y paradigmas de una educación matemática realista. *Matemáticas y educación: Retos y cambios desde una perspectiva internacional,* 9, 151-167. Barcelona: Graó.

Kamii, C. (1994). *Reinventando la aritmética III*. Madrid: Visor Aprendizaje.

Olguín, E. (2009). *Estrategias empleadas por los niños en la resolución de problemas de reparto con fracciones*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. Distrito Federal, México.

Onrubia, J. (2005). Aprender y enseñar en entornos virtuales: actividad conjunta, ayuda pedagógica y construcción del conocimiento**.** Recuperado el día 30 de septiembre de 2013 de http://www.um.es/ead/red/M2/

Perera, P. & Valdemoros, M. (2007). Propuestas didácticas para la enseñanza de las fracciones en cuarto grado de educación primaria. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.), *Investigación en*

educación matemática XI, 209-218. Tenerife: Edición KA.

Perera, P. & Valdemoros, M. (2009a). Enseñanza experimental de las fracciones en cuarto grado. *Educación Matemática*, 21(1), 29-61.

Perera, P. & Valdemoros, M. (2009b). The Case of Karla in the Experimental Teaching of Fractions. *Proceeding of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 361-368. Thessaloniki: Grecia.

Solé, I. & Coll, C. (1999). Los profesores y la concepción constructivista. En C. Coll, E. Martín, T. Mauri, M. Miras, J. Onrubia, I. Solé y A. Zabala (Eds.), *El constructivismo en el aula* (pp. 7-23). Barcelona: Graó.

Streefland, L. (1991). The course in theory and practice. En L. Streefland (Ed.), *Fractions in realistic Education: A paradigm of developmental research* (pp. 46-134). Nodrich Standard: Kluwer Academic.

Streefland, L. (1993). The design of a mathematics course a theoretical reflection. *Educational Studies in Mathematics*, 25, 109-135.

Schwarz, B., Hershkowitz, R. & Azmon, S. (2006).The role of the teacher in turning claims to arguments. *Proceeding of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 5, 65-67. Prague: Czech Republic.

RECURSOS DIDÁCTICOS DEL Y PARA EL PROFESOR DE MATEMÁTICAS. UNA EXPERIENCIA DE FORMACIÓN CONTINUA EN LA MODALIDAD EN LÍNEA Y A DISTANCIA

Avenilde Romo Vázquez y Jean-Philippe Georget
Instituto Politécnico Nacional. México
Universidad de Caen Francia
avenilderv@yahoo.com.mx, jean-philipe.georget@unicaen.fr

Resumen. Dentro de un programa de maestría en Matemática Educativa en la modalidad en línea y a distancia del Instituto Politécnico Nacional de México, la cual es cursada por profesores de matemáticas en servicio, se realizó un curso cuyo objetivo principal era diseñar recursos didácticos para el profesor de matemáticas. El curso se basó principalmente en el trabajo de Georget (2009), en el cual se presentan herramientas que permiten proponer y evaluar un recurso didáctico. En este reporte se presenta un primer análisis de algunos de los elementos que conformaron dicho curso así como reflexiones sobre su organización didáctica y la manera en que ésta podría modificarse.
Palabras clave: educación a distancia, educación continua, experimental
Abstract. |We have proposed an online mathematics education course to teachers of mathematics at Polytechnic Institute of Mexico. The aim of this course was to design didactic resources from and for teachers of mathematics. The course was based on research developed by Georget (2009). In this work Georget proposes theoretical and methodological tools to design and to evaluate didactical resources. In this communication we presented a first analysis on some elements of this course and some reflections on her didactic organization and the way in which we can to modify it.
Key words: virtual teaching, continous education, experimental

Diseño y objetivo del curso

El objetivo general del curso era el de analizar y producir un recurso didáctico para el profesor de matemáticas, dicho recurso es considerado como la actividad o el conjunto de actividades didácticas que están acompañadas de un análisis de la(s) actividad(es) mismas y de su implementación en el aula de matemáticas. Para lograr este objetivo se consideró tanto la experiencia de los profesores al diseñar y proponer actividades en su práctica cotidiana como las herramientas teóricas y metodológicas propuestas en Georget (2009). El curso consistió de cinco actividades principales: 1) Resolución de un problema y escritura de una guía pedagógica para implementarlo en el aula. 2) Diseño de un recurso didáctico. 3) Lectura de un documento basado en Georget (2009) donde se presentaban las herramientas teóricas y metodológicas para el diseño y evaluación de recursos didácticos. 4) Presentar, a partir de la retroalimentación recibida en la actividad 2 y de la lectura hecha en la actividad 3, un rediseño del recurso didáctico de la actividad dos. 5) Presentar el recurso a un profesor de matemáticas, no participante en el curso, solicitándole una evaluación de dicho recurso, para lo cual se ofreció una guía basada en las herramientas teóricas presentadas en la actividad 3.

Nos parece importante señalar que si bien el curso adoptó el término de recursos didácticos en un sentido muy amplio, en la referencia bibliográfica principal (Georget, 2009) se consideran particularmente las actividades abiertas de búsqueda y prueba. Georget adapta las categorías

utilidad, utilizabilidad (utilisabilité, en francés) y adaptabilidad así como aceptabilidad que habían sido definidas para los EIAH (Entornos informáticos para el aprendizaje humano) para el análisis de este tipo de actividades vistas como recursos didácticos. Asimismo propone diferentes tipos de potenciales, de investigación, didáctico, de debate y de resistencia, para estas actividades.

La organización del curso que hemos descrito brevemente intentaba considerar la experiencia de los participantes del curso y presentar elementos teóricos-metodológicos para el diseño de recursos didácticos. Algunas preguntas que emergieron en el diseño del curso fueron, ¿cómo considerar la experiencia de los participantes del curso, profesores de matemáticas, para el diseño de recursos didácticos? ¿Y cómo presentar las herramientas teóricas-metodológicas de manera que éstas puedan integrarse a la práctica de los participantes?

Recursos del y para el profesor

Uno de los objetivos del curso era reflexionar sobre la actividad del diseño desde el profesor, ¿cómo el profesor diseña estas actividades? Y sobre todo, ¿cómo una actividad, problema, tarea pueden ser transformados en recursos didácticos? ¿Qué tipo de herramientas teóricas y metodológicas favorecen dicha transformación? Para situar esta reflexión consideramos que era necesario enfrentar a los profesores a una misma tarea, que permitiera estudiar y analizar un tipo de recursos, elegimos las actividades de investigación y prueba, debido a que éstas fueron objeto de estudio en Georget (2009). Así la primera actividad consistió en la resolución del problema de las cuerdas: *Se colocan n puntos sobre una circunferencia. ¿Es posible determinar el número de todas las cuerdas que pueden trazarse?* La consigna por si misma no constituye un recurso didáctico, para que lo sea, es necesario describir la naturaleza del problema, los objetivos y su relación con el programa de estudio, la manera en que convendría implementarse, posibles dificultades e incluso proponiendo sugerencias de modificación. Por lo que en la actividad 1 los participantes del curso debían primeramente resolver la actividad y luego proponer una "guía pedagógica" en la que describieran la actividad desde el punto de vista del profesor y su implementación en el aula, especificando la manera de presentarlo a los estudiantes, posibles adaptaciones para su implementación, el trabajo esperado por los estudiantes así como declarar las intervenciones que se considera debe realizar el profesor para que el problema pueda ser resuelto por los estudiantes. Producir una guía pedagógica es una tarea, que no consideramos compleja desde el diseño, aunque no se esperaba que ellos presentaran un análisis profundo de la actividad y de su implementación. Para nuestra sorpresa, muchos de los participantes se centraron en la presentación de la actividad pero desprovista de los elementos que podían convertirla en recurso didáctico, es decir no se detallaban por ejemplo los objetivos pedagógicos ni su relación con el programa de estudios. Nos parece que esto puede explicarse porque al momento de pedir esta

actividad, las herramientas teóricas no se habían presentado y que la consigna de actividad era abierta. Se esperaba que para la segunda actividad, donde claramente se pide el diseño de un recurso didáctico, se esperaba que los participantes eligieran una actividad y la volvieran una primera versión de un recurso didáctico.

Estas dos actividades no fueron enfrentadas como se esperaba, consideramos que es muy probable que el profesor de matemáticas no esté habituado a compartir las actividades y recursos que diseña para su clase. Los objetivos pedagógicos y su relación con el programa pueden parecerle transparentes y no ve la necesidad de explicitarlos. Lo cuestionable es que los participantes del curso, además de ser profesores en servicio, cursan una maestría en Matemática Educativa y esta formación no se ve reflejada en la forma de realizar la actividad 2.

Utilizabilidad y adaptabilidad dos categorías para el análisis de recursos didácticos

En el trabajo de Georget (2009) el objetivo principal es el de generar una comunidad de práctica de profesores de matemáticas, para lograrlo recurre a diferentes aproximaciones teóricas, Comunidad de Práctica (Wenger, 1998), Doble Aproximación (Robert y Rogalsky 2002) y Entornos Informáticos para el Aprendizaje Humano (EIAH, en adelante) Tricot et al. (2003). Es esta última aproximación en la que Georget se sitúa para sugerir tres conceptos y sus interrelaciones, utilizados para la evaluación de los EIAH, para evaluar la ergonomía de los recursos didácticos propuestos por profesores. Para disfundir dichos conceptos entre los participantes del curso, se realizó un documento de síntesis, el cual fue traducido del francés al español, por los autores de este reporte. Presentamos a continuación elementos de este documento de síntesis en los cuales se definen: utilidad, utilizabilidad y adaptabilidad así como aceptabilidad. Un primer elemento considerado es la evaluación de los EIAH, la cual es definida por Tricot, citado en Georget de la siguiente manera:

> La evaluación de la utilidad proviene del dominio general de la pedagogía, de las didácticas y más generalmente de la evaluación tal que ella es habitualmente concebida en la enseñanza y en la formación. Se trata de evaluar si existe una adecuación entre el objetivo del aprendizaje definido por el profesor (o el diseñador) y el logro de ese objetivo. (Tricot, p. 393 citado en Georget, 2009)

Georget se basa en lo anterior para sustentar que la evaluación de un recurso puede ser equiparada con la de un EIAH y señala: "La evaluación de la utilidad de un EIAH, y más ampliamente de un recurso, consiste entonces en evaluar su adecuación en relación a los deseos de los autores o de un documento rector (*cahier des charges*)." (Georget, 2009, p.43). Georget parte de la noción de utilizabilidad de un EIAH definida en Tricot, Plégat-Soutjis, Camps, Amiel,

Lutz y Morcillo (2003):

> [ella] designa la posibilidad de utilizar el EIAH: su manejabilidad. La utilizabilidad de un EIAH se juega a nivel de su interfaz (su coherencia, su legibilidad, la manera en la que representa sus posibles acciones, etc.) de navegación (la coherencia, la simplicidad, la exhaustividad de los desplazamientos posibles, etc.) y su coherencia con el objetivo y escenario didácticos. Ella es también función de la adecuación entre los objetivos del diseñador y los del usuario (Tricot et al. 2003, p. 393, citado en Georget, 2009).

Basado en esta definición muestra la pertinencia de utilizarla en al evaluación de recursos didácticos:

> […] el interés del concepto reside y se trata de evaluar las posibilidades de manipular la herramienta o el recurso por los individuos. Relacionado con un recurso destinado a los profesores, se puede por ejemplo considerar el tiempo necesario para que el profesor lo consulte y pueda evaluar el interés para su práctica. La evaluación de la utilizabilidad comprende también un criterio que nos parece particularmente importante para el estudio de los recursos propuestos para los profesores, este de la adaptabilidad. En el contexto de los sitios Web, puede definirse así: "*la adaptabilidad de un sistema tiene que ver con su capacidad para reaccionar según el contexto, y según las necesidades y preferencias de los usuarios. Dos sub-criterios participan en el criterio Adaptabilidad: Flexibilidad y la toma en cuenta de la experiencia del usuario*" (Bstien et al. 1998 citado en Georget, 2009). Los autores precisan que:
>
> El criterio Flexibilidad tiene que ver con los medios a disposición de los usuarios para personalizar la interfaz con la intención de dar cuenta de sus estrategias o costumbres de trabajo y las exigencias de la tarea. El criterio Flexibilidad corresponde también a las diferentes posibilidades que tienen los usuarios para lograr un objetivo dado. Se trata, en otros términos, de la capacidad de la interfaz para adaptarse a acciones variadas de los usuarios. […] El criterio La toma en cuenta de la experiencia del usuario tiene que ver con los medios utilizados para respetar el nivel de experiencia del usuario (ibid.).

Relacionando este criterio con la hipótesis de coherencia de las prácticas, el autor señala:

> […] es necesario permitir al profesor utilizar los recursos y adaptarlos a su propia práctica y personalizarlos. El uso de las tecnologías informáticas para proponer recursos parece estar adaptado a esto. Por ejemplo, es posible hacer que aparezca en un primer tiempo un recurso reducido, proponer sus desarrollos en su segundo tiempo, permitir la creación de un documento compuesto a partir de otros pre-existentes. Más aún, es necesario que un

> artefacto facilite esta composición. Además, un profesor, desde que él utilice varias veces un recurso podrá desear, por ejemplo, marcar los problemas ya hechos, agregar diversas aclaraciones o notas relacionadas a éstos, agregarle el o los enunciados del problema que él ha utilizado en su clase, agregar sus propios problemas, compartir algunas de sus notas con otros profesores, etc. ¿Puede el profesor saber si tal o tal problema es frecuentemente elegido por los otros? ¿Puede agregarlos a su propio espacio de trabajo con el objetivo de utilizarlos fácilmente? ¿El profesor puede crear fácilmente algunos documentos impresos para él[1] y para sus estudiantes? Para resumir, ¿el recurso puede adaptarse al profesor y a su práctica, puede integrarse fácilmente a su práctica? (Georget, 2009, p.44)
>
> Definimos la aceptabilidad de un EIAH como el valor de la representación mental (actitudes, opiniones, etc. Más o menos positivas) a propósito de un EIAH, de su utilidad y utilizabilidad. Esta representación mental puede ser individual o colectiva. El valor de esta representación condicionará la decisión de utilización del EIAH. La aceptabilidad puede ser sensible a factores muy diversos como la cultura y los valores de los usuarios, sus afectos, sus motivación, la organización social y las prácticas en las cuales se inserta más o menos bien el EIAH (Tricot et al. 2003, citado en Georget, 2009).

Georget señala que la aceptabilidad permite reconocer si un individuo se interesa en un recurso desde el punto de vista de su utilidad y su utilizabilidad. Dos evaluaciones relacionadas a los EIAH son propuestas por Tricot, por inspección y empírica, la primera a cargo de un experto y la segunda por el usuario, éstas se reconocen como complementarias. Georget señala que estas evaluaciones pueden tener lugar en la Didáctica de las matemáticas donde la evaluación por inspección puede corresponderse a lo que se conoce como análisis a priori. Este análisis se efectuaría sobre el recurso antes de aplicarlo a un grupo, reconociendo el nivel al que se desea aplicar, los objetivos pedagógicos que persigue, los tipos de tareas que se proponen, las técnicas de las que pueden disponer los estudiantes para resolverlas, algunas que puedan ser generadas por ellos a partir del recurso mismo. Es decir, validar la pertinencia del recurso didáctico para ser implementado en el aula. Mientras que la evaluación empírica tendría que ver más con un análisis a posteriori. Es decir, una vez que el recurso ya se ha implementado, se analiza cómo fue enfrentado por los estudiantes, cuáles fueron los objetivos logrados y cuáles no. Se reconocen sus potencialidades y límites a partir de la implementación. Estos dos tipos de análisis son complementarios y permiten evaluar el diseño e implementación de un recurso.

Consideramos que estos conceptos teóricos, utilidad, utilizabilidad, adaptabilidad y aceptabilidad pueden volverse operacionales para la evaluación de recursos por parte de los profesores. En la

actividad 4 del curso se pidió que se presentará nuevamente el recurso diseñado en la actividad 2 pero esta vez su descripción debería aparecer en términos de los conceptos antes presentados. A manera de ejemplo, presentamos a continuación uno de los recursos propuestos por uno de los participantes del curso.

Ejemplo de un recurso propuesto por participante

En la actividad 4 se incorporan las categorías de análisis utilidad, utilizabilidad, adaptabilidad y los diferentes tipos de potenciales, aunque éstos aparecen más discretamente. Presentamos a continuación, a manera de ejemplo, una de las actividades propuestas por uno de los participantes del curso:

> Se construye con palillos secuencias de triángulos equiláteros, la longitud de cada lado corresponde a la longitud de un palillo, como muestra la siguiente figura:

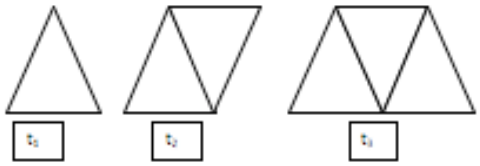


Figura 1. Figura que presenta el profesor para ilustrar su consigna

a) ¿Cuántos palillos necesitamos para construir una secuencia de n triángulos equiláteros?

b) Si en lugar de construir secuencias de triángulos equiláteros, construyéramos cuadrados; ¿puedes deducir cuántos palillos debemos utilizar para construir una secuencia de n cuadrados?

c) ¿Puedes deducir cuántos palillos se utilizarán para construir secuencias similares pero de n pentágonos? ¿Y de n hexágonos?

d) A partir de las secciones anteriores, ¿es posible deducir alguna generalidad?, ¿cuál?

Notemos que la actividad propuesta es abierta, vista así podría decirse que queda bajo la responsabilidad del profesor que la implementa en el aula. Sin embargo, la propuesta va acompañada por objetivos pedagógicos:

- Promover la búsqueda de generalidades a partir de secuencias de polígonos regulares.
- Que los estudiantes identifiquen la constante de una sucesión aritmética.
- Que los estudiantes logren encontrar la expresión de sucesiones aritméticas.
- Propiciar instancias de trabajo grupal y de debate, así como también de argumentaciones y de refutaciones ante los resultados logrados.

Así como por una evaluación del recurso utilizando las categorías propuestas por Georget (2009), como se muestra a continuación:

- Considero que el recurso presentado es útil, puesto que los objetivos pedagógicos planteados pueden ser logrados al implementar esta actividad en el aula. Los estudiantes a partir de la búsqueda, discusión con sus pares y la manipulación de recursos materiales (programa informático, palillos o el esbozo de figuras con papel y lápiz) van a ser capaces de encontrar regularidades que les van a guiar para identificar la constante de la sucesión aritmética, construir la su expresión e incluso descubrir las generalizaciones que se encuentran implícitas en la actividad. A partir de las consideraciones explicitadas el docente puede hacer uso del recurso y conducir la clase de forma tal que los objetivos pedagógicos puedan ser logrados en su totalidad.
- El recurso es utilizable, puesto que el docente puede adaptar su implementación con recursos materiales que considere pertinente, la consigna de la actividad es clara, entendible, es posible modificar alguna parte de la consigna según el criterio del docente para adaptarlos a su práctica.
- Es adaptable a la modalidad del trabajo que tenga el docente en clase (más allá de que se sugiera organizar al grupo de estudiantes en subgrupos de trabajo, es posible que la actividad sea propuesta para trabajarla de manera individual). Esta actividad permite que los estudiantes la adapten a diversas modalidades de búsqueda, ya sea haciendo uso de algún programa informático de geometría, como la manipulación con materiales concretos como pueden ser palillos, varillas, etc. así como también haciendo uso de la construcción de secuencias poligonales con papel y lápiz.

Notemos que las categorías son utilizadas para describir el recurso didáctico, aunque éstas pueden profundizarse, ya aparecen elementos que muestran la relación entre los objetivos de la actividad y su relación con el programa. Se analiza la viabilidad de implementación, la cual está centrada en los recursos materiales, "*el milieu*" que posibilitan su realización. La organización del grupo se privilegia contra la determinación de variables didácticas que orienten la implementación. Por ejemplo, no se precisa la cantidad de casos que podrán ser explorados para iniciar la generalización ni tampoco cómo se espera que ésta se construya. Sin embargo, consideramos que esta actividad del curso permite iniciar la incorporación de categorías propuestas para la evaluación del recurso que será contrastada por la evaluación de un par. De manera general podemos decir que las herramientas presentadas permiten en un trabajo de academia o de comunidad de práctica, generar recursos didácticos del y para el profesor. Algunas constataciones que un primer análisis del curso nos

permite generar son las siguientes:

- Poco uso de conocimientos didácticos abordados en cursos anteriores.
- Una descripción pobre o nula de los contextos locales así como referencias al programa.
- Reacciones muy pobres hacia los resultados de investigación presentados.

Consideramos que los trabajos presentados en este curso requieren de un análisis profundo para poder evaluar la organización didáctica del curso pero sobre todo para alimentar la reflexión sobre el diseño de recursos didácticos de y para profesores de matemáticas.

Referencias bibliográficas

Georget, J-P., y Labrousse, B. (2012). Expérimentation d'une ressource pour une situation de recherche et de preuve entre pairs. preuve entre pairs. En J-L. Dorier y S. Coutat (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social: enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (pp. 838–848). Ginebra: Universidad de Ginebra 3

Georget J-P. (2010). Apport de l'ergonomie des EIAH pour l'analyse et la conception de ressources. En A. Kuzniak y M. Sokhna (Eds.) *Revue Internationale Francophone. Numéro spécial 2010. Actes du Colloque Espace Mathématique Francophone. Enseignement des mathématiques et développement : enjeux de société et de formation* (pp.843-852) Dakar: Université Cheikh Anta Diop de Dakar Dakar

Georget, JP (2009). *Activités de recherche et de preuve entre pairs à l'école élémentaire : perspectives ouvertes par les communautés de pratique d'enseignants*. Francia: IREM

Molina, G., Romo, A y Rosas, A. (2011). Una formación para el profesor de matemáticas en el Programa de Matemática Educativa del IPN. En G. Buendía (Ed.) *Reflexión e investigación en matemática educativa* (pp.31-42). Mexico: Lectorum.

Robert, A. y Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et de la technologie 2(4)*, 505–528.

Tricot, A., Plégat-Soutjis, F., Camps, J.-F., Amiel, A., Lutz, G., & Morcillo, A. (2003). Utilité, utilisabilité, acceptabilité : interpréter les relations entre trois dimensions de l'évaluation des EIAH. En C. Desmoulins, P. Marquet & D. Bouhineau (Eds). *Environnements informatiques pour l'apprentissage humain* (pp. 391-402). Paris: ATIEF / INRP.

Wenger, E. (1998). *Communities of Practice, Learning, Meaning and Identity*. Cambridge: Univer sity Press.

INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO DE DERIVADA DE UNA FUNCIÓN REAL CON APOYO DE LAS TECNOLOGÍAS DIGITALES

Armando Cuevas V., Arturo Rodríguez E. y Oscar González O.
Centro de investigación y estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV-IPN). México
ccuevas@cinvestav.mx; roearturo@hotmail.com; oscargoem@gmail.com

Resumen. Este artículo presenta una propuesta para introducir el concepto de derivada de una función real en un primer curso de cálculo diferencial a nivel superior. Para el desarrollo de esta propuesta se han tomado elementos del desarrollo histórico conceptual del cálculo, la aplicación de una ingeniería didáctica en particular y de manera importante el empleo de la tecnología digital. Los resultados obtenidos son alentadores, porque se logró que la mayoría de los estudiantes alcanzaron con éxito un grado de comprensión conceptual y operativa del concepto de derivada de una función real. Lo anterior fue uno de los factores que condujo a elevar sustancialmente el índice de aprobación, ayudando con esto a solventar algunos de los problemas de deserción en la universidad donde se experimentó, pero sobre todo a una mejor comprensión del concepto de derivada de una función real por parte de los estudiantes.
Palabras clave: función real, derivada, modelación matemática
Abstract. We present to you an innovative proposal to conduct a traditional calculus course, where explicitly applies to the exposure of mathematical facts history, educational and digital technology. The results are encouraging, not only because it could overcome deficiencies in prerequisites but also because it was possible that a large number of students reached with a significant degree of success and acceptable understanding concepts of differential calculus. This led to a substantial increase passing rates, thereby solving many economic problems of administrative college where he experienced, but above all to a better understanding of mathematical concepts by students.
Key words: real functions, derivative, mathematical modeling

Introducción

Uno de los cursos con mayor índice de reprobación, alrededor del 70%, en las escuelas de ingeniería en México, es el primer curso de cálculo diferencial. Este problema, conlleva a problemas de acumulación de estudiantes en primer semestre y eventualmente contribuye a la deserción escolar. Diversos reportes de investigación en la comunidad académica internacional desde hace muchos años (Habre & Abboud, 2006), coinciden con los resultados que ofrece la (ANUIES, 2009) y con publicaciones realizadas por investigadores en matemática educativa; (Cuevas, Moreno & Pluvinage, 2005; Martínez, 2005), et al. Éste problema conduce a una alta demanda en carreras de poco contenido matemático

Problemática de la enseñanza – Aprendizaje del Cálculo

En este breve estudio, algunas investigaciones reportan problemas como: una polaridad en su enseñanza; en un extremo se realiza estrictamente operativa, y en el otro una enseñanza con un gran contenido formal (Martínez, 2005 y Zepeda, 2010). Otro de los problemas detectados es la obsolescencia de los programas de estudio, así como una inversión histórica, en sus contenidos, al desarrollo conceptual del cálculo diferencial (Grabiner, 1983) y la mayoría de programas y textos

del cálculo exhiben poco o nulo uso de las tecnologías digitales. En la mayoría de los textos analizados se nota la ausencia de una planificación didáctica. (Ímaz & Moreno, 2010).

Enseñanza estrictamente operativa.

En este tipo de enseñanza se plantean esquemas y modelos algorítmicos de resolución en donde se busca que el estudiante reproduzca los patrones operativos de acuerdo a los esquemas en que fue ilustrado, cabe anotar que en esta exposición el significado de los conceptos queda ausente y la aplicación de la derivada se reduce a transformar expresiones algebraicas mediante las reglas de derivada (Cuevas, Moreno & Pluvinage, 2005 y Tall, 1990). Este tipo de enseñanza se realiza con frecuencia en escuelas de nivel medio superior y en algunas de nivel superior con especialidad distinta a matemáticas. La enseñanza consiste usualmente en aprender de memoria un extenso formulario extenso y algunos algoritmos como el criterio de la segunda derivada para máximos y mínimos para aplicar de manera inmediata alguna de las fórmulas o criterios enseñados. De nuevo, en esta forma tradicional de enseñanza el significado de los conceptos queda ausente y cualquier problema que no sea del tipo enseñado y requiera del significado de derivada o reflexión de los criterios, causa desconcierto y frustración.

Enseñanza Formal

Este tipo de enseñanza procede en forma axiomática, iniciando con la construcción de los números reales, para luego establecer definiciones formales como el de función real de variable real, sucesión, series y límites, para culminar con la definición de derivada como límite. Usualmente los diversos conceptos y definiciones aparecen con todo el rigor matemático, lo cual representa un rompimiento con la forma tradicional de estudiar la matemática en los estudios anteriores. Los contextos se muestran ausentes y por la propia complejidad de la representación lógica-formal el significado de los conceptos también queda ausente así como las diversas aplicaciones (Cuevas & Pluvinage, 2003; Aebli, 1958; Sfard, 1991 e Ímaz & Moreno, 2010).

Revisión de los programas de estudio (obsoletos)

Se identificó que los planes y programas de estudio de la asignatura de Cálculo existentes en escuelas de ingeniería de universidades como: Universidad Autónoma de estado de México (UAEM Valle de Chalco), el Instituto Politécnico Nacional (IPN) y la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM). No han sido modificados en los últimos 30 años. Lo que se puede constatar en las siguientes direcciones electrónicas:

http://www.esimez.ipn.mx/OfertaEducativa/Documents/ingenieria_automotriz/pe_1er_semestre/01-calculo-diferencia-integral.pdf

http://www.bunam.unam.mx/mapaCurri/calculoDiferencialIntegral.pdf

http://www.archivos.ujat.mx/dacb/programas_sinteticos/matematicas/area_general/F0022_calculodiferencial.pdf

http://denms.uaemex.mx/programas/4calculodiferencial.pdf

http://uvmeconomia.blogspot.mx/2010/03/programa-de-estudio-de-calculo.html

http://www.sites.upiicsa.ipn.mx/portalweb/OfertaEducativa/PlanesEstudio/IN/01/2/2_(FMCD)_CALCULO_DIFERENCIAL_E_INTEGRAL.pdf

Inversión histórica del desarrollo histórico del cálculo.

Otro de los problemas detectados es la manera en que los planes y programas de estudio invierten el desarrollo histórico del cálculo. Es decir, en casi todos los programas de estudio, se inicia con el estudio de los números reales, función real, límites y por último aplicaciones de la derivada. Cuando en el desarrollo histórico conceptual aparecen de forma invertida (Ímaz & Moreno, 2010).En primer lugar la derivada se aplicó para resolver problemas, después se descubrió en forma independiente por Newton y Leibniz, en su tercera etapa se exploró y desarrolló y sólo entonces, se definió. (Grabiner, 1983).

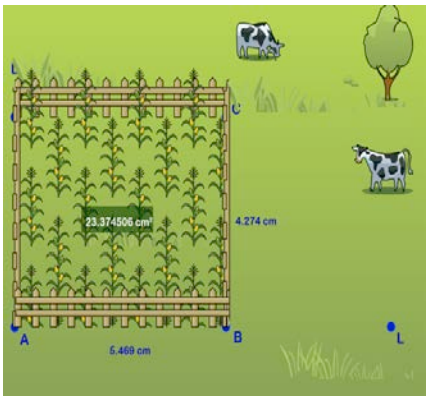
El uso casi nulo de tecnologías digitales.

Problema porque los docentes, emplean poco la tecnología en la enseñanza del concepto de derivada o conceptos relacionados con el cálculo, aun cuando existen una amplia gama de software que deriva e integra numérica y simbólicamente, de uso libre en le red. O bien para realizar una transposición histórica mediante un software de uso libre (Vivier, 2010). Lo cual nos lleva a plantear la siguiente pregunta ¿Cómo convertir a la tecnología en una herramienta cognitiva? Así como la falta de planeación didáctica, es decir, el planteamiento de actividades para los estudiantes y profesores para el desarrollo de una mejor comprensión del concepto de derivada de una función real.

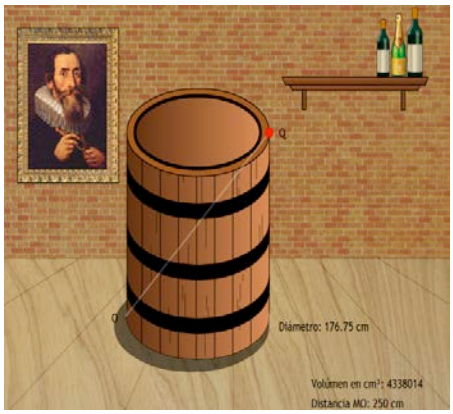
Propuesta

Después dela revisión de los planes y programas de estudio vigente en las Instituciones educativas en el nivel superior (UNAM, IPN, UAM, UAEM, UVM) se propone una reestructuración curricular tomando como base el estudio del desarrollo histórico del cálculo. Donde se plantean actividades que desarrollan como un prerrequisito el pensamiento funcional el cual se convierte en un objeto que será la piedra angular del curso, (Cuevas & Mejía, 2003; Cuevas, Moreno & Pluvinage, 2005 y Riestra & Aguilar, 2009). El presente trabajo se desarrolló tomando como referencia el marco

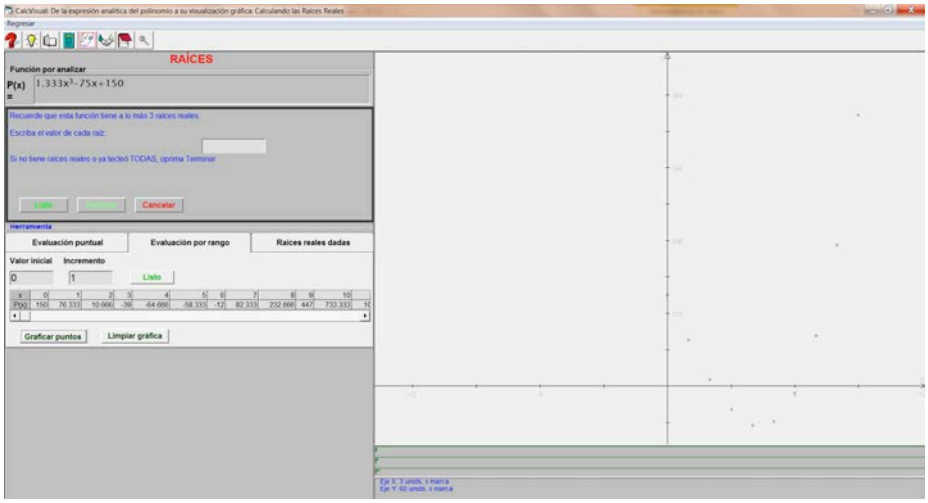
didáctico propuesto por (Cuevas & Pluvinage, 2003) que consiste en una serie de recomendaciones para introducir un concepto matemático. Una de las características de este marco consiste en proponer proyectos de acción práctica en donde el estudiante siempre se encuentre realizando las actividades. Con el uso de las tecnologías digitales (como una herramienta cognitiva de apoyo) permite instrumentar de manera eficiente buenos planteamientos didácticos para favorecer una mejor comprensión del concepto de derivada de una función real en el estudiante. Utilizando el software CalcVisual y los Escenarios Didácticos Virtuales Interactivos (EDVI), Isoperímetro y Barril de Kepler como proyectos de acción práctica ver figura siguiente.



Escenario Didáctico Virtual Interactivo Isoperímetro.



Escenario Didáctico Virtual Interactivo Barril de Kepler.



Sistema tutorial CalcVisual

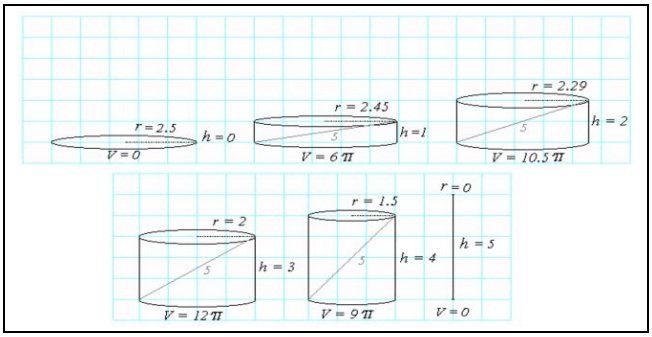
El Software CalcVisual, de uso libre con permiso, permite al estudiante poder transitar a través de los distintos de representación semiótica (numérica, gráfica, simbólica, etc.), (Duval, 1998). Con la integración de los (EDVI) y CalcVisual, el sujeto del aprendizaje es el estudiante y el profesor solo recrea el conocimiento en un proceso educativo basado en la interacción didáctico-comunicativa apoyada en la tecnología digital.

Descripción de la experiencia.

La propuesta se ha implementado desde el año 2007, en el Centro Universitario de la Universidad Autónoma del Estado de México campus Chalco (UAEM, Valle de Chalco), en alumnos de primer semestre de la Licenciatura en Ingeniería en computación, con grupos de 50 alumnos o más.

Se han instrumentado una serie de tecnologías digitales Escenarios Didácticos Virtuales Interactivos (EDVI) desarrollados por Cuevas y Pluvinage, con la idea de que ayuden a promover y desarrollar una comprensión significativa del concepto de derivada de una función real en el curso de cálculo diferencial. Para introducir el concepto de derivada de una función real se propone como proyecto de acción práctica iniciar con el EDVI Isoperímetro que aparece por primera vez de manera implícita en los problemas isoperimétricos de máximos y mínimos de Fermat (Riestra & Aguilar, 2009). Dichos problemas se modelan con funciones algebraicas. De forma congruente con el desarrollo histórico de la derivada (Grabiner, 1983), no recurre previamente, al introducir la derivada, al tradicional límite del cociente diferencial (ya sea de la manera intuitiva o de la rigurosa ε - δ). En su lugar, al abordar problemas de máximos y mínimos, se desarrollan diferencias de la función en términos de incrementos finitos de la variable independiente y se comparan potencias de diferentes órdenes de dichos incrementos, despreciando las de orden superior con respecto a las de orden inferior, cuando se toman incrementos "realmente" muy pequeños. La derivada aparece de manera natural en estos desarrollos como el coeficiente diferencial. Lo cual el estudiante puede apreciar de manera clara al manipular el EDVI Isoperímetro, guiado por la secuencia didáctica donde se recrea de manera clara la aparición del concepto de derivada de una función real. Ejemplo de Fermat: Dado un segmento, dividirlo en dos partes de tal forma que el producto de las partes sea máximo.

Posteriormente se propone que el estudiante manipule el (EDVI) Barril de Kepler y de esta forma puedan percibir la variación, al ver los cambios de la longitud de la altura, producen cambios de volumen. Como se puede apreciar en la figura.



Los escenarios (EDVI) introducen conceptos complejos desde el punto de vista cognitivo e importantes para el desarrollo del curso. Para introducir la derivada de una función real se modela, con el (EDVI) Isoperímetro que escenifica el área máxima que se puede obtener dado un segmento, dividirlo en dos partes de tal forma que el producto de las partes sea máximo y con el (EDVI) Barril de Kepler escenifica el volumen máximo de un barril (cilíndrico) al hacer variar su altura. Al ir manipulando ambos escenarios, el estudiante puede visualizar que varía y que permanece constante en los experimento; de tal forma que mediante la interacción con los EDVI y la conducción a través de cuestionarios el estudiante llega a desarrollar gradualmente la noción intuitiva y la teoría matemática involucrada en el concepto de derivada de una función real, sin recurrir al concepto de límite.

Posteriormente, para desarrollar una destreza operativa en el cálculo de derivada de una función real se proporciona el sistema CalcVisual. El concepto de derivada de una función real resulta fundamental para el desarrollo de conceptos como: puntos críticos, concavidad y rango de una función y el límite.

En las actividades de optimización planteadas en el EDVI Isoperímetro que modela un problema histórico propuesto por Fermat (determinar el área máxima de una superficie rectangular) y el EDVI Barril de Kepler, también modela un problema histórico planteado por Kepler (determinar el volumen máximo que puede contener un barril de Vino). Con ambas actividades se introduce la derivada de una función real. En el siguiente cuadro se pueden apreciar parte del planteamiento de dichas actividades.

Instrucciones: al mover el punto B del área del Terreno (rectángulo) observe lo que sucede y responda a las siguientes preguntas marcando con una "x" el cuadrito de tu respuesta.

1. Mueve el punto B:

a) ¿Varía o cambia el perímetro del Terreno (rectángulo)? ☐ Sí ☐ No

b) ¿Varía o cambia la altura del Terreno (rectángulo)? ☐ Sí ☐ No

c) ¿Varía o cambia la base del Terreno (rectángulo)? ☐ Sí ☐ No

d) ¿Varía o cambia el área del Terreno (rectángulo)? ☐ Sí ☐ No

e) ¿Varía o cambia la longitud de la cuerda? ☐ Sí ☐ No

f) ¿Varía algún otro elemento, que no fuera incluido? Di cual y qué pasa con él:

_____

_____

g) ¿Hasta qué valor puede aumentar la base del Terreno (rectángulo)? (en m) _____

h) ¿Hasta qué valor puede disminuir la base del Terreno (rectángulo)? (en m) _____

i) ¿Cuál es la altura máxima que puede alcanzar la base del Terreno (rectángulo)? _____

j) ¿Cuál es la altura mínima que puede alcanzar la base del Terreno (rectángulo)? _____

k) ¿Cuál es el área del Terreno (rectángulo) cuando su base es la máxima? _____

l) ¿Cuál es el área del Terreno (rectángulo) cuando su base es la mínima? _____

m) ¿Cuál es aproximadamente el área máxima del Terreno (rectángulo)? _____

2. Cuando mueves el punto B, que es lo que observas que está fijo o permanece constante:

a) El perímetro del Terreno (rectángulo) ☐Sí ☐ No

b) La altura del Terreno (rectángulo) ☐Sí ☐ No

c) La base del Terreno (rectángulo) ☐Sí ☐ No

d) El área del Terreno (rectángulo) ☐Sí ☐ No

e) La longitud de la cuerda ☐Sí ☐ No

a) Algún otro.
Descríbelo_____
_____

3. En el Terreno (rectángulo)con una longitud de la cuerda L=10 m. y el punto B con una base inicial de 0 m, mueve el punto B hasta tener una altura de 10 m y llena los cuadros vacíos de la siguiente tabla:

Longitud de la cuerda L =10 m.			
Base del Terreno (rectángulo)	**Altura del Terreno (rectángulo)**	**El perímetro del Terreno (rectángulo)**	**El área del Terreno (rectángulo)**
0 m	m	m	m^2
1 m	m	m	m^2
2 m	m	m	m^2
3 m	m	m	m^2
4 m	m	m	m^2
5 m	m	m	m^2
6 m	m	m	m^2
7 m	m	m	m^2
8 m	m	m	m^2
9 m	m	m	m^2
10 m	m	m	m^2

Conclusiones

Al inicio del curso de cálculo se aplica un pre test donde los datos obtenidos muestran que los estudiantes de nuevo ingreso de la carrera de Ingeniería en Computación; presentan graves

deficiencias en conceptos básicos aritméticos y algebraicos, además de no poseer un pensamiento funcional.

Después de la aplicación de este experimento apoyado en las tecnologías digitales durante el curso de cálculo, se observó que la mayoría de los estudiantes de manera intuitiva el concepto de derivada de una función real, que resulta ser piedra angular para poder comprender conceptos como: monotonía y resolver problemas de optimización (máximos y mínimos) de una función real. Con ello, se logró reducir el porcentaje de alumnos reprobados de un 70% a un 25%, sin modificar los sistemas de evaluación.

La introducción del concepto de derivada de una función real así como el desarrollo intuitivo del mismo siguiendo una ingeniería didáctica en particular nos obliga a considerar todas las representaciones como importantes y a no priorizar una de ellas en detrimento de las otras. En los problemas en contexto el desarrollo del concepto de derivada de una función real juega un papel primordial para poder entender la tarea solicitada y que sea el estudiante el que inicie cualquier acción hacia la resolución de esta. Lo que intentamos en el aula no es imponer notaciones y definiciones de conceptos matemáticos, la introducción del concepto de derivada de una función real es difícil. Son tantos los conceptos que entran en juego que esto nos obliga a ser muy cuidadosos. Y con respecto al uso de la tecnología digital fue posible modelar y analizar de manera dinámica el concepto de derivada de una función real, siguiendo el desarrollo histórico de la derivada.

Referencias bibliográficas

Aebli, H. (1958). *Una didáctica fundada en la psicología de Jean Piaget.* Buenos Aires: Kapelusz.

Anuies, (2009) Asociación Nacional de Universidades e Instituciones de Educación Superior. http://www.anuies.mx/

Cuevas, C., & Mejía, H. (2003). *Cálculo Visual.* México: Oxford.

Cuevas, C., & Pluvinage, F. (2003). Les projets d'action practique, éléments d'une ingénierie d'ensignement des mathématics. *Annales de didactique et de sciences cognitives*.

Cuevas, C., Moreno, S., & Pluvinage, F. (2005). Una Experiencia de Enseñanza del Objeto Función. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 10*, 177-208.

Duval, R. (1998). Registros de Representación Semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. *Investigaciones en Matemática Educativa II*, 173-201.

Grabiner, J. V. (1983). The Changing Concept of Change: The Derivative from Fermat to Weierstrass. *Mathematics Magazine, 56*(4), 195-206.

Habre, S., & Abboud, M. (2006). Students' conceptual understanding of a function and its derivative in an experimental calculus course. *Journal of Mathematics Behavior V, 25*, 57-72.

Ímaz, C., & Moreno, L. E. (2010). *La génesis y la enseñanza del cálculo las trampas del rigor.* México: Trillas.

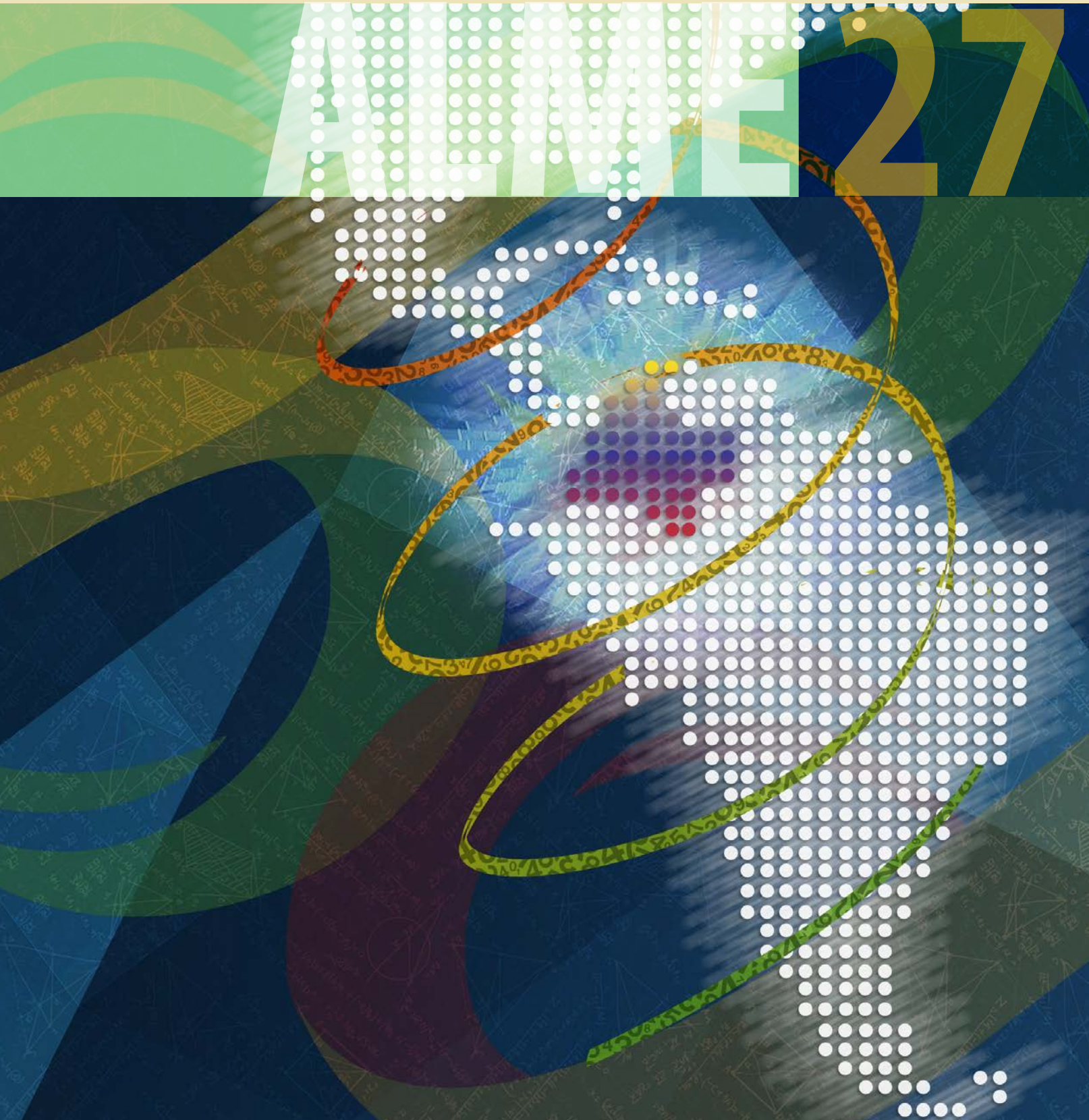
Martínez, M. (2005). Diseño de un Prototipo de Entorno Computacional para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas para un Curso de Cálculo Diferencial a Nivel Superior. *Tesis Doctoral*.

Riestra, J., & Aguilar, A. (2009). Una introducción algebraica y dinámica al concepto de derivada. *El Cálculo y su Enseñanza, 1*, 1-12.

Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematics Conceptions: Reflections of Processes and Objects as Different Sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1-36.

Tall, D. (1990). A Versatile Approach to Calculus and Numerical Methods. *Teaching Mathematics and its Applications, 9*(3), 124-131.

Vivier, L. (2010). La noción de tangente en la educación media superior. *El cálculo y su enseñanza, 2*, 5-48

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

ALME 27